Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Самарский государственный технический университет»

На правах рукописи

АБИШЕВА ЛЮБОВЬ СЕРГЕЕВНА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА И ТЕРМОУПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С УЧЁТОМ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
кандидат технических наук,
доцент И.В. Кудинов

Самара 2017

Содержание

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Математическое моделирование переноса тепла, массы, импульса представляется одним из компонентов научных и прикладных исследований для многих областей промышленности. В связи с интенсификацией производственных процессов возникает необходимость выполнения исследований для сверхмалых значений временно́й переменной, а также для быстропротекающих процессов. Связанные с параболическими уравнениями математические модели, основанные на бесконечной скорости протекания процессов, в указанных пространственно – временны́х интервалах неадекватно описывают реальные физические процессы. Поэтому разработка новых методов моделирования, учитывающих конечную скорость передачи потенциалов исследуемых процессов переноса, а также с учётом нелинейности реальных процессов, представляет актуальную проблему.

Математические проблемы переноса, основанные на конвективном теплообмене, даже с учётом многочисленных допущений, крайне сложны. Для их исследования могут быть применены лишь численные методы с использованием современной высокопроизводительной компьютерной техники. В связи с чем, перспективным представляется направление исследований, основанное на применении метода аналогий, когда исследование какого – либо процесса выполняется на объектах совсем другой природы, описываемых одинаковыми дифференциальными уравнениями. К числу таких методов относится используемый в диссертации метод электрогидравлической аналогии.

Во многих случаях решения температурных и гидравлических задач являются промежуточной стадией решения других задач. К их числу относятся обратные краевые задачи, задачи термоупругости, задачи автоматизированного управления и др. Применительно к решению обратных задач к числу особо актуальных относится проблема идентификации переменных от времени коэффициентов теплообмена в связи с отсутствием в настоящее время эмпирических критериальных уравнений для их определения.

В связи с чем, тема работы, связанной с решением указанных проблем является актуальной.

Целью работы является разработка математических методов моделирования передачи тепла, импульса, массы, при учёте конечных скоростей распространения исследуемых потенциалов, а также методов моделирования, связанных с применением электрогидравлической аналогии.

Задачи, решаемые в диссертации

1. Разработка математических методов моделирования теплопереноса для пластины с симметричными краевыми условиями 1-го рода при учёте релаксационных явлений.

2. Разработка аналитического метода исследования гиперболического уравнения теплопроводности для сверхмалых значений времени, позволяющего путем решения обратной задачи теплопроводности идентифицировать коэффициенты релаксации.

3. Разработка приближенного аналитического метода исследования задач теплопроводности при переменных во времени коэффициентах теплоотдачи с учетом конечной скорости распределения теплоты.

4. Исследование математической и компьютерной модели теплосети на основе электрогидравлической аналогии.

5. Идентификация изменяющихся во времени коэффициентов теплообмена и расчёт температурных полей и термических напряжений барабанов паровых котлов тепловой электрической станции.

Новые научные результаты

1. Разработан математический метод моделирования теплопереноса для пластины с симметричными граничными условиями 1-го рода с учетом релаксационных явлений процесса.

2. Разработан приближенный аналитический метод исследования гиперболических уравнений теплопроводности, позволяющий находить решения для сверхмалых значений времени.

3. Разработан приближенный аналитический метод получения решений краевых задач теплопереноса с изменяющимися от времени коэффициентами теплообмена, основанный на допущении конечной скорости изменения теплоты.

4. Проведено комплексное исследование компьютерной модели теплосети, позволяющее выполнить оценку текущего состояния теплосети, а также разработать рекомендации по её реконструкции и построению новых участков.

На защиту выносятся

1. Математический метод моделирования теплопереноса с учётом релаксационных явлений, описывающий распределение температуры в форме волнового процесса при конечной скорости изменения теплоты и точный аналитический метод исследования гиперболических уравнений теплопереноса, позволяющий оценивать температурное состояние конструкции в области сверхмалых величин времени.

2. Приближенный аналитический метод исследования задач теплообмена с переменными от времени коэффициентами теплообмена, основанный на допущении конечной скорости перемещения фронта тепловой волны, и на введении дополнительной функции и дополнительных краевых условий.

3. Комплексное исследование компьютерной модели теплосети, позволяющей определять распределение давлений, скоростей, расходов, потерь напора, затрат энергии на перемещение среды в сложной многокольцевой гидравлической системе.

4. Результаты идентификации изменяющихся от времени коэффициентов теплообмена и расчёты температурных полей и термических напряжений в отверстиях барабанов котлов.

Достоверность результатов диссертации подтверждается соответствием предложенных теоретических результатов физическим процессам, протекающим в конкретных устройствах, сравнением полученных результатов с точными решениями, с результатами численных и экспериментальных исследований.

Практическая значимость

Разработанная модель теплосети города Самара, питаемой от Самарской ТЭЦ, представлена комплексом программ, позволяющих выполнять мониторинг теплосети с расчётом скоростей, давлений, расходов, затрат энергии на привод насосов и проч. Модель позволяет определять основные причины недостаточного располагаемого перепада давлений, а также повышенных давлений в обратном трубопроводе. На основе проведенных исследований даны рекомендации по устранению имеющихся проблем, а также по разработке планов реконструкции и создания новых участков теплосети.

Связь работы с государственными программами и планами научных исследований.

Исследования выполнялись в соответствии с Аналитической ведомственной целевой программой «Развитие научного потенциала высшей школы» по тематическому плану НИР №551/02 «Разработка нового направления получения аналитических решений краевых задач математической физики на основе определения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий», а также при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания ФГБОУ ВО «СамГТУ» (код проекта: 1273).

Внедрение результатов работы.

Результаты работы были использованы при выполнении энергоаудита СамГТУ (с 01.02.2011 по 31.12.2012 гг.), при выполнении договорных работ с ПАО "Т Плюс", связанных с внедрением компьютерных моделей теплосетей. Экономический эффект от внедрения, подтвержденный соответствующим актом, приведенным в приложениях диссертации, составляет 1,2 миллиона рублей.

Апробация работы.

Основные выводы диссертации были апробированы на:

− Шестой российской национальной конференции по теплообмену «Теплопроводность, теплоизоляция». Москва. 2014 г.;

− Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи". Самара, 2014 г., 2016 г.;

− Международной научно − технической конференции "Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании". Ульяновск. 2014 г., 2016 г.;

− Четвертой международной научно − технической конференции "Математическая физика и ее приложения". Самара. 2014 г.;

− Первой международной научной конференции молодых учёных. Новосибирск. 2014 г.;

− Объединенном научно-техническом семинаре Теплоэнергетического факультета Самарского государственного технического университета. Самара. 2016 г.

Публикации

Основное содержание работы опубликовано в 17 статьях, из них 5 в рецензируемых изданиях по перечню ВАК.

Личный вклад автора

В публикациях [1−8, 4] автор участвовал в постановке задач, в выполнении расчетов. В публикациях [9 – 14] в равной степени с соавторами автор выполнял постановки задач, разрабатывал методы их решения и анализировал результаты.

Структура и объем работы

Диссертация включает введение, четыре главы, выводы, список литературы, приложения; изложена на 121 странице (не считая приложений), содержит 39 рисунков. Список литературы включает 154 наименования.

Глава 1. Обзор исследований по направлению темы диссертации

Для исследования температуры конструкций применяются: экспериментальные методы; методы физического моделирования – на основе метода аналогий; математическое моделирование, которое включает этапы [13]:

1) Создание математической модели реального физического процесса, включающей уравнения и краевые условия; 2) выбор оптимального метода решения; 3) получение аналитического решения и проведение всесторонних исследований; 4) анализ результатов с оценкой точности решения.

Следовательно, математическое моделирование – это комплекс проблем, среди которых особо важной является проблема создания модели, наиболее адекватной исследуемому процессу. Она должна быть как можно более простой, и, в тоже время, достаточно точной. При математическом моделировании используются следующие методы: численные, приближенные и точные аналитические методы.

Из них численные методы неприменимы для случаев, когда решение задачи составляет промежуточную стадию другого исследования, например, при решении задач теории упругости, краевых задач управления, обратных задач и др.

При использовании точных методов решения получаются в форме бесконечных рядов, плохо сходящихся при малых значениях времени. К ним относятся методы: Фурье; метод источников; тепловых потенциалов; различные методы интегральных преобразований и др. Основным их недостатком является возможность использования лишь для решения линейных задач.

В приближённых аналитических методах решение представляется в виде ограниченного по числу членов ряда. При этом, обычно решению подлежат системы алгебраических уравнений, имеющих плохо обусловленные матрицы коэффициентов. К ним относятся: вариационные, интегральные, методы взвешенных невязок и др. [10, 20, 13, 22, 36, 73, 74, 91, 92, 128 - 133]. Их важнейшим преимуществом является универсальность. И, в частности, они могут быть применены к задачам, решение которых классическими методами не представляется возможным.

Известные решения уравнений, вывод которых основан на классических диффузионных законах Фурье, Ньютона, Фика, и др. приводят к известным парадоксам – бесконечным значениям теплового потока и касательных напряжений на стенке, бесконечным скоростям перемещения изотерм и изотах, скачкообразным изменениям искомых функций и проч. Следовательно, в нестационарных условиях распределение указанных величин не подчиняется полностью перечисленным законам ввиду отсутствия в них параметров, которые учитывают конечную скорость изменения параметров исследуемых полей. В связи с чем, была предложена формула, в которой учитывается ускорение теплового потока во времени, известная как формула Максвелла – Каттанео [9, 12, 15, 49, 50, 39, 72, 73, 74]

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_r \frac{\partial q}{\partial t}. \tag{1.1}$$

На основе этой формулы было найдено гиперболическое уравнение вида

$$\tau_r \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \tag{1.2}$$

где τ_r – коэффициент релаксации.

Анализ его точного решения показал, что на фронте температурной волны имеется скачок температуры. При достижении фронтом волны противоположной стенки образуется обратная волна, которая также имеет скачок температуры на фронте. Кроме того, было обнаружено, что в процессе охлаждения температура пластины может оказаться меньше задаваемой краевым условием 1-го рода температуры. Причиной таких результатов является неучёт инерционности во времени скалярной величины градиента температуры в формуле закона Фурье.

Теплообмен излучением наблюдается в теплотехнике, атомной энергетике, космической технике, металлургии и других областях техники. Тепловое излучение является процессом распространения энергии тела посредством электромагнитных волн, представляющих электромагнитные колебания, исходящие от излучаемого тела и перемещающиеся со скоростью света $c = 3 \cdot 10^8$ *м*/сек. При поглощении электромагнитных волн другими телами в них происходит выделение теплоты. Тепловое излучение рассматривается как фотонный газ, при прохождении которого через вещество происходит поглощение и последующее испускание фотонов его атомами и электронами. Следовательно, излучению присущ двойственный характер, ввиду того что здесь непрерывность электромагнитных волн сочетается с дискретностью фотонов. По существующим представлениям энергия и импульсы относятся к фотонам, а вероятность их обнаружения в пространстве – в волнах. Поэтому излучение имеет длину волны (λ) и частоту колебаний ($\nu = c/\lambda$) [134].

Все разновидности электромагнитного излучения представляют одинаковую физическую природу и отличаются только длиной волны. Например, в диапазоне $0{,}5 \cdot 10^{-6}\,\text{мкм} \le \lambda \le 0{,}2\ \text{мм}$ (и более 0,2 мм) бывают виды излучения (расположены в порядке увеличения λ): космическое, γ – излучение, рентгеновское, ультрафиолетовое, видимое, тепловое (инфракрасное), радиоволновое.

Таким образом, лучистый поток является потоком фотонов, сочетающих волновые и корпускулярные свойства. Их энергия равна $h\nu$, где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot c$ – постоянная Планка. Для теплотехники наибольший интерес представляют излучения, возникновение которых определяется лишь температурой тела и его оптическими свойствами. Этими свойствами обладают световое ($\lambda = 0{,}4 - 0{,}8\ \textit{мкм}$) и инфракрасное ($\lambda = 0{,}5 - 800\ \textit{мкм}$), которые объединяются под общим названием – тепловое излучение.

Все тела в зависимости от их температуры излучают энергию, которая достигая других тел, может частично отражаться, частично поглощаться и частично проходить сквозь них. Энергия, поглощаемая телом, превращается в теплоту, а которая отражается или проходит сквозь тела, попадает на другие тела и также поглощается или отражается ими. Таким путем энергия теплового излучения распределяется между другими телами, то есть происходит лучистый теплообмен. Если температура всех тел одинакова, то имеет место термодинамическое равновесие, согласно которому каждое тело системы излучает энергии столько же, сколько поглощает.

Закон теплового излучения, экспериментально установленный Стефаном в 1879 г., а затем теоретически обоснованный Больцманом (в 1881 г.), для абсолютно черного тела записывается в виде

$$E_0 = c_0 (T/100)^4, \tag{1.3}$$

где E_0 – поток лучистой энергии, Вт/м^2; T – температура тела, K; $c_0 = \sigma_0 \cdot 10^8 = 6{,}67$ Вт$/(м^2 \cdot K^4)$ – коэффициент излучения абсолютно черного тела; $\sigma_0 = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт$/(м^2 \cdot K^4)$ – постоянная Стефана – Больцмана.

Закон Стефана – Больцмана (1.3) строго справедлив лишь для абсолютно черного тела − тела, полностью поглощающего всю достигающую его лучистую энергию. Однако опытным путем было показано, что данный закон может быть применен и для реальных тел, для которых он приводится к виду

$$E = c(T/100)^4, \tag{1.4}$$

где c – коэффициент излучения тела, определяемый его физическими свойствами, состоянием поверхности и температурой тела.

Соотношение (1.4) может быть записано еще в виде

$$E = \varepsilon E_0 = \varepsilon c_0 (T/100)^4, \tag{1.5}$$

где ε – степень черноты тела, изменяющаяся для различных тел от нуля до единицы (для многих технически применяемых материалов её значения приведены в таблицах).

Соотношение лучистого теплообмена при переносе теплоты между двумя плоскопараллельными пластинами записывается в виде [134]

$$q = \varepsilon_{п} c_0 ((T_1/100)^4 - (T_2/100)^4), \tag{1.6}$$

где $\varepsilon_{п} = 1/(1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1)$ – приведенная степень черноты для системы двух тел; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – степени черноты соответственно первого и второго тел; T_1, T_2 – температуры их поверхностей.

Способность излучать и поглощать энергию имеют также и газы, но разные газы обладают этой способностью в неодинаковой степени. И, в частности, для азота N_2, кислорода O_2 и водорода H_2 (двухатомные газы) она ничтожна, следовательно, газы диатермичны для теплового излучения. Многоатомные газы, например, аммиак NH_3, углекислота CO_2, сернистый ангидрид SO_2, водяной пар H_2O и др. обладают значительной способностью излучения, среди которых особый интерес представляют углекислый газ и водяной пар, так как они образуются при сгорании топлива.

Отличие теплового излучения газов в сравнении с твердыми телами в том, что твердые тела, как правило, имеют сплошные спектры излучения, ввиду излучения (поглощения) лучистой энергии всех длин волн. Газы излучают и поглощают лишь в некоторых диапазонах длин волн (или полос), которые расположены в различных частотах спектра. Вне их полос энергия излучения газов равна нулю, то есть излучение газа избирательно (селективно). Другим отличием является то, что излучение газов всегда протекает в объеме, тогда как в твердых телах – с поверхности.

Перенос фотонов через газ сопровождается поглощением части из них, причем, тех, у которых энергия соответствует частотам (длинам волн), отвечающим полосам поглощения газа, – газ при этом нагревается. Фотоны другой энергии проходят через газ без поглощения. В то же время, в газе всегда протекает также и обратный процесс возникновения фотонов, имеющий тем бо́льшую интенсивность, чем больше его температура. Причем, эти фотоны имеют энергию, соответствующую полосам излучения газа. Этот обратный процесс называется собственным излучением газа, являющимся изотропным, то есть каждый объем газа излучает фотоны с одинаковой интенсивностью по всем направлениям. Результирующее излучение газа определяется совместным влиянием процессов поглощения и собственного излучения, и таким путем выполняется лучистый теплообмен.

Если движущийся излучающий газ расположен между твердыми стенками с температурами, отличными от температуры газа, то протекающие между стенками и газом тепловые процессы называются сложным теплообменом, который зависит от режима течения газа и физическим состоянием стенок. В данном случае между газом и стенками, кроме лучистого теплообмена, протекает также и конвективный теплообмен. Отметим, что в настоящее время пока не существует простых и точных методов расчета сложного теплообмена.

Во многих практических случаях режим течения газа является турбулентным, при котором максимальное изменение температуры имеет место в тонком пристенном (пограничном) слое. В данном случае применяется метод раздельного учёта передачи теплоты конвекцией и излучением $q = q_k + q_л$, где конвективная часть теплового потока q_k находится известными методами на основе закона Ньютона – Рихмана $q_k = \alpha(t_c - t_г)$, где α – коэффициент теплообмена, $Вт/(м^2 K)$; t_c, $t_г$ – соответственно температуры стенки и газа.

Лучистая часть теплового потока находится по формуле

$$q_л = \varepsilon_{пр} c_0((T_г/100)^4 - (T_c/100)^4), \tag{1.7}$$

где $\varepsilon_{пр} = \varepsilon_г \varepsilon_с / (\varepsilon_с + \varepsilon_г(1 - \varepsilon_с))$ – приведенная степень черноты; ε_c – степень черноты стенки; $\varepsilon_г$ – степень черноты газа; $T_г, T_c$ – соответственно температуры стенки и газа, K.

В случае когда $T_г > T_c$, величину $\varepsilon_г$ следует определять по температуре $T_г$. Если $T_c < T_г$, то $\varepsilon_г$ принимается по температуре T_c.

В математических постановках задач учёт лучистого теплообмена в граничных условиях выполняется путем использования следующей формулы (одномерная задача)

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \varepsilon \sigma_о (T^4 - T_г^4), \tag{1.8}$$

где λ –теплопроводность материала стенки, $\text{Вт}/(мK)$; x – координата; T – температура стенки на границе стенка – газ, определяемая из решения краевой задачи; ε – степень черноты стенки.

Краевые задачи с условиями (1.8) называются задачами с внешней нелинейностью. Отметим, что внутренняя нелинейность связана с зависимостью физических свойств материала от температуры. Точные решения краевых задач теплопроводности при граничных условиях (1.8) пока не получены. В связи с чем, при небольших значениях величины $T - T_г$ с достаточной для инженерных приложений точностью вместо условия (1.8) можно использовать условие вида [134]

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \varepsilon \sigma_o T_{ср}^3 (T - T_{ср}), \tag{1.9}$$

которое при $T_г = const$ можно рассматривать как граничное условие 3-го рода.

Отметим, что теплообмен излучением без учёта конвекции можно рассматривать лишь в условиях глубокого вакуума (при давлении газа менее 10^{-3} мм рт. ст.).

На первом этапе математического моделирования требуется разработка математических постановок краевых задач, описывающих реальные физические процессы передачи тепла, массы и импульса, которые включают дифференциальное уравнение и соответствующие краевые условия. Следующим этапом является нахождение численного или аналитического решения конкретной задачи − методы их решения подразделяются на аналитические (точные и приближенные) и численные. К известным точным методам относятся методы Фурье; функций Грина; тепловых потенциалов; различного вида интегральных преобразований и др. [10, 16, 21 – 23, 49, 50, 59, 93, 124]. Приближенными аналитическими методами являются: вариационные (Ритца, Треффтца и др.); взвешенных невязок (Галеркина, Канторовича, коллокаций, наименьших квадратов и др.) [11, 13, 14, 20, 21, 24, 32, 72 - 74]. Среди численных методов большое распространение получили конечно – разностные методы (расщепления, дробных шагов, переменных направлений), а также методы граничных и конечных элементов [90, 94, 110, 112, 113, 116 – 118, 127].

Основным недостатком точных методов является их малая универсальность, то есть они могут быть использованы лишь для решения линейных задач. Для этих задач при удовлетворении начального условия можно составлять линейную суперпозицию частных решений и таким путем получать решения в форме рядов, которые в области малых величин временно́й и пространственных переменных являются плохо сходящимися. Например, при $\mathrm{Fo} = 10^{-12}$ точное решение сходится лишь использованием $5 \cdot 10^{5}$ членов его ряда. Такие решения неудобны для инженерных расчетов и особенно в случаях, когда они должны быть применены в качестве промежуточной стадии при решении каких – то других задач, например, термоупругости, задач автоматического управления обратных задач и др.

Важным преимуществом приближенных методов является универсальность. Например, они могут быть использованы применительно к решению нелинейных задач, с переменными теплофизическими свойствами, переменными во времени краевыми условиями и др. В данном случае решение получается в виде ограниченного по числу членов ряда. При этом имеются трудности повышения числа его членов, что связано со следующими причинами: для выполнения уравнения задачи, как правило, требуется получать решение степенного уравнения, степень которого определяется числом приближений. Решение уравнений высоких степеней представляет серьезные технические трудности. К тому же, удовлетворение начальных условий в приближенных аналитических методах, как правило, сводится к решению больших систем алгебраических уравнений. Их матрицы представляют заполненные квадратные матрицы, имеющие большой разброс коэффициентов по абсолютной величине. Матрицы такого вида, обычно, плохо обусловлены. В данном случае, несмотря на использование высокопроизводительных вычислительных средств, число приближений оказывается весьма ограниченным. Таким образом, в приближенных аналитических методах существует предел по числу членов ряда, превышение которого может и не приводить к повышению точности решения.

Из числа приближенных методов существуют методы, позволяющие избежать указанные недостатки. К их числу относится интегральный метод теплового баланса [10, 11, 12, 13, 14, 30, 72 – 74, 77, 128 – 133]. При их использовании выполняется разделение нестационарного процесса на две стадии по времени. С этой целью в рассмотрение вводится фронт теплового возмущения, разделяющий область на два участка по координате – прогретую и непрогретую. Первая стадия заканчивается после того как фронт теплового возмущения достигает центра тела. Во второй стадии определяется дополнительная функция, описывающая изменение температуры в центре тела. Этот метод при использовании дополнительных краевых условий [24, 30, 33, 35 – 37, 44, 68] позволяет получать практически с заданной точностью решения, включая сверхмалые величины времени. Это можно объяснить тем, что исходная краевая задача разделяется на две, и в каждой из них интегрированию подлежат дифференциальные уравнения в обыкновенных производных. Кроме того, для каждой из этих задач начальное условие удовлетворяется не по всей толщине пластины, а лишь в граничной точке, что существенно упрощает его выполнение.

К различным модификациям интегрального метода относятся методы: Гудмена [14], Швеца [77], Вейника [10, 14], Постольника [60], Био [11] и др. Главная их проблема – малая точность. Основной причиной является то, что в данном случае выполняется осредненное дифференциальное уравнение. Следовательно, повышение точности метода связано с более лучшим выполнением исходного уравнения. Для чего в работах [24, 30, 33, 35 – 37] искомая функция аппроксимируется полиномами высоких степеней, определение неизвестных коэффициентов которых связано с использованием некоторых дополнительных краевых условий. Особенно эффективен этот метод для задач пограничного слоя, в которых в качестве аналога временно́й координаты используется продольная координата [33, 37, 129]. В работах [5, 133] этот метод распространен для задач теплового пограничного слоя, формирующегося в турбулентном динамическом пограничном слое.

Ввиду того, что интегральным методом решается параболическое уравнение, в выводе которого заложена бесконечная скорость передачи теплоты, то рассмотрение фронта возмущения означает принятие конечной скорости, что в данном случае является условным и применяется лишь для нахождения простого вида аналитических решений. В работах [24, 30, 33, 35 – 37] показано, что с увеличением числа приближений происходит возрастание скорости перемещения фронта возмущения и при $n \to \infty$ величина скорости также стремится к бесконечному значению. Следовательно, этот метод с увеличением числа приближений позволяет получить решения, эквивалентные точным.

Исследования, связанные с нахождением температур, давлений и скоростей в жидкостях, даны в работах [48, 59, 73 – 75]. Для определения указанных параметров интегрированию в данном случае подлежит система нелинейных уравнений. Путем линеаризации в ряде случаев она сводится к двум раздельным гиперболическим уравнениям (относительно давления и скорости). Методы их решения изложены в [75].

При расчётах трубопроводных сетей разного назначения (теплосети, водопроводы, нефтепроводы и проч.) применяются компьютерные модели, с помощью которых определяются давления и скорости в движущихся жидкостях. Теория таких моделей базируется на электрогидравлической аналогии. И, в частности, для расчетов тепловых сетей применяются известные в электротехнике первый и второй законы Кирхгофа.

Основы построения моделей теплосетей были заложены Е.Я. Соколовым [63]. Однако их практическое применение оказалось возможно лишь благодаря появлению современных компьютеров. Развитию этой теории посвящены также работы С.В. Сумарокова, Е.В. Сенновой, А.П. Меренкова, Н.Н. Абрамова, В.Я. Хасилева, А.Д. Коваленко, В.А. Кудинова и др. [28, 34, 61, 65 – 67].

Результаты теоретических исследований, полученные в диссертации, были применены при построении модели тепловой сети г. Самара, питаемой от

Самарской ТЭЦ. Выполненные на ней исследования позволили найти оптимальные режимы работы, разработать эффективные планы реконструкции теплосети и построения новых ее участков.

Результаты исследований пусковых режимов паровых котлов тепловых станций (ТЭС) приведены в многочисленной литературе [81 – 86, 108, 126]. Однако многие исследования базируются на упрощенном представлении о физических процессах, протекающих в исследуемых объектах, не соответствующих современному развитию компьютерной техники. И, в частности, для расчетов температурного поля паровых котлов пока еще недостаточно используются такие современные конечно-разностные методы, как переменных направлений, локально-одномерный метод и расщепления, а также при расчетах термических напряжений – методы граничных и конечных элементов [90, 94, 110 – 113, 116 – 118, 127]. Трудности применения всех этих методов, и особенно методов граничных и конечных элементов, связаны с необходимостью использования весьма сложных вычислительных алгоритмов и стандартных программ, не всегда сопровождаемых подробным математическим описанием используемого в их основе метода. Применительно к методу конечных элементов это связано со сложностью его математического описания применительно к краевым задачам термоупругости. В настоящей работе приводится подробное математическое описание данного метода применительно к определению температурных напряжений в барабанах паровых котлов (в отверстиях, к которым подсоединяются экранные трубы, расположенные в топках котлов).

Срок службы и надежная работа паровых котлов во многом определяются числом их пусков и остановов. Это связано с тем, что при выполнении указанных процессов в элементах котлов возникают максимальные температурные градиенты, обусловленные различной скоростью прогрева отдельных их участков вследствие переменности граничных условий.

Для барабанов котлов положение усугубляется наличием отверстий в их корпусах, предназначенных для крепления (приваривания) экранных труб.

Температурные градиенты вызывают появление температурных напряжений, знаки которых в пределах одного цикла (пуск – работа под нагрузкой – останов) изменяются на противоположные. По этой причине в отдельных элементах парового котла возникают дефекты, обусловленные малоцикловой усталостью.

Подробные исследования путем вырезки и изучения образцов металла барабанов позволили установить, что главной причиной трещинообразования являлись градиенты температур, обуславливающие возникновение температурных напряжений, превышающих предел прочности для используемого материала. Дальнейший рост и расширение трещин связаны также с действием коррозии. Появление больших температурных градиентов связано с понижением температуры воды в случае планового (при останове котла) или аварийного уменьшения давления пара. Условия для возникновения температурных напряжений могут также создаваться при следующих режимах работы паровых котлов: при попадании питательной воды по трубам рециркуляции водяного экономайзера при подпитке котла; при растопке и останове парового котла через экономайзер, через ошибочно открытые задвижки на упомянутых трубах; при подаче воды в горячий барабан после аварийного уменьшения давления вследствие разрыва экранной трубы; при относительно быстром останове котла и последующей опрессовке водой при температуре 60 – 80 °C и другие причины, возникающие в неконтролируемых режимах растопок и консервации котлов.

Анализ статистики дефектов Новокуйбышевской ТЭЦ – 1 и по другим тепловым электрическим станциям ОАО «Самараэнерго» позволяет заключить, что массовое появление трещин происходит примерно после 80 – 120 тысяч часов работы. Отсюда можно заключить, что это систематический дефект. Причем, многочисленные трещины образуются именно в местах присоединения к барабанам водоопускных, водоперепускных, пароперепускных труб и труб рециркуляции. Выявление и устранение таких дефектов приводит к длительному простою котла, и, следовательно, к большим экономическим потерям [128].

Из обзора известных работ можно заключить о недостаточности использования аналитических методов для идентификации граничных условий, исходя из решения обратных задач. Применительно к паровым котлам интерес представляет знание коэффициентов теплообмена на внутренней стенке барабана, которые, обычно, определяются по эмпирическим критериальным уравнениям. Приближенность критериальных уравнений состоит в том, что в них не отражена зависимость коэффициентов теплоотдачи от времени и от температуры (данные параметры в критериальных уравнениях вообще отсутствуют). Однако отметим, что эти параметры с достаточной для инженерных приложений точностью можно учесть путем определения коэффициентов теплоообмена в результате решения обратной задачи теплообмена по известному аналитическому решению прямой задачи. При этом используются экспериментальные данные изменения во времени температуры в некоторой точке корпуса барабана. Следует однако отметить, что решения задач теплопроводности с изменяющимися от времени коэффициентами теплообмена в известной литературе не приводятся. Это связано с тем, что, как следует из [22], получение точных решений этих задач не представляется возможным из-за невозможности совмещения точного решения параболического уравнения с граничным условием, в котором коэффициент теплоотдачи зависит от времени. Решения таких задач могут быть найдены лишь методом итераций, приближаясь таким путем к выполнению переменного во времени коэффициента теплообмена. Следовательно, решение задачи здесь является численным и, поэтому оно не может быть использовано применительно к обратным задачам. Отметим, что в диссертации (см. п. 3.3.) приводится последовательность нахождения приближенного решения подобной задачи, что оказалось возможным при использовании интегрального метода с привлечением дополнительной определяемой функции и некоторых дополнительных краевых условий.

Обратные задачи по Ж. Адамару считаются некорректно поставленными. Корректно поставленными являются задачи, для которых: решение существует, оно устойчиво и единственно. Для таких задач любые малые изменения входных данных не могут приводить к большим изменениям решения, что, однако, не всегда выполняется применительно к решениям обратных задач. Их некорректность, например, по отношению к временно́й переменной можно объяснить тем, что перенос теплоты возможен лишь в направлении возрастания времени. Следовательно, на распределение температуры в конкретный момент времени может оказывать влияние лишь температурное распределение, предшествующее этому моменту, то есть в данном случае причина предшествует следствию. Однако применительно к обратным задачам происходит несоблюдение причинно – следственной связи потому, что здесь следствие предшествует причине. Для таких задач отсутствуют доказательства теорем единственности и существования решения. К тому же, такое решение, даже, если оно существует, может быть неустойчивым к малым колебаниям входных данных и, следовательно, оно может быть физически недостоверным. Таким образом, применительно к решениям некорректных задач необходимо выполнять их проверку на устойчивость.

Особый вклад в разработку методов решения обратных задач внесен А.Н. Тихоновым, М.А. Лаврентьевым, В.К. Ивановым, В.Я. Арсениным, О.М. Алифановым, В.А. Морозовым [79, 80, 121 – 123]. И, в частности, А.Н. Тихоновым предложен метод регуляризации применительно к решению некорректных задач посредством использования некоторого параметра регуляризации λ, определяемого на основе имеющейся дополнительной информации. Для решения таких задач методом подбора А.Н. Тихоновым введено понятие условной корректности.

При идентификации параметров применительно к решению уравнения теплопроводности можно выделить три вида обратных задач: 1) по определению краевых условий; 2) теплофизических свойств; 3) по нахождению начального условия – инверсные обратные задачи.

Определению теплофизичеких параметров и граничных условий посвящены работы Г.М. Кондратьева, [49], разработавшего теорию регулярного режима, на основе которой созданы методы нахождения теплофизических свойств материалов. Исследованию обратных задач по определению краевых условий посвящены работы В.И. Жука, О.М. Алифанова [79, 80], В.Н. Шумакова [125] и др.

В настоящее время, благодаря исследованиям, прежде всего, российских ученых, накоплен достаточно большой материал по разработке методов исследования обратных задач в линейной и нелинейной постановке, основанных, в основном, на аппроксимации непрерывных дифференциальных и интегральных операторов их конечно – разностными аналогами. Поскольку восстановление причины по известному следствию является более сложной проблемой по сравнению с исследованием прямых задач, то исследования обратных задач, в основном, выполняются численными методами. В связи с чем, дальнейшая разработка и развитие методов исследования обратных задач является проблемой актуальной. Разработке аналитических способов их решения посвящены работы [72 – 74, 79, 80, 128 – 132].

По результатам обзора работ можно сформулировать выводы:

1. Необходима разработка методов нахождения приближенных решений, позволяющих избежать проблемы, связанные с плохой обусловленностью матриц больших систем алгебраических уравнений. В настоящей работе для решения этой проблемы используются дополнительные краевые условия.

2. Необходима разработка методов увеличения точности решений краевых задач, основанных на интегральных методах. В этом направлении весьма эффективными представляются методы, связанные с нахождением фронта тепловой волны совместно с дополнительной искомой функцией и дополнительными краевыми условиями, используемыми в настоящей диссертации.

3. Необходима разработка новых моделей тепломассопереноса и переноса импульса с учётом локальной неравновесности процессов. Эффективным направлением здесь является учёт ускорения во времени как движущих сил, так и потоков соответствующих величин.

4. Актуальной также является проблема развития методов исследования лучистого теплообмена, представляющего особые трудности при получении аналитических решений ввиду существенной нелинейности такого вида задач.

2. Получение новых численных и аналитических методов решения краевых задач применительно к теплообмену излучением для многослойных конструкций

Перенос теплоты излучением выполняется посредством электромагнитных колебаний. По длинам волн, различают следующие виды излучения: космическое ($\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ *мкм*), гамма – лучи ($\lambda = (0{,}5 \div 1{,}0) \cdot 10^{-6}$ *мкм*), ультрафиолетовое ($\lambda = 20 \cdot 10^{-3} - 0{,}4$ *мкм*), рентгеновское ($\lambda = 10^{-6} - 20 \cdot 10^{-5}$ *мкм*),видимое (световое) ($\lambda = 0{,}4 - 0{,}8$ *мкм*), тепловое (инфракрасное) ($\lambda = 0{,}8$ *мкм* $- 0{,}8$ *мм*), радиоволны ($\lambda > 0{,}2$ *мм*) [55].

Исходя из положений квантовой механики, излучение является потоком фотонов, с энергией определяемой частотой колебаний $E = h\nu$, где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot\, c$ – постоянная Планка. Длина волны в зависимости от частоты колебаний определяется соотношением $\lambda = c/\nu$, где $c = 3 \cdot 10^8$ *м/с* – скорость распространения колебаний (скорость света) в вакууме.

Далее будем рассматривать лишь излучения, возникновение и распространение которых определяется лишь температурой излучателя и его физическими свойствами. К их числу относятся световое и инфракрасное (тепловое). Физическая природа этих видов излучений одинакова – отличается лишь длина волн. В связи с чем, процесс их распространения характеризуется одним понятием – тепловое излучение [55].

Количество теплоты, переносимой излучением, становится соизмеримым с конвективными тепловыми потоками только при высоких температурах. В случае очень высоких температур (камеры сгорания тепловых двигателей, МГД-генераторов и др.) теплообмен излучением может существенно превышать другие виды теплообмена. В связи с чем, проблема расчета работающих при таких температурах конструкций принимает особую актуальность. Но сложность решения задач излучения связана с его нелинейностью. Так, тепловой поток, переносимый от более нагретой стенки к менее нагретой, находится из соотношения

$$q = \varepsilon_{np} c_o \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \qquad (2.1)$$

где q – тепловой поток, *Вт/м²*; $c_o = 5{,}67\ \text{Вт}/(м^2 \cdot K^4)$ – коэффициент излучения абсолютно черного тела; $T_1, T_2 \quad (T_1 > T_2)$ – температуры стенок, *К*; ε_{np} – приведённая степень черноты, которая находится по формуле

$$\varepsilon_{np} = 1/(1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1)\,. \qquad (2.2)$$

В соотношении (2.2) $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – степени черноты поверхности излучающих стенок.

Таким образом, степенная (нелинейная) зависимость теплового потока от температуры существенно усложняет расчёты лучистого теплообмена.

Излучение твердых тел происходит с поверхности, а в газах этот процесс происходит в объеме. К тому же, в твердых телах излучается (и поглощается) лучистая энергия всех длин волн (спектры их излучения сплошные), то в газах – лишь в некоторых диапазонах длин волн, называемых полосами, расположенными в разных частях спектра. Для излучения других длин волн (вне указанных полос) газы лучепрозрачны − их энергия не изменяется от действия такого вида излучения.

Газ обладает еще собственным излучением − излучением газового объёма. Молекулы газа излучают теплоту в виде возникающих в объёме фотонов, − их энергия должна соответствовать полосам излучения газа. Суммарный поток определяется совместным действием собственного излучения и поглощения газовым объёмом. Формула его определения в случае, когда происходит теплообмен между газом и стенкой будет

$$q_л = \varepsilon_{пр} c_o \left[\left(\frac{T_г}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_c}{100} \right)^4 \right], \tag{2.3}$$

где $\varepsilon_{пр} = \varepsilon_г \varepsilon_c / [\varepsilon_c + \varepsilon_г(\varepsilon_c - 1)]$ – приведённая степень черноты; $\varepsilon_г$ – степень черноты газа; ε_c – степень черноты стенки; $T_г$ – температура газа; T_c – температура стенки.

2.1. Разработка экспериментальной установки для исследования лучистого теплообмена в многослойных конструкциях с газовыми прослойками

Во многих практических случаях возникает необходимость определения тепловых потерь через n−слойные цилиндрические (плоские) стенки в случаях, когда между разными слоями имеет место лучистый теплообмен. Применение для решения таких задач аналитических методов крайне затруднительно ввиду необходимости учёта не только условий сопряжения на контактах слоев, но и лучистого теплообмена. В связи с чем, такие задачи в основном решаются численными методами. В представленной работе рассматриваются аналитический, а также графоаналитический методы расчёта [139, 140, 143]. С целью экспериментальной проверки разработанного метода была изготовлена специальная установка, позволяющая проводить исследование сложного (в том числе, и лучистого) теплообмена в многослойных цилиндрических стенках с газовыми прослойками − схема этой установки дана на рис. 2.1. Корпус установки состоит из внешней 1 и внутренней 2 металлических стенок корпуса, разделенных слоем изоляции 3 из минеральной ваты толщиной 3,5 (рис. 2.1). Кронштейны 4 скрепляют внешнюю и внутреннюю поверхности стенок корпуса. С целью уменьшения тепловых перетоков они сделаны из керамики. Внутри корпуса расположена керамическая труба 5 с электрической спиралью 6, обеспечивающая нагрев трубы до температуры 800°С. 7 – слой асбеста; 8 – шины для подвода электроэнергии; 9, 10 – кронштейны крепления; 11 –

термопара; 12 – крышка корпуса; 13 – слой изоляции в крышке корпуса; 14, 15 – диафрагмы, регулирующие поток охлаждающего воздуха; 16 – винт; 17 – нижняя крышка корпуса; 18 – слой изоляции в нижней крышке корпуса; 19 - вентиляционные люки; 20 – провода подвода электропитания; 21 – провода термопары; 22 – вентилятор; 23 – воздуховод; 24 – направление потока воздуха; 25 – латр; 26 − потенциометр.

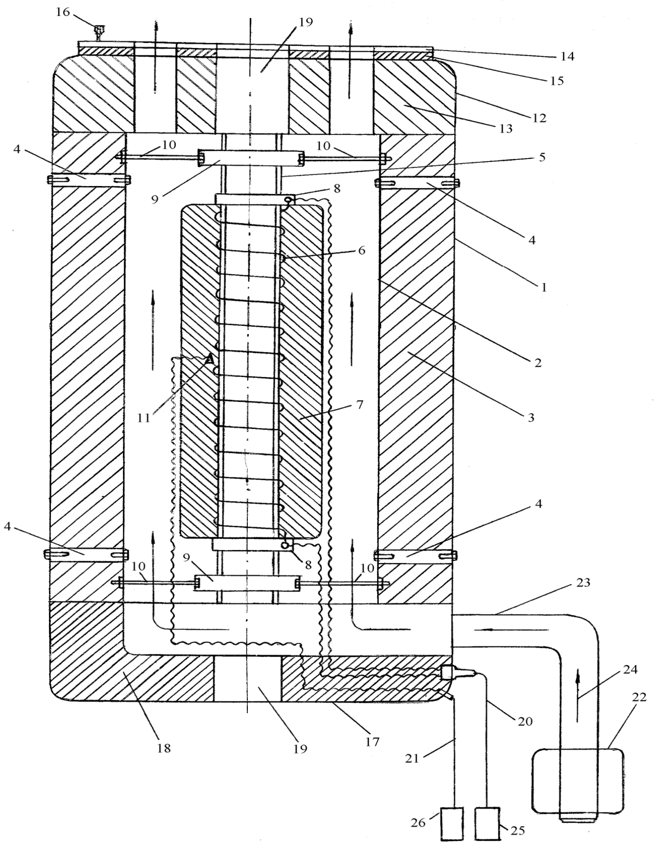


Рисунок 2.1. Принципиальная схема установки

Схема теплообмена дана на рис. 2.2. Тепловой поток от керамической трубы 1 с температурой t_1 протекает через слой асбестовой изоляции 2. В результате температура на внешней поверхности этого слоя в стационарном режиме устанавливается на некотором уровне t_2. Далее тепловой поток передается излучением через слой воздуха 3 от внешней поверхности слоя асбестовой изоляции 2 к внутренней стенке слоя изоляции из минеральной ваты 3. Через слой изоляции из минеральной ваты теплота передается теплопроводностью. С поверхности внешней стенки 4 тепло поступает в окружающую среду путем конвективного теплообмена (теплоотдачи). Теплопроводностью алюминиевых металлических стенок (толщиной 0,5 мм), между которыми удерживается слой изоляции из минеральной ваты, пренебрегается.

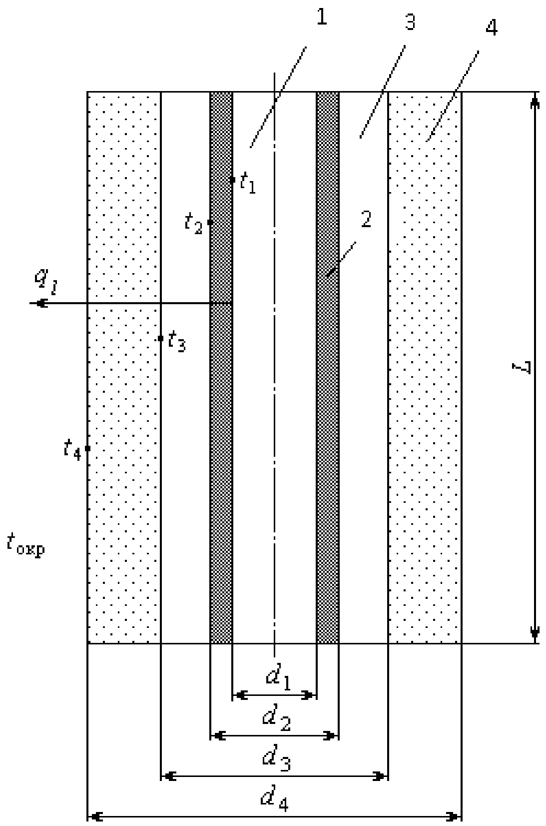


Рис. 2.2. Схема теплообмена.
1 – керамическая труба;
2 – слой асбестовой изоляции;
3 – воздушная прослойка;
4 – слой внешней изоляции (минеральная вата)

Общий вид установки, включающий корпус (справа) и вентилятор (слева) приведен на рис. 2.3. Схематическое изображение корпуса установки и схемы теплообмена даны на рис. 2.1, 2.2. Вентилятор предназначен для подачи охлаждающего воздуха в корпус с целью уменьшения времени охлаждения при смене режима исследования.

Рис. 2.3. Установка по исследованию лучистого теплообмена

2.2. Разработка точных методов исследования лучистого теплообмена в многослойных конструкциях

В настоящем разделе приведены данные исследований сложного теплообмена применительно к газовой прослойке, позволивших выполнить и провести анализ процесса передачи теплоты, с определением вклада каждой составляющей теплообмена (конвективного и излучения), определить эквивалентный коэффициент теплопроводности воздушного слоя в диапазоне температур (от 0 до 3000 °С). Результаты исследования могут быть использованы для моделирования теплообменных процессов в газовых прослойках, при нахождении оптимальной ее толщины, материала стенок и т.д. Результаты теоретических исследований в диапазоне температур $20 \le t \le 800\ ^{\circ}C$ были сопоставлены с результатами эксперимента, выполненного на специально изготовленной для этих целей экспериментальной установке, конструкция и принцип работы которой детально изложены в п. 2.1.

Рассмотрим задачу стационарной теплопроводности применительно к трехслойному полому бесконечному цилиндру, у которого внутренний и наружный слои разделяются воздушной прослойкой (рис. 2.4). Температура внутренней стенки цилиндра известна и равна t_1. Теплообмен на наружной поверхности цилиндра происходит при краевых условиях 3-го рода с заданными величинами коэффициента теплоотдачи α и температуры среды $t_{ср}$. Требуется найти тепловой поток с единицы длины цилиндрической стенки, а также распределение температуры по толщине стенки. Математическая постановка данной задачи будет

$$q_1 = \pi(t_1 - t_2) \Big/ \left(\frac{1}{2\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} \right); \tag{2.4}$$

$$q_2 = 5{,}67\varepsilon_{пр} \left[\left(\frac{t_2 + 273}{100} \right)^4 - \left(\frac{t_3 + 273}{100} \right)^4 \right] \pi d_2 ; \tag{2.5}$$

$$q_3 = \pi(t_3 - t_4) \Big/ \left(\frac{1}{2\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3} \right); \tag{2.6}$$

$$q_4 = \alpha(t_4 - t_{ср})\pi d_4 , \tag{2.7}$$

где λ_1, λ_3 − коэффициенты теплопроводности первого и третьего слоёв, Вт/$(\text{м} \cdot K)$; q_1 − тепловой поток, переносимый посредством теплопроводности через единицу длины внутреннего слоя цилиндра, Вт/м; q_2 − лучистый поток через воздушный слой, Вт/м; q_3 − тепловой поток, протекающий через наружный слой (путем теплопроводности), Вт/м; q_4 − конвективный тепловой поток, переносимый с единицы длины наружной стенки в окружающую среду, Вт/м; $t_{ср}$ − температура окружающей среды, $°C$; α − коэффициент теплообмена, Вт/$(\text{м}^2 \cdot K)$; $\varepsilon_{пр}$ − приведённая степень черноты, которая находится по формуле

$\varepsilon_{пр} = 1/(1/\varepsilon_1 + (F_1/F_2)(1/\varepsilon_2 - 1))$, в которой ε_1 − степень черноты наружной поверхности первого слоя; ε_2 − степень черноты внутренней стенки третьего слоя; d_1, d_2, d_3, d_4 − диаметры слоев трехслойного полого цилиндра (рис. 2.4).

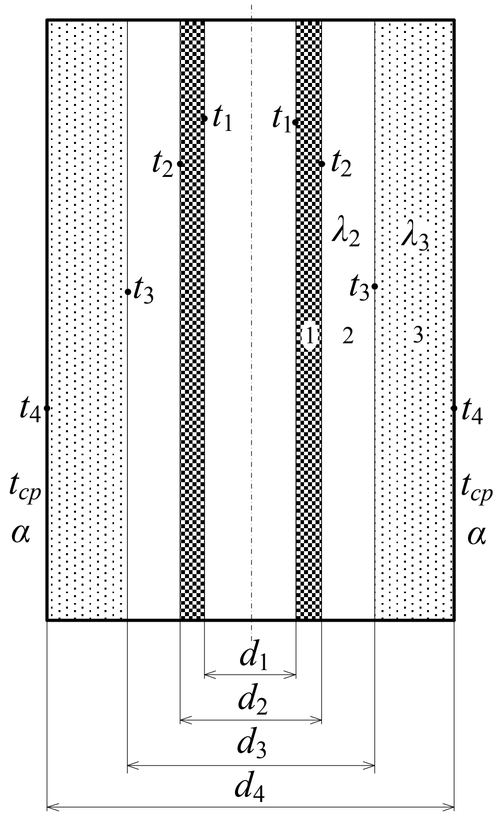


Рис. 2.4. Схема теплообмена для трехслойного полого цилиндра. 1 – первый слой (асбест); 2 – воздушная прослойка; 3 – третий слой (стекловата)

Ниже, в п. 2.3, рассмотрен графоаналитический способ исследования системы уравнений (2.4) – (2.7). Рассмотрим способ определения точного решения данной системы, позволяющий находить ее неизвестные, не используя графические методы. При стационарном режиме тепловые потоки в любом слое равны, т. е. $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$. Поскольку число неизвестных $(t_2,\ t_3,\ t_4, q)$ равно четырём, то система (2.4) – (2.7) замкнута. Однако определение ее точного решения затрудняется нелинейностью уравнения (2.5). Для упрощения этой системы сведём соотношения (2.6) и (2.7) к одному алгебраическому уравнению. Выразим из (2.7) температуру t_4 и подставим полученное соотношение в (2.6).

$$q = \pi(t_3 - t_{ср}) \Big/ \left(\frac{1}{2\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3} + \frac{1}{\alpha d_4} \right). \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует, что температура t_4 оказалось исключенной из системы (2.4), (2.5), (2.8), решение которой необходимо теперь получить. Для дальнейшего упрощения системы (2.4), (2.5), (2.8) выразим температуру t_2 из уравнения (2.4), а t_3 − из уравнения (2.8) и подставим полученные выражения в соотношение (2.5). Откуда для теплового потока q будем иметь степенное уравнение вида:

$$q = \frac{5{,}67\varepsilon_{пр}}{10^8}\left[\left(t_1 - \frac{q\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}{2\pi\lambda_1} + 273\right)^4 - \left(\frac{q\alpha d_4 \ln\left(\frac{d_4}{d_3}\right) + 2\lambda_3 q}{2\lambda_3\pi\alpha d_4} + t_{ср} + 273\right)^4\right]. \quad (2.9)$$

Соотношение (2.9) представляет алгебраическое уравнение 4 – й степени для искомого теплового потока q. Это уравнение имеет четыре корня, три из которых не имеют физического смысла, два комплексных и один отрицательный. Следовательно, из решения уравнения (2.9) получаем один действительный корень, представляющий определяемый тепловой поток. Расчёты теплового потока по уравнению (2.9) для разных значений температуры (t_1) внутренней поверхности приведены в таблице 2.1.

По найденному тепловому потоку, по формулам (2.4), (2.6), (2.7), были найдены температуры t_2, t_3, t_4, которые также приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Тепловой поток q, Вт/м	Температура, °C				Эквивалентный коэффициент теплопроводности воздушного слоя $\lambda_{экв}$, Вт/(м К)
	t_1	t_2	t_3	t_4	
8	50	47	33	22	0,033
67	200	173	127	32	0,081
167	400	333	289	51	0,212
272	600	491	457	70	0,445
376	800	650	623	89	0,802

479	1000	808	788	108	1,31
581	1200	968	951	126	2,00
682	1400	1127	1114	145	2,89
783	1600	1287	1276	163	4,00
883	1800	1446	1437	182	5,38
983	2000	1606	1598	200	7,00
1084	2200	1766	1759	218	11,4
1184	2400	1926	1920	237	14,3
1285	2600	2086	2081	255	17,7
1385	2800	2246	2241	273	21,5
1485	3000	2406	2402	292	25,9

Исходные данные задачи следующие (рис. 2.4, 2.5):

$d_1 = 0{,}07\ м$; $d_2 = 0{,}09\ м$; $d_3 = 0{,}128\ м$; $d_4 = 0{,}2$ м; $\lambda_1 = 0{,}1\ \text{Вт}/(м \cdot K)$;

$\lambda_2 = 0{,}05\ \text{Вт}/(м \cdot K)$; $t_{ср} = 20\ °C$; $\alpha = 10\ \text{Вт}/(м^2 \cdot K)$; $\varepsilon_1 = 0{,}95$; $\varepsilon_2 = 0{,}3$,

где ε_1 − степень черноты асбеста; ε_2 − степень черноты алюминиевого листа.

Алюминиевые слои имеются на внутренней и внешней поверхности третьего слоя и они предназначены для размещения слоя минеральной ваты. Ввиду большой теплопроводности алюминия $(\lambda_1 = 219\ \text{Вт}/(м \cdot K))$ и незначительной толщины каждого слоя $(\lambda = 0{,}5\ мм)$ их теплопроводностью пренебрегается. Ввиду значительной длины (более 1 м) цилиндра, тепловой поток в центральной части является практически одномерным.

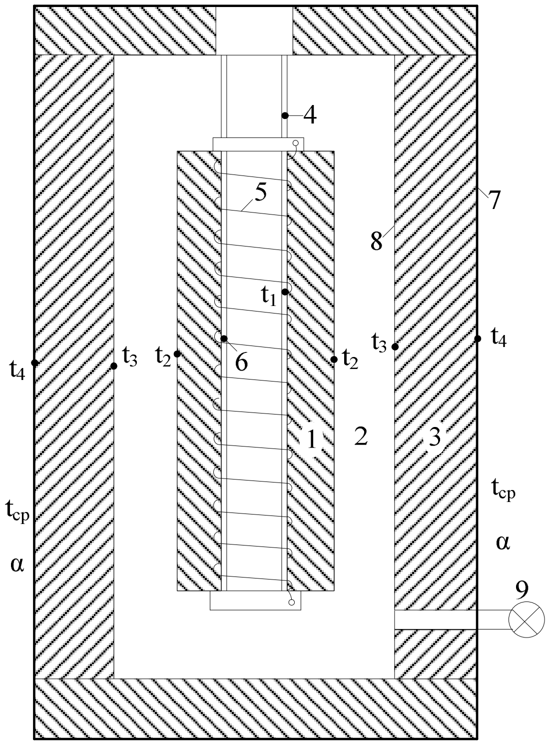


Рис. 2.5. Схема установки для проведения экспериментальных исследований сложного теплообмена: 1 – слой асбеста; 2 – воздушная прослойка; 3 – слой стекловаты; 4 – полая керамическая трубка; 5 – электрическая спираль; 6 – термопара; 7, 8 – алюминиевые прослойки; 9 − вентилятор

По соотношению (2.5), передача теплоты в воздушном слое происходит только путем излучения, то есть без учёта конвективного переноса теплоты между стенками и молекулярной теплопроводности воздуха. Если учитываются все три вида переноса теплоты, то необходимо определить вклад каждого из них в общий тепловой поток. Применительно к решению этой задачи взамен уравнения (2.5) следует рассматривать уравнение, учитывающее излучение, конвекцию и теплопроводность в воздушной прослойке, такое уравнение будет

$$q_2 = 5{,}67\varepsilon_{пр}\left[\left(\frac{t_2+273}{100}\right)^4-\left(\frac{t_3+273}{100}\right)^4\right]\pi d_2+\frac{2\pi\varepsilon_k\lambda_в}{\ln\left(d_3/d_2\right)}\left(t_3-t_2\right), \tag{2.10}$$

где $\varepsilon_{\text{k}} = \lambda_{\text{экв}}/\lambda_{\text{в}}$ − коэффициент конвекции; $\lambda_в$ − коэффициент теплопроводности воздуха.

Для нахождения коэффициента конвекции необходимо воспользоваться формулой, впервые предложенной М.А. Михеевым в результате обобщения экспериментальных данных для газовых прослоек [55]:

$$\varepsilon_k = 0{,}18(\mathrm{Gr}_в \, \mathrm{Pr}_в)^{0,25}.$$

Число Грасгофа находится по формуле

$$\mathrm{Gr}_в = g\delta^3\beta(t_2 - t_3)/\nu_в^2,$$

где β − коэффициент теплового расширения воздуха (определялся по среднеарифметической температуре стенок $(t_2 + t_3)/2$), 1/ °С; δ − толщина воздушной прослойки, *м*; $\nu_в$ − кинематическая вязкость воздуха, *м²/с*.

Параметры воздуха ($\lambda_в, \nu_в, \mathrm{Pr}_в, \beta$) зависят от температуры воздуха в воздушной прослойке, поэтому они находились на основе данных по температуре воздуха, полученных из решения предыдущей задачи (табл. 2.1).

Для более точного нахождения температуры внешней стенки цилиндра t_4 в новой математической постановке задачи учитывается лучистый теплообмен с окружающей средой, а также зависимость от температуры коэффициента теплоотдачи от внешней стенки к окружающему воздуху (в зависимости от температуры коэффициент теплоотдачи изменялся в диапазоне от 10 до 30 Вт/(м^2 К)).

$$q_4 = \alpha(t_4 - t_{ср})\pi d_4 + 5{,}67\varepsilon_2\left[\left(\frac{t_4 + 273}{100}\right)^4 - \left(\frac{t_{ср} + 273}{100}\right)^4\right]\pi d_4. \qquad (2.11)$$

Для определения коэффициента теплоотдачи находился критерий Нуссельта из критериального уравнения, характеризующего теплообмен между свободно перемещающимся воздухом и внешней стенкой цилиндра

$$\mathrm{Nu}_в = 0{,}695\mathrm{Gr}_{в2}^{0,25}.$$

При известном числе Нуссельта, коэффициент теплоотдачи находится по формуле

$$\alpha_в = \mathrm{Nu}_в\lambda_{в2}/d_4,$$

где $\lambda_{в2}$ − теплопроводность воздуха, циркулирующего у внешней стенки цилиндра, Вт/(*мК*).

Таким образом, необходимо определить решение системы (2.4), (2.6), (2.10), (2.11), причём, последние два уравнения – нелинейные. Задаётся линейный тепловой поток q, а искомыми величинами задачи являются температуры t_1, t_2, t_3 и t_4.

Сначала из уравнения (2.11) определяется температура t_4, из его решения относительно t_4 получается 17 корней, 14 из которых – комплексные, 2 отрицательных корня и 1 действительный, который используется для дальнейшего решения системы. Зная t_4, определяется t_3 по уравнению (2.6). Далее вычисляется t_2 из выражения (2.10), корней получается также 17, но однако лишь один из них имеет физический смысл.

Таким путем, все величины рассматриваемой задачи могут быть определены. Результаты исследований нелинейной системы (2.4), (2.6), (2.10), (2.11), описывающей изменения свойств среды от температуры и процессы сложного теплообмена (уравнения (2.10) и (2.11)), даны в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Тепловой поток q, Вт/$м$	Тепловой поток, передающийся излучением $q_л$, Вт/$м$ (% от q)	Тепловой поток, передающийся конвекцией $q_к$, Вт/$м$ (% от q)	Температура, $°C$				Эквивалентная теплопроводность воздушного слоя $\lambda_{экв}$, Вт/($мК$)
			t_1	t_2	t_3	t_4	
50	21 (42 %)	29 (58 %)	137	117	96	25	0,13
100	55 (55 %)	45 (45 %)	244	204	174	32	0,19
200	135 (67 %)	65 (33 %)	435	355	325	41	0,37
400	366 (91 %)	34 (9 %)	807	647	621	59	0,86
600	584 (97 %)	16 (3 %)	1183	943	926	74	2,0
800	789 (98,7 %)	11 (1,3 %)	1557	1237	1225	88	3,7
1000	993 (99,3 %)	7 (0,7 %)	1930	1530	1521	100	6,2
1200	1195 (99,6 %)	5 (0,4 %)	2303	1823	1816	110	9,6
1400	1327 (99,9 %)	2 (0,1 %)	2675	2115	2110	120	15,7

В табл. 2.2 даны также температуры поверхностей слоев и значения найденного эквивалентного коэффициента теплопроводности воздушного слоя, который позволяет выполнить оценку интенсивности сложного теплообмена в разных режимах работы конструкции.

С целью проверки аналитических расчетов была использована экспериментальная конструкция (см. рис. 2.1 – 2.5). Для задания различных значений теплового потока (от 10 до 1400 Вт) и нахождения их величины, к электрическому нагревателю подсоединены трансформатор, амперметр, вольтметр. Суммарное количество теплоты, получаемое из электрической энергии посредством нагревателя, эквивалентно линейной плотности теплового потока q (так как длина цилиндра составляет 1 м) и находится по формуле

$$Q = q = I_н U_н, \qquad (2.12)$$

где $I_н$ – сила тока; $U_н$ – напряжение.

Температуры на поверхностях слоев измеряются термопарами, присоединенными к мультиметру. Температура внешней поверхности установки t_4 определяется пирометром. Для перехода с одного режима на другой, а также с целью охлаждения установки, применяется вентилятор 9 (рис. 2.5).

Расхождение результатов с расчётными данными составляет 10 – 15 %.

Выводы

1. Из анализа результатов можно найти долю каждой составляющей сложного теплообмена в воздушном слое (конвекции и излучения) в общем тепловом потоке q. В частности, проинтерполировав между значениями теплового потока первого столбца 50 и 100 Вт/*м*, можно определить тепловые потоки $q = 80{,}77$ Вт/*м*, при которых количество теплоты от излучения и конвекции, будет равным.

2. При средней температуре воздуха в прослойке $t_{ср} = (t_2 + t_3)/2 = 157$ °C тепловое излучение превалирует над конвективным теплообменом (включающим передачу тепла теплопроводностью), а при температуре воздуха ~

1500 $°C$ и выше – 99 % теплоты передается излучением, и лишь 1 % − другими видами теплообмена.

3. Экспериментальная конструкция может быть применена не только при исследовании особенностей протекания сложного теплообмена, но и для определении коэффициентов теплопроводности материалов, включая их зависимость от температуры. Для этого используются методы получения решений обратных задач, то есть когда по найденной из эксперимента температуре и величине теплового потока из формул (2.4), (2.6), (2.10), (2.11) может быть найден коэффициент теплопроводности любого слоя. Аналогичным путём может быть вычислена приведённая степень черноты газов или теплоизоляционных пористых материалов. В разделе 3.3 путем решения обратной задачи приводятся результаты идентификации переменного во времени коэффициента теплообмена.

2.3. Графоаналитический способ решения задач излучения

В предыдущем разделе приведены результаты исследования лучистого теплообмена в многослойных конструкциях при наличии энергосберегающих газовых прослоек. Однако ввиду нелинейности подлежащей решению системы уравнений, включающей уравнение излучения, применение аналитических методов в ряде случаев (при большом числе слоев) может оказаться затруднительным. Более простым и удобным для инженерных приложений является графоаналитический способ решения уравнений (2.4 – 2.7), основная идея которого сводится к следующему.

Объединяя уравнения (2.6) и (2.7), исключаем одну из неизвестных величин (t_4) и получаем вместо двух одно уравнение

$$q = \frac{\pi\left(t_3 - t_{\text{окр}}\right)}{\frac{1}{2\lambda_2}\ln\frac{d_4}{d_3} + \frac{1}{\alpha d_4}} \ . \qquad (2.13)$$

По уравнениям (2.4) и (2.13) строим графики функций соответственно $q = f_1(t_2)$ и $q = f_2(t_3)$, полагая величины t_1 и $t_{\text{окр}}$ заданными (рис. 2.6). Поскольку обе функции линейные, для их построения достаточно задать по два значения аргумента (t_2 и t_3 соответственно). Произвольно выбираем несколько значений теплового потока q_1, q_2, q_3 и т. д., и для каждого из них находим соответствующую пару величин (t_{2-1} и t_{3-1} – для q_1, t_{2-2} и t_{3-2} – для q_2 и т.д.), как показано на рисунке 2.6.

Для каждой пары найденных значений t_2 и t_3 вычисляем по формуле (2.5) лучистый тепловой поток, обозначая результаты расчетов как $q_{1\text{л}}$, $q_{2\text{л}}$ и так далее. Таким образом, каждому значению q_i $(i = 1, 2, ...)$, выбранному на графике рис. 2.6, ставится в соответствие некоторое расчетное значение лучистого потока $q_{i\text{л}}$.

По этим данным строится график зависимости $q_{\text{л}} = f(q)$ (рис. 2.7). Точка пересечения полученного графика с линией $q_{\text{л}} = q$ определяет искомую (расчетную) величину теплового потока $q_{\text{расч}}$, по которому с использованием графиков на рис. 2.6 находим расчетные значения t_2 и t_3. Температуру t_4 на внешней поверхности корпуса можно определить из уравнения теплоотдачи (2.7).

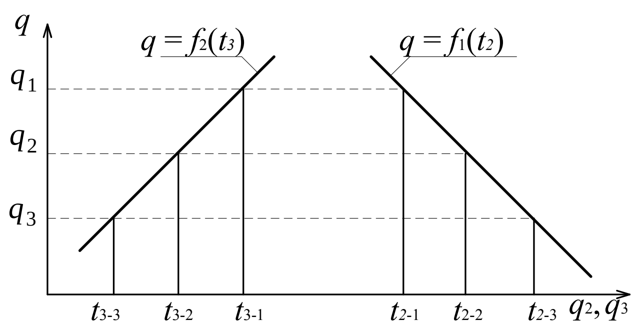


Рис. 2. К графоаналитическому методу расчёта

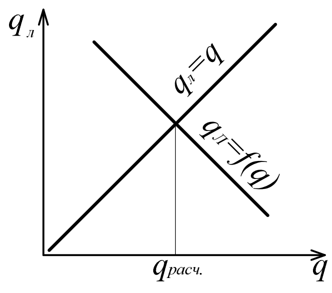


Рис. 3. Определение расчётного теплового потока

Результаты расчетов для случая $t_1 = 600°C$ приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

Тепловой поток, Вт/*м*	Температура, ^{0}C			
	t_1	t_2	t_3	t_4
277	600	489	457	64

Результаты исследований позволяют сделать вывод о том, что наибольший температурный перепад наблюдается на последнем (внешнем) слое изоляции.

3. Математическое моделирование переноса тепла, импульса и массы с учётом конечной скорости изменения теплоты

3.1. Модель теплообмена при конечной скорости изменения теплоты с симметричными краевыми условиями 1-го рода

В работах [38, 39, 41] получены математические модели локально-неравновесного теплообмена. Анализ полученных аналитических решений позволил заключить, что нагрев (охлаждение) тел характеризуется наличием тепловой волны, на фронте которой наблюдается скачок температуры. Причем, в отличие от моделей теплопроводности с параболическим уравнением, теплота не проникает за пределы фронта возмущения. После того как тепловая волна достигает центра тела имеет место скачок противоположного знака. Отметим, что в центре пластины по условию задачи задается условие адиабатной стенки, которое найденным решением выполняется.

Интерес представляет рассмотрение краевой задачи для случая, когда выполняются краевые условия 1-го рода на каждой из поверхностей пластины, то есть без разделения пластины на две симметричные половины. Целью такого исследования является выяснение выполнения полученным решением условия отсутствия теплообмена в центре пластины. Очевидно, что при неучёте релаксационных свойств среды, при использовании в математической постановке параболического уравнения, условие адиабатной стенки теплообмена в центре пластины будет выполняться. Однако, при учёте локальной неравновесности выполнение данного условия нужно еще доказать путём исследования точного решения задачи, математическая постановка которой будет

$$\frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau}+\tau_r\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial \tau^2}=a\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2}; \tag{3.1}$$

$$t(x,0)=t_0;\quad \frac{\partial t(x,0)}{\partial \tau}=0;\quad t(0,\tau)=t_{\text{ст}};\quad t(\delta,\tau)=t_{\text{ст}}, \tag{3.2}$$

где t_0 − начальная температура; $t_{\text{ст}}$ − температура стенки; δ − толщина пластины.

Обозначим:

$$\Theta=(t-t_{\text{ст}})/(t_0-t_{\text{ст}});\quad \xi=x/\delta;\quad \mathrm{Fo}=a\tau/\delta^2, \tag{3.3}$$

где Θ − относительная избыточная температура; ξ − безразмерная координата; Fo – число Фурье.

С учетом обозначений краевая задача (3.1), (3.2) будет

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_r\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2}; \tag{3.4}$$

$$(\mathrm{Fo}>0;\qquad 0<\xi<1)$$

$$\Theta(\xi,0)=1;\quad (3.5)\qquad \partial\Theta(\xi,0)/\partial\mathrm{Fo}=0; \tag{3.6}$$

$$\Theta(0,\mathrm{Fo})=0;\qquad (3.7)\qquad \Theta(1,\mathrm{Fo})=0, \tag{3.8}$$

где $\mathrm{Fo}_r=a\tau_r/\delta^2$.

Решение задачи (3.4) – (3.8) разыскивается в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\varphi(\mathrm{Fo})\psi(\xi). \tag{3.9}$$

где функция $\varphi(\mathrm{Fo})$ − зависит лишь от безразмерного времени, а $\psi(\xi)$ − лишь от безразмерной пространственной переменной.

Подставляя (3.9) в (3.4), находим

$$\mathrm{Fo}_r\frac{d^2\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^2}+\frac{d\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}}+\nu\varphi(\mathrm{Fo})=0; \tag{3.10}$$

$$\frac{d^2\varphi(\xi)}{d\xi^2}+\nu\varphi(\xi)=0\,, \qquad (3.11)$$

где ν − некоторая постоянная.

Подставляя (3.9) в (3.7), (3.8), находим краевые условия к уравнению (3.11)

$$\psi(0)=0; \qquad (3.12) \qquad\qquad \psi(1)=0\,; \qquad (3.13)$$

Решение задачи (3.11) – (3.13) имеет вид

$$\psi(\xi)=\cos\left(r\pi(1-2\xi)/2\right). \qquad (r=2i-1; \quad i=\overline{1,\infty}) \qquad (3.14)$$

Очевидно, что соотношение (3.14) удовлетворяет условиям (3.12), (3.13). Подстановкой (3.14) в (3.11) для нахождения собственных значений ν_k получаем следующую формулу

$$\nu_k = r^2\pi^2. \qquad \left(r=2k-1; \quad k=\overline{1,\infty}\right) \qquad (3.15)$$

Характеристическое уравнение применительно к уравнению (3.10) записывается в виде

$$\mathrm{Fo}_r z^2+z+\nu_k=0. \quad \left(k=\overline{1,\infty}\right) \qquad (3.16)$$

Уравнение (3.16) для любого собственного значения ν_k $(k=1,2,...)$ содержит два корня z_{1k}, z_{2k}

$$z_{ik}=\left(-1\pm\sqrt{1-4\mathrm{Fo}_r\nu_k}\right)\Big/(2\,\mathrm{Fo}_r)\,. \quad (i=1,\,2;\;\; k=1,\,2,...) \qquad (3.17)$$

Если дискриминант $D=(4\mathrm{Fo}_r\nu_k-1)<0$, то из (3.17) находим два отрицательных корня z_{1k} и z_{2k} $\left(k=\overline{1,\infty}\right)$. Решение уравнения (3.10) будет

$$\varphi_k(\mathrm{Fo})=C_{1k}\exp(z_{1k}\mathrm{Fo})+C_{2k}\exp(z_{2k}\mathrm{Fo}), \qquad (3.18)$$

где C_{1k} и C_{2k} −константы интегрирования, которые находятся из (3.5), (3.6).

Подставляя (3.14) и (3.18) в (3.9), и составляя сумму полученных частных решений, находим

$$\Theta(\xi,\,\mathrm{Fo})=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[C_{1k}\exp(z_{1k}\mathrm{Fo})+C_{2k}\exp(z_{2k}\mathrm{Fo})\right]\cos(r\pi(1-2\xi)/2)\right\}. \qquad (3.19)$$

$$(r=2k-1\,; \qquad k=\overline{1,\infty})$$

Подставляя (3.19) в (3.6), находим

$$C_{1k}=-\,C_{2k}z_{2k}/z_{1k}\;. \qquad (3.20)$$

Подставляя (3.19) в (3.5), с учетом (3.20) находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}\left(1-\frac{z_{2k}}{z_{1k}}\right)\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)=1. \qquad (3.21)$$

Выражение (3.21) является разложением единицы в ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи Штурма – Лиувилля. Умножим обе части выражения (3.21) на $\cos\left(j\pi(1-2\xi)/2\right)$ и вычислим интеграл в пределах от $\xi=0$ до $\xi=1$

$$\int_0^1\left[\sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}\left(1-\frac{z_{2k}}{z_{1k}}\right)\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)\right]\cos\left(j\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)d\xi-$$

$$-\int_0^1\cos\left(j\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)d\xi=0. \qquad (j=r=2k-1;\quad k=\overline{1,\infty}) \qquad (3.22)$$

Соотношение (3.22) ввиду ортогональности косинусов будет

$$\int_0^1 C_{2k}\left(1-\frac{z_{2k}}{z_{1k}}\right)\cos^2\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)d\xi-\int_0^1\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)d\xi=0. \qquad (3.23)$$

Вычисляя интегралы в (3.23), находим

$$C_{2k}=\left(\frac{4}{r\pi}\right)\Big/\left(1-\frac{z_{2k}}{z_{1k}}\right). \qquad (r=2k-1;\quad k=\overline{1,\infty}) \qquad (3.24)$$

В результате нахождения постоянных интегрирования C_{1k} и C_{2k} точное решение задачи (3.4) – (3.8) определяется из (3.19).

Если дискриминант соотношения (3.17) $D=(4\mathrm{Fo}_r\nu_k-1)>0$, то получим следующие два комплексных корня

$$z_{1k}=\gamma+i\beta;\quad z_{2k}=\gamma-i\beta,$$

где $i=\sqrt{-1}$; $\gamma=-0{,}5\,/\mathrm{Fo}_r$; $\beta=\left(\sqrt{4\mathrm{Fo}_r\nu_k-1}\right)/\left(2\mathrm{Fo}_r\right)$.

Частные решения уравнения (3.10) будут

$$\varphi_{1k}=\exp(\gamma+i\beta)\mathrm{Fo};\quad \varphi_{2k}=\exp(\gamma-i\beta)\mathrm{Fo}. \qquad (3.25)$$

Используя частные решения, запишем общее решение уравнения (3.10)

$$\varphi_k(\mathrm{Fo})=C_{1k}\exp\left[(\gamma+i\beta)\mathrm{Fo}\right]+C_{2k}\exp\left[(\gamma-i\beta)\mathrm{Fo}\right], \qquad (3.26)$$

где C_{jk} $\left(j=1,2;\quad k=\overline{1,\infty}\right)$ − неизвестные постоянные.

Соотношение (3.26) можно переписать так

$$\varphi_k(\mathrm{Fo}) = \exp(\gamma\mathrm{Fo})[C_{1k}\exp(i\beta\mathrm{Fo}) + C_{2k}\exp(-i\beta\mathrm{Fo})]. \qquad (3.27)$$

По формулам Эйлера $\exp(is) = \cos s + i\sin s$; $\exp(-is) = \cos s - i\sin s$ соотношение (3.27) приводится к виду

$$\varphi_k(\mathrm{Fo}) = \exp(\gamma\mathrm{Fo})\left[C_{1k}\left(\cos\left(\beta\mathrm{Fo}\right) + i\,\sin\left(\beta\mathrm{Fo}\right)\right) +\right.$$

$$\left. + C_{2k}\left(\cos\left(\beta\mathrm{Fo}\right) - i\,\sin\left(\beta\mathrm{Fo}\right)\right)\right] = \exp(\gamma\mathrm{Fo})[(C_{1k} + C_{2k})\times$$

$$\times\cos(\beta\mathrm{Fo}) - i\,(C_{2k} - C_{1k})\sin(\beta\mathrm{Fo})]\ . \qquad (3.28)$$

Соотношение (3.28) с учетом обозначений $C_{1k} + C_{2k} = B_{1k}$; $i\,(C_{2k} - C_{1k}) = B_{2k}$ будет

$$\varphi_k(\mathrm{Fo}) = \exp(\gamma\mathrm{Fo})[B_{1k}\cos(\beta\mathrm{Fo}) - B_{2k}\sin(\beta\mathrm{Fo})]. \qquad (3.29)$$

Подставляя (3.29), (3.14) в (3.9) и определяя сумму частных решений, получаем

$$\Theta(\xi,\,\mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\exp(\gamma\mathrm{Fo})[B_{1k}\cos\left(\beta\,\mathrm{Fo}\right) - B_{2k}\sin\left(\beta\,\mathrm{Fo}\right)]\right]\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)\right\}. \qquad (3.30)$$

$$\left(r = 2k-1;\quad k = \overline{1,\infty}\right)$$

Для определения констант B_{1k} и B_{2k} применяем начальные условия (3.5), (3.6). Подстановкой (3.30) в (3.6), находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\gamma B_{1k} - \beta B_{2k})\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right) = 0.$$

Тогда будем иметь

$$B_{1k} = \beta\,B_{2k}/\gamma\,. \qquad (3.31)$$

После подстановки (3.30) в (3.5) с учетом (3.31) находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta B_{2k}}{\gamma}\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right) = 1\,. \qquad (3.32)$$

Умножая обе части соотношения (3.32) на $\cos\left(j\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)$ $(j = 2k-1)$ и интегрируя в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$, находим

$$\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta B_{2k}}{\gamma}\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)\cos\left(j\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)d\xi = \int_0^1\cos\left(j\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)d\xi\,. \qquad (3.33)$$

Соотношение (3.33) с учетом ортогональности косинусов будет

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta B_{2k}}{\gamma} \cos^2\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right) d\xi - \int_0^1 \cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right) d\xi = 0 . \qquad (3.34)$$

Определяя интегралы в (3.34), получаем

$$B_{2k} = \frac{4\gamma}{r\pi\beta} . \qquad (3.35)$$

В результате определения констант B_{1k} и B_{2k} решение задачи (3.4) – (3.8) в замкнутом виде находится из (3.30).

Результаты исследований по формулам (3.19), (3.30) представлены на рис. 3.1 – 3.7. Из анализа следует, что при малых величинах времени Fo (например, при $\mathrm{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$) на границе теплового фронта наблюдается скачок безразмерной температуры, то есть образуется фронт волны, в пределах которого температура изменяется от её значения на фронте до начальной величины. Область среды, находящаяся за фронтом теплового возмущения, остается невозмущенной, а температура здесь равняется начальной температуре. При достаточно больших значениях времени ($\mathrm{Fo} > 0{,}07$; $\mathrm{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$) значения температуры совпадают с точными их величинами, получаемыми из решения параболического уравнения (при равенстве нулю второго числа левой части соотношения (3.4)) [49].

Температура на фронте волны дается формулой $T(t) = T_0 - \exp[-t/2\tau_r]$, которая полностью совпадает с соотношением, полученным для полупространства применительно к распределению температуры при учете конечной скорости тепловой волны. При этом закон движения фронта волны по координате от времени является линейным, что подтверждается исследованиями других авторов [9].

Ввиду того что величина скачка скорости изменяется во времени, то, следовательно, в процессе движения тепловой волны происходит возникновение изотерм внутри пластины (см. рис. 3.8) В случае, если скачок температуры происходит вплоть до времени, когда фронт тепловой волны достигает центра тела, имеет место обратная волна со скачком температуры на её фронте противоположного знака по сравнению со скачком в прямой волне (рис. 3.7 при $\mathrm{Fo} \geq 0{,}56$). Наличие скачка температуры в обратной волне приводит к возникновению отрицательных температур в процессе охлаждения пластины, то есть температура пластины может оказаться ниже температуры, задаваемой краевыми условиями 1-го рода на ее поверхностях (см. распределение температуры при $\mathrm{Fo} > 0{,}85$). Подобные результаты свидетельствуют о нарушении закона сохранения энергии и, в частности, второго закона термодинамики, справедливого для всех диффузионных процессов.

Число Фурье задачи (3.4) – (3.8) определено по формуле $\mathrm{Fo} = at/\delta^2$. Ввиду того что в этой задаче толщина пластины соответствует 2δ, то для корректного сравнения её результатов с результатами, полученными в работах [22, 49], число Фурье в задаче должно быть $\mathrm{Fo} = at/(4\delta^4)$. В связи с чем, все расчеты, выполненные по соотношениям (3.19), (3.30) и приведенные на рис. 3.1 – 3.8, проводились для числа Фурье, равного величине $\mathrm{Fo}/4$, найденной из условия равенства чисел Фурье указанных задач.

Анализ результатов, данных на рис. 3.1 – 3.8, позволяет заключить, что они полностью совпадают с результатами, полученными в работах [38, 39, 41], найденных из условия решения задачи для половины толщины пластины, то есть при задании граничного условия адиабатной стенки при $\xi = 0$. Следовательно, условие отсутствия теплообмена в центре пластины выполняется при задании симметричных краевых условий 1-го рода применительно к решению гиперболического уравнения для пластины.

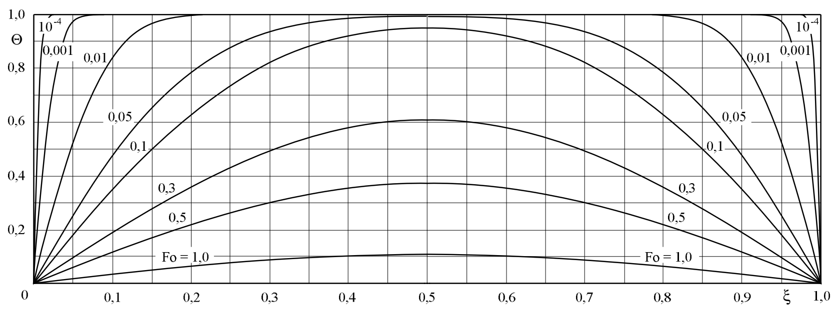


Рис 3.1. Температура в пластине. $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10^{-7}$; $n = 10^4$

(n – число членов решений (3.19), (3.30))

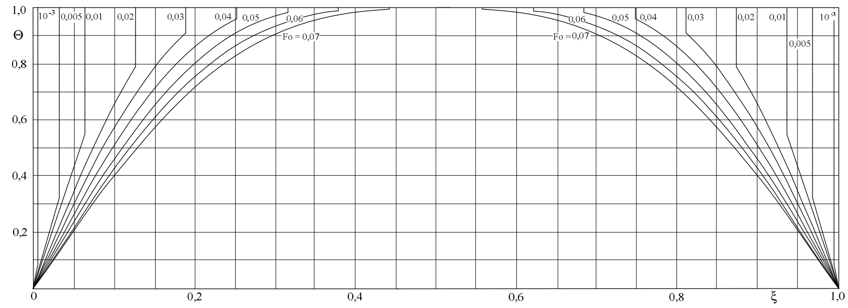


Рис. 3.2. Температура в пластине. По формулам (3.19), (3.30). $\mathrm{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$

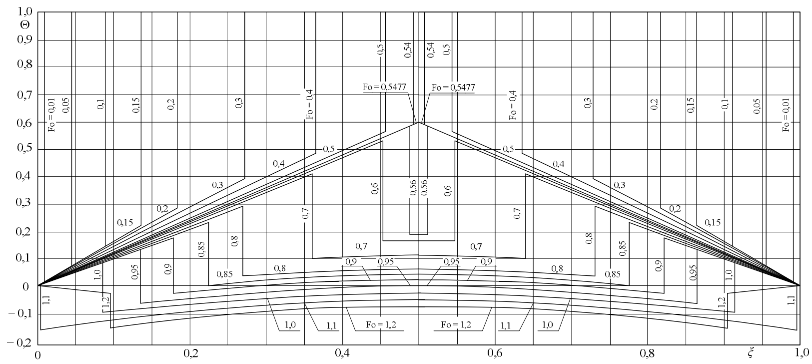


Рис. 3.3. Температура в пластине. По формулам (3.19), (3.30). $\mathrm{Fo}_r = 0{,}3$

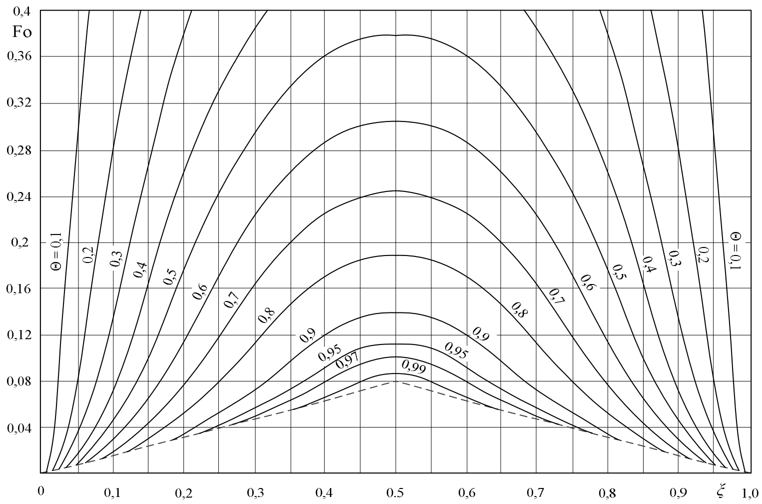


Рис. 3.4. Изотермы $\Theta = const$ по координате ξ во времени.

$\left(\mathrm{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}\right)$. ------ − линия перемещения фронта волны

3.2. Приближенный метод исследования решений задач теплопроводности с учётом локальной неравновесности процессов

Получено приближенное решение гиперболического уравнения для пластины при симметричных краевых условиях 1-го рода. Найденное решение описывает температурное состояние на первой стадии, то есть до момента времени, когда температура на фронте волны становится равной начальной температуре. Решение имеет вид произведения алгебраической координатной функции на экспоненциальную функцию времени, что позволило проводить исследование температуры тела с нахождением изотерм и скоростей их движения. На основе полученного решения по известным значениям распределения температуры во времени в одной из точек пластины на основе решения обратной задачи найден коэффициент релаксации, экспериментальное определение которого затруднительно.

Известно, что в математической постановке температурной задачи с использованием параболического уравнения не учитывается конечная скорость распределения теплоты − скорость передвижения фронта принимается бесконечной. В большинстве реальных практических случаев такая модель теплопроводности позволяет с достаточной для практических приложений точностью определять температурное состояние конструкции. Однако на практике все большее применение находят интенсивные процессы, время течения которых близкó к времени релаксации τ_r. Например, при прогреве металлов лазерными импульсами (длительностью до фемтосекунд), где скорость нагревания сопоставима с временем термализации, необходимым для обмена энергией электронов с атомной решеткой и со временем релаксации, необходимым для изменения их состояния. К ним также относятся процессы нагрева при трении с большой скоростью, при анализе механизмов теплового удара, локального нагрева при распространении трещины и другие процессы [15].

Все эти действительные реальные процессы характеризуются возникновением при их протекании фронтовых поверхностей, при переходе через которые искомые функции и их производные имеют разрыв. Применение параболического уравнения, при выводе которого принимается, что температура является непрерывной функцией, оказывается неприемлемым. В связи с чем, для математического моделирования таких процессов применяются гиперболические операторы.

Постановка краевой задачи при краевых условиях 1-го рода и с учетом конечной скорости распределения теплового возмущения представляется в виде [1 – 3, 6 – 9]

$$\begin{gathered} \frac{\partial t(x,\tau)}{\partial\tau} + \tau_r \frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial\tau^2} = a\frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2}; \quad (\tau > 0;\ 0 < x < \delta) \\ t(x,0) = t_0; \quad \frac{\partial t(x,0)}{\partial\tau} = 0; \quad \frac{\partial t(0,\tau)}{\partial x} = 0; \quad t(\delta,\tau) = t_{\text{ст}}, \end{gathered} \tag{3.36}$$

где t – температура; x – координата; τ – время; t_0 – начальная температура; $t_{\text{ст}}$ – температура стенки; δ – толщина пластины; a – температуропроводность; $\tau_r = a/w^2$ – коэффициент релаксации (время релаксации); w – скорость тепловой волны.

Обозначим:

$$\Theta = (t - t_{\text{ст}})/(t_0 - t_{\text{ст}}); \quad \xi = x/\delta; \quad \text{Fo} = a\tau/\delta^2;\ \text{Fo}_r = a\tau_r/\delta^2,$$

где Θ – безразмерная температура; ξ – относительная координата; Fo – безразмерное время; Fo_r – безразмерный коэффициент релаксации.

С учетом обозначений задача (3.36) приводится к виду

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\text{Fo})}{\partial\text{Fo}} + \text{Fo}_r \frac{\partial^2\Theta(\xi,\text{Fo})}{\partial\text{Fo}^2} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,\text{Fo})}{\partial\xi^2}; \qquad (\text{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1) \tag{3.37}$$

$$\Theta(\xi,0) = 1; \tag{3.38}$$

$$\partial\Theta(\xi,0)/\partial\text{Fo} = 0; \tag{3.39}$$

$$\partial\Theta(0,\text{Fo})/\partial\xi = 0; \tag{3.40}$$

$$\Theta(1,\text{Fo}) = 0. \tag{3.41}$$

В работах [39, 41] используя метод Фурье, найдено точное решение краевой задачи (3.37) – (3.41), имеющее вид

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_{1k} \exp(z_{1k}\mathrm{Fo}) + C_{2k} \exp(z_{2k}\mathrm{Fo}) \right] \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi \right),$$

$$(r = 2k - 1; \;\; k = \overline{1, \infty}) \qquad (3.42)$$

где $z_{ik} = (-1 \pm \sqrt{1 - 4\mathrm{Fo}_r \nu_k})/(2\mathrm{Fo}_r)$ $\quad (i = 1, 2; \quad k = \overline{1, \infty});$ $\quad \nu_k = r^2\pi^2 / 4$

$$(r = 2k - 1; \; k = \overline{1, \infty}); \qquad C_{1k} = -C_{2k} z_{2k} / z_{1k}; \qquad C_{2k} = \pm \frac{4(-r)^k}{r\pi} / \left(1 - \frac{z_{2k}}{z_{1k}} \right).$$

Расчеты температуры по формуле (3.42) при $\mathrm{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$ даны на рис. 3.9. Из анализа следует, что при малых величинах безразмерного времени Fo на фронте возмущения имеет место скачок на температурных кривых, то есть по существу образуется фронт волны, а на его границе наблюдается скачок температуры от ее значения в точке скачка до величины начальной температуры. Следовательно, область за пределами фронта волны, остается невозмущенной и имеющей начальную температуру.

Исследования решения (3.42) показали, что для некоторых чисел Fo_r ($\mathrm{Fo}_r > 10^{-2}$) при достижении фронтом волны центра тела наблюдается обратная волна, также имеющая скачок температуры на её фронте [15, 38, 39, 41].

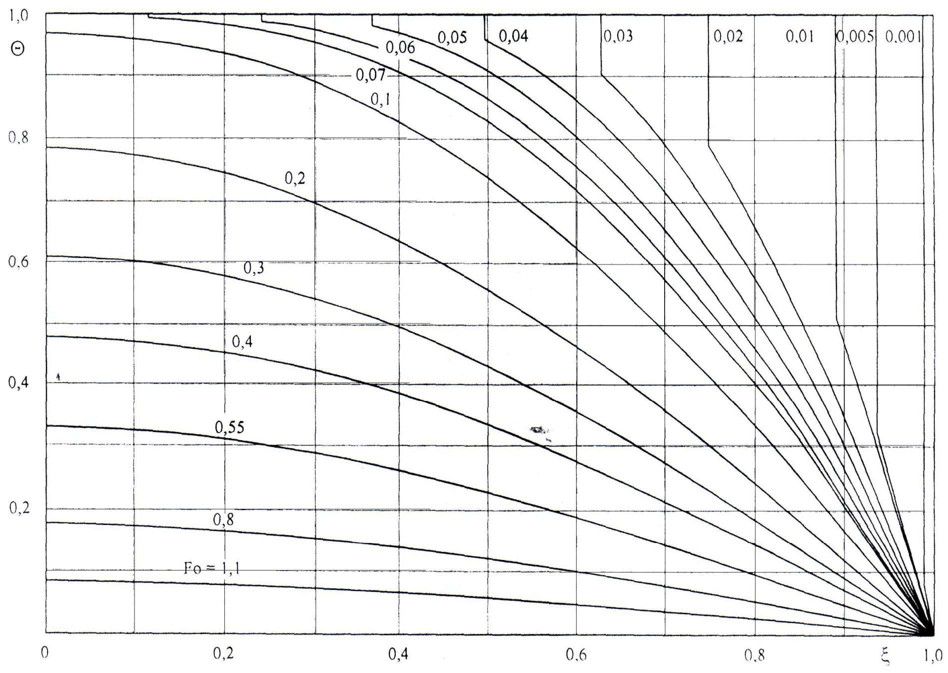


Рис. 3.9. Температуры при учете конечной скорости изменения теплоты ($\mathrm{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$)

Из анализа результатов следует, что температура в точках скачка (на фронте волны) подчиняется формуле

$$t(\tau) = t_0 - \exp[-\tau/(2\tau_r)]. \qquad (3.43)$$

Эта формула полностью согласуется с соотношением, описывающим изменение температуры на фронте волны, полученным в работах [9, 49] для полупространства.

Соотношение (3.43) в безразмерном виде будет

$$\Theta(\mathrm{Fo}) = 1 - \exp\left(-0{,}5\mathrm{Fo}\mathrm{Fo}_r^{-1}\right). \qquad (3.44)$$

Расчеты, выполненные по формуле (3.43), показали линейный закон перемещения фронта волны во времени $x_ф = \delta - w\tau$, или в безразмерном виде

$$\xi_ф(\mathrm{Fo}) = 1 - \mathrm{Fo}\mathrm{Fo}_r^{-0,5}. \qquad (3.45)$$

Линейный закон подтверждается также исследованиями других авторов [4], выполненными для полупространства.

Из анализа результатов рисунка 3.9, можно сделать вывод, что после того как на фронте волны температура становится равной начальной температуре (применительно к рисунку 3.9 это происходит при $\mathrm{Fo} = 0{,}073$), для всех последующих моментов времени распределение температуры, найденное по формуле (3.42), совпадает с решением параболического уравнения при тех же граничных условиях.

Сходимость ряда (3.42) сильно зависит от числа Фурье. Например, при $\mathrm{Fo} \geq 0{,}1$ для сходимости требуется лишь несколько членов этого ряда. При $0{,}0001 \leq \mathrm{Fo} < 0{,}1$ сходимость наблюдается при $10 \div 1000$ членах ряда. Для всех Фурье, когда наблюдается скачок температуры, количество членов ряда (3.42) необходимых для его сходимости, возрастает (от 10^4 при $\mathrm{Fo} = 10^{-5}$ до 10^6 при $\mathrm{Fo} = 10^{-8}$). При уменьшении Фурье число членов решений может быть равным нескольким миллионам. Для их расчетов необходимы компьютеры высокого быстродействия. Максимальное число слагаемых ряда, использованных в данной работе, было равным 2000000 (для $\mathrm{Fo} = 10^{-9}$). Машинное время компьютера (Intel® Core™ 2 Quad CPU Q9400 2,66 ГГц, 3,25 Гб ОЗУ) было равно 8 часам.

Учитывая указанные выше проблемы нахождения решений для малых величин времени, актуальной является задача нахождения более простых выражений, описывающих температурное состояние для моментов времени, при которых наблюдается скачок температурных кривых. С этой целью рассмотрим задачу (3.37) – (3.41) лишь для 1-ой стадии $0 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_1$, где Fo_1 – время, при котором температура на фронте волны становится равной начальной температуре, т.е. $\Theta(\xi_ф, \mathrm{Fo}_1) = 1$.

Постановка задачи в данном случае будет

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_r \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}; \quad (0 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_1; 0 \le \xi \le \xi_ф(\mathrm{Fo})) \qquad (3.46)$$

$$\Theta(1;0) = 0; \quad (3.47) \quad \Theta(1,\mathrm{Fo}) = 0; \quad (3.48) \quad \Theta(\xi_ф, \mathrm{Fo}) = 1 - \exp\left(-0{,}5\mathrm{Fo}\mathrm{Fo}_r^{-1}\right), \qquad (3.49)$$

где
$$\xi_ф(\mathrm{Fo}) = 1 - \mathrm{Fo}\mathrm{Fo}_r^{-0,5}. \qquad (3.50)$$

Отметим, что в задаче (3.46) – (3.50) учтены соотношения (3.44), (3.45) и, к тому же, в отличие от (3.38), принимается нулевое начальное условие. Это связано с тем, что согласно соотношению (3.49), совпадающему с соотношением (3.44), температура на фронте волны принимается известной в диапазоне времени первой стадии. Отметим, что начальное условие (3.47) следует из соотношения (3.49), согласно которому при $\mathrm{Fo} = 0$ $\Theta(1;0) = 0$.

Следуя методу Канторовича, решение задачи (3.46) – (3.49) разыскивается в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = b(\mathrm{Fo})(1 - \xi^k), \qquad (3.51)$$

где $b(\mathrm{Fo})$ – неизвестная функция времени; k – неизвестный коэффициент.

Соотношение (3.51) удовлетворяет граничному условию (3.48). Для нахождения функции $b(\mathrm{Fo})$ используем краевое условие (3.49). Подставляя (3.51) в (3.49), получаем

$$b(\mathrm{Fo}) = [1 - \exp(-0{,}5\mathrm{Fo}\mathrm{Fo}_r^{-1})]/(1 - \xi_ф^k). \qquad (3.52)$$

Подставляя (3.52) в (3.51), будем иметь

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \frac{1-\xi^k}{1-\xi_\text{ф}^k}[1-\exp(-0{,}5\mathrm{Fo}\mathrm{Fo}_r^{-1})], \tag{3.53}$$

где $\xi_\text{ф}$ находится из (3.50).

Соотношение (3.53), независимо от величины коэффициента k, удовлетворяет начальному условию (3.47) и краевым условиям (3.48), (3.49). Неизвестный коэффициент k находится так, чтобы удовлетворялось уравнение (3.46). Подставляя (3.53) в (3.46), положив $\xi = \xi_\text{ф}$, относительно коэффициента k получаем следующее трансцендентное уравнение

$$\frac{0{,}5A_7}{A_3^{-1}\mathrm{Fo}_r} - \frac{kA_1}{A_4A_2^{-k}} + \frac{2A_1k^2}{A_7A_2^{2(1-k)}} - \frac{kA_3}{A_5A_2^{-k}} + \frac{A_1k^2}{A_6A_2^{-k}} - \frac{kA_1}{A_6A_2^{-k}} - \frac{0{,}25A_7}{\mathrm{Fo}_r^2A_3^{-1}} = 0, \tag{3.54}$$

где $A_1 = 1 - A_3$; $A_2 = 1 - \mathrm{Fo}/\mathrm{Fo}_r^{0,5}$; $A_3 = \exp(-0{,}5\mathrm{Fo}/\mathrm{Fo}_r)$; $A_4 = A_2\mathrm{Fo}_r^{0,5}$;

$$A_5 = A_2\mathrm{Fo}_r^{1,5};\ A_6 = A_2^2\mathrm{Fo}_r;\ A_7 = 1 - A_2^k.$$

Принятие $\xi = \xi_\phi$ связано с выполнением соотношений (3.49), (3.50), полученных из точного решения вида (3.42) задачи (3.37) – (3.41). Таким образом, в уравнении (3.54) коэффициент κ зависит лишь от времени Fo. Для определения его числового значения проинтегрируем уравнение (3.54) по переменной Fo в пределах от $\mathrm{Fo} = 0$ до $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1$, где величина Fo_1 для каждого конкретного значения Fo_r находится из соотношения (3.42), положив $\Theta(\xi, \mathrm{Fo}_1) = 1$, то есть Fo_1 – это время, в течение которого температура на фронте скачка температурной кривой становится равной единице.

Определяя интеграл невязки уравнения (3.54), получаем

$$\int_0^{\mathrm{Fo}_1}\left[\frac{0{,}5A_7}{A_3^{-1}\mathrm{Fo}_r} - \frac{kA_1}{A_4A_2^{-k}} + \frac{2A_1k^2}{A_7A_2^{2(1-k)}} - \frac{kA_3}{A_5A_2^{-k}} + \frac{A_1k^2}{A_6A_2^{-k}} - \frac{kA_1}{A_6A_2^{-k}} - \frac{0{,}25A_7}{\mathrm{Fo}_r^2A_3^{-1}}\right]d\mathrm{Fo} = 0. \tag{3.55}$$

Определяя интегралы в (3.55), относительно коэффициента k получаем следующее соотношение

$$k(\mathrm{Fo}_r, \mathrm{Fo}_1) = 2\ln \mathrm{Fo}_r^{0,5}\mathrm{Fo}_1 / \left[\mathrm{Fo}_1(B-2) - B\mathrm{Fo}_r^{0,5}\right], \tag{3.56}$$

где $B = \ln\left[(\mathrm{Fo}_r - 2\mathrm{Fo}_r^{0,5}\mathrm{Fo}_1 + \mathrm{Fo}_1^2)/\mathrm{Fo}_r\right]$.

После нахождения коэффициента k из (3.56) решение задачи (3.46) – (3.50) находится из (3.53). Расчеты по формуле (3.53) при $\mathrm{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$ и точное решение, определяемое по формуле (3.42), представлены на рисунке 3.10. Из анализа следует, что отклонение решений на отрезке временной координаты $0 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_1$ не превосходит 2,5%, причем, с уменьшением числа Fo точность решения по формуле (3.53) возрастает и уже при $\mathrm{Fo} \le 0{,}02$ наблюдается практическое совпадение с точным. Величина коэффициента k для $\mathrm{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$ оказалась равной $k =$ 2,5376. Величина Fo_1, найденная из точного решения (3.53), составляет: $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}073$.

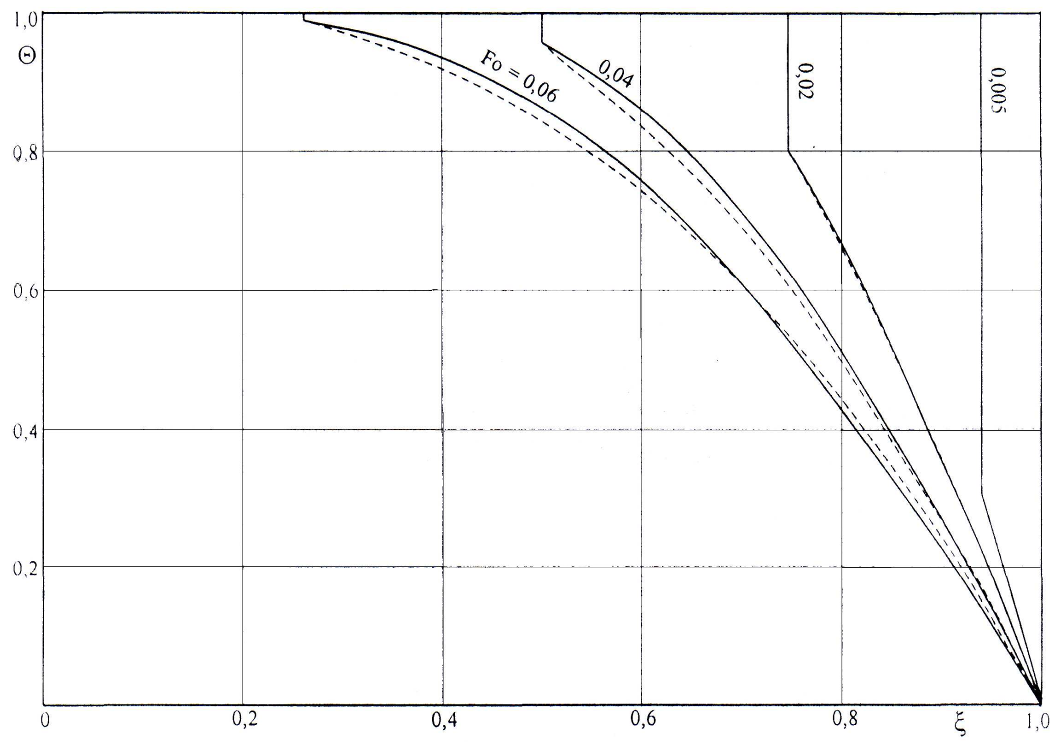


Рис. 3.10. Температура в пластине ($\mathrm{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$; $k = 2{,}5376$; $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}073$).

-------- – по формуле (3.53); ——— – по формуле (3.42) (точное решение).

Расчеты по формуле (3.53) для $\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$ представлены на рисунке 3.11. Их анализ приводит к выводу о том, что отклонение от точного решения в данном случае не более 1,5 %. Следовательно, с уменьшением величины Fo_r точность решения по формуле (3.53) возрастает. Значения величин k и Fo_1 для $\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$ составляют: $k = 531{,}8699$; $\mathrm{Fo}_1 = 9{,}48683298 \cdot 10^{-6}$.

Соотношение (3.53) в отличие от решения (3.42) может быть эффективно использовано при решении обратных задач, задач термической упругости, автоматического управления энергетическими процессами. Например, по известному из эксперимента изменению температуры от времени в некоторой точке тела решением обратной задачи можно идентифицировать (восстановить) коэффициент релаксации τ_r практическое определение которого представляет значительные трудности.

Ввиду достаточно простой зависимости безразмерной температуры Θ от пространственной переменной ξ соотношение (3.53) удобно использовать для построения изотерм в координатах $\xi - \mathrm{Fo}$. Отметим, что построение изотерм путем непосредственного выражения координаты ξ через переменную Fo из решения (3.42) не представляется возможным. В связи с чем, изотермы точного решения строились путем многовариантных расчетов по соотношению (3.42) с последующим графическим построением кривых для каждой отдельной изотермы.

Выражая в решении (3.53) координату ξ как функцию $\Theta(\xi, \mathrm{Fo})$ и Fo, получаем следующую формулу для построения изотерм (при $\mathrm{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$)

$$\xi(\Theta, \mathrm{Fo}) = \left[1 - \Theta(\xi, \mathrm{Fo}) \frac{1 - (1 - 12{,}649110\mathrm{Fo})^{2,537586}}{1 - \exp(-80\mathrm{Fo})}\right]^{0,394075}. \qquad (3.57)$$

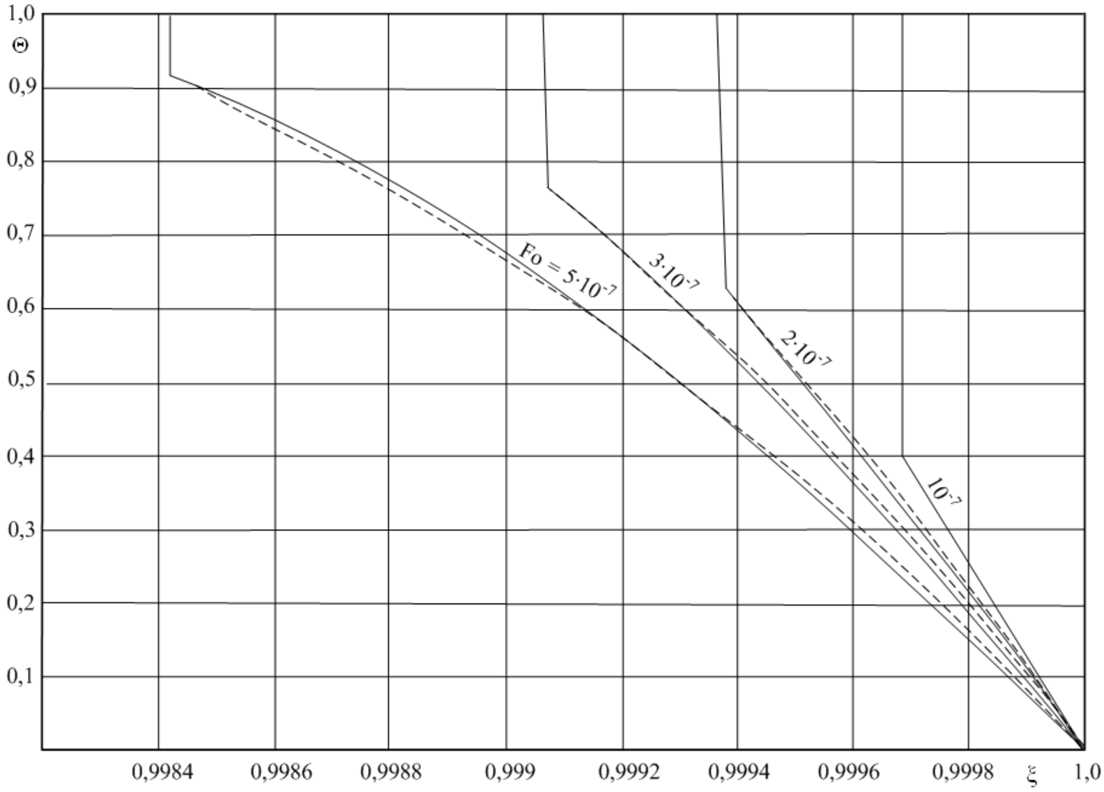


Рис. 3.11. Температура в пластине ($\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$; $\mathrm{Fo}_1 = 9{,}48683298\cdot 10^{-6}$; $k = 531{,}8699$).

-------- – по формуле (3.53); ——— – по формуле (3.42) (точное решение).

Задаваясь произвольными значениями $\Theta = const$, из (3.57) получаем графики изотерм в координатах $\xi - \mathrm{Fo}$. Графики изотерм, полученные по формуле (3.57), в сравнении с кривыми изотерм, полученными из точного решения, представлены на рисунке 3.12. Штриховой линией обозначена линия перемещения фронта. Отметим, что по формуле (3.57) построены изотермы лишь до момента времени $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1$. Анализ движения изотерм по координате во времени показывает, что каждая из них возникает внутри тела лишь в определенный момент времени и в строго определенной точке по координате ξ. Отличие изотерм, полученных по формуле (3.57) от изотерм, найденных на основе использования формулы (3.42), составляет 1,5%.

Формула для построения изотерм при малых значениях Fo_r ($\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$) приводится к виду

$$\xi(\Theta, \mathrm{Fo}) = \left[1 - \Theta(\xi, \mathrm{Fo}) \frac{1 - (1 - 3162{,}27766\,\mathrm{Fo})^{531{,}8699}}{1 - \exp(-5000000\,\mathrm{Fo})} \right]^{0{,}00188016} . \qquad (3.58)$$

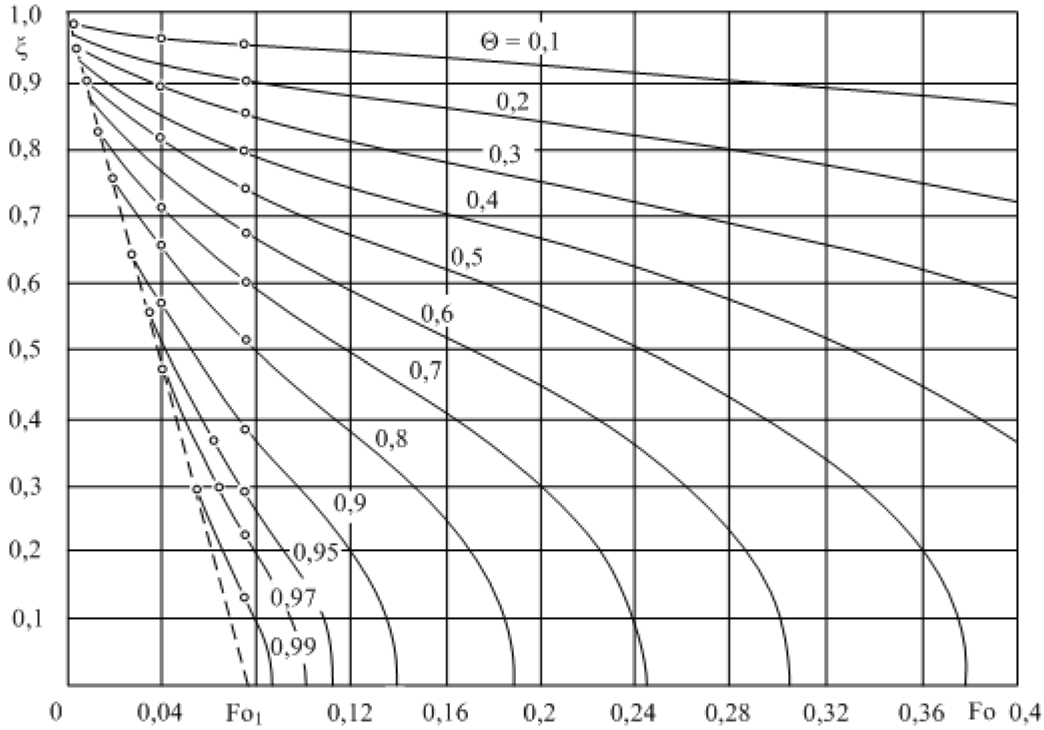


Рис. 3.12. Распределение изотерм $\Theta = const$ по координате ξ во времени. -------- – линия перемещения фронта волны. ——— – расчет с использованием формулы (3.42); ◦– расчет по формуле (3.57); $\mathrm{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$; $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}073$

Графики изотерм, найденных по формуле (3.58), представлены на рисунках 3.13, 3.14. Из их анализа следует, что при малых значениях Fo_r в диапазоне чисел $0 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_1$ изотермы принимают вид практически прямых линий, слабо наклоненных в горизонтальном направлении. Следовательно, скорости изотерм в этом интервале времени будет незначительны.

Определяя первые производные по времени Fo от соотношений (3.57), (3.58), можно найти скорости изотерм по координате ξ во времени. Например, при $\mathrm{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$ формула для определения скоростей изотерм имеет вид

$$\upsilon(\Theta, \mathrm{Fo}) = \frac{d\xi}{d\mathrm{Fo}} = \frac{0{,}39075}{\xi(\Theta, \mathrm{Fo})^{0{,}6059}} \left[-32{,}098204\Theta \frac{(1 - 12{,}64911\mathrm{Fo})^{1{,}537586}}{1 - \exp(-80\mathrm{Fo})} + \right.$$

$$\left. + 80\Theta \frac{1 - (1 - 12{,}64911\mathrm{Fo})^{2{,}537586}}{1 - \exp(-80\mathrm{Fo})} \exp(-80\mathrm{Fo}) \right], \qquad (3.59)$$

где $\xi(\Theta, \mathrm{Fo})$ определяется по соотношению (3.57).

Результаты расчетов скоростей изотерм по формуле (3.59) представлены на рисунке 3.14, (скорости изотерм и для $\mathrm{Fo} > 0{,}073$ получены с использованием точного решения (3.42)). Отрицательные знаки скоростей объясняются тем, что изотермы движутся противоположно направлению оси ξ. Из анализа результатов следует, что изотермы, возникая внутри тела, уже в момент возникновения имеют бесконечные начальные скорости. При дальнейшем увеличении времени скорости уменьшаются до некоторого минимального для каждой изотермы значения. С увеличением времени скорости изотерм начинают возрастать, устремляясь к бесконечным значениям при приближении изотерм к граничной (адиабатной) стенке ($\xi = 0$), где в исходной задаче задано условие (3.40).

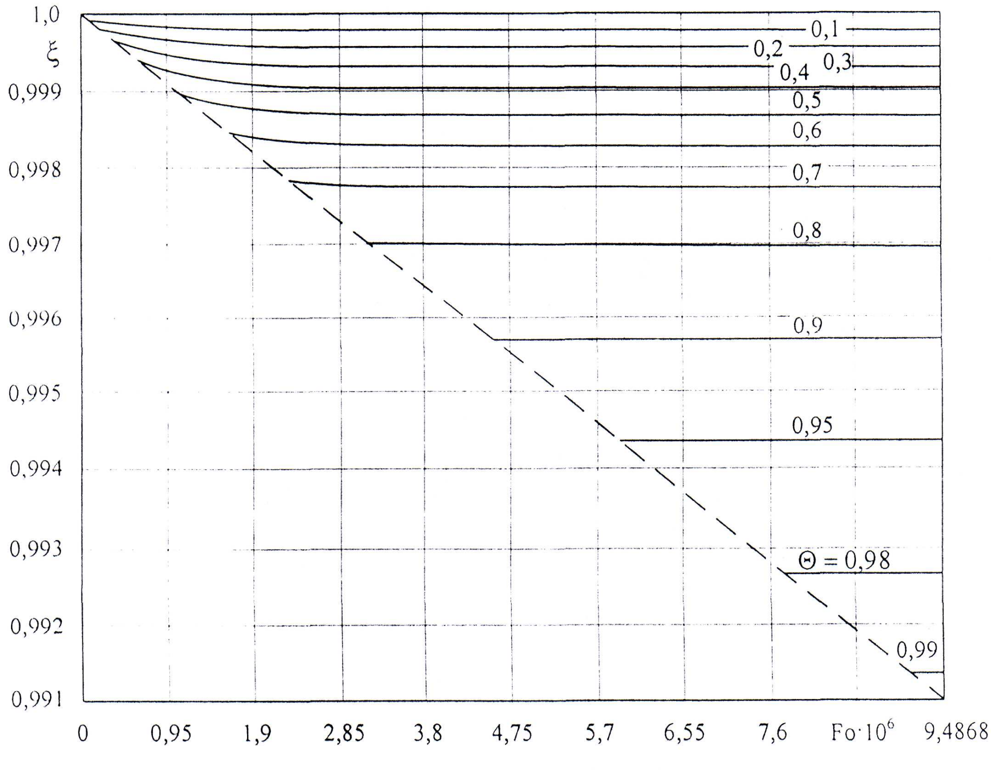


Рис. 3.13. Изотермы $\Theta = const$. ——— – расчет по формуле (3.58);
-------- – линия перемещения фронта волны; $\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$; $\mathrm{Fo}_1 = 9{,}4868 \cdot 10^{-6}$

Преимущества найденного аналитического решения вида (3.53) в том, что при наличии экспериментальных исследований изменения температуры в некоторой точке пластины решением обратной задачи может быть определена величина числа $\mathrm{Fo}_r = a\tau_r / \delta^2$, из которого можно найти коэффициент релаксации τ_r.

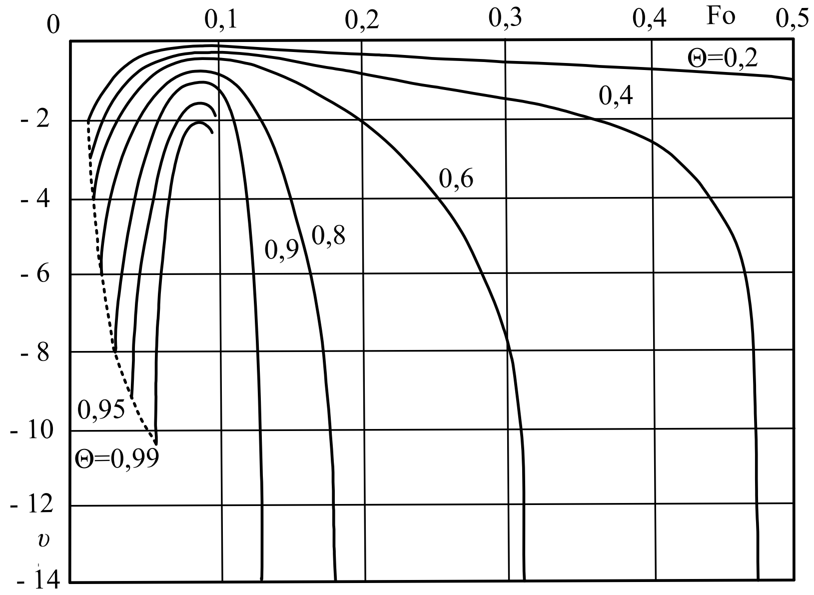


Рис. 3.14. Скорости изотерм по координате ξ во времени Fo.
$\mathrm{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$. -------- – линия перемещения фронта волны во времени

Допустим, что из эксперимента известно изменение температуры в точке $\xi = 0{,}8$ в диапазоне Фурье $\mathrm{Fo}_1 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_4$ (в качестве экспериментальных данных будем использовать результаты решения задачи (3.37) – (3.41) вида (3.42)). Кривая изменения полученной таким путем температуры приведена на риунке 3.15.

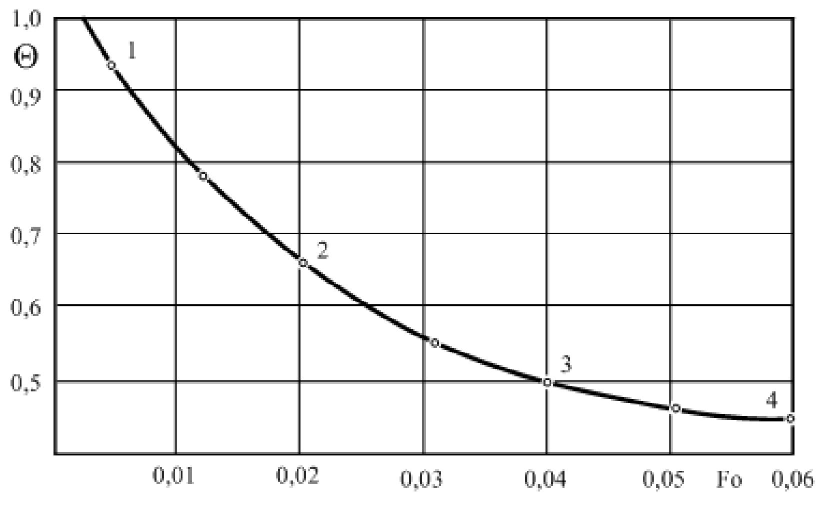


Рис. 3.15. Аппроксимация точного решения соотношением (3.60).
——— – точное решение по формуле (3.42); ○– расчет по формуле (3.60);

Аппроксимируем эту кривую следующей функцией

$$\Theta(0{,}8;\mathrm{Fo}) = \sum_{i=0}^{3} b_i \mathrm{Fo}^i \ , \qquad (3.60)$$

где $b_i \left(i=\overline{0,3}\right)$ – неизвестные коэффициенты, для определения которых используются расчетные данные, полученные по формуле (3.42).

Записывая соотношение (3.60) для точек 1, 2, 3, 4 кривой, считая, что температуры в этих точках наблюдаются соответственно для чисел Фурье, равных $\mathrm{Fo}_1=0{,}005$, $\mathrm{Fo}_2=0{,}02$, $\mathrm{Fo}_3=0{,}04$, $\mathrm{Fo}_4=0{,}06$, для нахождения неизвестных коэффициентов $b_i \left(i=\overline{0,3}\right)$ имеем систему, включающую четыре алгебраических линейных уравнения, в которой значения полученных из решения температур в точках 1, 2, 3, 4 были равны $\Theta(\mathrm{Fo}_1)=0{,}933$, $\Theta(\mathrm{Fo}_2)=0{,}659$, $\Theta(\mathrm{Fo}_3)=0{,}497$, $\Theta(\mathrm{Fo}_4)=0{,}441$. Из решения данной системы находим

$$b_1=1{,}064,\quad b_2=-28{,}593,\quad b_3=475{,}705,\quad b_4=-2873{,}298. \tag{3.61}$$

Расчеты по соотношению (3.60) с учетом (3.61) представлены на рис. 3.15. Из их анализа можно заключить об практическом совпадении результатов аппроксимации с точным решением, имитирующем экспериментальные данные.

Решением обратной задачи на основе соотношения (3.53) можно идентифицировать (восстановить) число Fo_r. Подставляя (3.60) в левую часть решения (3.53), положив $\xi=0{,}8$ и, определяя интеграл от найденного соотношения в пределах $\mathrm{Fo}_1 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_4$, получаем

$$\int\limits_{\mathrm{Fo}_1}^{\mathrm{Fo}_4}\left(1{,}064-28{,}593\mathrm{Fo}+475{,}705\mathrm{Fo}^2-2873{,}298\mathrm{Fo}^3\right)d\mathrm{Fo}=$$

$$=\int\limits_{\mathrm{Fo}_1}^{\mathrm{Fo}_4}\frac{1-0{,}8^k}{1-\mathrm{Fo}\mathrm{Fo}_r^{0,5}}\left[1-\exp(-0{,}5\mathrm{Fo}\mathrm{Fo}_r^{-1})\right]d\mathrm{Fo}, \tag{3.62}$$

где k находится из соотношения (3.56).

Интеграл в правой части может быть найден лишь путем численных расчетов, в результате которых получаем $\mathrm{Fo}_r=0{,}00624$. Точная величина Fo_r, при которой было получено решение вида (3.42), $\mathrm{Fo}_r=0{,}00625$. Следовательно, погрешность аппроксимации составляет 0,002%. В случае использования экспериментальных данных в решениях обратных задач точность идентификации будет зависеть от точности выполнения эксперимента.

Отметим, что решением обратной задачи из соотношения (3.53) можно найти не только величину Fo_r, но и любые другие содержащиеся в этом соотношении заранее неизвестные величины, это температуропроводность и толщина пластины.

Заключение. Найдено приближенное решение гиперболического уравнения, выведенного с учётом конечной скорости распределения теплоты. Найденное решение имеет вид произведения 2-х функций: функции, зависящей от времени и зависящей от пространственной переменной координатной функции. Простота аналитического выражения найденного решения позволяет по известному из эксперимента изменению температуры от времени в некоторой одной точке пространственной переменной решением обратной задачи идентифицировать коэффициент релаксации, экспериментальное определение которого ввиду его незначительной величины (например, для металлов $\tau_r \approx 10^{-9}$ сек) крайне затруднительно [15, 49].

Полученное решение позволяет провести исследование температуры тела в полях изотермических линий с определением скоростей перемещения изотерм по пространственной переменной во времени. Проведение подобных исследований, включая решения обратных задач, с помощью точного решения вида (3.42) ввиду необходимости применения большого числа членов бесконечного ряда не представляется возможным.

Результаты диссертации могут быть применены при расчетах всех быстропротекающих процессов, а также и любых других процессов при сверхмалых величинах временной переменной, то есть в области времен, при которых параболическое уравнение неадекватно описывает температурное состояние тела. Особую актуальность полученные результаты имеют для авиационной и космической техники, работающей в условиях экстремальных значений температур при минимальном времени протекания.

3.3. Аналитические решения задач теплопроводности при переменном от времени коэффициентом теплообмена на основе учета фронта тепловой волны

Путем определения фронта тепловой волны и дополнительных краевых условий получено решение задачи теплопроводности при краевом условии 3-го рода с изменяющимся от времени коэффициентом теплообмена. Зависимость коэффициента теплообмена принималась линейной. Используя полученное решение, построены графики изотерм и скоростей их перемещения. На основе данных численного расчета (а также экспериментальных данных, п. 4.1) в некоторой точке пространственной переменной решением обратной задачи идентифицировано число Предводителева, что позволило определить зависимость коэффициента теплоотдачи от времени. Точность идентификации составляет 2%.

Из закона Ньютона – Рихмана при заданных свойствах среды коэффициент теплообмена определяется только температурным напором. Однако в нестационарных процессах коэффициент теплообмена, как показывают экспериментальные исследования, существенно зависит и от температурного состояния твердого тела, от условий на поверхности теплообмена, от интенсивности теплообмена на противоположной стенке и от ряда других факторов [125]. В связи с чем, его определение оказывается столь затруднительным, что практически во всех критериальных уравнениях теплоотдачи он принимается постоянным во времени и не зависящим от температуры тела. В случаях его задания функционально зависящим от времени, решение задачи существенно усложняется ввиду сильной нелинейности дифференциальных уравнений, получаемых в результате выполнения краевых условий 3-го рода с изменяющимся коэффициентом теплообмена. В пределах классических методов, согласовать решение линейного уравнения с такого вида граничным условием не представляется возможным. На практике используют метод тепловых потенциалов или операционные методы, которые сводят уравнение теплопроводности к интегральному уравнению Вольтерра 2 – го рода. Решение задачи в конечном итоге представляется в виде бесконечного ряда последовательных приближений [22].

Рассмотрим направление получения решений подобного класса задач, основанное на рассмотрении фронта возмущения и дополнительных краевых условий. В качестве примера получим решение задачи при линейном изменении коэффициента теплоотдачи от времени

$$\alpha(\tau)=\alpha_0(1+\beta\tau), \tag{3.63}$$

где α_0 − величина коэффициента теплоотдачи в начальный момент времени $(\tau=0)$; $\beta=const$ − коэффициент, $1/\text{с}$.

Постановка задачи здесь имеет вид

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial\tau}=a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2};\ \ (\tau>0;\quad 0<x<R) \tag{3.64}$$

$$T(x,0)=T_0=const\,; \quad (3.65) \qquad\qquad \partial T(0,\tau)/\partial x=0\,; \tag{3.66}$$

$$\lambda\partial T(R,\tau)/\partial x=\alpha_0(1+\beta\tau)[T(R,\tau)-T_{\text{ср}}]\,, \tag{3.67}$$

где T − температура; x − координата; a − температуропроводность; λ − теплопроводность; R − половина толщины пластины; T_0 − начальная температура; $T_{\text{ср}}$ − температура среды; τ – время.

Обозначим:

$$\Theta=\frac{T-T_0}{T_{\text{ср}}-T_0};\qquad \rho=\frac{x}{R};\qquad \text{Fo}=\frac{a\,\tau}{R^2};\qquad \text{Bi}=\frac{\alpha_0 R}{\lambda};\qquad \text{Pd}=\frac{\beta R^2}{a},$$

где Θ – безразмерная температура; ρ – безразмерная координата; Fo – число Фурье (безразмерное время); Bi – число Био; Pd – число Предводителева.

С учётом обозначений задача (3.64) – (3.67) будет

$$\frac{\partial\Theta(\rho,\text{Fo})}{\partial\text{Fo}}=\frac{\partial^2\Theta(\rho,\text{Fo})}{\partial\rho^2};\ (\text{Fo}>0;\ \ 0<\rho<1) \tag{3.68}$$

$$\Theta(\rho,0)=0\,; \quad (3.69) \qquad\qquad \partial\Theta(0,\text{Fo})/\partial\rho=0\,; \tag{3.70}$$

$$\partial\Theta(1,\text{Fo})/\partial\rho+\text{Bi}(1+\text{PdFo})[\Theta(1,\text{Fo})-1]=0\,. \tag{3.71}$$

Для упрощения получения решения рассмотрим новую независимую переменную $\xi = 1 - \rho$. Задача (3.68) – (3.71) в этом случае будет

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}; \quad (\mathrm{Fo} > 0;\ 0 < \xi < 1) \tag{3.72}$$

$$\Theta(\xi,0) = 0; \quad (3.73) \qquad \partial\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi = 0; \quad (3.74)$$

$$\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi - \mathrm{Bi}(1+\mathrm{Pd}\mathrm{Fo})[\Theta(0,\mathrm{Fo}) - 1] = 0. \tag{3.75}$$

Вводя понятие фронта возмущения $q_1(\mathrm{Fo})$, разделим процесс теплопроводности на две стадии $0 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_1$ и $\mathrm{Fo}_1 \le \mathrm{Fo} < \infty$. С этой целью введём движущуюся границу (фронт возмущения), разделяющую рассматриваемую область $0 \le \xi \le 1$ на две подобласти: прогретую $0 \le \xi \le q_1(\mathrm{Fo})$ и непрогретую $q_1(\mathrm{Fo}) \le \xi \le 1$, где $q_1(\mathrm{Fo})$ − функция, характеризующая продвижение границы раздела по координате ξ от времени. Первая стадия заканчивается при достижении фронтом центра тела $(\xi = 1)$, то есть когда $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1$.

Во второй стадии изменение температуры происходит в пределах всего объёма $0 \le \xi \le 1$. Понятие фронта возмущения здесь не имеет смысла и в рассмотрение вводится дополнительная функция $q_2(\mathrm{Fo}) = \Theta(1,\mathrm{Fo})$, описывающая температуру во времени в точке $\xi = 1$ (рис. 3.16).

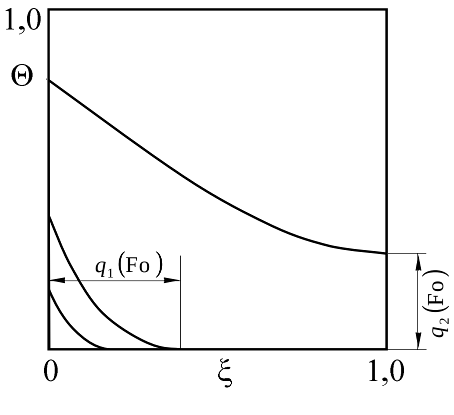


Рис. 3.16. Схема теплообмена

Математическая постановка для первой стадии будет

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}; \quad (0 < \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_1; \quad 0 \le \xi \le q_1(\mathrm{Fo})\,) \tag{3.76}$$

$$\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi - \mathrm{Bi}(1+\mathrm{Pd}\mathrm{Fo})\,[\Theta(0,\mathrm{Fo}) - 1] = 0; \tag{3.77}$$

$$\Theta(q_1,\mathrm{Fo}) = 0; \quad (3.78) \qquad \partial\Theta(q_1,\mathrm{Fo})/\partial\xi = 0, \quad (3.79)$$

где формулы (3.78), (3.79) являются условиями сопряжения прогретой и непрогретой областей. Согласно (3.78) температура непосредственно на фронте возмущения одинакова с начальной температурой. Условие (3.79) означает отсутствие теплового потока за пределами фронта возмущения.

Отметим, что в задаче (3.76) – (3.79) отсутствует начальное условие вида (3.73). Это связано с тем, что данная задача за пределами фронта возмущения, то есть на участке $q_1(\mathrm{Fo}) \le \xi \le 1$, не определена. Поэтому здесь отсутствует необходимость удовлетворения начального условия по всей толщине пластины. Здесь достаточно выполнить условие (3.78), а также условие $q_1(0) = 0$, которое далее будет использовано при решении обыкновенного дифференциального уравнения относительно $q_1(\mathrm{Fo})$. В задаче (3.76) – (3.79) отсутствует также условие (3.74), ввиду того, что оно не оказывает влияния на теплообмен в первой стадии.

Для задачи (3.76) – (3.79) решение находится в форме произведения двух функций: одна из них зависит лишь от времени Fo, а вторая – лишь от пространственной переменной ξ, то есть

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=0}^{n} a_k(q_1)\xi^k, \tag{3.80}$$

где $a_k(q_1(\mathrm{Fo}))$ – неизвестные функции, которые зависят от времени; ξ^k – координатные функции.

Неизвестные функции $a_k(q_1)$ в 1-ом приближении определяются из условий (3.77) – (3.79). Подставляя (3.80), ограничившись тремя членами ряда, в (3.77) – (3.79), относительно $a_k(q_1)$ $(k = 0, 1, 2)$ получаем систему трех алгебраических уравнений. В результате определения $a_k(q_1)$ соотношение (3.80) будет

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \frac{\mathrm{Bi}(1 + \mathrm{PdFo})(q_1 - 2\xi + \xi^2 / q_1)}{\mathrm{Bi}q_1(1 + \mathrm{PdFo}) + 2}. \tag{3.81}$$

Соотношение (3.81) точно удовлетворяет условиям (3.77) – (3.79). Для нахождения функции времени $q_1(\mathrm{Fo})$ вычислим интеграл невязки уравнения (3.76), то есть

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} d\xi = \int_0^{q_1} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} d\xi. \tag{3.82}$$

Подставляя (3.81) в (3.82), относительно $q_1(\mathrm{Fo})$ будем иметь обыкновенное дифференциальное уравнение

$$q_1 q_1'(\mu_1 + \mu_2) + 2Pdq_1^2 - 6\mu_1 - 3\mu_2 = 0, \tag{3.83}$$

где $\mu_1 = \mathrm{Bi}\ q_1(1 + 2\mathrm{PdFo} + \mathrm{Pd}^2\mathrm{Fo}^2)$; $\mu_2 = 4(\mathrm{PdFo} + 1)$; $q_1' = dq_1(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}$.

Ввиду сильной нелинейности уравнения (3.83) нахождение его точного решения весьма затруднительно. Для определения приближенного решения используем метод, изложенный в [44], в основе которого также положены дополнительные краевые условия. Используя этот метод (при Bi = 1, Pd = 1), находим

$$q_1(\mathrm{Fo}) = k\mathrm{Fo}^{\lambda}, \tag{3.84}$$

где $k = 2{,}608$; $\lambda = 0{,}511$.

Соотношения (3.81), (3.84) представляют решение задачи (3.76) – (3.79) в первом приближении. Расчеты по соотношению (3.81) при $\mathrm{Pd} = 1, \mathrm{Bi} = 1$ в сравнении с решением задачи (3.76) – (3.79), полученным методом конечных разностей, представлены на рисунке 3.17. Из анализа результатов следует, что их расхождение составляет 5%.

Отметим, что при расчетах температуры численным методом, шаги по координатам ξ и Fo принимались соответственно равными $\Delta\xi = 10^{-2}$, $\Delta\mathrm{Fo} = 10^{-5}$.

Если положить $\mathrm{Pd} = 0,\ \mathrm{Bi} = 1$, то формула (3.84) примет вид $q_1(\mathrm{Fo}) = 2{,}7634\ \mathrm{Fo}^{0{,}531}$. Расчеты температуры для этого случая, а также точное решение даны на рисунке 3.18 [49]. Из их анализа следует, что отклонение полученных результатов в диапазоне времени $10^{-3} \le \mathrm{Fo} < \mathrm{Fo}_1$ не превышает 6%.

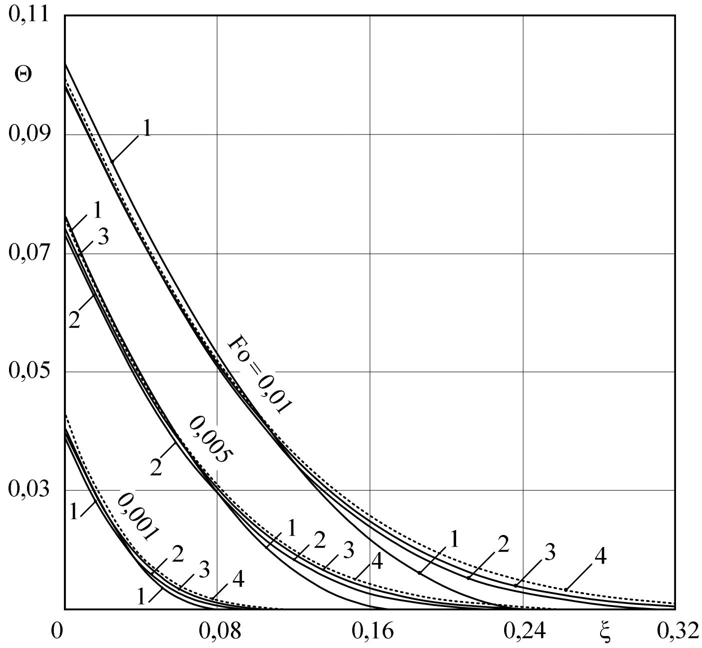


Рис. 3.17. Безразмерная температура в первой стадии (Pd = 1, Bi = 1). 1, 2, 3 – соответственно с первого по третье приближения; 4 – численное решение. $\mathrm{Fo}_1^{(1)} = 0{,}153$; $\mathrm{Fo}_1^{(2)} = 0{,}065$; $\mathrm{Fo}_1^{(3)} = 0{,}042$, где $\mathrm{Fo}_1^{(1)}, \mathrm{Fo}_1^{(2)}, \mathrm{Fo}_1^{(3)}$ – времена достижения фронтом $q_1(\mathrm{Fo})$ координаты $\xi = 1$ соответственно с первого по третье приближения

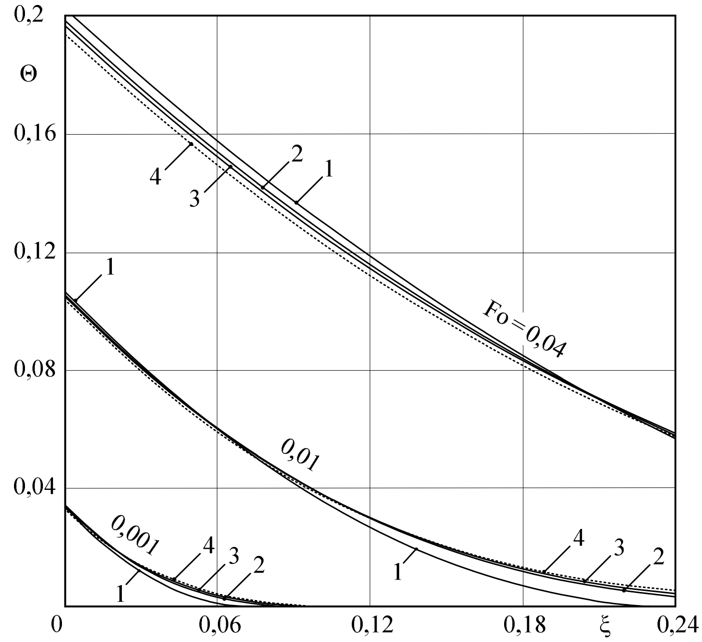


Рис. 3.18. Изменение безразмерной температуры в первой стадии (Pd = 0, Bi = 1). 1, 2, 3 – соответственно с первого по третье приближения; 4 – точное решение [49]. $\mathrm{Fo}_1^{(1)} = 0{,}153$; $\mathrm{Fo}_1^{(2)} = 0{,}065$; $\mathrm{Fo}_1^{(3)} = 0{,}042$, где $\mathrm{Fo}_1^{(1)}, \mathrm{Fo}_1^{(2)}, \mathrm{Fo}_1^{(3)}$ – времена достижения фронтом $q_1(\mathrm{Fo})$ координаты $\xi = 1$ соответственно с первого по третье приближения

Для уточнения решения задачи (3.76) – (3.79) требуется увеличивать число слагаемых ряда (3.80), что приводит к увеличению количества неизвестных коэффициентов $a_k(q_1)$. Для их определения совместно с основными (3.77) – (3.79) будем применять дополнительные условия, определяемые из уравнения (3.76) и краевых условий (3.77) – (3.79). Дифференцируя условие (3.77) по переменной Fo, получаем

$$\frac{\partial^2\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi\partial\mathrm{Fo}} - \mathrm{BiPd}[\Theta(0,\mathrm{Fo})-1] - \mathrm{Bi}(1+\mathrm{PdFo})\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = 0. \qquad (3.85)$$

Продифференцируем уравнение (3.76) по переменной ξ и применим найденное соотношение к точке $\xi = 0$

$$\partial^2\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi\partial\mathrm{Fo} = \partial^3\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^3. \qquad (3.86)$$

Подставляя (3.76), (3.86) в (3.85), находим 1-ое дополнительное условие

$$\frac{\partial^3\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3} - \mathrm{Bi}\left[(1+\mathrm{PdFo})\frac{\partial^2\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} + \mathrm{Pd}(\Theta(0,\mathrm{Fo})-1)\right] = 0. \qquad (3.87)$$

Для нахождения второго дополнительного условия, дифференцируя (3.78) по Fo, учитывая, что в точке $\xi = q_1(\mathrm{Fo})$ переменная ξ является функцией Fo и, следовательно, $\Theta(\xi,\mathrm{Fo})$ будет представлять сложную функцию

$$\frac{\partial}{\partial\mathrm{Fo}}\left(\Theta(\xi,\mathrm{Fo})\right)_{\xi=q_1} = \left(\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\frac{d\xi}{d\mathrm{Fo}}\right)_{\xi=q_1} + \left(\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right)_{\xi=q_1} = 0. \qquad (3.88)$$

Соотношение (3.88) с учетом (3.79) приводится к виду

$$\partial\Theta(q_1,\mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo} = 0. \qquad (3.89)$$

Сравнивая (3.89) с уравнением (3.76), применительно к точке $\xi = q_1(\mathrm{Fo})$, получаем второе дополнительное условие

$$\partial^2\Theta(q_1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^2 = 0. \qquad (3.90)$$

Для нахождения третьего дополнительного условия продифференцируем (3.89) по переменной Fo, учитывая, что ξ является функцией Fo

$$\frac{\partial}{\partial\mathrm{Fo}}\left(\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right)_{\xi=q_1} = \left(\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\frac{d\xi}{d\mathrm{Fo}}\right)_{\xi=q_1} + \left(\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi\partial\mathrm{Fo}}\right)_{\xi=q_1} = 0. \qquad (3.91)$$

Формула (3.91) с учетом (3.90) будет

$$\partial^2\Theta(q_1,\mathrm{Fo})/(\partial\xi\partial\mathrm{Fo}) = 0. \qquad (3.92)$$

Продифференцируем уравнение (3.76) по переменной ξ и применим найденное соотношение к точке $\xi = q_1(\mathrm{Fo})$

$$\partial^2\Theta(q_1,\mathrm{Fo})/(\partial\xi\partial\mathrm{Fo}) = \partial^3\Theta(q_1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^3. \qquad (3.93)$$

Сравнивая (3.92) и (3.93), получаем 3-е дополнительное условие

$$\partial^3\Theta(q_1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^3=0\,. \qquad (3.94)$$

Используя основные (3.77) – (3.79) и дополнительные (3.87), (3.90), (3.94) граничные условия, можно найти уже шесть коэффициентов ряда (3.80) и определить температурную функцию $\Theta(\xi,\mathrm{Fo})$ во втором приближении. Отметим, что в любом следующем приближении необходимо добавлять по три дополнительных условия (одно в точке $\xi=0$ и еще два – в точке $\xi=q_1(\mathrm{Fo})$). Применение меньшего их количества не приводит к повышению точности в данном приближении.

Подставляя (3.80) (ограничиваясь шестью слагаемыми ряда), в основные (3.77) – (3.79) и дополнительные (3.87), (3.90), (3.94) краевые условия, для определения коэффициентов $a_k(q_1)$ $(k=\overline{0,5})$ находим цепочную систему шести алгебраических уравнений. Соотношение (3.80) после определения $a_k(q_1)$ приводится к виду

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\mathrm{Bi}(\xi-q_1)^4\{24\xi+36q_1+8\mathrm{Bi}q_1^2-\mathrm{Pd}q_1^3+4D_0[9q_1+6\xi+$$
$$q_1D_0(2q_1+3\xi)]/\,\mathrm{Bi}+4\xi q_1(3\mathrm{Bi}-\mathrm{Pd}q_1+6D_0)+16D_0q_1\}/(Dq_1^4), \qquad (3.95)$$

где $D=8D_0q_1^2[D_0+2\mathrm{Bi}+7/q_1-q_1/(8\mathrm{Fo})]+56\mathrm{Bi}q_1+120$; $D_0=\mathrm{Bi\,Pd\,Fo}$.

Подставляя (3.95) в интегральное уравнение (3.82), для неизвестной функции $q_1(\mathrm{Fo})$ получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка при начальном условии $q_1(0)=0$. Используя метод [44], находим его приближенное решение (Bi = 1, Pd = 1)

$$q_1(\mathrm{Fo})=3{,}978\,\mathrm{Fo}^{0{,}5057}\,. \qquad (3.96)$$

Соотношения (3.95), (3.96) являются решением задачи (3.76) – (3.79) во 2-ом приближении 1-ой стадии.

Координатные функции для каждого из последующих приближений находятся из общих формул вида

$$\frac{\partial^{i+2}\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^{i+2}}-\mathrm{Bi}\left[(1+\mathrm{PdFo})\frac{\partial^{i+1}\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^{i+1}}+(i-1)\mathrm{Pd}\frac{\partial^{i-1}\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^{i-1}}\right]=0;$$

$$\frac{\partial^{i+1}\Theta(q_1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^{i+1}}=0;\qquad \frac{\partial^{i+2}\Theta(q_1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^{i+2}}=0, \tag{3.97}$$

где $i=3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$ – соответственно для третьего, четвертого, пятого и так далее приближений.

На рисунке 3.19 приведены графики движения фронта возмущения для различных приближений. Из их анализа следует, что при увеличении количества приближений n время Fo_1, при котором фронт возмущения достигает координаты $\xi=q_1(\mathrm{Fo}_1)=1$, уменьшается, а точность получаемого решения возрастает. И в пределе при $n\to\infty$ $\mathrm{Fo}_1\to 0$. Этот результат согласуется с положением о бесконечной скорости перемещения теплоты, лежащим в основе получения параболического уравнения (3.76).

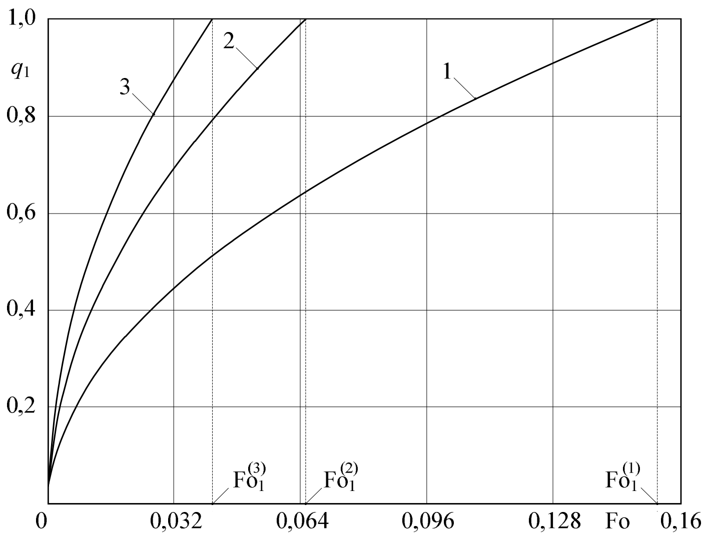


Рис. 3.19. Перемещение фронта возмущения. $\mathrm{Fo}_1^{(1)},\mathrm{Fo}_1^{(2)},\mathrm{Fo}_1^{(3)}$ – времена достижения фронтом возмущения q(Fo) координаты $\xi=1$ соответственно с первого по третье приближения

Результаты расчетов температуры по соотношению (3.80) с первого по третье приближения, а также точное решение (при Pd = 0, Bi = 1), приведены на рисунке 3.17. Из их анализа следует, что отличие результатов третьего приближения от точного решения не превышает 0,1%. Отметим, что при Pd = 0 задача (3.76) – (3.79) допускает точное решение [49].

Расчеты по формуле (3.80) в третьем приближении для Pd = 1, Bi = 1 при сравнении с решением задачи (3.76) – (3.79), полученным численным методом, представлены на рисунке 3.17. Из их анализа следует, что расхождение результатов не превышает 0,1%.

Постановка задачи для 2-ой стадии, то есть, когда $\mathrm{Fo} > \mathrm{Fo}_1$, будет

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}; \quad (\mathrm{Fo} \ge \mathrm{Fo}_1; \qquad 0 \le \xi \le 1) \tag{3.98}$$

$$\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi - \mathrm{Bi}(1+\mathrm{PdFo})[\Theta(0,\mathrm{Fo})-1] = 0; \tag{3.99}$$

$$\Theta(1,\mathrm{Fo}) = q_2(\mathrm{Fo}); \quad (3.100) \qquad \partial\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi = 0. \quad (3.101)$$

Начальное условие задачи (3.98) – (3.101) представляет решение задачи (3.76) – (3.79) вида (3.81) в конце первой стадии, то есть при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1$. Так как при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1$ $q_1(\mathrm{Fo}_1) = 1$, то соотношение (3.81) будет

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}_1) = \frac{\mathrm{Bi}(1+\mathrm{PdFo}_1)(1-2\xi+\xi^2)}{\mathrm{Bi}(1+\mathrm{PdFo}_1)+2} . \tag{3.102}$$

Начальное условие (3.102) не входит в математическую постановку задачи (3.98) – (3.101). Так как при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1$ $q_1(\mathrm{Fo}_1) = 1$, $q_2(\mathrm{Fo}_1) = 0$. Постановки задач (3.76) – (3.79) и (3.98) – (3.101) в данном случае совпадают и, следовательно, при переходе от первой стадии ко второй не возникает необходимость отдельного выполнения условия (2.114), которое итоговым решением задачи (3.98) – (3.101) будет выполняться.

Решение задачи (3.98) – (3.101) разыскивается в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \sum_{k=0}^{n} b_k(q_2)\xi^k, \tag{3.103}$$

где $b_k(q_2)$ – неизвестные функции времени, определяемые из условий (3.99) – (3.101). Подставляя (3.103) в (3.99) – (3.101), получаем систему трех алгебраических уравнений относительно $b_k(q_2)$ ($k = 0, 1, 2$). Подставляя полученные из решения данной системы $b_k(q_2)$ в выражение (3.101), получаем

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \frac{\mathrm{Bi}[(1+\mathrm{PdFo})(1+(q_2-1)(2\xi-\xi^2))]+2q_2}{\mathrm{Bi}(1+\mathrm{PdFo})+2}. \tag{3.104}$$

Очевидно, что при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1$ и $q_2(\mathrm{Fo}_1) = 0$, соотношение (3.104) приводится к начальному условию (3.102) и, следовательно, уже на этом этапе получения решения начальное условие (3.102) оказывается выполненным.

Для получения неизвестной функции $q_2(\mathrm{Fo})$ найдем интеграл от уравнения (3.98) в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} d\xi = \int_0^1 \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} d\xi. \qquad (3.105)$$

Подставляя (3.104) в (3.105), после вычисления интегралов для функции $q_2(\mathrm{Fo})$ получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение с начальным условием $q_2(\mathrm{Fo}_1) = 0$

$$q_2'\left[6 + \mathrm{Bi}(5 + \mathrm{Bi}) + \mathrm{BiPdFo}(5 + 2\mathrm{Bi} + \mathrm{BiPdFo})\right] - q_2 D + D = 0, \qquad (3.106)$$

где $D = \mathrm{Bi}\left[\mathrm{Pd} - 6 - 3\mathrm{Bi} - 3\mathrm{PdFo})(2\mathrm{Bi} + 2 + \mathrm{BiPdFo})\right]$.

Решение уравнения (3.106) разыскивается в виде суммы функций

$$q_2(\mathrm{Fo}) = \eta + \varphi, \qquad (3.107)$$

где η – является частным решением неоднородного уравнения (3.106); φ – общим решением соответствующего однородного уравнения.

Частное решение неоднородного уравнения разыскивается в виде $\eta = C$, где константа C определяется из удовлетворения уравнения (3.106). В данном случае будем иметь $C = 1$.

Общее решение однородного уравнения будет

$$\varphi = C_1 \exp\left\{\ln\frac{2 + \mathrm{Bi}(1 + \mathrm{PdFo})}{3 + \mathrm{Bi}(1 + \mathrm{PdFo})} + \frac{9\ln[3 + \mathrm{Bi}(1 + \mathrm{PdFo})]}{\mathrm{BiPd}} - 3\mathrm{Fo}\right\}, \qquad (3.108)$$

где C_1 – константа, которая находится из начального условия $q_2(\mathrm{Fo}_1) = 0$. Формула для нее будет

$$C_1 = -\exp\left\{3\mathrm{Fo}_1 - \ln\frac{2 + N}{3 + N} - \frac{9\ln[3 + N]}{\mathrm{BiPd}}\right\}. \qquad (3.109)$$

где $N = \mathrm{Bi}(1 + \mathrm{PdFo}_1)$.

Соотношение (3.107) после нахождения решений неоднородного и однородного уравнений приводится к виду

$$q_2(\mathrm{Fo}) = 1 - \exp\left[\ln\frac{3 + N}{3 + N_1} - \ln\frac{2 + N}{2 + N_1} - \frac{9}{\mathrm{BiPd}}\ln\frac{3 + N}{3 + N} - 3(\mathrm{Fo} - \mathrm{Fo}_1)\right], \qquad (3.110)$$

где $N_1 = \mathrm{Bi}(1 + \mathrm{PdFo})$.

В частном случае при $\mathrm{Pd} = 0$ $q_2(\mathrm{Fo})$ не определено.

Переходя к пределу при $\mathrm{Pd} \to 0$, соотношение (3.110) приводится к виду

$$q_2(\mathrm{Fo}) = \exp\frac{3\mathrm{BiFo}}{3+\mathrm{Bi}} - \exp\frac{3\mathrm{BiFo}_1}{3+\mathrm{Bi}}\exp\left(-\frac{3\mathrm{BiFo}}{3+\mathrm{Bi}}\right). \qquad (3.111)$$

Подстановкой можно показать, что соотношение (3.104) с учетом (3.110) точно удовлетворяет условиям (3.99) – (3.101) и начальному условию (3.102). Уравнение (3.98), как это следует из (3.105), здесь выполняется лишь в среднем.

Расчеты для Pd = 1, Bi = 1 при сравнении с решением задачи (3.72) – (3.75), полученным численным методом, даны на рисунке 3.20.

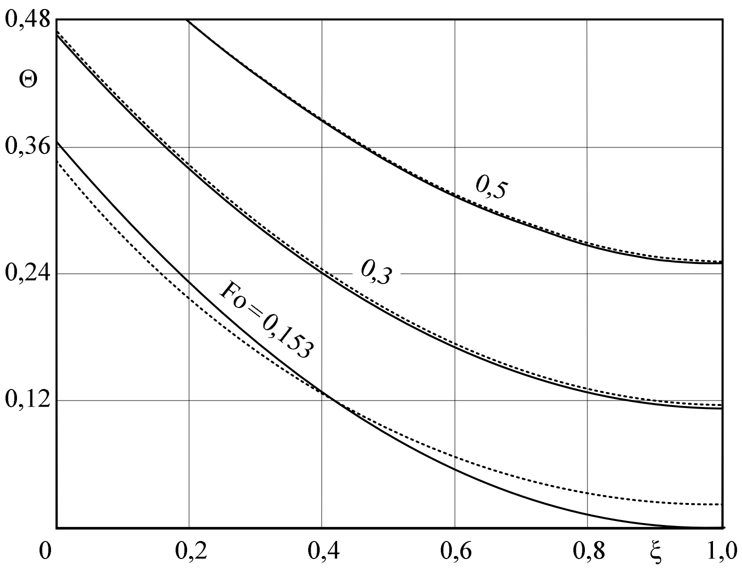


Рис. 3.20. Изменение безразмерной температуры во 2-ой стадии ——— – первое приближение ($\mathrm{Fo}_1 = 0{,}153$); ············ – численное решение

Повышение точности связано с возрастанием числа слагаемых ряда (3.103). Определение его неизвестных коэффициентов связано с необходимостью использования дополнительных условий. При получении решения для второго приближения второй стадии 1-ое дополнительное условие совпадает с условием (3.87), а второе и третье записываются в виде

$$\partial^2\Theta(1, \mathrm{Fo})/\partial\xi^2 = \partial^2 q_2(\mathrm{Fo})/\partial \mathrm{Fo}^2; \quad (3.112) \qquad \partial^3\Theta(1, \mathrm{Fo})/\partial\xi^3 = 0. \qquad (3.113)$$

Особенностью полученных в работе решений является полиномиальное изменение температуры в отличие от классических аналитических решений, где эта зависимость выражается тригонометрическими функциями. Полиномиальное изменение позволяет найти решение в виде полей изотерм.

Принцип их построения рассмотрим на примере решений в 1-ом приближении 1-ой и 2-ой стадий. Выражая декартовую координату ξ как функцию температуры $\Theta(\xi,\mathrm{Fo})$ и времени Fo, соотношения (3.81) и (3.104) можно привести соответственно к виду (Pd = 1, Bi = 1)

$$\xi(\Theta,\mathrm{Fo}) = q_1 - \frac{\sqrt{\Theta q_1 (q_1 + \mathrm{Fo} q_1 + 2)}}{\sqrt{\mathrm{Fo}+1}}. \quad (3.114)$$

$$\xi(\Theta,\mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\sqrt{(3+4\mathrm{Fo}+\mathrm{Fo}^2)(q_2^2 - q_2\Theta - q_2 + \Theta)}}{(1+\mathrm{Fo})(q_2 - 1)}. \quad (3.115)$$

Графики изменения изотерм даны на рис. 3.21.

Определяя первые производные от соотношений (3.114), (3.115), получаем формулы для определения скоростей изотерм

$$\upsilon(\mathrm{Fo},\Theta) = (\Theta q_1)^{\frac{1}{2}} (\mathrm{Fo}+1)^{-\frac{3}{2}} (q_1 + \mathrm{Fo} q_1 + 2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.116)$$

$$\upsilon(\Theta,\mathrm{Fo}) = -\frac{2q_2(q_2 - 1 - \Theta) + q_2'(\mathrm{Fo}^2 - \mathrm{Fo}^2\Theta - 4\mathrm{Fo}\Theta + 4\mathrm{Fo} - 3\Theta + 3) + 2\Theta}{2(1+\mathrm{Fo})(q_2 - 1)\sqrt{(3+4\mathrm{Fo}+\mathrm{Fo}^2)(q_2 - 1)(q_2 - \Theta)}}. \quad (3.117)$$

Графики скоростей изотерм, найденные по формулам (3.116), (3.117), представлены на рисунке 3.22.

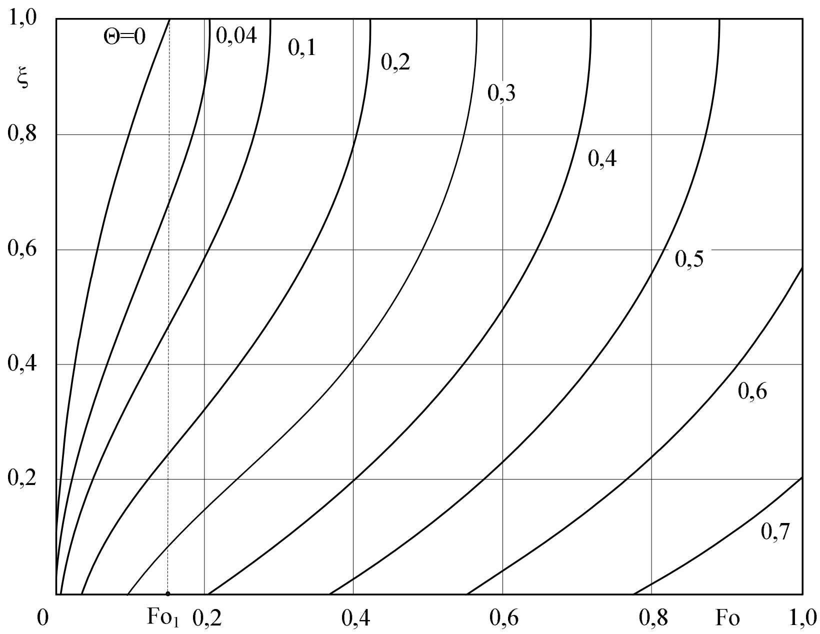


Рис. 3.21. Изотермы при переменном коэффициенте теплоотдачи (1-ое приближение, $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}153$; $\mathrm{Bi} = 1$; $\mathrm{Pd} = 1$)

Из анализа распределения изотерм и их скоростей следует, что любая изотерма возникает на поверхности пластины лишь в определенное время, с определенной начальной скоростью (рис. 3.21, 3.22). Причем, для изотерм малого потенциала $0 \le \Theta < 0{,}1$ начальные скорости устремляются к бесконечности при $\Theta \to 0$. С увеличением Θ начальные скорости убывают и, начиная с $\Theta = 0{,}4$, они мало отличаются между собой, стабилизируясь в пределах $0{,}7 \le \upsilon_0 \le 0{,}8$. При приближении к координате $\xi = 1$ скорости изотерм устремляются к бесконечным величинам.

Ввиду малой точности 1-го приближения в обоих стадиях изотермы, рассчитываемые по формулам (3.114), (3.115), имеют небольшой излом при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1 = 0{,}153$, то есть в точке сопряжения графиков первой и второй стадий (рис. 3.21). В связи с чем, на графиках рисунка 3.22 наблюдается скачок скоростей, который во 2-ом приближении сглаживается также, как и излом в изотермах.

Преимущества полученных выше решений вида (3.81), (3.104) в том, что, используя экспериментальные данные изменения температуры, решением обратной задачи можно восстановить число Предводителева, $\mathrm{Pd} = \beta \mathrm{R}^2 / a$, из которого определяется коэффициент β, а следовательно, и изменение коэффициента теплообмена от времени из соотношения (3.63).

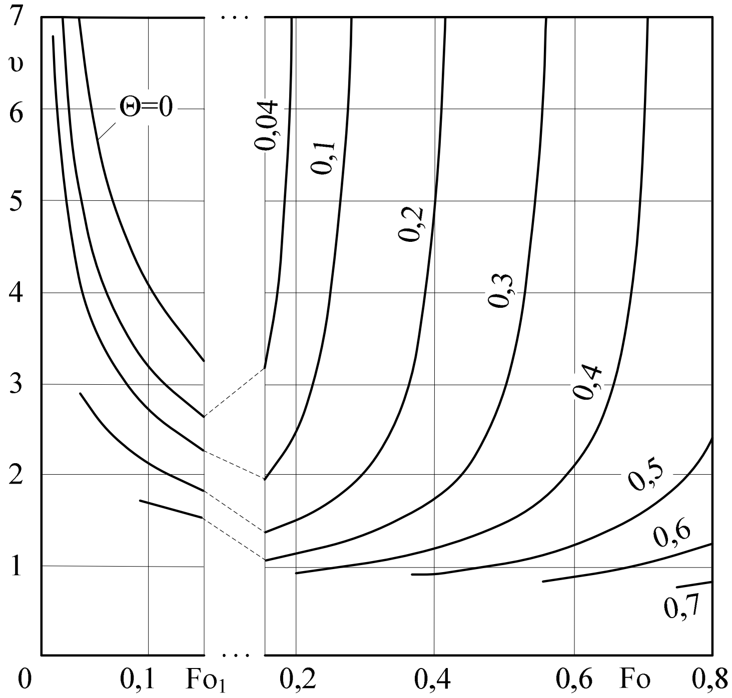


Рис. 3.22. Скорости изотерм (первое приближение, $Fo_1 = 0{,}153$; $Bi = 1$; $Pd = 1$)

Допустим, что из эксперимента известно изменение температуры в точке $\xi = 0$ при Bi = 1 в диапазоне Фурье $Fo_1 \le Fo \le Fo_4$ (в качестве экспериментальных данных будем использовать численное решение задачи (3.68) – (3.71)). Кривая изменения полученной таким путем температуры представлены на рис. 3.23.

Аппроксимируем эту кривую следующей функцией

$$\Theta(0; Fo) = b_1 + b_2 Fo + b_3 Fo^2 + b_4 Fo^3, \qquad (3.118)$$

где b_1, b_2, b_3, b_4 – неизвестные коэффициенты, для определения которых используются экспериментальные данные, представленные на рисунке 3.23.

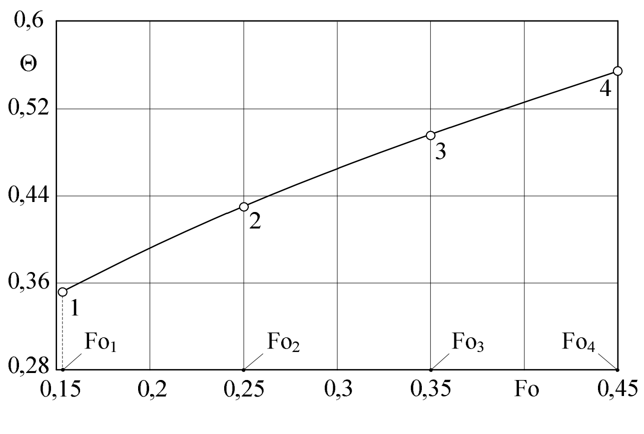


Рис. 3.23. Результаты аппроксимации численного решения. ——— – численное решение; ○ – по формуле (3.118)

Записывая соотношение (3.118) для точек 1, 2, 3, 4 кривой, считая, что температуры в этих точках наблюдаются соответственно для чисел Фурье, равных $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}153$, $\mathrm{Fo}_2 = 0{,}25$, $\mathrm{Fo}_3 = 0{,}35$, $\mathrm{Fo}_4 = 0{,}45$, для нахождения коэффициентов b_1, b_2, b_3, b_4 будем иметь систему четырех алгебраических уравнений, где значения полученных из эксперимента температур в точках 1, 2, 3, 4, были равны $\Theta(\mathrm{Fo}_1) = 0{,}351$, $\Theta(\mathrm{Fo}_2) = 0{,}431$, $\Theta(\mathrm{Fo}_3) = 0{,}497$, $\Theta(\mathrm{Fo}_4) = 0{,}555$. Из ее решения находим

$$b_1 = 0{,}177, \quad b_2 = 1{,}371, \quad b_3 = -1{,}761, \quad b_4 = 1{,}279. \tag{3.119}$$

Соотношение (3.118) с учетом полученных коэффициентов (3.119) будет

$$\Theta(0;\, \mathrm{Fo}) = 0{,}177 + 1{,}371\mathrm{Fo} - 1{,}761\mathrm{Fo}^2 + 1{,}279\mathrm{Fo}^3. \tag{3.120}$$

Расчеты по формуле (3.120), приведенные на рис. 3.23, позволяют заключить об их практическом совпадении с численным решением.

Решением обратной задачи на основе соотношения (3.104) можно идентифицировать (восстановить) число Pd. Подставляя (3.120) в левую часть решения (3.104), положив $\xi = 0$; Bi = 1, и определяя интеграл в пределах $\mathrm{Fo}_1 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_4$, получаем

$$\int_{\mathrm{Fo}_1}^{\mathrm{Fo}_4} (0{,}177 + 1{,}371\mathrm{Fo} - 1{,}761\mathrm{Fo}^2 + 1{,}279\mathrm{Fo}^3)\, d\mathrm{Fo} = \int_{\mathrm{Fo}_1}^{\mathrm{Fo}_4} \frac{1 + \mathrm{PdFo} + 2q_2(\mathrm{Fo})}{1 + \mathrm{PdFo} + 2}\, d\mathrm{Fo}. \tag{3.121}$$

Определяя интегралы в (3.121), относительного искомого числа Предводителева будем иметь трансцендентное уравнение, из решения которого находим Pd = 1,02. Точное значение числа Предводителева (при котором выполнялся численный расчет) было Pd = 1,0. Следовательно, отклонение найденного из уравнения (3.121) числа Предводителева от его точного значения составляет 2%.

Отметим, решением обратных задач из соотношений (3.81), (3.104) можно определить не только зависящий от времени коэффициент теплоотдачи, но и любые другие содержащиеся в них заранее неизвестные величины, например, коэффициенты теплопроводности и температуропроводности, число Био, толщина пластины и температура среды.

Выводы

1. На основе нахождения фронта возмущения (то есть принятия конечной скорости теплоты) и применения дополнительных краевых условий найдено решение краевой задачи при переменном от времени коэффициенте теплообмена. Разделение теплообмена на две стадии позволило упростить получение аналитического решения сложной нелинейной задачи, представляя её в виде двух задач, представленных обыкновенными дифференциальными уравнениями, решение которых по сравнению с исходным уравнением в частных производных значительно упрощается. В результате такого разделения для каждой стадии процесса были получены простые аналитические выражения, позволяющие выполнять расчеты температурного состояния во всем диапазоне нестационарного процесса, включая сверхмалые значения времени.

2. Аналитические выражения найденных решений имеют вид произведения полиномиальных координатных функций, с экспоненциально стабилизующимися во времени коэффициентами. Решения не содержат бесконечных рядов, специальных функций, что позволило по известному из численного эксперимента изменению температуры во времени в точке $\xi = 0$ из решения обратной задачи идентифицировать величину числа Предводителева, а, следовательно, и временную зависимость коэффициента теплоотдачи.

3. Найденные решения позволили выполнить исследование температуры тела в полях изотермических линий с нахождением скоростей изотерм по пространственной переменной во времени. Выполнение подобных исследований с помощью классических решений, представленных в форме бесконечных рядов, не представляется возможным. Отметим, что применительно к задаче (3.64) – (3.67) точные решения пока еще не получены.

3.4. Компьютерное и математическое моделирование давления в движущейся среде, исходя из электрогидравлической аналогии

В диссертации представлены результаты разработки компьютерной и математической моделей теплосети г. Самара, запитываемой от Самарской ТЭЦ. При разработке модели использована электорогидравлическая аналогия, в основе которой лежат законы Кирхгофа, применяемые при расчётах электрических систем. В отличие от известных методов моделирования гидравлических процессов, основанных на электрогидравлической аналогии, в настоящей работе применён метод автоматической идентификации модели, позволяющий выполнить её максимальное приближение к реальной сети по гидравлическому сопротивлению. Такой подход, несмотря на усложнение расчётов, позволяет найти модель, которая отличается от реальной теплосети не более чем на 3-5% в зависимости от числа используемых при выполнении идентификации экспериментальных данных. Выполненные на модели исследования позволили разработать рекомендации по изменению режимов функционирования теплосети, а также рассчитать оптимальные планы реконструкции и построения новых тепловыводов.

Моделирование процессов переноса тепла, массы, импульса представляет неотъемлемый компонент многих научных и инженерных исследований, охватывающий многие области использования в различных отраслях промышленности. Математические модели указанных процессов основаны на уравнениях Навье − Стокса, которые крайне сложны и могут быть решены лишь численными методами. В связи с чем, перспективным представляется направление моделирования, связанное с применением метода аналогий, когда исследование процессов выполняется на объектах другой природы, описываемых одинаковыми уравнениями. Например, уравнения законов Кирхгофа, применяемые в расчетах электрических сетей, могут быть использованы при определении давлений и скоростей в движущихся средах ввиду аналогии электрических и гидравлических процессов.

Движение среды, транспортируемой в трубопроводах, происходит в соответствии с законами сохранения энергии, импульса и массы. Поэтому теория гидравлических систем основывается на математическом моделировании различных параметров, характеризующих перемещаемую среду. Теория гидравлических сетей, основанная на электрогидравлической аналогии, развивалась в работах Сухарева М. Г., Ставровского Е. Р., Меренкова А. П., Хасилева В. Я., Коваленко А. Г., Соколова Е. Я. и др.[28, 34, 61, 63, 65 – 67]. В их работах приводится обоснование математических моделей, описывающих гидравлические процессы в трубопроводных системах, даётся алгоритмическое обеспечение применения теории графов, алгебры матриц и векторов.

Основой теории гидравлических систем является метод расчёта потокораспределения, основные положения которого приведены в [63]. В этой работе приводятся теоретические положения, связанные с использованием законов Кирхгофа к расчёту гидравлических сетей. Распространение этого метода для расчётов многокольцевых трубопроводных систем связано с расчётными трудностями, для преодоления которых были разработаны соответствующие алгоритмы и компьютерные программы, основанные на использовании итеративных методов расчёта увязочных расходов. Однако для сложных сетей появляется проблема сходимости итераций.

Идею метода поясним на примере нахождения распределения расходов в сети, состоящей из кольца, которое имеет три ответвления (рис. 3.24). По участкам *a*, *b*, *c*, *d* расходы обозначим через Q_a, Q_b, Q_c, Q_d – по ответвлениям – Q_1, Q_2, Q_3. Требуется найти расходы по участкам кольца при известном расходе Q, задаваемом на входе в кольцо. Расходы Q_1, Q_2, Q_3 по ответвлениям заданы, и сумма их равна расходу на входе в кольцо $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$.

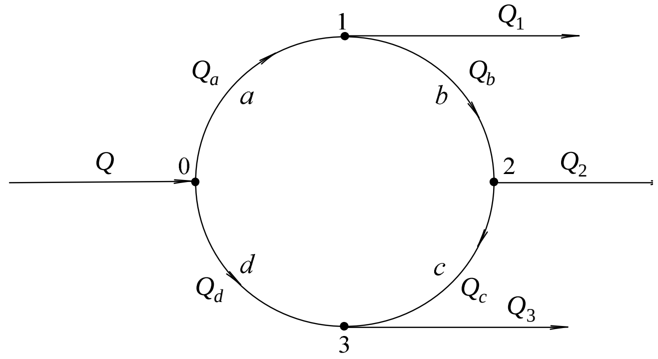


Рис. 3.24. Схема кольцевой сети

Введем допущения: 1) поступление среды в узел считаем положительным, а отток – отрицательным; 2) потеря напора для среды, движущейся по часовой стрелке, положительна, против – отрицательна.

Из 1-го закона Кирхгофа при расчётах гидравлических сетей должно выполняться равенство поступления и оттока среды в любом узле

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = 0, \tag{3.122}$$

где n – число соединяющихся в узле трубопроводов; Q_i $(i = \overline{1, n})$ – расходы по любому из трубопроводов.

По второму закону Кирхгофа для каждого замкнутого контура сумму напоров следует приравнять нулю

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} S_i Q_i^2 = 0, \tag{3.123}$$

где S_i $(i = \overline{1, n})$, Q_i $(i = \overline{1, n})$ – гидравлические сопротивления и расходы на i – ом участке.

Применяя итеративный метод расчета, на основе (3.122) и (3.123) можно определить расходы по участкам сети при заданном расходе Q на входе в кольцо. Первый шаг итерации связан с заданием произвольных расходов Q_a, Q_b, Q_c, Q_d на каждом участке кольца. Отсюда в узлах 0, 1, 2 , исходя из 1-ого закона Кирхгофа, определяем

$$Q_d = Q - Q_a; \quad Q_a = Q_1 + Q_b; \quad Q_b = Q_2 + Q_c.$$

Запись уравнения Кирхгофа к узлу 3 не требуется, так как расход $Q_3 = Q_d + Q_c$ при известных значениях расходов на участках сети d и c.

Используя принятые расходы, по второму закону Кирхгофа находятся невязки напоров

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n} S_i Q_i^2 = S_a Q_a^2 + S_b Q_b^2 + S_c Q_c^2 - S_d Q_d^2 . \qquad (3.124)$$

Если δH положительна, то, следовательно, перегружены участки с направлением движения по часовой стрелке и недогружены, где противоположное направление движения. Чтобы приблизить невязку напоров δH к нулю, вводится увязочный расход δQ. Он вычитается из расхода на перегруженных и добавляется – на недогруженных участках. Увязочный расход δQ можно найти из (2.136), положив $\delta H = 0$. Считая, что невязка, найденная из (3.124), положительна, увязочный расход δQ определяется по соотношению

$$S_a\left(Q_a - \delta Q\right)^2 + S_b\left(Q_b - \delta Q\right)^2 + S_c\left(Q_c - \delta Q\right)^2 - S_d\left(Q_d + \delta Q\right)^2 = 0 . \qquad (3.125)$$

Пренебрегая членами $\left(\delta Q\right)^2$, считая их малыми величинами, соотношение (3.125) относительно δQ приводится к алгебраическому линейному уравнению. Его решение

$$\delta Q = \delta H \Big/ \left(2\sum_{i=1}^{n} S_i Q_i \right) . \qquad (3.126)$$

где $\sum_{i=1}^{n} S_i Q_i = S_a Q_a + S_b Q_b + S_c Q_c + S_d Q_d$, всегда положительная величина. Знаки δQ и δH всегда одинаковые.

После определения δQ расходы на участках кольца уточняются, и расчет вновь повторяется. Итерации выполняются до момента, пока определяемые из двух последних расчётов расходы не будут отличаться на некоторую весьма малую (заданную) величину.

В качестве примера найдем расходы по участкам кольца для исходных данных:

$$Q = 60\ м^3/ч; \qquad S_a = 5\cdot 10^{-5}\ мч^2/м^6; \qquad S_b = 2\cdot 10^{-5}\ мч^2/м^6;$$

$$S_c = 8\cdot 10^{-5}\ мч^2/м^6; \qquad S_d = 4\cdot 10^{-5}\ мч^2/м^6; \quad Q_1 = 15\ м^3/ч; \qquad Q_2 = 25\ м^3/ч;$$

$$Q_3 = 20\ м^3/ч .$$

Первый шаг итерации состоит в принятии некоторых произвольных расходов по участкам кольца

$Q_a = 50\ м^3/ч$; $\quad Q_b = 35\ м^3/ч$; $\quad Q_c = 10\ м^3/ч$; $\quad Q_d = 10\ м^3/ч$.

Из формулы (3.124) находим

$$\delta H = 5\cdot 10^{-5}\cdot 50^2\cdot 2\cdot 10^{-5}\cdot 35^2 + 8\cdot 10^{-5}\cdot 10^2 - 4\cdot 10^{-5}\cdot 10^2 = 0{,}1535\ м\ . \quad (3.127)$$

Увязочный расход находится по соотношению (3.126)

$$\delta Q = 0{,}1535/[2\cdot(5\cdot 10^{-5}\cdot 50 + 2\cdot 10^{-5}\cdot 35 + +8\cdot 10^{-5}\cdot 10 + 4\cdot 10^{-5}\cdot 10)] = 17{,}47\ м. \quad (3.128)$$

На втором итеративном шаге по участкам кольца

$Q_a = 50 - 17{,}47 = 32{,}53\ м^3/ч$; $Q_b = 35 - 17{,}47 = 17{,}53\ м^3/ч$;

$Q_c = 10 - 17{,}47 = -7{,}47\ м^3/ч$; $Q_d = 10 + 17{,}47 = 27{,}47\ м^3/ч$.

Отрицательный знак расхода $Q_c = 10 - 17{,}47 = -7{,}47\ м^3/ч$ означает, что направление движения жидкости, принятое на первом итеративном шаге, нужно сменить на противоположное, то есть расход на данном участке нужно принять положительным.

Отсюда получаем $\delta H = 0{,}024408\ м$; $\delta Q = 3{,}32\ м^3/ч$.

После уточнения расходов по участкам определяем

$Q_a = 32{,}5 - 3{,}32 = 29{,}21\ м^3/ч$; $Q_b = 17{,}53 - 3{,}32 = 14{,}21\ м^3/ч$;

$Q_c = 7{,}47 + 3{,}32 = 10{,}79\ м^3/ч$; $Q_d = 27{,}47 + 3{,}32 = 30{,}79\ м^3/ч$.

Величины δH и δQ третьего шага итерации, определяемые из соотношений (3.124) и (3.126), будут $\delta H = 0{,}0074\ м$; $\delta Q = 1{,}1\ м^3/ч$.

На основе результатов третьей итерации уточняются расходы по участкам кольца

$Q_a = 28{,}11\ м^3/ч$; $Q_b = 13{,}11\ м^3/ч$; $Q_c = 11{,}89\ м^3/ч$; $Q_d = 31{,}89\ м^3/ч$.

Проверяя выполнение первого уравнения Кирхгофа, применительно к 1 – му, 2 – му и 3 – му узлам кольца получаем

$Q_1 = Q_a - Q_b = 28{,}11 - 13{,}11 = 15\ м^3/ч$;

$Q_2 = Q_b + Q_c = 13{,}11 + 11{,}89 = 25\ м^3/ч$;

$$Q_3 = Q_d - Q_c = 31{,}89 - 11{,}89 = 20\ м^3/ч.$$

Следовательно, уже на третьем шаге итерации найдены расходы по участкам кольца, отличающиеся от заданных расходов для абонентов Q_1, Q_2, Q_3, с точностью до первого знака после запятой.

При большом количестве колец в сети процесс выполнения итераций является плохо сходящимся. В связи с чем, существенно возрастают затраты времени, необходимого на выполнение расчетов. Поэтому для сложных гидравлических цепей применение изложенной выше последовательности расчёта потокораспределения возможно лишь при использовании современных компьютеров. Однако, прежде чем переходить к расчётам на компьютерах, необходимо разработать компьютерную модель сети, в которой наряду с использованием законов Кирхгофа, применяется также теория графов [18]. На её основе строится «дерево» теплосети. Схема графа представлена на рис. 3.25, где через 1, 2, 3, …, 9 обозначены вершины, *а* буквами *а, б, в, …* – дуги. Вершины графа представляют точки объединения трубопроводов, а дуги – участки трубопроводов. «Дерево» теплосети строится так, чтобы из вершины графа 1 можно было достичь любой другой вершины.

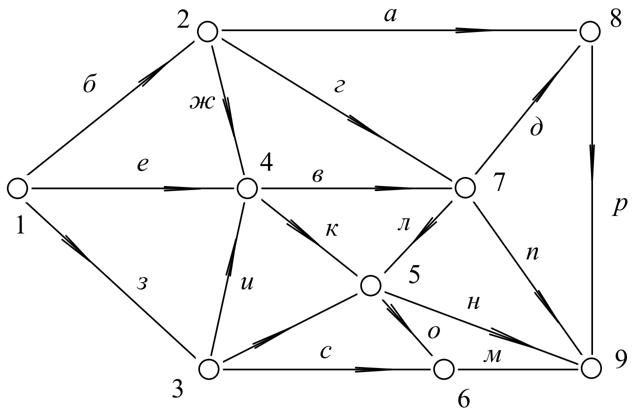


Рис. 3.25. Схема графа

Таким путем выполняется рассмотрение теплосети как единой системы. Для выполнения расчетов используется особая нумерация вершин и дуг. Любая вершина (узел) отмечается номером (именем), высотой расположения, величиной поступления или оттока среды и др. Любая дуга имеет: номер (имя), длину и диаметры труб, коэффициент трения и другие параметры.

Формул (3.124) и (3.126) достаточно для нахождения системы уравнений относительно неизвестных расходов и давлений. Ввиду итеративного способа расчёта для сложных теплосетей появляется проблема сходимости итераций. В расчётной практике, благодаря быстрой сходимости итераций получил распространение способ поконтурной увязки перепада давлений, реализация которого состоит в следующем:

1. Задаётся начальное значение расходов на всех ветвях схемы.
2. Находятся потери давления в ветвях и их невязки для контуров.
3. По найденным невязкам определяются «увязочные расходы».
4. Все «увязочные расходы» определяются по всем ответвлениям каждого контура путём алгебраического суммирования расходов, принятых в начальном приближении.
5. Найденные на последнем этапе расходы используются в качестве следующего приближения, вплоть до совпадения (в пределах задаваемой точности) значений всех искомых величин.

Для создания компьютерной модели следует определять гидравлические характеристики трубопроводов. Потери напора в трубопроводе включают потери на трение (линейные) и потери в местных сопротивлениях

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d}\frac{\upsilon^2}{2g} + \sum\xi\frac{\upsilon^2}{2g}, \tag{3.129}$$

где Δh – потери напора, $м$; λ – коэффициент сопротивления; l – длина трубы, $м$; d – внутренний диаметр, $м$; υ – средняя скорость, $м/с$; $\sum\xi$ – сумма коэффициентов местных потерь на участке, $м$; g – ускорение свободного падения, $м/с^2$.

Если вести эквивалентную длину, то потери в местных сопротивлениях сводятся к линейным с расчётом эквивалентной длины местных сопротивлений по соотношению

$$l_э = d\sum\xi/\lambda\ . \tag{3.130}$$

Формула (3.129) с учётом (3.130) будет

$$\Delta h = \frac{\upsilon^2}{2g}\left(\lambda\frac{l}{d} + \lambda\frac{l_э}{d}\right) = \frac{\lambda\upsilon^2}{2d\,g}\left(l + l_э\right). \qquad (3.131)$$

Скорость по известному расходу жидкости Q на участке сети будет

$$\upsilon = 4Q/\left(\pi d^2\right). \qquad (3.132)$$

Подставляя (3.132) в (3.131), находим

$$\Delta h = \frac{8\lambda\left(l + l_э\right)}{\pi^2 g d^5} Q^2.$$

Тогда для участка – трубы гидравлическая характеристика будет

$$\Delta h = sQ^2,$$

где $s = 8\lambda\left(l + l_э\right)/(\pi^2 g d^5)$ –сопротивление участка, $с^2/м^5$.

Для каждого участка – трубы вводится следующая информация: диаметр; длина; информация о местных сопротивлениях.

Для каждого участка – задвижки гидравлическая характеристика имеет вид

$$\Delta h = sQ^2,$$

где s – коэффициент, который для полностью открытой задвижки принимается равным $0{,}07$.

В компьютерной модели используются также участки – насосы, которые представлены зависимостями, связывающими напор насоса и его подачу. Характеристика насоса с достаточной точностью определяется соотношением вида

$$H = H_ф - Q_Н^m S_ф,$$

где $H_ф$ – напор насоса при закрытой на выходе задвижке $Q_Н = 0$, $м$; $Q_Н$ – подача насоса, $м^3/с$; $S_ф$ – гидравлическое сопротивление насоса, $кг/м^3$.

Величина m принимается равной 2 или 1,85, исходя из характеристики насоса. Параметры $H_ф$ и $S_ф$ находятся по двум произвольным точкам известной характеристики насоса с использованием соотношений

$$S_ф = \frac{H_a - H_б}{Q_б^2 - Q_а^2};\;\; H_ф = H_a - S_ф Q_а^2,$$

где индексы "а" и "б" означают параметры H и Q, взятые из паспортных данных. Следуя описанному выше алгоритму, создаётся модель с паспортными характеристиками. Однако действительные характеристики сети могут отличаться от паспортных. Для максимального приближения модели к реальной трубопроводной сети выполняется идентификация модели [1 – 3, 17]. При этом используются экспериментальные замеры расходов и давлений в отдельных точках гидравлической сети. Для приближения модели к реальной сети гидравлические сопротивления её участков изменяют так, чтобы результаты, получаемые на модели, как можно менее отличались бы от эксперимента. Процесс идентификации – итеративный. Выполнение этого процесса в модели автоматизировано. Точность идентификации определяется точностью и количеством экспериментальных данных. Отметим, что при проектировании новых гидравлических сетей идентификация модели не выполняется.

Схема тепловой сети г. Самара, питаемой от Самарской ТЭЦ , представлена на рисунке 3.26 [144]. Все выводы СамТЭЦ имеют нагрузку 17040 *т/час* первый 7760 *т/час*, второй 4600 *т/час* и третий 4640 *т/час*. Станция расположена на отметке высоты 75 *м*. Тепловая мощность равна 1500 *Гкал/час*. Значительная длина тепловыводов (первый 10 *км*, второй и третий выводы 6 *км*) и недостаточный диаметр труб приводят на некоторых их участках к малому перепаду давлений между прямым и обратным теплопроводами. Поэтому возникает необходимость использования повысительных насосных станций (НС − 12 на первом и НС − 11 на третьем выводах). Большие давления в обратных магистралях (60 *м* и более) наблюдаются на пониженных участках теплосети.

На рис 3.27 – 3.31 даны графики из анализа которых следует, что на 1-ом и 3-ем выводах (рис. 3.27, 3.30) исчерпаны резервы мощности повысительных насосных НС − 11 и НС − 12 (они работают на пределе допустимых величин пьезометрических давлений в прямом трубопроводе (240 *м*)). В связи с чем, для увеличения перепада давлений между прямой и обратной магистралями необходима их реконструкция на 1-ом выводе от НС − 12 до К − 30 (длина участка 1,5 *км*), связанная с изменением диаметров трубопроводов с 800 *мм* до 1200 *мм*.

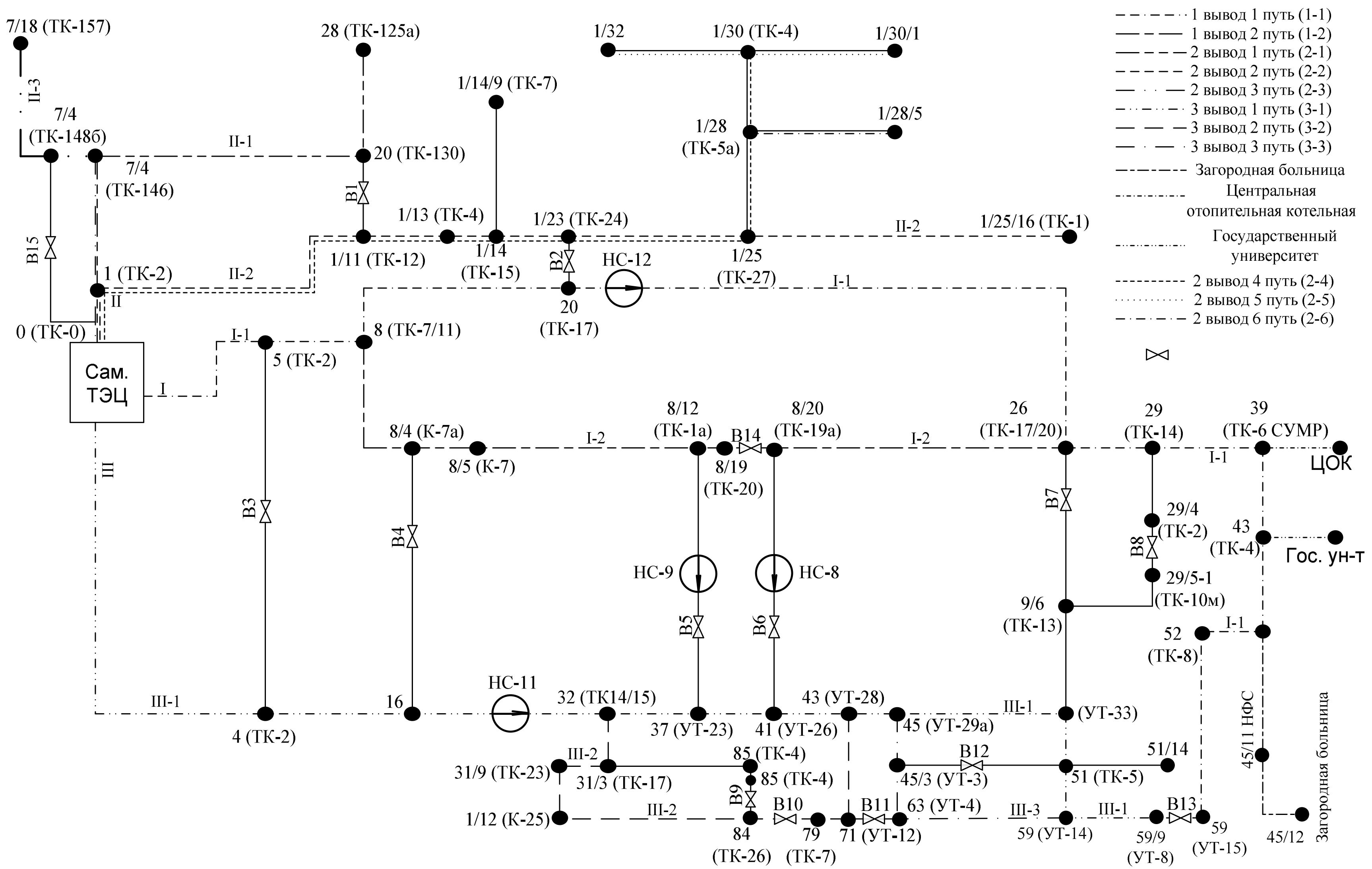


Рис. 3.26. Схема тепловой сетей от Самарской ТЭЦ (I,II,III тепловыводы).

Повысительные насосные станции НС –11, НС – 12 включены, НС – 8, НС – 9, НС – 10 отключены.

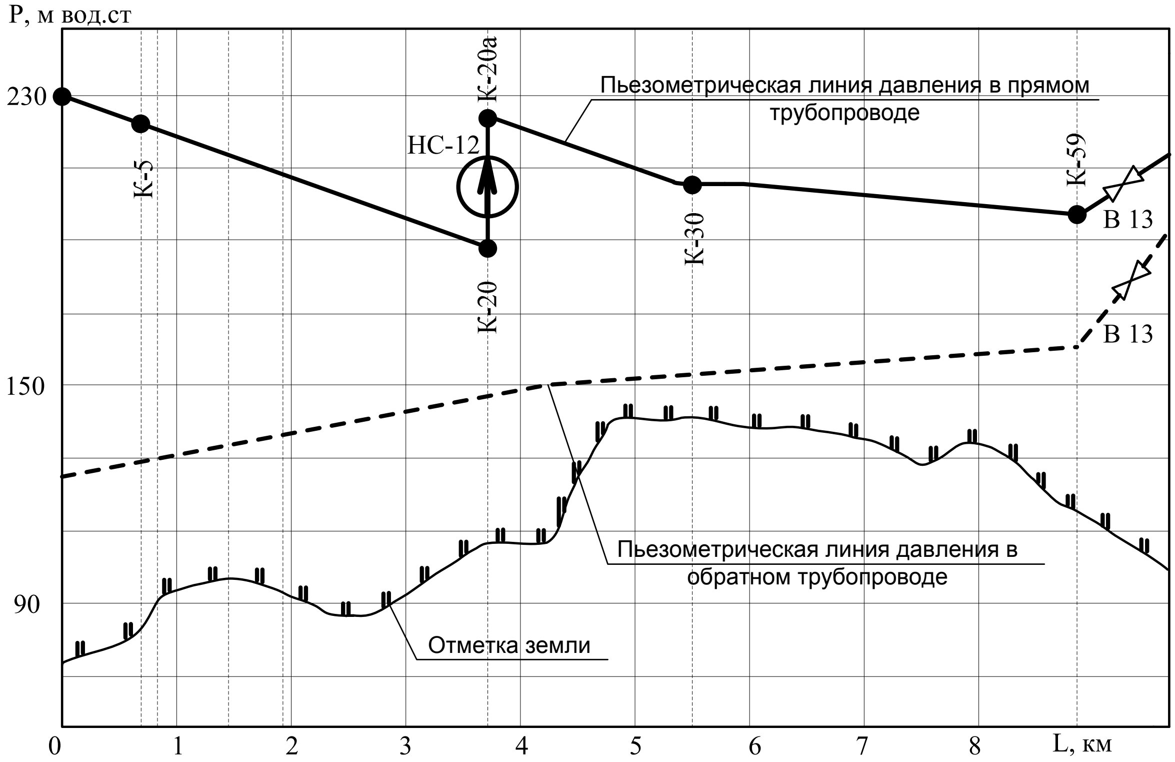


Рис. 3.27. Первый тепловывод первый путь. Реальное состояние.

Задвижка В 13 закрыта

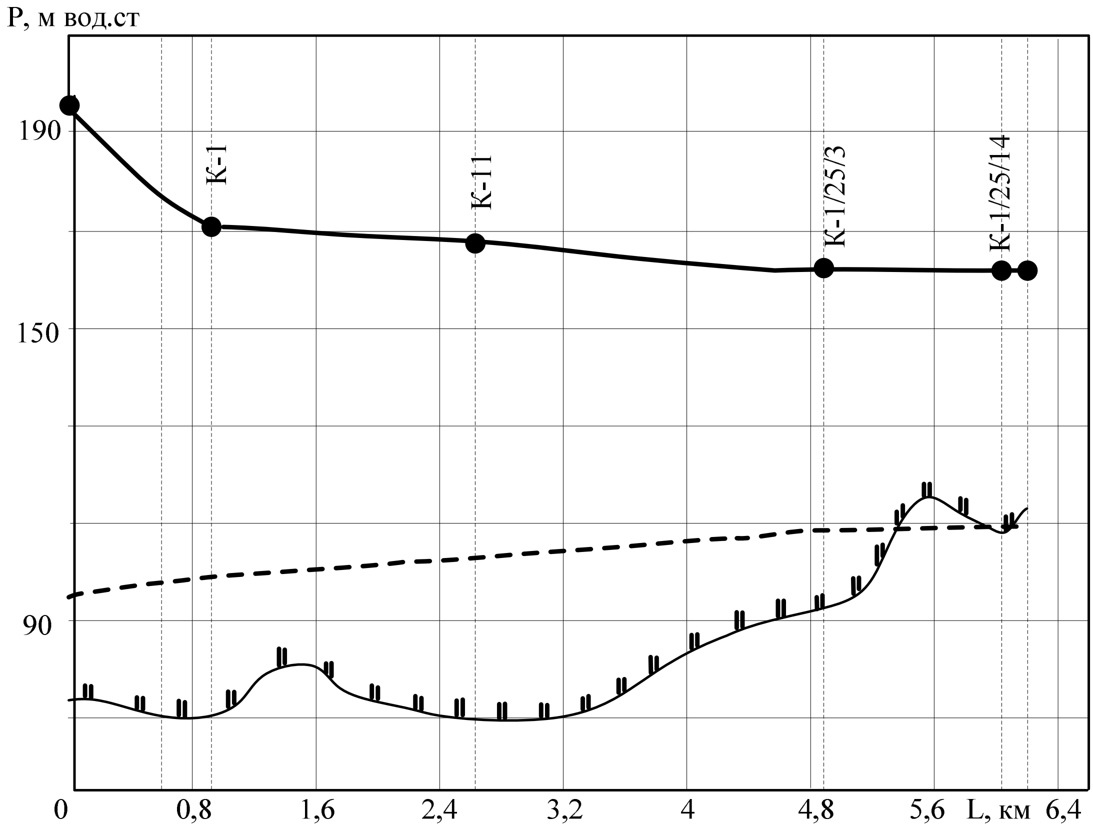


Рис. 3.28. Второй тепловывод второй путь. Реальное состояние

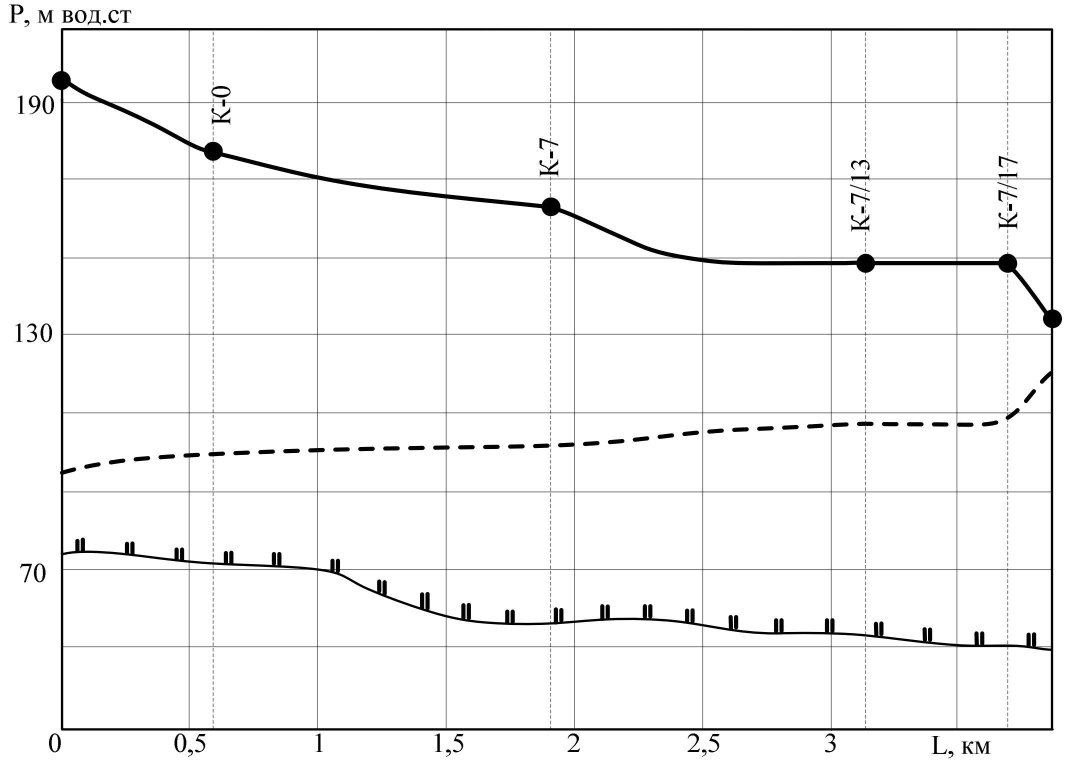


Рис. 3.29. Второй тепловывод третий путь. Реальное состояние

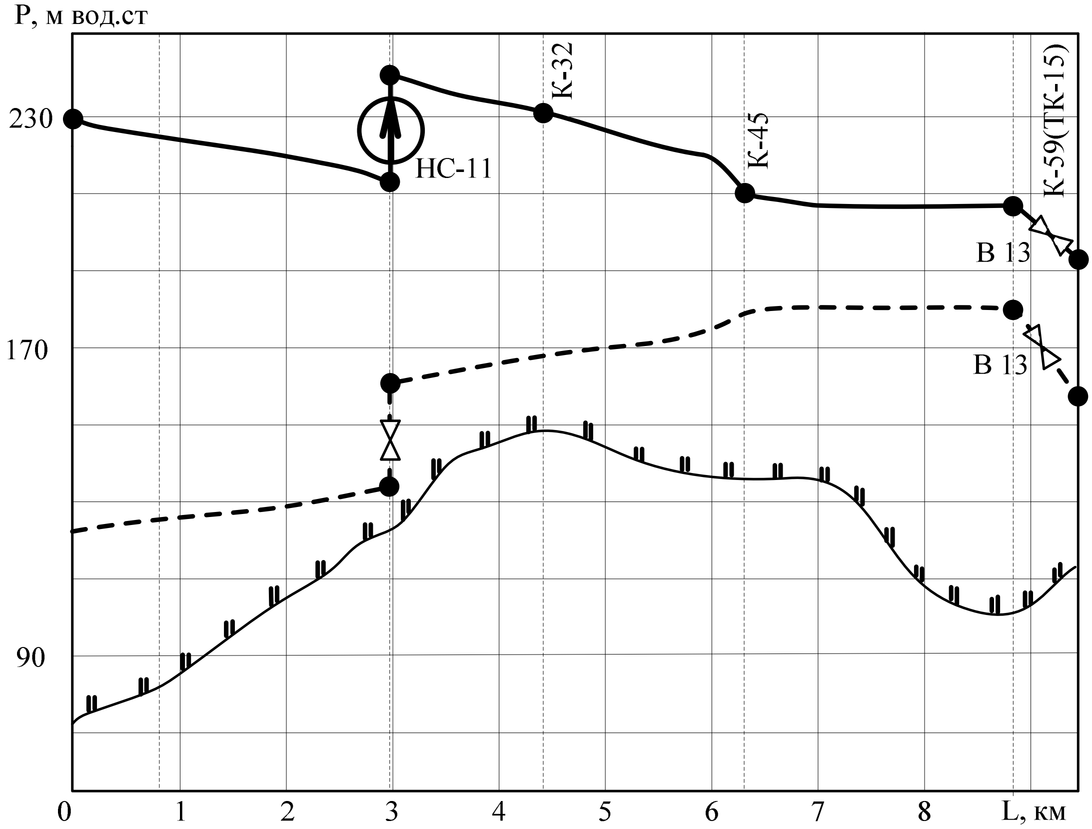


Рис. 3.30. Третий вывод первый путь. Повысительная насосная НС − 11 включена

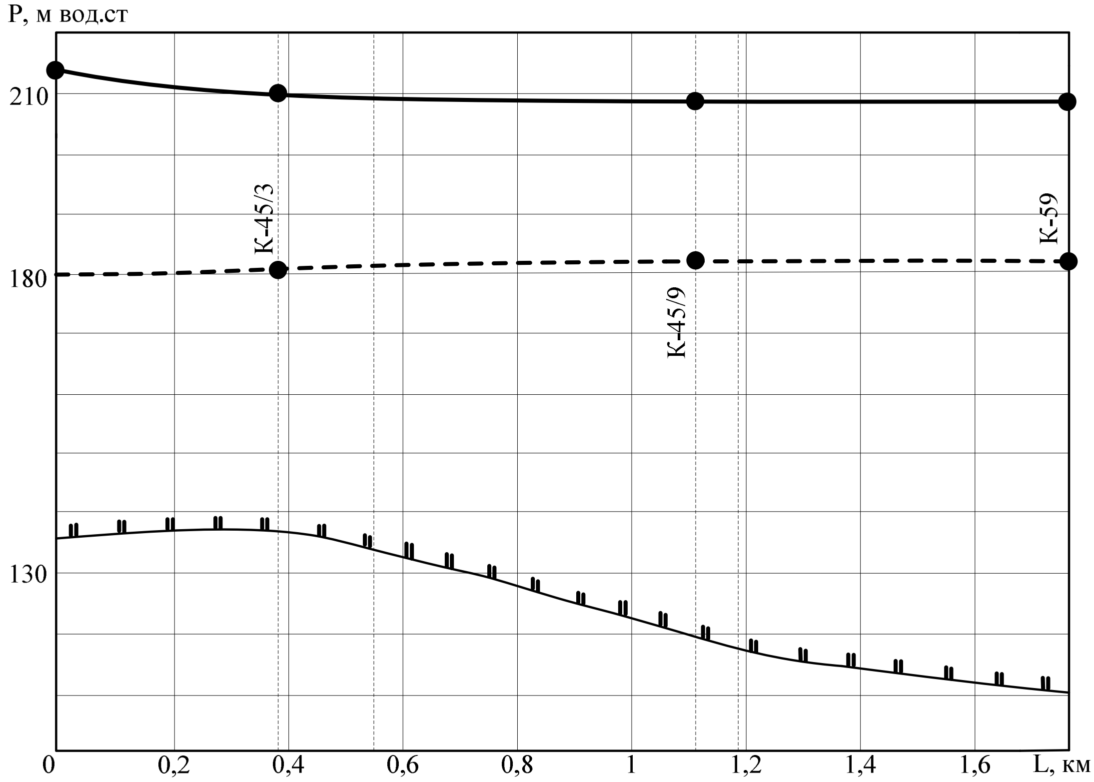


Рис. 3.31. Третий вывод третий путь

Выполнение этого мероприятия приведет к увеличению располагаемого перепада давлений на 50 *м*. Значительно более благоприятные условия работы имеются на втором выводе (рис. 3.28, 3.29), что связано с малой нагрузкой (G = 4600 *т/час*) и в 2 раза меньшими по сравнению с первым и третьим выводами длинами труб и большими их диаметрами. В связи с чем, располагаемый перепад давлений здесь не ниже 40 *м*. Поэтому, тепловая нагрузка на втором выводе может быть существенно увеличена, например, путем передачи части нагрузки 1-го и 3-го вывода.

Выводы

1. Используя электрогидравлическую аналогию, разработана компьютерная модель тепловой сети г. Самара, питаемой от Самарской ТЭЦ, позволяющая выполнять расчеты скоростей, давлений, расходов, затрат энергии на перемещение теплоносителя, рассматривая теплосеть как единую гидравлическую систему.

2. Для максимального приближения модели к реальной теплосети использована автоматическая идентификация, основанная на итеративном изменении гидравлических сопротивлений отдельных участков с таким

расчетом, чтобы получаемые на модели давления наименее отличались от известных экспериментальных данных по давлению в некоторых точках теплосети. Показано, что точность идентификации в зависимости от используемого числа экспериментальных данных составляет 3 − 5 %.

3. Выполненные расчеты позволили указать участки теплосети, на которых с целью повышения расходных характеристик необходимо провести реконструкцию, связанную с увеличением диаметров трубопроводов. Были также выполнены расчеты, позволяющие оценить возможности запитки дополнительной нагрузки на всех тепловыводах Самарской ТЭЦ.

Глава 4. Исследование температуры и термических напряжений барабанов котлов ТЭС

В процессе планового (или аварийного) останова парового котла происходит падение давления пара в барабанах. Частичное уменьшение давления может происходить при любом другом останове котла в результате действия любой из защит, включающих открытие продувки пароперегревателя. В итоге за довольно короткий промежуток времени происходит существенное понижение температуры насыщения жидкости в барабане, приводящее к уменьшению её температуры и, как следствие, к изменению температуры металла барабана. При этом важным параметром является не только градиент температуры по толщине стенки (и особенно в зоне его отверстий), но и интенсивность (скорость изменения) температуры любой точки стенки во времени, лимитируемая величиной $6^{\circ}C$ в минуту. Изменение температурных напряжений во времени определяется из решения задачи динамической термоупругости, рассмотрение которой не входит в тематику настоящей диссертации. Более подробно остановимся на вопросах определения переменных во времени коэффициентов теплоотдачи на внутренней стенке барабана и определении распределения температуры в пределах толщины стенки во времени, в том числе и в областях стенки, включающих отверстия, предназначенные для подсоединения экранных труб [142].

4.1. Определение коэффициентов теплообмена на внутренней стенке барабана из решения обратной задачи

При обеспечении надежной работы барабана котла необходимо знание закономерности изменения во времени температуры его внутренней стенки. Для достижения этих целей необходимо знать изменение во времени коэффициента теплоотдачи от жидкости, находящейся в барабане к его стенке. Его нахождение из известных критериальных уравнений будет крайне неточным, так как его изменение связано с изменением во времени и температуры среды, и температуры стенки. В этой связи необходимо отметить, что в известные критериальные уравнения температура не входит, то есть считается, что коэффициент теплоотдачи не зависит от температуры. В ряде работ [125] приводятся теоретические доказательства того, что во многих практических случаях (и, в частности, при определенных сочетаниях граничных условий) коэффициент теплоотдачи представляет зависящую от температуры величину.

В настоящей диссертации зависящий от температуры и от времени коэффициент теплообмена находится на основе методов решения обратных задач. Для этих целей используется, полученное в разделе 3.3 диссертации решение прямой задачи при изменяющемся от времени коэффициенте теплообмена, и экспериментальные значения температуры во времени в одной из точек наружной поверхности. Для прямой задачи справедливы допущения:

1. Стенка считается плоской, что ввиду большого диаметра барабана (2,8 м) и незначительной толщины стенки (0,112 м) вполне допустимо.

2. Теплообмен с окружающей средой на внешней поверхности стенки отсутствует. Отметим, что ввиду наложенной на стенку тепловой изоляции

толщиной 0,2 м с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 0{,}03\,\text{Вт}/(мК)$ данное допущение также вполне оправдано.

3. Температура среды в барабане не зависит от времени. Отметим, что данное допущение можно принять для промежутка времени, не включающего непосредственно время, когда происходит изменение давления и последующий за ним процесс вскипания жидкости с соответствующим уменьшением её температуры.

4. Коэффициент теплоотдачи линейно зависит от времени, то есть его изменение описывается формулой (3.63).

С учётом принятых допущений постановка задачи приводится к виду (3.64) – (3.67), где R – толщина стенки; λ –теплопроводность материала стенки; $T_{ср} = const$ – температура воды в барабане после прекращения процесса её понижения в процессе дросселирования пара и установления её некоторого постоянного во времени значения.

Для нахождения интенсивности изменения коэффициента теплообмена во времени решением обратной задачи необходимо найти величину коэффициента β. Для этого используется решение краевой задачи (3.98) – (3.101) в первом приближении вида (3.104) и экспериментальные температуры на внешней стенке, то есть в точке $\xi = 0$ (экспериментальные исследования даны на рис. 4.1. см. кривую 1).

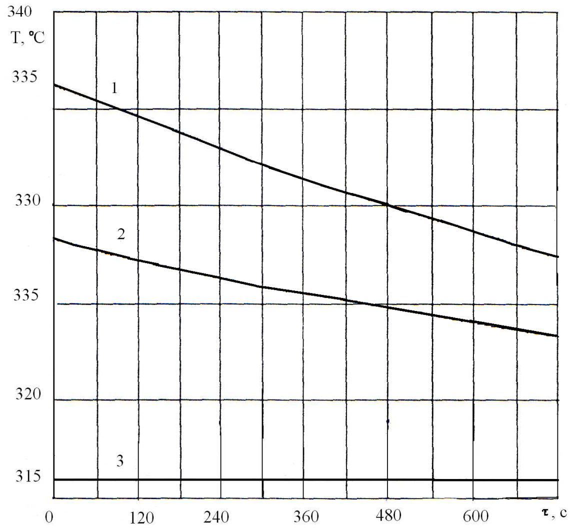


Рис. 4.1. Изменение температуры:
1 – наружная поверхность стенки (x=0);
2 – внутренняя поверхность стенки барабана (расчёт по формуле (3.104));
3 – температура жидкости $T_{ср}$.

Кривая 1 в переменных $\Theta - \mathrm{Fo}$ приводится рис. 4.2. При её получении использованы исходные данные:

$$R = 0{,}112\ м; \quad \alpha_0 = 120\ Вт/(м^2 К); \quad a = 11{,}2 \cdot 10^{-6}\ м^2/с; \quad T_0 = 336^\circ C\ ;$$

$$T_{ср} = 316^\circ C\ ; \quad \lambda = 48\ Вт/(мК); \quad \mathrm{Bi} = \alpha R/\lambda = 0{,}28. \qquad (4.1)$$

Аппроксимируем кривую 1 (рис. 4.2) следующей функцией

$$\Theta(0, \mathrm{Fo}) = b_1 + b_2 \mathrm{Fo} + b_3 \mathrm{Fo}^2 + b_4 \mathrm{Fo}^3, \qquad (4.2)$$

где b_1, b_2, b_3, b_4 – неизвестные коэффициенты.

Запишем соотношение (4.2) для точек 0, 1, 2, 3 (см. рис. 4.2), в которых имеем следующие значения чисел Фурье и соответствующих им температур:

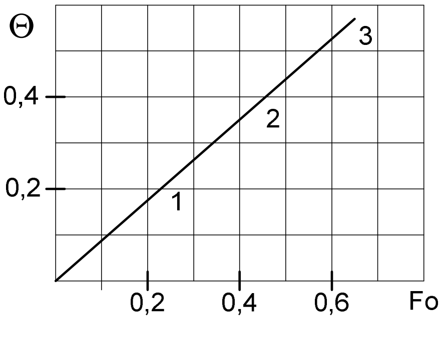


Рис. 4.2. Аппроксимация результатов экспериментальных данных (кривая 1 на рис. 4.1)

$\mathrm{Fo}_0 = 0$; $\Theta(0, \mathrm{Fo}_0) = 0$; $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}21$; $\Theta(0, \mathrm{Fo}_1) = 0{,}15$; $\mathrm{Fo}_2 = 0{,}43$; $\Theta(0, \mathrm{Fo}_2) = 0{,}3$; $\mathrm{Fo}_3 = 0{,}64$; $\Theta(0, \mathrm{Fo}_3) = 0{,}43$.

Отсюда для определения коэффициентов b_k, $(k=\overline{1,4})$ получаем систему 4-х алгебраических уравнений, из решения которой находим

$$b_1 = 0{,}18; \qquad b_2 = 1{,}4; \qquad b_3 = -1{,}8; \qquad b_4 = 1{,}3. \tag{4.3}$$

С учётом (4.3) соотношение (4.1) будет

$$\Theta(0, \mathrm{Fo}_0) = 0{,}18 + 1{,}4\mathrm{Fo} - 1{,}8\mathrm{Fo}^2 + 1{,}3\mathrm{Fo}^3 \tag{4.4}$$

Отметим, что расчёты по формуле (4.4) практически совпадают с результатами эксперимента, представленных кривой 1 на рис. 4.1.

Для идентификации числа Предводителова $\mathrm{Pd} = \beta R^2 / a$, включающего искомый коэффициент β, подставим (4.4) в левую часть соотношения (3.104) и вычислим интеграл в пределах $0 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_3$.

$$\int\limits_0^{\mathrm{Fo}_3} (0{,}18 + 1{,}4\mathrm{Fo} - 1{,}8\mathrm{Fo}^2 + 1{,}3\mathrm{Fo}^3) d\mathrm{Fo} = \int\limits_0^{\mathrm{Fo}_3} \frac{B_i(1 + Pd\mathrm{Fo}) + 2\mathrm{q}_2(\mathrm{Fo})}{B_i(1 + Pd\mathrm{Fo}) + 2} d\mathrm{Fo}\,, \tag{4.5}$$

где $\mathrm{Fo}_3 = 0{,}64$; $\mathrm{Bi} = 0{,}28$; b_1, b_2, b_3, b_4 – находятся из (4.3); $\mathrm{q}_2(\mathrm{Fo})$ – определяется из формулы (2.122), в которой Fo_1 находится по формуле (2.96), положив $\mathrm{q}_1(\mathrm{Fo}_1) = 1$.

После нахождения интегралов в соотношении (4.5) относительно неизвестной величины критерия Предводителева Pd будем иметь трансцендентное уравнение, из решения которого находим $\mathrm{Pd} = 0{,}94$. По известной величине критерия Предводителева по формуле $\mathrm{Pd} = \beta R^2 / a$ находится коэффициент $\beta = 0{,}18$. Отсюда переменный во времени коэффициент теплообмена определяется по соотношению

$$\alpha(\tau) = \alpha_0 (1 + \beta\tau) = 120\,(1 + 0{,}18\,\tau)\,. \tag{4.6}$$

4.2. Определение температуры барабанов котла в зоне отверстий под экранные трубы

Барабаны котлов представляют собой удлиненные стальные цилиндрические конструкции, имеющие многочисленные отверстия для присоединения к ним экранных труб. В нижней части барабан заполнен жидкостью (вода), с температурой около $340^{\circ}C$, а в верхней части находится пар при давлении 130 атм (рабочие параметры барабана котла БКЗ – 420 – 140 НГМ) (рис. 4.3).

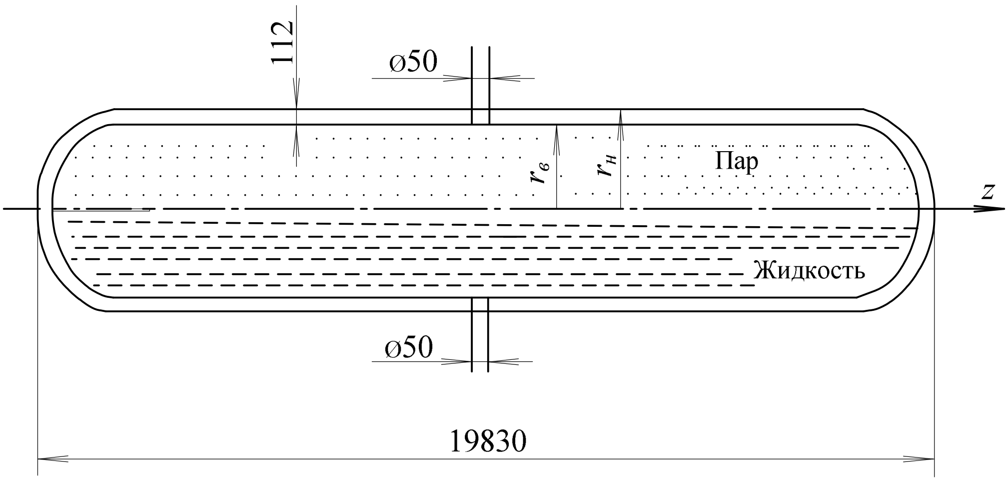


Рис. 4.3. Схема барабана котла (размеры в мм)

Определение температуры барабана усложняется наличием отверстий по которым из экранных труб топки котла в барабан поступает кипящая вода (в нижней части барабана). Через отверстия в верхней части барабана водяной пар поступает в трубы пароперегревателя. Таким образом, барабан служит для отделения пара от жидкости. При поступлении воды в барабан через нижние отверстия и подачи пара в пароперегреватель через верхние отверстия максимальные градиенты температур образуются по толщине стенки в зоне нижних отверстий и, в основном, при плановом (или аварийном) уменьшении давления пара. В этом случае, виду понижения температуры насыщения часть воды вскипает, а в оставшейся её части температура в течение достаточно малого промежутка времени (2 – 3 минуты) снижается на $30-40^{\circ}C$ вследствие поглощения теплоты парообразования. В связи с чем, наиболее интересным представляется определение температуры стенки барабана в зоне нижних отверстий. При этом требуется знать коэффициенты теплообмена как на внутренней поверхности стенки вне зоны отверстий, где происходит кипение практически неподвижной жидкости, так и в области отверстий, где происходит движение со скоростью 2 м/с кипящей жидкости.

При расчете коэффициентов теплоотдачи на боковых поверхностях отверстий барабанов котлов используются исходные данные [128, 131]:

$t_{ж} = 316°C$; $t_{ст} = 340°C$; $\nu_{ж} = 0{,}128 \cdot 10^{-6}\, м^2/\text{с}$; $\upsilon_{ж} = 2\, м/с$;

$\lambda_{ж} = 0{,}513\, Вт/(м \cdot К)$; $d = 0{,}05\, м$; $a = 0{,}122 \cdot 10^{-6}\, м^2/\text{с}$,

где $t_{ж}$ – температура воды в барабане; $t_{ст}$ – температура стенки барабана в отверстиях; $\nu_{ж}$ – кинематическая вязкость жидкости; $\lambda_{ж}$ – коэффициент теплопроводности жидкости; $\upsilon_{ж}$ – скорость течения среды в отверстиях барабана; d – диаметр отверстия; a – температуропроводность жидкости.

Для нахождения коэффициентов теплоотдачи использовалось следующее критериальное уравнение [55]:

$$\text{Nu} = 0{,}021\,\text{Re}^{0,8}\,\text{Pr}_{ж}^{\;0,43}(\text{Pr}_{ж}/\text{Pr}_{C})^{0,25}\varepsilon_{e}, \tag{4.7}$$

где $\text{Nu} = \alpha d/\lambda_{ж}$ – критерий Нуссельта; $\text{Re} = \upsilon_{ж} d/\nu_{ж}$ – критерий Рейнольдса; $\text{Pr}_{ж} = \nu_{ж}/a_{ж}$ – критерий Прандтля в потоке; $\text{Pr}_{c} = \nu_{c}/a_{c}$ – число Прандтля при параметрах жидкости (ν_{c}, a_{c}) вблизи стенки; ε_{e} – коэффициент, учитывающий средний коэффициент теплоотдачи по длине l отверстия. Если $l/d > 50$, то $\varepsilon_{e} = 1$; если $l/d < 50$, то $\varepsilon_{e} = 1$. Так как $l = 12\, см$ и $d = 5\, см$, то при $\text{Re} = 2 \cdot 0{,}05/0{,}128 \cdot 10^{-6} = 12800$ $\varepsilon_{e} = 1{,}28$ [55].

Подставляя все исходные данные в (4.7), положив $\text{Pr}_{ж}/\text{Pr}_{\text{с}} \approx 1$, получаем $\text{Nu} = 1437{,}76$. Отсюда

$$\alpha = \text{Nu}\lambda_{ж}/d = 14751\, Вт/(м^2 \cdot К).$$

Найденная величина коэффициента теплоотдачи была использована при определении температуры стенки. При этом был использован аналитический метод, изложенный в п. 3.3 диссертации (при неизменном от времени коэффициенте теплообмена, а также численные методы (метод прогонки) при решении задачи в двумерной постановке). Результаты расчетов для одного отверстий нижней части барабана даны на рисунке 4.4.

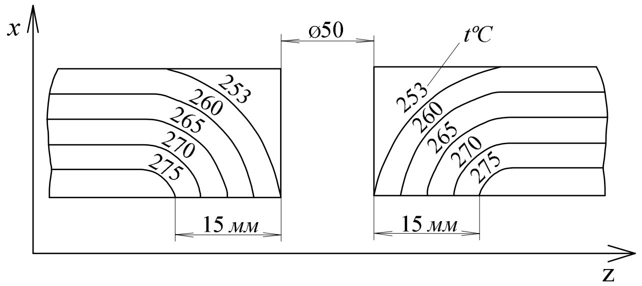


Рис. 4.4. Температура в отверстии барабана t °C (размеры в *мм*)

Найденные значения температур были использованы далее при расчётах температурных напряжений с помощью метода конечных элементов (п. 4.4).

4.3. Расчёт механических напряжений в барабане котла, возникающих от сил давления пара

При расчётах термических напряженний барабана котла необходимо учитывать механические напряжения, возникающие от сил давления пара внутри барабана, а также напряжения, обусловленные собственным весом барабана, вызывающим его изгиб. В настоящей диссертации для расчёта напряжений от сил давления пара используется методика, позволяющая выполнять расчёт напряжений и деформаций цилиндров, которые нагружены внутренним давлением. Формулы для нахождения перемещений и напряжений здесь имеют вид [115]

$$U = \frac{P_в\, r_в^2 - P_н r_н^2}{r_н^2 - r_в^2} \cdot \frac{(1-\nu)\rho}{E} + \frac{(P_в - P_н) r_в^2 r_н^2}{(r_н^2 - r_в^2)\rho} \cdot \frac{(1-\nu)}{E}; \tag{4.8}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_в r_в^2 - P_в r_н^2}{r_н^2 - r_в^2} + \frac{(P_в - P_н) r_в^2 r_н^2}{(r_н^2 - r_в^2)\rho^2}; \tag{4.9}$$

$$\sigma_r = \frac{P_в r_в^2 - P_н r_н^2}{r_н^2 - r_в^2} - \frac{(P_в - P_н) r_в^2 r_н^2}{(r_н^2 - r_в^2)\rho^2}; \tag{4.10}$$

$$\sigma_z = (P_в r_в^2 - P_н r_н^2)/(r_н^2 - r_в^2), \tag{4.11}$$

где $P_в$, $P_н$ – внутреннее и наружное давление; σ_r – нормальное радиальное напряжение; σ_θ – окружное напряжение; σ_z – осевое напряжение; ρ – текущий радиус; $r_в$, $r_н$ – внутренний и наружный радиусы (рис. 4.3); E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона.

При расчётах перемещений и напряжений по формулам (4.8) – (4.11) использовались исходные данные [128, 131]:

$P_в = 130\,кг/см^2$; $r_в = 130\,мм$; $\nu = 0{,}25$; $P_н = 1\,кг/см^2$; $r_н = 1412\,мм$; $E = 16000\,кг/мм^2$.

Анализ результатов расчётов по формулам (4.8) – (4.11) позволяет заключить, что на внутренней стенке радиальные напряжения достигают $\sigma_{rв} = -130\,кг/см^2 = -1{,}3\,кг/мм^2$, а на внешней $\sigma_{rн} = -1\,кг/см^2 = -0{,}01\,кг/мм^2$. Следовательно, радиальные напряжения на внутренней и внешней поверхностях барабана совпадают с заданными на них давлениями пара внутри барабана и окружающего воздуха – снаружи барабана. Напряжения при этом имеют знак «минус», то есть они сжимающие.

Окружное напряжение σ_θ, определяемое по формуле (4.9), для внутренней и наружной поверхностей барабана соответственно будет $\sigma_{\theta в} = -12{,}6\,кг/мм^2$; $\sigma_{\theta н} = -10{,}6\,кг/мм^2$. Напряжения положительные (растяжение).

Осевое напряжение σ_z, определяемое по формуле (4.11), имеет одинаковую величину по толщине стенки напряжений растяжения и составляет $\sigma_z = 5{,}6\,кг/мм^2$. Радиальное перемещение при $\rho = r_н$, определяемое по формуле (4.8), составляет $U_{rн} = 0{,}58\,мм$.

Отметим, что перемещения и напряжения, определяемые по формулам (4.8) – (4.11), справедливы лишь для центральной части барабана.

4.4. Расчёт термонапряжений в отверстиях барабана методом конечных элементов

Метод конечных элементов получил широкое распространение при расчётах механических и температурных напряжений в различных элементах конструкций. Этот метод относится к разновидности численных методов, однако в области каждого конечного элемента решения является аналитическим. В связи с чем, его важное преимущество по сравнению с различными разновидностями численного метода (расщепления, локально–одномерный метод, метод дробных шагов) состоит в возможности некоторого огрубления сетки без уменьшения получаемой точности. К числу других важных преимуществ методов конечных и граничных элементов относятся: возможность получения сильно разреженных (ленточных) симметричных положительно определенных матриц систем алгебраических уравнений, которые, как правило, хорошо обусловлены. При этом особое значение имеет положительная определенность матрицы, то есть когда на главной диагонали находятся максимальные и положительные члены.

Если не выполняется хотя бы одно из перечисленных условий, то процесс итераций при решении систем уравнений настолько медленно сходится, что получение решения удовлетворительной точности затруднительно даже при использовании современных компьютеров. Трудности решения систем уравнений, имеющих плохо обусловленные матрицы, связаны с быстрым накоплением ошибок округления, в связи с чем, такие системы необходимо решать с большой точностью промежуточных вычислений, что значительно увеличивает машинное время.

Метод конечных элементов (МКЭ) представляет разновидность вариационных методов и их отличие состоит в задании функций формы (в МКЭ) и координатных функций (в вариационных методах). Так, функции формы в МКЭ задаются в пределах одного элемента, а в вариационных методах – во всей области. В результате соответствующей нумерации узлов в МКЭ получаются матрицы ленточного типа, в которых все ненулевые коэффициенты располагаются вдоль главной диагонали, и к тому же, они являются симметричными относительно нее. В данном случае большое значение имеет ширина ленты, и чем она меньше, тем лучше обусловлена матрица. Ширина ленты определяется соотношением максимального и минимального номеров узлов элемента, для которого это отношение максимально, что в свою очередь зависит от принятого способа разбиения рассматриваемой области на элементы и принятой системы нумерации их узлов.

Идея МКЭ состоит в следующем [88, 106, 107, 110, 112 – 114, 117, 118]:

1. Рассматриваемая область разбивается на элементы, связь между которыми устанавливается посредством узловых точек.

2. Для каждого элемента находится функция формы, которая определяет внутренние перемещения элемента через перемещения его узловых точек.

3. Функции формы однозначно определяют деформации внутри каждого элемента, которые с учётом температурных деформаций позволяют найти напряжения в каждом элементе.

Математическая постановка задачи термоупругости (для двумерной задачи) включает уравнения равновесия (движения) и неразрывности деформаций

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0\,; \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0\,; \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\,, \tag{4.14}$$

соотношения, связывающие напряжения и деформации (Дюгамеля – Неймана)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha T\,; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha T\,; \quad \gamma_{xy} = 2(1+\nu)\tau_{xy} / E\,, \tag{4.15}$$

геометрические уравнения (формулы Коши), определяющие деформации через перемещения

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}\,;\ \varepsilon_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\,;\ \gamma_{xy} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\,; \tag{4.16}$$

где σ_x, σ_y – нормальные напряжения; τ_{xy} – касательное напряжение; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – деформации; U, ϑ – перемещения; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости; α – коэффициент линейного расширения.

После того как рассматриваемая область оказывается разбитой на элементы, любая система $\{\delta\}$ узловых перемещений, записанная для области, в которую входят все элементы

$$\{\delta\}=\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \vdots\\ \delta_n\end{Bmatrix}, \tag{4.17}$$

автоматически удовлетворяет уравнению совместности деформаций (4.14).

Уравнения равновесия (4.12), (4.13) внутри каждого элемента благодаря принятой системе функций формы оказываются выполненными. Уравнения равновесия в узловых точках выполняются через решение системы уравнений относительно перемещений в узлах $\delta_i,\ (i=\overline{1,n})$.

По найденным значениям узловых перемещений определяются напряжения в узловых точках. Напряжения внутри элементов (если возникает такая необходимость) могут быть найдены через функции формы каждого элемента.

Определяющая система уравнений относительно перемещений в узлах $\delta_i,\ (i=\overline{1,N})$ записывается в виде

$$[K]\{\delta\}=\{F\}_{\varepsilon_T} \tag{4.12}$$

или

$$\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N}\\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N}\\ \cdots & \cdots & \dots. & \dots\\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \vdots\\ \delta_N\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\\ \vdots\\ F_N\end{Bmatrix}_{\varepsilon_T}, \tag{4.13}$$

где $[K]$ – матрица жесткости, размерностью $N\times N$; $\{\delta\}$ – вектор перемещений в узлах; $\{F\}$ – вектор тепловой нагрузки.

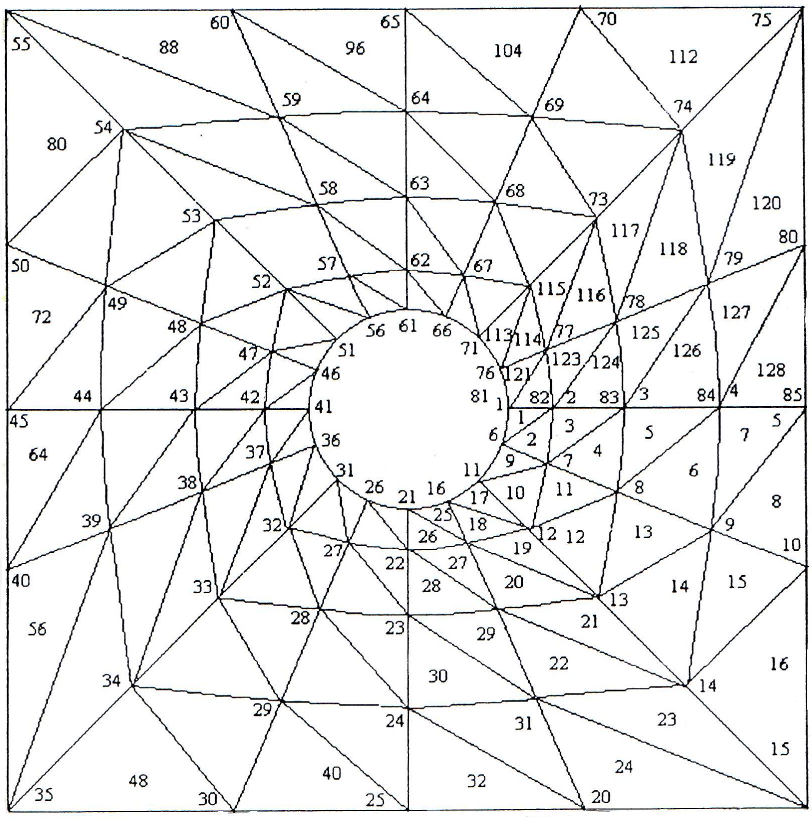


Рис. 4.5. Схема автоматического разбиения области, прилегающей к отверстию в барабане. Число узловых точек – 85; число треугольных элементов – 128; ширина ленты B = 12.

На рисунке 4.5. приведен пример разбиения некоторой области на элементы в зоне отверстия барабана, где указано число узловых точек, число треугольных элементов и ширина ленты в матрице коэффициентов системы уравнений, определяемая по формуле $B=(R+1)\overline{Q}$, где R – разность наибольшего и наименьшего номеров узлов элемента; Θ – число степеней свободы (для двумерной задачи $\Theta=2$).

Применительно к барабану котла МКЭ в сочетании с большими возможностями современных компьютеров позволяет выполнять расчеты термонапряженного состояния с учётом большого числа факторов – неравномерное температурное распределение, внутреннее давление в барабане, его собственный вес и вес воды в нем, наличие отверстий и проч.

Ниже приведены результаты исследования термонапряжений с учётом перечисленных факторов. Исходные данные были следующие:

$$\alpha' = 0{,}000014/K;\ E = 16000\,кг/мм^2;\ \nu = 0{,}3;\ p_{вн} = 130\,кг/см^2,$$

где E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; α' – коэффициент линейного расширения; $p_{вн}$ – внутреннее давление пара в барабане. Найдем термонапряженное и деформированное состояние барабана в случае, когда температурный перепад между верхней и нижней частью составляет $40^{\circ}C$ (см. рисунок 4.3). Такое температурное распределение может наблюдаться при плановом или аварийном сбросе давления пара в барабане, в результате которого температура воды в нем может существенно понижаться. В связи с чем, нижняя часть барабана охлаждается до температуры жидкости в нем, а температура верхней – остается практически неизменной. Перепад температуры верха и низа барабана приводит к его изгибу, выпуклостью вверх (см. рис. 4.4). Высота прогиба здесь составляет 8,81 мм.

Выполненные исследования показали, что при нагреве барабана от $0^{\circ}C$ до $320^{\circ}C$ его длина в осевом направлении (по оси z) увеличивается на 9,16 см, а диаметр – на 0,48 см (см. рисунок 4.5).

Согласно расчётам по формуле (4.9) под действием сил внутреннего давления при отсутствии отверстий окружные напряжения составляют: $\sigma_{\theta} = 12{,}6\,кг/мм^2$. Из расчётов по методу конечных элементов следует, что в отверстиях барабанов окружные напряжения достигают $\sigma_{\theta} = 26{,}75\,кг/мм^2$ (см. рисунок 4.6). Следовательно, они возрастают на $14\,кг/мм^2$. Это объясняется тем, что отверстие – концентратор напряжений.

Напряжения в случае, когда учитывается внутреннее давление и градиент температуры в отверстии, даны на рис. 4.7. Анализ результатов расчётов позволил заключить, что максимальные окружные напряжения достигают $37{,}37\ кг/мм^2$. Такой величины напряжения находятся выше предела прочности на растяжение для данного материала, составляющего $\sigma_{в} = 35\,кг/мм^2$.

Заключение

1. При учёте релаксационных явлений получен математический метод моделирования теплопереноса, позволяющий выполнять расчёты температуры для сверхмалых значений времени.

2. Разработан приближенный метод исследования гиперболических уравнений, позволяющий получать простого вида аналитические решения на начальном временно́м участке, в пределах которого при получении точного решения требуется использование значительного числа членов ряда (от 10^4 при $\mathrm{Fo} = 10^{-6}$ до 10^6 при $\mathrm{Fo} = 10^{-10}$). Найденное решение путем решения обратной задачи теплопроводности было использовано для идентификации коэффициента релаксации.

3. Разработан приближенный метод решения задач теплопроводности с изменяющимися от времени коэффициентами теплообмена, который основан на использовании фронта возмущения (в предположении конечной скорости изменения теплоты), дополнительных краевых условий и дополнительной функции. Дополнительные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было равносильно удовлетворению исходного уравнения в граничных точках. Преимущество метода в том, что благодаря дополнительным граничным условиям в интегральном методе удается свести решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. Этот метод весьма эффективен для решения нелинейных задач, краевых задач с переменными физическими свойствами и др., получение решений которых классическими точными аналитическими методами не представляется возможным.

4. На основе найденного в работе приближенного решения краевой задачи теплопроводности с изменяющимся от времени коэффициентом теплообмена, используя экспериментальные данные по изменению температуры во времени в некоторой фиксированной точке пространственной переменной, посредством решения обратной задачи идентифицирован переменный во времени

коэффициент теплообмена на внутренней стенке барабана парового котла при аварийном уменьшении давления пара, вызывающего частичное вскипание воды, находящейся в барабане.

5. Проведенное исследование позволило выполнить оценку компьютерной модели теплосети централизованного теплоснабжения г. Самара, запитываемой от Самарской ТЭЦ. Модель позволяет выполнять оптимальное перераспределение тепловой нагрузки с целью обеспечения необходимого располагаемого перепада давлений между прямой и обратной магистралями. В отличие от известных моделей, использован метод автоматической идентификации, позволяющий путем изменения сопротивлений участков получить модель, практически эквивалентную реальной теплосети по сопротивлению, оказываемому процессу перемещения среды. Проведенное исследование позволило выполнить оценку текущего состояния теплосети, а также разработать рекомендации по её реконструкции и построению новых участков.

6. С целью проверки используемых в работе аналитических и графоаналитических методов исследования сложного теплообмена (с учётом конвективной и лучистой составляющих теплового потока), а также для выполнения многочисленных исследований реальных многослойных конструкций, создана экспериментальная установка, представляющая многослойный цилиндр с газовой прослойкой. Выполненные исследования позволили заключить, что в диапазоне температур от $50\,^{\circ}C$ до $800\,^{\circ}C$ расхождение теоретических результатов расчета распределения температур с экспериментальными значениями температур не превышает 18%.

7. Используя разработанный в диссертации метод исследования задач теплообмена с изменяющимися от времени коэффициентами теплоотдачи, выполнено исследование температуры барабана котла БКЗ – 420 – 140 НГМ при плановом (или аварийном) уменьшения давления пара. Показано, что в процессах аварийного останова скорость охлаждения отдельных элементов барабана не превышает допустимые $6\,^{\circ}C$ в минуту.

8. Используя результаты расчётов температуры барабана котла, включая зоны отверстий, методом конечных элементов рассчитаны термические напряжения в зоне отверстий барабана. Их анализ показал, что окружные температурные напряжения в этой зоне превышают пределы прочности данного материала. Используя результаты исследований, были разработаны рекомендации по проведению безопасных режимов сброса давления. Кроме того, с целью снижения температурных напряжений на внутренних кромках отверстий рекомендовано выполнять фаски, глубиной около 1 см (при толщине стенки барабана 12 см).

Список используемой литературы

1. *Колесников С.В., Еремин А.В., Бранфилева А.Н., Колесникова А. С.* Исследование гидравлических режимов работы цирксистемы Тольяттинской ТЭЦ на
компьютерных моделях. / С.В Колесников, А.В. Еремин, А.Н. Бранфилева, А.С. Колесникова // Вестник Самар. гос. техн. ун - та. Серия: Техн. науки. 2013. №2(38).-С. 178-188.

2. *Кудинов И. В., Колесников С.В., Еремин А.В., Бранфилева А.Н.* Компьютерные модели сложных многокольцевых разветвленных трубопроводных систем. / И.В. Кудинов, С.В Колесников, А.В. Еремин, А.Н. Бранфилева // Теплоэнергетика. № И, Москва, 2013. С. 64-69.

3. *Колесников С.В., Кудинов И.В., Еремин А.В., Колесникова А. С., Бранфилева А.Н.* Исследование гидравлических режимов работы циркуляционных систем ТЭЦ на компьютерных моделях. / С.В Колесников, И.В Кудинов, А.В. Еремин, А.С. Колесникова, А.Н. Бранфилева // Известия вузов. Проблемы энергетики. №7 - 8, Казань, 2013. С. 112-122.

4. *Колесников С. В., Кудинов В. А., Кузнецова А. Э., БранфилеваА.Н., Скворцова М.П.* Использование компьютерной модели для исследования совместной работы насосов с регулируемым и нерегулируемым приводом. / С.В Колесников, В.А. Кудинов, А.Э. Кузнецова, А.Н. Бранфилева, М.П. Скворцова // Вестник Самар. гос. техн. ун - та. Серия: Техн. науки. 2014. №1(41). - С. 127-135.

5. *Кудинов И.В., Бранфилева А.Н., Еремин А.В., Скворцова М.П.* Моделирование теплообмена в турбулентном пограничном слое с использованием полуэмпирической теории турбулентности. / И.В Кудинов, А.Н. Бранфилева, А.В. Еремин, М.П. Скворцова // Вестник Самар. гос. техн. ун - та. Серия: Физ. - мат. науки. 2014. № 4(37). - С. 157 - 169.

6. *БранфилеваА.Н., Стефанюк Е.В., Колесников С.В., Скворцова М.П.* Повышение эффективности работы теплосетей ТЭЦ. / А.Н. Бранфилева, Е.В. Стефанюк, С.В. Колесников, М.П. Скворцова // Вестник Самар. гос. техн. ун - та.

Серия: Техн. науки. 2015. №.1(45).-С.102-107.

7. *Кудинов И.В., Кузнецова А.Э., Абишева Л. С., БранфилеваА.Н.* Математическое моделирование упругих продольных волн в жидкости с учетом ее релаксационных свойств. / И.В. Кудинов, А.Э. Кузнецова, Л.С. Абишева, А.Н. Бранфилева // Прикладная математика и механика. Сборник научных трудов. Ульяновск, 2014. С. 119 - 133

8. *Колесников С.В., Кудинов И.В., Еремин А.В., Бранфилева А.Н.* Использование компьютерных моделей для проектирования сложных трубопроводных сетей/ С.В. Колесников, И.В. Кудинов, А.В. Еремин, А.Н. Бранфилева // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. Минск, 2014 (5). С. 72-84.

9. *Баумейстер К., Хамилл Т.* Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле. // Теплопередача. 1969, № 4. С. 112 -119.

10. *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978.-328с.

11. *Био М.* Вариационные принципы в теории теплообмена. М.: Энергия. 1975.

12. *Бровкин Л.А.* К решению дифференциального уравнения теплопроводности // Изв. вузов СССР. Энергетика, № 8, 1984. С. 111 - 113.

13. *Глазунов Ю. Т.* Вариационные методы. - Москва - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. - 470 с.

14. *Гудмен Т.* Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена. Сб. науч. тр. М.: Атомиздат, 1967. С. 41 -96.

15. *Жоу Д., Касас - Баскес Х., Лебон Дж.* Расширенная необратимая термодинамика. М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»: Институт компьютерных исследований, 2006. - 528 с.

16. *Зарубин В.С.* Инженерные методы теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983.-328 с.

17. *Зройчиков Н.А., Кудинов В.А,, Коваленко А.Г., Колесников С.В., Москвин А.Г., Лисица В. И.* Разработка компьютерной модели и расчет оптимальных режимов работы циркуляционной системы ТЭЦ-23 ОАО «Мосэнерго». Теплоэнергетика. №12.2007. С. 7-15.

18. *Зыков А. А.* Теория конечных графов. М.: Наука, СО. 1969. - 543с.

19. *Кабисов К. С., Комолов Т. Ф., Лурье В.А.* Колебания и волновые процессы: Теория. Задачи с решениями. Изд. 2 - ое. М.: КомКнига, 2010. - 360 с.

20. *Канторович Л.В.* Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Прикл. мат. и механ. Т. 6. № 1, 1942. С. 31-40.

21. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближённые методы высшего анализа. Л.:Физматгиз, 1962. - 708 с.

22. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. М.: Высшая школа, 2001. - 550 с.

23. *Карташов Э.М., Кудинов В. А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. - 360 с.

24. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Математические модели теплопроводности и термоупругости. Самара: Самарский государственный технический университет, 2013.-877 с.

25. *Коваленко А.Д.* Введение в термоупругость. Киев: «Наукова Думка». 1965. - 202 с.

26. *Коваленко А.Г., Туева К.С.* Система синтеза и анализа гидравлических сетей. : Вычисл. Центр АН СССР. 1989. - 70 с.

27. *Колесников С.В.* Разработка способов повышения эффективности оборотных систем водоснабжения ТЭЦ с градирнями. Дисс. канд. техн. наук. Иваново. ИГЭУ. 2004

28. *Колесников С. В., Дикоп В.В., Томкин С. В., Кудинов В.А.* Исследование гидравлических режимов работы цирксистемы Тольяттинской ТЭЦ на

компьютерной модели. Изв. Вузов СНГ. Энергетика. №6,2002. С. 90-95.

29. *Кудинов В. А.* Метод координатных функций в нестационарных задачах теплопроводности. Изв. АН Энергетика (обзор). № 3, 2004. С. 82 - 104.

30. *Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В.* Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. Учебное пособие. -М.: Высшая школа, 2008. -305с.

31. *Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А.* Анализ нелинейной теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения. Теплофизика высоких температур. Т. 44. № 5, 2006. С. 577 - 585.

32. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В.* Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. Учеб. пос. для втузов. М.: Высшая школа, 2005. 429 с.

33. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Стефанюк Е.В.* Техническая термодинамика и теплопередача. Учебник для бакалавров. 2-ое издание. Перераб и доп. М.: Издательство «Юрайт», 2013. - 566 с.

34. *Кудинов В.А., Коваленко А.Г., Колесников С.В., Панамарев Ю.С.* Разработка компьютерной модели и исследование работы циркуляционной системы Новокуйбышевской ТЭЦ - 2. Изв. АН Энергетика. 2001, №6. С. 118 - 124.

35. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В.* Аналитический метод решения задач теплопроводности на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий. ИФЖ. Т. 82. № 3, 2009. С. 540 - 558.

36. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В.* Задачи теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения. Известия Российской академии наук. Энергетика. № 5, 2008. С. 141 - 157.

37. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Антимонов М. С.* Аналитические решения задач теплообмена при течении жидкости в плоскопараллельных каналах на основе определения фронта температурного возмущения. Инженерно - физический журнал. Т. 80. № 4. 2007. С. 178 - 186.

38. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Исследование теплопроводности с учётом конечной скорости распространения теплоты. Теплофизика высоких температур.

Т. 51. № 2, 2013. С.301-310.

39. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Получение и анализ точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для плоской стенки. Теплофизика высоких температур. Т. 50. № 1, 2012. С. 118 - 125.

40. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Получение точных аналитических решений гиперболических уравнений движения при разгонном течении Куэтта. Известия АН Энергетика. № 1, 2012. С. 119 - 133.

41. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Об одном методе получения точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности на основе использования ортогональных методов // Вестник Самарского технического университета. Сер. Физ. - мат. науки. 2010. № 5 (21). С. 159 - 169.

42. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности Под ред. Э.М. Карташова. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. - 280 с

43. *Кудинов И.В.* Использование компьютерной модели для проектирования тепловых сетей // Вестник СамГТУ. Сер. Технические науки. 2010. №4 (27). С.174-181.

44. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений тепломассопереноса. М.: ИНФРА – М, 2013. 391 с.

45. *Кудинов И.В.* Построение компьютерных моделей систем теплоснабжения больших городов // Вестник СамГТУ. Сер. Технические науки. 2011. № 1 (29). С. 212-219.

46. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Исследование распределения давления при гидравлическом ударе в трубопроводе с учетом релаксационных свойств вязкой жидкости. Инженерно - физический журнал. Т. 87. №2. 2014.

47. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Исследование точного аналитического решения уравнения продольных волн в жидкости с учётом её релаксационных свойств. Инженерно - физический журнал. Т. 86. № 5. 2013.

48. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. Учеб. для вузов. 7-ое изд. М.: Дрофа, 2003. 840 с.

49. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. - 600 с.

50. *Лыков А.В.* Тепломассообмен (Справочник). 2-ое изд., перераб. и доп. М.: Энергия, 1978.-480с.

51. *Лыков А.В.* Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло - и массообмена. Инженерно - физический журнал. Т. 9, №3,1965. С. 287-304.

52. *Меренков А.П.* Дифференциация методов расчета гидравлических сетей // Журн. вычисл. математики и.мат. физики. 1973. Т. 13, №5.С. 1237 - 1248.

53. *Меренков А.П.* Применение ЭВМ для оптимизации разветвленных тепловых сетей// Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1963, №4. С.531 - 538.

54. *Меренков А.П, Хасилев В.Я.* Теория гидравлических цепей // М.: Наука, 1985. - 278с.

55. *Михеев М.А., Михеева К.М.* Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. - 343 с.

56. *Морев А.А., Сидлер В.Г, Новицкий К.Н.* Системная идентификация многониточных нефтепроводов // Транспорт и хранение нефти и Нефтепродуктов. 1982. №111. С. 6 - 7.

57. *Некрасова О.А, Хасилев В.Я.* Оптимальное дерево трубопроводной системы //Экономика и мат. методы. 1970. Т.4, №3. С. 427 - 432.

58. *Новицкий Н.Н.* Оценивание параметров гидравлических цепей// Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1998. - 214 с.

59. *Петухов Б. С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 412 с.

60. *Постолъник Ю. С.* Метод осреднения функциональных поправок в задачах теплопроводности // Тепло - и массоперенос: Сб. тр. Минск. Т. 8, 1972. С. 23 -29.

61. *Сеннова Е.В., Ощепкова Т.Е., Мирошниченко В.В.* Методические и практические вопросы построения надежных теплоснабжающих систем // Изв. РАН. Энергетика. 1999, №4. С. 65-75.

62. *Сеннова Е.В., Сидлер В.Г.* Математическое моделирование и оптимизация

развивающихся теплоснабжающих систем. // Новосибирск: Наука 1987. - 221 с.

63. *Соколов Е.Я.* Теплофикация и тепловые сети. // М.: Энергоиздат. 1982. — 360 с.

64. *Стефанюк Е.В.* Модельные представления аналитических решений краевых задач теории теплообмена на основе введения дополнительных граничных условий. Дисс. доктора техн. наук. Москва. МАТИ. 2010.

65. *Сумароков С.В.* Математическое моделирование систем водоснабжения. // Новосибирск: Наука. 1983. - 167 с.

66. *Сухарев М.Г., Ставровский Е.Р.* Оптимизация систем транспорта газа // М: Недра.1975.-278 с.

67. *Сухарев М.Г., Ставровский Е.Р., Брянских В.Е.* Оптимальное развитие систем газоснабжения. // М.: Недра, 1981. - 294 с.

68. *Тёмкин А.Г.* Обратные задачи теплопроводности. // М.: Энергия. 1973. - 464 с.

69. *Темников А.В., Игонин В.И., Кудинов В.А.* Приближенные методы решения задач теплопроводности. Куйбышев. Изд. Куйбышевского авиационного института, 1982.-89с.

70. *Формалев В. Ф., Ревизников Д.Л.* Численные методы. // М.: Физматлит, 2004. - 400с.

71. *Холмбоу Е.Л., Руло В. Т.* Влияние вязкого трения на распространение сигналов в гидравлических линиях. // Теоретические основы инженерных расчетов. 1964, №3. С. 203-209.

72. *Цирелъман Н.М.* Прямые и обратные задачи тепломассопереноса. // М.: Энергоатомиздат, 2005. - 392 с.

73. *Цой П.В.* Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса. // М.: Энергия, 1971.-382 с.

74. *Цой П.В.* Системные методы расчета задач тепломассопереноса. // М.: Издательство МЭИ, 2005. - 568 с.

75. *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. // М.: «Недра», 1975.-296 с.

76. *Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю.* Волновые явления теплопроводности: системно - структурный подход. Изд. 2-ое, доп. - М.: Едиториал УРСС, 2004. -296с.

77. *Швец М.Е.* О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. Прикладная математики и механика. Т. 13. № 3, 1949.

78. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. // М.: Наука, 1969. — 472 с.

79. *Алифанов О.М.* Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов.-М.: Машиностроение, 1979.-216с.

80. *Алифанов О.М.* Обратная задача теплопроводности. - ИФЖ, 1973, т.25, №3, с.530-537.

81. *Антикайн П.А.* Металлы и расчет на прочность котлов и трубопроводов. - 3-е изд., перераб. - М.:Энергоатомиздат, 1990. - 366,[1]с.: ил.; 21см.

82. *Антикайн П.А.* Надежность металла паровых котлов и трубопроводов. М.: Энергия, 1973.

83. *Балаховская М.Б., Балашов Ю.В., Надыцина Л.В.* О повреждениях барабанов котлов высокого давления в зоне трубных отверстий //Теплоэнергетика//. №8. 1986.

84. *Берлянд В.И., Третьяк Н.В.* Расчет термоупургих напряжений и деформаций в цилиндрах паровых турбин. - Энергетическое машиностроение, 1970, вып.8. С.93-99.

85. *Верховской А.В.* Определение напряжений в опасных сечениях деталей сложной формы. Метод неплоских сечений. - М.: Машгиз, 1958. - 147 с.

86. *Данюшевский И.А.* Исследование деформации около отверстия на модели барабана// Энергомашиностроение. 1971. №2.

87. *Жирицкий Г.С., Стрункин В.А.* Конструкция и расчет на прочность деталей паровых и газовых турбин.- М.: Мащгиз, 1968.

88. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975.- 541 с.

89. *Ильченко О.Т., Маляренко В.А.* Температурное поле корпуса турбины в переходных процессах. - Энергетическое машиностроение. 1972. Вып. 13. С. 57-63.

90. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. - М.: Наука, 1978.

91. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. - Л.: Физматгиз. 1962.-708с.

92. *Канторович Л.В.* Использование идеи Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Прикл.мат и мех. 6, №1, 1942, С 31-40.

93. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. - М.: Наука, 1964, С. 10-90.

94. *Квитка А.Л., Ворошко П.П.* Метод конечных элементов применительно к осесимметричной задаче теории упругости. - Проблемы прочности, 1970, №11.

95. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. - Киев, Наук. Думка, 1970. - 305с.

96. *Коваленко А.Д.* Введение в термоупругость.- Киев: Наук. Думка, 1065.- 204с.

97. *Кондратьев Г.М.* Регулярный тепловой режим.- М.: Гостехиздат, 1954.- 408 с.

98. *Кудинов А.А., Кудинов В.А.* Теплообмен в многослойных конструкциях. Инженерные методы. -Саратов. СГУ. 1992. - 136с.

99. *Кудинов В.А., Калашников В.В., Лаптев Н.И., Гнеденко В.В.* Теплообмен и тепловое воспламенение в многослойных конструкциях. - Самара. СамГТУ. 1996. - 280с.

100. *Кудинов В.А., Калашников В.В., Карташов Э.М., Лаптев Н.И., Сергеев С.К.* Тепломассоперенос и термоупругость в многослойных конструкциях.- М.: Энергоатомиздат. 1997. - 420с.

101. *Кудинов В.А., Дилигенский Н.В., Лаптев Н.И., Исаев А.Е., Дикоп В.В.* Аналитические решения задач теплопроводности для многослойных конструкций при переменных во времени коэффициентах теплообмена. - Изв.АН Энергетика. 1996. №2. С.64-68.

102. *Кудинов В.А., Исаев А.Е., Ремезенцев А.Б., Габдушев Р.Ж., Обухов В.А., Некрылов В.В.* Расчет коэффициентов теплоотдачи на внутренней поверхности барабана после сброса давления в процессе аварийного останова котла, Изв.АН. Энергетика №6, 2000. С.151-156.

103. *Кудинов В.А., Пеньков В.Ф., Черняева Л.Ф.* Автоматическое построение сетки в двумерной области произвольной формы. - Проблемы прочности. №10. 1998. С.120.

104. *Кудряшов Л.И., Меньших Н.Л.* Приближенные решения нелинейных задач теплопроводности. - М.: Машиностроение, 1979. - 232с.

105. *Мучник Г.Ф., Рубашов И.Б.* Методы теории теплообмена. ч.1. Теплопроводность. - М.: Высшая школа, 1970. - с. 283.

106. *Норри Д., Ж.Де Фриз.* Введение в метод конечных элементов. - М.: Мир, 1981. - 304с.

107. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. С. 10-90.

108. *Плоткин Е.Р., Лейзерович А.Ш.* Пусковые режимы паровых турбин энергоблоков. - М.: Энергия, 1980. -192с.

109. *Плоткин Е.Р., Мурашова И.В., Поляков В.А.* О краевых условиях при расчете температурного поля роторов паровых турбин. - Теплоэнергетика, 1972. №4. С. 48-52.

110. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. - М.: Судостроение, 1974. - 342с.

111. *Похорилер В.Л., Кацнельсон В.Б., Викулов В.А.* Определение коэффициента теплоотдачи и термических напряжений с помощью моделей. - Теплоэнергетика, 1969. №9. С. 61-65.

112. *Розин Л.А.* Метод конечных элементов в приложении к упругим системам. - М.: Стройиздат, 1977. С. 27-54.

113. *Розин Л.А.* Основы метода конечных элементов в теории упругости. Л.: Изд. ЛПИ, 1972. С. 30-49.

114. *Ройзен Л.И.* Приближенный метод исследования задач теплопроводности многослойных тел. - Теплофизика высоких температур, т.19, №4, 1981. С. 821-831.

115. *Рудицын М.Н., Артемов П.Я., Любошиц М.И.* Справочное пособие по сопротивлению материалов. - Минск.: Высшая щкола, 1970.- 628с.

116. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. - М.: Наука, 1977.

С. 30-90.

117. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. - М.: Мир, 1981. - 304с.

118. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977. С. 5-32.

119. Термопрочность деталей машин. - Под ред. И.А.Биргера и Б.Ф.Шорра. - М.: Машиностроение, 1975. - 455с.

120. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. - М.: Наука, 1979. - 569с.

121. *Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. - ДАН СССР, 1963, т.151, №3. С. 501-504.

122. *Тихонов А.Н.* Обратные задачи теплопроводности. - ИФЖ, 1975, т.29, №1. С.7-12.

123. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979. - 285с.

124. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1976. - 724с.

125. *Шумаков Н.В.* Метод последовательных интервалов в теплометрии нестационарных процессов. - М.: Атомиздат, 1979. - 212с.

126. Эксплуатационная надежность металла оборудования тепловых электростанций: Сб. науч. тр/ Всесоюз. теплотехн. НИИ им. Ф.Э.Дзержинского, Под ред. Ю.В.Балашова. - М.: Энергоатомиздат, 1987. - 110с.: ил.; 21см.

127. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. - Новосибирск. Наука. 1967. - 195с.

128. *Габдушев Р.Ж.* Математическое моделирование теплопроводности и термоупругости элементов паровых котлов тепловых электрических станций. Дисс. канд. тех. наук Иваново. ИГЭУ. 2001. 162 с.

129. *Еремин А.В.* Математическое моделирование гидродинамики и теплообмена на основе параболических и гиперболических уравнений численно - аналитическими методами. Дисс. канд. тех. наук. Самара, СамГТУ. 2013. 155 с.

130. *Кудинов И.В.* Математическое моделирование процессов

теплопроводности и гидродинамики численно – аналитическими методами на основе использования дополнительных граничных условий. Дисс. канд. тех. наук. Самара, СамГТУ. 2011. С. 181.

131. *Кузнецова А.Н.* Разработка численно – аналитических методов решения задач тепломассопереноса и термоупругости для однослойных и многослойных тел. Дисс. канд. тех. наук. Самара, СамГТУ. 2014. 157 с.

132. *Котова Е.В.* Математическое моделирование процессов теплопроводности и термоупругости с переменными свойствами среды численно – аналитическими методами. Дисс. канд. тех. наук. Самара, СамГТУ. 2013. 147с.

133. *Бранфилева А.Н.* Разработка математических и компьютерных моделей переноса тепла, массы, импульса для систем тепло- и водоснабжения. Дисс. канд. тех. наук. Москва, МЭИ. 2015. 172 с.

134. *Мучник Г.Ф., Рубашов И.Б.* Методы теории теплообмена. ч. 1. Теплопроводность. М.: Высшая школа. 1970. 228 с.

135. *Алифанов О.М., Черепанов В.В., Зайцев А.В.* Моделирование теплофизических и спектральных свойств пеностеклоуглерода методом Менте – Карло. Труды Минского международного форума по тепломассообмену ММФ – XIV, Минск. 2012. С. 662 – 665.

136. *Просунцов П.В., Резник С.В.* Планирование температурных измерений при исследованиях теплопереноса в высокопористых теплоизоляционных материалах. Труды Труды Минского международного форума по тепломассообмену ММФ – XIV, Минск. 2012. С. 255 – 258.

137. *Алифанов О.М., Будник С.А., Ненарокомов А.В., Черепанов В.В.* Экспериментально – теоретическое исследование процессов теплообмена в высокопористых материалах. Тепловые процессы в технике. 2011. Т.3. *N*2. С. 53 – 65.

138. *Черепанов В.В.* Взаимодействие излучения с фрагментами высокопористого материала. Тепловые процессы в технике. 2011. Т. 3. *N*5. С. 215 – 227.

139. *Кудинов И.В.* Графоаналитический метод расчёта потерь теплоты через

многослойные стенки при наличии лучистого теплообмена между отдельными слоями. Межвузовский сборник научных трудов «Повышение эффективности зданий и сооружений». Вып. 6. СГАСУ. Самара. 2011. С. 74 – 80.

140. *Кудинов И.В., Еремин А.В., Бранфилева А.Н., Колесников С.В.* Определение расхода жидкости в трубопроводе на основе решения обратной задачи теплообмена. Измерительная техника, Т. 59, № 7, с. 33 – 36.

141. *Стефанюк Е.В., Еремин А.В., Кузнецова А.Э., Абишева Л.С.* Получение аналитических решений задач теплопроводности с переменными во времени коэффициентами теплоотдачи. Тепловые процессы в технике. 2015. Т. 7. № 4. С. 172 – 176.

142. *Колесников С.В., Кузнецова А.Э., Стефанюк Е.В., Бранфилева А.Н., Абишева Л.С.* Исследование температурного и термонапряженного состояния барабанов котлов тепловых электрических станций. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия техн. науки. – 2013. – №4(40). – С. 158 – 164.

143. *Кудинов И.В., Абишева Л.С., Бранфилева А.Н.* Исследование сложного теплообмена в многослойной цилиндрической конструкции, включающей энергосберегающие газовые прослойки. Вестник СГАСУ Градостроительство и архитектура. Научно – технический журнал, вып. №3, Самара, 2014. С. 90 – 95.

144. *Колесников С.В., Бранфилева А.Н., Абишева Л.С., Федотенкова А.С.* Математическое моделирование распределения давления в движущейся жидкости на основе электрогидравлической аналогии. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. №3 (47), 2015. С. 168 – 179.

145. *Еремин А.В., Стефанюк Е.В. Abisheva L.S.* Research on Heat Conductivity with a Time – Varying Heat Source. Applied Mechanics and Materials Vol 698 (2015) pp 637 – 642.

146. *Кудинов И.В., Бранфилева А.Н., Абишева Л.С.* Математическое моделирование упругих продольных волн в жидкости с учётом ее релаксационных свойств. Труды Международной научно – технической

конференции «Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании». Ульяновск, УлГТУ, 2014. С. 119 – 133.

147. *Кудинов И.В., Стефанюк Е.В., Скворцова М.П., Абишева Л.С.* Теплообмен с учётом конечной скорости распространения теплоты при граничных условиях третьего рода. Труды Четвертой международной конференции «Математическая физика и ее приложения». г. Самара, СамГТУ, 2014, С. 220 – 221.

148. *Стефанюк Е.В., Еремин А.В., Кузнецова А.Э., Абишева Л.С.* Аналитические решения задач теплопроводности с переменными во времени коэффициентами теплоотдачи. Труды Шестой российской национальной конференции по теплообмену «Теплопроводность, теплоизоляция». г. Москва, 2014, С. 225 – 226.

149. *Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Абишева Л.С.* Теплопроводность в пластине с изменяющимся во времени источником теплоты. Сборник научных трудов 1 – ой Международной научной конференции молодых учёных. В трех частях. Часть 2. Секция «Энергетика» г. Новосибирск, 2014 г. С. 234 – 238.

150. *Кудинов И.В., Абишева Л.С., Максименко Г.Н., Еремин А.В.* Приближенный аналитический метод решения нестационарных краевых задач. Труды Международной научно – технической конференции «Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании». Ульяновск, Ульяновский госуд. техн. ун – т, 2016.

151. *Еремин А.В., Кудинов И.В., Абишева Л.С., Жуков В.В., Скворцова М.П.* Колебания стержня с учётом релаксационных свойств материалов. Труды Международной научно – технической конференции «Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании». Ульяновск, Ульяновский госуд. техн. ун – т, 2016.

152. *Кудинов И.В., Кудинов В.А., Абишева Л.С., Федотенкова А.В., Скворцова М.П.* Математическая модель динамической термоупругости с учётом пространственно – временной нелокальности. Труды Всероссийской научной

конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара: Самарский госуд. техн. ун – т, 2016. С.

153. *Стефанюк Е.В., Котова Е.В., Абишева Л.С., Скворцова М.П.* Получение аналитических решений краевых задач на основе использования моделей конечной и бесконечной скорости распространения теплоты. Труды Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара: Самарский госуд. техн. ун – т, 2016. С

154. *Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Абишева Л.С., Максименко Г.Н.* Определение критических условий теплового взрыва в пластине с источником теплоты. Труды Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Самара: Самарский госуд. техн. ун – т, 2016. С.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Акт внедрения

«СОГЛАСОВАНО»	«УТВЕРЖДАЮ»
Первый проректор – проректор по научной работе Самарского государственного технического университета, д.т.н., профессор	Исполнительный директор ОАО «ПТС»
____________ М.В. Ненашев	____________ А.И. Дятлов

АКТ

о внедрении результатов научно – исследовательской работы

Разработка Самарского государственного технического университета, а именно: «Объединённая компьютерная модель теплосети г. Самара с автоматической идентификацией параметров», а также «Методика расчёта процессов тепломассопереноса с учётом пространственно – временной нелокальности», внедрены в ОАО «ПТС» с 01. 06. 2016 г.

Работа выполнялась по планам научно – исследовательских и опытно – конструкторских работ Филиала «Самарский» ПАО «Т Плюс».

Назначение внедрённой продукции:

– возможность оперативного расчёта гидравлических и тепловых режимов теплосети при различных нагрузках и составе работающего оборудования;
– расчёт оптимальных вариантов реконструкции теплосети и построения её новых участков;
– расчёт процессов тепломассопереноса с учётом конечной скорости распространения теплоты.

Эффективность внедрения

1. Организационно – технические преимущества:

– компьютерная модель основана на электрогидравлической аналогии с использованием двух законов Кирхгофа. Отличается от известных моделей, возможностью автоматической идентификации параметров, позволяющей по ограниченному объёму экспериментальных данных получать компьютерную модель, практически эквивалентную реальной теплосети;

– методика расчёта локально – неравновесных процессов переноса тепла, массы, импульса позволяет выполнять расчёты с учётом пространственно – временной нелокальности, в том числе, расчёты отдельных параметров (коэффициентов сопротивления трения) компьютерных моделей.

2. Социальный эффект – развитие науки и научных исследований.

3. Экономический эффект от внедрения составляет 1,2 миллиона рублей.

От ОАО «ПТС»

Исполнительный директор

_____________ А.И. Дятлов

Открытое акционерное общество ПРЕДПРИЯТИЕ ТЕПЛОВЫХ СЕТЕЙ ИНН 6315530348 ОГРН 1026300955284 г.Самара

От Самарского государственного технического университета:

Канд. техн. наук, докторант
_____________ С.В. Колесников

Канд. техн. наук, доцент
_____________ И.В. Кудинов

Канд. техн. наук, доцент
_____________ А.В. Ерёмин

Аспирант
_____________ В.В. Жуков

Аспирант
_____________ Л.С. Абишева

Аспирант
_____________ М.П. Скворцова

Аспирант
_____________ Г.Н. Максименко

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Иллюстрации результатов исследования термических напряжений в барабане котла

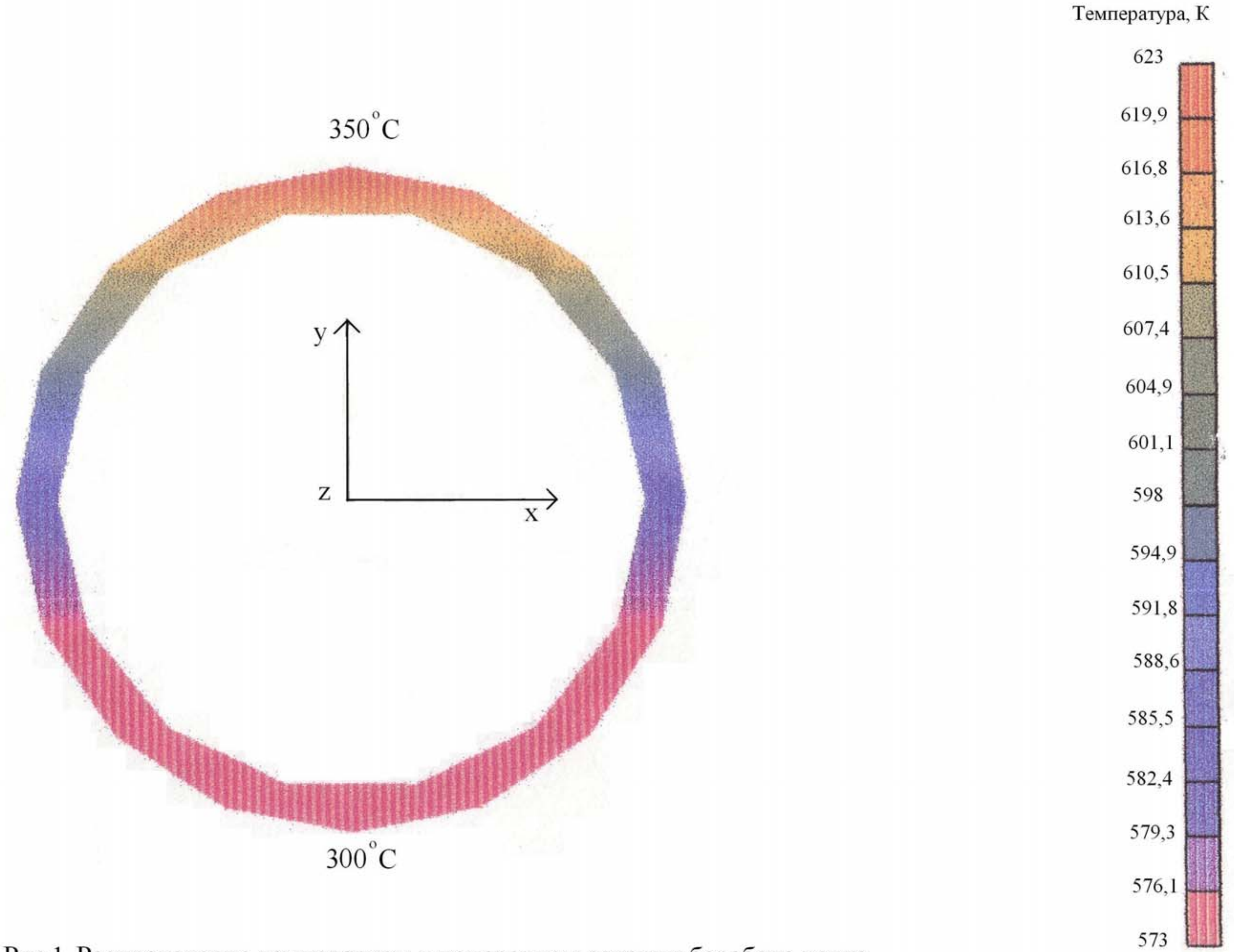


Рис.1. Распределение температуры в поперечном сечении барабана котла БКЗ-420-140 НГМ после сброса давления пара

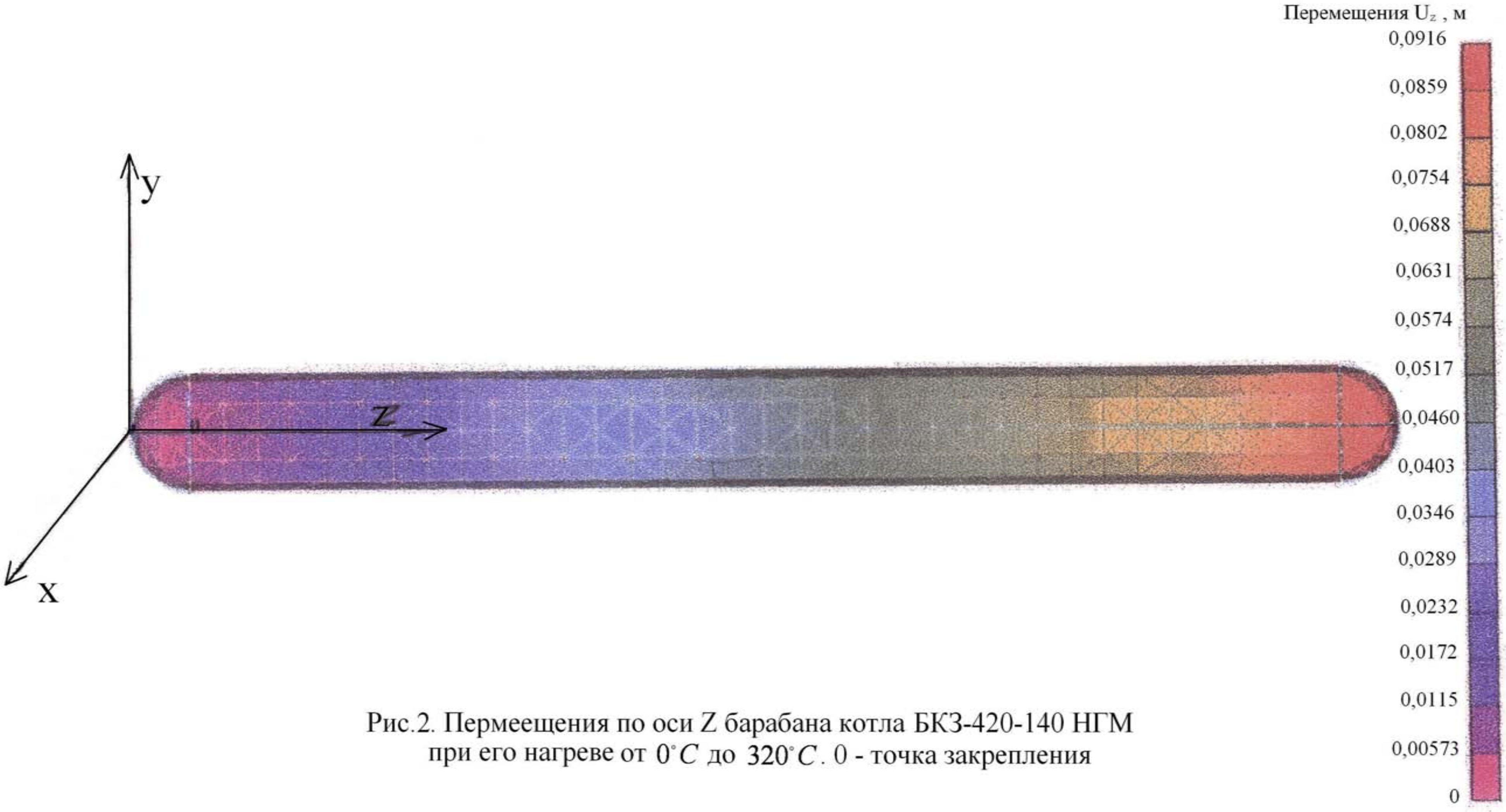
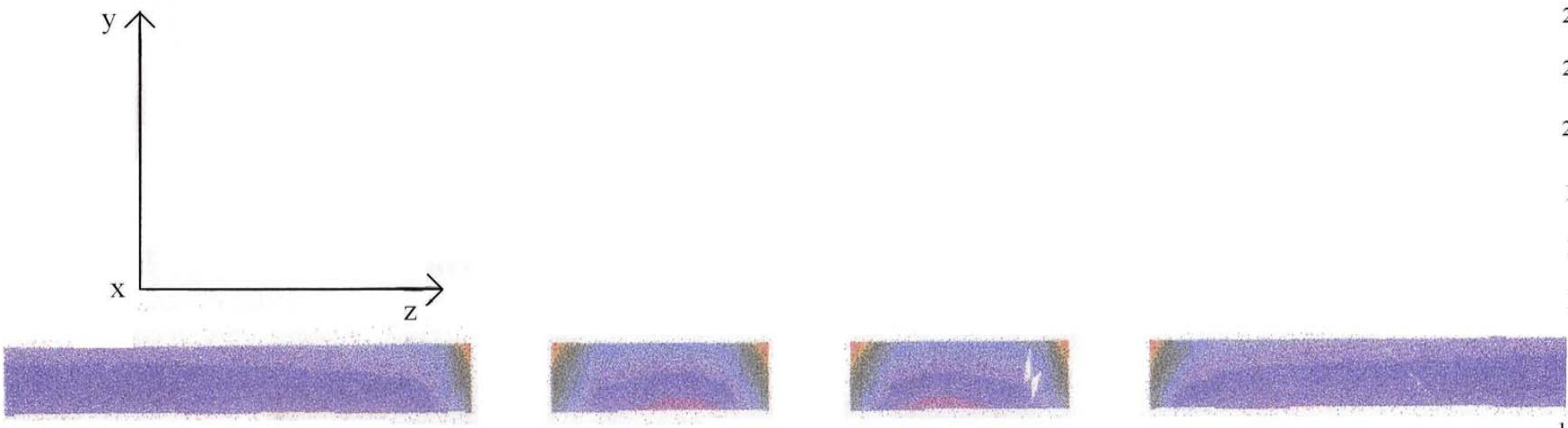


Рис.2. Пермеещения по оси Z барабана котла БКЗ-420-140 НГМ
при его нагреве от $0^{\circ}C$ до $320^{\circ}C$. 0 - точка закрепления



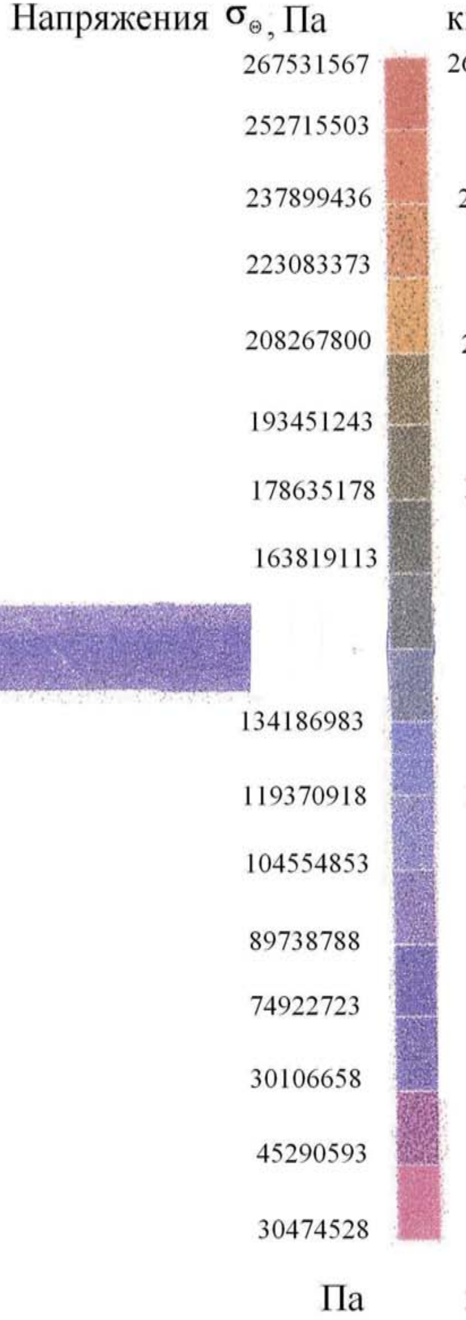
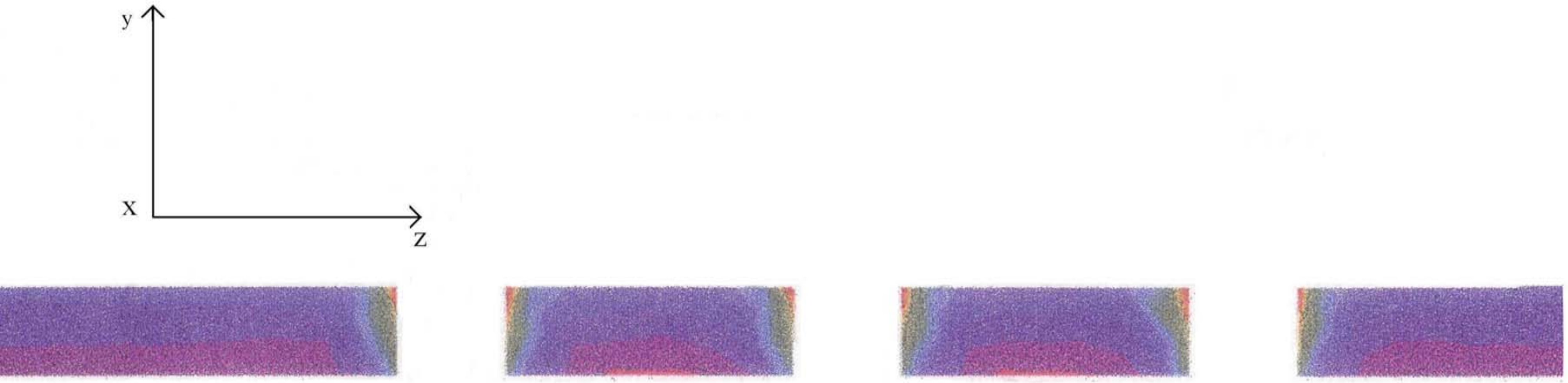


Рис.3. Окружные напряжения в отверстиях барабана котла от действия сил внутреннего давления $P_{вн} = 130\ кг/см^2$



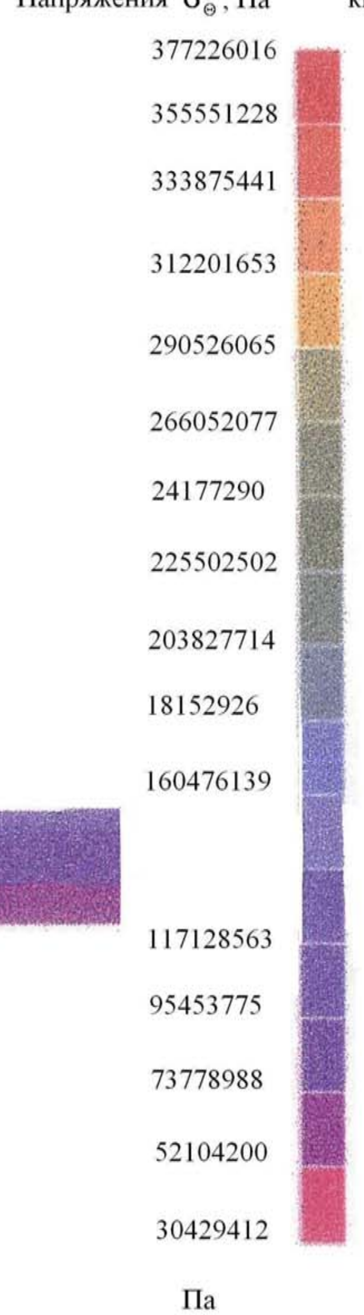


Рис. 4. Окружные напряжения σ_Θ от совместного действия сил внутреннего давления пара, градиента температуры в отверстиях и по толщине стенки барабана

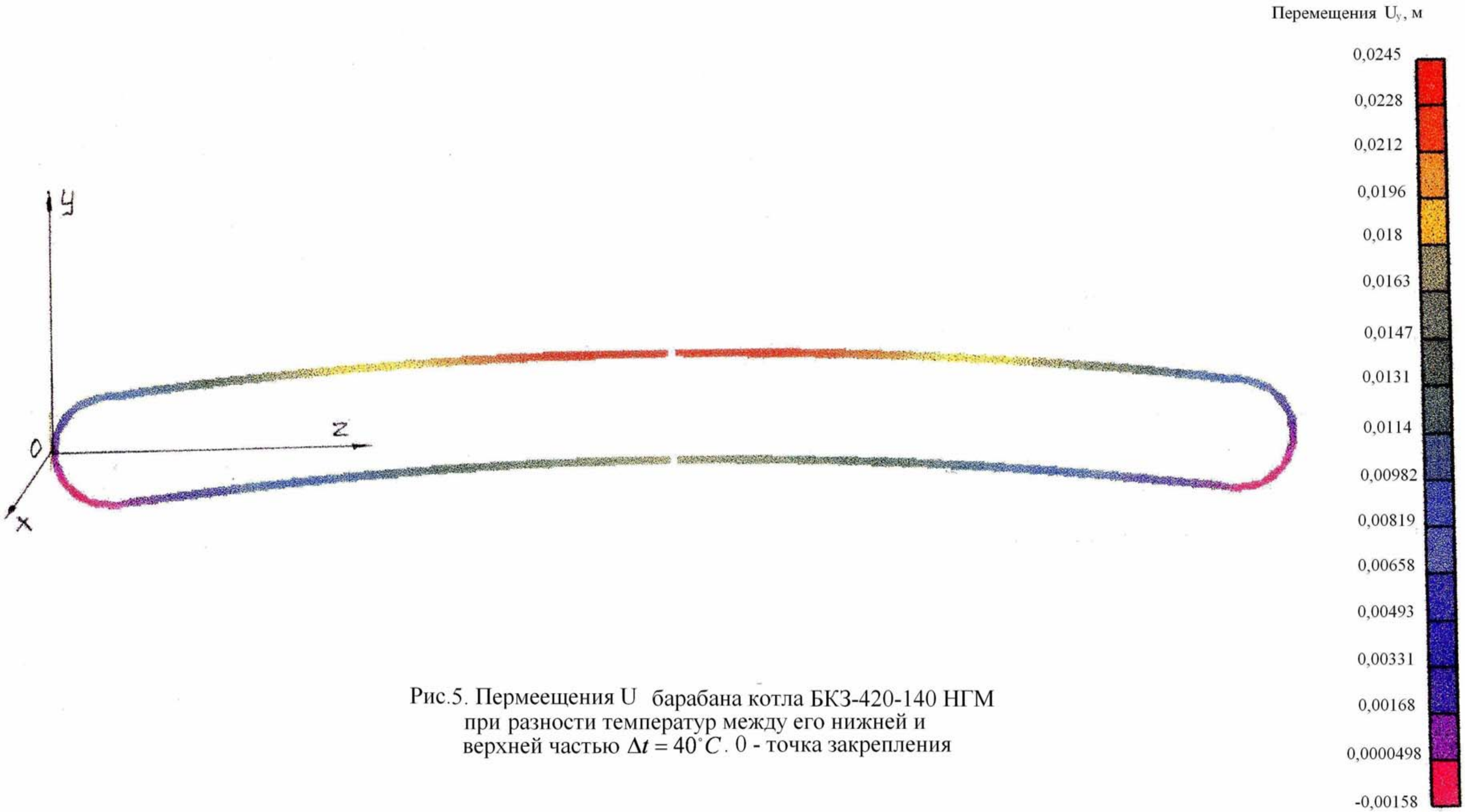


Рис.5. Пермеещения U барабана котла БКЗ-420-140 НГМ при разности температур между его нижней и верхней частью $\Delta t = 40^{\circ}C$. 0 - точка закрепления

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.

Комплекс программ для решения нелинейных задач теплопроводности и тепломассопереноса

Решение сложного теплообмена графоаналитическим методом

Исходные данные задачи:

$d1 := 0.07$

$d2 := 0.09$

$d3 := 0.128$

$d4 := 0.2$

$\lambda 1 := 0.1$

$\lambda 2 := 0.05$

$t1 := 1000$

$tокр := 20$

$\varepsilon 1 := 0.95$

$\varepsilon 2 := 0.3$

$\alpha := 10$

$\delta := 0.019$

Математическая постановка задачи:

$$q = \pi \cdot \frac{(t1 - t2)}{\dfrac{1 \cdot \ln\left(\dfrac{d2}{d1}\right)}{2 \cdot \lambda 1}} \qquad (1)$$

$$q = 5.67 \cdot \varepsilon пр \cdot \left[\left(\frac{t2 + 273}{100}\right)^4 - \left(\frac{t3 + 273}{100}\right)^4\right] \cdot \pi \cdot d2 + \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon k \cdot \lambda в \cdot (t2 - t3)}{\ln\left(\dfrac{d3}{d2}\right)} \qquad (2)$$

$$q = \pi \cdot \frac{(t3 - t4)}{\dfrac{1}{2 \cdot \lambda 2} \cdot \ln\left(\dfrac{d4}{d3}\right)} \qquad (3)$$

$$q = \alpha \cdot (t4 - tокр) \cdot \pi \cdot d4 \qquad (4)$$

$$q = \pi \cdot \frac{(t3 - tокр)}{\dfrac{1}{2 \cdot \lambda 2} \cdot \ln\left(\dfrac{d4}{d3}\right) + \dfrac{1}{\alpha \cdot d4}} \qquad (5)$$

$F2 := \pi \cdot d2 \qquad F3 := \pi \cdot d3$

$$\varepsilon пр := \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon 1} + \frac{F2}{F3}\cdot\left(\frac{1}{\varepsilon 2} - 1\right)}$$

$$\varepsilon k = 0.18\cdot(Grв\cdot Prв)^{0.25}$$

$$Grв = 9.81\cdot\delta^{3}\cdot\frac{(t2 - t3)}{\nu в^{2}\cdot(798 + 273)}$$

$$\frac{808 + 788}{2} = 798$$

$\lambda в := 0.071706$

$\nu в := 0.000134412$

$Prв := 0.71286$

$$9.81\cdot\delta^{3}\cdot\frac{(t2 - t3)}{\nu в^{2}\cdot(798 + 273)} \text{ simplify } \rightarrow 3.477476892646767747\cdot t2 - 3.477476892646767747\cdot t3$$

$$0.18\cdot[(3.477476892646767747\cdot t2 - 3.477476892646767747\cdot t3)\cdot Prв]^{0.25} \text{ simplify } \rightarrow 0.18\cdot(2.4789541776921748561\cdot t2 - 2.4789541776921748561\cdot t3)^{\frac{1}{4}}$$

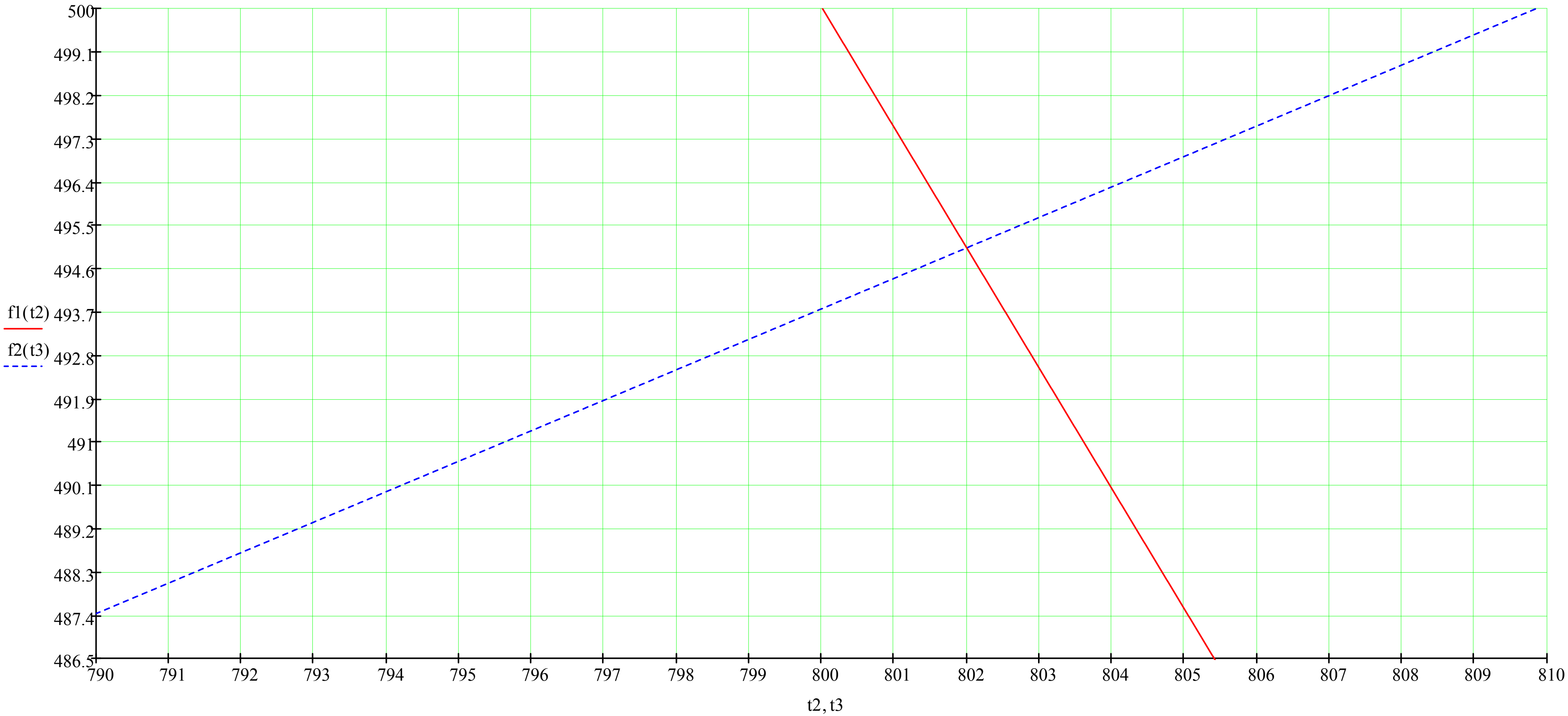
$$\varepsilon k := 0.18\cdot(2.4789541776921748561\cdot t2 - 2.4789541776921748561\cdot t3)^{\frac{1}{4}}$$

$$q = \alpha\cdot(t4 - tокр)\cdot\pi\cdot d4$$

Строим графики для ур-й (1) и (5)

$$f1(t2) := \pi\cdot\frac{(t1 - t2)}{\frac{1\cdot\ln\left(\frac{d2}{d1}\right)}{2\cdot\lambda 1}}$$

$$f2(t3) := \pi\cdot\frac{(t3 - tокр)}{\frac{1}{2\cdot\lambda 2}\cdot\ln\left(\frac{d4}{d3}\right) + \frac{1}{\alpha\cdot d4}}$$



$q1 := 493 \qquad t31 = 798.6 \qquad t21 = 802.8$

$$q1\text{лк} := 5.67\cdot\varepsilon\text{пр}\cdot\left[\left(\frac{t2+273}{100}\right)^4 - \left(\frac{t3+273}{100}\right)^4\right]\cdot\pi\cdot d2 + \frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon k\cdot\lambda\text{в}\cdot(t2-t3)}{\ln\left(\frac{d3}{d2}\right)} \;\Bigg|\; \begin{array}{l}\text{substitute}, t3 = 798.6\\ \text{substitute}, t2 = 802.8\end{array} \rightarrow 125.51909345185154339$$

$q2 := 425 \qquad t32 = 690.9 \qquad t22 = 830.3$

$$q2\text{лк} := 5.67\cdot\varepsilon\text{пр}\cdot\left[\left(\frac{t2+273}{100}\right)^4 - \left(\frac{t3+273}{100}\right)^4\right]\cdot\pi\cdot d2 + \frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon k\cdot\lambda\text{в}\cdot(t2-t3)}{\ln\left(\frac{d3}{d2}\right)} \;\Bigg|\; \begin{array}{l}\text{substitute}, t3 = 690.9\\ \text{substitute}, t2 = 830.3\end{array} \rightarrow 3820.0849323924120009$$

$q3 := 350 \qquad t33 = 573.3 \qquad t23 = 860$

$$q3лк := 5.67\cdot\varepsilon пр\cdot\left[\left(\frac{t2+273}{100}\right)^4-\left(\frac{t3+273}{100}\right)^4\right]\cdot\pi\cdot d2+\frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon k\cdot\lambda в\cdot(t2-t3)}{\ln\left(\frac{d3}{d2}\right)}\ \left|\begin{array}{l}\text{substitute}, t3 = 573.3\\ \text{substitute}, t2 = 860\end{array}\right. \rightarrow 7096.1888053584891439$$

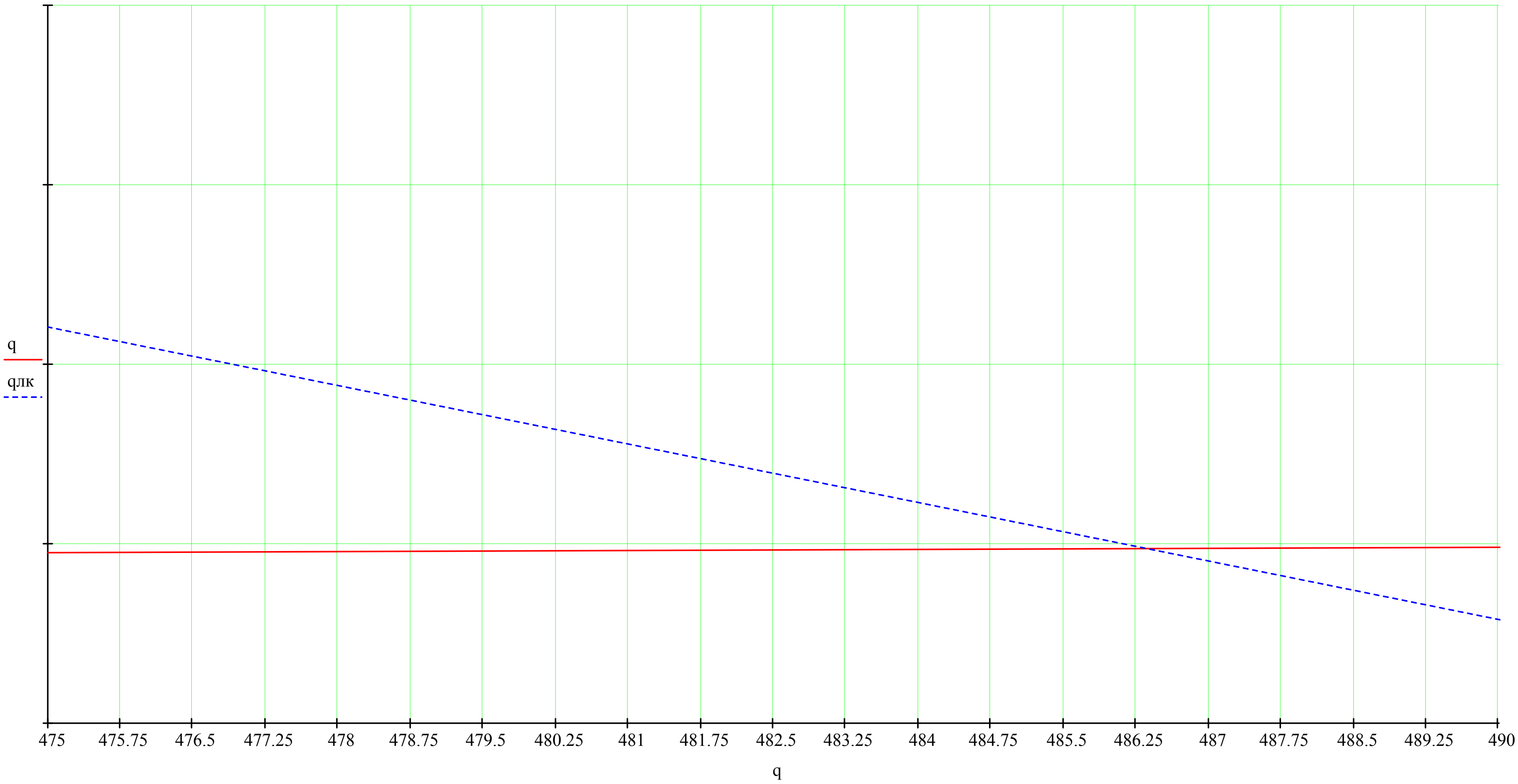
$q4 := 250$ $t34 = 415.1$ $t24 = 900$

$$q4лк := 5.67\cdot\varepsilon пр\cdot\left[\left(\frac{t2+273}{100}\right)^4-\left(\frac{t3+273}{100}\right)^4\right]\cdot\pi\cdot d2+\frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon k\cdot\lambda в\cdot(t2-t3)}{\ln\left(\frac{d3}{d2}\right)}\ \left|\begin{array}{l}\text{substitute}, t3 = 415.1\\ \text{substitute}, t2 = 900\end{array}\right. \rightarrow 10592.05226669294854$$

$q5 := 175$ $t3 = 296.9$ $t24 = 930.4$

$$q5лк := 5.67\cdot\varepsilon пр\cdot\left[\left(\frac{t2+273}{100}\right)^4-\left(\frac{t3+273}{100}\right)^4\right]\cdot\pi\cdot d2+\frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon k\cdot\lambda в\cdot(t2-t3)}{\ln\left(\frac{d3}{d2}\right)}\ \left|\begin{array}{l}\text{substitute}, t3 = 296.9\\ \text{substitute}, t2 = 930.4\end{array}\right. \rightarrow 12773.850013935355708$$

$$q := \begin{pmatrix} q1\\ q2\\ q3\\ q4\\ q5\end{pmatrix} \qquad qлк := \begin{pmatrix} q1лк\\ q2лк\\ q3лк\\ q4лк\\ q5лк\end{pmatrix}$$



q
qлк
475
475.75
476.5
477.25
478
478.75
479.5
480.25
481
481.75
482.5
483.25
484
484.75
485.5
486.25
487
487.75
488.5
489.25
490
q

$q := 486.5$

$t3 := 789$

$t2 := 805.3$

$$q = \alpha\cdot(t4 - t_{окр})\cdot\pi\cdot d4 + 5.67\cdot\varepsilon 2\cdot\left[\left(\frac{t4 + 273}{100}\right)^4 - \left(\frac{t_{окр} + 273}{100}\right)^4\right] \text{ solve}, t4 \rightarrow \begin{pmatrix} -1090.2444438141710788 \\ 76.833305277253075013 \\ -39.294430731545156524 - 670.6371629430178886i \\ -39.294430731545156524 + 670.6371629430178886i \end{pmatrix}$$

$$t4 := t_{окр} + \frac{q}{\alpha\cdot\pi\cdot d4} \rightarrow 97.428879814207080852$$

$t4 := 76.833305277253075013$

Сравним со значениями, полученными без учета конвективной составляющей

$Q := 479$

$T2 := 808$

$T3 := 788$

$T4 := 108$

$$\begin{pmatrix} q \\ t2 \\ t3 \\ t4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q \\ T2 \\ T3 \\ T4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7.5 \\ -2.7 \\ 1 \\ -31.166694722746924987 \end{pmatrix}$$

Рассчитаем процентное соотношение

$$q_л := 5.67\cdot\varepsilon_{пр}\cdot\left[\left(\frac{t2 + 273}{100}\right)^4 - \left(\frac{t3 + 273}{100}\right)^4\right]\cdot\pi\cdot d2 \rightarrow 475.6685775397800691395$$

$$qk := \frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon k\cdot\lambda_в\cdot(t2 - t3)}{\ln\left(\frac{d3}{d2}\right)} \rightarrow 3.7530187141726603825\cdot(2.4789541776921748561\cdot t2 + -2.4789541776921748561\cdot t3)^{\frac{1}{4}}$$

$$3.7530187141726603825\cdot(2.4789541776921748561\cdot t2 + -2.4789541776921748561\cdot t3)^{\frac{1}{4}} \rightarrow 9.46225735584425867$$

$$\frac{q_л}{q}\cdot 100 \rightarrow 97.77360278309970588684$$

$$\frac{qk}{q}\cdot 100 \rightarrow 1.9449655407696317924$$

$$97.77360278309970588684 + 1.9449655407696317924 \rightarrow 99.71856832386933767924$$

Рассчитаем λэкв

$$q = \pi \cdot \frac{(t2 - t3)}{\dfrac{1 \cdot \ln\left(\dfrac{d3}{d2}\right)}{2 \cdot \lambda экв}} \;\; \text{solve}, \lambda экв \;\; \rightarrow 1.6731316570011423738$$

Задача с переменными физическими свойствами

Второе приближение

$$\left(\frac{d}{dFo}\Theta(\xi,Fo)\right) = \frac{d}{d\xi}\left[(1+m\cdot\delta\cdot\xi)\cdot\left(\frac{d}{d\xi}\Theta\right)\right] \quad (5)$$

$Fo > 0$

$0 \le \xi \le 1$

$\Theta(\xi,0) = 0 \quad (6)$

$\Theta(0,Fo) = 1 \quad (7)$

$$\frac{d}{d\xi}\Theta(1,Fo) = 0 \quad (8)$$

$\Theta(1,Fo) = q(Fo) \quad (9)$

$$\Theta(\xi,Fo) = 1 - \sum_{k=1}^{n}\left[b_k(q)\sin\left(k\frac{\pi}{2}\xi\right)\right]$$

$$\Theta(\xi,Fo) := 1 - b_1\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - b_2\sin\left(3\frac{\pi}{2}\xi\right)$$

Дополнительное граничное условие

$$(1+\nu)\cdot\frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(1,Fo) = \frac{d}{dFo}q(Fo) \quad (10)$$

Найдем коэффициенты b:

Подставим $\Theta(\xi,Fo)$ в (9)

$$1 - b_1\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - b_2\sin\left(3\frac{\pi}{2}\xi\right) \text{ substitute}, \xi = 1 \ \rightarrow b_2 - b_1 + 1$$

$b_2 - b_1 + 1 = q(Fo)$

Подставим $\Theta(\xi,Fo)$ в (10)

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(1 - b_1\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - b_2\sin\left(3\frac{\pi}{2}\xi\right)\right) \rightarrow \frac{\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot b_1}{4} + \frac{9\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot b_2}{4}$$

$$\frac{\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot b_1}{4} + \frac{9\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot b_2}{4} \text{ substitute}, \xi = 1 \ \rightarrow \frac{\pi^2\cdot b_1}{4} - \frac{9\cdot\pi^2\cdot b_2}{4}$$

$$(1+\nu)\cdot\left(\frac{\pi^2\cdot b_1}{4}-\frac{9\cdot\pi^2\cdot b_2}{4}\right)=\frac{d}{dFo}q(Fo)$$

Решаем систему уравнений и находим b

Given

$$b2-b1+1-q(Fo)=0$$

$$(1+\nu)\cdot\left(\frac{\pi^2\cdot b1}{4}-\frac{9\cdot\pi^2\cdot b2}{4}\right)=\frac{d}{dFo}q(Fo)$$

$$\text{Find}(b1,b2)\rightarrow\begin{pmatrix}-\dfrac{4\cdot\dfrac{d}{dFo}q(Fo)+9\cdot\pi^2\cdot q(Fo)-9\cdot\pi^2\cdot\nu-9\cdot\pi^2+9\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot q(Fo)}{8\cdot\pi^2\cdot\nu+8\cdot\pi^2}\\[2ex]-\dfrac{4\cdot\dfrac{d}{dFo}q(Fo)+\pi^2\cdot q(Fo)-\pi^2\cdot\nu-\pi^2+\pi^2\cdot\nu\cdot q(Fo)}{8\cdot\pi^2\cdot\nu+8\cdot\pi^2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}-\dfrac{4\cdot\dfrac{d}{dFo}q(Fo)+9\cdot\pi^2\cdot q(Fo)-9\cdot\pi^2\cdot\nu-9\cdot\pi^2+9\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot q(Fo)}{8\cdot\pi^2\cdot\nu+8\cdot\pi^2}\\[2ex]-\dfrac{4\cdot\dfrac{d}{dFo}q(Fo)+\pi^2\cdot q(Fo)-\pi^2\cdot\nu-\pi^2+\pi^2\cdot\nu\cdot q(Fo)}{8\cdot\pi^2\cdot\nu+8\cdot\pi^2}\end{pmatrix}$$

Подставляем b в $\Theta(\xi,Fo)$

$$1-\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot b_2-\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot b_1\ \text{simplify}\ \rightarrow\frac{4\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)-\pi^2\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)-9\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)+4\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)+8\cdot\pi^2\cdot\nu+8\cdot\pi^2-9\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)-\pi^2\cdot\nu\cdot\sin\left(3\cdot\right.}{8\cdot\pi^2\cdot(\nu+1)}$$

$$\Theta(\xi,Fo):=\frac{4\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)-\pi^2\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)-9\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)+4\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)+8\cdot\pi^2\cdot\nu+8\cdot\pi^2-9\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)-\pi^2\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)+9\cdot\pi^2\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)+\pi^2}{8\cdot\pi^2\cdot(\nu+1)}$$

Интеграл теплового баланса

$$\int_0^1 \frac{d}{dFo}(\Theta(\xi,Fo))\,d\xi = \int_0^1 \left(\nu\cdot\frac{d}{d\xi}\Theta(\xi,Fo) + \xi\cdot\nu\cdot\frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi,Fo) + \frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi,Fo)\right)d\xi$$

Вычисляем левую часть

$$\frac{d}{dFo}\left[\frac{4\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) - \pi^2\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) - 9\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) + 4\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) + 8\cdot\pi^2\cdot\nu + 8\cdot\pi^2 - 9\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) - \pi^2\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) + 9\cdot\pi^2\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) + \pi^2\cdot q(Fo)\cdot s}{8\cdot\pi^2\cdot(\nu+1)}\right.$$

$$\int_0^1 \frac{9\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{8\cdot(\nu+1)} + \frac{\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{8\cdot(\nu+1)} + \frac{\frac{d^2}{dFo^2}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2\cdot\pi^2\cdot(\nu+1)} + \frac{\frac{d^2}{dFo^2}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2\cdot\pi^2\cdot(\nu+1)} + \frac{9\cdot\nu\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{8\cdot(\nu+1)} + \frac{\nu\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{8\cdot(\nu+1)}\,d\xi \text{ simplify} \rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dFo}(\Theta(\xi,Fo))\,d\xi = \left[\frac{4\cdot\frac{d^2}{dFo^2}q(Fo) + 7\cdot\pi^2\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo) + 7\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)}{3\cdot\pi^3\cdot(\nu+1)}\right]$$

Вычисляем правую часть по частям. Вычислим $\int_0^1 \nu\cdot\left(\frac{d}{d\xi}\Theta(\xi,Fo)\right)d\xi$

$$\frac{d}{d\xi}\frac{4\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) - \pi^2\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) - 9\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) + 4\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) + 8\cdot\pi^2\cdot\nu + 8\cdot\pi^2 - 9\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) - \pi^2\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) + 9\cdot\pi^2\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) + \pi^2\cdot q(Fo)\cdot\sin}{8\cdot\pi^2\cdot(\nu+1)}$$

$$\frac{2\cdot\pi\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) - \frac{3\cdot\pi^3\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2} - \frac{9\cdot\pi^3\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2} + 6\cdot\pi\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) - \frac{9\cdot\pi^3\cdot\nu\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2} - \frac{3\cdot\pi^3\cdot\nu\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2} + \frac{9\cdot\pi^3\cdot q(Fo)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2} + \frac{3\cdot\pi^3\cdot q(Fo)\cdot\cos\left(\frac{3}{}\right.}{2}}{8\cdot\pi^2\cdot(\nu+1)}$$

$$\int_0^1 \nu\cdot\left(\frac{d}{d\xi}\Theta(\xi,Fo)\right)d\xi = \nu\cdot(q(Fo)-1)$$

Правая часть. Вычислим $\int_0^1 \left(\frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi,Fo)\right) d\xi$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{4\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) - \pi^2\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) - 9\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) + 4\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) + 8\cdot\pi^2\cdot\nu + 8\cdot\pi^2 - 9\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) - \pi^2\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) + 9\cdot\pi^2\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) + \pi^2\cdot q(Fo)\cdot\sin}{8\cdot\pi^2\cdot(\nu+1)}$$

$$\frac{9\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{32\cdot(\nu+1)} + \frac{9\cdot\pi^2\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{32\cdot(\nu+1)} - \frac{\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{8\cdot(\nu+1)} - \frac{9\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{8\cdot(\nu+1)} + \frac{9\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{32\cdot(\nu+1)} + \frac{9\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{32\cdot(\nu+1)} - \frac{9\cdot\pi^2\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{32\cdot(\nu+1)} - \frac{9\cdot\pi^2\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{32\cdot(\nu+1)} -$$

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi,Fo)\right) d\xi = \left[-\frac{\frac{d}{dFo}q(Fo) + \frac{3\cdot\pi^2\cdot q(Fo)}{4} - \frac{3\cdot\pi^2\cdot\nu}{4} - \frac{3\cdot\pi^2}{4} + \frac{3\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot q(Fo)}{4}}{\pi\cdot(\nu+1)}\right]$$

Правая часть. Вычислим $\int_0^1 \xi\cdot\nu\cdot\left(\frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi,Fo)\right) d\xi$

$$\int_0^1 \xi\cdot\nu\cdot\left(\frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi,Fo)\right) d\xi = -\nu\cdot(q(Fo)-1)$$

Складываем полученные значения и получаем правую часть интеграла теплового баланса

$$\nu\cdot(q(Fo)-1) - \frac{\frac{d}{dFo}q(Fo) + \frac{3\cdot\pi^2\cdot q(Fo)}{4} - \frac{3\cdot\pi^2\cdot\nu}{4} - \frac{3\cdot\pi^2}{4} + \frac{3\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot q(Fo)}{4}}{\pi\cdot(\nu+1)} - \nu\cdot(q(Fo)-1) \text{ simplify } \rightarrow -\frac{\frac{d}{dFo}q(Fo) + \frac{3\cdot\pi^2\cdot q(Fo)}{4} - \frac{3\cdot\pi^2\cdot\nu}{4} - \frac{3\cdot\pi^2}{4} + \frac{3\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot q(Fo)}{4}}{\pi\cdot(\nu+1)}$$

Получаем следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{4\cdot\frac{d^2}{dFo^2}q(Fo) + 7\cdot\pi^2\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo) + 7\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)}{3\cdot\pi^3\cdot(\nu+1)} + \frac{\frac{d}{dFo}q(Fo) + \frac{3\cdot\pi^2\cdot q(Fo)}{4} - \frac{3\cdot\pi^2\cdot\nu}{4} - \frac{3\cdot\pi^2}{4} + \frac{3\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot q(Fo)}{4}}{\pi\cdot(\nu+1)} \text{ simplify } \rightarrow \frac{16\cdot\frac{d^2}{dFo^2}q(Fo) + 9\cdot\pi^4\cdot q(Fo) + 40\cdot\pi^2\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo) - 9\cdot\pi^4}{12\cdot\pi^3\cdot(\nu +}$$

$$\frac{16\cdot\frac{d^2}{dFo^2}q(Fo) + 9\cdot\pi^4\cdot q(Fo) + 40\cdot\pi^2\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo) - 9\cdot\pi^4\cdot\nu - 9\cdot\pi^4 + 9\cdot\pi^4\cdot\nu\cdot q(Fo) + 28\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)}{12\cdot\pi^3\cdot(\nu+1)} = 0$$

$$\frac{16\cdot z^2 + 9\cdot\pi^4 + 40\cdot\pi^2\cdot z + 9\cdot\pi^4\cdot\nu + 28\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot z}{12\cdot\pi^3\cdot(\nu+1)} = 0$$

$$\frac{16\cdot z^2 + 9\cdot\pi^4 + 40\cdot\pi^2\cdot z + 9\cdot\pi^4\cdot\nu + 28\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot z}{12\cdot\pi^3\cdot(\nu+1)} = 0 \text{ solve}, z \rightarrow \begin{pmatrix} 1.2337005501361698274\cdot\sqrt{49.0\cdot\nu^2 + 104.0\cdot\nu + 64.0} - 8.6359038509531887915\cdot\nu - 12.337005501361698274 \\ -8.6359038509531887915\cdot\nu - 1.2337005501361698274\cdot\sqrt{49.0\cdot\nu^2 + 104.0\cdot\nu + 64.0} - 12.337005501361698274 \end{pmatrix}$$

Находим значения z

$$\begin{pmatrix} z1 \\ z2 \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} -\frac{\pi^2\cdot\left(7\cdot\nu - \sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} + 10\right)}{8} \\ -\frac{\pi^2\cdot\left(7\cdot\nu + \sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} + 10\right)}{8} \end{bmatrix}$$

Если подставим v=0, то получим:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\pi^2\cdot\left(7\cdot\nu - \sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} + 10\right)}{8} \\ -\frac{\pi^2\cdot\left(7\cdot\nu + \sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} + 10\right)}{8} \end{bmatrix} \text{ substitute}, \nu = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{\pi^2}{4} \\ -\frac{9\cdot\pi^2}{4} \end{pmatrix}$$

Подставляем полученные значения z в q(Fo) и коэффициенты b

$$q(Fo) := C1\cdot e^{-\frac{5\cdot\pi^2\cdot Fo}{4}}\cdot e^{-\frac{7\cdot\pi^2\cdot Fo\cdot\nu}{8}}\cdot e^{\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{8}} + C2\cdot e^{-\frac{5\cdot\pi^2\cdot Fo}{4}}\cdot e^{-\frac{7\cdot\pi^2\cdot Fo\cdot\nu}{8}}\cdot e^{-\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{8}} + 1$$

$$b_1 := -\frac{e^{-\frac{5\cdot\pi^2\cdot Fo}{4}}\cdot e^{-\frac{7\cdot\pi^2\cdot Fo\cdot\nu}{8}}\cdot\left(8\cdot C1\cdot e^{\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{8}} + 8\cdot C2\cdot e^{-\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{8}} + 11\cdot C1\cdot\nu\cdot e^{\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{8}} + 11\cdot C2\cdot\nu\cdot e^{-\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{8}} + C1\cdot e^{\frac{\pi^2}{\ldots}}\right.}{16\cdot(\nu+1)}$$

$$b_2 := \frac{e^{-\frac{5\cdot\pi^2\cdot Fo}{4}}\cdot e^{-\frac{7\cdot\pi^2\cdot Fo\cdot\nu}{8}}\cdot\left(8\cdot C1\cdot e^{\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{8}} + 8\cdot C2\cdot e^{-\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{8}} + 5\cdot C1\cdot\nu\cdot e^{\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{8}} + 5\cdot C2\cdot\nu\cdot e^{-\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{8}} - C1\cdot e^{\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot}{}}\right.}{16\cdot(\nu+1)}$$

$$\Theta(\xi, Fo) := 1 - b_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - b_2 \sin\left(3\frac{\pi}{2}\xi\right) \text{ simplify } \rightarrow$$

Подставляем Θ в (6)

$$\Theta(\xi, 0) \rightarrow$$

Потребуем ортогональность невязки

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi\,\xi}{2}\right)\cdot\left(\frac{16\cdot\nu + 8\cdot C1\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) + 8\cdot C2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) - 8\cdot C1\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) - 8\cdot C2\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) + C1\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} - C2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} + C1\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right.}{16\cdot\nu + 16}\right.$$

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{3\cdot\pi\,\xi}{2}\right)\cdot\left(\frac{16\cdot\nu + 8\cdot C1\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) + 8\cdot C2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) - 8\cdot C1\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) - 8\cdot C2\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) + C1\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} - C2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} + C1\cdot\sin\left(\frac{3}{}\right.}{16\cdot\nu + 16}\right.$$

Given

$$\frac{64\cdot\nu + 8\cdot\pi\cdot C1 + 8\cdot\pi\cdot C2 + \pi\cdot C1\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} - \pi\cdot C2\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} + 11\cdot\pi\cdot C1\cdot\nu + 11\cdot\pi\cdot C2\cdot\nu + 64}{32\cdot\pi\cdot(\nu+1)} = 0$$

$$-\frac{24\cdot\pi\cdot C1 - 64\cdot\nu + 24\cdot\pi\cdot C2 - 3\cdot\pi\cdot C1\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} + 3\cdot\pi\cdot C2\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} + 15\cdot\pi\cdot C1\cdot\nu + 15\cdot\pi\cdot C2\cdot\nu - 64}{96\cdot\pi\cdot(\nu+1)} = 0$$

$$\text{Find}(C1, C2) \rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{52\cdot\nu + 4\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} + 64}{3\cdot\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64}} \\ \dfrac{52\cdot\nu - 4\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} + 64}{3\cdot\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64}} \end{pmatrix} \text{ substitute}, \nu = 0 \;\rightarrow \begin{pmatrix} -\dfrac{4}{\pi} \\ \dfrac{4}{3\cdot\pi} \end{pmatrix}$$

$$C1 := -\frac{52\cdot\nu + 4\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64} + 64}{3\cdot\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64}}$$

$$C2 := \frac{52\cdot\nu - 4\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64} + 64}{3\cdot\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64}}$$

Подставляем полученные значения C в $q(Fo)$ и коэффициенты b

$$C1\cdot e^{-\frac{5\cdot\pi^{2}\cdot Fo}{4}}\cdot e^{-\frac{7\cdot\pi^{2}\cdot Fo\cdot\nu}{8}}\cdot e^{\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{8}} + C2\cdot e^{-\frac{5\cdot\pi^{2}\cdot Fo}{4}}\cdot e^{-\frac{7\cdot\pi^{2}\cdot Fo\cdot\nu}{8}}\cdot e^{-\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{8}} + 1 \text{ simplify } \rightarrow \frac{4\cdot e^{-\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\left(7\cdot\nu+\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}+10\right)}{8}}\cdot\left(13\cdot\nu - \sqrt{49\cdot\nu^{2}\right.}{3\cdot\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64}}$$

$$q(Fo) := \frac{4\cdot e^{-\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\left(7\cdot\nu+\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}+10\right)}{8}}\cdot\left(13\cdot\nu - \sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64} + 16\right)}{3\cdot\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64}} - \frac{4\cdot e^{-\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\left(7\cdot\nu-\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}+10\right)}{8}}\cdot\left(13\cdot\nu + \sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64} + 16\right)}{3\cdot\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64}} + 1$$

$$b_{1} := \frac{2\cdot e^{-\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\left(7\cdot\nu+\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}+10\right)}{8}}\cdot\left(8\cdot e^{\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{4}} - 8\cdot\nu + e^{\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{4}}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64} + \sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64} + 8\cdot\nu\cdot e^{\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{4}}\right.}{\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64}}$$

$$b_{2} := \frac{2\cdot e^{-\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\left(7\cdot\nu+\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}+10\right)}{8}}\cdot\left(2\cdot\nu - 8\cdot e^{\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{4}} + e^{\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{4}}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64} + \sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64} - 2\cdot\nu\cdot e^{\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{4}}\right.}{3\cdot\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64}}$$

Подставим полученные значения b в $\Theta(\xi, Fo)$

$$1 - b_{1}\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - b_{2}\sin\left(3\frac{\pi}{2}\xi\right) \text{ simplify } \rightarrow 1 - \frac{2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\left(7\cdot\nu+\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}+10\right)}{8}}\cdot\left(8\cdot e^{\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{4}} - 8\cdot\nu + e^{\frac{\pi^{2}\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{4}}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64} +\right.}{\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64}}$$

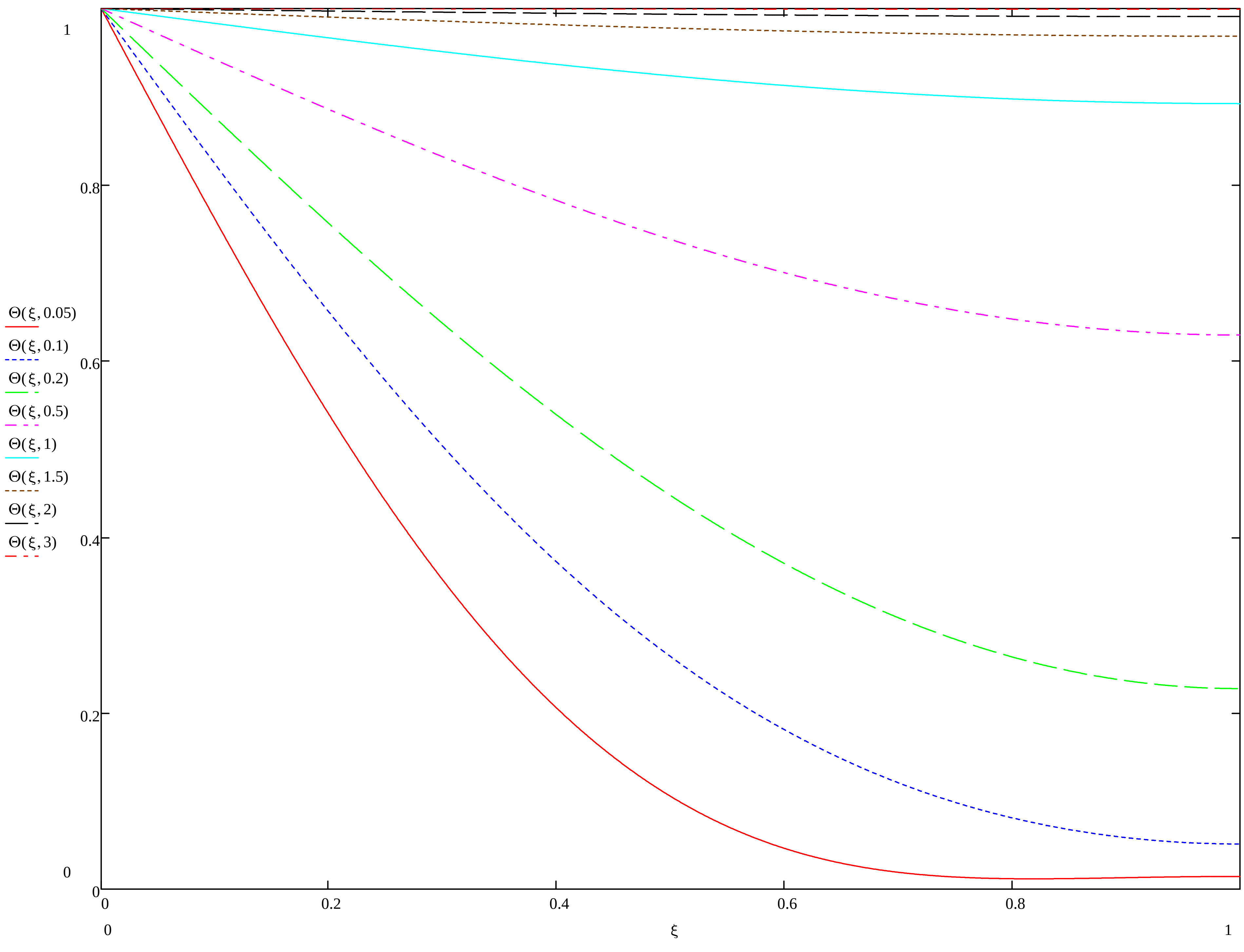
$$\Theta(\xi,Fo) := 1 - \frac{2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\left(7\cdot\nu+\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}+10\right)}{8}}\cdot\left(8\cdot e^{\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{4}} - 8\cdot\nu + e^{\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{4}}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64} + \sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64} + 8\cdot\nu\cdot e^{\frac{\pi^2 \cdots}{}} \cdots\right.}{\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}$$

Найдем $\Theta(\xi,Fo)$ при ν=0

$$1 - \frac{2\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\left(7\cdot\nu+\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}+10\right)}{8}}\cdot\left(8\cdot e^{\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{4}} - 8\cdot\nu + e^{\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{4}}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64} + \sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64} + 8\cdot\nu\cdot e^{\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+\cdots}}{4}} \cdots\right.}{\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}$$

$$-\frac{12\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^2\cdot Fo}{4}} - 3\cdot\pi + 4\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot e^{-\frac{9\cdot\pi^2\cdot Fo}{4}}}{3\cdot\pi} \text{ simplify } \rightarrow 1 - \frac{4\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot e^{-\frac{9\cdot\pi^2\cdot Fo}{4}}}{3\cdot\pi} - \frac{4\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^2\cdot Fo}{4}}}{\pi}$$

$$\Theta(\xi,Fo) := 1 - \frac{4\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot e^{-\frac{9\cdot\pi^2\cdot Fo}{4}}}{3\cdot\pi} - \frac{4\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^2\cdot Fo}{4}}}{\pi}$$



1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
ξ
1
Θ(ξ, 0.05)
Θ(ξ, 0.1)
Θ(ξ, 0.2)
Θ(ξ, 0.5)
Θ(ξ, 1)
Θ(ξ, 1.5)
Θ(ξ, 2)
Θ(ξ, 3)

$$\frac{\pi\cdot\xi}{2}\Big) + 9\cdot\pi^2\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) + \pi^2\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) + 9\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) + \pi^2\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)$$

$$\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) + 9\cdot\pi^2\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) + \pi^2\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)$$

$$\frac{\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) + 9\cdot\pi^{2}\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) + \pi^{2}\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{}\Bigg] \text{simplify} \rightarrow \frac{9\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{8\cdot(\nu+1)} + \frac{\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{8\cdot(\nu+1)} + \frac{\frac{d^{2}}{dFo^{2}}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2\cdot\pi^{2}\cdot(\nu+1)} + \frac{\frac{d^{2}}{dFo^{2}}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2\cdot\pi^{2}\cdot(\nu+1)} + \frac{9\cdot}{}$$

$$\frac{\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) + 9\cdot\pi^{2}\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) + \pi^{2}\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{} \rightarrow \frac{2\cdot\pi\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) - \frac{3\cdot\pi^{3}\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2} - \frac{9\cdot\pi^{3}\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2} + 6\cdot\pi\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) - \frac{9\cdot\pi^{3}\cdot\nu\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2} - \frac{3}{}}{8\cdot}$$

$$\frac{\frac{\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{} + \frac{9\cdot\pi^{3}\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2} + \frac{3\cdot\pi^{3}\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2}}{}$$

$$\frac{\cdots\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right) + 9\cdot\pi^{2}\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right) + \pi^{2}\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{\cdots}\ \text{simplify} \rightarrow$$

$$- \frac{9\cdot\pi^{2}\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{32\cdot(\nu + 1)} - \frac{9\cdot\pi^{2}\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{32\cdot(\nu + 1)}$$

$$\frac{\cdots{}^{4}\cdot\nu - 9\cdot\pi^{4} + 9\cdot\pi^{4}\cdot\nu\cdot q(Fo) + 28\cdot\pi^{2}\cdot\nu\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)}{\cdots 1)}$$

$$\frac{\cdot \mathrm{Fo}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{8}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64} - \mathrm{C2}\cdot e^{-\frac{\pi^2\cdot\mathrm{Fo}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{8}}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}\Bigg)$$

$$\frac{\dfrac{\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{8}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}+C2\cdot e^{-\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{8}}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}\Bigg)}{}$$

$$\frac{\cdot\xi\Big)\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}-C2\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}+11\cdot C1\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)+11\cdot C2\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)-5\cdot C1\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)-5\cdot C2\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)+16}{}\Bigg)d\xi \text{ simplify } \rightarrow \frac{64\cdot\nu+8\cdot\pi\cdot}{}$$

$$\frac{\frac{\cdot\pi\cdot\xi}{2}\Big)\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}-C2\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}+11\cdot C1\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)+11\cdot C2\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)-5\cdot C1\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)-5\cdot C2\cdot\nu\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)+16}{}\Bigg)d\xi \text{ simplify } \rightarrow$$

$$\frac{\overline{\quad} + 104\cdot\nu + 64 + 16\Big)}{} - \frac{4\cdot e^{-\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\left(7\cdot\nu-\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}+10\right)}{8}}\cdot\left(13\cdot\nu+\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}+16\right)}{3\cdot\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}} + 1$$

$$\frac{-8\Big)}{}$$

$$\frac{+8\Big)}{}$$

$$\frac{\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}+8\cdot\nu\cdot e^{\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{4}}-8\Bigg)}{} - \frac{2\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\left(7\cdot\nu+\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}+10\right)}{8}}\cdot\Bigg(2\cdot\nu-8\cdot e^{\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{4}}+e^{\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{4}}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+}}{3\cdot\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}$$

$$\frac{\cdot \mathrm{Fo}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{4} - 8\Bigg) - \frac{2\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^{2}\cdot \mathrm{Fo}\cdot\left(7\cdot\nu+\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}+10\right)}{8}}\cdot\left(2\cdot\nu - 8\cdot e^{\frac{\pi^{2}\cdot \mathrm{Fo}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{4}} + e^{\frac{\pi^{2}\cdot \mathrm{Fo}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{4}}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64} + \sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+}\right.}{3\cdot\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}$$

$$\frac{104\cdot\nu+64}{} - 8\Bigg) - \frac{2\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^{2}\cdot \mathrm{Fo}\cdot\left(7\cdot\nu+\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}+10\right)}{8}}\cdot\left(2\cdot\nu - 8\cdot e^{\frac{\pi^{2}\cdot \mathrm{Fo}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{4}} + e^{\frac{\pi^{2}\cdot \mathrm{Fo}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{4}}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64} + \sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64} - 2\cdot\nu\cdot e^{\pi^{2}}\right.}{3\cdot\pi\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}$$

$$\frac{\nu\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{8\cdot(\nu+1)}+\frac{\nu\cdot\frac{d}{dFo}q(Fo)\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{8\cdot(\nu+1)}$$

$$\frac{\frac{\cdot\pi^{3}\cdot\nu\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2}+\frac{9\cdot\pi^{3}\cdot q(Fo)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2}+\frac{3\cdot\pi^{3}\cdot q(Fo)\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2}+\frac{9\cdot\pi^{3}\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\cos\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2}+\frac{3\cdot\pi^{3}\cdot\nu\cdot q(Fo)\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)}{2}}{\pi^{2}\cdot(\nu+1)}$$

$$\frac{C1 + 8\cdot\pi\cdot C2 + \pi\cdot C1\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} - \pi\cdot C2\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2 + 104\cdot\nu + 64} + 11\cdot\pi\cdot C1\cdot\nu + 11\cdot\pi\cdot C2\cdot\nu + 64}{32\cdot\pi\cdot(\nu + 1)}$$

$$\overline{104\cdot\nu + 64} + \sqrt{49\cdot\nu^{2} + 104\cdot\nu + 64} - 2\cdot\nu\cdot e^{\frac{\pi^{2}\cdot \mathrm{Fo}\cdot\sqrt{49\cdot\nu^{2}+104\cdot\nu+64}}{4}} + 8\Bigg)$$

$$\overline{\quad 64 - 2\cdot\nu\cdot e^{\frac{\pi^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{4}} + 8\Big)}$$

$$\frac{{}^2\cdot Fo\cdot\sqrt{49\cdot\nu^2+104\cdot\nu+64}}{4} + 8\Big) \quad \text{substitute}, \nu = 0 \ \rightarrow -\frac{12\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot e^{-\frac{\pi^2\cdot Fo}{4}} - 3\cdot\pi + 4\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi\cdot\xi}{2}\right)\cdot e^{-\frac{9\cdot\pi^2\cdot Fo}{4}}}{3\cdot\pi}$$