

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Самарский государственный технический университет»

*На правах рукописи*



**Ахметшина Элеонора Газинуровна**

**МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ  
ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ КАК СИСТЕМЫ МАССОВОГО  
ОБСЛУЖИВАНИЯ С УЧЕТОМ ВРЕМЕННЫХ СДВИГОВ**

**Специальность 1.2.2 – Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ**

**ДИССЕРТАЦИИ**  
**на соискание ученой степени**  
**кандидата технических наук**

Научный руководитель:  
заслуженный работник высшей школы РФ,  
доктор технических наук, профессор  
**Тарасов Вениамин Николаевич**

**САМАРА 2022**

## Содержание

Введение.....	4
ГЛАВА 1. ОБЗОР И СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ.....	11
1.1 Основные понятия теории массового обслуживания.....	11
1.2 Обзор существующих моделей систем массового обслуживания.....	14
1.3 Выводы по первой главе.....	27
ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОБЫЧНЫМИ И СО СДВИНУТЫМИ ВХОДНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ.....	28
2.1 Анализ классической системы массового обслуживания.....	28
2.2 Исследование двух систем массового обслуживания $M/E_2/1$ и $M/E_2/1$ с временными сдвигами.....	36
2.3 Система массового обслуживания $E_2/M/1$ с обычными и сдвинутыми входными распределениями.....	45
2.4 Выводы по второй главе.....	53
ГЛАВА 3. РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.....	56
3.1 Среднее время ожидания в системе массового обслуживания $H_2/H_2/1$ с временными сдвигами.....	56
3.2 Особенности применения гиперэкспоненциальных входных распределений в системах массового обслуживания.....	66
3.3 Выводы по третьей главе.....	74
ГЛАВА 4. РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ.....	76
4.1 Модели СМО $H_2/M/1$ и $M/H_2/1$ .....	76
4.2 Модели телетрафика на основе двойственных систем с временными сдвигами с гиперэкспоненциальными и экспоненциальными распределениями.....	77
4.3 Выводы по четвертой главе.....	90

ГЛАВА 5. РАЗРАБОТКА КОМПЛЕКСА ПРОГРАММ ДЛЯ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК СМО С ВРЕМЕННЫМИ СДВИГАМИ.....	92
5.1 Моделирование систем передачи данных с использованием современных информационных технологий.....	92
5.2 Описание разработки программ расчета характеристик систем массового обслуживания с временными сдвигами.....	101
5.3 Выводы по пятой главе.....	111
Заключение .....	113
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	115
ЛИТЕРАТУРА.....	116
ПРИЛОЖЕНИЕ А. СВИДЕТЕЛЬСТВО ОБ ОФИЦИАЛЬНОЙ РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММЫ.....	126
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. АКТ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ .....	127
ПРИЛОЖЕНИЕ В. СПРАВКА О ПРАКТИЧЕСКОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ .....	129

## Введение

**Актуальность темы.** Работа посвящена исследованию и разработке математических моделей и методов массового обслуживания на основе СМО с сдвинутыми законами распределений  $a(t-t_0)$ ,  $b(t-t_0)$ , где  $t_0 > 0$  параметр сдвига. Такие системы в отличие от классических систем, назовем системами с временными сдвигами.

Впервые такая система в виде СМО М/М/1 со сдвинутыми вправо от нулевой точки экспоненциальными распределениями представлена в работе «Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием» авторов Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Блатов И.А. в журнале Автоматика и телемеханика. 2015. № 11. С. 51-59. Этот факт заложил основу для исследования других систем с учетом временных сдвигов, которые по классификации Кендалла относятся к системам общего типа G/G/1. Ниже мы увидим, какими новыми свойствами обладают системы с учетом временных сдвигов.

Как в отечественной, так и в зарубежной литературе, включая интернет ресурсы, не имеется исследований других авторов в области систем с временными сдвигами. Единственными близкими работами в данной области следует выделить публикации Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E., где представлены результаты приближения очередей к интернету и мобильным сервисам как очередей с запаздыванием во времени, но безотносительно к СМО. В этих работах показано, что если информация задерживается достаточно долго, может произойти бифуркация Хопфа, которая может вызвать нежелательные колебания в очередях. Однако неизвестно, насколько велики колебания, когда происходит бифуркация Хопфа. Эти авторы почти приблизились к СМО с временными сдвигами.

Как известно, теория массового обслуживания (ТМО) включает известные классические СМО, сформированные двумя потоками, в которых временные интервалы поступления заявок и их обслуживания описываются известными из теории вероятностей функциями плотностей распределения,

такими как: распределение Эрланга, экспоненциальное, гиперэкспоненциальное распределение как вероятностная смесь экспоненциальных распределений и т.д. В этой области известны работы многих отечественных и зарубежных авторов: Вишневский В.М., Цыбаков Б.С., Степанов С.Н., Алиев Т.И., L. Kleinrock, A.R. Ward, P.W. Glinn и многие другие.

Кроме классических СМО, теория массового обслуживания включает теорию систем общего типа  $G/G/1$ , из которой известно, что среднее время ожидания заявок в очереди  $\bar{W}$  в любой СМО связано квадратичной зависимостью с коэффициентами вариаций интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$ . Следовательно, диапазоны изменения этих коэффициентов вариаций играют важную роль в ТМО. Среднее время ожидания заявок в очереди, это основная характеристика для систем массового обслуживания, т.к. все остальные временные характеристики: среднее время пребывания в системе, средняя длина очереди, количество заявок в системе являются производными от этой основной характеристики.

Также известно, что для систем  $G/G/1$  нельзя получить решения для основной характеристики СМО – среднего времени ожидания заявок в очереди в общем случае. Поэтому важны и актуальны исследования таких систем для частных случаев законов распределений, а их результаты используются в современной теории телетрафика для моделирования систем передачи данных различного назначения. Например, по среднему времени ожидания в очереди, оценивают задержки пакетов в сетях пакетной коммутации при их моделировании с помощью СМО.

Разработка новых моделей массового обслуживания в виде систем с временными сдвигами является актуальной задачей для ТМО и имеет самостоятельное прикладное значение в моделировании различных систем передачи данных, например при использовании межсетевых экранов.

**Целью** диссертационной работы является разработка и исследование математических моделей систем передачи данных в виде СМО со сдвинутыми вправо от нулевой точки распределениями, а также удобная для экспериментального исследования программная реализация этих моделей.

**Основные задачи**, решение которых необходимо для реализации цели:

1) исследование классических СМО, сформированных с помощью законов распределений Эрланга второго порядка ( $E_2$ ), экспоненциального (M) и гиперэкспоненциального распределения второго порядка ( $H_2$ ) с использованием метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли;

2) построение и исследование математических моделей указанных систем со сдвинутыми законами распределений, условно обозначенных  $E_2^-$ ,  $M^-$ ,  $H_2^-$ , включая определение спектральных разложений и вывод расчетных формул для основной характеристики СМО;

3) решение задачи определения неизвестных параметров сдвинутых законов распределений  $E_2^-$ ,  $M^-$ ,  $H_2^-$  и их числовых характеристик, а также оценка влияния на эти характеристики параметра сдвига закона распределения  $t_0 > 0$ ;

4) разработка программы расчета среднего времени ожидания заявок в очереди для всех построенных моделей массового обслуживания со сдвинутыми вправо распределениями  $E_2^-/E_2^-/1$ ,  $E_2^-/M^-/1$ ,  $M^-/E_2^-/1$ ,  $H_2^-/H_2^-/1$ ,  $H_2^-/M^-/1$  и  $M^-/H_2^-/1$ .

**Объектом исследования** являются СМО со сдвинутыми законами распределений.

**Предметом исследования** являются математические модели и методы анализа СМО с временными сдвигами.

**Соответствие паспорту научной специальности.**

Область исследований соответствует паспорту специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы

программ» по пунктам: 1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений; 2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей; 3. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.

**Методы исследования** основаны на теории вероятностей, теории массового обслуживания и спектральном методе решения интегрального уравнения Линдли, теории случайных процессов, численных методов решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений, в том числе, реализованные в пакете Mathcad для проведения вычислительных экспериментов.

**Научная новизна:**

1. Впервые предложены спектральные разложения интегрального уравнения Линдли для шести пар СМО, сформированных обычными и сдвинутыми законами распределений Эрланга, экспоненциального и гиперэкспоненциального.

2. Впервые представлены численно-аналитические решения для среднего времени ожидания заявок в очереди как основной характеристики для рассматриваемых систем, полученные с помощью спектральных решений и установлено, что СМО со сдвинутыми законами распределений обеспечивает многократное уменьшение времени ожидания в зависимости от величины параметра сдвига по сравнению с классическими системами.

3. Представлена методика расчета основной характеристики СМО, включающая определение неизвестных параметров сдвинутых законов распределений методом моментов через их числовые характеристики с учетом влияния на эти характеристики величины параметра сдвига закона распределения.

4. Впервые представлены результаты численных экспериментов над разработанными математическими моделями массового обслуживания для их

тестирования и оценки их адекватности по разработанному программному обеспечению в среде Mathcad.

Все позиции соответствуют областям исследования специальности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

**Практическая ценность работы** состоит в следующем:

Использование представленных моделей массового обслуживания  $E_2^-/E_2^-/1$ ,  $E_2^-/M^-/1$ ,  $M^-/E_2^-/1$ ,  $H_2^-/H_2^-/1$ ,  $H_2^-/M^-/1$  и  $M^-/H_2^-/1$  со сдвинутыми вправо от нулевой точки распределениями обеспечивает меньшее время ожидания заявок в очереди по сравнению с системами с обычными законами распределений.

Разработанные методы и модели реализованы в виде программного комплекса «Программы расчета характеристик систем массового обслуживания с запаздыванием во времени в пакете Mathcad». Программа может быть использована проектными, научно-исследовательскими организациями при анализе и проектировании транспортной нагрузки в сетях связи, для анализа вероятностно-временных характеристик сетевого узла.

**Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций, а также достоверность полученных результатов исследований** обеспечиваются согласованностью результатов вычислительных экспериментов с квадратичной зависимостью среднего времени ожидания от коэффициентов вариаций временных интервалов, что соответствует теории СМО  $G/G/1$ . С уменьшением параметра сдвига  $t_0$  результаты экспериментов по тестированию представленных моделей систем с учетом временных сдвигов непрерывно приближаются к данным для классических систем, а при значении параметра сдвига  $t_0=0$  полностью с ними совпадают.

**Основные положения, выносимые на защиту**

1. Спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для шести пар СМО, сформированных обычными и сдвинутыми



законами распределений Эрланга, экспоненциального и гиперэкспоненциального.

2. Полученные с помощью спектральных решений численно-аналитические решения для среднего времени ожидания заявок в очереди как основной характеристики для рассматриваемых систем.

3. Методика расчета основной характеристики СМО, включающая определение неизвестных параметров сдвинутых законов распределений методом моментов через их числовые характеристики с учетом влияния на эти характеристики величины параметра сдвига закона распределения  $t_0 > 0$ .

4. Результаты численных экспериментов над разработанными математическими моделями массового обслуживания, позволяющие утверждать: 1) СМО с временными сдвигами обеспечивают многократное уменьшение времени ожидания в зависимости от величины параметра сдвига по сравнению с классическими системами за счет уменьшения коэффициентов вариаций временных интервалов поступлений и обслуживания; 2) СМО с временными сдвигами обеспечивают интервальный диапазон изменения коэффициентов вариаций в отличие от классических систем с фиксированными значениями этих коэффициентов вариаций.

**Реализация и внедрение.** Программа для ЭВМ официально зарегистрирована свидетельством о государственной регистрации программ ЭВМ №2021614019 «Программный комплекс расчета характеристик систем массового обслуживания с запаздыванием во времени в пакете Mathcad». Результаты диссертационной работы внедрены и используются в проектной деятельности компании ООО «ЭдМакс». Результаты работы также внедрены в учебном процессе дисциплины «Основы проектирования и моделирования вычислительных сетей» при подготовке магистрантов по направлениям подготовки 09.04.01 Информатика и вычислительная техника и 09.04.04 Программная инженерия.

**Апробация работы.** Основные положения диссертационной работы обсуждались в форме докладов на различных конференциях: Международная

научно-техническая конференция (ПИТ-2019) Самарский научный центр РАН, (Самара, 2019), «Problems of Infocommunications Science and Technology» (PIC S&T), International Scientific-Practical Conference (Киев, Украина 2019), Международный научный форум «Наука и инновации – современные концепции» (Москва, 2021), Международная научно-практическая конференция «Инновационные идеи молодых исследователей (Уфа, 2021), XXVI Всероссийская научно-техническая конференция студентов, молодых ученых и специалистов «Новые информационные технологии в научных исследованиях НИТ-2021» (Рязань, 2021), XXIII Международная научно-техническая конференция «Проблемы техники и технологий телекоммуникаций» (Самара, 2021), XVI Международная отраслевая научно-техническая конференция «Технологии информационного общества» (Москва, 2022).

**Публикации.** По материалам диссертационной работы опубликовано 18 работ, из них 8 из перечня ВАК, 1 из издания Scopus и 1 Web of Science.

**Личный вклад автора.** Заключается в совместной постановке задач, разработке методов исследования, интерпретации результатов и формулировка всех основных положений, выводов и рекомендаций, разработка программного обеспечения.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав заключения, библиографического списка и приложения. Объем работы: 129 страницах основного текста, 13 рисунков и 24 таблиц, приложение на 4 страницах.

# ГЛАВА 1. ОБЗОР И СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

## 1.1 Основные понятия теории массового обслуживания

Теория массового обслуживания (ТМО) имеет разностороннее применение в различных сферах деятельности, а именно в научных, экономических, производственных областях. Достаточно часто возникают ситуации, когда появляется необходимость в обслуживании заявок, которые поступают в систему. Кроме того, распространены ситуации, когда необходимо пребывать в состоянии ожидания. Стоит отметить, что системы обслуживания могут обладать ограниченными возможностями для удовлетворения спроса, данный фактор приводит к образованию очередей.

ТМО основана на трудах многих ученых, и сама основа была разработана много раньше, чем появилась вычислительная техника, но только с развитием она смогла применяться к техническому классу практических задач, также с помощью вычислительных машин задачи удалось решать более точно и быстро.

Область прикладной математики, которая занимается анализом процессов в системах массового обслуживания (СМО), которые обладают

ТМО – раздел прикладной математики, занимающийся анализом процессов в системах массового обслуживания, где события многократно повторяются. С помощью этой теории разрабатываются методы решения типовых задач массового обслуживания, строятся модели СМО и определяются их количественные характеристики.

Основными источниками, раскрывающими историю развития теории массового обслуживания, были работы Гнеденко Б. В., Павского В.А. и Солнышкиной И. В. [1, 2, 7]. В них авторы излагают историю ТМО.

Обзор и анализ систем массового обслуживания представлены в книгах Бахарева Н.Ф. и Тарасова В.Н., Карташевского В.Г., Кенинга Д., Матвеева

В.Ф. и Ушакова В.Г., Павского В.А. и Солнышкиной И. В. [3, 4, 5, 6, 7, 11]. В рассмотренных работах были представлены полный обзор СМО, а также анализ эффективности их работы с помощью различных моделей.

Основоположником теории массового обслуживания, которая возникла в 20 веке, является датский ученый А.К. Эрланг. Эрланг занимался вопросами проектирования телефонных сетей. Задача заключалась в улучшении работы АТС и прежнего расчета качества обслуживания клиентов на основе количества используемых устройств.

Существует несколько типов систем массового обслуживания: с очередями и с потерями (т.е. без очередей). В первом случае соединение (запрос), поступившее, когда расширение занято, должно ожидать установления соединения. Во втором случае он «выходит из системы» и не требует внимания системы массового обслуживания (QS) [8].

Решая практические задачи совершенствования работы системы связи, А. Эрланг вывел ряд формул и формулировок, являющихся базовыми в теории массового обслуживания.

Провести оценку показателей производительности сети невозможно без определенного математического аппарата.

Многие задачи расчета характеристик производительности различных компонентов компьютерных сетей решаются с помощью математических методов теории систем массового обслуживания, включая оценку вероятностных и временных характеристик узлов коммутации и маршрутизации, анализ производительности локальных сетей и сетей множественного доступа, расчет потерь и загрузка линий связи при передаче данных [9].

Система массового обслуживания считается заданной, если обладает описанием следующих компонентов:

- входящий поток заявок;
- количество и типы обслуживаемых устройств;

- емкости буферов, где запросы, которые не нашли свободных приборов, ожидают своей очереди;
- времена обслуживания;
- дисциплина обслуживания, то есть порядок, в котором запрос обрабатывается в системе, с момента его поступления до момента выхода из нее.

При анализе случайных процессов удобно пользоваться вариантом схематического изображения возможных состояний систем массового обслуживания на рисунке в виде графа с разметкой его возможных состояний. Такую модель построения графа предложил А.А. Марков, она называлась «Марковская цепь».

Теорию массового обслуживания возможно применить для любого сетевого оборудования, в котором используется коммутация пакетов. В качестве примеров такого оборудования могут выступать коммутатор сети (локальной или глобальной), маршрутизатор, конечной узел сети [10].

В случае когда сетевое оборудование не успевает обработать поступающие пакеты, возникает потребность в очереди во время перегрузок (Рис. 1.1).

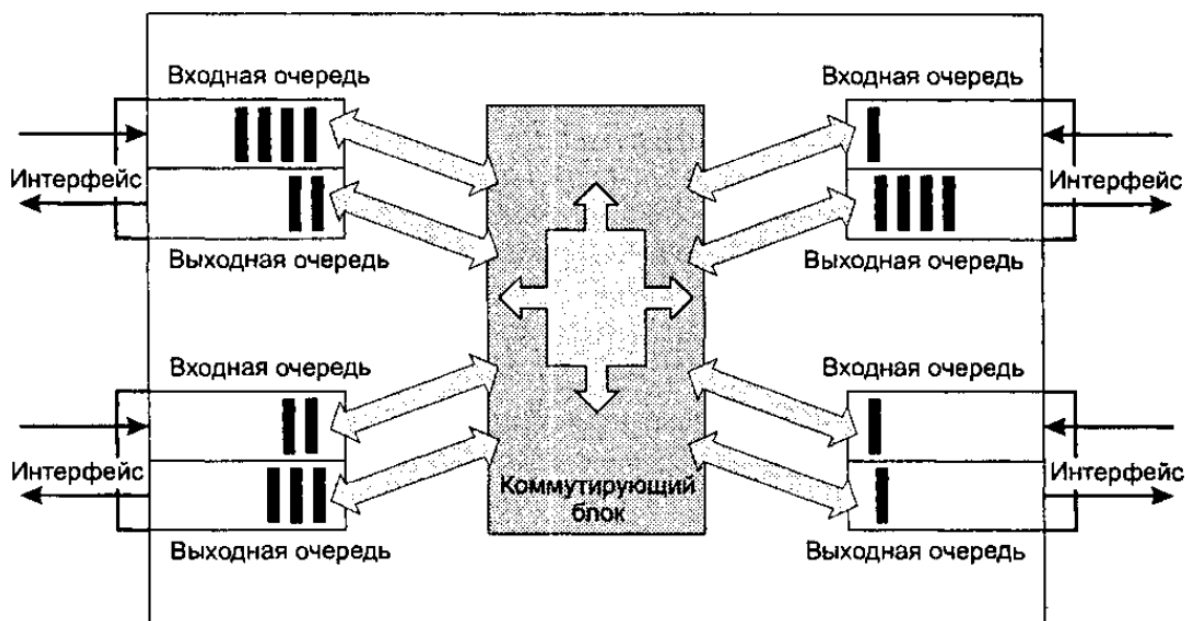


Рис. 1.1 – Очереди в пакетном коммутаторе

## 1.2 Обзор существующих моделей систем массового обслуживания

Предметом теории массового обслуживания является – определение зависимостей между производительностью различных каналов, характером поведения потока заявок и эффективностью обслуживания, для нахождения наилучших способов управления этими процессами.

Одной из самых простых моделей является СМО с отказами, эта задача возникла из практических нужд телефонии и была решена датским математиком Эрлангом. Тут же стоит отметить многоканальные СМО с отказами, так как она вытекает из разработок одноканального СМО с отказами, ее так же продвинул Агнер Краруп Эрланг.

Он же разработал именную формулу и придал ее огласке в 1909 году в своей первой работе под названием «Теория вероятностей и телефонные разговоры». Так же он доказал, что в подавляющем большинстве случаев СМО является многоканальной, то есть несколько заявок могут обрабатываться параллельно, и, поэтому несомненный интерес вызывают модели с каналами обслуживания. Процесс, описываемый этой моделью можно охарактеризовать интенсивностью входящего потока  $\lambda$ , при котором одновременно может быть обслужено не более  $n$  запросов (клиентов).

Конечной целью использования параллельно подключенных каналов обслуживания является увеличение по сравнению с одноканальной системой скорости запросов на обслуживание, обслуживающих  $n$  клиентов одновременно. Для практического анализа важно знать, к какому виду можно отнести реальные потоки требований. В анализ входит нахождение функции распределения, управляющей входящим потоком и/или оценка ее параметров. Стоит отметить, что все СМО далее были лишь слегка модифицированы, основная же идея, заложенная формулой А.К. Эрланга, оставалась той же.

Существует определенная классификация СМО – классификация Кендалла. Д. Кендаллом в 1943 году была описана классификация в работе «Передовая теория статистики», где он уже тогда анализировал работы

различных ученых. Классификация Д.Кендалла представляет собой последовательность символов, которая соответствует целому классу систем массового обслуживания, а не какой то конкретной системе. Используя символику Кендалла, имитационную модель можно описать четырьмя символами, которые разделены вертикальными линиями. Первая позиция указывает на характеристики входного потока заявок, вторая – на обслуживание, третья – на количество одновременно (параллельно) обслуживаемых каналов, а четвертая – на количество мест ожидания в очереди перед системой обслуживания.

Именно для описания сложных процессов функционирования современных инфокоммуникационных систем в 1950 году была предложена классификация Д. Кендалла. Модификацию ранее упомянутой классификации сделал российский учёный в области ТМО Г.П. Башарин. Для описания сложных систем массового обслуживания в современной технической литературе используется классификация Кендалла-Башарина. Усовершенствованная классификация основана на пяти символах.

Однолинейная СМО с пуассоновским входным потоком запросов является наиболее простой для исследования моделью, именно у такой модели длительность обслуживания подчиняется экспоненциальному закону. По классификации Д.Кендалла символы первой и второй позиции могут использовать несколько разных букв: Е (распределение Эрланга), Н (гиперэкспоненциальное распределение), М (экспоненциальное распределение) и другие.

Символ G используется в случае, если функция распределения имеет произвольный характер. По символике Кендалла на третьей позиции указывается число обслуживаемых приборов. В ряде случаев используются модели систем массового обслуживания с бесконечным числом обслуживаемых устройств.

Так же стоит отметить, что не малый вклад в развитие самой теории очередей был сделан Джоном Литтлом и его законом. Из стационарного

распределения можно получить другие рабочие характеристики системы, такие как:

- среднее количество  $L$  клиентов в системе;
- среднее количество  $L_q$  заявок в очереди;
- среднее время ожидания  $W_q$  клиента;
- средняя продолжительность пребывания  $W$  в системе (ожидание + обслуживание). Эти значения связаны друг с другом следующими отношениями:

$$L = \lambda_e W ,$$

$$L_q = \lambda_e W_q ,$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} ,$$

$$L = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu} ,$$

где  $\lambda_e$  – скорость поступления в систему,  $\mu$  – скорость обслуживания,  $\frac{1}{\lambda_e}$  – средний интервал времени, разделяющий два последовательных поступления,  $\rho = \frac{\lambda_e}{\mu}$  – коэффициент занятости системы.

Первые два отношения называются формулами Литтла, которые являются очень общими отношениями, применимыми к большому классу систем. Никаких предположений о случайных величинах, характеризующих систему (время между поступлениями, время обслуживания и т.д.). Единственным условием применения закона Литтла является стабильность системы.

Немалый вклад в развитии теории массового обслуживания в телекоммуникации сделал Деннис Виктор Линдли. Для расчета времени ожидания заявки используется анализ времени ожидания заявок в очереди для СМО общего вида, при обработке реального коррелированного IPTV



трафика с его интегральным уравнением, которое позволяет рассчитать аппроксимацию трафика.

В современных условиях видеотрафик имеет наивысший приоритет, так как все современные технологии поддерживают этот вид трафика. Этот тип трафика очень чувствителен и критичен с точки зрения задержки. В связи с этим очень важно прогнозировать средние характеристики качества обслуживания (QoS). Для достижения оптимальных показателей качества обслуживания используются различные принципы передачи трафика в режиме реального времени.

При простейшем потоке требований распределение требований, поступающих в систему, подчиняются закону распределения Пуассона. Условия простейшего потока не всегда строго выполняются, достаточно часто имеет место не стационарность процесса. Настоящий же прорыв, по сути, сделал Александр Яковлевич Хинчин.

С 1930 года Хинчин был членом Московского совета, где работал в секции связи, оказывал серьёзную научную помощь связистам. Именно тогда Московская телефонная станция реконструировалась и автоматизировалась. Расчёты, сделанные Хинчиным, помогли сократить сроки перестройки, позволили удешевить работы и внесли массу технических усовершенствований. В 1955 была опубликована монография, которая включала в себя все труды А.Я. Хинчина по ТМО. Данная монография в скором времени, в век автоматизации, нашла большое практическое применение [4].

Определяющей характеристикой систем массового обслуживания является случайный процесс. Изучение случайного процесса, происходящего в системе, его математическое выражение составляет предмет ТМО. Математический анализ функционирования систем массового обслуживания значительно облегчается, если случайный процесс этой операции является марковским. Марковским называется процесс, при котором в любой момент времени, вероятность любого будущего состояния системы зависит только

от состояния системы в текущий момент времени и не зависит от того, как система пришла в это состояние. Случайные марковские процессы с дискретными и непрерывными состояниями получили наибольшее распространение при изучении экономических систем.

Существует несколько критериев для выбора оптимальной стратегии при принятии решения, в условиях риска и неопределенности. Критерии, которые разработал Пьер-Симон де Лаплас в 1802 году, когда он работал в Петербургской академии, основываются на принципе недостаточного обоснования. В связи с тем, что при информационном подходе в ситуации неопределенности вероятности состояний неизвестны, то нет оснований утверждать, что они различны. Поэтому можно предположить, что они одинаковы. Но даже сейчас теории массового обслуживания находится место, так как тенденция современного этапа развития компьютерных сетей заключается в изменении структуры передаваемого трафика.

Технология виртуальных частных сетей Virtual Private Network широко используется в целях решения проблем передачи данных в корпоративных сетях. В случае такого моделирования, компьютерные сети представляют собой совокупность ресурсов, использование которых происходит поочередно по заданной дисциплине. Из-за ограничений методов и моделей массового обслуживания, особенно при анализе самоподобного трафика, последнее направление быстро развивалось в последние два десятилетия.

Результаты вероятностного моделирования при использовании ТМО, теории очередей и других методов будут корректными только в случае адекватности применения моделей реальным системам. Это связано с тем, что теория массового обслуживания имеет ограничения – аналитические результаты.

В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика.

В работе [11] на основе двумерной диффузионной аппроксимации

фундаментальных процессов поступления и ухода заявок, получены аналитические выражения для определения основных характеристик таких СМО, на уровне средних значений и дисперсий распределений времен поступления и обслуживания. Точных результатов их расчетов нет, поэтому основным направлением их исследований является диффузионное приближение дискретного процесса обслуживания. Такой подход не дает приемлемых результатов при малых и средних нагрузках на СМО (относительная погрешность может превышать 100%). С другой стороны, такие СМО имеют большое практическое значение в теории проектирования и моделирования компьютерных сетей и телекоммуникационных систем. В указанной работе [11] предлагается другой подход к анализу таких СМО, обеспечивающий инженерную точность от 5 до 10%. Предложен интересный метод, использующий одноузловое управление на двухмоментном уровне параметров потокового распределения. Для определения параметров выходного потока, а также основных характеристик отдельного узла вводится двумерная диффузионная аппроксимация процессов функционирования узла. Указанный метод также обобщается на модели сетей с неравномерным потоком запросов.

В работе [3] рассматриваются потоки запросов на обслуживание, с учетом, что структура потока является случайной. Особое внимание уделено пуассоновскому потоку событий. Рассматриваются потоки со свойствами самоподобия. Анализируется работа устройств массового обслуживания (по символике Д. Кендалла) типа  $M/M/1$ ,  $M/G/1$ ,  $G/M/1$  и их модификаций. Рассмотрены системы с относительными приоритетами обслуживания, ИУЛ, а также основные сведения о сетях массового обслуживания.

В работе [12] описана модель для анализа одноканальной системы телетрафика с потоком трафика с пиковым прибытием, обычно распределенным временем обслуживания, бесконечной очередью и преимущественным приоритетом, основанная на обобщенной формуле Поллачека-Хинчина, потоке трафика с пиковым прибытием, описываемом

распределением Поля, и классической системе массового обслуживания M/G/1 с приоритетами. Автор работы [12] доказал, что пиковая частота запросов на прибытие и изменение времени обслуживания приводят к значительному увеличению задержек в одноканальной системе с преимущественным приоритетом и, следовательно, к значительному увеличению длины очереди для низкоприоритетных классов трафика. Представленные автором новые результаты позволяют оценить характеристики систем массового обслуживания с преимущественным приоритетом в сетях фиксированной и мобильной связи с классификацией трафика, в конкретных приложениях, в облачных технологиях и в системах связи "точка-точка".

В работе [13] был представлен первый алгоритм точного моделирования для стационарного распределения задержки клиентов M/G/1 очереди «первым пришел-первым обслужен», в которых  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$  (сверхстабильный случай). Ключевая идея модели автора [13] заключается в доминировании связи из прошлого при использовании очереди M/G/1 в рамках дисциплины совместного использования процессоров в качестве верхней границы пути выборки, используя преимущества ее свойств обратимости во времени, чтобы иметь возможность моделировать ее в обратном направлении во времени. Здесь автор подробно рассматривает этот метод и приводит несколько примеров других моделей массового обслуживания, для которых этот метод может быть использован в целях точного моделирования их стационарных распределений.

В работе [14] была рассмотрена СМО с повторными вызовами типа M/M/1 с пуассоновским потоком поступающих в систему заявок и одним сервером, обслуживание которых соответствует закону экспоненциального распределения. Авторы работы используют метод асимптотического анализа для решения задачи нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите. В качестве асимптотического условия авторами предлагается условие

высокой загрузки системы и долгой "терпеливости" заявок на орбите. В работе формулируется и доказывается теорема об асимптотически Гауссовском распределении вероятностей числа заявок на орбите. Также авторы приводят численные результаты, демонстрирующие область применения полученных теоретических выводов.

В работе [15] осуществляется сравнение различных моделей положительно определенной случайной величины с моделью гиперэкспоненциального распределения на основе эмпирических числовых характеристик: математического ожидания и дисперсии. Все распределения рассматриваются с параметрами, при которых они имеют убывающую интенсивность «отказов» и коэффициент вариации больше единицы. В качестве количественных оценок близости  $H$ -распределения к остальным моделям авторами рассматриваются равномерная и средняя метрики в пространстве функций распределения. В работе показана степень целесообразности замены двухпараметрического распределения гиперэкспоненциальным  $H_s$ -распределением в зависимости от закона распределения и величины коэффициента вариации. Также приведены оценки эффективности такой аппроксимации для различных наборов параметров и примеры ее применения, кроме того рассчитаны и проанализированы стационарные вероятностные характеристики системы с отказами обслуживающего прибора, где базовое распределение Вейбулла-Гнеденко заменяется на гиперэкспоненциальное распределение специального вида.

В работе [16] авторами представлен новый подход к решению проблемы очереди  $M/M/m$  по времени ожидания и времени пребывания. Мотивация исходит из алгебраического решения для времени пребывания очереди  $M/M/1$ . Ключевая идея работы [16] заключается во введении анзац-преобразования, определенного в терминах функции Эрланга-В, которое позволяет избежать более непрозрачного вывода, основанного на прикладной теории вероятностей.

Единственным предварительным условием является элементарное знание распределения Пуассона, которое уже необходимо для понимания очереди  $M/M/1$ .

В работе [17] авторы предлагают новый подход к моделированию распределения времени между отправлениями в очереди  $PH/G/1$ . Подход, предложенный авторами, позволяет дополнительно моделировать распределение времени между отправлениями и в более общих очередях.

Первоначально авторы [17] предлагали выразить преобразование Лапласа–Стилтьеса времени между отправлениями в очередях  $PH/G/1$ , используя вероятностную интерпретацию распределений фазового типа. С точки зрения авторов статьи, использование такой интерпретации позволяет устранить необходимость в матрично-геометрическом методе и, таким образом, значительно снижает вычислительную сложность. Далее используется преобразование Лапласа–Стилтьеса распределения времени между отправлениями в очереди  $S_m/G/1$ , чтобы выразить это преобразование Лапласа–Стилтьеса в очереди  $ME/G/1$ , где  $ME$  – матрично-экспоненциальное распределение. Авторы работы проверяют это на нескольких примерах  $ME/G/1$ . Они предлагают приблизить преобразование Лапласа–Стилтьеса распределения времени между отправлениями в очереди  $G/G/1$ , используя вышеуказанное преобразование Лапласа–Стилтьеса соответствующей очереди  $PH/G/1$ . Без потери общности авторы демонстрируют свое предлагаемое приближение, используя преобразование Лапласа–Стилтьеса, полученное в очереди  $S_m/G/1$ , и иллюстрируя несколькими примерами  $G/G/1$ , что точность может быть настолько хорошей, насколько хотелось бы авторам.

В работе [18] авторами исследуется система повторной очереди с одним сервером со второй дополнительной выборочной услугой в соответствии с графиком отпусков Бернулли. Клиенту разрешается отказаться, если его услуга не будет оказана немедленно по прибытии, и ему разрешается присоединиться к орбите для повторения своей услуги. Вместо

этого, если сервер свободен, обслуживание клиента запускается немедленно. Каждому клиенту предоставляется первый этап основного обслуживания, за которым следует второй этап дополнительного обслуживания. После завершения обслуживания, если система оказывается пустой, сервер начинает период отпуска. С другой стороны, если система не пуста, сервер выбирает либо продолжить обслуживание клиента с вероятностью  $1-a$ , либо отправиться в простой с вероятностью  $a$ ,  $0 \leq a \leq 1$ . После завершения обслуживания клиент решает либо выйти из системы, либо присоединиться к орбите для повторного обслуживания. Авторами работы были выведены некоторые важные показатели производительности, а также, влияние различных параметров на производительность системы было проанализировано численно.

В работе [19] авторами предложен метод оценки систем телетрафика с приоритетом одного сервера. Эта система имеет пиковый поток прибытия и, как правило, распределенное время обслуживания. Метод основан на обобщенной формуле РКФ, процессе прибытия с пиком Поля и классической очереди с приоритетом M/G/1. Изложенный в работе метод, позволит установить среднего времени ожидания в очереди с преимущественным приоритетом P/G/1 позволяет точно определять размеры телекоммуникационных систем и сетей.

Результаты, полученные в работе [19], показывают, что пиковая скорость процесса прибытия и коэффициент вариации времени обслуживания могут значительно увеличить время ожидания и количество ожидающих запросов, в основном о классах низкого приоритета очереди на один сервер. Представленные результаты и анализ очереди с одним сервером с преимущественным приоритетом могут быть использованы для оценки характеристик современных телекоммуникационных сетей и коммуникаций облачных вычислений.

В работе [20] авторы анализируют двух классовую систему массового обслуживания с дискретным временем с одним сервером, который

поочередно доступен только для одного класса клиентов. Сервер каждый раз выделяется классу клиентов на геометрически распределенный промежуток времени. Время обслуживания клиентов детерминировано равно одному временному интервалу для каждого. В течение каждого временного интервала у обоих классов может быть не более одного прибытия. Двумерный процесс определения числа клиентов обоих классов можно рассматривать как двумерное случайное блуждание по ближайшему соседу. Производящая функция этого случайного блуждания должна быть получена из функционального уравнения. Известно, что этот тип функционального уравнения трудно решить. В этой статье авторы получают выражения замкнутой формы для совместного распределения вероятностей для числа клиентов обоих классов в устойчивом состоянии.

В работе [21] авторы выводят простые оценки распределения очередей в очередях с конечным буфером с марковскими поступлениями. Их методика основана на тонкой эквивалентности между событиями хвоста и порядком времени остановки. Границы отражают усеченное экспоненциальное поведение, включающее совместные горизонтальные и вертикальные сдвиги экспоненциальной функции; это принципиально отличается от существующих результатов, фиксирующих только горизонтальные сдвиги. Используя ту же технику, авторы работы получают аналогичные оценки распределения потерь, что является ключевым показателем для понимания влияния очередей с конечным буфером на приложения реального времени. Моделирование авторов показывает, что границы являются точными в режимах интенсивного движения и улучшают существующие порядки. В режиме ограничения с использованием  $\rho=1$  и прибытиями iid границы распределения размеров очереди нечувствительны к распределению прибытий.

В работе [22] анализируется система массового обслуживания повторного вызова с одним сервером с двумя типами обслуживания и отпуском Бернулли. Авторами предполагается, что поступающее задание



обнаруживает, что сервер занят предоставлением услуг любого типа, как говорят, находится на орбите с дисциплиной "первым пришел-первым обслужен" и повторяет свой запрос (требование) об обслуживании через некоторое случайное время. Клиенту, возглавляющему орбиту, разрешен доступ к серверу. Авторы работы делают выводы о том, что для такой модели массового обслуживания вероятности размера системы исследуются в стационарном режиме с использованием метода дополнительных переменных. Влияние различных параметров на производительность системы анализируется численно. Также авторами обсуждается стохастическая декомпозиция и некоторые особые случаи, представляющие интерес.

В работе [23] авторами была исследована марковская очередь повторной обработки с одним сервером с коллизиями и ошибками передачи. Используя теорию Марковского процесса, они вывели уравнения стационарного состояния. Авторы работы получили совместные функции генерации вероятности стационарного состояния сервера и длины орбиты и вычислили некоторые важные характеристики.

Чтобы проверить свою модель, авторы статьи сделали несколько числовых иллюстраций. Полученные численные результаты подтверждают их аналитические исследования. Эта очередь повторного запроса может быть использована для моделирования и анализа производительности функции распределенной координации базового широкополосного режима IEEE 802.11.

Модель, разработанная авторами статьи [23], отличается от моделей, изученных в литературе, тем фактом, что вероятность присоединиться к орбите, когда сервер свободен, отличается, когда сервер занят. Столкновение в этом исследовании ограничено основными клиентами, которые обнаружили, что сервер занят.

В работе [24] авторы рассматривают очередь  $G/G/1$  с дискретным временем, в которой сервер берет ровно один отпуск каждый раз, когда

система становится пустой. Время прибытия прибывающих клиентов, время обслуживания и время отпуска – все это общие дискретные случайные величины. В рамках своего исследования автор работы получает точное выражение без преобразования для распределения стационарной системы по размерам с помощью модифицированного метода дополнительных переменных. Используя полученные результаты, он вводит простое двух моментное приближение для распределения системы по размерам. Автор утверждает, что, исходя из этого, можно было бы получить приблизительные значения среднего размера системы вместе с распределением системы по размерам. Автором работы приведены некоторые численные примеры для проверки предложенного метода аппроксимации.

В работе [25] авторы работы утверждают, что приближениям к различным показателям производительности в системах массового обслуживания уделяется значительное внимание, поскольку эти показатели имеют широкую применимость. В этой статье они предлагают два метода для аппроксимации характеристик массового обслуживания системы G/M/1. Первый метод является непараметрическим по своей природе, используя только первые три момента распределения прибытия. Второй метод идет по известному пути аппроксимации распределения прибытия – смесью двух экспоненциальных распределений – путем сопоставления первых трех моментов. Численные примеры и оптимальный анализ показателей производительности очередей G/M/1 приведены авторами для иллюстрации эффективности методов и сравниваются с эталонными приближениями.

Результаты по исследованию СМО M/M/1 с учетом временных сдвигов впервые упомянуты в работе [26]. На основании результатов работы [26] является возможным развить теорию метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) также на сдвинутые гиперэкспоненциальные и эрланговские распределения.

### 1.3 Выводы по первой главе

В данной главе описаны характеристики систем массового обслуживания при моделировании процессов функционирования телекоммуникационных и компьютерных сетей.

1. Проведен обзор результатов из литературных источников в области исследования и сравнение методов моделирования различных систем на основе теории массового обслуживания.

2. В теории массового обслуживания исследования систем  $G/G/1$  актуальны в связи с тем, что они активно используются в современной теории телетрафика.

При сравнении методов моделирования различных систем на основе теории массового обслуживания везде используются аннотация Кендалла и уравнения Линдли. До сих нет прямого решения для  $G/G/1$  систем в конечном виде для общего случая.

3. Разработка новых моделей массового обслуживания со сдвинутыми законами распределений и разработка соответствующего программного обеспечения, расширяющие возможности классических систем как по области их применимости, так и по новым их свойствам, является актуальной задачей ТМО, имеющей самостоятельное значение.

## ГЛАВА 2. РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОБЫЧНЫМИ И СО СДВИНУТЫМИ ВХОДНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Результаты этой главы излагаются в соответствии с работами автора настоящей диссертации [36, 41, 54, 55].

### 2.1 Анализ классической системы массового обслуживания

#### $E_2/E_2/1$ и со сдвинутыми входными распределениями

Системы  $E_2/E_2/1$  с эрланговскими входными распределениями 2-го порядка и  $E_2^-/E_2^-/1$  с сдвинутыми входными распределениями относятся к типу систем массового обслуживания G/G/1.

Для системы  $E_2^-/E_2^-/1$  в качестве входных распределений выбраны распределения Эрланга 2-го порядка точности, с учетом временных сдвигов (сдвинутые вправо о нулевой точки). Для таких законов распределения, решение в замкнутой форме, возможно получить при использовании метода спектрального разложения. Показано, что в такой системе с временными сдвигами среднее время ожидания требований в очереди меньше, чем в обычной системе. Это связано с тем, что операция сдвига во времени уменьшает величину коэффициентов вариаций интервалов между поступлениями и времени обслуживания, а как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания требований связано с этими коэффициентами вариаций квадратичной зависимостью.

Система массового обслуживания  $E_2/E_2/1$  работает только при коэффициентах вариации, равными  $1/\sqrt{2}$ , а система  $E_2^-/E_2^-/1$  позволяет работать при  $c_\lambda$  и  $c_\mu$  из интервала  $(0, 1/\sqrt{2})$ , что расширяет область применения этих систем. Для вывода решений использован классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли.

Обе эти системы относятся к типу G/G/1. В теории массового обслуживания исследования систем G/G/1 особо актуальны в связи с тем, что до сих пор не существует решения в конечном виде для общего случая.

Результаты работы [26] позволяют развить теорию метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) также на сдвинутые гиперэкспоненциальные и эрланговские распределения [58].

Интегральное уравнение Линдли имеет вид:

$$W(y) = \int_0^y W(y-u) dC(u), y \geq 0$$

Метод спектрального разложения решения ИУЛ составляет важную часть теории систем G/G/1. Для записи ИУЛ введем следующие обозначения:

–  $W(y)$  – функция распределения вероятностей (ФРВ) времени ожидания требования в очереди;

–  $C(u) = P(\tilde{u} < u)$  – ФРВ случайной величины  $\tilde{u} = \tilde{x} - \tilde{t}$ . Здесь  $\tilde{x}$  – случайное время обслуживания требования,  $\tilde{t}$  – случайная величина – интервал времени между поступлениями требований. Тогда одна из форм уравнения Линдли выглядит так:

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u) dC(u), & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}.$$

Кратко излагая метод решения интегрального уравнения Линдли, необходимо придерживаться подхода и символики автора классики теории массового обслуживания [27]. Для этого через  $A^*(s)$  и  $B^*(s)$  обозначим преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов между поступлениями и времени обслуживания соответственно. Суть решения ИУЛ методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1$  представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от  $s$ . Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания

необходимо следующее спектральное разложение:  
 $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ , где  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  некоторые рациональные функции от  $s$ , которые можно разложить на множители. Функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять следующим условиям согласно [27]:

1. Для  $\text{Re}(s) > 0$  функция  $\psi_+(s)$  является аналитической без нулей в этой полуплоскости;

2. Для  $\text{Re}(s) < D$  функция  $\psi_-(s)$  является аналитической без нулей в этой полуплоскости, где  $D$  – некоторая положительная константа, определяемая из условия:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{e^{-Dt}} < \infty. \quad (2.1)$$

Кроме того, функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны обладать следующими свойствами:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1. \quad (2.2)$$

Таким образом, построенные функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять условиям (2.1) и (2.2).

Для системы  $E_2/E_2/1$  законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида:

$$a(t) = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}, \quad (2.3)$$

$$b(t) = 4\mu^2 t e^{-2\mu t}. \quad (2.4)$$

Для нормированных распределений Эрланга (2.3) и (2.4) решения для среднего времени ожидания для системы  $E_2/E_2/1$  в классике по теории массового обслуживания автором работы [27] не найдено и поэтому это решение находим классическим методом спектрального разложения решения ИУЛ, как это показано в [28]. Такой подход позволяет определить не только среднее время ожидания, но и моменты высших порядков времени ожидания.

Тогда, учитывая определение джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения [29], тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию [52,60].

Преобразования Лапласа функций (2.3) и (2.4) будут соответственно:

$$A^*(s) = \left( \frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2; B^*(s) = \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2.$$

Спектральное разложение решения ИУЛ для системы E<sub>2</sub>/E<sub>2</sub>/1:  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} &= A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \left( \frac{2\lambda}{2\lambda - s} \right)^2 * \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2 - 1 = \frac{16\lambda^2\mu^2 - (2\lambda - s)^2(2\mu + s)^2}{(2\lambda - s)^2(2\mu + s)^2} = \\ &= \frac{-s[s^2 + 2(\mu - \lambda)s - 8\lambda\mu][s + 2(\mu - \lambda)]}{(2\lambda - s)^2(2\mu + s)^2}. \end{aligned}$$

Квадратное уравнение, полученное из числителя  $s^2 + 2(\mu - \lambda)s - 8\lambda\mu = 0$ , имеет один отрицательный корень, обозначенный для удобства  $-s_1$  и один положительный  $s_3$ :  $-s_1 = -(\mu - \lambda) - \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}$ , т.к. в случае стабильной системы  $\lambda < \mu$ , т.е.  $(\mu - \lambda) > 0$ ;

$$s_3 = -(\mu - \lambda) + \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}.$$

Тогда нули числителя разложения  $\psi_+(s) / \psi_-(s)$ :  $s = 0$ ;  $-s_1 = -(\mu - \lambda) - \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}$ ;  $-s_2 = -2(\mu - \lambda)$  (два отрицательных корня и один положительный корень)  $s_3 = -(\mu - \lambda) + \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}$ . Полюсы разложения  $\psi_+(s) / \psi_-(s)$ :  $s = 2\lambda$ ,  $s = -2\mu$  (см. рис. 2.1).

Теперь с учетом условий (2.1) построим функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$ :

$$\psi_+(s) = \frac{s(s + s_1)(s + s_2)}{(2\mu + s)^2}; \psi_-(s) = -\frac{(2\lambda + s)^2}{(s - s_3)}.$$

На рис.2.1 полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками.

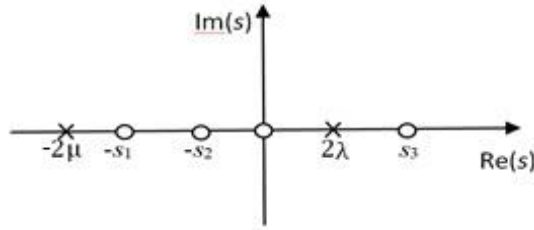


Рис.2.1 – Нули и полюсы функции  $\psi_+(s)/\psi_-(s)$  для системы  $E_2/E_2/1$

Остается проверить выполнение условий (2.2):

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\psi_-(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{2(2\lambda - s)}{2s - s_3} = -1.$$

Условия (2.2) выполнены.

Далее по методике спектрального разложения найдем константу  $K$ :

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s + s_1)(s + s_2)}{(2\mu + s)^2} = \frac{s_1 s_2}{4\mu^2}, \quad \text{где} \quad s_1 = (\mu - \lambda) + \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu},$$

$$s_2 = 2(\mu - \lambda).$$

Построим функцию – преобразование Лапласа функции распределения времени ожидания  $\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{s_1 s_2 (2\mu + s)^2}{4\mu^2 s (s + s_1)(s + s_2)}$ . Отсюда преобразование

Лапласа функции плотности времени ожидания:

$$W^*(s) = s^* \Phi_+(s) = \frac{s_1 s_2 (2\mu + s)^2}{4\mu^2 s (s + s_1)(s + s_2)}. \quad (2.5)$$

Для нахождения среднего времени ожидания необходимо найти производную от функции  $W^*(s)$  со знаком минус в точке  $s = 0$ .

Окончательно, среднее время ожидания для системы  $E_2/E_2/1$

$$\bar{W} = \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} - \frac{1}{\mu}, \quad (2.6)$$

где корни  $s_1 = (\mu - \lambda) + \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}$ ,  $s_2 = 2(\mu - \lambda)$  определяются через параметры распределений (2.3) и (2.4).

Далее необходимо произвести расчет среднего времени ожидания в системе  $E_2/E_2/1$  с временными сдвигами.



Необходимо рассмотреть систему массового обслуживания  $E_2^-/E_2^-/1$ , для которой законы распределения входного потока и времени обслуживания заданы функциями плотности:

$$a(t) = 4\lambda^2 (t-t_0) e^{-2\lambda(t-t_0)}, \quad (2.7)$$

$$b(t) = 4\mu^2 (t-t_0) e^{-2\mu(t-t_0)}. \quad (2.8)$$

Спектральное разложение решения ИУЛ для такой системы  $A^*(-s) * B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$  имеет точно такой же вид, как и для системы  $E_2/E_2/1$ .

Преобразование Лапласа функции (2.7) имеет вид:  $A^*(-s) = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda-s}\right)^2 e^{t_0 s}$ , а функции (2.8):  $B^*(s) = \left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2 e^{-t_0 s}$ .

Тогда выражение:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda-s}\right)^2 e^{t_0 s} \times \left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2 e^{-t_0 s} - 1 = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda-s}\right)^2 \left(\frac{2\mu}{2\mu+s}\right)^2 - 1.$$

Здесь показатели степени у экспонент обнуляются и, тем самым, операция сдвига в спектральном разложении нивелируется. Таким образом, для системы  $E_2^-/E_2^-/1$  справедливы все выкладки, проведенные для системы  $E_2/E_2/1$ , но уже с измененными вследствие операции сдвига параметрами  $\lambda$  и  $\mu$ .

Для определения неизвестных параметров распределения  $E_2^-$  воспользуемся преобразованием Лапласа функции (2.7). Среднее значение интервала между поступлениями дает первая производная от преобразования Лапласа со знаком минус в точке  $s=0$ :

$$-\left. \frac{dA^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = \left[ \frac{8\lambda^2}{(2\lambda+s)^3} e^{-t_0 s} + \left(\frac{2\lambda}{2\lambda+s}\right)^2 t_0 e^{t_0 s} \right]_{s=0} = 1/\lambda + t_0.$$

Отсюда получим средний интервал

$$\bar{\tau}_\lambda = \lambda^{-1} + t_0. \quad (2.9)$$

Второй начальный момент интервала между поступлениями

$$\left. \frac{d^2 A^*(s)}{ds^2} \right|_{s=0} = \frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2, \quad \text{отсюда} \quad \overline{\tau_\lambda^2} = \frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2. \quad \text{Определим квадрат}$$

коэффициента вариации

$$c_\lambda^2 = \frac{\overline{\tau_\lambda^2} - (\overline{\tau_\lambda})^2}{(\overline{\tau_\lambda})^2} = \frac{1}{2(1+\lambda t_0)^2}.$$

Отсюда

$$c_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\lambda t_0)}. \quad (2.10)$$

Отметим, что для распределения Эрланга второго порядка:  $\overline{\tau_\lambda} = 1/\lambda$ ,  $c_\lambda = 1/\sqrt{2}$ . Сравнивая результаты числовых характеристик  $\overline{\tau_\lambda}$ ,  $c_\lambda$  для распределений  $E_2$  и  $E_2^-$  можно увидеть разницу между ними, полученную в результате сдвига законов распределений на величину  $t_0 > 0$ .

Коэффициент вариации для распределения  $E_2^-$ :  $c_\lambda$  уменьшается при сдвиге в  $(1+\lambda t_0)$  раз по сравнению с коэффициентом  $c_\lambda$  для распределения  $E_2$ .

Для времени обслуживания по закону  $E_2^-$  получим аналогичные выражения для интенсивности обслуживания  $\mu$  и коэффициента вариации  $c_\mu$ :

$$\overline{\tau_\mu} = \mu^{-1} + t_0, \quad (2.11)$$

$$c_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\mu t_0)}. \quad (2.12)$$

Учитывая, что среднее время ожидания в системе G/G/1 связано с коэффициентами вариаций времени между поступлениями требований и времени обслуживания квадратичной зависимостью, в системе с временными сдвигами – время ожидания будет меньше, чем в обычной системе [49].

Теперь, исходя из полученных параметров распределения для системы  $E_2^- / E_2^- / 1$ , время ожидания для нее определяем из выражения:

$$\overline{W} = \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} - \frac{1}{\mu}, \quad (2.13)$$

где  $\mu = 1/(\bar{\tau}_\mu - t_0)$ ,  $s_1 = (\mu - \lambda) + \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}$ ,  $s_2 = (2\mu - \lambda)$ .

За входные параметры для системы  $E_2^-/E_2^-/1$  в расчетах удобнее взять:

–  $\bar{\tau}_\lambda$  – средний интервал между соседними требованиями входного потока; –  $\bar{\tau}_\mu$  – среднее время обслуживания; –  $t_0$  – параметр сдвига.

Тогда коэффициент загрузки определяется отношением средних интервалов:  $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$ , в отличие от системы  $E_2/E_2/1$ , в котором  $\rho$  определяется отношением  $\rho = \lambda/\mu$  [50].

В таблице 2.1 приведены данные расчетов для системы  $E_2^-/E_2^-/1$  для малой ( $\rho = 0.1$ ), средней ( $\rho = 0.5$ ) и высокой нагрузки ( $\rho = 0.9$ ).

Таблица 2.1. Результаты численных экспериментов для СМО  $E_2^-/E_2^-/1$  и  $E_2/E_2/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
$\rho$	$c_\lambda$	$c_\mu$	$t_0$	Для $E_2^-/E_2^-/1$	Для $E_2/E_2/1$
0,1	0,64	0,07	0,9	0,000	0,017
	0,67	0,35	0,5	0,002	
	0,70	0,64	0,1	0,013	
	0,71	0,70	<b>0,01</b>	<b>0,016</b>	
0,5	0,39	0,07	0,9	0,001	0,390
	0,53	0,35	0,5	0,081	
	0,67	0,64	0,1	0,309	
	0,70	0,70	<b>0,01</b>	<b>0,382</b>	
0,9	0,13	0,07	0,9	0,034	4,359
	0,39	0,35	0,5	1,057	
	0,64	0,64	0,1	3,519	
	0,70	0,70	<b>0,01</b>	<b>4,271</b>	

Для сравнения в правой колонке приведены данные для обычной системы  $E_2/E_2/1$ . Среднее время ожидания в системе с временными сдвигами  $E_2^-/E_2^-/1$ , как и ожидалось, меньше, чем в системе  $E_2/E_2/1$ , и при убывании значения параметра сдвига  $t_0 > 0$  приближается к среднему времени ожидания в обычной системе.

Систему  $E_2^-/E_2^-/1$  для анализа телетрафика можно использовать в том случае, если коэффициенты вариации интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  меньше либо равны  $1/\sqrt{2}$ .

В отличие от обычной системы  $E_2/E_2/1$ , систему  $E_2^-/E_2^-/1$  можно использовать для диапазона изменения коэффициентов вариаций интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  от 0 до  $1/\sqrt{2}$ .

Система  $E_2^-/E_2^-/1$  на выходе обеспечивает меньшее время ожидания, чем обычная система  $E_2/E_2/1$  за счет уменьшения коэффициентов вариаций интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  в результате сдвига законов распределения на величину  $t_0 > 0$  [36].

## **2.2 Исследование двух систем массового обслуживания $M/E_2/1$ и $M/E_2/1$ с временными сдвигами**

В теории телетрафика часто используют СМО типа  $M/G/1$  и  $G/G/1$ . Исследования последних актуальны до сих пор в связи с тем, что нельзя получить решения для среднего времени ожидания в очереди в конечном виде в общем случае [37,38].

В данном разделе представлены результаты по двум системам массового обслуживания: для обычной системы  $M/E_2/1$  с экспоненциальными и эрланговскими входными распределениями, а также этой системы с учетом временных сдвигов (с сдвинутыми вправо от нулевой точки распределениями).

Операция сдвига законов распределений в данном случае трансформирует систему  $M/G/1$  в систему типа  $G/G/1$  вследствие уменьшения коэффициента вариации интервалов входного потока в систему. Как оказалось, для рассматриваемых законов распределений используемый метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли

для систем  $G/G/1$  позволяет получить решение для среднего времени ожидания в конечном виде [39].

Показано, что в такой системе с временными сдвигами среднее время ожидания требований в очереди может быть во много раз меньше, чем в аналогичной обычной системе. Это следует из того, что операция сдвига во времени законов распределений уменьшает величину коэффициентов вариаций интервалов между поступлениями и времени обслуживания. В то же время известно, что среднее время ожидания требований в очереди к системе зависит прямо пропорционально от квадратов этих коэффициентов вариаций.

Классическая система  $M/E_2/1$  работает только при  $c_\lambda = 1$  и  $c_\mu = 1/\sqrt{2}$ , а СМО с учетом временных сдвигов позволяет работать с коэффициентами вариаций интервалов поступления в диапазоне  $c_\lambda \in (0, 1)$  и коэффициентами вариаций времени обслуживания из интервала  $c_\mu \in (0, 1/\sqrt{2})$ , что резко расширяет область применения этих систем. Для вывода решений по среднему времени ожидания в очереди использован классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли [40].

Рассмотрим классическую СМО  $M/E_2/1$  с экспоненциальным и эрланговским входными распределениями и  $M^-/E_2^-/1$  с учетом временных сдвигов. Первая система относится к типу  $M/G/1$ , а вторая  $G/G/1$ . Стоит отметить, что в теории массового обслуживания исследования систем  $G/G/1$  особо актуальны в связи с тем, что до сих пор не существует решения в конечном виде для общего случая.

В работе авторов [26] впервые приведены результаты по исследованию системы  $M/M/1$  со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями. Также в этой работе показано, что среднее время ожидания требования в очереди в системе  $M/M/1$  с временными сдвигами меньше, чем в классической системе  $M/M/1$  при одинаковом коэффициенте загрузки за

счет того, что коэффициенты вариации времен поступления  $c_\lambda$  и обслуживания  $c_\mu$  становятся меньше единицы при параметре  $t_0 > 0$ .

Результаты работы [26] совместно с классикой теории массового обслуживания [42] позволяют развить теорию метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) также на сдвинутое эрланговское распределение.

При решении задачи методом спектрального разложения решения ИУЛ будем использовать символику [42]. Для этого через  $A^*(s)$  и  $B^*(s)$  обозначим преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов между поступлениями и времени обслуживания соответственно. Необходимо найти для выражения  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1$  представление в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от  $s$ . Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо следующее спектральное разложение:  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ , где  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  некоторые рациональные функции от  $s$ , которые можно разложить на множители [43].

Построенные функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять условиям (2.1) и (2.2).

Рассмотрим систему M/E<sub>2</sub>/1 и вывод решения для среднего времени ожидания.

Для системы M/E<sub>2</sub>/1 законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида:

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (2.14)$$

$$b(t) = 4\mu^2 t e^{-2\mu t}. \quad (2.15)$$

Для такого общего вида задания функции (2.15), решения для среднего времени ожидания для системы M/E<sub>2</sub>/1 в классике по теории массового обслуживания не найдено, и поэтому это решение находим классическим методом спектрального разложения решения ИУЛ. Такой подход позволяет

определить не только среднее время ожидания, но и моменты высших порядков времени ожидания [44].

Тогда, учитывая определение джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения, тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию.

Преобразования Лапласа функций (2.14) и (2.15) будут соответственно:

$$A^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}; \quad B^*(s) = \left( \frac{2\mu}{2\mu + s} \right)^2.$$

В связи с тем, что эта система M/E<sub>2</sub>/1 относится к классу систем M/G/1, воспользуемся результатом для данной системы. Среднее время ожидания в системе M/G/1 дается формулой Полячека – Хинчина [27]:

$$\bar{W} = \frac{\lambda \overline{\tau_\mu^2}}{2(1-\rho)}, \quad (2.16)$$

где  $\lambda$  – интенсивность входного потока,  $\overline{\tau_\mu^2}$  – 2-й начальный момент времени обслуживания;  $\rho$  – коэффициент загрузки  $0 < \rho < 1$ . Для распределения Эрланга 2-го порядка E<sub>2</sub> – 2-й начальный момент времени обслуживания  $\overline{\tau_\mu^2} = 3/(2\mu^2)$ , тогда среднее время ожидания в системе M/E<sub>2</sub>/1 окончательно равно:

$$\bar{W} = \frac{3\rho}{4\mu(1-\rho)}. \quad (2.17)$$

Результатом (2.17) воспользуемся при исследовании системы M<sup>-</sup>/E<sub>2</sub><sup>-</sup>/1.

Для системы M<sup>-</sup>/E<sub>2</sub><sup>-</sup>/1 функциями плотностей распределений интервалов будут сдвинутые вправо от нулевой точки распределения:

– для входного потока :

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad (2.18)$$

– для времени обслуживания :

$$b(t) = 4\mu^2 (t-t_0) e^{-2\mu(t-t_0)}. \quad (2.19)$$

Для вывода решения по среднему времени ожидания для данной системы используем классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) [45].

Преобразование Лапласа функции (2.18) равно  $A^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} e^{-t_0 s}$ , а для функции (2.19)  $B^*(s) = \left(\frac{2\mu}{2\mu + s}\right)^2 e^{-t_0 s}$ . Тогда спектральное разложение:

$A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$  для рассматриваемой системы примет вид:

$$A^*(-s) \times B^*(s) - 1 = \frac{\lambda}{\lambda - s} e^{t_0 s} \left(\frac{2\mu}{2\mu + s}\right)^2 e^{-t_0 s} - 1 = \frac{\lambda}{\lambda - s} \times \left(\frac{2\mu}{2\mu + s}\right)^2 - 1 = \frac{s[s^2 + (4\mu - \lambda)s + 4\mu(\mu - \lambda)]}{(\lambda - s)(2\mu + s)^2}.$$

Показатели степени у экспонент обнуляются и операция сдвига тем самым нивелируется.

Квадратный трехчлен в числителе разложения  $s^2 + (4\mu - \lambda)s + 4(\mu^2 - \lambda\mu)$ , где  $4\mu(\mu - \lambda) > 0$  и  $(4\mu - \lambda) > 0$  при  $\mu > \lambda$  в случае стабильной системы, имеет два действительных отрицательных, которые для удобства обозначим  $-s_1, -s_2$ :

$$-s_1 = -(4\mu - \lambda) / 2 + \sqrt{[(4\mu - \lambda) / 2]^2 - 4\mu(\mu - \lambda)},$$

$$-s_2 = -(4\mu - \lambda) / 2 - \sqrt{[(4\mu - \lambda) / 2]^2 - 4\mu(\mu - \lambda)}.$$

Тогда окончательный вид спектрального разложения будет:

$$A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{s(s + s_1)(s + s_2)}{(\lambda - s)(2\mu + s)^2}.$$

На рис. 2.2 отображены нули и полюсы отношения на комплексной  $s$ -плоскости для исключения ошибок построения спектрального разложения.

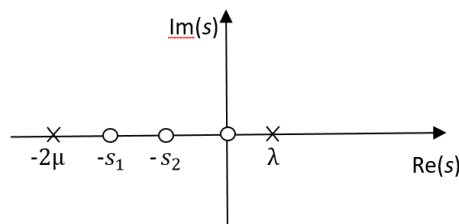


Рис.2.2 – Нули и полюсы функции  $\psi_+(s) / \psi_-(s)$  для системы М/Е<sub>2</sub>/1



Здесь полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками.

Исходя из правил построения функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  (2.1), (2.2), выбираем  $\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(2\mu+s)^2}$ ,  $\psi_-(s) = \lambda - s$ . Теперь выполнение условий (2.1), (2.2) для построенных функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  очевидно. Далее по методике спектрального разложения находим константу

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \frac{s_1 s_2}{4\mu^2} = \frac{4\mu(\mu - \lambda)}{4\mu^2} = 1 - \rho,$$

которая, физически совпадает с вероятностью того, что поступающее в систему требование застанет ее свободной.

Далее строим функцию  $\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{(1-\rho)(2\mu+s)^2}{s(s+s_1)(s+s_2)}$ . Откуда следует, что преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания в системе  $M^*/E_2/1$  будет иметь вид:

$$W^*(s) = s^* \Phi_+(s) = \frac{(1-\rho)(2\mu+s)^2}{(s+s_1)(s+s_2)}. \quad (2.20)$$

Уравнением Полячека – Хинчина для преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания для системы  $M/G/1$ :

$$W^*(s) = \frac{s(1-\rho)}{s-\lambda + \lambda B^*(s)}, \quad (2.21)$$

где  $B^*(s)$  преобразование Лапласа функции плотности времени обслуживания. Теперь предстоит доказать тождественность выражений (2.20) и (2.21). В нашем случае  $B^*(s) = 4\mu^2 / (s+2\mu)^2$  и после подстановки этой функции в (2.21) получим:

$$W^*(s) = \frac{s(1-\rho)}{s-\lambda + \lambda[2\mu / (2\mu+s)]^2} = \frac{s(1-\rho)(2\mu+s)^2}{(s-\lambda)(2\mu+s)^2 + 4\lambda\mu^2} = \frac{(1-\rho)(2\mu+s)^2}{(s+s_1)(s+s_2)},$$

так как знаменатель раскладывается на множители вида:

$$(s-\lambda)(2\mu+s)^2 + 4\lambda\mu^2 = s[s^2 + (4\mu-\lambda)s + 4\mu(\mu-\lambda)] = s(s+s_1)(s+s_2).$$

Следовательно, равенства (2.19) и (2.20) абсолютно тождественны.

Далее необходимо определить числовые характеристики распределений  $E_2^-$  (2.18) и  $M^-$  (2.19). Они нужны, в свою очередь, для определения неизвестных параметров распределений (2.18) и (2.19) по известному методу моментов.

Числовые характеристики сдвинутого экспоненциального распределения  $M^-$  приведены в работе [27]. Средний интервал поступлений равен

$$\bar{\tau}_\lambda = \lambda^{-1} + t_0, \quad (2.22)$$

Коэффициент вариации интервалов поступлений равен

$$c_\lambda = (1 + \lambda t_0)^{-1}. \quad (2.23)$$

Для определения числовых характеристик сдвинутого распределения Эрланга  $E_2^-$  воспользуемся свойством преобразования Лапласа функции плотности воспроизводить моменты [50]:

$$-\frac{dB^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} = -\frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{2\mu}{2\mu+s} \right)^2 e^{-t_0 s} \right] \Big|_{s=0} = \left[ \frac{8\mu^2}{(2\mu+s)^3} e^{-t_0 s} + \left( \frac{2\mu}{2\mu+s} \right)^2 t_0 e^{t_0 s} \right] \Big|_{s=0} = 1/\mu + t_0.$$

Отсюда среднее время обслуживания требований:

$$\bar{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0. \quad (2.24)$$

Найдя вторую производную от преобразования Лапласа функции (2.19) при  $s=0$  определим 2-й начальный момент интервала между поступлениями

$$\frac{d^2 B^*(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{3}{2\mu^2} + 2\frac{t_0}{\mu} + t_0^2. \text{ Отсюда определим коэффициент вариации времени}$$

обслуживания:

$$c_\mu = \left[ \sqrt{2} (1 + \mu t_0) \right]^{-1}. \quad (2.25)$$

Теперь оценим влияние параметра сдвига на числовые характеристики рассматриваемых распределений.

Для интервалов поступлений по закону  $M^-$  коэффициент вариации  $c_\lambda$  уменьшается при сдвиге в  $(1+\lambda t_0)$  раз по сравнению с коэффициентом  $c_\lambda = 1$  для распределения  $M$ .

Коэффициент вариации времени обслуживания для распределения  $E_2^-$ :  $c_\mu$  уменьшается при сдвиге в  $(1+\mu t_0)$  раз по сравнению с коэффициентом  $c_\mu = 1/\sqrt{2}$  для распределения  $E_2$ .

Учитывая, что среднее время ожидания в системе  $G/G/1$  связано с коэффициентами вариаций времени между поступлениями требований и времени обслуживания квадратичной зависимостью, в системе с временными сдвигами время ожидания будет меньше, чем в обычной системе.

Таким образом, для определения среднего времени ожидания мы можем использовать формулу (2.17) с параметрами  $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$ , где  $\bar{\tau}_\lambda$  и  $\bar{\tau}_\mu$  определены (2.22) и (2.24), а  $\mu$  определяем из (2.24) при заданных  $\bar{\tau}_\mu$ ,  $\bar{\tau}_\lambda$  и параметре сдвига  $t_0$ . В качестве входных параметров для расчета системы  $M^- / E_2^- / 1$  удобнее брать  $\bar{\tau}_\lambda$ ,  $\bar{\tau}_\mu$ ,  $c_\lambda$ ,  $c_\mu$  и  $t_0$ .

Диапазоны изменения коэффициентов вариаций определяются соответственно выражениями (2.23) и (2.25):  $c_\lambda \in (0,1)$ , а  $c_\mu \in (0, 1/\sqrt{2})$  в зависимости от величины параметра сдвига  $t_0 > 0$ .

В таблице 2.2 представлены расчеты для системы  $M^- / E_2^- / 1$  для случаев малой, средней и высокой нагрузок  $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$  при значениях параметра сдвига  $t_0: 0,01; 0,1; 0,5; 0,9$ , что обеспечивает определенные значения коэффициентов вариаций входного потока  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  согласно равенствам (2.23) и (2.25).

С уменьшением параметра сдвига  $t_0$ , среднее время ожидания в системе  $M^- / E_2^- / 1$  стремится к значению среднего времени ожидания в системе  $M / E_2 / 1$ .

Таблица 2.2 Результаты численных экспериментов для СМО  $M/E_2/1$  и

$$M^- / E_2^- / 1$$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
$\rho$	$c_\lambda$	$c_\mu$	$t_0$	Для $M^- / E_2^- / 1$	Для $M/E_2/1$
0,1	0,643	0,071	0,9	0,001	0,083
	0,950	0,354	0,5	0,021	
	0,990	0,636	0,1	0,068	
	0,999	0,700	<b>0,01</b>	<b>0,082</b>	
0,5	0,550	0,071	0,9	0,008	0,75
	0,750	0,354	0,5	0,188	
	0,950	0,636	0,1	0,608	
	0,995	0,700	<b>0,01</b>	<b>0,735</b>	
0,9	0,190	0,071	0,9	0,068	6,75
	0,550	0,354	0,5	1,688	
	0,910	0,636	0,1	5,468	
	0,991	0,700	<b>0,01</b>	<b>6,616</b>	

Как и следовало ожидать, уменьшение коэффициентов вариации  $c_\lambda$  и  $c_\mu$  влечет за собой уменьшение времени ожидания.

Введение операции сдвига во времени, с одной стороны, приводит к увеличению загрузки системы с временными сдвигами. Для системы  $M^- / E_2^- / 1$  с временными сдвигами загрузка увеличивается в  $(1 + \mu t_0) / (1 + \lambda t_0)$  раз по сравнению с обычной системой  $M/E_2/1$ .

Операция сдвига во времени, с другой стороны, уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. В связи с тем, что среднее время ожидания в системе  $G/G/1$  связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в системе с временными сдвигами будет меньше, чем в обычной системе при одинаковом коэффициенте загрузки. Например, для системы  $M^- / E_2^- / 1$  при загрузке  $\rho=0,9$  и параметре сдвига  $t_0=0,9$  коэффициент вариации интервалов поступления  $c_\lambda$  уменьшается с 1 для обычной системы до 0,19, коэффициент

вариации времени обслуживания  $c_\mu$  уменьшается с  $1/\sqrt{2}$  до 0,071, а время ожидания уменьшается с 6,75 единиц времени для обычной системы до 0,19 единиц времени.

Изложенные результаты справедливы только для одинаковых параметров сдвига  $t_0$  для распределения интервалов между поступлениями требований и времени обслуживания.

### **2.3 Система массового обслуживания $E_2/M/1$ с обычными и сдвинутыми входными распределениями**

В теории массового обслуживания исследования систем  $G/M/1$  и  $G/G/1$  особо актуальны в связи с тем, что до сих пор не существует решения в конечном виде в общем случае. Рассмотрим результаты по системам массового обслуживания  $G/M/1$  и  $G/G/1$  соответственно: системы  $E_2/M/1$  с эрланговскими и экспоненциальными входными распределениями, а также системы  $E_2^-/M^-/1$  с временными сдвигами. В качестве входных распределений для системы с временными сдвигами выбраны сдвинутое вправо от нулевой точки распределение Эрланга 2-го порядка и также сдвинутое экспоненциальное распределение [54].

Для таких законов распределений классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для систем  $G/G/1$  позволяет получить решение в замкнутой форме. Показано, что в такой системе среднее время ожидания требований в очереди меньше, чем в обычной системе. Это связано с тем, что операция сдвига во времени уменьшает величину коэффициентов вариаций интервалов между поступлениями и времени обслуживания, а как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания требований связано с этими коэффициентами вариаций квадратичной зависимостью.

Классическая система  $E_2/M/1$  работает только при  $c_\lambda = 1/\sqrt{2}$ , и  $c_\mu = 1$ , а система  $E_2^-/M^-/1$  позволяет работать с коэффициентами вариаций

интервалов поступления в диапазоне  $(0, 1/\sqrt{2})$  и коэффициентами вариаций времени обслуживания из интервала  $(0, 1)$ , что расширяет область применения этих систем. Для вывода решений использован классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли [55].

Система  $E_2/M/1$  относятся к типу  $G/M/1$ , а  $E_2/M/1$  с временными сдвигами к  $G/G/1$ . В теории массового обслуживания исследования систем  $G/G/1$  и  $G/M/1$  особо актуальны в связи с тем, что до сих пор не существует решения в конечном виде для общего случая [57].

Среднее время ожидания требования в очереди в системе  $M/M/1$  с сдвигами во времени меньше, чем в классической системе  $M/M/1$  при одинаковом коэффициенте загрузки за счет того, что коэффициенты вариации времен поступления  $c_\lambda$  и обслуживания  $c_\mu$  становятся меньше единицы при параметре  $t_0 > 0$ .

Метод спектрального разложения решения ИУЛ составляет важную часть теории систем  $G/G/1$ .

При кратком изложении метода решения ИУЛ будем придерживаться подхода и символики [27]. Для этого через  $A^*(s)$  и  $B^*(s)$  обозначим преобразования Лапласа функций плотности распределения интервалов между поступлениями и времени обслуживания соответственно. Суть решения ИУЛ методом спектрального разложения состоит в нахождении для выражения  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1$  представления в виде произведения двух множителей, которое давало бы рациональную функцию от  $s$ . Следовательно, для нахождения закона распределения времени ожидания необходимо следующее спектральное разложение:  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ , где  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  некоторые рациональные функции от  $s$ , которые можно разложить на множители. Функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять

следующим условиям указанным ранее, т.е. построенные функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять условиям (2.1) и (2.2).

Для системы  $E_2/M/1$  законы распределения интервалов входного потока и времени обслуживания задаются функциями плотности вида:

$$a(t) = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}, \quad (2.26)$$

$$b(t) = \mu e^{-\mu t}. \quad (2.27)$$

Для такого общего вида задания функций (2.26) решения для среднего времени ожидания для системы  $E_2/M/1$  в классике по теории массового обслуживания автором [27] не найдено и поэтому это решение находим классическим методом спектрального разложения решения ИУЛ. Такой подход позволяет определить не только среднее время ожидания, но и моменты высших порядков времени ожидания.

Тогда, учитывая определение джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения, тем самым, получим возможность определения джиттера через дисперсию.

Преобразования Лапласа функций (2.26) и (2.27) будут соответственно:

$$A^*(s) = \left( \frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2; \quad B^*(s) = \frac{\mu}{\mu + s}.$$

Для применения метода спектрального разложения воспользуемся результатами [27] для систем общего вида  $G/M/1$ , к которым принадлежит система  $E_2/M/1$ . Выражение для спектрального разложения решения ИУЛ для системы  $G/M/1$  задается в виде:

$$A^*(-s) * B^*(s) - 1 = \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[ \frac{\mu A^*(-s) - s - \mu}{s(s + s_1)} \right] \left[ \frac{s(s + s_1)}{s + \mu} \right], \quad (2.28)$$

где  $s = -s_1$  – единственный отрицательный корень уравнения  $s + \mu - \mu A^*(-s) = 0$ .

Выражение в первых скобках не имеет ни плюсов, ни нулей в области  $\text{Re}(s) \leq 0$  кроме  $s = 0$  и  $s = -s_1$ . Поэтому, учитывая условия (2.1) и (2.2) за функцию  $\psi_+(s)$  примем выражение во вторых скобках, т.к. его нули  $s = 0$ ,

$s = -s_1$ . и полюс  $s = -\mu$  лежат в области  $\text{Re}(s) \leq 0$ , а за функцию  $\psi_-(s)$  – выражение в первых скобках:

$$\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)}{s+\mu}, \quad \psi_-(s) = \frac{-s(s+s_1)}{s+\mu-\mu A^*(-s)}.$$

Для окончательного построения функции  $\psi_-(s)$  подставим в неё выражение

$$A^*(-s) = \left( \frac{2\lambda}{2\lambda+s} \right)^2: \quad \psi_-(s) = \frac{-s(s+s_1)}{s+\mu-\mu \times [4\lambda^2 / (2\lambda-s)^2]} = \frac{-(s+s_1)(2\lambda-s)^2}{(s+s_1)(s-s_2)} = -\frac{(2\lambda-s)^2}{s-s_2}, \quad (2.29)$$

так как квадратное уравнение  $s^2 + (\mu - 4\lambda)s + 4\lambda(\lambda - \mu) = 0$ , полученное из знаменателя, имеет один отрицательный корень  $-s_1 = -(\mu - 4\lambda)/2 - \sqrt{[(\mu - 4\lambda)/2]^2 + 4\lambda(\mu - \lambda)}$  и один положительный корень  $s_2 = (4\lambda - \mu)/2 + \sqrt{[(\mu - 4\lambda)/2]^2 + 4\lambda(\mu - \lambda)}$ . В случае стабильной системы при  $\lambda < \mu$  выполнено условие  $4\lambda(\mu - \lambda) > 0$ .

Теперь выполнение условия (2.1) для построенных функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  очевидно. Это подтверждает и рисунок, где отображены нули и полюсы отношения  $\psi_+(s)/\psi_-(s)$  на комплексной  $s$  – плоскости для исключения ошибок построения спектрального разложения. На рис. 2.3 полюсы отмечены крестиками, а нули – кружками.

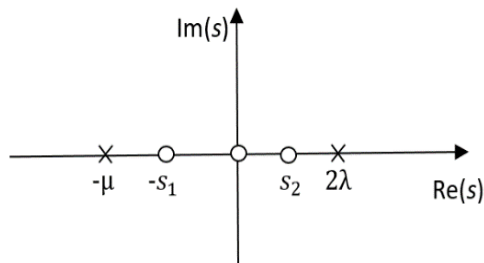


Рис. 2.3 – Нули и полюсы функции  $\psi_+(s)/\psi_-(s)$  для системы  $E_2/M/1$



Остается проверить выполнение условий (2.2):  $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\Psi_+(s)}{s} = 1$ ,

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{\Psi_-(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{(2\lambda - s)^2}{s(s-2)} = -1, \text{ следовательно, эти условия также выполнены.}$$

Далее по методике спектрального разложения найдем константу  $K$ :

$$K = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\Psi_+(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{s + s_1}{s + \mu} = \frac{s_1}{\mu}. \quad \text{Построим функцию } \Phi_+(s) = K / \Psi_+(s):$$

$$\Phi_+(s) = \frac{s_1(s + \mu)}{\mu s(s + s_1)}.$$

Отсюда преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания:

$$W^*(s) = s * \Phi_+(s) = \frac{s_1(s + \mu)}{\mu(s + s_1)}.$$

Для нахождения среднего времени ожидания найдем производную от функции  $W^*(s)$  со знаком минус в точке  $s = 0$ .

Окончательно, среднее время ожидания для системы  $E_2/M/1$  равно:

$$\bar{W} = 1/s_1 - 1/\mu, \quad (2.30)$$

где  $s_1 = (\mu - 4\lambda)/2 + \sqrt{[(\mu - 4\lambda)/2]^2 + 4\lambda(\mu - \lambda)}$  абсолютное значение корня  $-s_1$ .

Рассмотрим систему  $E_2/M/1$  с временными сдвигами, для которой законы распределения входного потока и времени обслуживания заданы функциями плотности:

$$a(t) = 4\lambda^2(t - t_0)e^{-2\lambda(t - t_0)}, \quad (2.31)$$

$$b(t) = \mu e^{-\mu(t - t_0)}. \quad (2.32)$$

Такую систему мы уже обозначили выше  $E_2^-/M^-/1$ .

Спектральное разложение решения ИУЛ для системы  $E_2^-/M^-/1$   $A^*(-s) * B^*(s) - 1 = \Psi_+(s) / \Psi_-(s)$  имеет точно такой же вид, что и для системы  $E_2/M/1$ .

Преобразование Лапласа функции (2.31) имеет вид:

$$A^*(s) = \left( \frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2 e^{-t_0 s},$$

а функции (2.32):

$$B^*(s) = \frac{\mu}{\mu + s} e^{-t_0 s}.$$

Из предыдущего раздела следует, что для системы  $E_2/M/1$  спектральное разложение имеет вид:

$$\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} = -\frac{s(s+s_1)(s-s_2)}{(2\lambda-s)^2(s+\mu)}.$$

Для системы  $E_2^-/M^-/1$  имеем:

$$A^*(-s) \times B^*(s) - 1 = \left( \frac{2\lambda}{2\lambda - s} \right)^2 e^{t_0 s} \times \frac{\mu}{\mu + s} e^{-t_0 s} - 1 = \left( \frac{2\lambda}{2\lambda - s} \right)^2 \times \frac{\mu}{\mu - s} - 1.$$

Здесь показатели степени у экспонент обнуляются и тем самым операция сдвига в спектральном разложении нивелируется. Спектральные разложения решения ИУЛ, а также преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания (2.28) для обеих систем  $E_2/M/1$  и  $E_2^-/M^-/1$  совпадают.

Далее необходимо определить числовые характеристики распределений  $E_2^-$  (2.31) и  $M^-$  (2.32). Они нужны, в свою очередь, для определения неизвестных параметров распределений (2.31) и (2.32) по известному методу моментов.

Для определения их числовых характеристик  $E_2^-$  и  $M^-$  воспользуемся свойством преобразования Лапласа функции плотности воспроизводить моменты:

$$-\frac{dA^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} = -\frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2 e^{-t_0 s} \right] \Big|_{s=0} = \left[ \frac{8\lambda^2}{(2\lambda + s)^3} e^{-t_0 s} + \left( \frac{2\lambda}{2\lambda + s} \right)^2 t_0 e^{t_0 s} \right] \Big|_{s=0} = 1/\lambda + t_0.$$

Отсюда среднее значение интервала между поступлениями требований:  $\bar{\tau}_\lambda = \lambda^{-1} + t_0$ . Найдя вторую производную от преобразования Лапласа функции (2.31) при  $s=0$ , определим 2-й начальный момент интервала между

поступлениями  $\left. \frac{d^2 A^*(s)}{ds^2} \right|_{s=0} = \frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2$ . Отсюда определим коэффициент вариации:  $c_\lambda = 1/\sqrt{2}(1 + \lambda t_0)$ .

Второй начальный момент интервала между поступлениями:

$\left. \frac{d^2 A^*(s)}{ds^2} \right|_{s=0} = \frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2$ , откуда  $\overline{\tau_\lambda^2} = \frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2$ . Отсюда определим

коэффициент вариации

$$c_\lambda = 1/\sqrt{2}(1 + \lambda t_0). \quad (2.33)$$

Поступив аналогично для распределения  $M^-$  с преобразованием Лапласа функции (2.32), получим среднее значение времени обслуживания  $\overline{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0$  и коэффициента вариации

$$c_\mu = 1/(1 + \mu t_0). \quad (2.34)$$

Заметим, что для распределения  $E_2^-$ :  $\overline{\tau}_\lambda = \lambda^{-1}$ ,  $c_\lambda = 1/\sqrt{2}$ . Сравнивая результаты числовых характеристик  $\overline{\tau}_\lambda$ ,  $c_\lambda$  для распределений  $E_2$  и  $E_2^-$  можно увидеть разницу между ними, полученную в результате сдвига законов распределений на величину  $t_0 > 0$ .

Коэффициент вариации для распределения  $E_2^-$ :  $c_\lambda$  уменьшается при сдвиге в  $(1 + \lambda t_0)$  раз по сравнению с коэффициентом  $c_\lambda$  для распределения  $E_2$ .

Для времени обслуживания по закону  $M^-$  коэффициент вариации  $c_\mu$  уменьшается при сдвиге в  $(1 + \mu t_0)$  раз по сравнению с коэффициентом  $c_\mu$  для распределения  $M$ .

Теперь, исходя из полученных параметров распределения для системы  $E_2^-/M^-/1$ , время ожидания для нее определяем из выражения (2.30), где:

$$\lambda = 1/(\overline{\tau}_\lambda - t_0), \quad \mu = 1/(\overline{\tau}_\mu - t_0), \quad s_1 = (\mu - 4\lambda)/2 + \sqrt{[(\mu - 4\lambda)/2]^2 + 4\lambda(\mu - \lambda)}.$$

Теперь, задав в качестве входных параметров для расчета системы  $E_2^-/M^-/1$  полученные выше значения  $\overline{\tau}_\lambda$ ,  $\overline{\tau}_\mu$ ,  $c_\lambda$ ,  $c_\mu$ ,  $t_0$ , можно рассчитать

среднее время ожидания по выражению (2.30) для диапазонов изменения коэффициентов вариаций  $c_\lambda \in (0, 1/\sqrt{2})$  и  $c_\mu \in (0, 1)$ , определяемыми выражениями (2.33) и (2.34) соответственно в зависимости от величины параметра сдвига  $t_0 > 0$ .

В таблице 2.3 приведены данные расчетов для систем  $E_2^-/M^-/1$  для малой ( $\rho = 0.1$ ), средней ( $\rho = 0.5$ ) и высокой нагрузки ( $\rho = 0.9$ ) и параметре сдвига  $t_0 = 0,01; 0,1; 0,5; 0,9$ .

Для того, чтобы было возможно оценить результат, в правой колонке приведены данные для системы  $E_2/M/1$ .

Таблица 2.3. Результаты численных экспериментов для СМО  $E_2^-/M^-/1$  и  $E_2/M/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
$\rho$	$c_\lambda$	$c_\mu$	$t_0$	Для $E_2^-/E_2^-/1$	Для $E_2/E_2/1$
0,1	0,64	0,1	0,9	0,000	0,030
	0,67	0,5	0,5	0,005	
	0,70	0,9	0,1	0,023	
	0,71	0,99	<b>0,01</b>	<b>0,029</b>	
0,5	0,39	0,1	0,9	0,003	0,618
	0,53	0,5	0,5	0,132	
	0,67	0,9	0,1	0,491	
	0,70	0,99	<b>0,01</b>	<b>0,605</b>	
0,9	0,13	0,1	0,9	0,055	6,588
	0,39	0,5	0,5	1,609	
	0,64	0,9	0,1	5,322	
	0,70	0,99	<b>0,01</b>	<b>6,456</b>	

С уменьшением значения параметра  $t_0$  среднее время ожидания в системе  $E_2^-/M^-/1$  стремится к среднему времени ожидания в системе  $E_2/M/1$ . Данные таблицы 1 подтверждают тот факт, что за счет уменьшения

коэффициентов вариации  $c_\lambda$  и  $c_\mu$  из-за ввода параметра сдвига  $t_0$ , уменьшается среднее время ожидания в системе  $E_2^-/M^-/1$ .

Операция сдвига во времени с одной стороны, приводит к увеличению загрузки системы с временными сдвигами. Для системы  $E_2^-/M^-/1$  с временными сдвигами загрузка увеличивается в  $(1+\lambda t_0)/(1+\mu t_0)$  раз по сравнению с обычной системой  $E_2/M/1$ .

Операция сдвига во времени с другой стороны, уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. В связи с тем, что среднее время ожидания в системе  $G/G/1$  связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в такой системе будет меньше, чем в обычной системе при одинаковом коэффициенте загрузки. Например, для системы  $E_2^-/M^-/1$  при загрузке  $\rho=0,9$  и параметре сдвига  $t_0=0,9$  коэффициент вариации интервалов поступления  $c_\lambda$  уменьшается с 1 для обычной системы до 0,13, коэффициент вариации времени обслуживания  $c_\mu$  уменьшается с  $1/\sqrt{2}$  до 0,1, а время ожидания уменьшается с 6,59 единиц времени для обычной системы до 0,055 единиц времени.

Изложенные результаты справедливы только для одинаковых параметров сдвига  $t_0$  для распределения интервалов между поступлениями требований и времени обслуживания.

## 2.4 Выводы по второй главе

Разработаны математические модели СМО  $E_2^-/E_2^-/1, M^-/E_2^-/1, E_2^-/M^-/1$ , на основании которых выполнено исследование их возможностей, выполнен сравнительный анализ с классическими СМО. Приведем основные результаты, полученные из анализа этих математических моделей.

1. Систему  $E_2^-/E_2^-/1$  для анализа телетрафика можно использовать в том случае, если коэффициенты вариации интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  меньше  $1/\sqrt{2}$ . В отличие от обычной системы  $E_2/E_2/1$ , систему  $E_2^-/E_2^-/1$  можно использовать для диапазона изменения коэффициентов вариаций интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  от 0 до  $1/\sqrt{2}$ . Система  $E_2^-/E_2^-/1$  на выходе обеспечивает меньшее время ожидания, чем обычная система  $E_2/E_2/1$  за счет уменьшения коэффициентов вариаций интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  в результате сдвига законов распределения на величину  $t_0 > 0$ . Введение операции сдвига приводит к увеличению загрузки системы с запаздыванием.

2. Для системы  $M^-/E_2^-/1$  с временными сдвигами загрузка увеличивается в  $(1+\mu t_0)/(1+\lambda t_0)$  раз по сравнению с обычной системой  $M/E_2/1$ . Операция сдвига во времени уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. В связи с тем, что среднее время ожидания в системе  $G/G/1$  связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в системе с временными сдвигами будет меньше, чем в обычной системе при одинаковом коэффициенте загрузки.

3. С уменьшением значения параметра  $t_0$  среднее время ожидания в системе  $E_2^-/M^-/1$  стремится к среднему времени ожидания в системе  $E_2/M/1$ . Данные таблиц подтверждают тот факт, что за счет уменьшения коэффициентов вариации  $c_\lambda$  и  $c_\mu$  из-за ввода параметра сдвига  $t_0$ , уменьшается среднее время ожидания в системах. Операция сдвига во времени, с одной стороны, приводит к увеличению загрузки системы. Для системы  $E_2^-/M^-/1$  загрузка увеличивается в  $(1+\lambda t_0)/(1+\mu t_0)$  раз по сравнению с

обычной системой  $E_2/M/1$ . Операция сдвига во времени, с другой стороны, уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. В связи с тем, что среднее время ожидания в системе  $G/G/1$  связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в системе с временными сдвигами будет меньше, чем в обычной системе при одинаковом коэффициенте загрузки.

Изложенные результаты справедливы только для одинаковых параметров сдвига  $t_0$  для распределения интервалов между поступлениями требований и времени обслуживания систем.

# ГЛАВА 3. РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Результаты этой главы излагаются в соответствии с работами автора настоящей диссертации [61, 62, 72].

## 3.1 Среднее время ожидания в системе массового обслуживания $H_2/H_2/1$ с временными сдвигами

В теории массового обслуживания исследование систем  $G/G/1$  актуально. В соответствии с символикой Кендалла  $G$  означает произвольный закон распределения интервалов между требованиями входного потока и времени обслуживания.

В данном разделе рассматривается задача определения характеристик СМО  $H_2/H_2/1$  с учетом временных сдвигов, типа  $G/G/1$  с гиперэкспоненциальными распределениями второго порядка с использованием классического метода спектрального разложения решения ИУЛ [61].

В качестве входных распределений для рассматриваемой системы выбраны вероятностные смеси сдвинутых вправо от нулевой точки экспоненциальных распределений, т.е. гиперэкспоненциальные распределения  $H_2$ .

Для таких законов распределений метод спектрального разложения позволяет получить решение в замкнутой форме. В работах [61,62] показано, что в такой системе с временными сдвигами среднее время ожидания требований в очереди меньше, чем в обычной системе. Это связано с тем, что операция сдвига во времени уменьшает величину коэффициентов вариаций интервалов между поступлениями и времени обслуживания, а как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания требований связано с этими коэффициентами



вариаций квадратичной зависимостью. Система массового обслуживания  $H_2/H_2/1$  с временными сдвигами вполне может использоваться в качестве математической модели современного телетрафика [62].

Основной характеристикой СМО, как известно, является среднее время ожидания требования в очереди, а все остальные – производные от него. Среднее время ожидания требования в очереди в такой системе меньше, чем в классической системе  $M/M/1$  при одинаковом коэффициенте загрузки за счет того, что коэффициенты вариации времен поступления  $c_\lambda$  и обслуживания  $c_\mu$  меньше единицы при параметре  $t_0 > 0$ . Таким образом, в данном случае мы имеем немарковскую модель массового обслуживания из класса  $G/G/1$  [64,69].

Сдвинутое экспоненциальное распределение активно применяется в других областях, например, в теории надежности, в статистике и т.д. В работе [65] отмечено, что «в теории надежности смещенное экспоненциальное распределение интерпретируют как наличие «гарантийного» срока  $t_0 > 0$ , в течение которого отказ произойти не может». Также это распределение используется в универсальном пакете имитационного моделирования GPSS World [56,66]. Тем самым, настоящая работа расширяет область применения смещенного экспоненциального распределения за счет систем массового обслуживания.

В работе [67] приведен пример системы с временными сдвигами, а также ее описание и математическая трактовка с несколькими типами сдвигов во времени.

В работе [26] рассмотрена СМО, образованная двумя потоками, определяемыми функциями вида:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\gamma(t-t_0)}, & t \geq t_0 \ (\gamma > 0) \\ 0, & 0 \leq t < t_0, \end{cases}$$

где потоки имеют одинаковые временные сдвиги  $t_0 > 0$ . СМО с такими входными распределениями обозначим:  $M^-/M^-/1$ . Результаты работы [26]

позволяют развить теорию метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) также на смеси сдвинутых вправо от нулевой точки экспоненциальных распределений, т.е. на сдвинутое гиперэкспоненциальное распределение. Это возможно благодаря некоторым свойствам преобразования Лапласа плотности гиперэкспоненциального распределения. Напомним, что распределение с плотностью  $f(t) = \sum_{i=1}^R \alpha_i \gamma_i e^{-\gamma_i t}$ , где  $t \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^R \alpha_i = 1$  называют гиперэкспоненциальным (гиперпоказательным) и обозначают  $H_R$  [27].

Использование этого распределения при  $R > 2$  затруднительно из-за трудоемких вычислений. В работе [27] доказано, что коэффициент вариации  $c$  случайной величины, распределенной по такому закону, удовлетворяет неравенству  $c \geq 1$ .

Ставится задача определения среднего времени ожидания для СМО, образованной двумя сдвинутыми гиперэкспоненциальными распределениями второго порядка  $H_2$  с использованием классического метода спектрального разложения решения ИУЛ.

Построение функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  с учетом условий (2.1) и (2.2) для обычной системы  $H_2/H_2/1$  подробно продемонстрировано в работе [30]. Там же найдено решение для среднего времени ожидания в очереди для указанной системы. Таким образом, в основу данной главы положены две работы авторов [26,30], а также классика теории массового обслуживания [27].

Другой подход к решению ИУЛ использован в [68]. Здесь вместо термина «спектральное разложение» использована факторизация, а вместо функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  – компоненты факторизации  $\omega_+(z,t)$  и  $\omega_-(z,t)$  функции  $1 - z \cdot \chi(t)$ , где  $\chi(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$  с произвольной функцией распределения  $C(t)$ , а  $z$  – любое число из интервала  $(-1,1)$ . Такой подход для получения конечного результата для

системы  $H_2/H_2/1$  менее удобен, чем подход, описанный в [27] и проиллюстрированный многочисленными примерами.

Теперь перейдем к изложению результатов по системе с временными сдвигами и оценим, как операция сдвига во времени скажется на характеристике новой системы, и чем эта, внешне схожая с СМО  $H_2/H_2/1$ , система будет от нее отличаться.

*Система  $H_2/H_2/1$  с временными сдвигами.* Рассмотрим СМО, на вход которой поступают требования, случайные интервалы между которыми распределены по закону:

$$a(t) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1(t-t_0)} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-t_0)}, & t \geq t_0, \\ 0, & 0 \leq t < t_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Аналогично распределено и время обслуживания:

$$b(t) = \begin{cases} q\mu_1 e^{-\mu_1(t-t_0)} + (1-q)\mu_2 e^{-\mu_2(t-t_0)}, & t \geq t_0, \\ 0, & 0 \leq t < t_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

В выражениях (3.1) и (3.2) вероятности  $p, q \in [0, 1]$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 > 0$ . Систему  $H_2/H_2/1$  с временными сдвигами в отличие от обычной системы обозначим  $\bar{H}_2 / \bar{H}_2 / 1$ .

Функции плотности (3.1) и (3.2) являются сдвинутыми вправо от нулевой точки на величину  $t_0$  смесями экспоненциальных распределений с тремя параметрами  $(p, \lambda_1, \lambda_2)$  и  $(q, \mu_1, \mu_2)$ . Таким образом, имеем СМО с временными сдвигами на величину  $t_0 > 0$ .

Определим числовые характеристики интервала между соседними требованиями и времени обслуживания для этой системы. Для этого воспользуемся преобразованием Лапласа функций (3.1) и (3.2):

$$A^*(s) = \left[ p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2} \right] e^{-t_0 s}.$$

Значение первой производной функции  $A^*(s)$  со знаком минус в точке  $s=0$  равно:

$$-\left. \frac{dA^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0.$$

Отсюда среднее значение интервалов между соседними требованиями:

$$\bar{\tau}_\lambda = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0, \quad \text{и, аналогично, среднее время обслуживания}$$

$$\bar{\tau}_\mu = q\mu_1^{-1} + (1-q)\mu_2^{-1} + t_0.$$

Значение второй производной функции  $A^*(s)$  в точке  $s=0$  дает второй начальный момент интервала поступления:

$$\bar{\tau}_\lambda^2 = 2p\lambda_1^{-2} + 2(1-p)\lambda_2^{-2} + t_0^2 + 2t_0[p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1}].$$

Аналогично

$$\bar{\tau}_\mu^2 = 2q\mu_1^{-2} + 2(1-q)\mu_2^{-2} + t_0^2 + 2t_0[q\mu_1^{-1} + (1-q)\mu_2^{-1}].$$

Отсюда значения квадратов коэффициентов вариации интервала между поступлениями требований  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$ :

$$c_\lambda^2 = \frac{[(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2]}{[t_0\lambda_1\lambda_2 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2}, \quad c_\mu^2 = \frac{[(1-q^2)\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2q(1-q) + q(2-q)\mu_2^2]}{[t_0\mu_1\mu_2 + (1-q)\mu_1 + q\mu_2]^2}.$$

Далее, для определения неизвестных параметров распределений (3.1) и (3.2) запишем следующие системы уравнений по методу моментов:

$$p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0 = \bar{\tau}_\lambda, \quad (3.3)$$

$$\frac{[(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2]}{[t_0\lambda_1\lambda_2 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2} = c_\lambda^2, \quad (3.4)$$

$$q\mu_1^{-1} + (1-q)\mu_2^{-1} + t_0 = \bar{\tau}_\mu, \quad (3.5)$$

$$\frac{[(1-q^2)\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2q(1-q) + q(2-q)\mu_2^2]}{[t_0\mu_1\mu_2 + (1-q)\mu_1 + q\mu_2]^2} = c_\mu^2. \quad (3.6)$$

Величины  $\bar{\tau}_\lambda$ ,  $\bar{\tau}_\mu$ ,  $c_\lambda$ ,  $c_\mu$  и  $t_0$  будем считать входными параметрами для системы  $N_2 / N_2 / 1$ . Заметим, что величины  $c_\lambda, c_\mu > 0$ . Исходя из вида уравнения (3.3), положим параметры  $\lambda_1, \lambda_2$  равными:

$$\lambda_1 = 2p / (\bar{\tau}_\lambda - t_0), \quad \lambda_2 = 2(1-p) / (\bar{\tau}_\lambda - t_0) \quad (3.7)$$

и потребуем выполнения условия (3.4). Подставив (3.7) в равенство (3.4), получим решение для вероятности  $p$  в виде функции параметра  $t_0$ :

$$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}{2[(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2 \bar{\tau}_\lambda^2]}}. \text{ Аналогично поступим с уравнениями (3.5) и}$$

(3.6), положив в уравнении (3.5) параметры  $\mu_1, \mu_2$  равными:

$$\mu_1 = 2q/(\bar{\tau}_\mu - t_0), \mu_2 = 2(1-q)/(\bar{\tau}_\mu - t_0). \quad (3.8)$$

Подставив (3.8) в равенство (3.6), получим решение для вероятности  $q$

$$\text{в виде функции параметра } t_0: \quad q = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\bar{\tau}_\mu - t_0)^2}{2[(\bar{\tau}_\mu - t_0)^2 + c_\mu^2 \bar{\tau}_\mu^2]}}. \text{ При этом в}$$

качестве  $p$  и  $q$  выбираем любое из двух значений. Такой подход к описанию гиперэкспоненциального распределения с использованием первых двух начальных моментов использован в работах [30,32,45,69].

Таким образом, не определенная система 4-х уравнений с 6-ю неизвестными (3.3) – (3.6) может быть решена методом подбора, при этом параметр  $t_0$  должен удовлетворять условию  $0 < t_0 < \bar{\tau}_\mu < \bar{\tau}_\lambda$ , а коэффициент загрузки определится отношением средних интервалов обслуживания и поступления  $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda < 1$  в случае стабильной системы.

Выражения (3.4) и (3.6) позволяют сделать предположение о том, что среднее время ожидания для системы с временными сдвигами будет меньше, чем для обычной системы, т.к. ввод параметра сдвига  $t_0 > 0$  уменьшает коэффициенты вариаций  $c_\lambda$  и  $c_\mu$ , а время ожидания связано квадратичной зависимостью от коэффициентов вариаций для системы  $G/G/1$ .

Определение времени ожидания в системе  $H_2/H_2/1$  с временными сдвигами. В работе [30] представлено решение для обычной системы  $H_2/H_2/1$ , полученное на основе метода спектрального разложения. Теперь для получения решения для системы  $H_2^-/H_2^-/1$  докажем следующее утверждение.

*Утверждение 1.* Спектральное разложение решения ИУЛ для системы  $H_2^-/H_2^-/1$ :  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$ , где  $A^*(s)$  и  $B^*(s)$  преобразования Лапласа функций плотности (3.1) и (3.2) при  $t_0=0$ , а  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$

рациональные функции от  $s$ , имеет точно такой же вид, как и для системы

$$[30] \text{ H}_2/\text{H}_2/1: \frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} = \frac{s(s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0)}{(s - \lambda_1)(\lambda_2 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}.$$

*Доказательство.* Преобразования Лапласа для функции (3.1) и (3.2)

имеют вид:

$$A^*(s) = \left[ p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2} \right] \cdot e^{-t_0 \cdot s},$$

$$B^*(s) = \left[ q \frac{\mu_1}{s + \mu_1} + (1-q) \frac{\mu_2}{s + \mu_2} \right] \cdot e^{-t_0 \cdot s}.$$

Тогда выражение  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1$  примет вид:

$$\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} = \left[ p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] \cdot \left[ q \frac{\mu_1}{s + \mu_1} + (1-q) \frac{\mu_2}{s + \mu_2} \right] - 1, \text{ т.к. показатели степени}$$

у экспонент обнуляются и тем самым операция сдвига в спектральном разложении нивелируется.

Так как

$$\left[ p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] = \frac{\lambda_1\lambda_2 - [p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2]s}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)} = \frac{a_0 - a_1s}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)},$$

где  $a_0 = \lambda_1\lambda_2$ ,  $a_1 = p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2$ ,

$$a \left[ q \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} + (1-q) \frac{\mu_2}{\mu_2 + s} \right] = \frac{\mu_1\mu_2 - [q\mu_1 + (1-q)\mu_2]s}{(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)} = \frac{b_0 + b_1s}{(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)},$$

где  $b_0 = \mu_1\mu_2$ ,  $b_1 = q\mu_1 + (1-q)\mu_2$ , то искомое выражение будет иметь вид:

$$\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} = \frac{(a_0 - a_1s)(b_0 + b_1s) - (\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}.$$

В числителе получим многочлен 4-й степени  $-s^4 + c_2s^3 + c_1s^2 + c_0s$ , с коэффициентами

$$c_0 = a_0b_1 - a_1b_0 - a_0(\mu_1 + \mu_2) + b_0(\lambda_1 + \lambda_2),$$

$c_1 = -a_1b_1 - a_0 - b_0 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2)$  и  $c_2 = \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2$ .

Тогда

$$\frac{\Psi_+(s)}{\Psi_-(s)} = \frac{-s(s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0)}{(s - \lambda_1)(\lambda_2 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}. \quad (3.9)$$

Для окончательного разложения числителя на простые множители, остается определить корни многочлена  $s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0$ . При этом для выполнения вышеприведенных условий (2.1) и (2.2) необходимо наличие двух действительных отрицательных корней или же двух комплексно-сопряженных с отрицательными вещественными частями и одного положительного корня  $s_3$  у многочлена третьей степени. Наличие таких корней следует из существования и единственности такого разложения или же факторизации.

Исследование знака коэффициента  $c_0$  подтверждает данный факт. В стационарном режиме функционирования системы ее коэффициент загрузки

$$\rho = \frac{\bar{\tau}_\mu}{\bar{\tau}_\lambda} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2} \frac{[\mu_1(1-q) + \mu_2q]}{[\lambda_1(1-p) + \lambda_2p]} < 1.$$

Запишем выражение для коэффициента  $c_0$  в развернутом виде:  $c_0 = -\lambda_1\lambda_2[\mu_1(1-q) + \mu_2q] + \mu_1\mu_2[\lambda_1(1-p) + \lambda_2p]$ . Путем сравнения выражений для величин  $c_0$  и  $\rho$  убеждаемся, что коэффициент  $c_0 > 0$ . С учетом знака минус перед  $c_0$  в многочлене по теореме Виета произведение трех корней  $s_1s_2s_3 = -c_0 < 0$ , что полностью согласуется с нашими допущениями о знаках корней.

Окончательно, спектральное разложение (3.7) примет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{-s(s+s_1)(s+s_2)(s-s_3)}{(s-\lambda_1)(\lambda_2-s)(s+\mu_1)(s+\mu_2)}, \quad \text{а ее компоненты имеют вид}$$

$$\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(s+\mu_1)(s+\mu_2)}, \quad \psi_-(s) = \frac{-(\lambda_1-s)(\lambda_2-s)}{s-s_3}.$$

Очевидно, что функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  удовлетворяют условиям (2.1) и (2.2). Утверждение 1 доказано.

В связи с этим, результаты для обычной системы  $N_2/N_2/1$  справедливы и для системы  $N_2^-/N_2^-/1$ , чем мы и воспользуемся при дальнейших расчетах.

Среднее время ожидания в очереди для СМО  $N_2/N_2/1$  выражается равенством:

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}, \quad (3.10)$$

$s_1, s_2$  абсолютные значения отрицательных корней, которые для удобства обозначены  $-s_1$  и  $-s_2$ . многочлена  $s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0$  с определенными выше коэффициентами.

Тогда алгоритм определения времени ожидания сводится к решению системы уравнений (3.7), (3.4), (3.8) и (3.6) при заданных входных параметрах:  $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu$  и  $t_0$ , причем  $0 < t_0 < \bar{\tau}_\mu < \bar{\tau}_\lambda$ , а затем к нахождению нужных корней многочлена  $s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0$  и использованию выражения (3.10).

Таблица 3.1 Результаты численных экспериментов для СМО  $H_2/H_2/1$  и  $H_2/H_2/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания			
$\rho$	$(c_\lambda, c_\mu)$	Для системы $H_2^-/H_2^-/1$			Для системы $H_2/H_2/1$
		$t_0=0,9$	$t_0=0,5$	$t_0=0,1$	
0,1	(2,2)	0,28	0,36	0,42	0,45
	(4,4)	1,19	1,54	1,73	1,78
	(8,8)	4,81	6,31	6,97	7,11
0,5	(2,2)	2,31	3,13	3,87	4,04
	(4,4)	9,29	12,61	15,45	16,13
	(8,8)	37,22	50,50	61,54	64,18
0,9	(2,2)	24,14	33,22	35,84	36,20
	(4,4)	96,51	132,30	143,27	144,83
	(8,8)	386,03	527,68	571,47	577,86

В таблице 3.1 приведены результаты расчетов времени ожидания в пакете Mathcad при коэффициентах загрузки  $\rho=0,1; 0,5$  и  $0,9$  при нормированном времени обслуживания  $\bar{\tau}_\mu=1$  и коэффициентах вариаций  $\{c_\lambda, c_\mu\}=\{2, 4, 8\}$ . В правой колонке для сравнения приведены результаты для обычной системы  $H_2/H_2/1$ . Результаты расчетов полностью подтверждают справедливость нашего предположения о времени ожидания, причем чем меньше значения параметра  $t_0$ , тем время ожидания в системе с временными сдвигами ближе к времени ожидания в обычной системе.



СМО  $M_2^-/M_2^-/1$  определена и в случае коэффициентов вариаций меньших 1. Рассмотрим один случай:  $c_\lambda=0,2$ ,  $c_\mu=0,2$ ,  $\rho=0,9$  и  $t_0=0,9$ . Тогда среднее время ожидания равно  $\bar{W}=0,23$  единиц времени.

Результаты расчетов полностью подтверждают справедливость предположения о времени ожидания в системе с временными сдвигами. Расчеты для обычной системы  $M_2/M_2/1$  выполнены с помощью программы, описанной в работе [70]. Вышеприведенные результаты расчетов для обеих систем хорошо согласуются с результатами работы [71] в той области параметров, в которой действительны рассматриваемые системы.

Операция сдвига во времени, с одной стороны, приводит к увеличению загрузки системы с временными сдвигами. В этом можно убедиться, вычислив отношение  $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$  для систем  $M_2^-/M_2^-/1$  и  $M_2/M_2/1$  с использованием выражений для их компонент. Например, если взять загрузку системы с временными сдвигами 0,1 в случае  $c_\lambda=c_\mu=2$  и параметре сдвига  $t_0=0,9$ , то увеличение будет в 1,15 раз, т.е. загрузка  $\rho$  обычной системы  $M_2/M_2/1$  составит  $\rho=0,087$  вместо 0,1.

Операция сдвига во времени, с другой стороны, уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. В связи с тем, что среднее время ожидания в системе  $G/G/1$  связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в системе с временными сдвигами будет меньше, чем в обычной системе при одинаковом коэффициенте загрузки. Например, для системы  $M_2^-/M_2^-/1$  при параметре сдвига  $t_0=0,9$  коэффициент вариации интервалов поступлений  $c_\lambda$  уменьшается с 2 до 1,835, коэффициент вариации времени обслуживания  $c_\mu$  уменьшается с 2 до 1,053, а время ожидания уменьшается с 0,45 до 0,28 единицы времени.

В системе  $H_2^-/H_2^-/1$  и в обычной системе  $H_2/H_2/1$  значения коэффициентов вариаций интервала между поступлениями  $c_\lambda$  и времени обслуживания требований  $c_\mu$  перекрывают интервал от 1 до  $\infty$  и поэтому эти системы пригодны для описания и исследования современного телетрафика при широком диапазоне изменения его параметров.

Практическое применение полученных результатов при анализе современного телетрафика просматривается следующим образом. При коэффициентах вариации  $c$ , больших 1, закон распределения можно аппроксимировать гиперэкспоненциальным распределением 2-го порядка  $H_2$  либо  $H_2^-$ . При этом необходимо учитывать уникальное свойство гиперэкспоненциального распределения, состоящего в том, что оно может определяться как двумя первыми моментами, так и тремя моментами. С точки зрения теории вероятностей описание закона распределения на уровне трех моментов все же точнее, но в таком случае применение изложенных результатов потребует большего объема вычислений из-за необходимости решения систем 3-х уравнений с использованием известного метода моментов [48,63].

Изложенные результаты справедливы только для одинаковых параметров сдвига  $t_0$  для распределения времени между поступлениями заявок и времени обслуживания.

### **3.2 Особенности применения гиперэкспоненциальных входных распределений в системах массового обслуживания**

В качестве входных распределений для описания СМО будет рассмотрен закон распределения достаточно общего вида: гиперэкспоненциальный.

Выявлена главная характерная черта этого закона распределений, заключающаяся в том, что он однозначно может описываться как двумя первыми моментами, так и тремя моментами. Предложен механизм

аппроксимации с использованием известного метода моментов как с использованием двух первых моментов, так и с использованием трех первых моментов. Использование этого закона распределения в теории массового обслуживания расширяет и дополняет известную незавершенную формулу для среднего времени ожидания для систем массового обслуживания при произвольных законах распределения интервалов входного потока требований и времени обслуживания. Полученные результаты важны для современной теории телетрафика [72].

Для моделирования трафика современных сетей телекоммуникаций широко используются законы распределений, такие как Эрланга, экспоненциальный, гиперэкспоненциальный, гиперэрланговский и др., для которых коэффициенты вариации случайных величин больше или равно 1 ( $c \geq 1$ ) или же меньше 1 ( $c < 1$ ). Коэффициент вариации, больший 1 свидетельствует о том, что вероятность появления больших значений случайной величины значительно выше, чем у классического экспоненциального распределения, а «хвост» распределения весомей. Для коэффициента вариации меньшего единицы будет наоборот.

Как известно, например из [27,28], для системы массового обслуживания (СМО) с произвольными законами распределений для входного потока и времени обслуживания G/G/1 среднее время ожидания в очереди определяется выражением

$$\bar{W} = \frac{D_\lambda + D_\mu + (1-\rho)^2 / \lambda^2}{2(1-\rho)/\lambda} - \frac{\bar{I}^2}{2\bar{I}}, \quad (3.11)$$

где  $\rho$  – коэффициент загрузки системы  $0 < \rho = \lambda/\mu < 1$ ,  $\lambda$  – интенсивность входного потока,  $\mu$  – интенсивность обслуживания,  $D_\lambda, D_\mu$  – соответственно дисперсии интервалов поступления и времени обслуживания,  $\bar{I}, \bar{I}^2$  – соответственно среднее значение и второй начальный момент периода простоя.

Следовательно, первое слагаемое в правой части (3.11) зависит от двух первых моментов распределения интервалов входного потока и времени обслуживания. Второе слагаемое в правой части (3.11) для общего случая системы G/G/1 остается неизвестным и поэтому выражение (3.11) является до сих пор незавершенной формулой. Вполне вероятно, что второе слагаемое может зависеть от моментов интервалов поступления и времени обслуживания более высокого порядка, чем первые два. Поэтому при анализе СМО G/G/1 необходимо учитывать не только первые два момента случайных интервалов времен поступления и обслуживания, но и моменты более высокого порядка.

Из формулы (3.11) для среднего времени ожидания требований в системе G/G/1 следует, что главная характеристика СМО – среднее время ожидания требований в очереди связано с коэффициентами вариаций интервалов между поступлениями требований и времени обслуживания квадратичной зависимостью, и, таким образом, «хвост» распределения, используемого для описания СМО, обусловленный величиной коэффициента вариации  $s$ , влияет напрямую на среднее время ожидания.

Рассмотрим гиперэкспоненциальный закон распределения. Распределение с плотностью  $f(t) = \sum_{i=1}^R \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}$ , где  $t \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^R \alpha_i = 1$  называют гиперэкспоненциальным (гиперпоказательным) порядка  $R$  и обозначают  $H_R$  [27].

Аналогичное определение  $H_R$ , только относительно функции распределения, дано в работе [68]. В теории массового обслуживания это распределение выше второго порядка не используется, т.к. в этом случае затруднительно получить решение для среднего времени ожидания.

Гиперэкспоненциальный закон распределения второго порядка  $H_2$ , как вероятностная смесь экспоненциальных распределений с функцией плотности

$$a(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad (3.12)$$

содержит три параметра ( $0 < p < 1$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ) и, таким образом, позволяет аппроксимировать произвольные входные распределения методом моментов на уровне трех первых моментов. Кроме того, закон распределения  $H_2$  обладает уникальным свойством, заключающимся в том, что он полностью может описываться как с использованием двух первых моментов, так и с использованием трех первых моментов.

На рис. 3.1 показаны графики функции плотности (3.12) с математическим ожиданием, равным 2 для случаев  $c=2$  и  $c=4$ , а также для сравнения показана плотность экспоненциального распределения с тем же математическим ожиданием. Параметры распределения (3.12) при  $c=2$ :  $p=0,8873$ ;  $\lambda_1=0,8873$ ;  $\lambda_2=0,1127$ , а при  $c=4$  -  $p=0,9697$ ;  $\lambda_1=0,9697$ ;  $\lambda_2=0,0303$ .

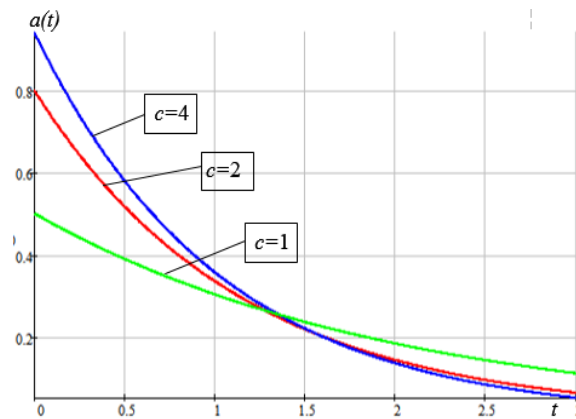


Рис. 3.1 – Графики функции плотности (3.14) при  $c=2$  и  $c=4$

Более полное представление о гиперэкспоненциальном распределении дает его «хвост» распределения, график которого приведен на рис. 3.2.

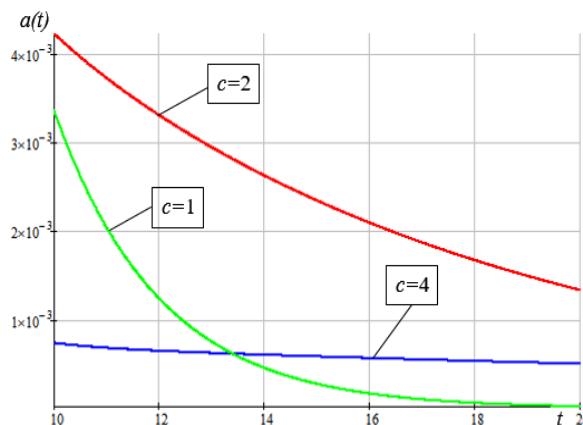


Рис. 3.2 – «Хвост» гиперэкспоненциального распределения

Из рис. 3. 2 видно, что кривая плотности при  $c=4$  имеет т.н. «тяжелый хвост», которому характерно малое изменение во времени. Для такого случая вероятность появления больших значений случайной величины значительно выше, чем для экспоненциального закона [73]. Поэтому исходя из выражения (3.11) делаем вывод: входное распределение (2) в СМО при  $c=4$  дает большее время ожидания, чем при  $c=2$  и тем более, чем при  $c=1$  для экспоненциального закона.

Рассмотрим аппроксимацию законов распределений с использованием двух первых моментов. Преобразование Лапласа функции (3.12) имеет вид:

$$A^*(s) = p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2}. \quad (3.13)$$

Воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизведения моментов и запишем начальные моменты до второго порядка для распределения (3.12):

$$\bar{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}, \quad (3.14)$$

$$\bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2}. \quad (3.15)$$

Рассматривая равенства (3.14) и (3.15) как запись известного метода моментов, найдем неизвестные параметры распределения (3.12)  $\lambda_1, \lambda_2, p$ . Система двух уравнений (3.14), (3.15) при этом является не доопределенной, поэтому к ней добавим выражение для квадрата коэффициента вариации:

$$c^2 = \frac{\bar{\tau}_\lambda^2 - (\bar{\tau}_\lambda)^2}{(\bar{\tau}_\lambda)^2}, \quad (3.16)$$

как связующее условие между (3.14) и (3.15). Исходя из вида уравнения (3.14), положим

$$\lambda_1 = 2p / \bar{\tau}_\lambda, \quad \lambda_2 = 2(1-p) / \bar{\tau}_\lambda \quad (3.17)$$

и потребуем выполнения условия (3.16). Подставив выражения (3.14), (3.15) с параметрами (3.17) в (3.16) и решив квадратное уравнение относительно параметра  $p$ , получим для него два значения:  $p = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\frac{c_\lambda^2 - 1}{c_\lambda^2 + 1}})$ . При этом можно воспользоваться любым из них [28,30]. Подставив полученное значение  $p$  в (3.17) определим недостающие параметры  $\lambda_1, \lambda_2$ . Таким образом, методом подбора можно получить решение недоопределенной системы уравнений (3.14) и (3.15). Следовательно, гиперэкспоненциальный закон распределения может определяться полностью двумя первыми моментами и перекрывать весь диапазон изменения коэффициента вариации от 1 до  $\infty$  [30,73].

Рассмотрим аппроксимацию с использованием трех моментов. Учитывая тот факт, что распределение  $H_2$  является трехпараметрическим, аппроксимацию можно выполнить и на уровне трех первых моментов, что позволит сравнить полученные результаты. Для этого запишем выражения для момента 3-го порядка, полученное через преобразование Лапласа (3.13):

$$\overline{\tau_\lambda^3} = \frac{6p}{\lambda_1^3} + \frac{6(1-p)}{\lambda_2^3}. \quad (3.18)$$

Решив систему нелинейных уравнений (3.14), (3.15) и (3.18) в математическом пакете Mathcad, определяем неизвестные параметры распределения (3.12)  $\lambda_1, \lambda_2, p$ .

Однако эта система уравнений будет не всегда разрешимой. Для существования решения системы (3.14), (3.15) и (3.18) необходимо и достаточно выполнение условия [35,51]:

$$\overline{\tau_\lambda^3} \cdot \overline{\tau_\lambda} \geq 1,5 \cdot \overline{\tau_\lambda^2}. \quad (3.19)$$

Решив систему нелинейных уравнений (3.14), (3.15) и (3.18) в математическом пакете Mathcad, определяем неизвестные параметры распределения (3.12)  $\lambda_1, \lambda_2, p$ .

Рассмотрим пример. Предположим, что первые два начальных момента распределения (3.12) равны:  $\bar{\tau}_\lambda = 10/9$ ,  $\bar{\tau}_\lambda^2 = 17 \cdot (10/9)^2$ , что соответствует коэффициенту вариации  $c = 4$  согласно равенству (3.16). Теперь к первым двум моментам добавим третий:  $\bar{\tau}_\lambda^3 = 497 \cdot (10/9)^3$ , что соответствует коэффициенту асимметрии  $A_s = 7$  [35]. Заметим, что для классического экспоненциального распределения:  $c = 1$ , а  $A_s = 2$ .

Аппроксимация с использованием двух первых моментов дает:  $p \approx 0,9697$ ,  $\lambda_1 \approx 1,7454$ ,  $\lambda_2 \approx 0,0546$ . График функции плотности (3.12) с этими параметрами приведен на рис. 3.3 кривая 1). Для аппроксимации с использованием трех первых моментов решаем систему трех уравнений в пакете Mathcad:

$$\begin{cases} \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2} = 10/9 \\ \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2} = 17 \cdot (10/9)^2 \\ \frac{6p}{\lambda_1^3} + \frac{6(1-p)}{\lambda_2^3} = 497 \cdot (10/9)^3, \end{cases}$$

что дает следующие результаты для параметров:  $p \approx 0,9111$ ,  $\lambda_1 \approx 6,2291$ ,  $\lambda_2 \approx 0,0922$ . Условие (3.19) в этом случае выполняется. График функции плотности (3.12) с этими параметрами приведен на рис. 3.3 кривая 2).

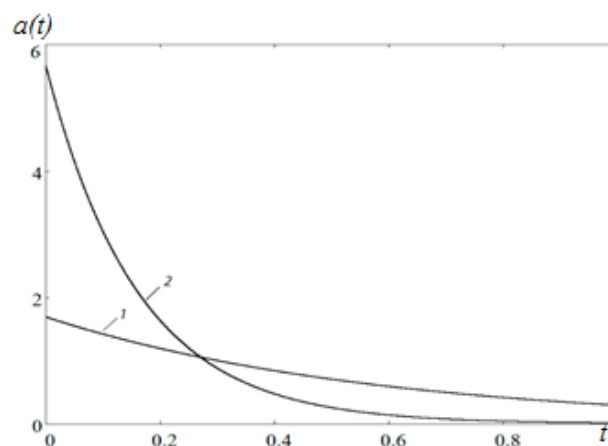


Рис. 3.3 – Графики функции плотности (2): 1 – аппроксимация закона распределения  $H_2$  на уровне 2-х моментов; 2 – на уровне 3-х моментов



Рис 3.3 демонстрирует разницу между аппроксимацией с использованием двух первых моментов и с использованием трех моментов. Как показано в работах [30,31,32], аппроксимация закона распределения (3.12) с использованием двух первых моментов может занижать среднее время ожидания в очереди в СМО до 10% по сравнению с аппроксимацией на уровне трех моментов.

В таблице 3.2 приведены данные расчетов среднего времени ожидания (в единицах времени) для систем  $H_2/H_2/1$  для случаев малой, средней и высокой нагрузки  $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$  с учетом того, что диапазон изменения коэффициентов вариаций интервалов входного потока  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$ . Коэффициент загрузки в расчетах определяется отношением средних интервалов времени обслуживания и интервалов между требованиями  $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$ . Расчеты проведены для нормированного времени обслуживания  $\bar{\tau}_\mu = 1$ . С учетом того факта, что система  $H_2/H_2/1$  не применима в случаях  $c_\lambda < 1$  и  $c_\mu < 1$ , в таблице поставлен прочерк.

Таблица 3.2 Результаты численных экспериментов для времени ожидания при коэффициентах вариаций, больших и меньших 1

Входные параметры		Среднее время ожидания
$\rho$	$(c_\lambda, c_\mu)$	для системы $H_2/H_2/1$
0,1	(0,71;0,71)	–
	(2,2)	0,45
	(4,4)	1,78
	(8,8)	7,11
0,5	(0,71;0,71)	–
	(2,2)	4,04
	(4,4)	16,13
	(8,8)	64,18
0,9	(0,71;0,71)	–
	(2,2)	36,20
	(4,4)	144,83
	(8,8)	577,86

Данные таблицы хорошо согласуются с результатами [74], что также подтверждает адекватность полученных результатов. Полученные результаты полностью подтверждают наши предположения о среднем времени ожидания в очереди, выдвинутые выше.

Была выявлена характерная особенность у гиперэкспоненциального закона распределения, заключающаяся в том, что он однозначно описывается как двумя первыми моментами, так и тремя первыми моментами. Представлен механизм их аппроксимации на практике с использованием известного метода моментов как с использованием двух, так и с использованием трех первых моментов.

Применение данного закона распределений в теории массового обслуживания расширяет диапазон изменения коэффициентов вариаций интервалов входного потока и времени обслуживания, а также дополняет и расширяет формулу (3.13) для среднего времени ожидания в системе G/G/1.

### 3.3 Выводы по третьей главе

Разработана математическая модель СМО  $H_2/H_2/1$ , на основании которой выполнено исследование ее возможностей, выполнен сравнительный анализ с классической СМО  $H_2/H_2/1$ . Основные результаты:

1. Операция сдвига во времени с одной стороны, приводит к увеличению загрузки системы с временными сдвигами. В этом можно убедиться вычислив отношение  $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$  для систем  $H_2/H_2/1$  и  $H_2/H_2/1$  с использованием выражений для их компонент.

2. Операция сдвига во времени с другой стороны, уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. В связи с тем, что среднее время ожидания в системе G/G/1 связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в

системе со сдвигами во времени будет меньше, чем в обычной системе при одинаковом коэффициенте загрузки.

3. В системе  $H_2/H_2/1$  и в обычной системе  $H_2/H_2/1$  значения коэффициентов вариаций интервала между поступлениями  $c_\lambda$  и времени обслуживания требований  $c_\mu$ , перекрывают интервал от 1 до  $\infty$  и поэтому эти системы пригодны для описания и исследования современного телетрафика при широком диапазоне изменения его параметров.

4. Практическое применение полученных результатов при анализе современного телетрафика просматривается следующим образом. При коэффициентах вариации  $c$ , больших 1, закон распределения можно аппроксимировать гиперэкспоненциальным распределением 2-го порядка  $H_2$  либо  $\bar{H}_2$ . При этом необходимо учитывать уникальное свойство гиперэкспоненциального распределения, состоящего в том, что оно может определяться как двумя первыми моментами, так и тремя моментами. С точки зрения теории вероятностей описание закона распределения на уровне трех моментов все же точнее, но в таком случае применение изложенных результатов потребует большего объема вычислений из-за необходимости решения систем 3-х уравнений с использованием известного метода моментов.

5. Выявлена характерная особенность у гиперэкспоненциального закона распределения, заключающаяся в том, что он однозначно описывается как двумя первыми моментами, так и тремя первыми моментами. Представлен механизм их аппроксимации на практике с использованием известного метода моментов как с использованием двух, так и с использованием трех первых моментов.

Применение данного закона распределений в теории массового обслуживания расширяет диапазон изменения коэффициентов вариаций интервалов входного потока и времени обслуживания, а также дополняет и расширяет формулу (3.11) для среднего времени ожидания в системе  $G/G/1$ .

# ГЛАВА 4. РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Результаты этой главы излагаются в соответствии с работами автора настоящей диссертации [75, 79].

## 4.1 Модели СМО $H_2/M/1$ и $M/H_2/1$

Известно, что распределенная по гиперэкспоненциальному закону  $H_2$  случайная величина имеет коэффициент вариации больше 1. Учитывая тот факт, что распределение  $H_2$  является трехпараметрическим, применяется механизм аппроксимации произвольных законов распределений гиперэкспоненциальным как на уровне двух первых моментов, так и на уровне трех первых моментов [76,77,80].

Рассмотрим решение для системы  $H_2/M/1$ . В этом случае функция плотности времени обслуживания имеет вид:  $b(t) = \mu e^{-\mu t}$ , а распределение интервалов поступления остается в виде

$$a(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad (4.1)$$

В работе [30] получено решение для времени ожидания:

$$\bar{W} = 1/\sigma_1 - 1/\mu, \quad (4.2)$$

где  $\sigma_1 = (\sqrt{l_1^2/4 + l_0} - l_1/2)$  – корень многочлена  $s^2 - l_1 s - l_0$  с коэффициентами  $l_0 = \mu[\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p] - \lambda_1 \lambda_2$  и  $l_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \mu$ .

Решение для системы  $H_2/M/1$  также существенно зависит от момента 3-го порядка, эта зависимость продемонстрирована в работе [30].

Далее рассмотрим решение для системы  $M/H_2/1$  и его сравнение с формулой Полячека-Хинчина. В этом случае функция плотности распределения интервалов поступления имеет вид:  $a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ , а распределение времени обслуживания остается в виде:

$$b(t) = q\mu_1 e^{-\mu_1 t} + (1-q)\mu_2 e^{-\mu_2 t} \quad (4.3)$$

Среднее время ожидания

$$\bar{W} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} - \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}, \quad (4.4)$$

где  $-z_1 = -(h_1/2 - \sqrt{h_1^2/4 - h_0})$ ,  $-z_2 = -(h_1/2 + \sqrt{h_1^2/4 - h_0})$  два различных действительных отрицательных корня многочлена  $s^2 + h_1 s + h_0$  с коэффициентами:  $h_0 = \mu_1 \mu_2 - \lambda[(1-p)\mu_1 + p\mu_2]$  и  $h_1 = \mu_1 + \mu_2 - \lambda$ .

После несложных математических преобразований выражения (4.4)

получим:  $\bar{W} = \frac{\lambda \tau_\mu^2}{2(1-\rho)}$ , что полностью совпадает с формулой Полячека-

Хинчина для системы M/G/1 [30]. Заметим, что в этом случае решение не зависит от 3-го момента, а полностью зависит от первых двух моментов времени обслуживания [59,78].

В том случае, когда коэффициенты вариации интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  меньше 1, для анализа телетрафика можно использовать систему M/M/1 с временными сдвигами.

В случае, если коэффициенты вариации интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  больше 1, можно использовать систему  $H_2/H_2/1$ .

В смешанном случае можно использовать комбинацию рассмотренных законов распределений, что позволит рассматривать СМО с коэффициентами вариаций входных распределений в широком диапазоне от 0 до  $\infty$ .

## **4.2 Модели телетрафика на основе двойственных систем с временными сдвигами с гиперэкспоненциальными и экспоненциальными распределениями**

Системы массового обслуживания типа G/M/1 и M/G/1 широко используются в ТМО. Руководствуясь символикой Кендалла, стоит отметить, что для первой системы G означает произвольный закон распределения интервалов между требованиями входного потока, M – экспоненциальный закон времени обслуживания, а для второй системы ровно наоборот.

В работе [80] рассматривается задача определения характеристик систем массового обслуживания (СМО)  $H_2/M/1$  и  $M/H_2/1$  с временными сдвигами с гиперэкспоненциальным ( $H_2$ ) и экспоненциальным ( $M$ ) распределениями.

Данная задача решается с использованием классического метода спектрального разложения решения ИУЛ. В качестве входных распределений для рассматриваемых систем выбраны вероятностные смеси сдвинутых вправо от нулевой точки экспоненциальных распределений и сдвинутые экспоненциальные распределения. Для таких законов распределений метод спектрального разложения позволяет получить решение в замкнутой форме. Показано, что в таких системах с временными сдвигами среднее время ожидания требований в очереди меньше, чем в обычных системах. Это связано с тем, что операция сдвига во времени уменьшает величину коэффициентов вариаций интервалов между поступлениями и времени обслуживания, а как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания требований связано с этими коэффициентами вариаций квадратичной зависимостью. СМО  $H_2/M/1$  и  $M/H_2/1$  со сдвигами во времени вполне могут быть использованы в качестве математической модели современного телетрафика [81,82].

Для моделирования работы каналов в системах передачи данных широко используют теорию массового обслуживания на основе законов распределений, преобразуемых по Лапласу. Однако в научной литературе нет данных по результатам исследований систем массового обслуживания с запаздыванием, хотя в науке и технике вообще известны системы с запаздыванием.

В [67] рассмотрен пример работы дилера по продаже автомобилей как системы с несколькими запаздываниями безотносительно к системам массового обслуживания. В [83] представлены результаты приближения очередей к Интернету и мобильным сервисам в виде очередей с запаздыванием во времени. Показано, что если информация задерживается

достаточно долго, может происходить бифуркация Хопфа, которая может вызвать нежелательные колебания в очередях.

В работе [26] впервые приведены результаты по исследованию классической системы  $M/M/1$  со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями как системы с временными сдвигами, полученные классическим методом спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли (ИУЛ) [27]. В [26] показано, что среднее время ожидания требования в очереди в такой системе меньше, чем в классической системе  $M/M/1$  при одинаковом коэффициенте загрузки за счет того, что коэффициенты вариации времен поступления  $c_\lambda$  и обслуживания  $c_\mu$  становятся меньше единицы при параметре запаздывания  $t_0 > 0$ . Таким образом, операция сдвига во времени трансформирует марковскую систему в не марковскую.

За счет параметра сдвига  $t_0 > 0$  законов распределений такое предположение о среднем времени ожидания можно сделать и для других систем массового обслуживания. Идея работы [26] развита для системы с временными сдвигами  $H_2/H_2/1$  с гиперэкспоненциальными распределениями второго порядка в [61].

Другой подход к решению уравнения Линдли использован в [68]. Здесь вместо термина «спектральное разложение» [27] использована факторизация, а вместо функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  – компоненты факторизации  $\omega_+(z,t)$  и  $\omega_-(z,t)$  функции  $1 - z \cdot \chi(t)$ , где  $\chi(t)$  – характеристическая функция случайной величины  $\xi$  с произвольной функцией распределения  $C(t)$ , а  $z$  – любое число из интервала  $(-1,1)$ .

Необходимо найти решение для среднего времени ожидания требований в очереди для двойственной пары СМО с гиперэкспоненциальными и экспоненциальными входными распределениями  $H_2/M/1$  и  $M/H_2/1$ , а также для этих систем со сдвинутыми распределениями. Последние, в отличие от обычных систем обозначим  $H_2^-/M^-/1$  и  $M^-/H_2^-/1$ . Из

теории массового обслуживания известно, что все остальные характеристики СМО являются производными от среднего времени ожидания. Для решения поставленной задачи выбираем классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли, в котором сохраним стандартные обозначения.

Таким образом, предстоит вначале найти закон распределения случайной величины – времени ожидания в системе через спектральное разложение вида:  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ , где  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  некоторые рациональные функции от  $s$ , которые возможно разложить на множители,  $A^*(s)$  и  $B^*(s)$  – преобразования Лапласа функций плотности  $a(t)$  и  $b(t)$ , описывающих работу СМО.

Решение задачи для системы  $H_2/M/1$  с учетом временных сдвигов. Рассмотрим СМО  $H_2^-/M^-/1$ , на вход которой поступают требования, случайные интервалы между которыми распределены с функцией плотности

$$a(t) = \begin{cases} p\lambda_1 e^{-\lambda_1(t-t_0)} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-t_0)}, & t > t_0, \\ 0, & 0 \leq t \leq t_0, \end{cases} \quad (4.5)$$

а время обслуживания

$$b(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu(t-t_0)}, & t > t_0, \\ 0, & 0 \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (4.6)$$

В функции (4.5) вероятность  $p \in (0,1)$ , т.к. это распределение представляет собой сдвинутую вправо от нулевой точки на величину  $t_0$  вероятностную смесь экспоненциальных распределений с тремя параметрами  $(p, \lambda_1, \lambda_2)$ . Теперь нужно решить задачу определения параметров распределений (4.5) и (4.6). Для этого определим числовые характеристики интервала между соседними требованиями входного потока для новой системы, воспользовавшись преобразованием Лапласа функции (4.5)

$$A^*(s) = \left[ p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2} \right] \cdot e^{-t_0 s}.$$



Значение первой производной функции  $A^*(s)$  со знаком минус в точке  $s=0$  равно:  $-\frac{dA^*(s)}{ds}\Big|_{s=0} = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0$ . Отсюда среднее значение

интервалов между соседними требованиями:  $\bar{\tau}_\lambda = p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0$ . Значение второй производной функции  $A^*(s)$  в точке  $s=0$  дает второй начальный момент интервала поступления:  $\bar{\tau}_\lambda^2 = 2[p\lambda_1^{-2} + (1-p)\lambda_2^{-2}] + t_0^2 + 2t_0[p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1}]$ .

Используя полученные выражения для начальных моментов, определим значение квадрата коэффициента вариации интервала между поступлениями требований:  $c_\lambda^2 = \frac{[(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2]}{[t_0\lambda_1\lambda_2 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2}$ . Далее для определения неизвестных параметров распределения (4.5)  $\lambda_1, \lambda_2, p$  запишем следующую систему уравнений по известному методу моментов:

$$p\lambda_1^{-1} + (1-p)\lambda_2^{-1} + t_0 = \bar{\tau}_\lambda, \quad (4.7)$$

$$\frac{[(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2]}{[t_0\lambda_1\lambda_2 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2} = c_\lambda^2. \quad (4.8)$$

Исходя из вида уравнения (4.7), положим

$$\lambda_1 = 2p / (\bar{\tau}_\lambda - t_0), \quad \lambda_2 = 2(1-p) / (\bar{\tau}_\lambda - t_0) \quad (4.9)$$

и потребуем выполнения условия (4.8). Подставив решение (4.9) в равенство (4.8), получим уравнение четвертой степени относительно параметра  $p$ . Решив его с учетом условия  $0 < p < 1$ , отбросив тривиальные решения  $p=0$  и  $p=1$ , определяем параметр  $p$ :

$$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}{2[(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2 \bar{\tau}_\lambda^2]}}, \quad (4.10)$$

при этом можно воспользоваться любым из этих значений для  $p$ . Такой подход к аппроксимации законов распределения гиперэкспоненциальным распределением описан в работе [33]. Заметим, что в (4.8) коэффициент вариации  $c_\lambda > 0$ . Подобный подход к аппроксимации законов распределений применен в [34,39,51,53,84].

Для определения числовых характеристик времени обслуживания для распределения (4.6) воспользуемся полученными в [26] равенствами для среднего значения  $\bar{\tau}_\mu$  и коэффициента вариации времени обслуживания  $c_\mu$ :

$$\mu^{-1} + t_0 = \bar{\tau}_\mu, \quad (4.11)$$

$$(1 + \mu t_0)^{-1} = c_\mu. \quad (4.12)$$

Заметим, что здесь коэффициент вариации  $c_\mu < 1$  [26]. Из выражения (4.11) выразим интенсивность обслуживания

$$\mu = (\bar{\tau}_\mu - t_0)^{-1}, \quad (4.13)$$

и подставив (4.13) в (4.12) найдем параметр сдвига  $t_0$ :

$$t_0 = \bar{\tau}_\mu (1 - c_\mu). \quad (4.14)$$

Выражение (4.14) будет определять диапазон изменения параметра сдвига  $t_0$  для данной системы.

Для поиска решения для среднего времени ожидания в системе  $N_2/M/1$  необходимо записать преобразования Лапласа для функций (4.5) и (4.6) при  $t_0 = 0$ , т.е. для обычных распределений без сдвига:

$$A^*(s) = p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1 - p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2}, \quad B^*(s) = \left( \frac{\mu}{\mu + s} \right).$$

Тогда выражение для спектрального разложения решения ИУЛ  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$  для обычной системы  $N_2/M/1$ :

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[ p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1 - p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] \left( \frac{\mu}{\mu + s} \right) - 1 = \frac{-s(s + s_1)(s - s_2)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu + s)} \quad (4.15)$$

где  $-s_1 = -(\sqrt{c_1^2 / 4 + c_0} - c_1 / 2)$  – отрицательный корень,  $-s_1$  обозначен для удобства,  $s_2 = \sqrt{c_1^2 / 4 + c_0} + c_1 / 2$  – положительный корень многочлена  $s^2 - c_1 s - c_0$  с коэффициентами  $c_0 = \mu[\lambda_1(1 - p) + \lambda_2 p] - \lambda_1 \lambda_2$  и  $c_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \mu$ , которые выражаются через параметры распределений (4.5) и (4.6) при  $t_0 = 0$ .

Теперь найдем преобразования Лапласа для сдвинутых функций (4.5) и (4.6). Для этого воспользуемся теоремой запаздывания как свойством

преобразования Лапласа: для преобразуемой по Лапласу функции  $f(t)$  при любом  $t_0 > 0$  справедливо равенство  $L[f(t-t_0)] = e^{-st_0} \cdot F^*(s)$ , где  $\text{Re}(s) > 0$ .

Тогда справедливы равенства

$$A^*(s) = \left[ p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2} \right] e^{-t_0 s}, \quad B^*(s) = \frac{\mu}{s + \mu} e^{-t_0 s}.$$

Спектральное разложение решения ИУЛ  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$

для системы  $N_2^- / M^- / 1$  примет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[ p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] e^{t_0 s} \left( \frac{\mu}{\mu + s} \right) e^{-t_0 s} - 1 = \frac{s(s^2 - c_1 s - c_0)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu + s)} = \frac{-s(s + s_1)(s - s_2)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu + s)}.$$

Здесь показатели степени у экспонент в выражении для спектрального разложения обнуляются и тем самым операция сдвига в спектральном разложении нивелируется. Таким образом, основное выражение  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$  для метода спектрального разложения для системы  $N_2^- / M^- / 1$  имеет такой же вид (4.15), как и для обычной системы  $N_2 / M / 1$ , следовательно, спектральное разложение в этом случае инвариантно к операции сдвига во времени закона распределения.

В последнем выражении  $-s_1 = c_1 / 2 - \sqrt{c_1^2 / 4 + c_0}$  – отрицательный корень, а  $s_2 = c_1 / 2 + \sqrt{c_1^2 / 4 + c_0}$  – положительный корень многочлена  $s^2 - c_1 s - c_0 = 0$  в числителе разложения с коэффициентами  $c_0 = \mu[(1-p)\lambda_1 + p\lambda_2] - \lambda_1 \lambda_2$  и  $c_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \mu$ . Компоненты спектрального разложения  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  с учетом условий, которым они должны удовлетворять, в данном случае имеют вид:  $\psi_+(s) = s(s + s_1) / (s + \mu)$ ,  $\psi_-(s) = (s - \lambda_1)(\lambda_2 - s) / (s - s_2)$ .

Далее по методике спектрального разложения найдем константу  $K$ :

$$K = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{(s + s_1)}{(s + \mu)} = \frac{s_1}{\mu},$$

которая представляет собой вероятность того, что поступающее в систему требование застанет ее свободной. Построим функцию  $\Phi_+(s) = K / \psi_+(s)$ , через которую найдем преобразование Лапласа

функции плотности времени ожидания:  $W^*(s) = s \cdot \Phi_+(s) = \frac{s_1(s+\mu)}{\mu(s+s_1)}$ .

Производная от функции  $W^*(s)$  со знаком минус в точке  $s=0$  и даст среднее

время ожидания:  $-\frac{dW^*(s)}{ds}\Big|_{s=0} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{s_1(s+\mu)}{\mu(s+s_1)}\right]\Big|_{s=0} = \frac{1}{s_1} - \frac{1}{\mu}$ .

Окончательно, среднее время ожидания в системе в стационарном режиме, определяемом условием  $0 < \rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda < 1$ , где  $\rho$  – коэффициент загрузки системы, выражается формулой

$$\bar{W} = 1/s_1 - 1/\mu, \quad (4.16)$$

где  $s_1 = (\sqrt{c_1^2/4 + c_0} - c_1/2)$  абсолютное значение отрицательного корня  $-s_1$ .

Тем самым, мы можем воспользоваться для системы с временными сдвигами  $H_2^-/M^-/1$  известным результатом по среднему времени ожидания для обычной системы  $H_2/M/1$  (4.16) только уже с измененными вследствие операции сдвига параметрами согласно выражениям (4.9), (4.10), (4.13) и (4.14).

Тогда алгоритм определения среднего времени ожидания для системы  $H_2^-/M^-/1$  при заданных входных параметрах  $\bar{\tau}_\lambda$ ,  $\bar{\tau}_\mu$ ,  $c_\lambda$ ,  $c_\mu$  сводится к последовательному нахождению неизвестных параметров распределений (4.5) и (4.6)  $\lambda_1, \lambda_2, \rho, \mu$  из выражений (4.9), (4.10), (4.13), затем – к нахождению нужного корня  $-s_1$  квадратного уравнения  $s^2 - c_1s - c_0 = 0$  и к применению расчетной формулы (4.16).

В таблице 4.1 приведены результаты расчетов времени ожидания для системы  $H_2^-/M^-/1$  в пакете Mathcad при коэффициентах загрузки  $\rho = 0,1; 0,5$  и  $0,9$  при нормированном времени обслуживания  $\bar{\tau}_\mu = 1$  и коэффициентах вариаций  $c_\lambda = 2; 4; 8$  и  $c_\mu = 0,1; 0,5, 0,9$ . В этом случае перечисленным значениям  $c_\mu$  согласно (4.12) соответствуют значения параметра сдвига  $t_0 = 0,9; 0,5$  и  $0,1$  соответственно. В правой колонке для сравнения приведены

результаты для обычной системы  $H_2/M/1$ . Результаты расчетов полностью подтверждают справедливость нашего предположения о времени ожидания в системе с временными сдвигами.

Таблица 4.1 Результаты вычислительных экспериментов для СМО  $H_2/M/1$  и  $H_2/M/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания			
$\rho$	$c_\mu$ $c_\lambda$	Для СМО $H_2^-/M^-/1$			Для СМО $H_2/M/1$
		$c_\mu=0,1$ ( $t_0=0,9$ )	$c_\mu=0,5$ ( $t_0=0,5$ )	$c_\mu=0,9$ ( $t_0=0,1$ )	
0,1	2	0,001	0,05	0,15	0,19
	4	0,002	0,06	0,18	0,23
	8	0,002	0,06	0,20	0,25
0,5	2	0,02	0,60	1,82	2,16
	4	0,02	0,84	3,80	4,83
	8	0,02	0,95	7,02	10,40
0,9	2	0,92	15,46	21,12	22,41
	4	1,35	57,91	73,18	75,79
	8	1,64	227,6	281,2	289,1

Как видно из таблицы, с уменьшением значения параметра сдвига  $t_0$  среднее время ожидания в системе с временными сдвигами  $H_2^-/M^-/1$  стремится к значению среднего времени ожидания в обычной системе  $H_2/M/1$ , что подтверждает полную адекватность построенной модели. С другой стороны, операция сдвига в зависимости от величины параметра сдвига  $t_0$  во много раз уменьшает среднее время ожидания в системе с временными сдвигами  $H_2^-/M^-/1$ .

В двойственной системе  $M^-/H_2^-/1$  распределения (4.5) и (4.6), а также их преобразования Лапласа поменяются местами. Закон распределения интервалов между соседними требованиями входного потока в виде функции плотности будет иметь вид:

$$a(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & t > t_0, \\ 0, & 0 \leq t \leq t_0, \end{cases} \quad (4.7)$$

а время обслуживания задается функцией плотности

$$b(t) = \begin{cases} q\mu_1 e^{-\mu_1(t-t_0)} + (1-q)\mu_2 e^{-\mu_2(t-t_0)}, & t > t_0, \\ 0, & 0 \leq t \leq t_0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Преобразования Лапласа функций (4.17) и (4.18) будут соответственно:

$$A^*(s) = \left( \frac{\lambda}{\lambda+s} \right) e^{-t_0 s}, \quad B^*(s) = \left[ q \frac{\mu_1}{s+\mu_1} + (1-q) \frac{\mu_2}{s+\mu_2} \right] e^{-t_0 s}.$$

Тогда спектральное разложение для решения ИУЛ для системы  $M^-/N_2^-/1$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} &= \left( \frac{\lambda}{\lambda-s} \right) e^{t_0 s} \left[ q \frac{\mu_1}{\mu_1+s} + (1-q) \frac{\mu_2}{\mu_2+s} \right] e^{-t_0 s} - 1 = \\ &= \frac{s(s^2 + l_1 s + l_0)}{(\lambda_1 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)} = \frac{s(s + \sigma_1)(s + \sigma_2)}{(\lambda_1 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}, \end{aligned}$$

где  $-\sigma_1 = -(l_1/2 - \sqrt{l_1^2/4 - l_0})$ ,  $-\sigma_2 = -(l_1/2 + \sqrt{l_1^2/4 - l_0})$  два различных действительных отрицательных корня квадратного уравнения  $s^2 + l_1 s + l_0 = 0$  с коэффициентами  $l_0 = \mu_1 \mu_2 - \lambda[(1-q)\mu_1 + q\mu_2]$  и  $l_1 = \mu_1 + \mu_2 - \lambda$ .

Здесь опять показатели степени у экспонент в выражении обнуляются и тем самым, операция сдвига в спектральном разложении нивелируется. Таким образом, основное выражение  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s)/\psi_-(s)$  для метода спектрального разложения для системы  $M^-/N_2^-/1$  будет иметь такой же вид, как и для обычной системы  $M/N_2/1$ . Окончательно, спектральное разложение имеет вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{s(s + \sigma_1)(s + \sigma_2)}{(\lambda_1 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}. \quad (4.19)$$

Наличие таких корней  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  следует из существования и единственности такого разложения или же факторизации.

Компоненты спектрального разложения  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  в данном случае

имеют вид:  $\psi_+(s) = \frac{s(s + \sigma_1)(s + \sigma_2)}{(s + \mu_1)(s + \mu_2)}$ ,  $\psi_-(s) = (\lambda - s)$ . Далее по методике

спектрального разложения найдем константу  $K$ :

$$K = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\Psi_+(s)}{s} = \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{(s + \sigma_1)(s + \sigma_2)}{(s + \mu_1)(s + \mu_2)} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\mu_1 \mu_2}.$$

Через константу  $K$  найдем преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания:  $W^*(s) = s \frac{K}{\Psi_+(s)} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 (s + \mu_1)(s + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2 (s + \sigma_1)(s + \sigma_2)}$ . Производная от функции  $W^*(s)$  со знаком минус в т.  $s=0$  и даст среднее время ожидания:

$$-\frac{dW^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} = -\frac{d}{ds} \left[ \frac{\sigma_1 \sigma_2 (s + \mu_1)(s + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2 (s + \sigma_1)(s + \sigma_2)} \right] \Big|_{s=0} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} - \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}.$$

Окончательно, среднее время ожидания в стационарном режиме в этом случае примет вид

$$\bar{W} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} - \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}. \quad (4.20)$$

Для практического применения расчетной формулы (4.20) требуется записать выражения для определения неизвестных параметров (4.17) и (4.18). Для среднего значения интервала входного потока требований  $\bar{\tau}_\lambda$  и коэффициента вариации  $c_\lambda$  имеем:

$$\lambda^{-1} + t_0 = \bar{\tau}_\lambda, \quad (4.21)$$

$$(1 + \lambda t_0)^{-1} = c_\lambda. \quad (4.22)$$

Заметим, что здесь коэффициент вариации  $c_\lambda < 1$  при  $t_0 > 0$ . Из выражения (4.21) выразим интенсивность входного потока

$$\lambda = (\bar{\tau}_\lambda - t_0)^{-1}. \quad (4.23)$$

Неизвестные параметры распределения (4.18)  $\mu_1, \mu_2, q$  определяются аналогично для системы  $N_2^- / M^- / 1$  заменой символа  $\lambda$  на  $\mu$ :

$$\mu_1 = 2q / (\bar{\tau}_\mu - t_0), \quad \mu_2 = 2(1-q) / (\bar{\tau}_\mu - t_0), \quad q = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\bar{\tau}_\mu - t_0)^2}{2[(\bar{\tau}_\mu - t_0)^2 + c_\mu^2 \bar{\tau}_\mu^2]}}. \quad (4.24)$$

Запишем квадрат коэффициента вариации времени обслуживания:

$$\frac{[(1-q^2)\mu_1^2 - 2\mu_1\mu_2q(1-q) + q(2-q)\mu_2^2]}{[t_0\mu_1\mu_2 + (1-q)\mu_1 + q\mu_2]^2} = c_\mu^2$$

и оценим влияние на него параметра сдвига  $t_0 > 0$ . Сравнение с квадратом коэффициента вариации времени обслуживания при  $t_0 = 0$ , т.е. в случае не сдвинутого распределения, показывает, что  $c_\mu$  уменьшается в  $1 + t_0\mu_1\mu_2 / [\mu_1(1-q) + q\mu_2]$  раз. Тогда алгоритм определения времени ожидания для системы с временными сдвигами  $M^-/H_2^-/1$  сводится к последовательному решению уравнений (4.24), (4.23), (4.22) при заданных входных параметрах:  $\bar{t}_\lambda$ ,  $\bar{t}_\mu$ ,  $c_\lambda$ ,  $c_\mu$ ,  $t_0$ , а затем к нахождению отрицательных корней  $\sigma_1, \sigma_2$  многочлена  $s^2 + h_1s + h_0$  и использованию расчетной формулы (4.20).

В таблице 4.2 приведены результаты расчетов времени ожидания в пакете Mathcad при коэффициентах загрузки  $\rho = 0,1; 0,5$  и  $0,9$  при нормированном времени обслуживания  $\bar{t}_\mu = 1$  и коэффициенте вариации  $c_\mu = 2; 4; 8$  для обычной системы  $M/H_2/1$ .

Таблица 4.2 Результаты вычислительных экспериментов для СМО  $M^-/H_2^-/1$  и  $M/H_2/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания					
$\rho$	$c_\lambda \backslash c_\mu$	Для системы $M^-/H_2^-/1$			Для системы $M/H_2/1$		
		$c_\mu = 1,05$	$c_\mu = 2,11$	$c_\mu = 4,21$	$c_\mu = 2$	$c_\mu = 4$	$c_\mu = 8$
0,1	0,91 ( $t_0=0,9$ )	0,06	0,25	0,99	0,28	0,94	3,61
0,5	0,55 ( $t_0=0,9$ )	0,56	2,23	8,87	2,50	8,50	32,50
0,9	0,15 ( $t_0=0,9$ )	5,01	20,08	79,80	22,50	76,50	292,50

Согласно равенству (4.32), при таких значениях коэффициента загрузки  $\rho$  и параметре сдвига  $t_0 = 0,9$ , коэффициент вариации  $c_\lambda$  примет значения  $c_\lambda = 0,91; 0,55; 0,19$  соответственно. Согласно тому факту, что коэффициент вариации  $c_\mu$  при таких входных данных уменьшается в  $1 + t_0\mu_1\mu_2 / [\mu_1(1-q) + q\mu_2] = 1,9$  раза, для системы  $M^-/H_2^-/1$  коэффициенты вариации



будут равны  $c_{\mu} = 1,05; 2,11; 4,21$ . В правой колонке для сравнения приведены результаты для обычной системы  $M/H_2/1$ . Результаты расчетов полностью подтверждают справедливость нашего предположения о времени ожидания в системе с временными сдвигами.

Операция сдвига во времени в законах распределений уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. В связи с тем, что среднее время ожидания в системе  $G/G/1$  связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в системе с временными сдвигами будет меньше, чем в обычной системе при одинаковом коэффициенте загрузки. Например, для системы  $H_2^-/M^-/1$  при параметре сдвига  $t_0=0,9$ , коэффициент вариации времени обслуживания уменьшается с 1 для обычной системы до 0,1 для системы с временными сдвигами, а время ожидания уменьшается с 0,19 до 0,001 единицы времени. Для системы  $M^-/H_2^-/1$  коэффициент вариации времени обслуживания уменьшается с 8 для обычной системы до 4,21 для системы с временными сдвигами, а время ожидания уменьшается с 292,5 до 79,8 единицы времени, т.е. почти в четыре раза.

Практическое применение полученных результатов при анализе современного телетрафика просматривается следующим образом: при коэффициентах вариации  $c$ , больших 1, закон распределения можно аппроксимировать гиперэкспоненциальным распределением 2-го порядка  $H_2$  либо  $H_2^-$ . При этом необходимо учесть уникальное свойство гиперэкспоненциального распределения, состоящего в том, что оно может определяться как двумя первыми моментами, так и тремя моментами. С точки зрения теории вероятностей описание закона распределения на уровне трех моментов все же точнее, но в таком случае применение изложенных результатов потребует большего объема вычислений из-за необходимости

решения систем 3-х уравнений с использованием известного метода моментов [46,47].

Изложенные результаты справедливы только для одинаковых параметров сдвига  $t_0$  для распределения времени между поступлениями требований и времени их обслуживания.

### 4.3 Выводы по четвертой главе

Разработаны математические модели СМО  $H_2^-/M^-/1, M^-/H_2^-/1$  на основании которых выполнено исследование их возможностей, выполнен сравнительный анализ с классическими СМО. Приведем основные результаты, полученные из анализа этих математических моделей.

1. В том случае, когда коэффициенты вариации интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  меньше 1, для анализа телетрафика можно использовать систему  $M/M/1$  с временными сдвигами, а если коэффициенты вариации интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  больше 1, можно использовать систему  $H_2/H_2/1$ . В смешанном случае можно использовать комбинацию рассмотренных законов распределений, что позволит рассматривать СМО с коэффициентами вариаций входных распределений в широком диапазоне от 0 до  $\infty$ .

3. Операция сдвига во времени в законах распределений уменьшает коэффициенты вариаций интервала между поступлениями и времени обслуживания требований. В связи с тем, что среднее время ожидания в системе  $G/G/1$  связано с коэффициентами вариаций интервалов поступления и обслуживания квадратичной зависимостью, среднее время ожидания в системе с временными сдвигами будет меньше, чем в обычной системе при одинаковом коэффициенте загрузки.

4. Для системы  $H_2^-/M^-/1$  при параметре сдвига  $t_0=0,9$  коэффициент вариации времени обслуживания уменьшается с 1 для обычной системы до

0,1 для системы с временными сдвигами, а время ожидания уменьшается с 0,19 до 0,001 единицы времени. Для системы  $M^-/H_2^-/1$  коэффициент вариации времени обслуживания уменьшается с 8 для обычной системы до 4,21 для системы со сдвигами во времени, а время ожидания уменьшается с 292,5 до 79,8 единицы времени, т.е. почти в четыре раза.

5. Практическое применение полученных результатов при анализе современного телетрафика просматривается следующим образом: при коэффициентах вариации  $c$ , больших 1, закон распределения можно аппроксимировать гиперэкспоненциальным распределением 2-го порядка  $H_2$  либо  $H_2^-$ . При этом необходимо учесть уникальное свойство гиперэкспоненциального распределения, состоящего в том, что оно может определяться как двумя первыми моментами, так и тремя моментами.

## **ГЛАВА 5. РАЗРАБОТКА КОМПЛЕКСА ПРОГРАММ ДЛЯ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК СМО С ВРЕМЕННЫМИ СДВИГАМИ**

Результаты этой главы излагаются в соответствии с работами автора настоящей диссертации [85,88,89].

### **5.1 Моделирование систем передачи данных с использованием современных информационных технологий**

При моделировании компьютерных и телекоммуникационных сетей, широко используются обе составляющие математического моделирования. Это имитационное моделирование и аналитическое моделирование на основе ТМО. При этом исследователи всегда могут сопоставить результаты, полученные путем имитационного и аналитического моделирования. Из современных технологий имитационного моделирования можно выделить технологии IT GURU Academic Edition, представленные программными продуктами Opnet Modeler и Riverbed Modeler с мощными графическими редакторами. Графические редакторы позволяют создавать имитационные модели систем передачи данных любой сложности, а запуск и прогон их моделей получать статистики основных показателей производительности этих систем.

Сопоставление результатов имитации с результатами систем массового обслуживания (СМО) типа G/G/1 позволяет оценить адекватность тех и других математических моделей. В работе [85] обобщены результаты по всем публикациям автора по системам G/G/1 на основе сдвинутых во времени законов распределений, таких как: экспоненциальный, гиперэкспоненциальный и распределение Эрланга.

Таким образом, данные законы распределений для используемых случайных величин обеспечивают коэффициенты вариации меньше, равных и больше единицы. Этот факт с точки зрения теории массового

обслуживания важен, т.к. средняя задержка заявок в системе напрямую зависит от коэффициентов вариаций временных интервалов поступления и обслуживания заявок.

При моделировании систем передачи данных широко используются методы и средства математического моделирования, включая имитационное и аналитическое моделирование на основе теории массового обслуживания [27,28,43]. В имитационном моделировании перспективным на взгляд автора являются технологии IT GURU Academic Edition в виде программных продуктов OPNET Modeler, RIVERBED Modeler [86,87]. С помощью этих программных продуктов можно моделировать сети передачи данных различной степени сложности с использованием большого спектра современных протоколов.

СМО с сдвинутыми вправо от нулевой точки законами распределений, таких как экспоненциальный, гиперэкспоненциальный и распределение Эрланга относятся к типу G/G/1, которые являются системами с общими законами распределений интервалов между заявками входного потока и времени обслуживания.

Как известно, для систем G/G/1 нельзя получить решения для основной характеристики СМО – средней задержки заявок в очереди в общем случае. Поэтому важны исследования таких систем для частных случаев законов распределений.

В системах с временными сдвигами средняя задержка заявок меньше, чем в обычных системах. Полученные расчетные формулы для средней задержки заявок расширяют и дополняют известную незавершенную формулу теории массового обслуживания для средней задержки заявок для систем G/G/1. Предложенный подход позволяет рассчитать среднее значение задержки для указанных систем в математических пакетах для широкого диапазона изменения параметров трафика.

Далее будут представлены полученные результаты по системам  $E_2^-/E_2^-/1$ ,  $E_2^-/M^-/1$ ,  $M^-/E_2^-/1$ ,  $H_2^-/H_2^-/1$ ,  $H_2^-/M^-/1$ ,  $M^-/H_2^-/1$  [86].

Производится поиск основной характеристики – средней задержки заявок в очереди в системах массового обслуживания, образованных сдвинутыми вправо от нулевой точки законами распределений: экспоненциальным (М), Эрланга второго порядка (E<sub>2</sub>), гиперэкспоненциальным второго порядка (H<sub>2</sub>). Эти сдвинутые законы распределений в отличие от обычных обозначим М<sup>-</sup>, E<sub>2</sub><sup>-</sup>, H<sub>2</sub><sup>-</sup>.

Для краткого изложения этих результатов в таблице 5.1 сведем числовые характеристики рассматриваемых законов распределений.

Таблица 5.1 Числовые характеристики распределений

Распределение	Первый начальный момент $\bar{\tau}_\lambda$	Второй начальный момент $\bar{\tau}_\lambda^2$	Квадрат коэффициента вариации $c_\lambda^2$
М	$1/\lambda$	$2/\lambda^2$	1
E <sub>2</sub>	$1/\lambda$	$3/(2\lambda^2)$	1/2
H <sub>2</sub>	$p/\lambda_1 + (1-p)/\lambda_2$	$2[p/\lambda_1^2 + (1-p)/\lambda_2^2]$	$\frac{(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2}{[(1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2}$
М <sup>-</sup>	$\frac{1}{\lambda} + t_0$	$2(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{t_0}{\lambda}) + t_0^2$	$\frac{1}{(1 + \lambda t_0)^2}$
E <sub>2</sub> <sup>-</sup>	$\frac{1}{\lambda} + t_0$	$\frac{3}{2\lambda^2} + 2\frac{t_0}{\lambda} + t_0^2$	$\frac{1}{2(1 + \lambda t_0)^2}$
H <sub>2</sub> <sup>-</sup>	$\frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2} + t_0$	$t_0^2 + 2t_0[\frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}] + 2[\frac{p}{\lambda_1^2} + \frac{(1-p)}{\lambda_2^2}]$	$\frac{(1-p^2)\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2p(1-p) + p(2-p)\lambda_2^2}{[t_0\lambda_1\lambda_2 + (1-p)\lambda_1 + p\lambda_2]^2}$

Числовые характеристики сдвинутых распределений (табл. 5.1) явно свидетельствуют о существенном влиянии на них параметра сдвига  $t_0$ , следовательно, и основная характеристика СМО – средняя задержка заявок в очереди будет функцией от параметра сдвига. Этот факт будет подтвержден результатами вычислительных экспериментов ниже.

Теперь необходимо определить неизвестные параметры данных распределений. Эти параметры также получены для случаев функций

плотности распределения интервалов входных потоков  $a(t)$  сведены в таблице 5. 2.

Таблица 5.2 Параметры сдвинутых распределений, полученные методом моментов

Распределение	Плотность $a(t)$	Параметры $p, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$		
$M^-$	$\lambda e^{-\lambda(t-t_0)}$	$\lambda = \frac{1}{\bar{\tau}_\lambda - t_0}$		
$E_2^-$	$4\lambda^2(t-t_0)e^{-2\lambda(t-t_0)}$	$\lambda = \frac{1}{\bar{\tau}_\lambda - t_0}$		
$H_2^-$	$p\lambda_1 e^{-\lambda_1(t-t_0)} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-t_0)}$	$p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}{2[(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2 \bar{\tau}_\lambda^2]}}$	$\lambda_1 = \frac{2p}{(\bar{\tau}_\lambda - t_0)}$	$\lambda_2 = \frac{2(1-p)}{(\bar{\tau}_\lambda - t_0)}$

Аналогичные параметры для распределений времени обслуживания  $b(t)$  будут иметь место путем замены  $\lambda$  на  $\mu$ .

Таблица 5.3 Преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания, компоненты спектральных разложений решения ИУЛ, расчетные выражения для среднего времени ожидания

СМО	Преобразования Лапласа функции плотности времени ожидания и компоненты спектрального разложения	Расчетные выражения для среднего времени ожидания
$E_2^- / E_2^- / 1$	$W^*(s) = \frac{s_1 s_2 (2\mu + s)^2}{4\mu^2 s (s + s_1)(s + s_2)},$ $\psi_+(s) = \frac{s(s + s_1)(s + s_2)}{(2\mu + s)^2},$ $\psi_-(s) = -\frac{(2\lambda - s)^2}{(s - s_3)}$	$\bar{W} = \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} - \frac{1}{\mu}, \text{ где}$ $s_1 = (\mu - \lambda) + \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8\lambda\mu}, \quad s_2 = 2(\mu - \lambda).$
$M^- / E_2^- / 1$	$W^*(s) = \frac{(1-p)(2\mu + s)^2}{(s + s_1)(s + s_2)},$ $\psi_+(s) = \frac{s(s + s_1)(s + s_2)}{(2\mu + s)^2},$ $\psi_-(s) = \lambda - s$	$\bar{W} = \frac{3p(\bar{\tau}_\mu - t_0)}{4(1-p)}$

$E_2^- / M^- / 1$	$W^*(s) = \frac{s_1(s+\mu)}{\mu(s+s_1)},$ $\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)}{s+\mu},$ $\psi_-(s) = -\frac{(2\lambda-s)^2}{s-s_2}$	$\bar{W} = 1/s_1 - 1/\mu$ , где $s_1 = (\mu - 4\lambda)/2 + \sqrt{[(\mu - 4\lambda)/2]^2 + 4\lambda(\mu - \lambda)}$
$M^- / H_2^- / 1$	$W^*(s) = \frac{s_1 s_2 (s + \mu_1)(s + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2 (s + s_1)(s + s_2)},$ $\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(s+\mu_1)(s+\mu_2)},$ $\psi_-(s) = \lambda - s$	$\bar{W} = \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} - \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}$ , где $s_1, s_2$ абсолютные значения отрицательных нулей числителя функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$
$H_2^- / M^- / 1$	$W^*(s) = \frac{s_1(s+\mu)}{\mu(s+s_1)},$ $\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)}{s+\mu},$ $\psi_-(s) = \frac{(s-\lambda_1)(\lambda_2-s)}{s-s_2}$	$\bar{W} = 1/s_1 - 1/\mu$ , где $s_1$ абсолютное значение отрицательного нуля числителя функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$
$H_2^- / H_2^- / 1$	$W^*(s) = \frac{s_1 s_2 (s + \mu_1)(s + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2 (s + s_1)(s + s_2)},$ $\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(s+\mu_1)(s+\mu_2)},$ $\psi_-(s) = \frac{(s-\lambda_1)(\lambda_2-s)}{s-s_3}$	$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}$ , где $s_1, s_2$ абсолютные значения отрицательных нулей числителя функции $\psi_+(s)/\psi_-(s)$

В таблицах 5.4–5.10 для примера демонстрации разработанных алгоритмов, приведены данные расчетов в пакете MathCAD, для случаев малой, средней и высокой нагрузки  $\rho = 0,1; 0,5; 0,9$  для широкого диапазона изменения коэффициентов вариаций  $c_\lambda$ ,  $c_\mu$  и параметра сдвига  $t_0$ .

Данные таблицы позволяют количественно оценить, насколько уменьшается средняя задержка заявок в очереди в системе с временными сдвигами. Коэффициент загрузки  $\rho$  в таблицах 5.4–5.10 определяется отношением средних интервалов  $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda$  также, как и в имитационном моделировании.



Таблица 5.4 Результаты численных экспериментов для СМО  $E_2^-/E_2^-/1$  и  $E_2/E_2/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
$\rho$	$c_\lambda$	$c_\mu$	$t_0$	для системы $E_2^-/E_2^-/1$	для системы $E_2/E_2/1$
0,1	0,643	0,071	0,9	0,000	0,017
	0,672	0,354	0,5	0,002	
	0,700	0,636	0,1	0,013	
	0,706	0,700	0,01	0,016	
0,5	0,389	0,071	0,9	0,001	0,390
	0,530	0,354	0,5	0,081	
	0,672	0,636	0,1	0,309	
	0,704	0,700	0,01	0,382	
0,9	0,134	0,071	0,9	0,034	4,359
	0,389	0,354	0,5	1,057	
	0,643	0,636	0,1	3,519	
	0,701	0,700	0,01	4,271	

Таблица 5.5 Результаты численных экспериментов для СМО  $E_2/M/1$  и  $E_2^-/M^-/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
$\rho$	$c_\lambda$	$c_\mu$	$t_0$	для СМО $E_2^-/M^-/1$	для СМО $E_2/M/1$
0,1	0,643	0,1	0,9	0,000	0,030
	0,672	0,5	0,5	0,005	
	0,700	0,9	0,1	0,023	
	0,706	0,99	0,01	0,029	
0,5	0,389	0,1	0,9	0,003	0,618
	0,530	0,5	0,5	0,132	
	0,672	0,9	0,1	0,491	
	0,704	0,99	0,01	0,605	
0,9	0,134	0,1	0,9	0,055	6,588
	0,389	0,5	0,5	1,609	
	0,643	0,9	0,1	5,322	
	0,701	0,99	0,01	6,456	

Таблица 5.6 Результаты численных экспериментов для СМО  $M^-/E_2^-/1$  и  $M/E_2/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
$\rho$	$c_\lambda$	$c_\mu$	$t_0$	для системы $M^-/E_2^-/1$	для системы $M/E_2/1$
0,1	0,643	0,071	0,9	0,001	0,083
	0,950	0,354	0,5	0,021	
	0,990	0,636	0,1	0,068	
	0,999	0,700	0,01	0,082	
0,5	0,550	0,071	0,9	0,008	0,750
	0,750	0,354	0,5	0,188	
	0,950	0,636	0,1	0,608	
	0,995	0,700	0,01	0,735	
0,9	0,190	0,071	0,9	0,068	6,750
	0,550	0,354	0,5	1,688	
	0,910	0,636	0,1	5,468	
	0,991	0,700	0,01	6,616	

Таблица 5.7 Результаты численных экспериментов для СМО  $H_2^-/H_2^-/1$  при  $c_\lambda=c_\mu=2$  для системы  $H_2/H_2/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
$\rho$	$c_\lambda$	$c_\mu$	$t_0$	для системы $H_2^-/H_2^-/1$	для системы $H_2/H_2/1$
0,1	1,999	1,99	0,01	0,439	0,45
	1,99	1,90	0,1	0,392	
	1,95	1,50	0,5	0,217	
	1,901	1,01	0,99	0,064	
0,5	1,995	1,99	0,01	3,995	4,04
	1,95	1,90	0,1	3,564	
	1,75	1,50	0,5	1,918	
	1,505	1,01	0,99	0,529	
0,9	1,991	1,99	0,01	35,823	36,20
	1,91	1,90	0,1	32,507	
	1,55	1,50	0,5	19,268	
	1,109	1,01	0,99	4,867	

Таблица 5.8 Результаты численных экспериментов для СМО  $H_2^- / M^- / 1$

при  $c_\lambda = 2$  для СМО  $H_2/M/1$

Входные параметры				Среднее время ожидания	
$\rho$	$c_\lambda$	$c_\mu$	$t_0$	для системы $H_2^- / M^- / 1$	для системы $H_2/M/1$
0,1	1,999	0,99	0,01	0,183	0,19
	1,99	0,9	0,1	0,151	
	1,95	0,5	0,5	0,046	
	1,901	0,01	0,99	0,000	
0,5	1,995	0,99	0,01	2,122	2,16
	1,95	0,9	0,1	1,773	
	1,75	0,5	0,5	0,547	
	1,505	0,01	0,99	0,000	
0,9	1,991	0,99	0,01	22,120	22,41
	1,91	0,9	0,1	19,590	
	1,55	0,5	0,5	9,793	
	1,109	0,01	0,99	0,002	

Таблица 5.9 Результаты численных экспериментов для СМО  $M^- / H_2^- / 1$

и  $M/H_2/1$  при  $t_0=0,01$

Входные параметры		Среднее время ожидания для СМО $M/H_2/1$			
$\rho$	$c_\lambda$	$c_\mu=1$	$c_\mu=2$	$c_\mu=4$	$c_\mu=8$
0,1	1	0,11	0,28	0,94	3,61
0,5	1	1,00	2,50	8,50	32,50
0,9	1	9,00	22,50	76,5	292,5
Входные параметры		Среднее время ожидания для СМО $M^- / H_2^- / 1$			
$\rho$	$c_\lambda$	$c_\mu=0,99$	$c_\mu=1,99$	$c_\mu=3,99$	$c_\mu=7,99$
0,1	0,999	0,11	0,27	0,94	3,60
0,5	0,995	0,98	2,47	8,45	32,41
0,9	0,991	8,90	22,23	76,05	291,69

Таблица 5.10 Результаты численных экспериментов для СМО

$M^- / H_2^- / 1$  и  $M/H_2/1$  при  $t_0=0,99$

Входные параметры		Среднее время ожидания для СМО $M/H_2/1$			
$c_\lambda$	$c_\mu=1$	$c_\lambda$	$c_\mu=1$	$c_\lambda$	$c_\mu=8$
0,1	1	0,11	0,28	0,94	3,61
0,5	1	1,00	2,50	8,50	32,50
0,9	1	9,00	22,50	76,5	292,5
Входные параметры		Среднее время ожидания для СМО $M^- / H_2^- / 1$			
$c_\lambda$	$c_\mu=0,01$	$c_\lambda$	$c_\mu=0,01$	$c_\lambda$	$c_\mu=7,99$
0,1	0,901	0,000	0,057	0,503	2,730
0,5	0,505	0,000	0,510	4,530	24,570
0,9	0,109	0,001	4,591	40,771	221,131

Представлены спектральные разложения решения интегрального уравнения Линдли для шести рассмотренных СМО и полученные на их основе расчетные формулы для средней задержки в очереди. Результаты расчетов, как и следовало ожидать, подтверждают, что уменьшение коэффициентов вариации  $c_\lambda$  и  $c_\mu$  за счет введения параметра сдвига  $t_0 > 0$  в законы распределений входного потока и времени обслуживания влечет за собой уменьшение средней задержки в системах с временными сдвигами в несколько раз.

Адекватность представленных результатов, с одной стороны, подтверждается тем, что при стремлении параметра сдвига  $t_0$  к нулю, средняя задержка заявок в очереди в системе с временными сдвигами стремится к его значению в обычной системе. С другой стороны, адекватность представленных математических моделей систем с временными сдвигами достигается корректным использованием классического метода спектрального разложения интегрального уравнения Линдли для рассмотренных систем [89,90].

Полученные результаты могут быть использованы в современной теории телетрафика в качестве практического применения при моделировании задержек в реальных системах передачи данных.

## **5.2 Описание разработки программ расчета характеристик систем массового обслуживания с временными сдвигами**

Программа может быть использована проектными, научно-исследовательскими организациями при анализе и проектировании транспортной нагрузки в сетях связи, для анализа вероятностных и временных характеристик сетевого узла, представленного в виде системы массового обслуживания.

Представляет собой последовательность команд Mathcad. Принимает входные параметры систем массового обслуживания типа  $M/M/1$ ,  $E_2/E_2/1$ ,  $E_2/M/1$ ,  $M/E_2/1$ ,  $H_2/H_2/1$ ,  $H_2/M/1$ ,  $M/H_2/1$  со сдвинутыми вправо распределениями, которые представляют собой скорость поступления и обслуживания заявок, а также пропускную способность системы и время ожидания заявок в очереди (Таблицы 5.11-5.17). Выходным данным является среднее время ожидания заявок в очереди, остальные характеристики являются производными от него.

### **Система $M^-/M^-/1$**

Принятые обозначения:

$t_0$  – параметр сдвига ( $0 \leq t_0 \leq \tau_\mu$ );

$\lambda$  – параметр сдвинутого экспоненциального распределения входного потока;

$\mu$  – параметр сдвинутого экспоненциального распределения времени обслуживания;

$\tau_\lambda$  – среднее значение интервала между соседними заявками входного потока;

$\tau_\mu$  – среднее время обслуживания;

$c_\lambda$  – коэффициент вариации интервала между соседними заявками входного потока;

$c_\mu$  – коэффициент вариации времени обслуживания;

$\rho$  – коэффициент загрузки системы;

$W$  – среднее время ожидания заявок в очереди.

Таблица 5.11 Система  $M^G/M^G/1$

Ввод исходных данных		
$t_0 := 0.5$	$\tau_\lambda := \frac{10}{9}$	$\tau_\mu := 1$
Проведение расчетов		
$\lambda := \frac{1}{(\tau_\lambda - t_0)} =$	$c_\lambda := \frac{1}{(\lambda \cdot \tau_\lambda)} =$	$\mu := \frac{1}{[\tau_\mu - \tau_\lambda \cdot (1 - c_\lambda)]} =$
$\rho := \frac{\tau_\mu}{\tau_\lambda} =$	$c_\mu := 1 - \frac{(1 - c_\lambda)}{\rho} =$	$W := \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{(\mu - \lambda)} =$

### Система $E_2^-/E_2^-/1$

Принятые обозначения:

$t_0$  – параметр сдвига ( $0 \leq t_0 \leq \tau_\mu$ );

$\lambda$  – параметр сдвинутого эрланговского распределения второго порядка входного потока;

$\mu$  – параметр сдвинутого эрланговского распределения второго порядка времени обслуживания;

$\tau_\lambda$  – среднее значение интервала между соседними заявками входного потока;

$\tau_\mu$  – среднее время обслуживания;

$c_\lambda$  – коэффициент вариации интервала между соседними заявками входного потока;

$c_\mu$  – коэффициент вариации времени обслуживания;

$\rho$  – коэффициент загрузки системы;

$S_1, S_2$  – нули числителя спектрального разложения по абсолютному значению;

$W$  – среднее время ожидания заявок в очереди.

Таблица 5.12 Система  $E_2^-/E_2^-/1$

Ввод исходных данных		
$t_0 := 0.5$	$\tau_\lambda = 10$	$\tau_\mu := 1$
Проведение расчетов		
$\lambda := \frac{1}{(\tau_\lambda - t_0)} =$	$\mu := \frac{1}{\tau_\mu - t_0} =$	$c_\lambda := \frac{1}{\sqrt{2} \cdot (1 + \lambda \cdot t_0)} =$
$\rho := \frac{\tau_\mu}{\tau_\lambda} =$	$c_\mu := \frac{1}{\sqrt{2} \cdot (1 + \mu \cdot t_0)} =$	
$S_1 := (\mu - \lambda) + \sqrt{(\mu - \lambda)^2 + 8 \cdot \lambda \cdot \mu} =$	$S_2 := 2 \cdot (\mu - \lambda) =$	$W := \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} - \frac{1}{\mu}$

### Система $E_2^-/M^-/1$

Принятые обозначения:

$t_0$  – параметр сдвига ( $0 \leq t_0 \leq \tau_\mu$ );

$\lambda$  – параметр сдвинутого эрланговского распределения второго порядка входного потока;

$\mu$  – параметр сдвинутого экспоненциального распределения времени обслуживания;

$\tau_\lambda$  – среднее значение интервала между соседними заявками входного потока;

$\tau_\mu$  – среднее время обслуживания;

$c_\lambda$  – коэффициент вариации интервала между соседними заявками входного потока;

$c_\mu$  – коэффициент вариации времени обслуживания;

$\rho$  – коэффициент загрузки системы;

$S_1$  – нуль числителя спектрального разложения по абсолютному значению;  
 $W$  – среднее время ожидания заявок в очереди.

Таблица 5.13 Система  $E_2^-/M^-/1$

Ввод исходных данных		
$t_0 := 0.5$	$\tau_\lambda = 10$	$\tau_\mu := 1$
Проведение расчетов		
$\lambda := \frac{1}{(\tau_\lambda - t_0)} =$	$\mu := \frac{1}{\tau_\mu - t_0} =$	$c_\lambda := \frac{1}{\sqrt{2} \cdot (1 + \lambda \cdot t_0)} =$
$\rho := \frac{\tau_\mu}{\tau_\lambda} =$	$c_\mu := 1 - \frac{t_0}{\tau_\mu} =$	$S_1 := \sqrt{\left[ \frac{(4 \cdot \lambda - \mu)^2}{4} \right] + 4 \cdot \lambda \cdot (\mu - \lambda)} - \frac{(4 \cdot \lambda - \mu)}{2}$
$W := \frac{1}{S_1} - \frac{1}{\mu} =$		

**Система  $M^-/E_2^-/1$**

Принятые обозначения:

$t_0$  – параметр сдвига ( $0 \leq t_0 \leq \tau_\mu$ );

$\lambda$  – параметр сдвинутого экспоненциального распределения входного потока;

$\mu$  – параметр сдвинутого эрланговского распределения второго порядка времени обслуживания;

$\tau_\lambda$  – среднее значение интервала между соседними заявками входного потока;

$\tau_\mu$  – среднее время обслуживания;

$c_\lambda$  – коэффициент вариации интервала между соседними заявками входного потока;

$c_\mu$  – коэффициент вариации времени обслуживания;

$\rho$  – коэффициент загрузки системы;

$W$  – среднее время ожидания заявок в очереди.



Таблица 5.14 Система  $M^-/E_2^-/1$

<b>Ввод исходных данных</b>		
$t_0 := 0.5$	$\tau_\lambda = 10$	$\tau_\mu := 1$
<b>Проведение расчетов</b>		
$\lambda := \frac{1}{(\tau_\lambda - t_0)} =$	$\mu := \frac{1}{\tau_\mu - t_0} =$	$c_\lambda := 1 - \frac{t_0}{\tau_\lambda} =$
$\rho := \frac{\tau_\mu}{\tau_\lambda} =$	$c_\mu := \frac{1}{\sqrt{2} \cdot (1 + \mu \cdot t_0)} =$	$W := \frac{3 \cdot \rho}{4 \cdot \mu \cdot (1 - \rho)} =$

**Система  $N_2^-/N_2^-/1$**

Принятые обозначения:

$t_0$  – параметр сдвига ( $0 \leq t_0 \leq \tau_\mu$ );

$\lambda_1, \lambda_2, p$  – параметры сдвинутого гиперэкспоненциального закона распределения входного потока;

$\mu_1, \mu_2, q$  – параметры сдвинутого гиперэкспоненциального закона распределения времени обслуживания;

$\tau_\lambda$  – среднее значение интервала между соседними заявками входного потока;

$\tau_\mu$  – среднее время обслуживания;

$c_\lambda$  – коэффициент вариации интервала между соседними заявками входного потока;

$c_\mu$  – коэффициент вариации времени обслуживания;

$\rho$  – коэффициент загрузки системы;

$a_0, a_1, b_0, b_1$  – промежуточные параметры в вычислениях;

$S_1, S_2$  – нули числителя спектрального разложения по абсолютному значению;

$C_0, C_1, C_2$  – коэффициенты кубического многочлена в числителе спектрального разложения;

$W$  – среднее время ожидания заявок в очереди.

Таблица 5.15 Система  $M_2^-/M_2^-/1$

Ввод исходных данных	
$t_0 := 0.9$	$\tau_\lambda = 10 \quad \tau_\mu = 1$
$c_\lambda := 8$	$c_\mu := 0.1$
Проведение расчетов	
$p := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{[c_\lambda^2 \cdot \tau_\lambda^2 - (\tau_\lambda - t_0)^2]}}{\sqrt{4 \cdot [(\tau_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2 \cdot \tau_\lambda^2]}} =$	$q := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{[c_\mu^2 \cdot \tau_\mu^2 - (\tau_\mu - t_0)^2]}}{\sqrt{4 \cdot [(\tau_\mu - t_0)^2 + c_\mu^2 \cdot \tau_\mu^2]}} =$
$\rho := \frac{\tau_\mu}{\tau_\lambda} =$	$\lambda_1 := 2 \cdot \frac{p}{(\tau_\lambda - t_0)} =$
$\lambda_2 := \frac{2(1-p)}{(\tau_\lambda - t_0)} =$	$\mu_1 := 2 \cdot \frac{q}{(\tau_\mu - t_0)} =$
$\mu_2 := 2 \cdot \frac{(1-q)}{(\tau_\mu - t_0)} =$	$a_0 := \lambda_1 \cdot \lambda_2 =$
$a_1 := p \cdot \lambda_1 + (1-p) \cdot \lambda_2 =$	$b_0 := \mu_1 \cdot \mu_2 =$
$b_1 := q \cdot \mu_1 + (1-q) \cdot \mu_2 =$	
$C_0 := a_0 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_0 - a_0 \cdot (\mu_1 + \mu_2) + b_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) =$	
$C_1 := -a_1 \cdot b_1 - a_0 - b_0 + (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot (\mu_1 + \mu_2) =$	
$C_2 := \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2 =$	
Given	
$S^3 - C_2 \cdot S^2 - C_1 \cdot S - C_0 = 0$	
Find(S)→	
$S_1 := 19.78149715640854159$	$S_2 := 0.001550730741145794328$
$W := \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} =$	

### Система $M_2^-/M^-/1$

Принятые обозначения:

$t_0$  – параметр сдвига ( $0 \leq t_0 \leq \tau_\mu$ );

$\lambda_1, \lambda_2, p$  – параметры сдвинутого гиперэкспоненциального закона распределения входного потока;

$\mu$  – параметр сдвинутого экспоненциального закона времени обслуживания;

$\tau_\lambda$  – среднее значение интервала между соседними заявками входного потока;

$\tau_\mu$  – среднее время обслуживания;

$c_\lambda$  – коэффициент вариации интервала между соседними заявками входного потока;

$c_\mu$  – коэффициент вариации времени обслуживания;

$\rho$  – коэффициент загрузки системы;

$S_1$  – нуль числителя спектрального разложения по абсолютному значению;

$C_1, C_2$  – коэффициенты квадратного трехчлена в числителе спектрального разложения;

$W$  – среднее время ожидания заявок в очереди.

Таблица 5.16 Система  $M_2^-/M^-/1$

Ввод исходных данных	
$\tau_\lambda = 10$	$\tau_\mu = 1$
$c_\lambda := 4.21$	$t_0 := 0.9$
Проведение расчетов	
$\mu := \frac{1}{(\tau_\mu - t_0)} =$	$c_\mu := \frac{1}{(1 + \mu \cdot t_0)} =$
$p := \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{[c_\lambda^2 \cdot \tau_\lambda^2 - (\tau_\lambda - t_0)^2]}{4 \cdot [c_\lambda^2 \cdot \tau_\lambda^2 + (\tau_\lambda - t_0)^2]}} =$	
$\lambda_1 := 2 \cdot \frac{p}{(\tau_\lambda - t_0)} =$	$\lambda_2 := 2 \cdot \frac{(1 - p)}{(\tau_\lambda - t_0)} =$
$C_1 := [(1 - p)\lambda_1 + p \cdot \lambda_2] - \lambda_1 \cdot \lambda_2 =$	
$C_2 := \lambda_1 + \lambda_2 - \mu =$	
$S_1 := \sqrt{\frac{(C_2)^2 + C_1 \cdot 4}{4}} - \frac{C_2}{2} =$	$W := \frac{1}{S_1} - \frac{1}{\mu} =$

### Система $M^-/M_2^-/1$

Принятые обозначения:

$t_0$  – параметр сдвига ( $0 \leq t_0 \leq \tau_\mu$ );

$\lambda$  – параметр сдвинутого экспоненциального распределения входного потока;

$\mu_1, \mu_2, q$  – параметры сдвинутого гиперэкспоненциального закона распределения времени обслуживания;

$\tau_\lambda$  – среднее значение интервала между соседними заявками входного потока;

$\tau_\mu$  – среднее время обслуживания;

$c_\lambda$  – коэффициент вариации интервала между соседними заявками входного потока;

$c_\mu$  – коэффициент вариации времени обслуживания;

$\rho$  – коэффициент загрузки системы;

$S_1$  – нуль числителя спектрального разложения по абсолютному значению;

$C_0, C_1$  – коэффициенты квадратного трехчлена в числителе спектрального разложения;

$W$  – среднее время ожидания заявок в очереди.

Таблица 5.17 Система  $M^-/H_2^-/1$

Ввод исходных данных	
$\tau_\lambda = 10$	$\tau_\mu = 1$
$t_0 := 0.9$	$\lambda := \frac{1}{(\tau_\lambda - t_0)} =$
$c_\mu := 4.21$	
Проведение расчетов	
$c_\lambda := \frac{1}{(1 + \lambda \cdot t_0)} =$	$\mu_1 := 2 \cdot \frac{q}{(\tau_\mu - t_0)} =$
$\mu_2 := 2 \cdot \frac{(1 - q)}{(\tau_\mu - t_0)} =$	
$C_0 := \mu_1 \cdot \mu_2 - \lambda \cdot [\mu_1 \cdot (1 - q) + \mu_2 \cdot q] =$	
$C_1 := \mu_1 + \mu_2 - \lambda =$	
Given	
$S^2 + C_1 \cdot S + C_0 = 0$	
Find(S) →	
$S_1 := 19.88450060814591875$	$S_2 := 0.005609281963975248886$
$W := \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} =$	

Разработан комплекс программ на языке программирования Java. Для систем:

1)  $E_2^-/E_2^-/1, E_2^-/M^-/1, M_2^-/E^-/1$

Размер: 75,0 КБ (76 853 байт)

На диске: 100 КБ (102 400 байт)

2)  $M^-/H_2^-/1, H_2^-/M^-/1, H_2^-/H_2^-/1$

Размер: 69,7 КБ (71 391 байт)

На диске: 100 КБ (102 400 байт)

На рисунках 5.1 – 5.6 отображены результаты по рассмотренным системам массового обслуживания с временными сдвигами.

The screenshot shows a window titled "SMO" with the following content:

Программа расчета характеристик систем массового обслуживания  
Выберите необходимую систему с запаздыванием  
E2-/E2-/1

Введите входные данные  
Среднее значение интервала между соседними заявками входного потока:  
10  
Среднее время обслуживания:  
1  
Параметр запаздывания:  
0.01

Выполнить

Результат вычислений:  
Среднее время ожидания заявок в очереди: 0,016  
Коэффициент вариации интервала между соседними заявками входного потока: 0,706  
Коэффициент вариации времени обслуживания: 0,700  
Коэффициент загрузки системы: 0,100

Рис. 5.1 – Результат выполнения программы для СМО  $E_2^-/E_2^-/1$

The screenshot shows a window titled "SMO" with the following content:

Программа расчета характеристик систем массового обслуживания  
Выберите необходимую систему с запаздыванием  
E2-/M-/1

Введите входные данные  
Среднее значение интервала между соседними заявками входного потока:  
10  
Среднее время обслуживания:  
1  
Параметр запаздывания:  
0.01

Выполнить

Результат вычислений:  
Среднее время ожидания заявок в очереди: 0,029  
Коэффициент вариации интервала между соседними заявками входного потока: 0,706  
Коэффициент вариации времени обслуживания: 0,990  
Коэффициент загрузки системы: 0,100

Рис. 5.2 – Результат выполнения программы для СМО  $E_2^-/M^-/1$

Принятые обозначения и входные данные совпадают с программой разработанной на Mathcad.

The screenshot shows a software window titled "SMO" with the following content:

Программа расчета характеристик систем массового обслуживания  
Выберите необходимую систему с запаздыванием  
M<sup>-</sup>/E<sup>2</sup>/1

Введите входные данные  
Среднее значение интервала между соседними заявками входного потока:  
10

Среднее время обслуживания:  
1

Параметр запаздывания:  
0.01

Выполнить

Результат вычислений:  
Среднее время ожидания заявок в очереди: 0,083  
Коэффициент вариации интервала между соседними заявками входного потока: 0,999  
Коэффициент вариации времени обслуживания: 0,700  
Коэффициент загрузки системы: 0,100

Рис. 5.3 – Результат выполнения программы для СМО  $M_2^-/E_2^-/1$

The screenshot shows a software window titled "SMO" with the following content:

Программа расчета характеристик систем массового обслуживания  
Выберите необходимую систему с запаздыванием  
H<sup>2</sup>/H<sup>2</sup>/1

Введите входные данные

Среднее значение интервала между соседними заявками входного потока: 10	Коэффициент вариации интервала между соседними заявками входного потока: 2
Среднее время обслуживания: 1	Коэффициент вариации времени обслуживания: 2
Параметр запаздывания: 0.01	

Выполнить

Результат вычисления:  
Среднее время ожидания заявок в очереди: 0,439  
Коэффициент вариации интервала между соседними заявками входного потока: 1,999  
Коэффициент вариации времени обслуживания: 1,990  
Коэффициент загрузки системы: 0,100

Рис. 5.4 – Результат выполнения программы для СМО  $H_2^-/H_2^-/1$

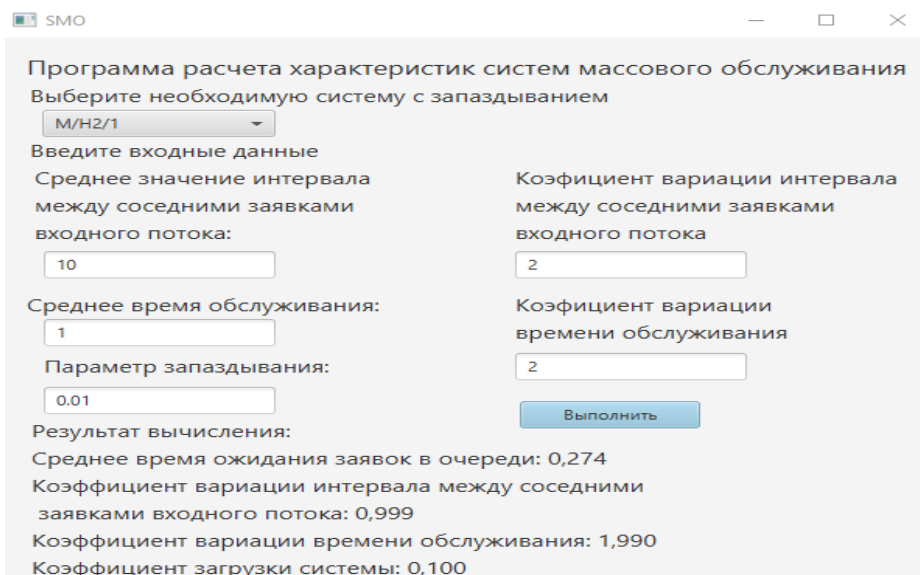


Рис. 5.5 – Результат выполнения программы для СМО  $M^-/M_2^-/1$

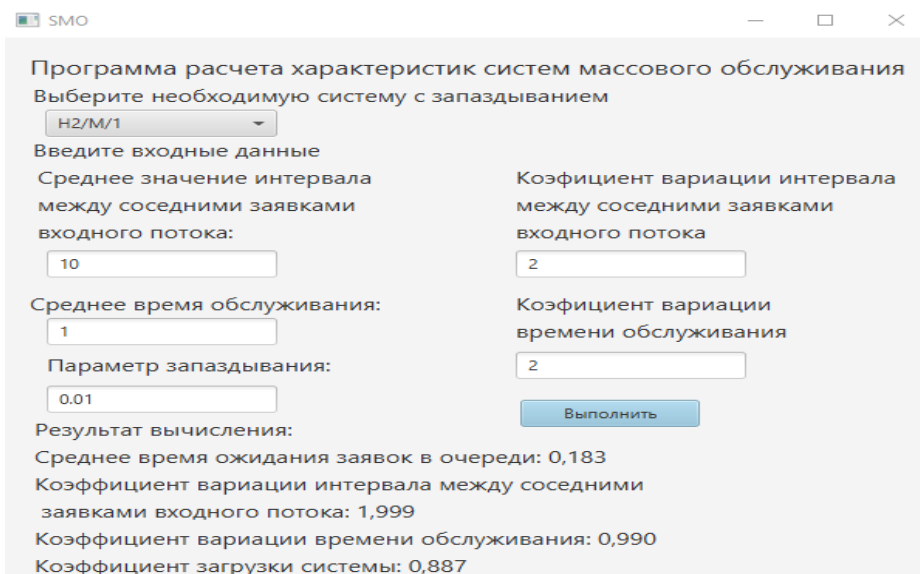


Рис. 5.6 – Результат выполнения программы для СМО  $H_2^-/M^-/1$

Результаты выполнения программы на языке программирования Java совпадают с результатами численных вычислений с использованием MathCad.

### 5.3 Выводы по пятой главе

В данной главе изложено описание программного комплекса расчета характеристик массового обслуживания с учетом временных сдвигов в

пакете MathCad, а также комплекса программ, разработанного на языке программирования Java.

1. Представлены спектральные разложения решения ИУЛ для шести рассмотренных СМО и полученные на их основе расчетные формулы для средней задержки в очереди. Результаты расчетов, как ожидалось, подтверждают, что уменьшение коэффициентов вариации  $c_\lambda$  и  $c_\mu$  за счет введения параметра сдвига  $t_0 > 0$  в законы распределений входного потока и времени обслуживания влечет за собой уменьшение средней задержки в системах с запаздыванием в несколько раз.

2. Адекватность представленных результатов, с одной стороны, подтверждается тем, что при стремлении параметра сдвига  $t_0$  к нулю, средняя задержка заявок в очереди в системе с запаздыванием стремится к его значению в обычной системе. С другой стороны, адекватность представленных математических моделей систем с временными сдвигами достигается корректным использованием классического метода спектрального разложения интегрального уравнения Линдли для рассмотренных систем.

3. В современной теории телетрафика могут использоваться полученные результаты

Полученные результаты могут быть использованы в современной теории телетрафика в качестве практического применения при моделировании задержек в реальных системах передачи данных. Для этого необходимо знать числовые характеристики временных интервалов входящего трафика, что при наличии современных анализаторов трафика не трудно реализовать.



## Заключение

В диссертации решена принципиально новая научно-техническая задача, заключающаяся в разработке и исследовании математических моделей массового обслуживания со сдвинутыми законами распределений, расширяющих возможности классических систем массового обслуживания.

Основные результаты состоят в следующем:

1. Впервые предложены спектральные разложения интегрального уравнения Линдли для шести пар СМО, сформированных обычными и сдвинутыми законами распределений Эрланга, экспоненциального и гиперэкспоненциального. При этом шесть систем с временными сдвигами обеспечивают коэффициенты вариаций интервалов поступлений и обслуживания как меньшие, так и большие единицы. Представленные модели с учетом временных сдвигов расширяют возможности классических систем.

2. Впервые представлены численно-аналитические решения для среднего времени ожидания заявок в очереди как основной характеристики для рассматриваемых систем, полученные с помощью спектральных решений и установлено, что СМО со сдвинутыми законами распределений обеспечивает многократное уменьшение времени ожидания в зависимости от величины параметра сдвига по сравнению с классическими системами. Полученные расчетные формулы зависят от параметра сдвига законов распределений, следовательно, учитывая формулы Литтла, связывающие другие временные характеристики СМО со средним временем ожидания, параметр сдвига в представленных моделях можно считать регулирующим параметром временных характеристик СМО.

Показано, что для системы  $H_2^- / M^- / 1$  при  $\rho = 0,9$  и параметре сдвига  $t_0 = 0,99$  коэффициент вариации  $c_\lambda$  уменьшается с 2,0 для обычной системы  $H_2 / M / 1$  до значения 1,109 для системы  $H_2^- / M^- / 1$ , а  $c_\mu$  уменьшается с 1,0 для системы  $H_2 / M / 1$  до значения 0,01 для системы  $H_2^- / M^- / 1$ . Среднее время

ожидания при этом уменьшается с 22,41 до 0,002 единиц времени, т.е. практически до нуля. Аналогичные результаты получены для всех предложенных моделей с временными сдвигами.

3. Представлена методика расчета основной характеристики СМО, включающая определение неизвестных параметров сдвинутых законов распределений методом моментов через их числовые характеристики с учетом влияния на эти характеристики величины параметра сдвига закона распределения. Характер такого влияния однозначно продемонстрировано на примерах уравнений моментов.

4. Впервые представлены результаты численных экспериментов над разработанными математическими моделями массового обслуживания для их тестирования и оценки их адекватности по разработанному программному обеспечению в среде Mathcad. Результаты экспериментов полностью подтверждают сделанные в диссертационной работе предположения о свойствах и возможностях новых моделей массового обслуживания.

Три компонента паспорта специальности: математическое моделирование, численные методы и комплексы программ в диссертационной работе отражены следующим образом. Математическое моделирование в работе представлено широко в виде моделей массового обслуживания. Численные методы представлены методами решения систем нелинейных уравнений и методами определения корней полиномов в числителе спектральных разложений в среде Mathcad.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

СМО – Система массового обслуживания

QS – Queuing System

FIFO – First In First Out

LIFO – Last In First Out

А/Б/С/Д/Е – Термины данной системы очередей:

А – Закон распределения интервалов между поступлениями

Б – Закон распределения времени обслуживания

С – Количество серверов

Д – Вместимость очереди

Е – Служебная дисциплина

М – экспоненциальный закон

G – общий закон

$H_k$  – гиперэкспоненциальный закон порядка  $k$

$E_k$  – закон распределения Эрланга порядка  $k$

D – детерминированный закон

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
2. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко. – М.: Наука, 1985. – 432 с.
3. Карташевский В.Г. Основы теории массового обслуживания / В.Г. Карташевский. – М.: Радио и связь, 2006. – 108 с.
4. Кошуняева Н.В. Теория массового обслуживания / Н.В. Кошуняева, Н.Н. Патронова. – Архангельск: Изд-во. – 2013. – 109с.
5. Матвеев В. Ф. Системы массового обслуживания / В. Ф. Матвеев, В.Г. Ушаков – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 242 с.
6. Павский В. А. Теория массового обслуживания: учебное пособие / В. А. Павский. – Кемерово: Кемеровский технологический институт пищевой промышленности, 2008. – 116 с
7. Солнышкина И. В. Теория систем массового обслуживания: учеб. пособие Комсомольск-на-Амуре / И.В. Солнышкина. - М.: ФГБОУ ВПО «КНАГТУ», 2015. – 76 с.
8. Самусевич Г.А. Моделирование процессов функционирования СМО : учебное пособие для вузов / Г.А. Самусевич. – Москва: Изд-во Юрайт. – 2021. – 117с.
9. Вишневский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей [Текст] / В.М. Вишневский. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.
10. Сивохин А. В. Теория массового обслуживания. Лабораторный практикум по системам массового обслуживания с применением системы Maple и пакета Simulink / А.В. Сивохин, Б.К. Мещеряков – Пенза: Пенз. гос. ун-т, 2009 – 120с.
11. Бахарева Н.Ф. Аппроксимативные методы и модели массового обслуживания. Исследование компьютерных сетей / Н.Ф. Бахарева, В.Н.

Тарасов – Самара: Изд-во СНЦ РАН, 2011. – 327 с.

12. Mirtchev, Seferin & Goleva, Rossitza & Atamian, Dimitar & Ganchev, Ivan. Investigation of priority queue with peaked traffic flows. SAC '18: Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on Applied Computing, 2018. – pp. 1017-1019. DOI: 10.1145/3167132.3167407.

13. Sigman, Karl. Using the M/G/1 queue under processor sharing for exact simulation of queues // Annals of Operations Research, 2013. – p. 241. DOI: 10.1007/s10479-013-1408-2.

14. Foss, S. and Korshunov, D. On Large Delays in Multi-Server Queues with Heavy Tails // Math. Oper. Res, 2012. – № 37, pp. 201–218.

15. Тарасов В.Н. Анализ очередей с гиперэкспоненциальным распределением прихода // Проблемы передачи информации, 2016. – т. 5, No 3, No 1, с. 14-23. DOI: 10.1134 / S0032946016010038

16. I. Nedyalkov; A. Stefanov; G. Georgiev. Characterization of the Traffic in IP-Based Communication Networks // International Conference on High Technology for Sustainable Development (HiTech), 2018. – pp. 159-162.

17. Sagron, Ruth & Kerner, Yoav & Rabinowitz, Gad & Tirkel, Israel. New LST of inter-departure times in PH/G/1 queue, and extensions to ME/G/1 and G/G/1 queues // Computers & Industrial Engineering, 2019. – p. 135. DOI: 10.1016/j.cie.2019.06.029.

18. Soundararajan, Pavai & S. A., Josephine. Analysis of an M/G/1 retrial queue with second optional service and customer feedback, under Bernoulli vacation schedule // Malaya Journal of Matematik, 2019. – №: 07. pp. 795-807. DOI: 10.26637/MJM0704/0027.

19. Ciucu, Florin & Poloczek, Felix & Rizk, Amr. Queue and Loss Distributions in Finite-Buffer Queues // ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review, 2019. – № 47. pp. 65-66. DOI: 10.1145/3376930.3376972.

20. Ciucu, Florin & Poloczek, Felix & Rizk, Amr. Queue and Loss Distributions in Finite-Buffer Queues // ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review, 2019. – № 47. pp. 65-66. DOI: 10.1145/3376930.3376972.

21. D. W. Choi, N. K. Kim, and K. C. Chae. A two-moment approximation for the GI/G/c queue with finite capacity // *INFORMS Journal on Computing*, 2005. – vol. 17, №. 1, pp. 75–81.
22. E. Fedorova, E. Danilyuk, A. Nazarov, A. Melikov, In: Phung-Duc T., Kasahara S., Wittevrongel S. (eds) *Queueing Theory and Network Applications. QTNA // Lecture Notes in Computer Science*, 2019. –Vol. 11688, pp. 3–15. DOI: 10.1007/978-3-030-27181-7\_1.
23. Chen, Yan & Whitt, Ward. Extremal GI/GI/1 queues given two moments: exploiting Tchebycheff systems // *Queueing Systems*, 2021. – № 97. pp. 1-24. DOI: 10.1007/s11134-020-09675-7.
24. Liu, Y., Whitt, W., & Yu, Y. Approximations for heavily loaded G/GI/n+GI queues // *Naval Research Logistics (NRL)*, 2016. – №: 63(3), pp. 187-217.
25. Koba, O. & Serebriakova, S. GI / G / 1 Lakatos-Type Queueing System with T-Retrials // *Cybernetics and Systems Analysis*, 2021. – p. 57. DOI: 10.1007/s10559-021-00353-x
26. Тарасов В.Н. Бахарева Н.Ф., Блатов И.А. Анализ и расчет системы массового обслуживания с запаздыванием / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, И.А. Блатов // *Автоматика и телемеханика* – 2015. – № 11. – С.51–59
27. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ. под редакцией В.И. Неймана. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
28. Brannstrom N. A Queueing Theory analysis of wireless radio systems / N. Brannstrom - Applied to HS-DSCH. Lulea university of technology, 2004. –79 p
29. <https://tools.ietf.org/html/rfc3393>. RFC 3393 IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM) (дата обращения: 26.02.2016).
30. Тарасов В.Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями / В.Н. Тарасов // *Проблемы передачи информации*, 2016. – №1. – С.16-26
31. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Горелов Г.А. Математическая модель трафика с тяжелохвостным распределением на основе системы массового обслуживания H2/M/1 / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Г.А. Горелов //

- Инфокоммуникационные технологии, 2014. – №3. – С.36-41.
32. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Горелов Г.А., Малахов С.В. Анализ входящего трафика на уровне трех моментов распределений временных интервалов / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Г.А. Горелов, С.В. Малахов // Информационные технологии, 2014. –№9. – С.54-59.
33. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Липилина Л.В. Математическая модель телетрафика на основе системы G/M/1 и результаты вычислительных экспериментов / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Информационные технологии, 2016. -№2. - С.121-126.
34. Тарасов В.Н., Горелов Г.А., Ушаков Ю.А. Восстановление моментных характеристик распределения интервалов между пакетами входящего трафика / В.Н. Тарасов, Г.А. Горелов, Ю.А. Ушаков // Инфокоммуникационные технологии, 2014. - №2. – С.40-44.
35. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process: two basic methods // Operation Research, 30. No. 1, 1982. – Pp. 125-147
36. Ахметшина, Э. Анализ новой системы массового обслуживания  $E_2/E_2/1$  с запаздыванием / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Э.Г. Ахметшина // Инфокоммуникационные технологии, –№3. Т.16. –2018. – С.277-282
37. Aissani A. Optimal control of an M/G/1 retrial queue with vacations // J Syst Sci. Syst. Eng. 2018. –№ 17: pp. 487–502
38. Jailaxmi V, Arumuganathan R, Kumar MS Performance analysis of an M/G/1 retrial queue with general retrial time, modified M-vacations and collision // Oper Res, 2017. –№: pp. 649–667
39. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. Queueing Systems, 2018, Vol. 89, No. 3, pp. 269-301.
40. Sigman, Karl. Using the M/G/1 queue under processor sharing for exact simulation of queues // Annals of Operations Research. 2013. P. 241. DOI: 10.1007/s10479-013-1408-2.
41. Ахметшина, Э. Исследование системы массового обслуживания M/E<sub>2</sub>/1 с обычным и сдвинутыми входными распределениями / В.Н.

Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Э.Г. Ахметшина // Информационные технологии, 2020.–№1. Т.18.– С.33-39.

42. Тарасов В.Н. Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием / В.Н. Тарасов // Автоматика и телемеханика, 2018. – №12. – С.57-70

43. Бочаров П. П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.

44. Тарасов В.Н., Карташевский И.В. Способы аппроксимации входных распределений для системы G/G/1 и анализ полученных результатов / В.Н. Тарасов, И.В. Карташевский // Системы управления и информационные технологии, 2015. – № 3. – С. 182-185

45. Алиев Т.И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики, 2013. № 2(84). С 88-93.

46. Адаму А. Аппроксимация вероятностных характеристик модели сети P2P / А. Адаму, Ю.В. Гайдамака // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт, 2011. – Т. 5. - № 7. – С. 4-7.

47. Саати Т. Элементы теории массового обслуживания и её приложения / Т. Саати; под ред. И.Н. Коваленко и Р.Д. Когана. – М.: Советское радио, 1965. –510 с.

48. Tarasov V. Approximation of input distributions for queuing system with hyper-exponential arrival time / V. Tarasov, I. Kartashevskiy // Proc. 2nd IEEE International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications. Science and Technology (PIC S&T 2015), 2015. – P. 18-20.

49. Тарасов В.Н., Горелов Г.А., Ушаков Ю.А. Восстановление моментных характеристик распределения интервалов между пакетами входящего трафика // Инфокоммуникационные технологии, 2014. –№2. – С.40-44.

50. Када О. Математическая модель телетрафика на базе системы с эрланговскими и гиперэрланговскими распределениями / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, О. Када // Инфокоммуникационные технологии, 2019. – №3.



– С. 270-275.

51. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals // *Teletraffic and datatraffic in a Period of Change*, ITC-13. Elsevier Science Publishers, 1991. – P.683-688

52. Тарасов В.Н., Малахов С.В., Карташевский И.В. Теоретическое и экспериментальное исследование задержки в программно-конфигурируемых сетях // *Инфокоммуникационные технологии*. 2015. –Т. 13. № 4. С. 409-413.

53. Тарасов В.Н. Вероятностное компьютерное моделирование сложных систем // Самара, СНЦ РАН. 2002.

54. Ахметшина Э.Г. Системы массового обслуживания с эрланговскими входными распределениями / Э.Г. Ахметшина // *Материалы международной научно-технической конференции под ред. С.А. Прохорова*, Самара, 2019. – С. 523-527

55. Ахметшина Э.Г. Система массового обслуживания  $E_2/M/1$  с обычными и сдвинутыми входными распределениями / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Э.Г. Ахметшина // *Инфокоммуникационные технологии*. – 2018. –№4. Т.16. – С.387-392.

56. Тарасов В.Н. Программно реализованная имитационная модель массового обслуживания общего вида / В.Н. Тарасов, И.В. Карташевский // *Инфокоммуникационные технологии*. – 2009. – Т 7. N 2. – С. 63-68

57. Тарасов, В.Н. Исследование задержки в системе G/G/1 / В.Н. Тарасов, И.В. Карташевский, Л.В. Липилина // *Инфокоммуникационные технологии*. – 2015. – Т. 13. – №2. – С.153-159

58. Карташевский И.В. Об одном способе решения интегрального уравнения Линдли / И.В. Карташевский // *Информационные технологии. Радиоэлектроника. Телекоммуникации (ITRT-2017): сб. статей VII международной заочной научно-технической конференции / Поволжский гос. ун-т сервиса*. –Тольятти: Изд-во ПВГУС, 2017. – с.261-265.

59. Хинчин, А.Я. Математические методы теории массового обслуживания

- / А.Я. Хинчин. – М.: Физматгиз, 1963. – 149 с.
60. Dbira, H. Calculation of packet jitter for non-poisson traffic / H. Dbira, A. Girard, B. Sanso // Annals of Telecommunications. – 2016. – V.73. – P. 223–237
61. Ахметшина Э.Г. Среднее время ожидания в системе массового обслуживания  $M_2/M_2/1$  с запаздыванием / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2018. – Т.22. – №4. – С. 702–713. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1607>
62. Akhmetshina E. Properties of hyperexponential and hypererlangian distributions / V. Tarasov, E. Akhmetshina, O. Kada // 2019 IEEE International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications, Science and Technology (PIC S&T). – 2019. Pp.895-898 DOI: 10.1109/PICST47496.2019.9061538
63. Бахарева Н.Ф. Аппроксимативные методы и модели массового обслуживания. Исследование компьютерных сетей / Н.Ф. Бахарева, В.Н. Тарасов. – Самара: издательство СНЦ РАН, 2011. – 327 с.
64. Кёнинг Д. Методы теории массового обслуживания / Д. Кёнинг, Д. Штойян; под ред. Г.П. Климова. – М.: Радио и связь, 1981. – 128 с.
65. Козлов М.В., Прохоров А.В. Введение в математическую статистику. М.: Изд-во МГУ, 1987.
66. Боев В.Д. Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World. СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
67. Медоуз Д. Х. Азбука системного мышления. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
68. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995.
69. Тарасов В.Н., Карташевский И.В. Определение среднего времени ожидания требований в управляемой системе массового обслуживания  $M_2/M_2/1$  / Системы управления и информационные технологии. 2014. – №3(57). – С.92-96.

70. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Липилина Л.В. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров // Информационные технологии. 2016. – № 12. – С.952 – 957.
71. Кругликов В.К., Тарасов В.Н. Анализ и расчет сетей массового обслуживания с использованием двумерной диффузионной аппроксимации // Автоматика и телемеханика, 1983. – № 8. – С. 74-83.
72. Ахметшина Э.Г. Особенности применения гиперэкспоненциальных и гиперэрланговских входных распределений в системах массового обслуживания / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина, О. Када // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». – 2019. – №1. – С. 34-44.
73. Алиев Т.И. Основы моделирования дискретных систем. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 363 с.
74. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Обобщенная двумерная диффузионная модель массового обслуживания типа GI/G/1 // Телекоммуникации. 2009. – № 7. – С. 2-8
75. Ахметшина Э.Г. Модели телетрафика на основе современной теории массового обслуживания / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина, Н.Ф. Бахарева // Инфокоммуникационные технологии. – 2018. – №1. – С. 68-74.
76. Тарасов В.Н. Анализ очередей с гиперэкспоненциальным распределением прихода // Проблемы передачи информации, 2016.– т. 5, No 3, No 1. – с. 14-23. DOI: 10.1134 / S0032946016010038
77. Коваленко А.И., Смирнов С.В., Сравнение гиперэкспоненциального распределения с другими моделями положительно определенных случайных величин // ПГУТИ, 2019.
78. Липилина Л.В. Оптимизация расчета характеристик системы H2/M/1 В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, И.В. Карташевский, Л.В. Липилина // Инфокоммуникационные технологии. – 2017. – №4. – С.353-357
79. Ахметшина Э.Г. Модели телетрафика на основе двойственных систем с

- запаздыванием с гиперэкспоненциальными и экспоненциальными распределениями / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина, Н.Ф. Бахарева // Информационные технологии. – 2020. – №4. – С.195-202
80. Jagerman D.L. Mean waiting time approximations in the G/G/1 queue / D.L. Jagerman, B. Balcioglu, T. Altiok, B. Melamed // Queueing Systems. – 2004. – V. 46. –P. 481-506.
81. Тарасов В.Н. Анализ и расчет телетрафика методами теории массового обслуживания / В.Н. Тарасов, И.В. Карташевский // Инфокоммуникационные технологии. – 2010. – Т 8. N 4. – С. 54-56.
82. Jagerman D.L. Methods in traffic calculations / D.L. Jagerman // Bell System Technical Journal. – 1984. – V.63. – I. 7. – P. 1283-1310.
83. Novitzky S., Pender J., Rand J, R.H., Wesson E. Nonlinear Dynamics in Queueing Theory: Determining the Size of Oscillations in Queues with Delay // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2019. – Vol. 18. № 1. P. 279-311. DOI: <https://doi.org/10.1137/18M1170637>.
84. Jennings O.B. & Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. Queueing Systems, 2016, vol. 84, no. 1, pp. 145-202
85. Akhmetshina E.G. Modeling data transmission systems using modern information technologies / Э.Г. Ахметшина // Т-Comm Телекоммуникации и транспорт. – 2021. – №8. – С.52-57.
86. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Кононов А.Л., Ушаков Ю.А. Проектирование и моделирование сетей ЭВМ в системе Opnet Modeler. Лабораторный практикум. Самара, 2008. – 233 с.
87. Riverbed to Acquire OPNET Technologies, Inc. [Электронный ресурс] / 2015. - Режим доступа: [www.riverbed.com/about/news-articles/press-releases/riverbed-to-acquire-opnet-technologies-inc.html](http://www.riverbed.com/about/news-articles/press-releases/riverbed-to-acquire-opnet-technologies-inc.html), свободный. - Загл. с экрана
88. Ахметшина Э.Г. Моделирование систем передачи данных с помощью современных информационных технологий / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина // Сборник научных статей по итогам работы Международного научного форума «Наука инновации – современные концепции», Москва, 2021. –

С.89-95.

89. Ахметшина Э.Г. Модели систем передачи данных на основе новых СМО / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина // Материалы XXIII Международной научно-технической конференции «Проблемы техники и технологий телекоммуникаций 2021», Самара, 2021. – С. 193-194.

90. Ахметшина Э.Г. Программный комплекс расчета характеристик систем массового обслуживания с запаздыванием во времени в пакете Mathcad / В.Н. Тарасов, Э.Г. Ахметшина // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021613028, Роспатент, 18.03.2021.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А. СВИДЕТЕЛЬСТВО ОБ ОФИЦИАЛЬНОЙ  
РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММЫ**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



**СВИДЕТЕЛЬСТВО**

о государственной регистрации программы для ЭВМ

**№ 2021614019**

**Программный комплекс расчета характеристик систем  
массового обслуживания с запаздыванием во времени в  
пакете Mathcad**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
"Поволжский государственный университет  
телекоммуникаций и информатики" (RU)*

Авторы: *Тарасов Вениамин Николаевич (RU), Ахметшина  
Элеонора Газинуровна (RU)*

Заявка № **2021613028**

Дата поступления **12 марта 2021 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **18 марта 2021 г.**



*Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности*

*Г.П. Израиль*

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б. АКТ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ



«УТВЕРЖДАЮ»  
Ректор ФГБОУ ВО ПГУТИ  
к.т.н., доцент В. А. Ружников  
« 06 » \_\_\_\_\_ 2022 г.

### АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы Ахметшиной Э.Г. «МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ КАК СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С УЧЕТОМ ВРЕМЕННЫХ СДВИГОВ», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук

Комиссия ФГБОУ ВО «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (ПГУТИ) в составе: председателя комиссии к.т.н., доцента Бурановой М.А., начальника управления организации учебного процесса, и членов комиссии – д.т.н., профессора Бахарева Н.Ф. зав. кафедрой информатики и вычислительной техники, д.т.н., профессора Тарасова В.Н. составили настоящий акт о том, что в университете на кафедрах «Программное обеспечение и управление в технических системах» и «Информатика и вычислительная техника» внедрены в учебный процесс следующие результаты диссертационной работы Ахметшиной Э.Г.:

1. Полученные с помощью спектральных разложений численно-аналитические решения для среднего времени ожидания заявок в очереди как основной характеристики для рассматриваемых СМО, сформированных обычными и сдвинутыми законами распределений Эрланга, экспоненциального и гиперэкспоненциального.

2. Методика расчета основной характеристики СМО, включающая определение неизвестных параметров сдвинутых законов распределений методом моментов через их числовые характеристики с учетом влияния на эти характеристики величины параметра сдвига закона распределения.

3. Результаты численных экспериментов над разработанными математическими моделями массового обслуживания.

Результаты работы используются в дисциплине «Основы проектирования и моделирования вычислительных сетей» в разделе «Системы и сети массового обслуживания» при подготовке магистров по направлениям подготовки 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.04.04 «Программная инженерия».

Председатель комиссии  
начальник управления организации учебного процесса

к.т.н., доц.



Буранова М.А.

Члены комиссии

Зав. каф. ИВТ

д.т.н., проф.

Зав.каф. УТС

д.т.н., проф.



Бахарева Н.Ф.

Тарасов В.Н.



# ПРИЛОЖЕНИЕ В. СПРАВКА О ПРАКТИЧЕСКОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

## ADMAX

Общество с ограниченной ответственностью  
«ЭдМакс Консалтинг»  
Сокращенное название: ООО «ЭдМакс»  
443086, г. Самара, ул. Сякренко, д.32, пом. 10  
ОГРН 1146316006990, ИНН/КПП 6316201177/631601001

### Справка о практическом использовании результатов диссертационной работы Ахметшиной Элеоноры Газинуровны "Методы математического моделирования процессов передачи данных как системы массового обслуживания с учетом временных сдвигов "

Результаты диссертационной работы Ахметшиной Элеоноры Газинуровны используются для обработки и анализа трафика в помощь разрабатываемой в компании «ЭдМакс» программной платформе, позволяющей медиа издателям и рекламодателям прогнозировать будущие рекламные кампании в сети Интернет с использованием моделей и методов машинного обучения.

Программа и методика обработки запросов, предложенные Ахметшиной Э. позволяют рассматривать Интернет-ресурс как систему массового обслуживания с запаздыванием во времени и распознавать законы распределений трафика запросов и их обработки с последующим применением моделей массового обслуживания для оценки задержек.

Использование моделей системы очередей помогает оптимизировать качество обслуживания путем тестирования различных сценариев с использованием имитационного моделирования.

Генеральный директор,  
д.т.н.

«24» «06» 2022 г.



Минаков И.А.