

Крюков Юрий Александрович

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
В СЛОЕ С МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЕЙ**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Работа выполнена на кафедре «Математическое моделирование в механике» федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

Научный руководитель:

Клюев Николай Ильич

доктор технических наук, профессор, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева», заведующий кафедрой «Математическое моделирование в механике»

Официальные оппоненты:

Дерюгин Юрий Николаевич

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, федеральное государственное унитарное предприятие «Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики», г. Саров, главный научный сотрудник

Кудинов Игорь Васильевич

кандидат технических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет», доцент кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика»

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский государственный технический университет», г. Ульяновск

Защита диссертации состоится 5 июня 2018 г. в 12.00 на заседании диссертационного совета Д 212.217.03, созданного на базе ФГБОУ ВО «СамГТУ», по адресу: 443100, г. Самара, ул. Галактионовская, 141, корп. №6, ауд. 33.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «СамГТУ» по адресу: 443100, г. Самара, ул. Первомайская, 18, корп. №1 и на сайте www.samgtu.ru.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просим направлять по адресу: 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус ФГБОУ ВО «СамГТУ», ученому секретарю диссертационного совета Д 212.217.03; факс (846)278-44-00; E-mail: zoteev-ve@mail.ru.

Автореферат разослан «__» _____ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор технических наук, доцент



В.Е. Зотеев

Общая характеристика работы

Актуальность работы. К задачам с межфазной границей приводят довольно многие физические явления или процессы, сопровождающие эксплуатацию техники. Среди методов исследования таких задач особо выделяется математическое моделирование.

До недавнего времени математическое моделирование в полной постановке (с использованием уравнений Навье-Стокса) сдерживалось скромными возможностями вычислительной техники, связанными с необходимостью выполнения трудоемких вычислений на «тяжелых» (больших по объему, подвижных, деформируемых, неструктурированных и т.д.) сетках и недостаточно развитыми численными методами решения этих уравнений. С развитием супер-ЭВМ эти ограничения во многом снимаются. Так, в настоящее время активно развиваются универсальные вычислительные пакеты для моделирования физических процессов, позволяющие в самой общей математической постановке ставить начально-краевые задачи в произвольной области сплошной среды и успешно решать их. Например, это зарубежный Ansys Fluent или отечественный Логос и мн. др. К достоинствам пакетов относится то, что они обеспечивают моделирование самой подробной физической картины. Недостаток заключается в отсутствии исчерпывающих методических подходов к решению новых задач и необходимости использования ресурсов супер-ЭВМ и дорогостоящего программного обеспечения.

Альтернативный (традиционный) подход в математическом моделировании основан на принятии в постановку задачи некоторых допущений, определяемых физикой процесса, которые ведут к упрощению исходных уравнений Навье-Стокса. Это является преимуществом подхода, поскольку численное решение упрощенных уравнений вполне доступно на современных персональных ЭВМ за довольно короткое время. Сложность заключается в том, что заранее неизвестно, как отразятся принятые допущения на общей характеристике течения.

В современных исследованиях, как правило, придерживаются одного из двух указанных подходов. Между тем, при решении новых задач подходы взаимосвязаны (решение уравнений Навье-Стокса предполагает в качестве тестирования решение упрощенных уравнений) и дополняют друг друга (анализ результатов, очевидно, упрощается в случае приближенного моделирования, тогда как в полной постановке виден вклад принятых допущений в общую картину течения).

Таким образом, актуальность исследований диссертации заключается в интеграции обозначенных подходов моделирования при решении новых задач с межфазной границей и ламинарным течением вязкой несжимаемой жидкости, имеющих практическое значение для авиационно-космической техники.

Цель диссертационной работы состоит в разработке методов математического моделирования ламинарных течений в слое вязкой несжимаемой жидкости с межфазной границей с применением приближенного аналитического метода разложения решения в ряд по малому параметру, конечно-разностного

метода и метода конечных объемов; создании программного обеспечения для проведения вычислительных экспериментов и анализа характеристик течений.

Для достижения поставленных целей решались следующие **задачи**:

1. На основе модифицированных уравнений Навье-Стокса, описывающих течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрическом канале, разработать метод математического моделирования для определения уровня свободной поверхности жидкости в канале системы управления расходом топлива ракеты-носителя: сформулировать новые краевые задачи для расчета неустановившегося и квазистационарного течений с расходом массы, разработать и исследовать разностные схемы для численного решения краевых задач и построить алгоритмы их решения.
2. Провести анализ и сопоставление решений по разработанному методу с решением по вычислительному методу конечных объемов, реализованному в программном комплексе Ansys Fluent с применением уравнений Навье-Стокса.
3. В рамках теории пограничного слоя разработать метод математического моделирования двухсредного (внутреннего – жидкость и внешнего – газ) неперемешивающегося пограничного слоя со скользящей межфазной границей на плоской пластине. Для решения краевой задачи внутреннего пограничного слоя развить приближенный аналитический метод разложения решения в ряд по малому параметру. Для численного решения краевой задачи внешнего пограничного слоя разработать и исследовать разностную схему, провести её тестирование и построить алгоритм решения.
4. Разработка алгоритма решения сопряженной краевой задачи двухсредного пограничного слоя со скользящей межфазной границей и создание на его основе в среде Maple программы для проведения вычислительного эксперимента. Проанализировать и сравнить результаты расчетов по предложенному методу моделирования с результатами, полученными по методу математического моделирования, развитому в пакете Ansys Fluent и основанному на применении уравнений Навье-Стокса.
5. Разработать и исследовать метод математического моделирования для сферической частицы (среда – жидкость), основанный на уравнении движения центра масс, заранее определенных активно действующих сил на частицу – инерции, тяжести, аэродинамического сопротивления и силы Сэфмана – и позволяющий прогнозировать её движение в односредном пограничном слое (среда – газ) плоской полубесконечной пластины.
6. Провести сравнение результатов расчетов по предложенному методу для сферической частицы с результатами, полученными в программном комплексе Ansys Fluent по методу, основанному на решении уравнений Навье-Стокса и на совместном решении задач динамики (уравнений движения центра масс) и аэродинамики (заранее неизвестных, определяемых по ходу решения, поверхностных сил, действующих на частицу).

Научная новизна диссертационной работы состоит в следующем:

1. Разработан и исследован метод математического моделирования неустановившегося и квазистационарного течений в цилиндрическом канале с

расходом массы, позволяющий прогнозировать рассогласование уровня свободной поверхности жидкости в канале системы управления расходом топлива относительно уровня в баке ракеты-носителя и обосновать расположение датчиков уровня свободной поверхности в канале системы управления с целью минимизации ошибки при определении реального уровня топлива в баке.

2. Разработан и исследован метод математического моделирования двухсредного неперемешивающегося пограничного слоя со скользящей межфазной границей, позволяющий находить его характеристики в зависимости от нескольких параметров - чисел Рейнольдса внутреннего и внешнего пограничных слоев и угла наклона плоской полубесконечной пластины, что отличает его от известных методов.

3. Модифицирован алгоритм разностного решения квазилинейного одномерного параболического уравнения с постоянными коэффициентами, в который введен итерационный процесс, позволяющий определить неизвестную функцию источника.

4. Предложена нелинейная неявная конечно-разностная схема для системы интегро-дифференциальных уравнений пограничного слоя, позволяющая определить функцию толщины пограничного слоя из отдельного уравнения и отказаться от итерационных процедур наращивания сетки на каждом маршевом слое до неизвестной границы пограничного слоя в поперечном направлении (как в известном алгоритме). Получена оценка аппроксимации, проведено исследование устойчивости и сходимости для разностной схемы.

5. В среде Maple создана программа для ЭВМ «Lambola plate wilifi», в которой впервые получены характеристики двухсредного пограничного слоя со скользящей межфазной границей в зависимости от трех параметров - чисел Рейнольдса внутреннего и внешнего пограничных слоев и угла наклона плоской поверхности. В основе программы – реализация разработанных в диссертационной работе методов математического моделирования двухсредного пограничного слоя со скользящей межфазной границей. Преимуществом и особенностью программы является простота использования и более быстрое получение результатов (за счет решения упрощенных уравнений) по сравнению с программным комплексом Ansys Fluent.

На защиту выносятся:

1. Метод математического моделирования неустановившегося и квазистационарного течений в цилиндрическом канале с расходом массы для определения уровня свободной поверхности жидкости в канале системы управления расходом топлива ракеты-носителя.

2. Метод математического моделирования двухсредного неперемешивающегося пограничного слоя со скользящей межфазной границей на плоской полубесконечной пластине, построенный в рамках теории пограничного слоя.

3. Приближенный аналитический метод разложения решения в ряд по малому параметру для математической модели внутреннего пограничного слоя.

4. Метод разностного решения второй краевой задачи для квазилинейного одномерного параболического уравнения с постоянными коэффициентами.
5. Метод разностного решения системы из трех нелинейных интегродифференциальных уравнений.
6. Разработанная программа «Lambola plate wilifi», предназначенная для проведения вычислительного эксперимента по определению характеристик двухсредного пограничного слоя со скользящей межфазной границей в зависимости от трех параметров - чисел Рейнольдса внутреннего и внешнего пограничных слоев и угла наклона плоской пластины.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Теоретически значимыми результатами, полученными в диссертации, являются новые методы математического моделирования ламинарных течений вязкой несжимаемой жидкости в слое с межфазной границей для актуальных задач авиационно-космической техники.

Прикладная значимость результатов работы связана с использованием программного обеспечения, разработанного на основе предложенных в диссертации методов математического моделирования. Программы позволяют прогнозировать гидродинамические процессы и оптимальное расположение емкостных датчиков уровня (с позиции минимизации ошибки их показаний) в уровнемере системы управления расходом топлива ракеты-носителя, а также оценивать аэродинамические характеристики плоских элементов корпуса летательного аппарата в случае появления на них жидкой пленки (при выпадении осадков).

Связь диссертационной работы с планами научных исследований.

Работа выполнялась в рамках тематического плана НИР Самарского государственного университета по теме «Разработка методов исследования гидродинамики топлива в баках перспективных ракет-носителей» (гос. Рег. № 01200961335) и по теме «Влияние атмосферной влаги на сопротивление трения элементов корпуса ракет-носителей» (гос. Рег. № 01201277996).

Внедрение. Результаты работы использовались в проектных расчетах профильных отделов АО «РКЦ Прогресс» и внедрены в учебный процесс кафедры «Математического моделирования в механике» Самарского университета в курсе «Математического моделирования процессов взаимодействия потоков жидкости и газа», читаемом для магистров по профессиональной образовательной программе направления 010800 Механика и математическое моделирование (акты об использовании в приложении диссертации прилагаются).

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается корректностью применяемых моделей механики сплошной среды и используемых допущений при разработке методов математического моделирования, а также хорошим согласованием численных результатов, полученных с помощью разных методов математического моделирования и сравнением численных решений рассматриваемых краевых задач с известными аналитическими результатами в частных случаях.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на российских, международных конференциях, семинарах и симпозиумах: симпозиум с международным участием «Самолетостроение России. Проблемы и перспективы». Самара, СГАУ, 2-5 июня 2012г.; XVI Всероссийский семинар по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара, СГАУ, 18-20 июня 2013г.; III Всероссийская научно-техническая конференция «Актуальные проблемы ракетно-космической техники» (III Козловские чтения). 16-20 сентября 2013 года, ФГУП ГНП РКЦ «ЦСКБ-Прогресс», г. Самара; XVIII Всероссийский семинар по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара, СГАУ, 15-17 июня 2015г.; IV Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные проблемы ракетно-космической техники» (IV Козловские чтения). АО «РКЦ «Прогресс», Самара, 14 – 18 сентября 2015 г.; 4th International Symposium on Energy Challenges & Mechanics – working on small scales. 11-13 August 2015, Aberdeen, Scotland, United Kindom; XIX Всероссийский семинар по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара, СГАУ, 15-17 июня 2016г.; III Международная научно-техническая конференция «Динамика и виброакустика машин». Россия, Самара, Самарский университет, 29 июня – 1 июля 2016 г.; Всероссийская молодежная научно-практическая конференция «Орбита молодежи» и перспективы развития российской космонавтики». 8-9 сентября 2016 г., Москва-Самара. Работа докладывалась на научных семинарах «Механика и прикладная математика» Самарского государственного технического университета (рук. д.ф.-м.н., проф. В.П. Радченко, 2017-2018 г.г.) и на научных семинарах кафедры «Математического моделирования в механике» Самарского университета (рук. д.т.н., проф. Н.И. Ключев, 2012-2016 г.г.).

Публикации. По материалам диссертационного исследования опубликовано 14 работ, в том числе 4 в изданиях, рекомендованных ВАК РФ, 2 индексированы в Scopus. Получено 1 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложений. В конце каждой главы сформулированы выводы. Диссертация изложена на 143 страницах, содержит 39 рисунков, 1 таблицу и 166 единиц библиографии.

Личный вклад автора. Работы [3], [4], [6], [8], [9], [12], [14] выполнены диссертантом самостоятельно. В [2] автору принадлежит совместная постановка задачи и анализ расчетов, в [1], [5], [7], [10], [11], [13] – совместная постановка задач, проведение численного решения и его исследование, анализ и систематизация результатов расчетов.

Содержание работы

Во введении показана актуальность темы диссертации; дается общая характеристика работы: определяется цель работы, указываются научная новизна и положения, выносимые на защиту, показывается теоретическая и практическая

значимость работы, приводится структура диссертации, а также сведения о публикациях и внедрении, обосновывается достоверность и обоснованность полученных результатов.

В первой главе приведен аналитический обзор литературы по направлению исследований, выбранному диссертантом. Исследованию течений в замкнутых полостях, частично или полностью заполненных жидкостью, посвящены теоретические и экспериментальные работы Акуленко Л.Д., Ахметова Д.Г., Богоряд И.Б., Бужинского В.А., Букреева В.И., Гончарова Д.А., Докучаева Л.В., Доценко, С. Ф., Калиниченко В.А., Карликова В.П., Луковского И.А., Моисеева Н.Н., Темнова А. Н., Секерж-Зенькович С. Я. и многих других авторов.

Аналитический обзор современных исследований, связанных с течениями тонких слоев, составляют работы Алексеенко С.В., Ключева Н.И., Могилевского Е.И., Трифонова Ю.Я., Цвелодуб О.Ю., Шахова В.Г., Шкадова В.Я., Sadiq T.R., Oron A., Hacker T., D'Alessio S. D., Novbari E., Takagi D., Baxter S. J., Samenfink W. и некоторых других.

Изучению сил, действующих на движущиеся в потоке вязкой жидкости частицы, и описанию методов моделирования таких течений уделяется внимание в работах Асмолова Е.С., Осипцова А.Н., Рыбдыловой О.Д., Bagchi P., Crowe C.T., Dandy D.S., Dwyer H.A., McLaughlin J.B., Mei R., Rubinow S. I., Saffman P.G. и других.

Анализ публикаций показывает, что математическое моделирование ограничивается построением и исследованием, как правило, одной математической модели процесса или явления, достаточно мало уделяется внимание возможности комплексного использования методов математического моделирования, доступному в настоящее время (особенно, с бурным развитием супер-ЭВМ и прикладного программного обеспечения для моделирования физических процессов) и позволяющему расширить преимущества математического моделирования для описания и анализа исследуемых течений. В этой связи сформулированы цели, поставлены задачи диссертационной работы.

Во второй главе разрабатываются методы математического моделирования гидродинамического процесса, сопровождающего работу элементов системы управления расходом топлива в баке ракеты-носителя.

Для контроля уровня жидкости в баке применяется гидростатический метод: в бак устанавливают уровнемер-вертикальный цилиндрический канал, внутри которого помещают дискретно расположенные по длине уровнемера емкостные датчики уровня (рис. 1). Топливо свободно сообщается между баком и уровнемером через успокоители. По показаниям датчиков в уровнемере определяют уровень свободной поверхности и в баке. Достоверно известно, что при расходовании топлива уровни свободной поверхности жидкости

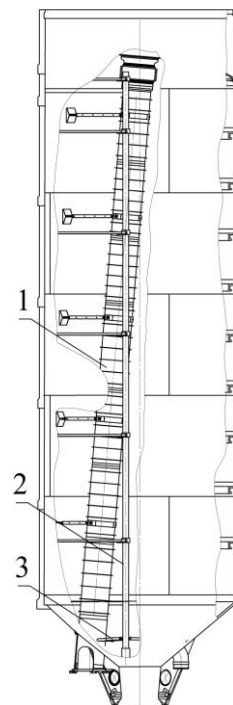


Рис. 1. Топливный бак: 1 – расходная магистраль, 2 – уровнемер, 3 – успокоитель

в баке и уровнемере отличаются. Актуальным является вопрос, как должны быть расположены датчики в уровнемере, чтобы их показания соответствовали уровню свободной поверхности в баке?

Сначала рассматривается упрощенная конструкция – без успокоителей. Топливный бак с уровнемером представляется в виде двусвязной области (рис. 2) трех пространственных переменных Ω (двусвязная полость). Внутри двусвязной полости, частично заполненной жидкостью, имеется ограниченный цилиндрический канал радиуса $R > 0$. Вводятся связанные с этим каналом цилиндрические координаты (r, θ, x) , начало – на уровне нижнего среза. Обозначения: $G = \{(r, \theta, x): r \leq R, 0 \leq x\}$ – внутренняя область, $\xi(t)$ – межфазная граница внутренней области; $G_T = \Omega \setminus G$ – внешняя область, $H(t)$ – межфазная граница внешней области.

Из полости предусмотрен забор жидкости, при этом над свободной поверхностью жидкости во внутренней и внешней областях поддерживается постоянное давление p_0 . Между внутренней и внешней областями жидкость свободно сообщается через нижний срез на уровне $x = 0$. В начальный момент времени уровень жидкости во внутренней области $\xi(t)$ совпадает с уровнем во внешней области $H(t)$. Целью является определение уровня свободной поверхности жидкости во внутренней области (в цилиндрическом канале) относительно уровня во внешней области (в баке).

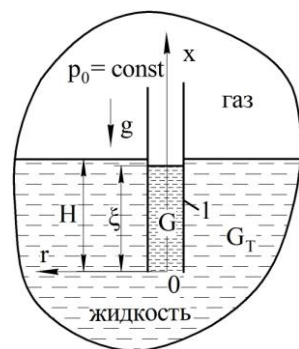


Рис. 2. Двусвязная полость:
1 – цилиндрический канал

Пусть вектор скорости жидкости во внутренней области $U = (u_r, u_\theta, u_x)$ удовлетворяет условию $u_r = 0, u_\theta = 0$, а неизвестная функция давления является линейной. Вводится обозначение $u_x = u(r, t) = u$. В основе базового метода для расчета неустановившегося ламинарного течения однородной вязкой несжимаемой жидкости во внутренней области и уровня свободной поверхности в ней вторая краевая задача для одномерного квазилинейного уравнения (с нелинейным интегральным источником) с постоянными коэффициентами параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - g \left[1 - \frac{\left(H + \frac{V_T |V_T|}{2g} \right)}{\xi} \right], \xi = H_0 - \frac{2}{R^2} \int_0^t \int_0^R r \cdot u \, dr \, dt, 0 < r < R, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0; u(R, t) = 0, u(r, 0) = 0,$$

где t – время, ν – коэффициент кинематической вязкости, $V_T = \text{const}$ – скорость жидкости во внешней области около нижнего среза. В (1) определению подлежат функции $u(r, t)$ и $\xi(t)$. В прямоугольной области $G_{in} = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq t \leq T\}$ вводится сетка с равномерными шагами h_r по r и h_t по t .

На введенной сетке используется шеститочечный шаблон и схема с весами σ . Через u_j^n обозначается значение в узле (r_j, t_n) сеточной функции u (обозначения сеточных функций совпадают). Разностная схема для (1) имеет вид:

$$a_j u_{j-1}^{n+1} - c_j u_j^{n+1} + b_j u_{j+1}^{n+1} = -f_j^{n+1} + \tilde{f}_j^{n+\sigma}, j=1...M-1, \quad (2)$$

$$u_0^{n+1} = \lambda_1 u_1^{n+1} + \mu_1, \quad u_M^{n+1} = 0, \quad u_j^0 = 0, j=0,1,...,M, \quad n=0,1,2,...,$$

где $a_j = \frac{\nu \sigma}{h_r} \left(\frac{1}{h_r} - \frac{1}{2(j \cdot h_r)} \right)$, $c_j = \frac{2\nu \sigma}{h_r^2} + \frac{1}{h_t}$, $b_j = \frac{\nu \sigma}{h_r} \left(\frac{1}{h_r} + \frac{1}{2(j \cdot h_r)} \right)$,

$$f_j = \frac{\nu(1-\sigma)}{h_r} \left(\frac{1}{h_r} - \frac{1}{2(j \cdot h_r)} \right) u_{j-1}^n + \left(\frac{1}{h_t} - \frac{2\nu(1-\sigma)}{h_r^2} \right) u_j^n + \frac{\nu(1-\sigma)}{h_r} \left(\frac{1}{h_r} + \frac{1}{2(j \cdot h_r)} \right) u_{j+1}^n,$$

$$\tilde{f}^{n+\sigma} = g \left(\frac{H^{n+\sigma} + \frac{(V_T |V_T|)^{n+\sigma}}{2g}}{\xi^{n+\sigma}} - 1 \right), \quad \xi^{n+\sigma} = \xi^n + \frac{h_t}{2} \cdot \bar{u}_j^{n+\sigma},$$

$$\bar{u}_j^{n+\sigma} = \frac{2}{R^2} \left(4 \sum_{j=1}^{\frac{M}{2}} (2j-1) h_r u_{2j-1}^{n+\sigma} + 2 \sum_{j=1}^{\frac{M}{2}-1} (2j) h_r u_{2j}^{n+\sigma} \right), \quad \lambda_1 = \frac{\sigma}{\sigma + \frac{h_r^2}{4\nu h_t}},$$

$$\mu_1 = \frac{(1-\sigma)}{\sigma + \frac{h_r^2}{4\nu h_t}} u_1^n + \frac{\left(\frac{h_r^2}{4\nu h_t} - (1-\sigma) \right)}{\sigma + \frac{h_r^2}{4\nu h_t}} u_0^n + \frac{h_r^2}{4\nu \left(\sigma + \frac{h_r^2}{4\nu h_t} \right)} \tilde{f}^{n+\sigma}.$$

При использовании $\sigma = \frac{1}{2}$ (используется в математическом эксперименте) схема (2) имеет аппроксимацию $O((h_t)^2 + (h_r)^2)$. Исследование устойчивости линеаризованной схемы (2) показывает, что она устойчива при условии $\frac{h_r^2}{4\nu} \geq h_t(1-\sigma)$. Система (2) имеет трехдиагональную матрицу и решается методом прогонки.

В правой части первого уравнения (2) второе слагаемое – источник специального вида (интегральный) – является неизвестной и определяемой в ходе решения функцией. При этом вычислительный алгоритм по схеме Кранка-Никольсон ($\sigma = \frac{1}{2}$) дополнен итерационным процессом по определению неизвестных на промежуточном временном слое с вычислением интеграла методом Симпсона.

Для рассматриваемой задачи разработан приближенный метод. В математической модели метода используется предположение о том, что функция напряжения трения на границе внутренней области принимает значения, как при стационарном течении. В результате получена задача Коши

$$\ddot{\xi} + \frac{8\nu}{R^2} \dot{\xi} = -g \left[1 - \frac{\left(H + \frac{V_T |V_T|}{2g} \right)}{\xi} \right], 0 < t \leq T, \quad (3)$$

$$\xi(0) = H_0, \dot{\xi}(0) = 0.$$

Предложенная задача решена в Ansys Fluent при следующих параметрах: $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, $R = 0,039 \text{ м}$, $H_0 = 1,55 \text{ м}$, $H_0 = H_0 - V \cdot t$, $V = 0.04 \text{ м/с}$, $V_T = -0,16 \text{ м/с}$.

На рис. 3 приведены функции $\Delta = H - \xi$, показывающие разницу уровней свободной поверхности в цилиндрическом канале и баке в зависимости от времени, полученные по различным методам. Видно, что функции являются периодическими с уменьшающейся амплитудой. По

отношению $\frac{\max|\Delta_1(x) - \Delta_2(x)|}{\max(|\Delta_1(x)|, |\Delta_2(x)|)}$ отличие

функций, полученных по базовому методу (Δ_B) и в Ansys Fluent (Δ_{AF}) – менее 15 %, а

функций Δ_B и Δ_{Π} (полученной по приближенному методу) – 40 %. Базовый метод лучше, чем приближенный описывает инерционность процесса, и, его результаты лучше согласуются с результатами, полученными в Ansys Fluent. Для 15 секунд физического процесса скорость расчета по сравнению с приближенным методом уменьшается на два порядка для базового метода (при использовании персональной ЭВМ и 8 ядер/1 процессор Intel Core 3.4 GHz с 16 Gb оперативной памяти) и на пять порядков при решении в Ansys Fluent (при использовании кластера: 64 ядра/16 процессоров Intel Xeon 2.7 GHz/4 узла с 120 Gb оперативной памяти и 836 Gb дисковой памяти на узел).

Далее предложен метод для моделирования течения в конструкции с удлинителями (рис. 4). Внутренняя область, рассмотренная в предыдущем разделе, объединяется с $k = 2$ дополнительными цилиндрическими областями длиной $\ell_{us} = 0,6 \text{ м}$ и радиусом $R_{us} = 0,015 \text{ м}$, через которые жидкость сообщается с внешней областью. Математическая модель имеет вид:

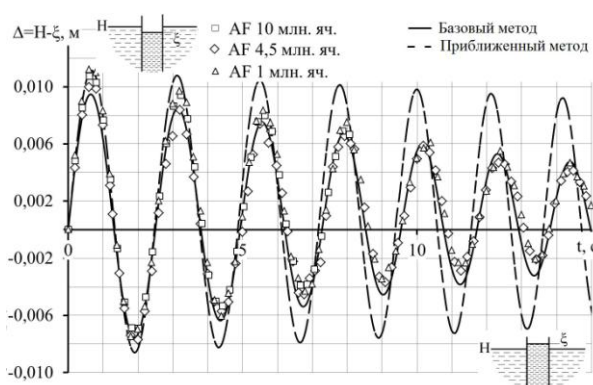


Рис. 3. Зависимость функций Δ от времени для цилиндрического вертикального канала

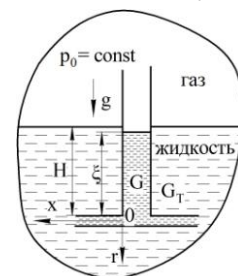
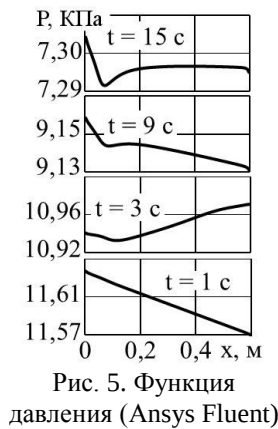


Рис. 4. Двусвязная полость с цилиндрическим каналом и удлинителями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{g(H - \xi)}{\ell_{us}}, \quad \xi = H_0 - \frac{2 \cdot k}{R^2} \int_0^t \int_0^{R_{us}} r u \, dr dt, \quad 0 < r < R, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

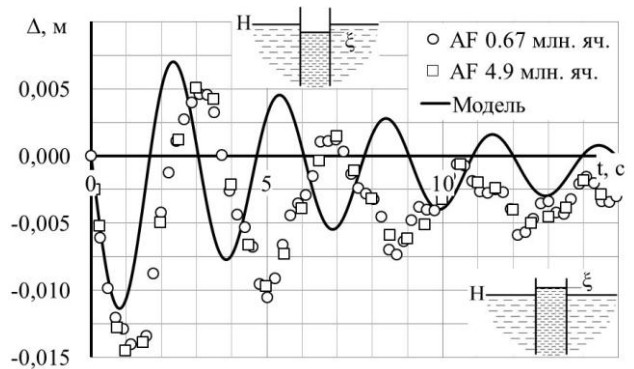
$$\frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0; \quad u(R_{us}, t) = 0, \quad u(r, 0) = 0.$$



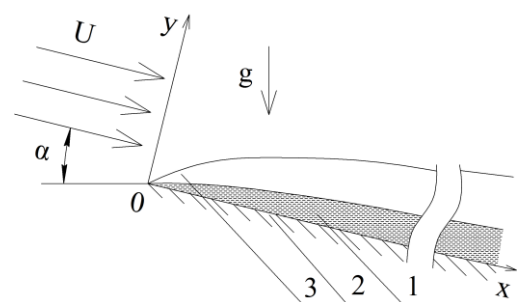
Поскольку математическая модель (4) отличается от модели (1) только по внешнему виду, разностные схемы и алгоритмы их решения совпадают. Время решения имеет те же порядки.

На рис. 5 показано распределение функции давления по оси удлинителя в разные моменты времени, полученное в Ansys Fluent. При малых значениях t ($t \approx 1$ с) функция является линейной, а течение одномерным. При больших значениях t функция становится нелинейной, а течение – трехмерным, более сложным, чем предполагалось при построении по модели (4). Это объясняет отличие функций Δ , полученных по методу на основе (4) (Модель) и в Ansys Fluent (AF) и представленных на рис. 6: отличие по значениям функций – 50 %.

Уровень свободной поверхности во внутренней области может быть описан методом на основе модели (4) только при малых значениях t ($t \approx 1$ с). При больших значениях t необходимо использовать метод на основе уравнения Навье-Стокса. Рассмотренные методы математического ограничены по числу Рейнольдса $Re = \frac{2 R \dot{\xi}}{\nu} \leq 2400$.



В третьей главе разрабатывается метод математического моделирования двухсредного стационарного ламинарного пограничного слоя со скользящей границей на полубесконечной пластине (рис. 7). К двухсредному пограничному слою относятся, например, задачи о пограничном слое и движущейся по пластине тонкой пленке жидкости. Пластина расположена под углом α к горизонту в поле силы тяжести и помещена в поток воздуха, вектор которого совпадает с плоскостью пластины. Задача рассматривается в плоской постановке. Она является сопряженной, включающей задачу о внутреннем пограничном слое (среда – жидкость) и о внешнем пограничном слое (среда – газ). Вводится декартова система координат Oxy , которая помещена на край пластины. Математическая модель внутреннего пограничного слоя в



безразмерном виде имеет вид:

$$\varepsilon \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \sin \alpha, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \delta_1, \quad (5)$$

$$u_1(x, 0) = v_1(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, \delta_1) = \tau_1, \quad v_1(x, \delta_1) = u_1(x, \delta_1) \frac{\partial \delta_1(x)}{\partial x} - 1.$$

В (5) безразмерные переменные введены по формулам (обозначения сохранены):

$$x = \frac{x}{L}, y = \frac{y}{\delta^*}, \delta_1 = \frac{\delta_1}{\delta^*}, u_1 = \frac{u_1}{u^*}, v_1 = \frac{v_1}{v_k}, \tau_1 = \frac{\delta^*}{\mu_1 u^*} \tau_1.$$

$\delta^* = \sqrt[3]{\frac{v_k L v_1}{g}}$, $u^* = \sqrt[3]{\frac{v_k^2 L^2 g}{v_1}}$ – масштабы толщины и продольной скорости соответственно; ν и μ – коэффициенты кинематической и динамической вязкости соответственно (имеют постоянные величины); $v_k = \text{const}$ – функция-источник; L – длина расчетной области; $\tau(x)$ – функция напряжения трения, определяемая из внешней задачи; $u_1 = u_1(x, y), v_1 = v_1(x, y)$ – скалярные компоненты вектора скорости внутреннего пограничного слоя; $\delta_1 = \delta_1(x)$ – скалярная функция (верхняя граница области внутреннего пограничного слоя); $\varepsilon = \frac{\delta^*}{L} \frac{\delta^* u^*}{v_1} = \frac{\delta^*}{L} Re_1 \ll 1$ – малый параметр.

Приближенные выражения для тройки неизвестных функций u_1, v_1, δ_1 получены разложением в ряд по степеням малого параметра ε с учетом нулевого и первого приближений.

Толщиной внутреннего пограничного слоя пренебрегается, система координат перемещена на межфазную поверхность, тогда математическая модель внешнего пограничного слоя в безразмерных координатах имеет вид:

$$\bar{u}_3 \left[\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{y} \bar{\delta}_3'}{\bar{\delta}_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \right] + \frac{\bar{v}_3}{\bar{\delta}_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{Re_3} \frac{1}{\bar{\delta}_3^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^2},$$

$$\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{y} \bar{\delta}_3'}{\bar{\delta}_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\bar{\delta}_3} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (6)$$

$$2\bar{\delta}_3 \left[\int_0^1 \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} d\bar{y} \right] - \bar{\delta}_3' \left[1 - \int_0^1 \bar{u}_3^2 d\bar{y} \right] + 2 \int_0^1 \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} d\bar{y} + \frac{2}{Re_3} \frac{1}{\bar{\delta}_3} \left[\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \right]_{\bar{y}=0} = 0,$$

где $0 < \bar{x} < 1, 0 < \bar{y} < 1$,

$$\bar{u}_3(\bar{x}, 0) = \frac{u_1(\bar{x})}{U}, \bar{v}_3(\bar{x}, 0) = \frac{u_1(\bar{x}) \delta_1'(\bar{x})}{U}, \bar{u}_3(\bar{x}, 1) = 1, \bar{u}_3(0, \bar{y}) = \bar{u}_n(\bar{y}), \bar{v}_3(0, \bar{y}) = \bar{v}_n(\bar{y}), \bar{\delta}_3 = \bar{\delta}_n.$$

В (6) $\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{\delta_3}, \bar{\delta}_3 = \frac{\delta_3}{L}, \bar{u}_3 = \frac{u_3}{U}, \bar{v}_3 = \frac{v_3}{U}, Re_3 = \frac{U L}{\nu_3}$. Неизвестными являются скалярные функции $\bar{u}_3 = \bar{u}_3(\bar{x}, \bar{y}), \bar{v}_3 = \bar{v}_3(\bar{x}, \bar{y})$ – компоненты вектора скорости с верхней границей $\bar{\delta}_3 = \bar{\delta}_3(\bar{x})$ внешнего пограничного слоя. В (6) третье уравнение получено интегрированием первого уравнения по толщине пограничного слоя с

учетом условия плавности $\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=1} = 0$. В результате получена замкнутая система

из трех уравнений для определения $\bar{u}_3, \bar{v}_3, \bar{\delta}_3$. В прямоугольной области $G = \{0 \leq \bar{x} \leq 1, 0 \leq \bar{y} \leq 1\}$ вводится сетка с равномерными шагами h_x по $\bar{x}$ и h_y по $\bar{y}$.

Через $\bar{u}_j^n, \bar{v}_j^n, \bar{\delta}^n$ обозначены значения в узле $(\bar{x}_n, \bar{y}_j)$ сеточных функции $\bar{u}_3, \bar{v}_3, \bar{\delta}_3$ соответственно (обозначения совпадают). Разностная схема имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}_j^{n+1} \left(\frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{h_x} \right) + \frac{1}{\bar{\delta}^{n+1}} \left(\bar{v}_j^{n+1} - \bar{y}_j \bar{u}_j^{n+1} \frac{\bar{\delta}^{n+1} - \bar{\delta}^n}{h_x} \right) \frac{\bar{u}_{j+1}^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1}}{2 h_y} = \\ = \frac{1}{Re_3} \frac{1}{(\bar{\delta}^{n+1})^2} \frac{\bar{u}_{j+1}^{n+1} - 2\bar{u}_j^{n+1} + \bar{u}_{j-1}^{n+1}}{h_y^2}, j = 1, 2, \dots, M-1, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}_{j-1}^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^n}{h_x} + \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{h_x} \right) - \frac{\bar{y}_{j-1} + \bar{y}_j}{2 \bar{\delta}^{n+1}} \frac{\bar{\delta}^{n+1} - \bar{\delta}^n}{h_x} \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1}}{h_y} + \\ + \frac{1}{\bar{\delta}^{n+1}} \frac{\bar{v}_j^{n+1} - \bar{v}_{j-1}^{n+1}}{h_y} = 0, j = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (7)$$

$$A \frac{\bar{\delta}^{n+1} - \bar{\delta}^n}{h_x} + B \bar{\delta}^{n+1} + \frac{C}{\bar{\delta}^{n+1}} + D = 0, j = 0, 1, \dots, M,$$

$$\bar{u}_0^{n+1} = \frac{u_1}{U} \Big|_{\bar{x}=(n+1)h_x}, \bar{v}_0^{n+1} = \frac{u_1 \delta_1'}{U} \Big|_{\bar{x}=(n+1)h_x}, \bar{u}_M^{n+1} = 1,$$

$$\bar{u}_j^0 = \bar{u}_n^0, \bar{v}_j^0 = \bar{v}_n^0, \bar{\delta}^0 = \bar{\delta}_n^0, j = 0, 1, \dots, M. \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $A = \frac{h_y}{2} \left((\bar{u}_0^{n+1})^2 + (\bar{u}_M^{n+1})^2 + 2 \sum_{j=1}^{M-1} (\bar{u}_j^{n+1})^2 \right) - 1,$

$$B = \frac{h_y}{h_x} \left(\bar{u}_0^{n+1} (\bar{u}_0^{n+1} - \bar{u}_0^n) + 2 \sum_{j=1}^{M-1} \bar{u}_j^{n+1} (\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n) \right), \quad C = \frac{1}{Re_3 h_y} (-3 \bar{u}_0^{n+1} + 4 \bar{u}_1^{n+1} - \bar{u}_2^{n+1}),$$

$$D = \frac{\bar{v}_0^{n+1}}{2} (-3 \bar{u}_0^{n+1} + 4 \bar{u}_1^{n+1} - \bar{u}_2^{n+1}) + \sum_{j=1}^{M-1} \bar{v}_j^{n+1} (\bar{u}_{j+1}^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1}).$$

В (7) неизвестными являются сеточные функции $\bar{u}_j^{n+1}, \bar{v}_j^{n+1}, \bar{\delta}^{n+1}$. Линеаризация (7) выполнена методом запаздывающих коэффициентов. Это позволяет уравнения (7) решать последовательно по маршевой координате $\bar{x}$ и итерационно внутри маршевого слоя. После того, как найдены $\bar{u}_j^{n+1}$ из первого уравнения (7), второе разрешается относительно $\bar{v}_j^{n+1}$, третье – относительно $\bar{\delta}^{n+1}$. Схема (7) имеет погрешность аппроксимации $O(h_x + (h_y)^2)$ в равномерной норме. Если заморозить коэффициенты в уравнениях, то исследование методом

Фурье показывает, что для разностной схемы (7) выполняется необходимый спектральный признак устойчивости Неймана, и схема устойчива в среднеквадратичной норме. Таким образом, теоретическое исследование схемы (7) позволяет сделать предположение о сходимости в среднеквадратичной норме.

Выполнено экспериментальное тестирование нелинейной схемы (7) на автомодельном решении односредного пограничного слоя. Погрешность не превосходит 0,6 %.

Основу алгоритма решения сопряженной задачи, реализованного в среде Maple (программа «Lambola plate wilifi»), составляет метод последовательных приближений (блок-схема программы представлена на рис. 8).

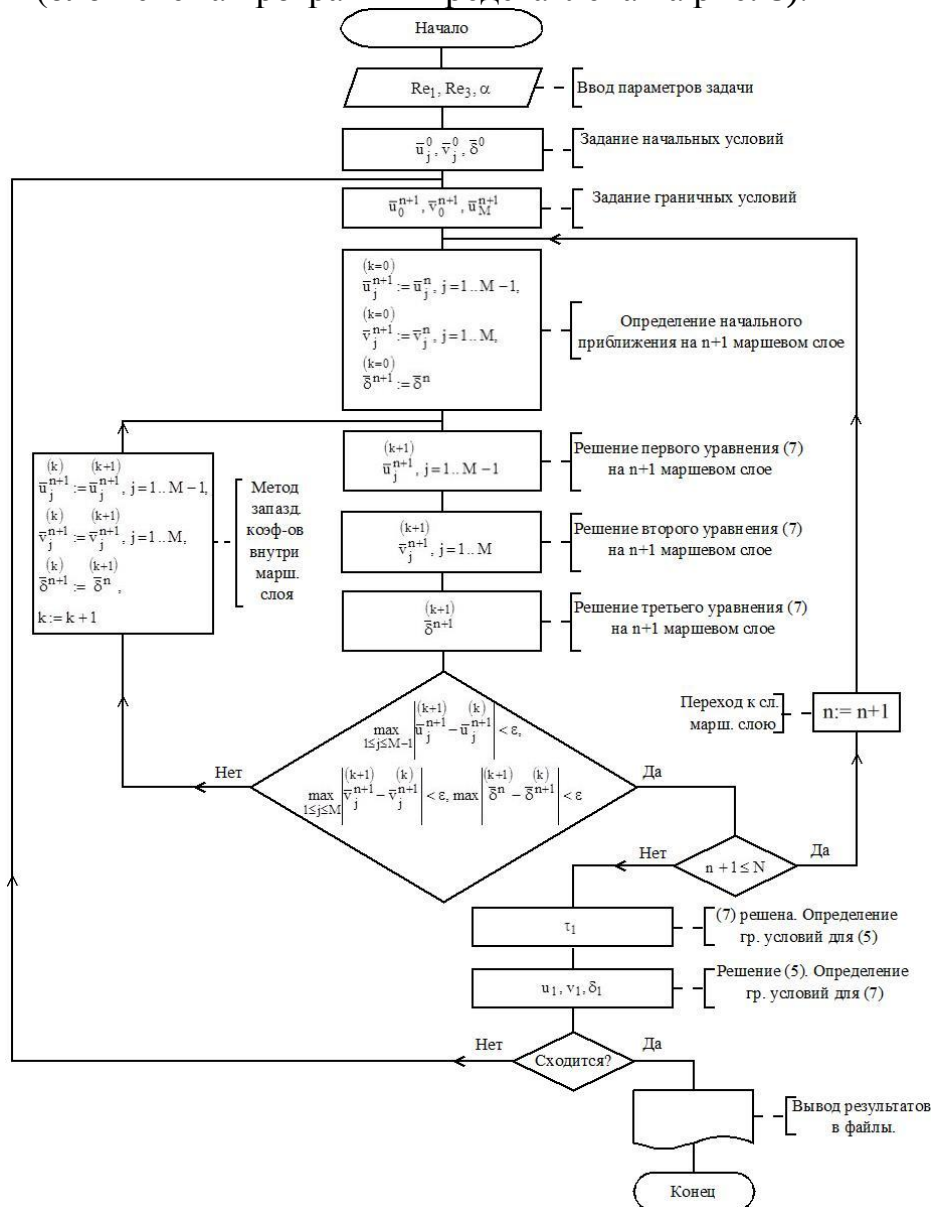


Рис. 8. Блок-схема программы «Lambola plate wilifi»

Метод заключается в том, что задачи внутреннего (6) и внешнего (7) пограничных слоев решаются друг от друга отдельно, но последовательно или итерационно. На каждом новом приближении внутренняя задача решается с учетом функции напряжения трения, полученной из решения внешней задачи, решение которой, в свою очередь, учитывает компоненты скорости на межфазной

Сравнение решений задачи, выполненных по программам «Lambola plate wilifi» и Ansys Fluent, показывает удовлетворительное совпадение результатов (отличие около 7 %), что подтверждает адекватность полученных результатов.

На персональном компьютере (8 ядер/ 1 процессор Intel Core 3.4 GHz с 16 Gb оперативной памяти) скорость расчета задачи по программе «Lambola plate wilifi» на порядок больше скорости расчета в программе Ansys Fluent.

В четвертой главе разрабатывается метод математического моделирования движения твердой тяжелой сферической частицы в ламинарном пограничном слое плоской полубесконечной пластины. Сферическая частица диаметра D_1 не вращается и сохраняет постоянную массу. Выбирается подвижная, связанная с пластиной система декартовых координат, начало которой помещено на край пластины (рис. 10). Пластина расположена под углом α к горизонту и обтекается однородным потоком воздуха с постоянной скоростью U . Вектор скорости потока совпадает с плоскостью пластины. Частица, находящаяся в гравитационном поле, попадает на внешнюю границу пограничного слоя (точка с координатой (x_0, y_0) на рис. 10) и движется в нем.

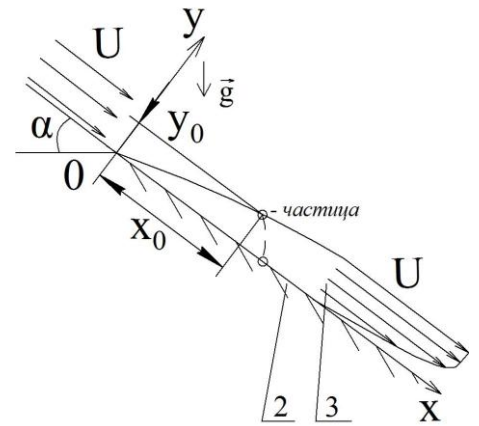


Рис. 10. Схема движение частицы: 1 – частица, 2 – пластина, 3 – погран. слой

Известно, что движение в градиентных потоках тяжелых частиц определяется действием сил инерции, тяжести, аэродинамического сопротивления и силы Сэфмана. Тогда математическая модель движения частицы имеет вид:

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g \sin \alpha + F_x, \quad m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g \cos \alpha + F_y + F_{Saf}, \quad 0 < t, \quad (8)$$

$$x_1(0) = x_0, y_1(0) = 5\sqrt{\frac{\nu_3 x_0}{U}}, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_0, \dot{y}_1(0) = \dot{y}_0,$$

где m_1 – масса частицы; F_x – сила лобового сопротивления; F_y , F_{Saf} – составляющие подъемной силы (F_y посчитана по относительной поперечной скорости частицы в равномерном потоке, F_{Saf} – сила Сэфмана, учитывающая градиентный характер течения). Модель (8) ограничена числами Рейнольдса для пограничного слоя $Re_3 = \frac{U x}{\nu_3} < 5 \cdot 10^5$ и частицы $Re_x = \frac{|u_3 - \dot{x}_1| D_1}{\nu_3} \leq 10^3$ и может быть использована при указанных ограничениях, u_3 – продольная скорость пограничного слоя.

В (8) силы, действующие на частицу, заданы. Другой подход к решению задачи основан на совместном расчете динамики частицы и пограничного слоя и реализован в Ansys Fluent. Поверхностные силы заранее не определены, а рассчитываются численным интегрированием нормального и касательного напряжений по поверхности движущейся в пограничном слое частицы. Перемещение частицы в границах расчетной области реализовано благодаря использованию подхода динамически-перестраивающейся сетки, который

позволяет передвигать границы ячеек и деформировать сетку с учетом движения частицы. Исходя из ограничений по модели выбраны входные данные для вычислительного эксперимента: $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$, $U = 5\text{ м/с}$, $\alpha = 0$, $x_0 = 1\text{ м}$, $D_1 = 0,0001\text{ м}$, $\dot{x}_0 = 0\text{ м/с}$, $\dot{y}_0 = 0\text{ м/с}$. На рис. 11 показаны траектории частицы, полученные по методу на основе (8) (Модель) и по методу в Ansys Fluent (AF). Сравнение результатов показывает удовлетворительное совпадение (разница 12 %). До настоящего времени вопрос о величине и направлении силы Сэфмана остается спорным¹ и количественное рассогласование результатов объясняется этим обстоятельством.

Скорость расчета по методу, основанному на модели (8) (при использовании персональной ЭВМ), на пять порядков превышает скорость расчета в программе Ansys Fluent (при использовании кластера).

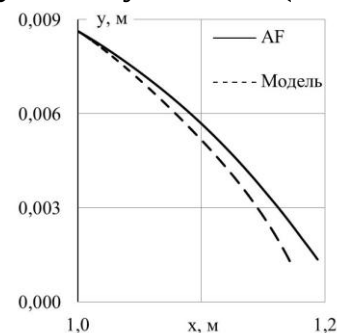


Рис. 11. Траектории частицы

Общие выводы и результаты работы.

1. Предложен метод математического моделирования для определения уровня свободной поверхности жидкости, позволяющий прогнозировать рассогласование уровня свободной поверхности жидкости в канале системы управления расходом топлива относительно уровня в баке ракеты-носителя и обосновать расположение датчиков уровня свободной поверхности в канале системы управления с целью минимизации ошибки при определении реального уровня топлива в баке.
2. Установлено, что уровень свободной поверхности в канале совершает затухающие колебания относительно уровня в баке. Показано, что причиной колебаний является инерционность вязкой жидкости. Результаты, полученные с помощью различных методов математического моделирования, имеют удовлетворительное совпадение (от 15 до 40 %).
3. В рамках теории пограничного слоя разработан метод математического моделирования двухсредного неперемешивающегося ламинарного пограничного слоя со скользящей межфазной границей на плоской полубесконечной пластине, позволяющий находить его характеристики с учетом нескольких параметров — чисел Рейнольдса внутреннего и внешнего пограничных слоев и угла наклона плоской полубесконечной пластины, что отличает его от известных методов.
4. Для решения краевой задачи внутреннего пограничного слоя развит приближенный аналитический метод разложения решения в ряд по малому параметру. Для численного решения краевой задачи внешнего пограничного слоя развит вычислительный метод конечных разностей, позволяющий отказаться от итерационных процедур наращивания сетки на каждом маршевом слое до неизвестной границы пограничного слоя в поперечном направлении (как в известном алгоритме). Получена оценка аппроксимации, проведено исследование устойчивости и сходимости для разностной схемы.

¹ Kurose R., Makino H. Effects of outflow from the surface of a sphere on drag, shear lift, and scalar diffusion // Physics of fluids. 2003. Vol. 15. № 8. P. 2338–2351

5. На основе предложенного метода математического моделирования двухсредного пограничного слоя создана программа для проведения вычислительного эксперимента «Lambola plate wilifi». Показано, что коэффициент трения двухсредного пограничного слоя меньше коэффициента трения односредного пограничного слоя: в зависимости от параметров разница может составлять от 0 до 100 % (и более). Установлено, что причиной снижения коэффициента трения является сила тяжести, под влиянием которой в двухсредном пограничном слое на межфазной границе формируются условия проскальзывания (вместо граничных условий прилипания, как в односредном). Результаты, полученные по различным методам моделирования, согласуются с точностью до 7 %.

6. Разработан метод математического моделирования для сферической частицы (среда – жидкость), основанный на уравнении движения центра масс и заранее определенных активно действующих сил на частицу – инерции, тяжести, аэродинамического сопротивления и силы Сэфмана, позволяющий прогнозировать её движение в односредном пограничном слое (среда – газ) на плоской полубесконечной пластине. Вычислительный эксперимент по методу, реализованному в программном комплексе Ansys Fluent и основанному на решении уравнений Навье-Стокса и на совместном решении задач динамики и аэродинамики для частицы подтверждает выбор системы активно действующих сил на частицу. Отличие траекторий, полученных разными методами моделирования составляет 12 %.

7. Программы, реализующие алгоритмы разработанных в диссертации методов математического моделирования (основанных на модифицированных уравнениях Навье-Стокса), позволяют получать результаты намного быстрее программы Ansys Fluent. Тогда как решение в программе Ansys Fluent (в рамках уравнений Навье-Стокса) позволяет контролировать решение этих программ. Следовательно для дальнейших исследований новых задач целесообразным представляется интеграция методов и подходов моделирования, используемых в диссертации.

В приложениях приведены коды разработанных программ.

Основные публикации по теме диссертации

В изданиях из перечня ВАК:

[1] Клюев, Н.И. Влияние жидкой пленки на сопротивление трения плоской пластины [Текст] / Н.И.Клюев, Ю.А. Крюков // Изв. вузов. Ав. техника. – 2014. – № 4. – С. 33–35. (Переводная версия статьи: Klyuev, N.I. Influence of fluid film on friction of a flat plate [Text] / N.I. Klyuev, Y. A. Kryukov // Russian Aeronautics. – 2014. – Vol 57. – No.4. – P. 372 – 377).

[2] Клюев, Н.И. Снижение трения на плоской пластине при наличии жидкой пленки на ее поверхности [Текст] / Н.И. Клюев, В. А. Фролов, Ю.А. Крюков // Вестн. Самарск. гос. аэрокосм. ун-в. им. ак. С. П. Королева (нац. иссл. ун-в.). – 2012. – №5-2(36) (2012): спец. вып. – С. 29–32.

[3] Крюков, Ю.А. Моделирование движения сферической капли в ламинарном пограничном слое Блазиуса с помощью пакета Ansys Fluent [Текст] / Ю.А. Крюков // Вестн. Сам. универ. Естеств. серия. – 2015. – № 3(2015). – С. 97–105.

[4] Крюков, Ю.А. Математическая модель колебания топлива в измерительном канале системы управления расходом топлива [Текст] / Ю.А. Крюков // Вестн. Самарск. гос. аэрокосм. ун-та им. акад. С. П. Королева (нац. иссл. ун-т). – 2016. – Т. 15 (2016). – № 1. – С. 207–217.

В других изданиях:

[5] Ключев, Н.И. Ламинарное обтекание плоской пластины с жидкой пленкой на ее поверхности [Текст] / Н.И. Ключев, Ю.А. Крюков // Сборник трудов XVI Всероссийского семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. – Самара, 2013. – 198 – 201.

[6] Крюков, Ю.А. Решение сопряженной задачи обтекания плоской пластины при наличии жидкой пленки на ее поверхности [Текст] / Крюков Ю.А. // Материалы III Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные проблемы ракетно-космической техники» (III Козловские чтения). – Самара, 2013. – С.524 – 531.

[7] Klyuev, N.I. Two-media boundary layer on a flat plate [Text] / N.I. Klyuev, A. G. Gimadiev, Y. A. Kryukov // Int. J. of Eng. and Techn. – 2014. – Vol. 6. – № 5. – P. 2368 – 2374.

[8] Крюков, Ю.А. Математическая модель колебания топлива в измерительном канале СУРТ [Текст] / Ю.А. Крюков // Материалы IV Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные проблемы ракетно-космической техники» (IV Козловские чтения). – Самара, 2015. – С.121 – 123.

[9] Крюков, Ю.А. Сферическая капля в ламинарном пограничном слое плоской пластины [Текст] / Ю.А. Крюков // Научная мысль. – 2016. – № 1. – С. 106–111.

[10] Ключев, Н.И. Колебание жидкости в измерительном канале системы управления расходом топлива ракеты-носителя / Н.И. Ключев, Ю.А. Крюков // Сборник трудов XVIII Всероссийского семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. – Самара, 2015. – С. 221 – 224.

[11] Ключев, Н.И. Снижение аэродинамического сопротивления трения на плоской пластине / Н.И. Ключев, Ю.А. Крюков // Динамика и виброакустика машин: материалы третьей международной научно-технической конференции. – Самара, 2016. – С. 38–40.

[12] Крюков, Ю.А. Математические модели для исследования колебаний топлива в измерительном канале системы управления расходом топлива в баках ракеты носителя / Ю.А. Крюков // Сборник материалов Всероссийской молодежной научно-практической конференции «Орбита молодежи» и перспективы развития российской космонавтики». – Самара, 2016. – С. 74 – 75.

[13] Klyuev, N.I. Reducing friction drag on flat plates / Klyuev N., Kryukov Y., Gimadiev A. // Procedia Engineering. – 2017. – Vol. 176. – P. 661–668.

[14] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015619401 Российская Федерация. Lambola plate wilifi / Ю.А.Крюков; заявитель и правообладатель Крюков Ю.А. - №2015619401; заявл. 07.07.2015; зарегистр. 02.09.2015.

Подписано в печать 30.03.2018.

Формат 60х90 1/16.

Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ № 168.

Отпечатано на ризографе.

ФГБОУ ВО Самарский государственный технический университет»

Отдел типографии и оперативной печати

443100, Россия, г. Самара, Молодогвардейская, 244