На правах рукописи

Дилигенская Анна Николаевна

Методы идентификации, анализ и синтез алгоритмов последовательной параметрической оптимизации в обратных задачах технологической теплофизики

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации (промышленность)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Самара – 2019

Работа выполнена на кафедре «Автоматика и управление в технических системах» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Самарский государственный технический университет».

Научный консультант:	**Рапопорт Эдгар Яковлевич** доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Автоматика и управление в технических системах» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»
Официальные оппоненты:	**Колосов Олег Сергеевич** доктор технических наук, профессор, профессор кафедры управления и информатики Института автоматики и вычислительной техники ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ», г. Москва
	Першин Иван Митрофанович доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой систем управления и информационных технологий Института сервиса, туризма и дизайна (филиала) ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет», г. Пятигорск
	Торгашова Ольга Юрьевна доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Радиоэлектроника и телекоммуникации» ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», г. Саратов
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва

Защита состоится «16» мая 2019 г. в 10.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.217.03 при ФГБОУ ВО «СамГТУ» по адресу: 443100, г. Самара, ул. Галактионовская, 141, корп. № 6, ауд. 33.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБОУ ВО «СамГТУ» по адресу: 443100, г. Самара, ул. Первомайская, 18.

Автореферат разослан «____» _____________ 2019 г.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по адресу: 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус, ученому секретарю диссертационного совета Д 212.217.03;
факс (846) 278-44-00.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.217.03
доктор технических наук, доцент — Зотеев В.Е.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В настоящее время теория обратных задач математической физики (ОЗМФ) является одним из перспективных, интенсивно развивающихся направлений прикладной математики, актуальность которого обусловлена широким распространением данных задач в различных сферах естествознания, техники, научных и инженерных приложений, что отражается в большом количестве типов ОЗМФ и направлений их исследования.

В сфере инженерной теплофизики одну из широких областей применения теории некорректных и обратных задач составляют обратные задачи теплопроводности (ОЗТ), возникающие при идентификации и диагностике неизвестных характеристик технологических процессов, проектировании нагревательных установок и тепловых конструкций, выборе оптимальных режимов функционирования нагревательного оборудования, и решение таких задач является важной проблемой, во многом определяющей эффективность ответственных производственных процессов в энергетике, металлургии, машиностроении, авиационной и космической технике и других сферах.

В ОЗТ необходимо определить неизвестные характеристики тепловых процессов по некоторой экспериментально полученной информации о выходной величине — температурном поле, опосредованно содержащем проявления искомых характеристик. Такие задачи в исходной постановке относятся к числу некорректно поставленных, и обычно для получения их устойчивых решений требуется применение специального математического аппарата.

Теория некорректных задач математической физики была создана основополагающими работами академиков А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева и В.К. Иванова и получила дальнейшее развитие в их работах и работах В.Я. Арсенина, А.Л. Бухгейма, Ф.П. Васильева, В.В. Васина, В.Б. Гласко, А.М. Денисова, С.И. Кабанихина, В.А. Морозова, А.И. Прилепко, В.Г. Романова, В.П. Тананы, А.М. Федотова, А.Г. Яголы, Р. Латтеса, Ж.Л. Лионса, J. Gullum, K. Miller и многих других, и к настоящему моменту является одним из основных направлений современной прикладной математики.

Значительные результаты в разработке методов решения ОЗТ в области технологической теплофизики получены О.М. Алифановым, Е.А. Артюхиным, А.О. Ватульяном, Л.А. Коздобой, Ю.М. Мацевитым, А.В. Мултановским, А.В. Ненарокомовым, Д.Ф. Симбирским, Н.В. Шумаковым, J.V. Beck, B. Blackwell, D.A. Murio, H.-J. Reinhardt и другими учеными.

Для преодоления некорректности постановки ОЗТ в основном используются два возможных пути. Первый основывается на сведении задачи к условно-корректной постановке путем привлечения дополнительной информации об искомом решении и соответствует поиску решений на компактных множествах. Во втором подходе применяются классические алгоритмы нахождения приближенных решений некорректно поставленных задач на основе численных методов регуляризации с использованием сглаживающих функционалов.

Существующие методы решения ОЗТ в основном сводятся к достаточно сложным вычислительным алгоритмам, требующим высокой квалификации и большого предварительного опыта пользователей, и не содержат анализ общих качественных характеристик и базовых свойств получаемых по предлагаемым схемам идентифицируемых воздействий, на основе которых может быть построена в достаточной степени универсальная алгоритмически точная конструктивная процедура поиска искомых величин, сравнительно просто реализуемая на завершающем этапе с помощью стандартных численных методов.

Большие возможности дальнейшего развития методов решения ОЗТ в указанном направлении содержатся применительно к широко распространенным на практике экстремальным постановкам ОЗТ в форме минимизации температурных невязок в соответствующих функциональных пространствах.

Эффективное решение подобных задач оптимизации может быть реализовано на базе современной теории и техники оптимального управления системами с распределенными параметрами (ТОУ СРП), в которых учитываются особенности теплообменных процессов, связанные с пространственной распределенностью управляемых величин.

Начиная с основополагающих работ А.Г. Бутковского, к настоящему времени в трудах Г.Л. Дегтярева, А.И. Егорова, Ю.В. Егорова, В.А. Коваля, Ж.-Л. Лионса, К.А. Лурье, И.М. Першина, В.И. Плотникова, Л.М. Пустыльникова, Э.Я. Рапопорта, Т.К. Сиразетдинова, О.Ю. Торгашевой и других ученых получен ряд фундаментальных результатов, на базе которых могут быть построены новые эффективные подходы к решению ОЗТ.

Учитывая изложенное, актуальной научно-технической задачей является разработка новых эффективных и реализуемых на практике подходов к решению обратных задач теплопроводности, основанных на положениях современной теории оптимизации объектов с распределенными параметрами и сохраняющих качественные особенности процессов нестационарной теплопроводности.

Диссертация посвящена разработке, теоретическому обоснованию, построению вычислительных алгоритмов и практическому применению нового конструктивного алгоритмически точного метода решения основного круга обратных задач технологической теплофизики в экстремальной постановке, обеспечивающего нахождение физически реализуемых идентифицируемых воздействий на компактных множествах последовательно параметризуемых искомых величин.

Объектом исследования являются процессы нестационарной теплопроводности, описываемые математическими моделями в виде линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа в одномерных и двумерных областях канонической формы.

Цели и задачи диссертационной работы:

Целью работы является совершенствование существующих методов решения обратных задач технологической теплофизики путем использования предлагаемой процедуры их точной редукции к специальным условно-корректным задачам последовательной параметрической оптимизации искомых идентифицируемых воздействий, разрешаемым с помощью обоснованных в диссертации конструктивных вычислительных процедур без применения численных регуляризирующих алгоритмов.

Основные задачи в этом направлении сводятся к:

– разработке и теоретическому обоснованию процедуры редукции исходной некорректно поставленной обратной задачи теплопроводности в экстремальной постановке к условно-корректной ОЗТ путем сужения множе-

ства искомых решений до компактного множества физически реализуемых функций;
- построению и теоретическому обоснованию процедуры последовательной параметризации искомых решений условно-корректной ОЗТ и ее дальнейшей редукции к задаче минимизации оцениваемых в равномерной метрике невязок между результатами температурных измерений и их модельными представлениями;
- разработке и теоретическому обоснованию методов и вычислительных алгоритмов для решения полученной минимаксной задачи математического программирования на основе специального метода параметрической оптимизации, использующего альтернансные свойства оптимальных температурных распределений, подобные свойствам нелинейных чебышевских приближений;
- разработке и теоретическому обоснованию процедуры последовательной параметризации идентифицируемых воздействий в условно-корректных ОЗТ на основе модального описания нестационарных температурных полей;
- разработке и исследованию методик и вычислительных алгоритмов решения широкого круга задач по идентификации основных воздействий в моделях процесса нестационарной теплопроводности: граничного теплового потока, внутренних сосредоточенных или распределенных воздействий по мощности внутреннего тепловыделения, а также зависящих от температуры или от пространственной координаты основных теплофизических характеристик.

Научная новизна заключается в разработке, теоретическом обосновании и технике применения для широкого круга технических приложений конструктивного алгоритмически точного метода последовательной параметрической оптимизации физически реализуемых решений обратных задач теплопроводности на компактных множествах их определения. В работе получены следующие основные научные результаты в указанном направлении:
- Предложена и теоретически обоснована процедура редукции широкого круга ОЗТ в экстремальной постановке к условно-корректным вариационным задачам оптимального управления бесконечномерным объектом с распределенными параметрами по критерию минимизации температурных невязок в равномерной метрике на интервале идентификации, которые отличаются от известных поиском физически реализуемых решений ОЗТ на компактном множестве функций, непрерывных вместе со своими первыми производными.
- Разработаны и обоснованы не имеющие известных аналогов алгоритмы последовательной параметризации искомых решений минимаксной бесконечномерной вариационной задачи и ее точной редукции к задаче минимизации на компактном множестве искомых параметров погрешностей чебышевских приближений для отклонений температурных измерений от их модельных описаний.
- Разработаны и обоснованы конструктивные методики алгоритмически точного решения параметризуемых задач нелинейных чебышевских приближений температурных невязок на временном интервале периода иденти-

фикации заданной длительности применительно к основным постановкам типовых ОЗТ.

- Предложен, разработан и теоретически обоснован не имеющий известных аналогов метод идентификации упорядоченной совокупности модальных составляющих граничных и внутренних пространственно-временных воздействий в ОЗТ (метод модальной идентификации) по результатам температурных измерений с последующим восстановлением искомых величин в форме разложения в усеченный ряд по собственным функциям исследуемых краевых задач.
- Предлагаемые методы регуляризации и алгоритмы последовательной параметрической оптимизации решений обратных задач теплопроводности детализированы, конкретизированы и разработаны на уровне конструктивных расчетных методик применительно к представляющим самостоятельный научный интерес типичным обратным задачам технологической теплофизики: коэффициентным обратным задачам, ОЗТ с идентифицируемыми начальными состояниями, граничными и внутренними, сосредоточенными, пространственно-распределенными и пространственно-временными воздействиями, описываемыми линейными и нелинейными одномерными и двумерными уравнениями теплопроводности.

Теоретическая и практическая значимость. В диссертации разработан новый конструктивный метод нахождения с требуемой точностью физически реализуемых решений обратных задач технологической теплофизики без применения численных регуляризирующих алгоритмов, который может быть использован для решения широкого круга ОЗТ по идентификации основных характеристик и параметров процессов нестационарной теплопроводности при реализации технологических процессов, а также для решения задач идентификации и оптимизации различных объектов технологической теплофизики и других систем с распределенными параметрами, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа.

Предлагаемый метод обеспечивает повышение точности и снижение трудоемкости при идентификации основных не подлежащих непосредственному измерению характеристик процесса теплопроводности и позволяет получить искомые воздействия в удобной для практического использования параметризованной форме.

Практическая значимость работы заключается в разработанном специальном математическом, алгоритмическом и программном обеспечении, которое может быть непосредственно использовано для решения конкретных ОЗТ в различных технических приложениях.

На основе разработанного метода выполнены исследования основных теплофизических параметров теплопроводности и термоупругости полимерных и композиционных материалов при составлении их паспортных характеристик. Полученные результаты используются при планировании экспериментальных исследований процессов нестационарной теплопроводности и термоупругости. Предложенные автором методики использованы в практике определения режимов индукционного нагрева при производстве алюминиевых полуфабрикатов.

Результаты исследований применены при проведении идентификации математических моделей при создании компьютерного тренажёра основного технологического оборудования Стерлитамакской ТЭЦ и Новостерлитамакской ТЭЦ, филиалов ООО «Башкирская генерирующая компания».

Реализация результатов исследований. Полученные в работе теоретические положения и практические результаты использованы:

- при выполнении НИР по проектам Российского Фонда Фундаментальных Исследований «Методы и алгоритмы оптимизации процессов нестационарной теплопроводности в технологических объектах с распределёнными параметрами» (№ 18-08-00565); «Разработка и теоретическое обоснование алгоритмически точного метода решения векторных задач оптимального управления техническими объектами с распределенными параметрами» (№ 18-08-00048); «Применение специальных методов оптимизации для решения обратных задач теплопроводности» (№ 15-08-06872); «Аналитические методы оценки и алгоритмы реализации программной управляемости детерминированных и не полностью определенных систем с распределенными параметрами» (№ 15-08-01347); «Разработка основ теории и методов построения систем управления многооперационными, непрерывными технологическими процессами, гарантирующими достижение требуемого эксплуатационного качества выпускаемой продукции» (№ 15-08-04209); «Моделирование и управление объектами с распределёнными параметрами с применением нечёткой логики» (№ 14-08-00446); «Аналитическое конструирование агрегированных регуляторов в динамических системах с распределенными параметрами» (№ 12-08-00277); «Разработка основ теории и методов реализации энергосберегающих систем оптимального управления технологическими процессами изолирования проводных кабелей связи» (№ 11-08-01171); «Разработка методов структурного моделирования объектов и систем управления с распределёнными параметрами на базе аппроксимации пространственного распределения информационных сигналов» (№ 10-08-00754);
- при выполнении НИР по проектам: «Теория, вычислительные алгоритмы и технические приложения специальных методов математического моделирования, идентификации и управления в сложноструктурированных системах» (в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности по Заданию № 1271 Минобрнауки РФ, 2014–2016 гг.); «Теория построения и методы реализации стратегий программного и позиционного управления техническими объектами с распределенными параметрами» (в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности по Заданию Минобрнауки РФ, 2012–2014 гг.); «Теория и приложения аналитических методов синтеза агрегированных систем управления техническими объектами с распределенными параметрами» (в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности по Заданию Минобрнауки РФ, 2011 г.);
- при выполнении НИР по проекту «Теория, вычислительные алгоритмы и технические приложения точных методов решения краевых задач оптимального управления системами с распределенными параметрами в условиях чебышевских оценок заданных множеств», (федерально-целевая научно-техническая программа 539/09, 2009–2011 гг.).

Материалы диссертационных исследований использованы в учебном процессе в ФГБОУ ВО «СамГТУ» при подготовке бакалавров и магистров по направлениям 27.03.04 и 27.04.04 «Управление в технических системах» и бакалавров по направлению 27.03.03 «Системный анализ и управление».

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы, основанные на системном подходе к решаемой проблеме, в том числе методы теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, теории систем автоматического управления, теории тепло- и массопереноса, аппарат конечных интегральных преобразований, методы численного и компьютерного моделирования: методы численного интегрирования и дифференцирования, численные методы аппроксимации и сглаживания экспериментальных данных.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод редукции ОЗТ к условно-корректной вариационной задаче минимизации температурных невязок, оцениваемых в равномерной метрике на компактном множестве физически реализуемых искомых решений.
2. Алгоритмы последовательной параметризации искомых решений минимаксной вариационной задачи и ее последующей точной редукции к задаче нелинейных чебышевских приближений для отклонений температурных измерений от их модельных описаний.
3. Конструктивные методики и результаты алгоритмически точного решения параметризуемых задач минимизации ошибок равномерного приближения температурных невязок на интервале идентификации заданной длительности применительно к основным постановкам ОЗТ.
4. Метод и алгоритмы модальной идентификации в обратных задачах теплопроводности.
5. Результаты решения обратных задач теплопроводности применительно к ответственным промышленным объектам технологической теплофизики.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях: Международная научная конференция «2018 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon)» (Владивосток, 2018 г.); XX международная конференция «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (Самара, 2018 г.); X Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (Самара, 2017 г.); XVIII международная конференция «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (Самара, 2016 г.); XXIX международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях» (Самара, 2016 г.); VII международная научная конференция молодых ученых «Электротехника. Электротехнология. Энергетика» (ЭЭЭ-2015) (Новосибирск, 2015 г.); XVI международная конференция «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (Самара, 2014 г.); I международная научная конференция молодых ученых «Электротехника. Энергетика. Машиностроение» (ЭЭМ–2014)» (Новосибирск, 2014 г.); международная научно-практическая конференция «Техника и технологии: Пути инновационного развития», (Курск, 2011 г.); XII международная конференция «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (Самара, 2010 г.); международная научно-техническая конференция «Информационные, измерительные и управляющие системы (ИИУС-2010)», (Самара, 2010 г.); международная научная конференция «Проблемы управления, передачи и обработки информации» (АТМ-ТКИ-50) (Саратов, 2009 г.); XI межвузовская конференция «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2001 г.); международная научно-техническая конференция «Качество, безопасность и энергосбережение» (Самара, 1998 г.); VII межвузовская конференция «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 1997 г.); VI межвузовская конференция «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 1996 г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 44 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах, состоящих в системах Web of Science и Scopus: [1—5], 14 статей в рецензируемых журналах из перечня ВАК [6—19], 22 публикации в других изданиях, сборниках научных трудов, материалов конференций разного уровня [20—41], 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [42], 2 учебных пособия [43; 44].

Личный вклад автора. Основные положения и результаты диссертационной работы получены автором лично. Постановка научной проблемы, постановка и решение задач исследования, непосредственное выполнение основной части работы, выполненной в соавторстве, принадлежат автору. В [2; 3; 5; 24] автором разработана концепция решения обратных задач теплопроводности, методы исследования проблемы параметрической оптимизации решений обратных задач теплопроводности на множествах непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций. В [10; 12] автором предложены, разработаны, исследованы и экспериментально отлажены методы решения ОЗТ. В [16; 17; 25—28; 30] выполнена постановка задачи, реализована методика решения задач исследования. Работы [1; 4; 6—9; 11; 13—15; 20—23; 29; 42] выполнены без соавторов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 6 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 247 страниц, из них 221 страниц текста, включая 80 рисунков и 22 таблицы. Библиографический список включает 209 наименований.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе рассмотрена научная проблема системного анализа обратных задач технологической теплофизики, позволяющих восстанавливать неизвестные характеристики или параметры теплофизических объектов и систем или процессов теплопроводности на основе измерений их состояний, показаны области применения ОЗТ и их роль в теплофизических исследованиях в промышленности и в лабораторных условиях, отражены основные исследуемые в диссертации аспекты общей научной проблемы (табл. 1).

Приведена используемая в работе классификация обратных задач теплопроводности в соответствии с принадлежностью искомых характеристик исследуемых процессов нестационарной теплопроводности какому-либо классу, которая позволяет систематизировать рассматриваемые в диссертационной работе

Таблица 1. Проблемы технологической теплофизики, решаемые с помощью обратных задач теплопроводности

Задачи технологической теплофизики	Прикладная обратная задача теплопроводности	Определяемые характеристики	Тип обратной задачи теплопроводности
Исследование технологических процессов нагрева и охлаждения металлических заготовок (деталей) перед обработкой давлением	Идентификация условий теплообмена на поверхности тела для определения нужных для обработки тепловых режимов	Плотности тепловых потоков; Коэффициенты теплоотдачи на поверхности тел	Граничные ОЗТ
Оптимальное по технологическим критериям качества (быстродействие, точность процесса) управление нестационарным температурным полем в термических процессах	Идентификация и диагностика нестационарных условий теплообмена; Управление тепловыми нагрузками	Плотности тепловых потоков; Коэффициенты теплоотдачи на поверхности тел	Граничные ОЗТ
Оптимальное по технологическим критериям качества (быстродействие, точность процесса, энергосбережение) управление нестационарным температурным полем в процессах индукционного нагрева металла	Идентификация и диагностика нестационарных условий теплообмена; Управление тепловыми нагрузками	Плотности тепловых потоков; Коэффициенты теплоотдачи на поверхности тел	Граничные ОЗТ
	Идентификация тепловых источников	Удельная мощность внутреннего тепловыделения; Закон пространственного распределения теплоисточников	Внутренние ОЗТ
Оптимальное проектирование теплового оборудования (индукционных нагревателей)	Идентификация тепловых источников	Удельная мощность внутреннего тепловыделения; Закон пространственного распределения теплоисточников	Внутренние ОЗТ
Изучение теплофизических характеристик материалов и конструкций	Идентификация теплофизических коэффициентов	Коэффициенты теплопроводности, теплоемкости	Коэффициентные ОЗТ

ОЗТ как граничные (идентификация граничных условий), внутренние, которые подразделяются на задачи определения сосредоточенного, пространственного или пространственно-временного закона изменения мощности внутренних тепловых источников и задачи определения теплофизических характеристик, и ретроспективные (определение начального состояния) ОЗТ.

Проведен обзор и дан анализ современного состояния методов решения обратных задач теплопроводности, как правило, являющихся некорректно поставленными задачами, в которых нарушено условие корректности по Адамару, в частности, условие устойчивости решения относительно погрешности входных данных, что обусловливает необходимость применения специального математического аппарата для их решения.

Для эффективного решения ОЗТ необходимо сформулировать иную — корректную постановку задачи, основу которой составляет понятие регуляризирующего алгоритма как способа приближенного решения некорректно поставленной задачи с приближенно известной входной информацией.

Использование регуляризирующей последовательности операторов $\Re_n$ позволяет устойчивым образом находить приближенное решение обратных задач, которое стремится к точному решению с ростом числа n.

Разработанное на сегодняшний день большое число специальных (регулярных) методов решения обратных задач, предусматривающих замену исходной некорректной задачи задачей или последовательностью задач, корректных в обычном смысле, основывается на одном из двух подходов.

Методы решения ОЗТ, такие как: методы обращения математической модели, методы подбора, квазиобращений, итерационные методы и многие другие, — построены на базовом универсальном подходе, предложенном А.Н. Тихоновым, позволяют находить приближенные решения, устойчивые к малым изменениям исходных данных, для существенно некорректных задач на основе численных регуляризирующих алгоритмов. Такие подходы находят широкое применение при решении ОЗТ и интенсивно развиваются в работах О.М. Алифанова, Е.А. Артюхина, Дж. Бека, В.Б. Гласко, В.А. Морозова, А.В. Ненарокомова, Ю.В. Полежаева, П.В. Просунцова, С.В. Резника и других известных исследователей-теплофизиков. В работах Дж. Бека, А.Е. Воскобойникова, Ю.М. Мацевитого, Д.Ф. Симбирского, J. Hodge используются рекуррентные (последовательные) методы параметрической идентификации, такие как модифицированные алгоритмы цифрового фильтра Калмана и другие.

Другой подход предусматривает приведение обратной задачи к корректной постановке того или иного типа на основе использования дополнительной информации об искомом решении. Введение задачи в класс корректности (приведение к условно-корректной постановке) может осуществляться на основе учета в постановке задачи условия компактности множества искомых решений, означающее использование количественной информации о решении или путем расширения понятия решения до понятия квазирешения, восстанавливающего все условия корректности.

Эффективным для научно-технических приложений подходом к решению ОЗТ являются экстремальные постановки с последующей параметрической идентификацией (оптимизацией), которая может быть основана на методах теории оптимального управления системами с распределенными параметрами.

К рассматриваемому классу ОЗТ может быть применен центральный результат ТОУ СРП — принцип максимума Понтрягина, — позволяющий априори установить структуру идентифицируемых величин, рассматриваемых в качестве оптимальных управляющих воздействий, с точностью до некоторого вектора упорядоченной последовательности параметров.

В диссертационной работе определение этого вектора параметров производится на основе разработанного профессором Э.Я. Рапопортом точного метода решения краевых задач оптимального управления объектами с распределенными параметрами (ОРП), предусматривающего на этапе постановки задачи задание целевого множества допустимых конечных состояний ОРП в бесконечномерном фазовом пространстве с оценкой точности приближения результирующего состояния оптимального процесса к требуемому конечному состоянию в равномерной (чебышевской) метрике в пределах всей области изменения пространственной переменной ОРП.

В соответствии со сказанным, актуальная проблема решения обратных задач технологической теплофизики сводится к построению регулярных решений ОЗТ на компактных множествах искомых параметризуемых воздействий, исходя из требований их физической реализуемости, для чего используются методы теории оптимального управления СРП в виде необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума и алгоритмически точный метод решения краевых задач оптимального управления ОРП при оценке точности приближения результирующего состояния оптимального процесса к требуемому распределению в равномерной метрике.

Во второй главе приведено описание и теоретическое обоснование разработанного метода минимаксной оптимизации для решения обратных задач теплопроводности. Вначале основные положения метода минимаксной оптимизации рассматриваются применительно к основной базовой модели ОЗТ в виде линейных краевых задач, в дальнейшем полученные результаты распространяются на решение более сложных ОЗТ.

Линейная одномерная модель температурного поля $\theta(x,\varphi)$, зависящего от числа Фурье φ и пространственной координаты $x \in [0,1]$, в процессе нестационарной теплопроводности с внутренним тепловыделением, характеризуемым функцией $\Psi(x)v(\varphi)$, описывается уравнением

$$\frac{\partial\theta(x,\varphi)}{\partial\varphi} = \Big(\frac{\partial^2\theta(x,\varphi)}{\partial x^2} + \frac{\Gamma}{x}\frac{\partial\theta(x,\varphi)}{\partial x}\Big) + \Psi(x)v(\varphi);\;\; 0 < x < L;\; 0 < \varphi \le \varphi^*, \quad (1)$$

с заданными начальными

$$\theta(x,0) = \theta_0(x),\, x \in [0,L] \quad (2)$$

и граничными условиями второго

$$\frac{\partial\theta(L,\varphi)}{\partial x} = q(\varphi); \quad \frac{\partial\theta(0,\varphi)}{\partial x} = 0; \quad \varphi \in [0,\,\varphi^*] \quad (3)$$

или третьего рода

$$\frac{\partial\theta(L,\varphi)}{\partial x} + \mathsf{Bi}\cdot\theta(L,\varphi) = \mathsf{Bi}\cdot\theta_c(\varphi); \quad \frac{\partial\theta(0,\varphi)}{\partial x} = 0; \quad \varphi \in [0,\,\varphi^*], \quad (4)$$

где $\Gamma \in \{1,2,3\}$ — коэффициент формы нагреваемого тела.

В диссертационной работе разработаны методы параметрической оптимизации, ориентированные на решение внутренней, граничной и ретроспективной ОЗТ в экстремальных постановках. позволяющие идентифицировать одну из следующих функций:

– сосредоточенная мощность внутренних теплоисточников $v(\varphi)$ (во внутренней ОЗТ);
– закон их пространственного распределения $\Psi(x)$ (также во внутренней ОЗТ);
– плотность теплового потока $q(\varphi)$ на границе $x = L$ (в граничной ОЗТ);
– или пространственное распределение температур $\theta_0(x)$ в начальный момент времени (в ретроспективной ОЗТ).

Для решения ОЗТ задана дополнительная информация о температуре, в качестве которой при решении внутренних, граничных и ретроспективных ОЗТ в первой постановке используются температурные измерения $\theta^*(\varphi)$, полученные на определенном временном интервале идентификации $\varphi \in [0, \varphi^*]$ в некоторой фиксированной пространственной точке x^*, или «финальные» наблюдения о пространственно-непрерывном распределении температур $\theta^*(x)$, $x \in [0, L]$ в некоторый фиксированный (финальный) момент времени φ^* (во второй постановке ретроспективной ОЗТ).

Разработанный метод решения ОЗТ основывается на теории оптимального управления объектами с распределенными параметрами, в соответствии с которой подлежащая идентификации характеристика рассматривается в качестве оптимального управления $u \in \{u_i\} = \{v(\varphi), \Psi(x), q(\varphi), \theta_0(x)\}$, $i = \overline{1, 4}$, для которого задаются условия его принадлежности

$$u \in V, \quad V = \{V_i\}, \quad i = \overline{1, 4} \tag{5}$$

множеству V достаточно гладких функций соответствующего аргумента φ или x.

Оценивание абсолютного отклонения модельного значения температурного поля $\theta(x^*, \varphi)$ или $\theta(x, \varphi^*)$ от требуемого распределения $\theta^*(\varphi)$ или $\theta^*(x)$ на заданном временном $[0, \varphi^*] \ni \varphi$ или пространственном $[0, L] \ni x$ интервале осуществляется в равномерной метрике. На этом основании формулируется ОЗТ в экстремальной постановке.

Задача поиска сосредоточенного внутреннего или граничного воздействия и ретроспективная ОЗТ в первой постановке предусматривает поиск такого подчиненного ограничению (5) управляющего воздействия u, при котором на заданном временном интервале $[0, \varphi^*] \ni \varphi$ достигается минимакс

$$I_1^{(i)}(u) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} |\theta(x^*, \varphi) - \theta^*(\varphi)| \to \min_{u \in V_i}, \; i = \overline{1, 4}. \tag{6}$$

Ретроспективная ОЗТ во второй постановке предусматривает определение подчиненного ограничению (5) управляющего воздействия $u = \theta_0(x)$, обеспечивающего на заданной области изменения пространственной переменной $[0, L] \ni x$ выполнение минимаксного соотношения

$$I_1^{(5)}(u) = \max_{x \in [0, L]} |\theta(x, \varphi^*) - \theta^*(x)| \to \min_{u \in V_4}. \tag{7}$$

Специфической особенностью разработанного метода является поиск решений на компактном множестве V физически реализуемых на интервале идентификации функций на основе требований достаточной гладкости искомых решений. Для этого за управление вместо функции u принимается ее k-ая производная

$$w(\varphi) = \frac{d^k u(\varphi)}{d\varphi^k}, \quad k > 1 \tag{8}$$

или

$$w(x) = \frac{d^k u(x)}{dx^k}, \quad k > 1 \tag{9}$$

по соответствующему временному φ или пространственному x аргументу, подчиненная типовому ограничению на максимально допустимое (априори неизвестное) значение

$$|w(\varphi)| \leq |w_{\max}^{(\varphi)}|, \quad \varphi \in [0, \varphi^*] \tag{10}$$

или

$$|w(x)| \leq |w_{\max}^{(x)}|, \quad x \in [0, L], \tag{11}$$

что гарантирует на интервале идентификации непрерывность функции вместе с ее $k-1$ производными. Случай $k = 2$ обеспечивает поиск управляющего воздействия в классе непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций соответствующей временной или пространственной переменной. Указанный класс образует компактное множество, и тем самым, соответствует приведению исходной задачи (6), (8) (10) или (7) (9) (11) к условно-корректной постановке.

Новое (условное) управляющее воздействие w по второй производной от u связано с идентифицируемой характеристикой системой уравнений по соответствующему временному

$$\frac{du(\varphi)}{d\varphi} = \nu(\varphi), \ \ \frac{d\nu(\varphi)}{d\varphi} = w(\varphi), \quad u(0) = u_0, \ \nu(0) = u'_\varphi(0) = \nu_0; \tag{12}$$

или пространственному аргументу

$$\frac{du(x)}{dx} = \nu(x), \ \ \frac{d\nu(x)}{dx} = w(x), \ \ u(0) = u_0, \ \nu(0) = u'_x(0) = \nu_0. \tag{13}$$

Априори неизвестные предельные величины $w_{\max}$ в (10), (11) и соответствующие начальные значения u_0 и $u'(0)$ в (12) и (13) в каждой из ОЗТ относятся к числу искомых параметров, которые должны быть определены на последующем этапе решения задачи.

В задачах восстановления сосредоточенных воздействий $v(\varphi)$ или $q(\varphi)$ используется точное описание температурного поля в виде бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно коэффициентов (временных мод) разложения $\theta(x, \varphi)$ в бесконечный ряд по собственным функциям тепловой задачи, которое позволяет следующим образом сформулировать задачу оптимального управления.

Требуется для объекта управления, заданного точной бесконечномерной моделью, найти стесненное ограничением (10) условное управляющее воздействие $w^0(\varphi)$, при котором на заданном интервале идентификации $[0, \varphi^*]$ достигается минимальная величина функционала

$$I_2^{(1)}(w(\varphi)) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} |\theta(x^*, \varphi) - \theta^*(\varphi)| \to \min_{w(\varphi)}. \tag{14}$$

При решении задачи идентификации пространственно распределенных воздействий используется точное математическое описание объекта в виде обыкновенного дифференциального уравнения относительно изображения $\widetilde{\theta}(x,p)$ температурного поля, где "p"— оператор Лапласа, что приводит к следующей задаче оптимального управления.

Для объекта управления с распределенными параметрами, заданного точной моделью в изображениях Лапласа, требуется найти стесненное ограничением (11) управляющее воздействие $w^0(x)$, при котором на интервале идентификации $[0,\varphi^*]$ достигается минимальная величина функционала

$$I_2^{(2)}(w(x)) = \max_{\varphi\in[0,\varphi^*]} |\theta(x^*,\varphi) - \theta^*(\varphi)| \to \min_{w(x)}. \tag{15}$$

Во второй постановке ретроспективной ОЗТ минимаксный функционал принимает вид

$$I_2^{(3)}(w(x)) = \max_{x\in[0,1]} |\theta(x,\varphi^*) - \theta^*(x)| \to \min_{w(x)}. \tag{16}$$

Для использования методов ТОУ СРП осуществляется редукция полученных минимаксных задач оптимального управления (14), (15), (16), к типичным вариационным задачам с интегральным функционалом качества вида

$$I_3^{(i)}(w_i,\kappa) = \frac{1}{\varphi^*}\int_0^{\varphi^*} \kappa d\varphi = \kappa \to \min_{w_i,\kappa}, \quad i=1,3; \quad \kappa = \mathrm{const} \tag{17}$$

при дополнительном фазовом ограничении

$$|\theta(x^*,\varphi) - \theta^*(\varphi)| - \kappa \le 0, \;\; \varphi\in(0,\varphi^*) \tag{18}$$

применительно к функционалу (14).

При поиске пространственно-распределенных управлений $w(x)$ функционал принимает вид

$$I_3^{(i)}(w,\kappa) = \int_0^1 \kappa dx = \kappa \to \min_{w_i,\kappa}, \quad x^*\in[0,1], \quad i=2,4; \; \kappa = \mathrm{const}, \tag{19}$$

который при решении задачи (15) дополняется фазовым ограничением в форме (18) или при решении задачи (16) – в форме

$$|\theta(x,\varphi^*) - \theta^*(x)| - \kappa \le 0, \quad x\in[0,1]. \tag{20}$$

Тем самым, оптимальное программное управление $w^0(\varphi)$ или $w^0(x)$ состоит из интервалов, где фазовые ограничения (18) или (20) выполняются со знаком строгого неравенства, и отдельных участков, на протяжении которых данные ограничения соблюдаются в виде равенств (участков движения по ограничению).

В обосновываемом далее предположении, что фазовое ограничение (18) или (20) нигде на интервале идентификации соответствующей переменной (времени или координаты) не нарушается, для решения рассматриваемых ОЗТ с критериями оптимальности (17), (19) применяется подход, основанный на непосредственном использовании необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления ОРП без учета фазовых ограничений, который позволяет установить в явной форме характер оптимальных алгоритмов изменения во времени сосредоточенных $u(\varphi)$ или распределенных $u(x)$ управлений.

Применение необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина позволяет получить параметрическое представление условных оптимальных управлений в виде кусочно-постоянных функций времени

$$\begin{aligned} &w_i^0(\varphi) = \beta_i(-1)^{j+1} w_{i\max}; \ \sum_{m=0}^{j-1} \tilde{\Delta}_m^{(i)} < \varphi < \sum_{m=0}^{j} \tilde{\Delta}_m^{(i)};\ j = \overline{1,N};\\ &\beta_i = \pm 1;\ \tilde{\Delta}_0^{(i)} = 0;\ \sum_{m=0}^{N} \tilde{\Delta}_m^{(i)} = \varphi^*,\ i = 1,3, \end{aligned} \tag{21}$$

или пространственной координаты

$$\begin{aligned} &w_i^0(x) = \beta_i(-1)^{j+1} w_{i\,\max};\ \sum_{m=0}^{j-1} \tilde{\Delta}_m^{(i)} < x < \sum_{m=0}^{j} \tilde{\Delta}_m^{(i)};\ j = \overline{1,N};\\ &\beta_i = \pm 1;\ \tilde{\Delta}_0^{(i)} = 0;\ \sum_{m=0}^{N} \tilde{\Delta}_m^{(i)} = 1,\ i = 2,4 \end{aligned} \tag{22}$$

для сосредоточенных или пространственно распределенных управляющих воздействий соответственно, где $\tilde{\Delta}_n^{(i)}$ обозначают длительности знакочередующихся интервалов постоянства w^0.

Тем самым, рассмотренный подход реализует предварительную параметризацию управляющих воздействий, которые однозначно характеризуются соответствующим зависящим от заданного числа N вектором параметров $\tilde{\Delta}^{(i)} \in \{\tilde{\Delta}_n^{(i)},\ n = \overline{1,N};\ i \in \overline{1,4}\}$.

Релейный характер условных управляющих воздействий w позволяет получить с учетом уравнений (12), (13) параметрическое представление идентифицируемых величин u в форме кусочно-параболических зависимостей от времени

$$u^0(\varphi) = \begin{cases} \gamma_1^{(i)} + \gamma_2^{(i)}\varphi + \frac{\beta_i \cdot w_{i\,\max}}{2}\varphi^2,\ \beta_i = \pm 1, \quad \varphi \in [0, \tilde{\Delta}_1^{(i)}],\ n \ge 1;\\ \gamma_1^{(i)} + \gamma_2^{(i)}\varphi + \frac{\beta_i \cdot w_{i\,\max}}{2}\varphi^2 + \beta_i \cdot w_{i\,\max}\sum\limits_{k=2}^{j}(-1)^{k+1}\Big(\varphi - \sum\limits_{s=1}^{k-1}\tilde{\Delta}_s^{(i)}\Big)^2,\\ \beta_i = \pm 1,\ \sum\limits_{s=1}^{j-1}\tilde{\Delta}_s^{(i)} \le \varphi \le \sum\limits_{s=1}^{j}\tilde{\Delta}_s^{(i)},\ j = \overline{2,n},\ n \ge 2 \end{cases} \tag{23}$$

при идентификации $v(\varphi), q(\varphi)$ $(i = 1,3)$ или, в случае поиска $\Psi(x), \theta_0(x)$, имеет аналогичную структуру функции пространственной координаты $(i = 2,4)$

$$u^0(x) = \begin{cases} \gamma_1^{(i)} + \gamma_2^{(i)}x + \frac{\beta_i \cdot w_{i\,\max}}{2}x^2,\ \beta_i = \pm 1, \quad x \in [0, \tilde{\Delta}_1^{(i)}],\ n \ge 1;\\ \gamma_1^{(i)} + \gamma_2^{(i)}x + \frac{\beta_i \cdot w_{i\,\max}}{2}x^2 + \beta_i \cdot w_{i\,\max}\sum\limits_{k=2}^{j}(-1)^{k+1}\Big(x - \sum\limits_{s=1}^{k-1}\tilde{\Delta}_s^{(i)}\Big)^2,\\ \beta_i = \pm 1,\ \sum\limits_{s=1}^{j-1}\tilde{\Delta}_s^{(i)} \le x \le \sum\limits_{s=1}^{j}\tilde{\Delta}_s^{(i)},\ j = \overline{2,n},\ n \ge 2. \end{cases} \tag{24}$$

В этом случае искомые управления $u(\varphi), u(x)$ однозначно характеризуются соответствующим вектором параметров

$$\begin{aligned} &\Delta^{(i)} = (\tilde{\Delta}^{(i)}, w_{i\max}, \gamma^{(i)}), \quad i \in \overline{1, N}; \qquad \gamma^{(1)} = (v(0), v'(0)); \\ &\gamma^{(2)} = (\Psi(0), \Psi'(0)); \quad \gamma^{(3)} = (q(0), q'(0)); \quad \gamma^{(4)} = (\vartheta(0), \vartheta'(0)), \end{aligned} \tag{25}$$

заданным на замкнутом ограниченном множестве $D_{N+2} \ni \Delta^{(i)}$ и содержащим кроме искомых величин $\tilde{\Delta}^{(i)}$ априори неизвестные значения учитываемых ограничений $w_{i\max}, i \in \overline{1, N}$ в (10), (11) и начальных значений u_0, ν_0 в (12) или (13).

Общее решение краевой задачи (1)–(3) или (1), (2) и (4), заданное в интегральной форме с ядрами K_0, K_1, K_2 интегральных операторов, однозначным образом связанными с функцией Грина G,

$$\begin{aligned} \theta(x, \varphi) = \int_0^1 K_0(x, \xi, \varphi)\theta_0(\xi)d\xi + \int_0^{\varphi}\int_0^1 G(x, \xi, \varphi - \tau)g_0(\xi, \tau)d\xi d\tau + \\ + \int_0^{\varphi} K_1(x, 0, \varphi - \tau)g_1(\tau)d\tau + \int_0^{\varphi} K_2(x, 1, \varphi - \tau)g_2(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{26}$$

описывает влияние начального распределения $\theta_0(x)$, сосредоточенных входных воздействий по граничным условиям $g_1(\varphi), g_2(\varphi)$ и пространственно-временного внутреннего входного воздействия $g_0(x, \varphi)$ при учете найденного параметрического представления идентифицируемых величин (23) или (24), позволяет получить выражение для температурного поля $\theta(x, \varphi)$, которое также однозначно характеризуется соответствующим вектором $\Delta^{(N)}$ на замкнутом ограниченном множестве параметров $D_{N+2} \ni \Delta^{(i)}$ и может быть представлено в форме суммы реакций $\Phi_i, \Lambda_i, \overline{\Lambda}_i$, зависящих от искомых составляющих $\gamma^{(i)}, w_{i\max}, \tilde{\Delta}^{(i)}$ вектора параметризуемых идентифицируемых воздействий

$$\theta(x, \varphi, \Delta^{(i)}) = \begin{cases} \Phi_i(x, \varphi, \gamma^{(i)}) + \Lambda_i(x, \varphi, w_{i\max}), \quad n = 1; \\ \Phi_i(x, \varphi, \gamma^{(i)}) + \Lambda_i(x, \varphi, w_{i\max}) + \overline{\Lambda}_i(x, \varphi, w_{i\max}, \tilde{\Delta}^{(i)}), \ n \geq 2. \end{cases} \tag{27}$$

Полученное параметрическое представление температурного поля (27) сводит задачу (14), (15) или (16) к соответствующим задачам математического программирования. Таким образом, формулируется специальная негладкая задача математического программирования (СЗМП) относительно искомого вектора параметров $\Delta = (\tilde{\Delta}, w_{\max}, u(0), u'(0))$ временной или пространственной переменной, принадлежащего замкнутому ограниченному множеству D_{N+2} и обеспечивающего для задачи (17) выполнение соотношения

$$I_0^{(i)}(\Delta^{(i)}) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^0]} \left| \theta(x^*, \varphi, \Delta^{(i)}) - \theta^*(\varphi) \right| \to \min_{\Delta^{(i)}}, \quad i = \overline{1, 4}, \tag{28}$$

а при решении задачи (16) — минимаксного критерия

$$I_0(\Delta^{(4)}) = \max_{x \in [0,1]} \left| \theta(x, \varphi^*, \Delta^{(4)}) - \theta^*(x) \right| \to \min_{\Delta^{(4)}}. \tag{29}$$

Тем самым, проведенные преобразования, по существу, сводят исходные ОЗТ к задачам построения кусочно-параболических сплайн-аппроксимаций вида (23) или (24), оптимальных по минимаксному критерию (28) или (29), для идентифицируемых характеристик $u = \{v(\varphi), \Psi(x), q(\varphi), \theta_0(x)\}$.

Сформулированные задачи (28) и (29) предусматривают оценивание отклонения расчетного состояния $\theta(x^*, \varphi)$ или $\theta(x, \varphi^*)$ от экспериментально заданного $\theta^*(\varphi)$ или $\theta^*(x)$ на соответствующем временном $[0, \varphi^*] \ni \varphi$ или пространственном $[0, 1] \ni x$ интервале идентификации в равномерной (чебышевской) метрике и образуют специальную задачу нелинейного программирования, предусматривающую оптимизацию целевой функции конечного числа N переменных Δ с бесконечным числом ограничений по соответствующей переменной.

Решение полученной задачи (28) или (29) может быть осуществлено на базе специального метода, учитывающего альтернансные свойства оптимальных решений, фиксирующих на интервале идентификации достижение знакочередующихся максимальных по абсолютной величине значений невязки температурного поля в отдельных точках, число которых на единицу превышает число искомых параметров. Указанное свойство позволяет составить замкнутую систему соотношений для предельных значений температурных невязок в точках альтернанса относительно всех неизвестных – вектора параметров Δ^0 и значения минимакса $I_0^{(i)}(\Delta^0)$.

При решении задачи (28) для $i = \overline{1, 4}$ расчетная система соотношений принимает вид

$$\theta(x^*, \varphi_j^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_j^0) = \pm(-1)^{j+1} I_0^{(i)}(\Delta^0), \quad j = \overline{1, N+3} \tag{30}$$

и дополняется условиями существования экстремума $(\theta(x^*, \varphi_{j_s}^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_{j_s}^0))'_\varphi$:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, \varphi_{j_s}^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_{j_s}^0) \right) = 0, \quad s = \overline{1, s_1}; \quad s_1 \leq N+3 \tag{31}$$

во внутренних точках $\varphi_{j_s}^0$ интервала идентификации $[0, \varphi^*]$, где $I_0^{(i)}$ относится к числу искомых величин.

При решении задачи (29) расчетные соотношения принимают вид замкнутой системы для предельных разностей температур в точках альтернанса x_j^0 на заданном интервале изменения $[0, 1] \ni x$ пространственной переменной x

$$\theta(x_j^0, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x_j^0) = \pm(-1)^{j+1} I_0^{(4)}(\Delta^0), \quad j = \overline{1, N+3} \tag{32}$$

с учетом условий существования экстремума

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\theta(x_{j_s}^0, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x_{j_s}^0) \right) = 0, \quad s = \overline{1, s_2}; \quad s_2 \leq N+3 \tag{33}$$

во внутренних точках $x_{j_s}^0$ интервала $[0, 1] \ni x$.

Согласно (30), (31), значения $|\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi)|$, $\varphi \in (0, \varphi^*)$ достигают своих предельно допустимых величин $I_0^{(i)}(\Delta^0)$ только в точках альтернанса φ_j^0 на интервале идентификации, подтверждая исходное предположение о выполнении фазового ограничения (18) на оптимальном управлении (21) в задаче (28).

Аналогичные выводы о выполнении фазового ограничения (20) на оптимальном управлении (22) в задаче (29) можно сделать на основании альтернансных соотношений (32), (33).

С помощью кусочно-параболической аппроксимации $u^0(\varphi)$ или $u^0(x)$ вида (23) или (23) возможно приблизить с любой требуемой точностью любую непрерывную и непрерывно-дифференцируемую функцию $u(\varphi)$ или $u(x)$ на соответствующем временном $[0, \varphi^*] \ni \varphi$ или пространственном $[0, 1] \ni x$ интервале идентификации фиксированной длительности путем выбора соответствующего значения N и вектора параметров Δ.

Следовательно, при $N \to \infty$ последовательность I_0^N, $N = 1, 2, \ldots$ минимальных значений функционала (28) или (29), достигаемых на решениях соответствующей задачи для заданного N, сходится к минимально возможной величине I_0^*. При этом задача (28) или (29) определения конечномерного вектора $\Delta^0(N) \in D_{N+2}$, обеспечивающего достижение I_0^N для каждого конкретного значения N вследствие принадлежности искомых воздействий компактному множеству непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций (имеющих ограниченную первую производную на интервале идентификации) остается корректно поставленной и при $N \to \infty$.

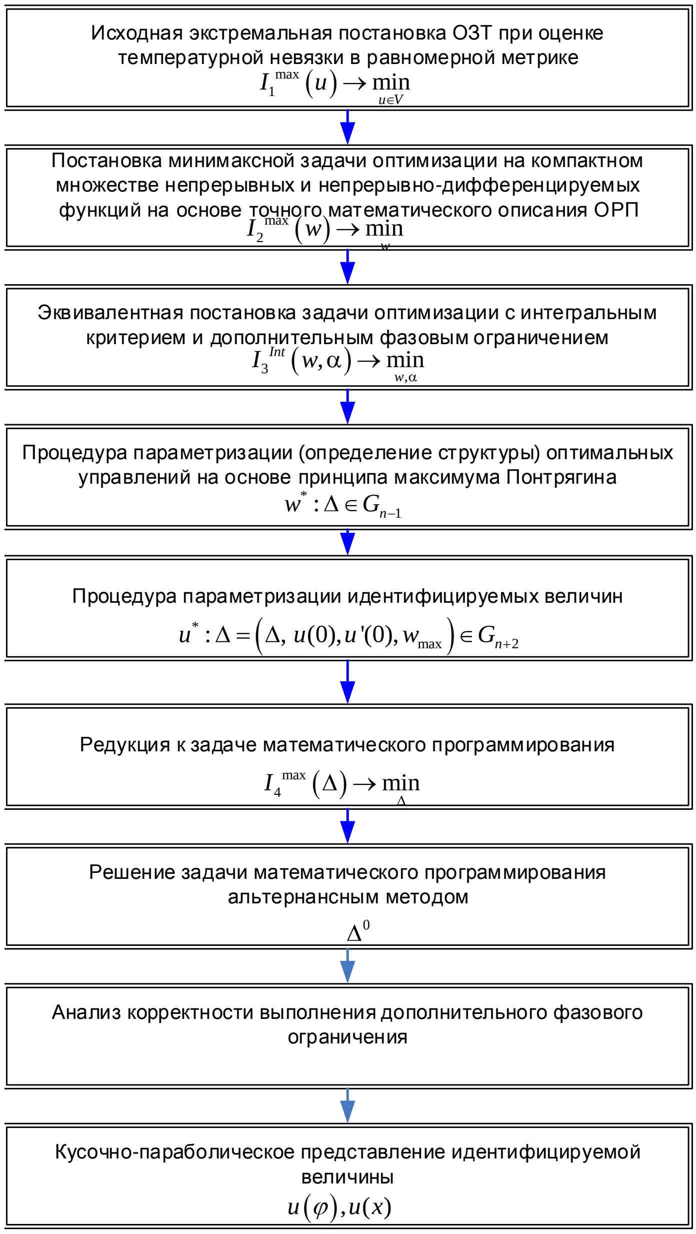


Рис. 1. Регулярная процедура минимаксной оптимизации в обратных задачах теплопроводности

Отсюда следует возможность решения исходных ОЗТ практически с любой требуемой точностью путем решения ряда задач параметрической оптимизации (28) или (29) для возрастающих значений $N = 1, 2, \ldots, N^0$ до величины N^0, согласованной со значением I_0^N при учете погрешности задания экспериментальных данных. В случае точного соответствия θ^* решению краевых задач (1)–(3) или (1), (2) и (4) в точке $x = x^*$ или в момент времени $\varphi = \varphi^*$ величина I_0^N при $N \to \infty$ становится равной нулю.

Алгоритм изложенного метода минимаксной оптимизации решения ОЗТ представлен на рис. 1.

В третьей главе рассмотрены вопросы практического применения представленного в главе 2 метода минимаксной оптимизации, разработаны методики расчета и вычислительные алгоритмы решения базовых обратных задач теплопроводности с управляющими воздействиями различного типа (рис. 2) и проведен анализ полученных результатов.

Для линейных одномерных внутренних, граничных и ретроспективных обратных задач теплопроводности по идентификации функции внутренних сосредоточенных или пространственно-распределенных воздействий, сосредоточенных граничных управлений и пространственно распределенного начального состояния разработана совокупность методов минимаксной оптимизации на компактных множествах кусочно-параболических функций; в рамках общих соотношений (14)–(16), (28) или (29) получены точные аналитические выражения параметрического представления искомых сосредоточенных или пространственно-распределенных воздействий и сооответствующих им температурных полей; выявлены специфические особенности предметной области при решении каждого типа задач, позволяющие установить конфигурацию температурной невязки. На этой основе с помощью альтернансного метода получены конкретные системы расчетных соотношений для каждого класса задач; проведен анализ зависимости точности решения ОЗТ от числа учитываемых параметров при параметрическом представлении оптимального управляющего воздействия (табл. 2, рис. 3), пространственной координаты точки регистрации экспериментальных данных и длительности интервала идентификации.

Разработан метод минимаксной оптимизации в коэффициентной задаче

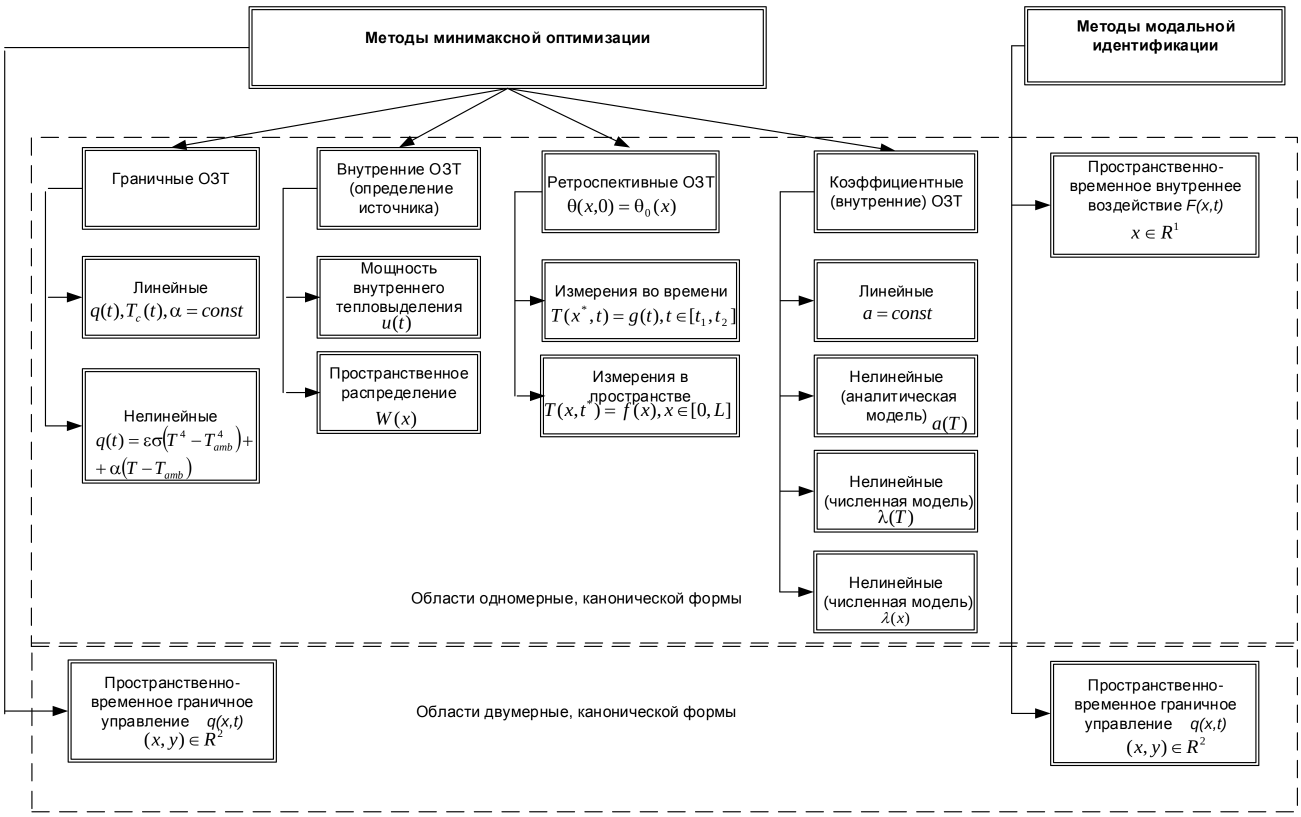


Рис. 2. Разработанные методы параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности

теплопроводности для определения зависящих от температуры теплофизических характеристик. Рассмотрены частные случаи решения коэффициентной обратной задачи в линейной и нелинейной постановках на базе аналитических моделей по определению постоянного среднего значения коэффициента температуропроводности или его параметров в рамках структуры, определяемой аналитическим решением. Применение метода минимаксной оптимизации в этих случаях также позволяет свести задачу к условно-корректной постановке и осуществить ее решение, основываясь на альтернансных свойствах искомых экстремалей.

В рамках предложенного подхода разработан метод минимаксной оптимизации для решения коэффициентных ОЗТ по восстановлению коэффициента теплопроводности $\lambda(T)$, на основе численной нелинейной модели

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right);\quad 0<x<L;\quad 0<t\leq t^*, \tag{34}$$

при заданных начальных условиях

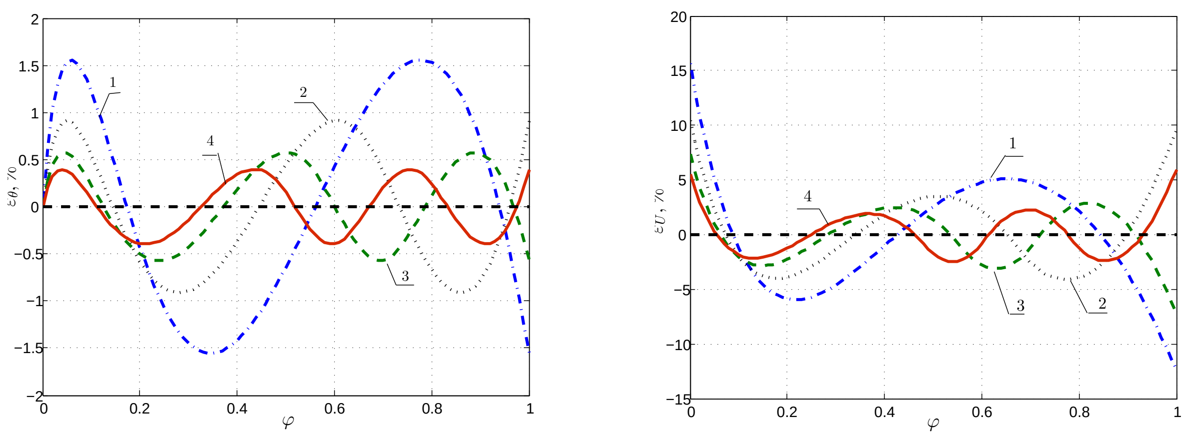
$$T(x,0)=T_0(x),\quad x\in[0,L] \tag{35}$$

и граничных условиях второго рода:

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=0;\quad \lambda(T)\frac{\partial T(L,t)}{\partial x}=q(t);\quad t\in[0,\,t^*]. \tag{36}$$

Таблица 2. Погрешность $\varepsilon^0_\theta=\frac{\max|\theta(x^*,\varphi,\Delta^{(N)})-\theta^*(\varphi)|}{\theta^*_{max}}\cdot 100\%$ приближения температуры и ошибка $\varepsilon^0_v=\frac{\max|v(\varphi)-v^*(\varphi)|}{v^*_{max}}\cdot 100\%$ аппроксимации мощности тепловыделения при $N=\overline{1,8}$, $\varphi^*=1$, $x^*=0.9$

N	1	2	3	4	5	6	7	8
ε^0_θ, %	1.55	0.91	0.57	0.40	0.28	0.21	0.16	0.13
ε^0_v, %	15.62	10.41	7.32	5.97	4.84	4.14	3.49	3.06



а б

Рис. 3. Погрешность $\varepsilon_\theta(\varphi)=\frac{\theta(x^*,\varphi,\Delta^{(N)})-\theta^*(\varphi)}{\theta^*_{\max}}\cdot 100\%$ приближения температурного распределения $\theta^*(\varphi)$ (а) и погрешность $\varepsilon_v(\varphi)=\frac{v(\varphi)-v^*(\varphi)}{v^*_{max}}\cdot 100\%$ аппроксимации искомого воздействия $v^*(\varphi)$; $\varphi^*=1$, $x^*=0.9$ (б) при *1* – при $N=1$; *2* – при $N=2$; *3* – при $N=3$; *4* – при $N=4$

Идентифицируемая характеристика $\lambda(T)$ рассматривается в качестве искомого управления, подчиненного условию

$$\lambda(T) \in V, \quad T \in [T_{\min}, T_{\max}]$$

принадлежности подходящему множеству V управляющих воздействий. Решение ОЗТ ищется на компактном множестве полиномиальных функций

$$\lambda(T) = \sum_{n=0}^{N} l_n T^n \in V. \tag{37}$$

Вариационная постановка ОЗТ при использовании в качестве меры оценивания ошибки равномерного приближения $T(x^*, t, \lambda)$ к $T^*(t)$ приводит к задаче оптимального управления

$$I_1(\lambda) = \max_{t\in[0,t^*]} |T(x^*, t) - T^*(t)| \to \min_{\lambda(T)\in V}, \tag{38}$$

где полиномиальные коэффициенты при выбранном числе N однозначно формируют подлежащий определению вектор параметров $\Delta = (l_0, l_1, \ldots, l_N)$ и вычисляемое на его основе температурное поле $T(x^*, t, \Delta)$. Подобно (28), формулируется задача математического программирования относительно вектора параметров Δ, которая является корректно поставленной при любом конечном N.

Решение составленной с помощью альтернансного метода замкнутой системы $N+2$ уравнений для предельных разностей температур $T(x^*, t_j^0, \Delta^0) - T^*(t_j^0)$ осуществляется путем ее редукции к задаче минимизации в пространстве искомых параметров Δ_j, $j = \overline{1, N}$ целевой функции специального вида, представляемой в форме суммы квадратов алгебраической суммы разностей $T(x^*, t_j^0, \Delta^0) - T^*(t_j^0)$ в точках $t = \bar{t}_i^0 \in \{t_j^0\}$, $i = \overline{1, N}_{\max}$ и $t = \tilde{t}_k^0 \in \{t_j^0\}$, $k = \overline{1, N}_{\min}$ их одинакового по модулю (при $\Delta = \Delta^0$) максимального и минимального значений соответственно. Глобальный минимум этой целевой функции, равный нулю, достигается при $\Delta = \Delta^0$.

Разработанный метод минимаксной оптимизации распространен на случай решения многомерных обратных задач теплопроводности на примере определения граничного теплового потока $q(y, \varphi)$, зависящего от времени и пространственной координаты, для двумерной модели уравнения теплопроводности при одностороннем нагреве плоского тела прямоугольной формы

$$\frac{\partial\theta(x, y, \varphi)}{\partial\varphi} = \frac{\partial^2\theta(x, y, \varphi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta(x, y, \varphi)}{\partial y^2}, \quad x, y \in (0, 1); \quad \varphi \in (0, \varphi^*), \tag{39}$$

$$\theta(x, y, 0) = 0, \quad x, y \in [0,\ 1], \tag{40}$$

$$\frac{\partial\theta(0, y, \varphi)}{\partial x} = \frac{\partial\theta(x, 0, \varphi)}{\partial y} = \frac{\partial\theta(x, 1, \varphi)}{\partial y} = 0, \quad \varphi \in [0,\ \varphi^*], \tag{41}$$

$$\frac{\partial\theta(1, y, \varphi)}{\partial x} = q(y, \varphi), \quad \varphi \in [0,\ \varphi^*] \tag{42}$$

в условиях наличия дополнительной информации о температуре $\theta^*(y, \varphi)$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ на некоторой линии $x = x^* = \text{const}$, $0 \le x^* \le 1$.

Предполагается, что пространственно-временная функция $q(y, \varphi)$ рассматривается в качестве управляющего воздействия $u(y, \varphi) = q(y, \varphi)$, заданного в виде произведения двух функций одной переменной

$$u(y, \varphi) = u^{(1)}(y) u^{(2)}(\varphi), \tag{43}$$

где функции $u^{(1)}(y)$ и $u^{(2)}(\varphi)$ выступают как пространственно-распределенное и сосредоточенное управляющие воздействия, подчиненные ограничениям

$$u^{(1)}(y) \in V_1, \quad 0 < y < 1; \;\; u^{(2)}(\varphi) \in V_2, \quad 0 < \varphi < \varphi^* \tag{44}$$

принадлежности заданным подходящим множествам V_1 и V_2 в функциональном пространстве. Формулируется ОЗТ в экстремальной постановке

$$I(u) = I(u^{(1)}, u^{(2)}) = \max_{\substack{\varphi\in[0,\varphi^*]\\ y\in[0,1]}} \left|\theta(x^*, y, \varphi, u^{(1)}, u^{(2)}) - \theta^*(y,\varphi)\right| \to \min_{\substack{u^{(1)}\in V_1\\ u^{(2)}\in V_2}} . \tag{45}$$

Аналогично одномерному случаю, рассматривается множество управлений

$$u^{(1)}(y) = \sum_{n=0}^{N} \Delta_n^{(y)} y^n, \;\; u^{(2)}(\varphi) = \sum_{m=0}^{M} \Delta_m^{(\varphi)} \varphi^m, \tag{46}$$

заданных соответствующими векторами параметров $\Delta^{(y)} = (\Delta_0^{(y)}, \Delta_1^{(y)}, ...\Delta_N^{(y)})$ и $\Delta^{(\varphi)} = (\Delta_0^{(\varphi)}, \Delta_1^{(\varphi)}, ...\Delta_M^{(\varphi)})$.

Формулируется задача параметрической оптимизации относительно вектора параметров Δ:

$$I^0(\Delta) = \max_{\substack{\varphi\in[0,\varphi^*]\\ y\in[0,1]}} |\theta(x^*, y, \varphi, \Delta) - \theta^*(y,\varphi)| \to \min_{\Delta}, \tag{47}$$

которая приводит к замкнутой системе соотношений

$$\left|\theta(x^*, y_k^0, \varphi_k^0, \Delta^0) - \theta^*(y,\varphi)\right| = I^0(\Delta^0), \; k = \overline{1,R}; \quad \Delta^0 = (\tilde{\Delta}_0^0, \tilde{\Delta}_1^{y0}, ...\tilde{\Delta}_N^{y0}, \tilde{\Delta}_1^{\varphi 0}, ...\tilde{\Delta}_M^{\varphi 0}), \tag{48}$$

с учетом условий существования экстремума по времени и по пространственной координате y.

Редукция равенств (48) к однозначно конструируемой системе уравнений, выполняемая с использованием известных закономерностей нестационарных температурных полей, и ее последующее решение для ряда увеличивающихся значений N и M приводит к восстановлению искомого воздействия $q^*(y,\varphi)$ в классе функций (43) (рис. 4) с уменьшением погрешности аппроксимации температурного поля при $N \to \infty$ и $M \to \infty$ (табл. 3).

Таблица 3. Точность решения задачи в зависимости от значений N и M

N	M	$I^0(\Delta), \%$	$\max\limits_{y,\varphi} \left\lvert u\left(y,\varphi,\Delta^0\right) - q^*(y,\varphi)\right\rvert, \%$
0	0	27,83	74,94
0	1	16,52	68,87
1	1	3,96	15,74
1	2	1,72	15,94
2	2	0,43	4,39
2	3	0,16	2,44
3	3	0,031	0,32

В четвертой главе предлагается специальный метод параметрической оптимизации по восстановлению не определяемых априори в форме (43) пространственно-временных воздействий на примере идентификации мощности внутренних источников тепла $F(x,\varphi)$ в одномерной ОЗТ и определения граничного управляющего воздействия $q(y,\varphi)$ в двумерной обратной задаче теплопроводности (39)–(42) (рис. 2).

Идея предлагаемого метода базируется на модальном описании температурного поля и идентифицируемых воздействий в форме разложения в ряды одинаковой кратности по собственным функциям начально-краевой задачи. Представление экспериментальных зависимостей температуры в N точках

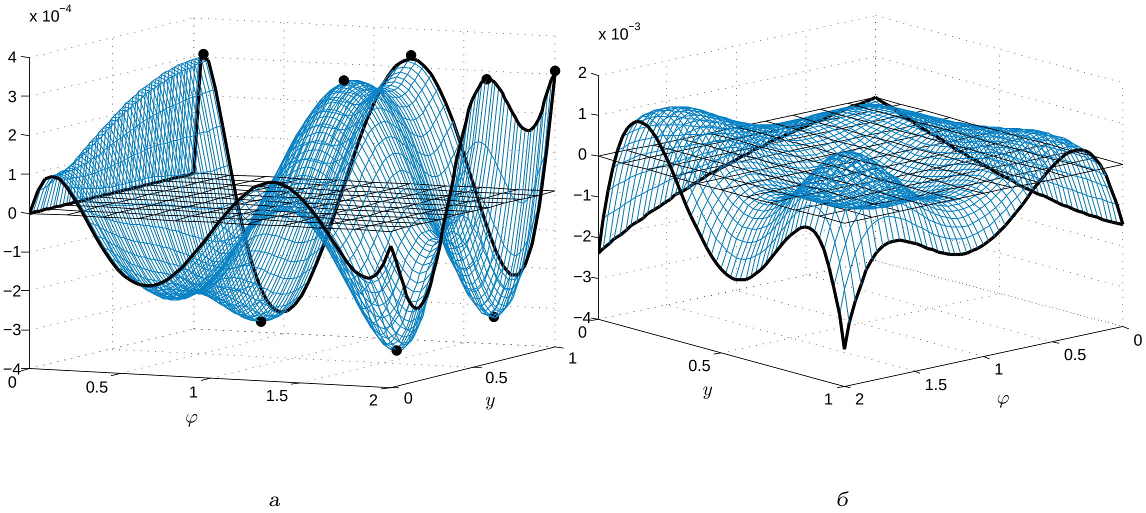


Рис. 4. Конфигурация погрешности аппроксимации температурного поля $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$, $y \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (а) и погрешность аппроксимации идентифицируемого воздействия $u\,(y, \varphi, \Delta^0) - q^*(y, \varphi)$, $y \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$: (б) при $N = 3, M = 3$

её наблюдения в виде приближенных аналитических решений прямой задачи теплопроводности, описываемых в форме суммы N первых членов такого ряда с априори неизвестными коэффициентами (временными модами), приводит к замкнутой системе алгебраических уравнений относительно этих коэффициентов. Полученные в результате решения этой системы N первых модальных переменных температурного поля обеспечивают переход к соответствующим временным модам искомых воздействий, непосредственная связь между которыми устанавливается известными дифференциальными уравнениями модального описания процессов нестационарной теплопроводности. Тем самым, идентифицируемые характеристики восстанавливаются по их модальным составляющим в форме, подобной приближенному описанию температурного поля в виде суммы N членов ряда разложения по собственным функциям.

Применительно к модели (1)–(4) при $\Gamma = 0$ решается задача идентификации внутреннего воздействия $F(x, \varphi)$ при использовании конечного числа N экспериментальных температурных зависимостей $\theta(x_i{}^*, \varphi)$, $i = \overline{1, N}$. Для поиска $F(x, \varphi)$ функция $\theta(x, \varphi)$ представляется в виде разложения в бесконечный сходящийся в среднем ряд

$$\theta(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\theta}_n(\mu_n, \varphi) \cos(\mu_n x) \tag{49}$$

по полной ортогональной системе собственных функций $\cos(\mu_n x)$ краевой задачи, где μ_n^2 — собственные числа. На основе N экспериментальных зависимостей $\theta(x_i{}^*, \varphi)$, $i = \overline{1, N}$ производится расчет значений N временных мод $\overline{\theta}_n(\mu_n, \varphi)$ температурного поля на заданном интервале идентификации. На примере приближенного модального описания параболического объекта (1)–(4) с однородными граничными и нулевыми начальными условиями в виде системы N независимых дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\overline{\theta}_n(\mu_n, \varphi)}{d\varphi} = -\mu_n^2 \overline{\theta}_n(\mu_n, \varphi) + \overline{f}_n(\mu_n, \varphi), \quad n = \overline{1, N}; \quad \overline{\theta}_n(\mu_n, 0) = \overline{\theta}_0(\mu_n) = 0 \tag{50}$$

относительно учитываемых мод $\overline{\theta}_n(\mu_n,\varphi)$ с автономными управлениями $\overline{f}_n(\mu_n,\varphi)$ по модам разложения

$$F(x,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_n(\mu_n,\varphi)\cos(\mu_n x) \qquad (51)$$

осуществляется переход к модальным составляющим управления $\overline{f}_n(\mu_n,\varphi)$.

Таким образом, система уравнений (50) предоставляет возможность построения N несвязанных друг с другом контуров восстановления отдельных мод распределенного управляющего воздействия

$$\overline{f}_n(\mu_n,\varphi)=\mu_n^2\overline{\theta}_n(\mu_n,\varphi)+\frac{d\overline{\theta}_n(\mu_n,\varphi)}{d\varphi},\ \ n=\overline{1,N}. \qquad (52)$$

Описанный подход позволяет построить систему идентификации пространственно распределенного воздействия в виде совокупности несвязанных контуров идентификации учитываемых мод управляемой величины по предварительно рассчитанным коэффициентам разложения экспериментальных температурных зависимостей в ряд по собственным функциям (рис. 5).

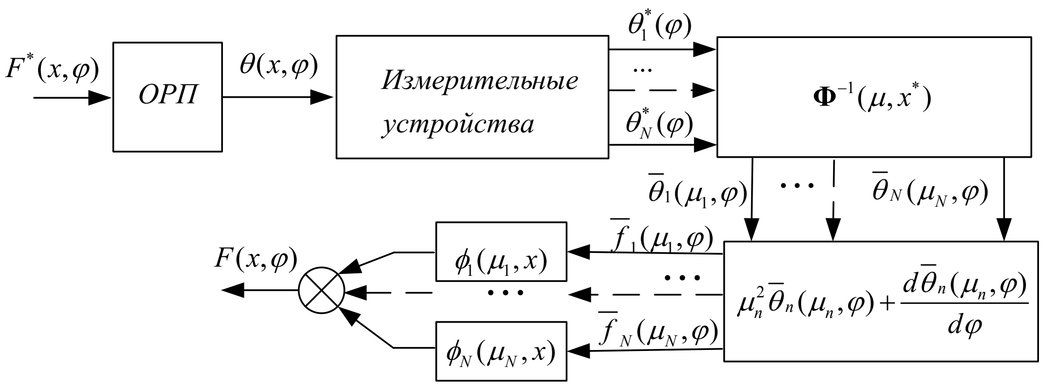


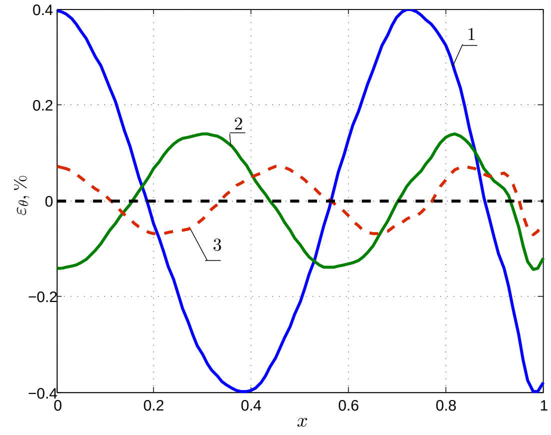
Рис. 5. Структура системы идентификации пространственно-временного управляющего воздействия параболического ОРП

Решена задача оптимального размещения наблюдающих устройств (определения координат $\Delta=(x_i^*), i=\overline{1,N}$) при их заданном числе N, сформулированная таким образом, чтобы оцениваемое в конце интервала идентификации ($\varphi=\varphi^*$) в равномерной метрике отклонение аппроксимирующей зависимости $\theta_N(x,\varphi^*,\Delta)$, полученной по результатам измерений $\theta_i^*(\varphi)=\theta(x_i^*,\varphi), i=\overline{1,N}$, от требуемого состояния $\theta^{**}(x,\varphi^*)$ по всей области изменения $x\in[0,1]$, было минимально возможным

$$I_2(\Delta)=\max_{x\in[0,1]}\left|\theta_N(x,\varphi^*,\Delta)-\theta^{**}(x,\varphi^*)\right|\to\min_{\Delta}. \qquad (53)$$

Здесь $\theta_N(x,\varphi^*,\Delta)$ определяется в форме суммы N членов ряда вида (49) с модальными переменными $\overline{\theta}_n(\mu_n,\varphi)$, а функция $\theta^{**}(x,\varphi^*)\in[\theta(x,\varphi^*),\theta(x,\varphi^*,\Delta)]$ либо представляет собой идеализированный вариант $\theta(x,\varphi^*)$ измерительной информации в предположении о возможности ее получения на всем отрезке $[0,1]\ni x$, либо модельное описание с требуемой точностью конечного температурного состояния $\theta(x,\varphi^*,\Delta)$ на этом отрезке.

Погрешность идентификации уменьшается с увеличением числа N, при этом неучтенные системой идентификации моды $\overline{f}_n(\mu_n,\varphi), n=\overline{N+1,\infty}$ управляющего воздействия дают некомпенсируемое отклонение полученного решения от истинного значения, определяя, тем самым, качество восстановления $F(x,\varphi)$ (табл. 4, рис. 6).



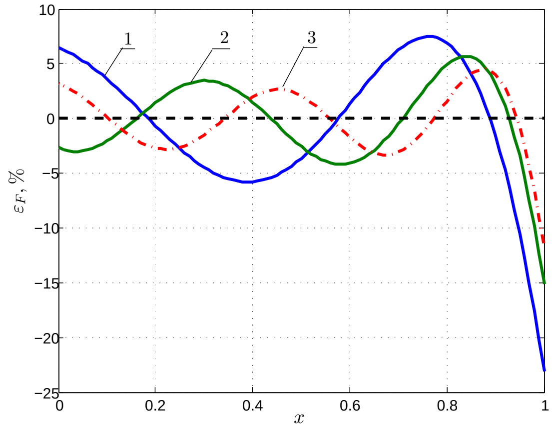


Рис. 6. Погрешность приближения температуры $\varepsilon_\theta(\varphi) = \frac{\theta_N(x,\varphi^*,\Delta^0)-\theta^{**}(x,\varphi^*)}{\theta^*_{\max}} \cdot 100\%$: (а) и погрешность аппроксимации искомой характеристики $\frac{F(x,\varphi^*)-F^*(x,\varphi^*)}{F^*_{\max}} \cdot 100\%$ при *1* – при $N = 3$; *2* – при $N = 4$; *3* – при $N = 5$; (б)

При решении ОЗТ в двумерной постановке по восстановлению граничного управления $q(x,\varphi)$ используется модальное описание модели (39) объекта, записанной в изображениях Лапласа

$$p\widetilde{\theta}(x,y,p) = \frac{\partial^2\widetilde{\theta}(x,y,p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\widetilde{\theta}(x,y,p)}{\partial y^2}, \quad x,y \in (0,1) \tag{54}$$

с соответствующими краевыми условиями.

Для получения одинаковой размерности рядов разложения $\theta(x,y,\varphi)$ и $q(x,\varphi)$ применяется конечное интегральное преобразование по пространственному аргументу y с собственными числами $\mathfrak{y}_n^2$ к уравнениям объекта (54) и краевым условиям (2)–(4), что приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2\widetilde{\widetilde{\theta}}_n}{dx^2} - A_n^2\widetilde{\widetilde{\theta}} = 0,\ A_n^2 = p + \mathfrak{y}_n^2;\ \frac{d\widetilde{\widetilde{\theta}}_n(0,p)}{dx} = 0,\ \frac{d\widetilde{\widetilde{\theta}}_n(1,p)}{dx} = \widetilde{\widetilde{q}}_n(p),\ n = 0,1,\ldots \tag{55}$$

по переменной x относительно модальных составляющих

$$\widetilde{\widetilde{\theta}}_n(x,p) = \int_0^1 \widetilde{\theta}(x,y,p)\cdot\cos\pi ny\,dy,\ n = 0,1,2... \tag{56}$$

разложения

$$\widetilde{\theta}(x,y,p) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2\widetilde{\widetilde{\theta}}_n(x,p)\cdot\cos\pi ny \tag{57}$$

в однократный ряд по ортогональной системе собственных функций $\cos\pi ny$.

Модальное описание $\widetilde{q}(y,p)$ принимает соответствующий вид

$$\widetilde{q}(y,p) = \sum_{n=0}^{N} C_n^2\widetilde{\widetilde{q}}_n(p)\cdot\cos\pi ny. \tag{58}$$

Таблица 4. Погрешность $\varepsilon_\theta^0 = \max\limits_{x,\varphi}|\theta_N(x,\varphi,\Delta^0) - \theta^{**}(x,\varphi^*)|$ приближения температуры и ошибка $\varepsilon_u^0 = \max\limits_{x,\varphi}|F(x,\varphi) - F^*(x,\varphi)|$ аппроксимации граничного управления при $N = \overline{3,8}$, $\varphi^* = 1.2$

N	3	4	5	6	7	8
$\overline{\varepsilon}_\theta, \%$	0.3997	0.1443	0.0710	0.0488	0.0312	0.0276
$\overline{\varepsilon}_u, \%$	21.70	15.1540	11.8328	9.1138	7.7700	5.2925

Решение задачи (55) на линии $x = x^*$ температурных измерений находится известными методами в виде

$$\widetilde{\overline{\theta}}_n(x^*, p) = H_n(x^*, p)\widetilde{\overline{q}}_n(p); \tag{59}$$

$$H_n(x, p) = \frac{\operatorname{ch}(A_n(p) \cdot x)}{A_n(p) \cdot \operatorname{sh}(A_n(p))}, \tag{60}$$

однозначным образом связывающим в операторной форме моды $\widetilde{\overline{q}}_n(p)$ и $\widetilde{\overline{\theta}}_n(x^*, p)$ разложений $\widetilde{q}(y, p)$ и $\widetilde{\theta}(x^*, y, p)$ в одномерные ряды (57), (58) по пространственной координате y при учете любого числа N составляющих в (57) и (58)

$$\widetilde{\overline{q}}_n(p) = H_n^{-1}(x^*, p)\widetilde{\overline{\theta}}_n(x^*, p), \ n = \overline{0, N}. \tag{61}$$

Таким образом, предлагаемый метод решения условно-корректной задачи идентификации граничного управления, рассматриваемого на компактном множестве непрерывных вместе со своими первыми производными модальных переменных $\overline{\theta}_n(x^*, \varphi)$, реализуется в пространстве изображений по Лапласу и состоит в восстановлении искомой величины $\widetilde{q}(y, p)$ в виде конечной взвешенной суммы (58) мод $\widetilde{\overline{q}}_n(p)$, вычисляемых согласно (60), (61), по значениям модальных составляющих $\widetilde{\overline{\theta}}_n(x^*, p)$ температурного поля $\widetilde{\theta}(x^*, y, p)$. Выражения $\widetilde{\overline{\theta}}_n(x^*, p)$ могут рассматриваться как преобразованные по Лапласу зависимости $\overline{\theta}_n(x^*, \varphi)$, значения которых должны быть найдены по экспериментальным

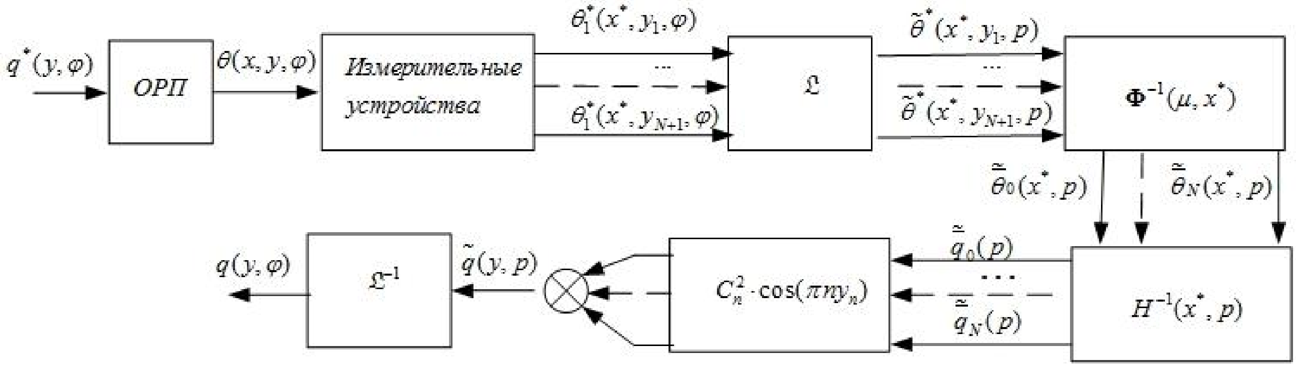


Рис. 7. Структура системы идентификации пространственно-временного управляющего воздействия в двумерной граничной ОЗТ; $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^{-1}$ – операции прямого и обратного преобразований Лапласа

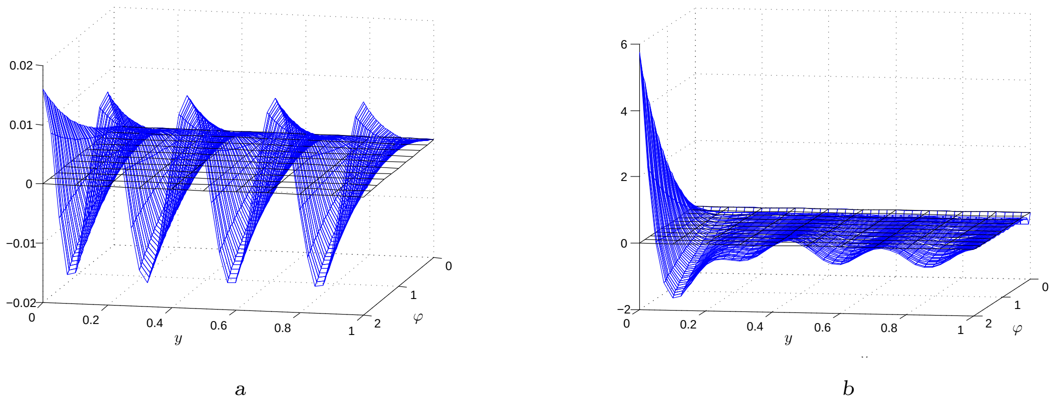


Рис. 8. Температурная невязка $\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^{**}(x^*, y, \varphi^*)$ и погрешность $q(y, \varphi) - q^*(y, \varphi)$ аппроксимации граничного управления (b) при $N = 7$ (*б*)

данным путем решения относительно $\overline{\theta}_n(x^*,\varphi)$ замкнутой системы уравнений, образуемой оригиналами равенств (57), рассматриваемых в точках контроля $x = x^*, y = y_i$, $i = \overline{1, N+1}$ для укороченной суммы ряда

$$\theta^*(x^*, y_i, \varphi) = \sum_{n=0}^{N} C_n^2 \overline{\theta}_n(x^*, \varphi) \cdot \cos \pi n y_i, \quad i = \overline{1, N+1}. \tag{62}$$

Система идентификации $q(y,\varphi)$, реализующая описанный метод, представлена на рис. 7, где переходы от оригиналов модальных составляющих к их изображениям и обратно реализуются методами теории автоматического управления.

Для этой задачи также может быть решена, аналогично (53), задача определения оптимальной совокупности значений $N+1$ координат y_i, $i = \overline{1, N+1}$ точек $\{(x^*, y_1), (x^*, y_2), \ldots (x^*, y_{N+1})\}$ контроля температуры, реализующей оценивание температурного отклонения в равномерной метрике

$$I_1(x^*, \Delta) = \max_{\substack{\varphi \in [0,\varphi^*] \\ y \in [0,1]}} \left| \theta_{N+1}(x^*, y, \varphi, \Delta) - \theta^{**}(x^*, y, \varphi) \right| \to \min_{(x^*,\Delta)} . \tag{63}$$

Результаты идентификации $q(x,\varphi)$ представлены на рис. 8 и в табл. 5.

Таблица 5. Погрешность $\varepsilon_\theta = \max\limits_y |\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi^*) - \theta^{**}(x^*, y, \varphi^*)|$ приближения температуры и ошибка $\varepsilon_u = \max\limits_y |q(y, \varphi^*) - q^*(y, \varphi^*)|$ аппроксимации граничного управления при $N = \overline{2, 9}$, $\varphi^* = 2$, $x^* = 0.96$

N	2	3	4	5	7	9
$\varepsilon_\theta, \%$	0.4074	0.1649	0.0801	0.0437	0.0161	0.0070
$\varepsilon_u, \%$	11.6157	8.1751	7.0439	6.3704	5.8392	5.6640

В пятой главе рассмотрены вопросы решения ОЗТ в условиях действия случайных возмущений.

Одним из подходов является предварительное сглаживание входной информации. Такой подход в работе реализуется с помощью метода сглаживающих кубических сплайнов.

В качестве характерного примера рассматривается граничная ОЗТ по восстановлению плотности теплового потока $q(\varphi)$ на основе экспериментальных данных $\theta^*_\delta(\varphi)$, полученных в точке $x^* \in [0,1]$ в условиях влияния возмущающих факторов $\delta(\varphi)$:

$$\theta^*_\delta(\varphi) = \theta^*(\varphi) + \delta(\varphi). \tag{64}$$

Для решения ОЗТ на основе представленного в главе 3 метода минимаксной оптимизации производится предварительное сглаживание входной информации $\theta^*_\delta(\varphi)$ путем построения сглаживающего сплайна $S(\varphi)$, и тогда в соответствующей задаче оптимального управления требуется восстановить величину тепловых потерь $q^0(\varphi)$, минимизирующую невязку между $S(\varphi)$ и точным решением $\theta(x^*,\varphi)$ соответствующей краевой задачи, соответствующим $q^0(\varphi)$.

На основе метода параметрической оптимизации решение ОЗТ сводится к решению задачи математического программирования

$$I_0(\Delta) = \max_{\varphi \in [0,\varphi^*]} |\theta(x^*, \varphi, \Delta) - S(\varphi)| \to \min_{\Delta \in G_{N+2}} , \tag{65}$$

минимизирующей максимальное отклонение между расчетными значениями $\theta(x^*, \varphi, \Delta)$, найденными при задании $q(\varphi)$ в виде кусочно-параболической функции (23) и соответствующими значениями сплайна $S(\varphi)$.

С использованием предварительного сглаживания возмущенных исходных данных θ^*_δ на основе минимаксной оптимизации была решена граничная задача по восстановлению плотности теплового потока $q(\varphi)$ в классе непрерывных и непрерывно-дифференцируемых на интервале $[0, \varphi^*]$ функций при параметрическом представлении искомой характеристики в виде кусочно-параболической зависимости с числом $N = 3$ интервалов постоянства $q''(\varphi)$ (табл. 6).

В работе предложен эффективный подход к решению ОЗТ в условиях возмущенных исходных данных $\theta^*_\delta(\varphi) = \theta^*_\delta(\varphi, \delta)$, объем априорных сведений о которых ограничивается сведениями о границах интервала их возможного изменения.

Для всех допустимых значений δ на интервале идентификации $\varphi \in [0, \varphi^*]$ формулируется задача оптимального управления, обеспечивающего выполнение минимаксного соотношения

$$I_2 = \max_\delta \left| \max_{\varphi\in[0,\varphi^*]} |\theta^*_\delta(\varphi, \delta) - \theta(x^*, \varphi, u)| \right| \to \min_{u\in V}; \quad \delta \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}] \,. \qquad (66)$$

Решение задачи (66) также может быть основано на предложенном в главе 3 подходе и сведено к задаче математического программирования относительно вектора Δ, сформулированной по отношению к совокупности всех реализаций неопределенных данных

$$I^0(\Delta) = \max_\delta \left| \max_{\varphi\in[0,\varphi^*]} |\theta^*_\delta(\varphi, \delta) - \theta(x^*, \varphi, \Delta)| \right| \to \min_\Delta; \delta(\varphi) \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}] \,. \qquad (67)$$

Оптимальное управление $u^0(\varphi)$, являющееся решением минимаксной задачи (67), обеспечивает минимально возможную погрешность $I^0(\Delta^0)$ аппроксимации $\theta^*_\delta(\varphi, \delta)$ в «наихудшем» случае по величине $\delta(\varphi)$. При этом получаемая точность $I^0(\Delta^0)$ решения ОЗТ будет совпадать с минимально возможной погрешностью для наиболее неблагоприятной реализации, характеризующейся максимальным отклонением от $\theta^*(\varphi)$ или максимальным по абсолютной величине уровнем возмущения $\delta_0 = \max(|\delta_{\max}|, |\delta_{\min}|)$ (табл. 7). В то же время, эта погрешность $I^0(\Delta^0)$ заведомо превышает минимально возможное значение для остальных допустимых реализаций $\theta^*_\delta(\varphi, \delta)$ и значений $\delta(\varphi)$. Такая потеря по величине критерия оптимальности (67) по сравнению с ситуацией, когда экспериментальная зависимость или уровень помехи известны точно, является неизбежной компенсацией за гарантированное качество процесса идентификации в условиях интервальной неопределенности. Тем самым, оптимальное управление $u^0(\varphi)$ реализует стратегию наилучшего гарантированного результата.

В шестой главе приведены примеры технических приложений, реализованные на основе разработанных методов параметрической оптимизации, поз-

Таблица 6. Точность решения задачи ($N = 3$) на основе предварительного сглаживания случайных возмущений $\delta(\varphi)$

$\delta_0, \%$	0%	0.2%	0.5%	1%	2%	3%
b	1	0.99998	0.99996	0.99991	0.99985	0.99967
$\max\limits_\varphi \lvert S(\varphi) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)\rvert, \%$	0.2950	0.3072	0.2967	0.2784	0.0.2720	0.2686
$\max\limits_\varphi \lvert q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)\rvert, \%$	3.7217	3.6459	4.0376	4.7720	5.9602	7.1875

Таблица 7. Точность решения задачи ($N = 3$) при нормальном законе распределения помехи $\delta(\varphi)$ и уровне погрешности $\delta_0 \in [0, 3]$ %

$\delta_0, \%$	0%	0.2%	0.5%	1%	2%	3%
$\max\limits_{\mathbf{v}} \lvert\theta^*_\delta(\mathbf{v}) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)\rvert, \%$	0.2950	0.5897	1.0501	1.8268	3.5260	5.3241
$\max\limits_{\mathbf{v}} \lvert q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)\rvert, \%$	3.7217	3.2785	3.0325	3.2332	4.2631	4.4483

воляющие решать актуальные задачи идентификации и диагностики, возникающие при реализации процессов технологической теплофизики.

1. Решена задача восстановления величины тепловых потерь $q(t)$ на поверхности $x = L$ нагреваемого тела цилиндрической формы ($\Gamma = 1$) в процессе индукционного нагрева металла. В общем случае процессам индукционного нагрева свойственен сложный характер граничного теплообмена, при котором суммарный граничный тепловой поток описывается нелинейной закономерностью и содержит конвективную и радиационную составляющие

$$q(t) = \epsilon\sigma(T^4(L, t) - T_c^4(t)) + \alpha\big(T(L, t) - T_c(t)\big), \tag{68}$$

зависящие от электромагнитных ϵ, σ параметров, коэффициента конвективного теплообмена α и температуры окружающей среды $T_c(t)$.

Численное решение задачи при использовании в качестве экспериментальных данных результата моделирования прямой нелинейной задачи теплопроводности на основе метода конечных элементов подтверждает возможность применения разработанного метода к решению ОЗТ с нелинейными ГУ.

2. Решена задача определения постоянного значения удельной мощности внутреннего тепловыделения, соответствующего постоянному значению напряжения на индукторе в процессе индукционного нагрева изделий из парамагнитных материалов, реализующегося в условиях постоянства частоты питающего тока, задающего неизменный характер распределения источников тепла по объему заготовки. Рассматривается задача поиска по экспериментальным температурным данным $T^*(t)$ суммарной удельной мощности тепловых источников P_a при известном законе $\Psi(x)$ их пространственного распределения при ограничении множества исходных управляющих воздействий $P(t)$ до класса постоянных функций $P_a(t) = P_a = \text{const}$, и задача параметрической оптимизации формулируется относительно единственного параметра $P_a^0 \le P_{\max}$, $t \in [0, t^*]$ искомого управления.

3. Приводится решение обратной задачи теплопроводности, обеспечивающее определение коэффициента теплоотдачи α в процессе конвективного теплообмена между внутренней поверхностью барабана котла и рабочей средой (жидкостью), находящейся в барабане, а также восстановление температуры на недоступной для измерения внутренней стенке барабана по экспериментальным данным о температуре на его внешней поверхности $T^*(t)$ и температуре жидкости в барабане $T_c(t)$, полученным при останове парового котла.

Формулируется экстремальная постановка граничной ОЗТ, в которой по известной температуре внешней поверхности барабана $T^*(t)$ требуется определить значение α^0, минимизирующее невязку между $T^*(t)$ и точным решением $T(L, t)$ краевой задачи соответствующим искомому α^0. Решение задачи осуществляется в классе постоянных на интервале идентификации функций.

Результаты, полученные путем решения граничной ОЗТ на основе параметрической оптимизации, хорошо согласуются с аналогичными данными и известными соотношениями и показывают удовлетворительное качество восстановления среднего значения коэффициента теплоотдачи.

4. Решена коэффициентная обратная задача определения переменного по пространственной координате коэффициента теплопроводности, при использовании одномерной модели несвязанной термоупругости, позволяющей последовательно решать задачи для механических и температурных полей.

Представление $\lambda(x)$ в виде

$$\lambda(x) = \sum_{n=0}^{N} \Delta_n x^n \tag{69}$$

соответствует заданию идентифицируемой характеристики в параметризованной форме, где полиномиальные коэффициенты при заданном числе N образуют искомый вектор параметров $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_N)$. Температурное поле $T(x,t) = T(x,t,\lambda) = T(x,t,\Delta)$ при заданных значениях N и Δ также является функцией указанного вектора параметров. Полученное параметрическое представление идентифицируемой характеристики $\lambda(x,\Delta)$ и соответствующего ему температурного состояния $T(x,t,\Delta)$ позволяет перейти от исходной некорректной постановки ОЗТ к задаче параметрической оптимизации, сформулированной относительно вектора параметров $\Delta \in D_{N+1}$, оптимальная величина которого определяется по схеме предлагаемого метода минимаксной оптимизации.

В Заключении диссертации приведены основные результаты и выводы.

В диссертации достигнута поставленная цель разработки новых конструктивных алгоритмически точных методов решения обратных задач технологической теплофизики без применения численных регуляризирующих алгоритмов.

В работе получены новые научно-обоснованные технические решения в виде:

– новых эффективных алгоритмически точных методов последовательной параметрической оптимизации, осуществляющих поиск физически реализуемых решений обратных задач теплопроводности на компактных множествах специальной формы;
– построения на базе разработанных методов вычислительных алгоритмов для решения широкого круга прикладных задач идентификации процессов нестационарной теплопроводности, сформулированных для линейных и нелинейных аналитических и численных моделей, рассматриваемых на одномерных и двумерных пространственных областях по идентификации сосредоточенных, пространственно- распределенных и пространственно-временных внешних и внутренних воздействий, а также теплофизических характеристик.

Выполненные в диссертационной работе научные исследования представлены следующими новыми результатами:

1. Разработана новая концепция решения обратных задач теплопроводности, распространенная на широкий класс базовых обратных задач технологической теплофизики, которая позволяет осуществить аналитическую идентификацию процессов нестационарной теплопроводности. Концепция основана на использовании методов теории оптимального управления системами с распределенными параметрами.

2. Разработаны методы минимаксной параметрической оптимизации, основанные на сужении множества возможных решений исходя из требований их физической реализуемости до компактного множества кусочно-параболических или полиномиальных функций.

   В рамках выбранной структуры искомых решений их приведение к параметрической форме обеспечивается применением математического аппарата теории оптимального управления СРП, на основании чего исходная обратная задача теплопроводности сводится к задаче параметрической оптимизации при использовании равномерной метрики оценивания температурной невязки.
3. Разработан метод модальной идентификации пространственно-временных внутренних и граничных воздействий, реализующий поиск решений на компактном множестве непрерывных вместе со своими первыми производными временных мод, основанный на модальном представлении температурного поля и искомых воздействий в виде разложения в ряды по собственным функциям исследуемой краевой задачи.
4. Проведен системный анализ характеристик решения ОЗТ в зависимости от числа учитываемых параметров параметрического представления искомых воздействий, а также от основных факторов задачи идентификации процесса нестационарной теплопроводности. Подтверждены системные выводы о регулярном характере параметрической оптимизации, обеспечивающей сходимость к точному решению с ростом числа учитываемых параметров и о качественных базовых характеристиках решения ОЗТ.
5. Разработаны методы параметрической оптимизации для решения обратных задач теплопроводности в условиях действия возмущений.
6. Разработан комплекс алгоритмов, инженерных методик расчёта, реализующих предлагаемые методы параметрической оптимизации применительно к широкому спектру актуальных обратных задач теплопроводности.
7. Разработанные методы использованы применительно к актуальным задачам идентификации искомых характеристик процессов технологической теплофизики.

Основные публикации по теме диссертации

Список публикаций в рецензируемых журналах, индексируемых в системах Web of Science и Scopus:

1. *Diligenskaya A. N.* Solution of the retrospective inverse heat conduction problem with parametric optimization // High Temperature. — 2018. — Т. 56, № 3. — С. 382—388.
2. *Рапопорт Э. Я.*, *Дилигенская А. Н.* Модальная идентификация граничного воздействия в двумерной обратной задаче теплопроводности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2018. — Т. 22, № 2. — С. 380—394.
3. *Diligenskaya A. N.*, *Rapoport E. Y.* Method of minimax optimization in the coefficient inverse heat-conduction problem // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2016. — Т. 89, № 4. — С. 1008—1013.

4. *Diligenskaya A.* Estimation of the heat flux density during the induction heating process based on the parametric optimization // Int. J. of Microstructure and Materials Properties. — 2016. — Т. 11, № 1/2. — С. 5—17.
5. *Diligenskaya A. N.*, *Rapoport E. Y.* Analytical methods of parametric optimization in inverse heat-conduction problems with internal heat release // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2014. — Т. 87, № 5. — С. 1126—1134.

Список публикаций в рецензируемых журналах из перечня ВАК:

6. *Дилигенская А. Н.* Решение граничных обратных задач теплопроводности на основе методов оптимизации // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. — 2016. — 3 (191). — С. 46—50.
7. *Дилигенская А. Н.* Метод параметрической оптимизации в граничной обратной задаче теплопроводности с фильтрацией возмущений // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2015. — 3 (47). — С. 17—24.
8. *Дилигенская А. Н.* Альтернансный метод оптимизации в коэффициентной обратной задаче теплопроводности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2014. — 4 (44). — С. 144—148.
9. *Дилигенская А. Н.* Решение линейной коэффициентной обратной задачи теплопроводности на основе альтернансного метода оптимизации // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2013. — 3 (39). — С. 198—202.
10. *Дилигенская А. Н.*, *Рапопорт Э. Я.* Оптимальный выбор пространственных координат точек контроля при неполном измерении состояния объекта с распределенными параметрами в процессе идентификации управляющих воздействий // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2013. — 2 (38). — С. 12—17.
11. *Дилигенская А. Н.* Аналитическая идентификация пространственно-временного управления в обратных задачах теплопроводности на основе модального представления // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2012. — № 4. — С. 31—38.
12. *Дилигенская А. Н.*, *Рапопорт Э. Я.* Идентификация пространственного распределения внутренних источников тепла в обратных задачах теплопроводности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2011. — 4 (32). — С. 157—164.
13. *Дилигенская А. Н.* Аппроксимация сплайнами второго и третьего порядка функции внутреннего тепловыделения при решении обратных задач теплопроводности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2011. — 3 (31). — С. 193—200.
14. *Дилигенская А. Н.* Решение граничных обратных задач теплопроводности на основе параметрической оптимизации // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2011. — 2 (30). — С. 179—185.
15. *Дилигенская А. Н.* Математическое моделирование и анализ процессов управления производственными системами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2010. — 3 (28). — С. 14—18.
16. *Дилигенская А. Н.*, *Щетинин В. Г.* Синтез структуры системы обогрева помещений в условиях неполноты измерений // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2009. — 3 (25). — С. 206—214.

17. *Дилигенская А. Н.*, *Щетинин В. Г.* Устойчивость, управляемость и наблюдаемость систем обогрева помещений в условиях неполноты измерений // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2009. — 2 (24). — С. 12—16.

18. Простые бинарные модели для оперативной оценки качества нефти / В. Г. Кузнецов [и др.] // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2005. — № 33. — С. 47—50.

19. *Дилигенская А. Н.* Оптимальное по расходу энергии управление процессом индукционного нагрева в условиях неопределенности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 1998. — № 5. — С. 184—186.

Список публикаций в других журналах, сборниках научных трудов, материалах международных и всероссийских научных конференций:

20. *Diligenskaya A. N.* Method of Parametric Optimization in Problems of Identification of Boundary Conditions of Convective Heat Transfer in Processes of Non-Stationary Heat Conduction // 2018 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon). — IEEE Xplore : Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2018. — С. 1—4.

21. *Дилигенская А. Н.* Параметрическая оптимизация в обратных задачах теплопроводности в условиях интервальной неопределенности возмущений // Труды XX Междун. Конф. «Проблемы управления и моделирования в сложных системах». — Самара : ООО «Офорт», 2018. — С. 112—118.

22. *Дилигенская А. Н.* Идентификация теплофизических характеристик в задачах несвязанной термоупругости на основе параметрической оптимизации // В сборнике: Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. — Самара, 2017. — С. 210—213.

23. *Дилигенская А. Н.* Специальные методы параметрической оптимизации в обратных задачах нестационарной теплопроводности // В сб.: Математические методы в технике и технологиях – ММТТ: сб. трудов XXIX Междунар. науч. конф. — Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т им. Гагарина Ю.А., 2016. — С. 308—314.

24. *Рапопорт Э. Я.*, *Плешивцева Ю. Э.*, *Дилигенская А. Н.* Конструктивные методы оптимизации управляемых систем с распределенными параметрами // XVIII междун. конф. «Проблемы управления и моделирования в сложных системах»: сб. тр. конф. — Самара : ИПУСС РАН, СамГТУ, 2016. — С. 317—324.

25. *Ваулина М. С.*, *Дилигенская А. Н.* Определение граничных условий теплообмена на поверхности барабана котла // В сб.: Математические методы в технике и технологиях – ММТТ: сб. трудов XXIX Междунар. науч. конф. — Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т им. Гагарина Ю.А., 2016. — С. 207—210.

26. *Дилигенская А. Н.*, *Мандра А. Г.* Определение мощности тепловыделения в процессе индукционного нагрева на основе решения линейной обратной задачи теплопроводности // Электротехника. Электротехнология. Энергетика. Сборник научных трудов VII Международной научной конференции молодых ученых. — 2015. — С. 47—50.

27. *Diligenskaya A., Mandra A.* Determination of Internal Heat Power during the Induction Heating Based on Solution of Linear Inverse Heat Conduction Problem // Applied Mechanics and Materials. — 2015. — Т. 792. — С. 635—639.

28. *Diligenskaya A., Mandra A.* Determination of Space and Time Dependent Function of Internal Heat Source in Heat Conductivity Equation // Applied Mechanics and Materials. — 2015. — Т. 698. — С. 668—673.

29. *Дилигенская А. Н.* Современные методы оптимизации в обратных задачах теплопроводности // XVI Междун. Конф. «Проблемы управления и моделирования в сложных системах»: Сб. Науч. Тр. — Самара : ИПУСС, СНЦ РАН, 2014. — С. 61—67.

30. *Дилигенская А. Н., Мандра А. Г.* Восстановление пространственно-временной функции внутреннего тепловыделения в обратной задаче теплопроводности // Научные труды I международной научной конференции молодых ученых «Электротехника. Энергетика. Машиностроение (ЭЭМ – 2014)». — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. — С. 79—82.

31. *Ермолова Л. П., Дилигенская А. Н.* Асимптотическое управление процессом нагрева термически тонких тел в условиях действующих возмущений // Междун. науч.-практич. конф. «Техника и технологии: Пути инновационного развития»: сб. науч. тр. — Курск:РИО Юго-Западн. гос. ун-та, 2011. — С. 68—70.

32. *Дилигенская А. Н.* Синтез и анализ энергоэффективных систем управления на основе наблюдателей состояния // XII Междун. Конф. «Проблемы управления и моделирования в сложных системах»: Сб. Науч. Тр. — Самара, 2010. — С. 165—170.

33. *Дилигенская А. Н., Щетинин В. Г.* Энергоэффективный подход к регулированию теплообеспечением сооружений // Междун. науч.-технич. конф. «Информационные, измерительные и управляющие системы (ИИУС-2010)»: сб. науч. тр. — Самара : РИО Самарск. гос. техн. ун-та, 2010. — С. 10—13.

34. *Дилигенская А. Н., Щетинин В. Г.* Управление технологическими процессами в условиях неполной информации // Междун. науч. конф. «Проблемы управления, передачи и обработки информации (АТМ-ТКИ-50)»: сб. науч. тр. — Саратов : Сарат. гос. техн. ун-т, 2009. — С. 62, 63.

35. *Дилигенская А. Н.* Энергосберегающие режимы управления нагревом // XI межвуз. конф. «Математическое моделирование и краевые задачи». — Самара : Часть 2: сб. науч. тр./ Инж. акад. РФ, Самарск. гос. техн. ун-т., 2001. — С. 42, 43.

36. *Дилигенская А. Н.* Энергосберегающее управление нелинейными объектами индукционного нагрева // Междун. науч.-техн. конф. «Качество, безопасность и энергосбережение»: сб. науч. тр. — Самара : РИО Самарск. гос. тех. ун-та, 1998. — С. 21—23.

37. *Дилигенская А. Н.* Оптимальное по энергопотреблению управление в «транспортной» задаче индукционного нагрева металла // «Математическое моделирование и краевые задачи»: Труды седьмой межвуз. конф. — Самара : Инж. акад. РФ, Самарск. гос. тех. ун-т., РИО Самарск. гос. тех. ун-та, 1997. — С. 36—42.

38. *Дилигенская А. Н.* Решение оптимальной по энергопотреблению задачи индукционного нагрева при учете технологических ограничений // Межвуз. науч.-практич. семинар-выставка «Автоматизация технологических процессов и производств. Точность, качество и надежность конструкций и технических систем»: сб. науч. тр. — Самара : РИО Самарск. гос. тех. ун-та, 1997. — С. 42—44.

39. *Дилигенская А. Н.*, *Мажурина Н. А.* Алгоритмы оптимального по энергопотреблению управления процессом индукционного нагрева // «Приборы, системы, информатика»: Межвуз. сб. науч. тр. — Самара : РИО Самарск. гос. тех. ун-та, 1997. — С. 30—35.

40. *Рапопорт Э. Я.*, *Дилигенская А. Н.* Оптимальное по энергосбережению управление процессами технологического нагрева // Междун. науч.-технич. конф. «Актуальные вопросы энергосбережения и сертификации»: сб. науч. тр. — Самара : РИО Самарск. гос. техн. ун-та, 1997. — С. 50, 51.

41. *Дилигенская А. Н.* Оптимизация процесса индукционного нагрева металла по энергопотреблению // «Математическое моделирование и краевые задачи»: Труды шестой межвуз. конф. — Самара : Инж. акад. РФ, Самарск. гос. техн. ун-т. – РИО Самарск. гос. техн. ун-та, 1996. — С. 141.

Государственная регистрация программ для ЭВМ:

42. *Дилигенская А. Н.* Определение пространственно-временной функции мощности внутреннего тепловыделения в обратной задаче теплопроводности на основе модального описания // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018663199 от 23.10.2018 г. — 2018.

Учебные пособия:

43. *Дилигенская А. Н.* Идентификация объектов управления: учеб. пособие. — Самара : СамГТУ, 2017, 140 с.

44. *Дилигенская А. Н.* Управление в пространстве состояний линейными динамическими системами: учеб. пособие. — Самара : СамГТУ, 2013, 105 с.

Формат 60 × 84 1/16. Уч. изд. л. 2,0. Тираж 120 экз. Заказ № 112.

Отпечатано в типографии Самарского государственного технического университета 443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, корпус 8 , e-mail: polygraf@samgtu.ru.

Автореферат отпечатан с разрешения диссертационного совета Д 212.217.03 ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (протокол № 2 от « 5 » февраля 2019 г.)