

На правах рукописи



Еремин Антон Владимирович

**МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА,
УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С
УЧЕТОМ ПРОСТРАНСТВЕННО – ВРЕМЕННОЙ НЕЛОКАЛЬНОСТИ**

Специальность: 05.13.18 Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации

на соискание ученой степени

доктора технических наук

Самара 2021

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Самарский государственный технический университет» на кафедре «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика»

Научный консультант – Кудинов Василий Александрович
доктор физико – математических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Теоретические основы
теплотехники и гидромеханика» ФГБОУ ВО «Самарский
государственный технический университет»

Официальные оппоненты: Карташов Эдуард Михайлович
Заслуженный деятель науки Российской Федерации,
доктор физико – математических наук, профессор,
профессор кафедры «Высшая и прикладная математика»
ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический
университет»

Кирсанов Юрий Анатольевич
доктор технических наук, доцент, ведущий научный
сотрудник лаборатории «Теплофизика и волновые
технологии» ФИЦ «Казанский научный центр РАН»

Литовка Юрий Владимирович
доктор технических наук, профессор, профессор
кафедры «Системы автоматизированной поддержки
принятия решений» ФГБОУ ВО «Тамбовский
государственный технический университет»

Ведущая организация ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)»

Защита состоится «25» марта 2021 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.217.03 при ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» по адресу: 443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус, ауд. 200.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Самарского государственного технического университета по адресу: 443100, Россия, г. Самара, ул. Первомайская, 18.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью, направлять по адресу: 443100, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус, ученому секретарю диссертационного совета Д 212.217.03; факс +7 (846) 278-44-00.

Автореферат разослан « » 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.217.03
доктор технических наук, доцент

 В.Е. Зотеев

Общая характеристика работы

Актуальность работы.

В основе классической теории процессов переноса энергии и вещества лежат принцип локального термодинамического равновесия и гипотеза сплошной среды. Согласно принципу локальности предполагается, что в каждом малом элементе исследуемой области устанавливается локальное термодинамическое равновесие (несмотря на наличие градиентов термодинамических параметров в системе в целом). Данное предположение позволяет использовать фундаментальные уравнения равновесной термодинамики для исследования неравновесных процессов. Однако такой подход справедлив лишь для процессов, продолжительность которых существенно превышает внутренние временные масштабы системы (среднее время свободного пробега микрочастиц, время релаксации системы к равновесному состоянию), а размеры исследуемой области значительно превышают пространственные масштабы (длину свободного пробега, межатомное расстояние).

На основе принципа локального равновесия в классической теории выводятся дифференциальные уравнения параболического типа. При их выводе используются линейные зависимости между потоками переноса и градиентами потенциала переноса (законы Фурье, Фика, Гука, Ома и др.). Полученные таким образом классические уравнения (теплопроводности, диффузии и др.) не учитывают временную и пространственную нелокальность исследуемых процессов. Из их анализа следует, что любое внешнее возмущение вызывает мгновенный отклик системы. Например, в основе вывода параболического уравнения теплопроводности лежит гипотеза Фурье, согласно которой возникновение температурного градиента внутри тела мгновенно (без задержки во времени) вызывает перенос энергии (тепловой поток). В действительности, перенос энергии из одной точки системы в другую происходит за конечный промежуток времени, определяемый физическими свойствами и внутренним строением среды. Данное противоречие приводит к известным парадоксам – отрицательным температурам в обратной тепловой волне, бесконечным поверхностным напряжениям при тепловом ударе, возникновению изотерм внутри тела и др. Аналогичные проблемы возникают в случае использования классических моделей переноса массы и импульса. В частности, полная аналогия с задачами теплопроводности наблюдается в задачах диффузии, при выводе уравнений которых используется закон Фика. В процессах колебаний упругих тел (струн, стержней, пружин, мембран и проч.) и жидкостей наблюдаются мгновенные изменения напряжений во времени, связанные с использованием законов Гука и Ньютона при выводе дифференциальных уравнений. Распространение электромагнитных волн описывается уравнениями Максвелла, частными случаями которых является телеграфное уравнение, описывающее распространение тока (напряжения) в проводниках, и уравнение Клейна – Гордона, применяемое при исследовании распространения электромагнитных волн в плазме. Анализ полученных в диссертации решений перечисленных уравнений, позволяет заключить, что неучет запаздывания системы на внешнее возмущение приводит к скачкообразным изменениям тока и напряжения в проводнике во времени, что свидетельствует о бесконечной скорости их изменения. Перечисленные парадоксы, не подтверждаемые экспериментальными данными, свидетельствуют о несоответствии классических моделей переноса реальным физическим процессам и явлениям. Таким образом, на основе анализа многочисленных теоретических и экспериментальных исследований, сделано заключение об ограниченной возможности применения классических уравнений переноса для описания локально – неравновесных процессов. Выполненные

в диссертации исследования сильнонеравновесных процессов диффузии, теплового воспламенения конденсированных сред, нагрева сверхмощными потоками лазерного излучения и др. показали, что именно локально – неравновесные эффекты оказывают определяющее влияние на механизм и основные закономерности их протекания.

Повышенный интерес к изучению процессов, протекающих в локально – неравновесных условиях, обусловлен широкими возможностями их практического применения: для создания новых технологий получения наноматериалов и покрытий с уникальными физико – химическими свойствами, таких как бинарные и многокомпонентные металлические сплавы, керамика, полимерные материалы, металлические и полупроводниковые стекла, наножидкости; при оптимизации режимов лазерной обработки изделий (поверхностном упрочнении, резке); при разработке режимов охлаждения компонентов наноэлектроники и нанотехники и др. При моделировании локально – неравновесных процессов возникает необходимость учёта внутренней структуры исследуемых объектов, что приводит к существенному усложнению классических моделей переноса.

Разработке и исследованию математических моделей локально – неравновесных процессов посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований. Применительно к теории теплопроводности уравнения локально – неравновесного переноса получают на основе теории двухфазного запаздывания, двухтемпературных и волновых моделей теплопереноса, из уравнения Больцмана путем использования теории случайных блужданий и молекулярно – кинетическими методами и др. При выводе дифференциальных уравнений используются различные физические подходы к описанию процесса переноса энергии внутри твердых тел (фонон – электронное взаимодействие, фононное рассеивание, двухфазное запаздывание и др.). При описании колебаний упругих тел используют различные модели строения твердых тел (Максвелла, Кельвина – Фойхта, многопараметрические модели), в том числе и усложненные модели, учитывающие инерционность исследуемых процессов.

Наибольший вклад в развитие теории и методов исследования неравновесных процессов внесли Onsager L., Jou D., Casa – Vazquez J., Cattaneo C., Vernotte P., Maxwell J., Tzou D.Y., Zhang Z., Lebon G., Groot S.R., Mazur P., Gyarmati I., Анисимов С.И., Каганов М.И., Пригожин И.Р., Лыков А.В., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Карташов Э.М., Кудинов В.А., Радаев Ю.Н., Соболев С.Л., Бровкин Л.А., Дмитриев А.С., Формалев В.Ф., Кирсанов Ю.А. и др. Наличие значительного числа теорий локально – неравновесного переноса, не всегда между собой согласующихся, позволяет сделать заключение об отсутствии единой теории в данной области исследований. В наименьшей степени разработана теория переноса импульса применительно к обширной области локально – неравновесных колебательных процессов (стержней, пружин, струн, упругих жидкостей, газов, распространения электромагнитных колебаний и проч.), описываемых волновыми уравнениями. Кроме того, в известной литературе недостаточное внимание уделяется решению и исследованию задач, описывающих взаимосвязанные процессы (термодиффузия, термоупругость и др.), многомерных задач переноса в телах сложной геометрической формы, представляющих большой интерес с практической точки зрения. В связи с этим, в диссертации наряду с разработкой теоретических основ математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса, особое внимание уделяется исследованию краевых задач, имеющих большое прикладное значение. Исходя из вышеизложенного следует актуальность темы диссертационного исследования.

Цель диссертационной работы: разработка методологии математического

моделирования локально – неравновесных процессов переноса, численных и приближенных аналитических методов их исследования, а также реализация алгоритмов решения краевых задач переноса (тепла, массы, импульса) в виде комплексов проблемно – ориентированных программ для ЭВМ.

Научное направление заключается в разработке новой концепции математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса на основе модифицированных форм законов сохранения (теплого и материального баланса, равновесия, движения), в том числе с учетом многократной релаксации исследуемых процессов.

Научная новизна:

1. Разработана методология математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса на основе модифицированных форм законов сохранения. В отличие от имеющихся теорий, предлагаемый подход позволяет учесть инерционность процессов переноса тепла, массы, импульса путем введения релаксационных слагаемых непосредственно в балансовые уравнения (теплого и материального баланса, уравнение равновесия и др.) указанных процессов. Возможность учета производных высшего порядка в модифицированных дифференциальных уравнениях переноса (тепла, массы, импульса) позволила обнаружить новые неизвестные ранее закономерности протекания исследуемых процессов. Преимуществом предложенного подхода является возможность его использования для решения широкого круга задач: тепломассообмена, диффузии, колебаний упругих тел, жидкостей и газов, электромагнитных колебаний.

2. На основе метода конечных элементов и теории двухфазного запаздывания разработана дискретная математическая модель локально – неравновесного переноса тепла в твердых телах. Используя современные средства автоматизации расчетов, реализован собственный APDL – алгоритм, позволивший впервые исследовать температурные поля в телах сложной (произвольной) геометрической формы для процессов, протекающих в локально – неравновесных условиях.

3. Выполнено комплексное исследование разработанных в диссертации математических моделей, описывающих локально – неравновесные процессы тепломассопереноса: тепловое воспламенение и взрыв в конденсированных средах; высокоинтенсивный нагрев поверхности пластины потоком лазерного излучения; теплоперенос в нанокompозитах; теплообмен в стержнях произвольного сечения в условиях вынужденной конвекции.

4. Используя модифицированные соотношения взаимности Л. Онзагера, разработан метод математического моделирования взаимосвязанного тепломассопереноса. В отличие от известных, в предлагаемой математической модели движущие силы (градиенты искомых функций температуры и концентрации) и вызываемые ими потоки (тепла и массы) разделены во времени. Учет запаздывания в феноменологических законах Фурье, Фика позволил получить новые, неизвестные ранее, закономерности протекания процессов термодиффузии.

5. На основе совместного использования интегрального метода теплового баланса и дополнительных граничных характеристик развит приближенный аналитический метод решения краевой задачи теплопроводности с подвижной границей раздела фаз (задача Стефана с абляцией). Данный подход впервые использован для определения температурных полей в расплавляемом теле конечных размеров, что позволило определить не только закон перемещения фронта плавления и глубину термического слоя, но и время полного расплавления тела.

6. Разработан метод математического моделирования нестационарного локально – неравновесного теплообмена в стабилизированном потоке несжимаемой жидкости. Впервые сформулировано дифференциальное уравнение неравновесного тепломассопереноса, учитывающее релаксационные слагаемые высшего порядка и диссипацию теплоты вследствие внутреннего трения.

7. Разработан класс приближенных аналитических методов решения краевых задач теплообмена в движущихся жидкостях на основе введения новых искомых функций. В зависимости от физических особенностей решаемой задачи, в качестве новой искомой функции используются закон изменения температуры в центре канала по его длине, закон перемещения начальной температуры по продольной координате, толщина пограничного слоя и др. В отличие от существующих методов в диссертации предложено в качестве новой искомой функции использовать зависимость плотности теплового потока на поверхности от продольной координаты.

8. На основе разработанной методологии сформулированы и детально исследованы математические модели колебательных процессов (продольных и поперечных колебаний упругих тел, вынужденных колебаний сжимаемых жидкостей). На основе данных натурного эксперимента выполнена проверка адекватности разработанных математических моделей.

9. Разработан метод математического моделирования электромагнитных колебаний, описываемых полученным в диссертации телеграфным уравнением, учитывающим запаздывание тока и напряжения в формуле закона Ома.

10. Используя аналитическое решение релятивистского уравнения Клейна – Гордона – Фока, выполнено исследование распространения электромагнитных волн в ионизированном газе, позволяющее в сочетании с экспериментальными методами выполнять оценку концентрации электронов в плазме. Выполненные исследования позволили обнаружить равенство частот колебаний электромагнитного поля в различных точках плазмы, что свидетельствует о самосогласованности плазменных колебаний. Показано также, что плазма является дисперсионной средой для электромагнитных волн, что объясняется наличием в ней собственных внутренних и внешних пространственных и временных масштабов.

11. Используя полученные в диссертации критериальные уравнения конвективного теплообмена, разработаны методы математического моделирования сложных трубопроводных систем с учетом автоматизированной идентификации параметров модели.

12. Алгоритмы и комплексы программ, реализующие численные и аналитические методы решения сформулированных в диссертации краевых задач локально – неравновесного переноса (тепла, массы, импульса).

На защиту выносятся:

1. Методология математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса на основе модифицированных форм законов сохранения.

2. Результаты комплексных исследований локально – неравновесных процессов переноса теплоты в твердых телах (тепловое воспламенение и взрыв, высокоинтенсивный нагрев потоком лазерного излучения, теплообмен в условиях вынужденной конвекции, тепломассоперенос в нанокompозитах), выполненных с использованием современных численных методов решения задач математической физики.

3. Метод математического моделирования взаимосвязанного тепломассопереноса, основанный на использовании модифицированных соотношений взаимности Л.

Онзагера, учитывающих многофазное запаздывание в тепловой и диффузионной составляющих системы уравнений взаимосвязанного теплопереноса.

4. Результаты разработки и развития приближенных аналитических методов исследования теплообмена в стабилизированных потоках несжимаемой жидкости, основанных на введении новых искомых функций и дополнительных граничных характеристик.

5. Метод математического моделирования теплообмена в жидкости с учетом локальной неравновесности процесса, а также диссипации энергии вследствие внутреннего трения.

6. Метод математического моделирования продольных и поперечных колебаний упругих тел (стержней, пластин), позволивший обнаружить новые закономерности колебаний, связанные с учетом многократной релаксации напряжений и перемещений в уравнении второго закона Ньютона. Результаты экспериментальных исследований продольных и поперечных колебаний стержня, проведенных на специализированном оборудовании АО «РКЦ «Прогресс», выполненные с целью проверки адекватности разработанных математических моделей.

7. Метод математического моделирования электромагнитных колебаний на основе модифицированного телеграфного уравнения, учитывающего релаксационные явления.

8. Результаты исследований аналитического решения релятивистского уравнения Клейна – Гордона – Фока, описывающего распространение электромагнитных волн в плазме.

9. Метод математического моделирования разветвленных многокольцевых трубопроводных систем, включающий автоматизированную идентификацию параметров модели.

10. Метод дискретизации трехмерной математической модели локально – неравновесного теплопереноса, а также APDL – алгоритм, реализующий разработанный метод на базе проблемно – ориентированного программного комплекса Ansys.

11. Результаты разработки алгоритмов и комплексов программ для решения сформулированных в диссертации краевых задач теплопереноса, колебаний упругих тел и электромагнитных колебаний с учетом пространственно – временной нелокальности исследуемых процессов.

Достоверность результатов подтверждается соответствием разработанных моделей реальным физическим процессам и явлениям, протекающим в технических системах; сравнением результатов с данными натурных экспериментов, а также с опубликованными в открытой печати результатами, полученными другими авторами; непротиворечивостью полученных результатов современному представлению о внутреннем строении веществ и механизмах переноса (тепла, массы, импульса) в них.

Теоретическая и прикладная значимость работы состоит в разработке новой концепции математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса на основе модифицированных форм уравнений сохранения. Учет релаксационных слагаемых высшего порядка позволил исследовать процессы переноса, представляющие большой интерес с прикладной точки зрения. В диссертационной работе получены дифференциальные уравнения (преимущественно гиперболического типа), наиболее адекватно описывающие изменение искомых функций при малых и сверхмалых значениях временной и пространственной переменных (сопоставимых с длиной и временем свободного пробега микрочастиц (молекул, электронов, фононов)). Первостепенное значение этот подход имеет применительно к исследованию высокоинтенсивных процессов: горение твердых топлив; детонация; тепловое

воздействие на материалы сверхмощных лазерных импульсов фемто – и пикосекундной длительности; фазовые превращения; высокочастотные колебательные процессы.

Выполненные теоретические исследования позволили установить некоторые новые, неизвестные ранее, особенности протекания физических процессов. К их числу относятся: невозможность мгновенного принятия граничных условий в реальных физических процессах – их установление включает некоторый диапазон начального временного участка; перемещение граничного условия первого рода по пространственной переменной в заключительной стадии процесса; наличие в поперечных колебаниях закрепленного на одном из торцов стержня практически мгновенного перескока (хлопка) при переходе его свободного торца из одного крайнего положения в другое; теоретическое подтверждение самосогласованности электромагнитных колебаний в плазме (колебания с одинаковой частотой в различных точках плазменного потока).

В диссертационной работе приводятся результаты разработки приближенных аналитических методов решения краевых задач теплообмена в движущихся жидкостях. Прикладная значимость данного вопроса обусловлена широким распространением теплообменного оборудования в технологических схемах промышленных предприятий, системах теплоснабжения населенных пунктов и др. На основе электрогидравлической аналогии и полученных в диссертации критериальных уравнений конвективного теплообмена, разработан метод математического моделирования гидродинамики и теплообмена в сложных трубопроводных системах. Совместное использование приближенных аналитических и вычислительных методов позволило разработать компьютерные модели сложных многокольцевых трубопроводных систем, выполнить оптимизацию гидравлических режимов их работы, в том числе для объединенной тепловой сети города Самары.

Полученные результаты могут быть использованы в научно – исследовательских и конструкторских организациях для всесторонних исследований по рассмотренным проблемам, а также для проектирования и изготовления технических устройств в различных отраслях промышленности.

Связь диссертационной работы с планами научных исследований. Исследования согласованы с планами госбюджетных тематик Минвуза РФ № 1.21.11 (01.01.2009 г. – 31.12.2012 г.) «Разработка методов получения точных аналитических решений дифференциальных уравнений гиперболического типа»; по направлению Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы», по тематическому плану НИР № 551/02 «Разработка нового направления получения аналитических решений задач математической физики на основе определения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий», а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части государственного задания ФГБОУ ВО «СамГТУ» (код проекта: 1273). Диссертационная работа выполнялась при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта: 18 – 79 – 00171; руководитель: Еремин А.В.), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта: 18 – 38 – 00029 «мол_а»; руководитель: Еремин А.В.; код проекта: № 20 – 38 – 70021 «Стабильность»), Совета по грантам Президента РФ (код проекта: МК – 2614.2019.8, руководитель: Еремин А.В.), Министерства образования и науки Самарской области в рамках конкурса молодых ученых и конструкторов (2017 – 2020 гг.).

Внедрение результатов работы. Результаты диссертации были использованы при выполнении работ по созданию компьютерных моделей тепловых сетей предприятий

ПАО «Т Плюс», а именно Безымянской ТЭЦ, Самарской ТЭЦ, Самарской ГРЭС, Центральной отопительной котельной, Привокзальной отопительной котельной (г. Самара), создании объединенной компьютерной модели тепловой сети ОАО «Предприятие тепловых сетей» (г. Самара) с автоматизированной идентификацией параметров, а также при разработке концепции развития системы теплоснабжения г. Самары. Разработанные приближенные методы решения краевых задач теплопроводности и термоупругости использовались при проведении энергетического аудита ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет». Экономический эффект, подтвержденный актами внедрения, приведенными в приложениях диссертации, превышает 14 млн. руб.

Личный вклад автора является определяющим на всех этапах проведенных исследований и состоит в постановке проблем, разработке методов математического моделирования процессов переноса, выполнении основной части вычислительной работы. В частности, в работах [1] – [8], [11], [12], [14] – [17], [19] – [33], [36] – [46], [50] автором диссертации выполнено построение математических моделей исследуемых процессов, сформулированы соответствующие краевые задачи, получены приближенные аналитические и/или численные их решения, выполнен детальный анализ результатов. В работах [9], [10], [13] автором диссертации получены численные решения задач на основе методов конечных разностей и конечных элементов соответственно; в [18] разработаны разделы V – VIII, связанные с построением математических моделей локально – неравновесного теплообмена в жидкости, колебательных процессов в твердых телах и газах, в частности, получены численные решения перечисленных задач; в [34], [35] выполнен основной объем вычислительной работы, построены компьютерные модели тепловых сетей с использованием специализированного программного обеспечения; в работе [47] получено приближенное аналитическое решение задачи теплообмена в турбулентном слое на основе использования дополнительных граничных характеристик; в [48], [49] на основе анализа невязок дифференциального уравнения выполнен анализ сходимости разработанного метода, получены решения задач при конкретных исходных данных.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены на XIV, XV, XVI Минском международном форуме по тепло – и массообмену (г. Минск, 2012, 2016, 2020 гг.); на VI, VII Российской национальной конференции по теплообмену (г. Москва, 2014, 2018 гг.); на международных научно – технических конференциях «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (г. Самара, 2019 г.), «Пром – инжиниринг» (г. Сочи, 2019, 2020 г.), «Динамика и виброакустика машин» (г. Самара, 2016 г.), «Неизотермические явления и процессы: от теории теплового взрыва к структурной макрокинетике» (г. Черноголовка, 2016 г.), «Математические методы в технике и технологиях» (г. Саратов, 2016 г.), «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика» (г. Москва, 2007, 2009, 2011, 2014 – 2016 гг.), «Математическая физика и ее приложения» (г. Самара, 2012, 2014 гг.), «Инновационные технологии в области агроинженерии» (г. Москва, 2012 г.); на Всероссийских научных конференциях с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2010, 2011, 2013, 2019 гг.), «Энерго – и ресурсосбережение. Энергообеспечение нетрадиционные и возобновляемые источники энергии» (г. Екатеринбург, 2017 – 2019 гг.); в Школе – семинаре молодых ученых и специалистов под руководством академика Леонтьева А.И. «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках» (2019 г.); в Школе – семинаре молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН Алемасова В.Е.

«Проблемы тепломассообмена и гидродинамики в энергомашиностроении» (г. Казань, 2010 г.).

Публикации. Материалы по теме диссертации представлены в 160 печатных работах. В автореферате приводятся 50 основных научных работ, из которых 26 статьи – в международных журналах, индексируемых в базе цитирования Web of Science, 10 статей – в журналах из базы цитирования Scopus, 14 статей – в журналах из списка ВАК. По результатам исследований опубликованы 2 монографии и 2 учебных пособия в издательствах «Лань», «Проспект», СамГТУ.

Структура и объем работы. Диссертация включает введение, семь глав, выводы, список используемой литературы, приложения; содержит 245 страниц основного текста, 42 страницы приложений, 152 рисунка и 5 таблиц. Список цитируемой литературы состоит из 254 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении изложена актуальность работы, рассмотрены ее цель, приведены новые научные результаты, даны положения, выносимые на защиту, приводится обоснование практической значимости, даны сведения об апробации и публикациях.

В первой главе представлены обзор и анализ известных работ по направлению диссертации. Показано, что существуют различные модели локально – неравновесных процессов: молекулярно – динамические, кинетические, термодинамические, феноменологические; модели, основанные на теории случайных блужданий, на использовании понятия «тепловой памяти» и «двухфазного запаздывания» и др. В их разработке принимали участие Onsager L., Jou D., Casas – Vazquez J., Cattaneo C., Vernotte P., Maxwell J., Tzou D.Y., Zhang Z., Lebon G., Groot S.R., Mazur P., Gyarmati I., Анисимов С.И., Каганов М.И., Пригожин И.Р., Лыков А.В., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Карташов Э.М., Кудинов В.А., Радаев Ю.Н., Соболев С.Л., Дмитриев А.С., Формалев В.Ф., Кирсанов Ю.А. и др. Отмечено, что несмотря на наличие значительного числа теорий локально – неравновесного переноса, отсутствует единая теория в данной области исследований. Показано, что наряду с совершенствованием известных моделей, необходима разработка новых теорий локально – неравновесных процессов.

Во второй главе представлены результаты разработки методологии математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса тепла на основе модифицированной формы уравнения теплового баланса. Для получения обобщенного дифференциального уравнения теплопроводности, учитывающего инерционность процесса переноса тепла в твердых телах, уравнение теплового баланса

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{q}$$

представлено в виде

$$c\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(T + \sum_{k=1}^N \tau_k^k \frac{\partial^k T}{\partial t^k} \right) = -\operatorname{div} \left(\mathbf{q} + \sum_{k=1}^N r_k^k \frac{\partial^k \mathbf{q}}{\partial t^k} \right), \quad (1)$$

где T – температура; $\mathbf{q}$ – вектор плотности теплового потока; t – время; c – теплоемкость; ρ – плотность; τ_k , r_k – феноменологические коэффициенты релаксации. Степень « k » подчеркивает изменение размерности множителей τ_k^k , r_k^k с увеличением N ($[\tau_1^1] = c$, $[\tau_2^2] = c^2$, ..., $[\tau_k^k] = c^k$; $[\]$ – означает размерность).

Подставляя в (1) соотношение для теплового потока, согласно закону Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T,$$

получаем дифференциальное уравнение теплопроводности, учитывающее

запаздывание во времени как температуры, так и теплового потока. В одномерном случае при постоянных теплофизических свойствах оно принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(T + \sum_{k=1}^N \tau_k \frac{\partial^k T}{\partial t^k} \right) = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^N r_k \frac{\partial^{k+2} T}{\partial x^2 \partial t^k} \right). \quad (2)$$

где $a = \lambda / (c\rho)$ – коэффициент температуропроводности; λ – коэффициент теплопроводности; x – пространственная переменная.

Отмечается, что в зависимости от принятых значений коэффициентов релаксации дифференциальное уравнение (2) сводится к известным: классическому параболическому уравнению (при $\tau_k = r_k = 0$, $k = \overline{1, N}$); классическому гиперболическому уравнению (при $N = 1$, $\tau_1 \neq 0$, $r_1 = 0$); уравнению двухфазного запаздывания (при $N = 1$, $\tau_1 \neq 0$, $r_1 \neq 0$).

В диссертационной работе впервые рассмотрено влияние слагаемых высшего порядка в (2) на процесс переноса теплоты. В частности, выполнена трехкратная релаксация температуры и теплового потока, в результате которой (2) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} + \tau_3 \frac{\partial^4 T}{\partial t^4} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r_1 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} + r_2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial t^2} + r_3 \frac{\partial^5 T}{\partial x^2 \partial t^3} \right). \quad (3)$$

В диссертации приводится решение краевой задачи локально – неравновесного теплопереноса в стержне, боковая поверхность которого теплоизолирована. Краевые условия уравнения (3) (при симметричных граничных условиях первого рода) будут

$$T(x, 0) = T_0; \quad \frac{\partial T(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x, 0)}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 T(x, 0)}{\partial t^3} = 0; \quad T(\delta, t) = T(-\delta, t) = T_{\text{ст}}, \quad (4)$$

где T_0 – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура на концах стержня; δ – половина длины стержня. Решение уравнения (3) отыскивается в области $-\delta < x < \delta$; $t > 0$.

Решение задачи (3), (4) позволяет определить распределение температуры в неограниченной пластине. В теории теплопроводности под «неограниченной» понимают пластину, ширина и длина которой велики по сравнению с толщиной. Использование термина «неограниченная пластина» дает более полное представление о физической сущности исследуемых во второй главе диссертации процессов и применяется повсеместно. Задача (3), (4) может быть представлена в безразмерном виде. Математическая постановка задачи для половины пластины ($0 < x < \delta$) имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} + \sum_{k=1}^3 \text{Fo}_k \frac{\partial^{k+1} \Theta}{\partial \text{Fo}^{k+1}} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \sum_{k=1}^3 R_k \frac{\partial^{k+2} \Theta}{\partial \xi^2 \partial \text{Fo}^k} \quad (0 < \xi < 1; \text{Fo} > 0); \quad (5)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad \frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}^2} = \frac{\partial^3 \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}^3} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad (7) \quad \Theta(1, \text{Fo}) = 0, \quad (8)$$

где $\Theta = (T - T_{\text{ст}}) / (T_0 - T_{\text{ст}})$; $\xi = x / \delta$; $\text{Fo} = at / \delta^2$; $\text{Fo}_k = a \tau_k / \delta^2$; $R_k = a r_k / \delta^2$ – безразмерные температура, координата, время, коэффициенты релаксации соответственно.

Используя метод разделения переменных, в диссертации получено аналитическое решение задачи (5) – (8) в форме бесконечного тригонометрического ряда:

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^4 C_{jm} e^{z_{jm} \text{Fo}} \psi_m \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} (C_{1m} e^{z_{1m} \text{Fo}} + C_{2m} e^{z_{2m} \text{Fo}} + C_{3m} e^{z_{3m} \text{Fo}} + C_{4m} e^{z_{4m} \text{Fo}}) \psi_m,$$

где $\psi_m = \cos[(2m - 1)\pi\xi / 2]$; $z_{jm} (j = \overline{1, 4})$ – корни характеристического уравнения;

$C_{jm} (j=\overline{1,4})$ – константы интегрирования, для определения которых составляется невязка начальных условий (6) и требуется ортогональность невязки к ψ_m (последовательно к каждой собственной функции ψ_m). В результате получаем систему $4 \cdot m$ уравнений. Вследствие ортогональности системы базисных функций из косинусов, решение полученной системы для $C_{jm} (j=\overline{1,4})$ сводится к последовательному решению четырех алгебраических уравнений для каждого значения m .

В диссертации выполнен анализ температурных полей внутри пластины при различных значениях коэффициентов релаксации Fo_k, R_k . Показано, что несмотря на строгое выполнение граничного условия (8), его физическое установление (в окрестности точки $\xi=1$) происходит в течении некоторого интервала времени ΔFo .

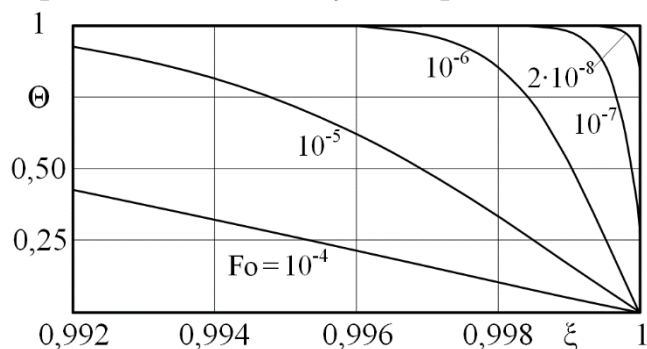


Рис. 1. Распределение температуры в пластине при $Fo_k = R_k = 10^{-7} (k = \overline{1, 3})$

тотчас же после приложения граничного условия первого рода (рис. 2), что является причиной указанных ранее парадоксов – бесконечных значений теплового потока и температурных напряжений на поверхности пластины в начальный момент времени.

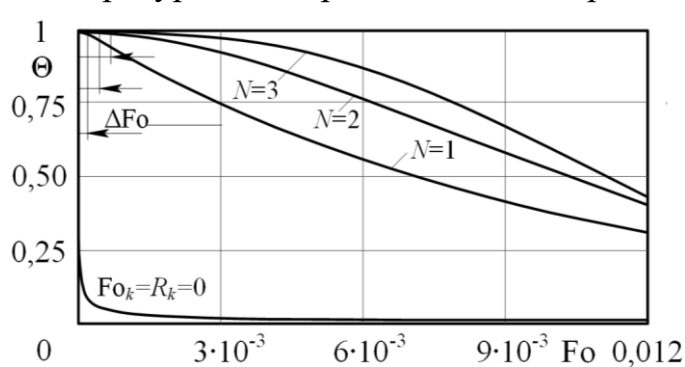


Рис. 2. Изменение температуры во времени в окрестности точки $\xi=1 (Fo_k = R_k = 10^{-2})$

вопрос целесообразности учета этих слагаемых для различных классов задач. Впервые исследовано нелинейное дифференциальное уравнение локально – неравновесного переноса теплоты в пластине с учетом производных высшего порядка в уравнении (3) и зависимости теплофизических свойств от температуры.

Во второй главе диссертации представлены также результаты разработки метода математического моделирования локально – неравновесного переноса теплоты в трехмерном пространстве, позволяющего исследовать температурные поля в телах сложной (произвольной) геометрической формы. Согласно закону Фурье

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\lambda \text{grad } T(\mathbf{r}, t), \quad (9)$$

где $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ – вектор плотности теплового потока. В соответствии с теорией двухфазного запаздывания, инерционность процесса переноса теплоты учитывается путем модификации (9):

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t + \tau_1) = -\lambda \text{grad } T(\mathbf{r}, t + r_1), \quad (10)$$

где τ_1, r_1 – коэффициенты релаксации.

Разлагая (10) в ряд по степеням τ_1, r_1 с точностью до членов первого порядка малости, получаем

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) + \tau_1 \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\lambda \left(\text{grad } T(\mathbf{r}, t) + r_1 \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } T(\mathbf{r}, t) \right). \quad (11)$$

Подставляя выражение теплового потока из (11) в уравнение теплового баланса

$$\rho c \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{q}(\mathbf{r}, t), \quad (12)$$

получаем

$$\rho c \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) + \lambda \left(\Delta T(\mathbf{r}, t) + r_1 \frac{\partial}{\partial t} \Delta T(\mathbf{r}, t) \right), \quad (13)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Подставляя дивергенцию потока теплоты из (12) в выражение (13), после некоторых преобразований получаем дифференциальное уравнение в частных производных относительно искомой функции T , описывающее распределение температуры в трехмерных телах с учетом конечной скорости распространения теплоты

$$\tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (T - a r_1 \Delta T) = a \Delta T. \quad (14)$$

В диссертации разработана методика применения метода конечных элементов (МКЭ) для модифицированного уравнения теплопроводности (14). Согласно МКЭ расчётная область разбивается сетью конечных элементов. За неизвестные величины принимаются значения температуры в узлах сетки T_j ($j=1, \dots, n$, где n – число узлов). Поле температуры в расчётной области аппроксимируется суммой

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{j \in E(\mathbf{r})} N_j(\mathbf{r}) T_j(t).$$

где $N_j(\mathbf{r})$ – функции формы конечных элементов. В диссертации уравнение (14) представлено в матричном виде

$$\tau_1 [C] \{\ddot{T}\} + ([C] + r_1 [\lambda]) \{\dot{T}\} + [\lambda] \{T\} = \{Q\},$$

$$\text{где } [C] = \rho c \int_V N_i N_j dV; \quad [\lambda] = \oint_S \alpha N_i N_j dS + \int_V \lambda \text{grad } N_i \text{grad } N_j dV; \quad \{Q\} = \oint_S \alpha N_i T_c dS + \oint_S N_i q_e dS -$$

соответственно матрицы удельной теплоёмкости и проводимости, вектор теплового потока; $\{T\} = T_j, j=1, \dots, n$ – вектор неизвестных узловых температур; N_i – функция формы, с помощью которой составляется интегральная невязка уравнения (14).

На основе совместного использования стандартных средств автоматизации расчетов программного продукта ANSYS (построение сетки, решение системы линейных уравнений и др.) и разработанного на языке APDL алгоритма, разработан программный продукт, позволяющий исследовать локально – неравновесные процессы переноса теплоты, на основе модифицированного уравнения теплопроводности (14). С целью проверки адекватности разработанной дискретной модели теплопереноса выполнено сравнение результатов численных расчетов с известным точным аналитическим решением модельной задачи в частном случае – одномерной задачи теплопроводности в неограниченной пластине. Абсолютная погрешность результатов составила менее 0,1% во всем диапазоне изменения временной и пространственных переменных.

В качестве примера использования разработанного алгоритма в диссертации

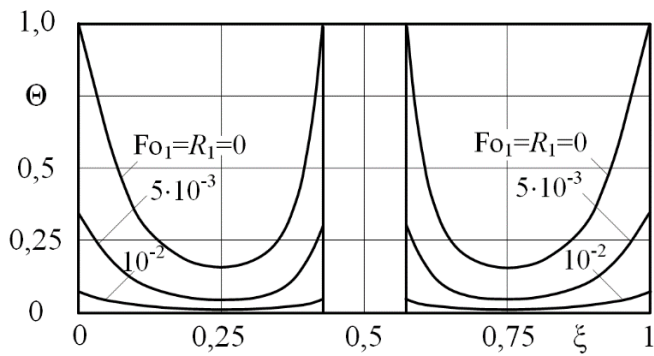


Рис. 3. Распределение температуры в призме в момент времени $Fo = 0,01$

приведены результаты решения трехмерной задачи теплопроводности в шестиугольной прямой призме со сквозным круглым отверстием в центре. Рассмотрены различные режимы нагрева тела (через вершину, ребра, грани). На рис. 3 дано распределение температуры в сечении, проходящем через ось отверстия и одну из вершин призмы, при граничных условиях первого рода на поверхности. Анализ результатов расчетов температуры

при различных значениях коэффициентов Fo_1, R_1 позволяет заключить, что учет релаксационных свойств среды приводит к существенному отличию получаемых температурных полей от классических (при $Fo_1, R_1 = 0$). В частности, отмечается, что при увеличении Fo_1, R_1 происходит более равномерный нагрев призмы – с меньшими значениями температурных градиентов внутри области. Данные результаты могут быть использованы при исследовании формирования ударных волн напряжений и перемещений при воздействии мощного источника теплоты на поверхность тела и др.

В рамках единого подхода, основанного на учете релаксационных слагаемых в уравнениях сохранения, выполнены комплексные исследования разработанных в диссертации математических моделей локально – неравновесных процессов, имеющих большое прикладное значение. В частности, исследованы процессы теплового воспламенения и взрыва в конденсированных средах, высокоинтенсивного нагрева поверхности твердых тел потоком лазерного излучения, переноса тепла в нанокompозитах, взаимосвязанного тепломассопереноса.

Так, математическая постановка задачи о тепловом воспламенении в неограниченной пластине с учетом зависимости скорости химической реакции от температуры будет

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + Fo_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + R_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo} + \exp\left(\frac{\Theta}{\beta \Theta + 1}\right) + \frac{Fo_1}{(\beta \Theta + 1)^2} \exp\left(\frac{\Theta}{\beta \Theta + 1}\right) \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} \quad (15)$$

$$(0 < \xi < \xi_0, Fo > 0);$$

$$\Theta(\xi, 0) = \Theta_0; \quad \partial \Theta(\xi, 0) / \partial Fo = 0; \quad \Theta(0, Fo) = 0; \quad \Theta(\xi_0, Fo) = \Theta_0, \quad (16)$$

где $Fo = t/t_a$; $t_a = \frac{cRT_{cr}^2}{EQk_0} \exp\left(\frac{E}{RT_{cr}}\right)$; $\xi = x/x_a$; $x_a = \sqrt{at_a}$; $\Theta = \frac{E}{RT_{cr}^2}(T - T_{cr})$; $\beta = RT_{cr}/E$; $\Theta, Fo,$

ξ – соответственно безразмерные температура, время, координата; $Fo_1 = \tau_1/t_a$, $R_1 = r_1/t_a$ – безразмерные коэффициенты релаксации; t_a, x_a – временной и пространственный масштабы; T_{cr} – температура поверхности, на которой задано граничное условие 1 – го рода; β – параметр, выражающий степень зависимости скорости химической реакции от температуры; $\xi_0 = \sqrt{\delta}$; $\delta = L^2/x_a^2$ – параметр Франк – Каменецкого; $\Theta_0 = E(T_0 - T_{cr})/(RT_{cr}^2)$; E – энергия активации.

При равенстве нулю коэффициентов релаксации Fo_1, R_1 задача (15), (16) сводится к классической задаче теории зажигания конденсированных веществ, рассмотренной в трудах Франк – Каменецкого Д.А., Мержанова А.Г., Вилунова В.Н. и др. В работах Kothari S., Kumar R., Qiu T., Tien C. рассматривается DPL – модель (dual – phase – lag) переноса теплоты в твердых телах с внутренним источником теплоты. В диссертации приведены результаты разработки локально – неравновесной модели теплового

воспламенения на основе модифицированного уравнения теплового баланса в сравнении с DPL – моделью зажигания.

На основе метода конечных разностей получено численное решение задачи (15), (16). Используя явную схему аппроксимации дифференциальных операторов разработан вычислительный алгоритм, позволяющий исследовать процесс теплового воспламенения в диапазоне времени $0 < Fo < Fo_3$ (Fo_3 – время зажигания вещества). Причем Fo_3 неизвестно заранее и определяется в результате решения задачи. При получении численного решения использовалась равномерная пространственно – временная сетка. Для аппроксимации вторых производных (как по времени, так и по координате) использована центральная разностная схема, первой производной по времени – схема «назад», имеющие соответственно второй и первый порядок точности. Численные исследования полученной модели показали существенную зависимость Fo_3 от релаксационных свойств материалов (см. рис. 4, 5). На конкретном примере показано, что при учете релаксационных слагаемых в (15) отмечается задержка зажигания вещества ΔFo_3 в сравнении с классической параболической моделью ($Fo_1 = R_1 = 0$). Причем ΔFo_3 возрастает при увеличении коэффициентов Fo_1, R_1 . Этот факт объясняется тем, что вследствие тепловой инерционности, возрастание теплового потока на поверхности пластины от нулевого значения до величины, определяемой граничным условием, происходит не мгновенно, а за некоторый отрезок времени. Снижение интенсивности процесса обусловлено также влиянием релаксационных свойств на мощность теплового источника.

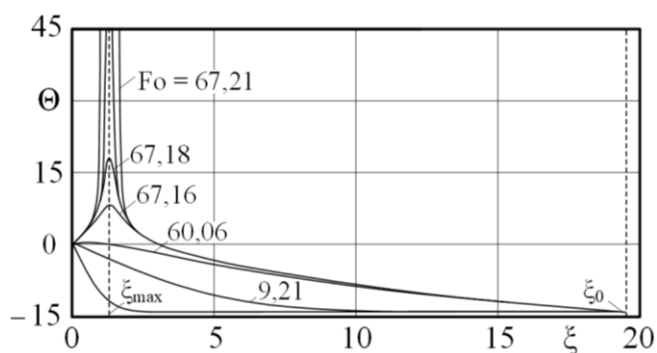


Рис. 4. Распределение температуры в пластине без учета релаксации ($Fo_1 = R_1 = 0$)

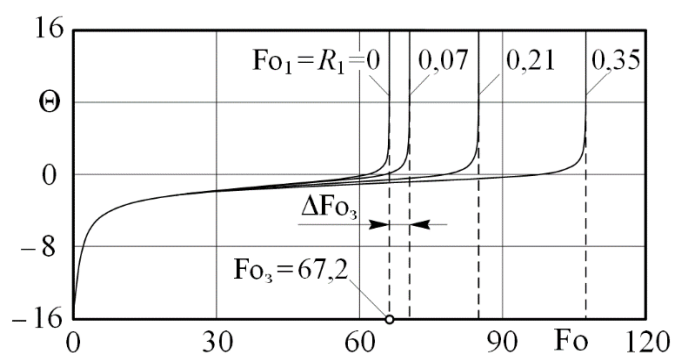


Рис. 5. Изменение температуры во времени в точке $\xi_{\max}$ при различных значениях Fo_1, R_1

На основе учета релаксационных слагаемых в уравнении теплопроводности в диссертации разработана математическая модель локально – неравновесного нагрева неограниченной пластины сверхкороткими лазерными импульсами, моделируемыми переменным во времени граничным условием второго рода (тепловой поток – ступенчатая функция времени). Математическая постановка задачи включает уравнение (5) при $N = 1$ и следующие краевые условия:

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad \partial\Theta(\xi, 0)/\partial Fo = 0; \quad \partial\Theta(1, Fo)/\partial \xi = 0; \quad (17)$$

$$-\frac{\partial\Theta(0, Fo)}{\partial \xi} - R_1 \frac{\partial^2\Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo} = q(Fo) + Fo_1 \frac{\partial q(Fo)}{\partial Fo}, \quad (18)$$

где Ki – критерии Кирпичева; Pd – критерий Предводителя; $q(Fo)$ – плотность теплового потока на поверхности пластины определяемая согласно выражению

$$q(Fo) = \begin{cases} Ki, & \sin(Pd \cdot Fo) \geq 0; \\ 0, & \sin(Pd \cdot Fo) < 0. \end{cases} \quad (19)$$

Особенность разработанной математической модели состоит в использовании

модифицированного граничного условия (18), позволяющего учесть влияние инерционности процесса переноса теплоты при воздействии потока лазерного излучения на поверхность исследуемой области.

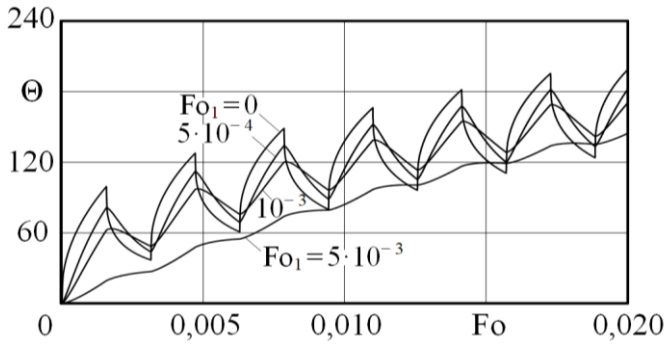


Рис. 6. Изменение температуры во времени на поверхности пластины ($K_i = Pd = 2000$)

Численные исследования модели (5), (17) – (19) показали, что учет локальной неравновесности процесса теплообмена приводит к сглаживанию скачков температуры в поверхностном слое пластины в сравнении с классической моделью (см. рис. 6). Отмечается, что глубина прогретого слоя для каждой мощности теплового потока имеет определенную величину, неизменную во времени. В диссертации разработан также

алгоритм управления тепловым потоком, исходя из достижения заданной и неизменной во времени температуры поверхности пластины.

Во второй главе диссертации представлены также результаты исследования математической модели теплопроводности в нанокompозитах – двухслойной пластине, с толщиной слоев $\delta \approx 10^{-9}$ м:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial Fo} + Fo_1 \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial \xi^2} + R_1 \frac{\partial^3 \Theta_1}{\partial \xi^2 \partial Fo} \quad (Fo > 0; 0 < \xi < \xi_1);$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial Fo} + Fo'_1 \frac{a_1}{a_2} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial Fo^2} = \frac{a_2}{a_1} \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \xi^2} + R'_1 \frac{\partial^3 \Theta_2}{\partial \xi^2 \partial Fo} \quad (Fo > 0; \xi_1 < \xi < 1);$$

$$\Theta_1(\xi, 0) = 0; \quad \Theta_2(\xi, 0) = \frac{T_{02} - T_{01}}{T_{cr1} - T_{01}}; \quad \frac{\partial \Theta_1(\xi, 0)}{\partial Fo} = \frac{\partial \Theta_2(\xi, 0)}{\partial Fo} = 0;$$

$$\Theta_1(0, Fo) = 1; \quad \Theta_1(\xi_1, Fo) = \Theta_2(\xi_1, Fo);$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left[\frac{\partial \Theta_1(\xi_1, Fo)}{\partial \xi} + R_1 \frac{\partial^2 \Theta_1(\xi_1, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} \right] = \frac{\partial \Theta_2(\xi_1, Fo)}{\partial \xi} + R'_1 \frac{a_1}{a_2} \frac{\partial^2 \Theta_2(\xi_1, Fo)}{\partial \xi \partial Fo}; \quad \Theta_2(1, Fo) = \frac{T_{cr2} - T_{01}}{T_{cr1} - T_{01}},$$

где $\Theta_i = (T_i - T_{01}) / (T_{cr1} - T_{01})$ – безразмерная температура ($i = 1, 2$); $T_{0i}, T_{cr i}$ – начальная температура и температура внешней поверхности i – го слоя; λ_i, a_i – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности слоев соответственно; $Fo_1 = a_1 \tau_1 / \delta$; $R_1 = a_1 r_1 / \delta$ – коэффициенты релаксации первого слоя; $Fo'_1 = a_2 \tau'_1 / \delta$; $R'_1 = a_2 r'_1 / \delta$ – коэффициенты релаксации второго слоя.

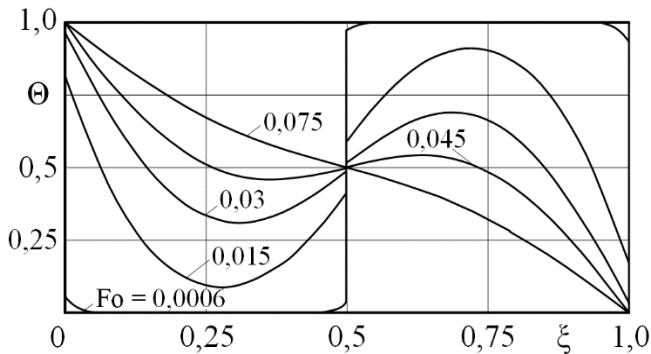


Рис. 7. Распределение температуры в пластине

Впервые теоретически описано наличие скачка температуры в точке контакта двух слоев, имеющих в начальный момент различную температуру (рис. 7). Экспериментальным исследованиям данного факта посвящены труды Mitra K., Kumar S., Vedavars A. и др. Отмечается, что продолжительность установления температуры в точке контакта определяется соотношением коэффициентов релаксации

слоев и она тем больше, чем больше различие между ними.

Во второй главе диссертации приведены также результаты разработки метода

математического моделирования взаимосвязанного тепломассопереноса на основе модифицированных соотношениях взаимности Онзагера, учитывающих многофазное запаздывание в тепловой и диффузионной составляющих системы уравнений взаимосвязанного тепломассопереноса:

$$\left. \begin{aligned} I_1 + \sum_{k=1}^N \tau'_k \frac{\partial^k I_1}{\partial t^k} &= L'_{11} \left(X_1 + \sum_{k=1}^N r'_k \frac{\partial^k X_1}{\partial t^k} \right) + L'_{12} \left(X_2 + \sum_{k=1}^N r_k \frac{\partial^k X_2}{\partial t^k} \right); \\ I_2 + \sum_{k=1}^N \tau_k \frac{\partial^k I_2}{\partial t^k} &= L'_{21} \left(X_1 + \sum_{k=1}^N r'_k \frac{\partial^k X_1}{\partial t^k} \right) + L'_{22} \left(X_2 + \sum_{k=1}^N r_k \frac{\partial^k X_2}{\partial t^k} \right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где I_1 – поток массы; I_2 – поток теплоты; $X_1 = \text{grad } C$, $X_2 = \text{grad } T$ – «движущие силы» процесса термодиффузии; C – концентрация диффундирующего компонента; L'_{11} , L'_{12} , L'_{21} , L'_{22} – кинетические коэффициенты. В соотношениях (20) показатели степени коэффициентов релаксации опущены.

Отмечается, что учет релаксационных слагаемых в (20) особенно важен при исследовании процессов взаимосвязанного тепломассопереноса, протекающих при воздействии на материалы высокоинтенсивными источниками энергии (лазерное излучение, облучение потоками заряженных частиц и др.). Так как интенсивный перенос вещества с поверхности во внутренние объемы образца не может быть объяснен с помощью известных диффузионных законов. Использование закона Фика для описания таких процессов становится некорректным, ввиду невозможности установления локального равновесия. Разработанный в диссертации метод математического моделирования позволил впервые исследовать локально – неравновесные процессы тепло– и массопереноса с учетом их взаимного влияния друг на друга.

В третьей главе диссертации представлены результаты разработки методов математического моделирования теплообмена в движущихся жидкостях. В рамках разработанной методологии выполнена модификация уравнения энергии, описывающего теплообмен в стабилизированном потоке несжимаемой жидкости. С учетом релаксации конвективной $\mathbf{q}_k$ и диффузионной $\mathbf{q}_r$ компонент вектора теплового потока, получено локально – неравновесное уравнение теплообмена в установившемся ламинарном потоке жидкости с диссипацией энергии вследствие внутреннего трения q_v

$$c_p \frac{\partial}{\partial t} \left(T + \sum_{k=1}^N \tau_k \frac{\partial T}{\partial t} \right) = -\text{div} \left(\mathbf{q}_k + \sum_{k=1}^N r_k^k \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial t} + \mathbf{q}_r + \sum_{k=1}^N r_k^k \frac{\partial \mathbf{q}_r}{\partial t} \right) + q_v. \quad (21)$$

Сформулирована краевая задача нестационарного локально – неравновесного теплообмена в потоке несжимаемой жидкости. Применительно к плоскопараллельному каналу толщиной δ краевая задача принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \left(\Theta + Fo_1 \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\Theta + R_1 \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} \right) - (1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Theta + R_1 \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} \right) + 9\xi^2 \quad (22)$$

$$(Fo > 0; 0 < \xi < 1; \eta > 0);$$

$$\Theta(\xi, \eta, 0) = \Theta_n; \quad \partial \Theta(\xi, \eta, 0) / \partial Fo = 0; \quad \Theta(\xi, 0, Fo) = \Theta_0; \quad \partial \Theta(\xi, 0, Fo) / \partial \eta = 0;$$

$$\Theta(1, \eta, Fo) = 0; \quad \partial \Theta(0, \eta, Fo) / \partial \xi = 0,$$

где $\Theta = \lambda(T - T_{cr}) / (\mu \omega_{cp}^2)$; $\xi = y / \delta$; $\eta = 2ax / (3\delta^2 \omega_{cp})$ – безразмерные температура, поперечная и продольная координаты; $Fo = at / \delta^2$ – число Фурье; $Fo_1 = a \tau_1 / \delta^2$, $R_1 = a r_1 / \delta^2$ – коэффициенты релаксации; ω_{cp} – средняя скорость; μ – динамическая вязкость; Θ_n , Θ_0 – начальная температура и температура на входе в канал.

В результате численного решения задачи (22) в исследуемой области установлено,

что ввиду инерционности изменения теплового потока во времени от нулевого его значения до некоторой максимальной величины, физическое установление граничного условия первого рода занимает некоторый промежуток времени, зависящий от коэффициентов релаксации Fo_1, R_1 . При значениях коэффициентов релаксации $Fo_1, R_1 \geq 0,5$ граничное условие может быть принято стенкой лишь при установлении стационарного состояния (при $Fo \rightarrow \infty$). При этом внутри потока отсутствуют скачки температур и отрицательные их значения.

На основе анализа влияния релаксационных свойств на протекание различных теплообменных процессов сделан вывод о необходимости их учета при описании сильнонеравновесных явлений в различных физических системах переноса. При исследовании процессов в условиях локального равновесия учет релаксационных слагаемых в дифференциальных уравнениях переноса не дает новых представлений об их протекании. В связи с этим в диссертации развиваются также приближенные аналитические методы построения решений уравнений параболического типа, вывод которых основан на принципе локального термодинамического равновесия и гипотезе сплошной среды. При их разработке использованы понятия, выходящие за рамки классической теории (глубина термического слоя, фронт температурного возмущения, конечная скорость распространения теплоты). В частности, в третьей главе представлено решение нестационарной задачи теплообмена в цилиндрическом канале радиуса r_0 , имеющей вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \eta, Fo)}{\partial Fo} + (1 - \xi^2) \frac{\partial \Theta(\xi, \eta, Fo)}{\partial \eta} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Theta(\xi, \eta, Fo)}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \eta, Fo)}{\partial \xi^2}; \quad (23)$$

$$\Theta(\xi, \eta, 0) = \Theta_n; \quad \Theta(\xi, 0, Fo) = 1; \quad \Theta(1, \eta, Fo) = 0; \quad \partial \Theta(0, \eta, Fo) / \partial \xi = 0, \quad (24)$$

где $\Theta = (T - T_{ct}) / (T_0 - T_{ct})$, $\xi = y / r_0$, $\eta = x / (Pe r_0)$ – безразмерные температура, поперечная и продольная координаты; Fo – число Фурье; Pe – число Пекле; $\Theta_n = (T_n - T_{ct}) / (T_0 - T_{ct})$; T_0 – температура жидкости на входе в канал; T_{ct} – температура поверхности канала; T_n – температура жидкости в начальный момент времени.

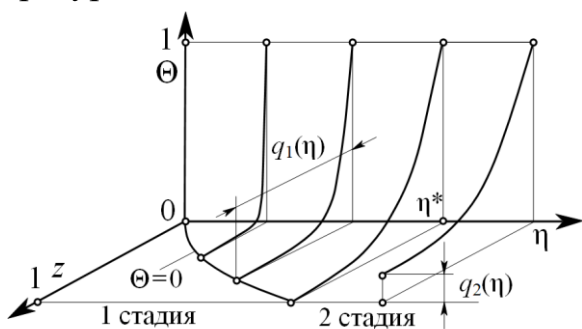


Рис. 8. Схема теплообмена

Применяя двукратные интегральные преобразования Лапласа – Карсона по времени Fo и безразмерной координате η , решение задачи (23), (24) сводится к решению двух независимых задач, наибольшие трудности из которых представляет задача Гретца – Нуссельта. В диссертации получено приближенное аналитическое решение задачи Гретца на основе интегрального метода теплового

баланса, согласно которому в рассмотрение вводится новая искомая функция – фронт температурного возмущения q_1 . Данный подход впервые использовался в работах Goodman T., Eckert E., Drake R. В диссертации данный метод рассмотрен применительно к решению стационарных задач, где определению подлежит не закон перемещения фронта температурного возмущения во времени, а его пространственное положение. То есть, определяются координаты невозмущенной области, имеющей начальную температуру T_n . Согласно данному методу задача разделяется на две стадии.

Задача нагрева среды для первой стадии процесса формулируется в виде (см. рис. 8)

$$(2z - z^2) \frac{\partial \Theta(z, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \Theta(z, \eta)}{\partial z^2} - \frac{1}{1-z} \frac{\partial \Theta(z, \eta)}{\partial z} \quad (0 \leq \eta \leq \eta_1; \quad 0 < z \leq q_1(\eta); \quad z = 1 - \xi); \quad (25)$$

$$\Theta(0, \eta) = 1; \quad (26) \quad \Theta(q_1, \eta) = 0; \quad (27) \quad \partial \Theta(q_1, \eta) / \partial z = 0. \quad (28)$$

Согласно интегральному методу теплового баланса, решение задачи (25) – (28) должно удовлетворять не уравнению (25), а интегральному уравнению

$$\int_0^{q_1} (2z - z^2) \frac{\partial \Theta(z, \eta)}{\partial \eta} dz = \int_0^{q_1} \left[\frac{\partial^2 \Theta(z, \eta)}{\partial z^2} - \frac{1}{1-z} \frac{\partial \Theta(z, \eta)}{\partial z} \right] dz. \quad (29)$$

Решение задачи (25) – (28) принимается в виде

$$\Theta(z, x) = 1 - \sum_{k=1}^n a_k(q_1) \varphi_k(z), \quad (30)$$

где $a_k(q_1)$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(z) = z^k$ – координатные функции.

Благодаря используемой координатной системе, соотношение (30) удовлетворяет условию (26). Коэффициенты $a_k(q_1)$ находятся из (27), (28) и дополнительных граничных условий, выполнение которых адекватно удовлетворению уравнения (25) на границах ($z = 0$ и $z = 1$). Общие формулы для дополнительных граничных будут

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i \Theta(0, \eta)}{\partial z^i} - \frac{\partial^{i-1} \Theta(0, \eta)}{\partial z^{i-1}} - \frac{\partial^{i-2} \Theta(0, \eta)}{\partial z^{i-2}} - \dots = 0; \\ \frac{\partial^i \Theta(q_1, \eta)}{\partial z^i} = 0; \quad \frac{\partial^{i+1} \Theta(q_1, \eta)}{\partial z^{i+1}} = 0 \quad (i = 2, 3, 4, \dots). \end{aligned}$$

Решение задачи (25) – (28), например, во втором приближении приводится к виду

$$\Theta(z, \eta) = 1 - \frac{z}{q_1(q_1 + 8)} \left[20 - 10z + \frac{(q_1 + 2)z^2}{q_1^2} - \frac{5(3q_1 + 8)z^3}{q_1^3} - \frac{4(3q_1 + 3)z^4}{q_1^4} \right], \quad q_1(\eta) = 5,5\eta^{0,41}.$$

Математическая постановка задачи во второй стадии процесса включает уравнение (25) и следующие граничные условия:

$$\Theta(z, 0) = 0; \quad \Theta(0, \eta) = 1; \quad \partial \Theta(1, \eta) / \partial z = 0. \quad (31)$$

Применительно к задаче (25), (31) в качестве дополнительной искомой функции рассматривается функция $q_2(\eta) = \Theta(1, \eta)$, характеризующая изменение температуры на оси трубы ($z = 1$) в зависимости от продольной координаты η .

Решение задачи (25), (31) во втором приближении имеет вид

$$\Theta(z, x) = 1 + \frac{z}{9} [(q_2 - 1)(16z^4 + 55z^3 + 60z^2 + 10z + 20)] + \frac{dq_2}{d\eta} \left(-z^4 + \frac{13}{4}z^3 - z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2} \right).$$

Исследование полученных решений в сравнении с численным расчетом (по методу конечных разностей) показало, что в при $\eta \geq 10^{-5}$ их расхождение в пятнадцатом приближении не превышает 1%.

В третьей главе диссертации на основе свойства параболического уравнения, описывающего бесконечную скорость распространения теплоты, приведены аналитические решения следующих задач теплообмена в жидкостях: при изменяющейся по продольной координате температуре стенки трубы; с учетом теплопроводности вдоль потока движущейся среды; с учетом потерь энергии на трение (диссипация энергии), а также при зависимости вязкости от температуры.

В третьей главе диссертации приводятся также результаты решения краевой задачи для теплового турбулентного пограничного слоя, полученные на основе интегрального метода с привлечением дополнительных граничных характеристик. Уравнение энергии при стационарном режиме течения жидкости в двумерном случае имеет вид

$$c\rho v_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + c\rho v_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda + cA_q) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] + (\mu + A_t) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + v_x \frac{dp}{dx}, \quad (32)$$

где v_x, v_y – осредненные по времени компоненты вектора скорости; $\bar{T}$ – осредненная по времени температура; μ – динамическая вязкость; A_q, A_t – коэффициенты турбулентного обмена для тепла и импульса; p – осредненное давление.

В диссертации разработан метод математического моделирования теплообмена в турбулентном пограничном слое при безградиентном течении набегающего потока вдоль пластины. Пренебрегая зависимостью теплофизических свойств от температуры, а также диссипацией энергии, уравнение (32) представлено в интегральной форме

$$c\rho \int_0^{\Delta} v_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} dy + c\rho \int_0^{\Delta} v_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} dy = \int_0^{\Delta} \frac{\partial}{\partial y} \left[(\lambda + cA_q) \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] dy \quad (x > 0; 0 < y < \Delta(x)). \quad (33)$$

Краевые условия к уравнению (33) будут

$$\bar{T}(x, 0) = \bar{T}_{ст}; \quad \bar{T}(x, \Delta) = \bar{T}_{cp}; \quad T(0, y) = \bar{T}_{ст}, \quad (34)$$

где $\bar{T}_{ст}$ – температура поверхности пластины; $\bar{T}_{cp}$ – температура невозмущенной жидкости; $\Delta = \Delta(x)$ – толщина теплового пограничного слоя.

На основе использования дополнительных граничных характеристик, в диссертации разработан приближенный метод математического моделирования теплообменных процессов в турбулентном пограничном слое при осредненном по поперечной координате значении коэффициента турбулентного обмена A_q . Для вычисления компоненты скорости v_x использована известная эмпирическая зависимость $v_x = v[y/\delta(x)]^{1/n}$, где v – максимальная скорость набегающего потока; $\delta(x)$ – толщина динамического пограничного слоя; n – показатель степени.

Решение задачи (33), (34) получено для избыточной температуры $T(x, y) = \bar{T}(x, y) - \bar{T}_{ст}$ в виде алгебраического полинома. Например, в первом приближении искомая функция температуры имеет вид

$$T(x, y) = \frac{3}{2} \frac{y}{\Delta(x)} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\Delta(x)} \right)^3; \quad \Delta(x) = K(n) x \text{Re}_x^{\frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(2n+1)}} \text{Pr}^{\frac{n}{2n+1}}, \quad (35)$$

где $K(n)$ – коэффициент, зависящий от показателя степени n ; $\text{Re}_x = vx/\mu$.

В диссертации впервые получена зависимость функции $\Delta(x)$ от выбранного профиля скорости (показателя степени n), позволяющая исследовать температурные поля в турбулентном пограничном слое при больших значениях числа Re ($\text{Re} > 10^5$).

На основе полученных решений сформулированы критериальные уравнения конвективного теплообмена, используемые в дальнейшем при определении тепловых потерь в сложных трубопроводных системах. Например, в первом приближении зависимость Nu_x будет

$$\text{Nu}_x = \frac{3}{2} K(n)^{-1} \text{Re}_x^{\frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(2n+1)}} \text{Pr}^{\frac{n}{2n+1}},$$

где Nu_x – число Нуссельта; Pr – число Прандтля.

В четвертой главе, используя единую методологию моделирования процессов переноса на основе модифицированных форм законов сохранения, разработаны и детально исследованы математические модели колебаний упругих тел, жидкостей и газов. В частности, разработана математическая модель продольных колебаний

упругого стержня. При выводе дифференциального уравнения, описывающего указанный процесс, в диссертации использован модифицированный закон Ньютона

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{k_c}{V} \frac{\partial U}{\partial t},$$

в котором учтено запаздывание во времени как нормального напряжения σ , так и функции перемещения U , имеющий вид

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(U + \sum_{k=1}^N \tau_k \frac{\partial^k U}{\partial t^k} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma + \sum_{k=1}^N r_k \frac{\partial^k \sigma}{\partial t^k} \right) - \frac{k_c}{V} \frac{\partial}{\partial t} \left(U + \sum_{k=1}^N \tau_k \frac{\partial^k U}{\partial t^k} \right), \quad (36)$$

где x – координата; t – время; τ_k , r_k – коэффициенты релаксации; k – коэффициент затухания; V – объем.

Подставляя в (36) формулу закона Гука $\sigma = E \partial U / \partial x$, получаем уравнение колебаний стержня, учитывающее запаздывание напряжения и перемещения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(U + \sum_{k=1}^N \tau_k \frac{\partial^k U}{\partial t^k} \right) = e^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \sum_{k=1}^N r_k \frac{\partial^{k+1} U}{\partial x \partial t^k} \right) - \eta \frac{\partial}{\partial t} \left(U + \sum_{k=1}^N \tau_k \frac{\partial^k U}{\partial t^k} \right),$$

где $\eta = k_c / (\rho V)$ – коэффициент сопротивления среды; $e = \sqrt{E / \rho}$ – скорость распространения продольного возмущения; E – модуль упругости; ρ – плотность.

В диссертации впервые выполнен анализ влияния многократной релаксации ($N = 2$) искомой функции перемещения U и нормального напряжения σ на колебательный процесс. Безразмерная математическая постановка задачи о колебаниях упругого стержня, один из концов которого закреплен, а второй – свободно перемещается, будет

$$Fo_2^2 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial Fo^4} + (Fo_1 + Fo_2^2 \gamma) \frac{\partial^3 \Theta}{\partial Fo^3} + (1 + Fo_1 \gamma) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} + \gamma \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + R_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo} + R_2 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo^2} \quad (37)$$

$$(Fo > 0; 0 < \xi < 1); \quad \Theta(1, Fo) = 0; \quad \partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi = 0; \quad (38)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1 - \xi; \quad \frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, 0)}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^3 \Theta(\xi, 0)}{\partial Fo^3} = 0, \quad (39)$$

где $\Theta = U / U_0$, $Fo = et / l$, $\xi = x / l$ – безразмерные перемещение, время, координата; U_0 – начальное перемещение; l – длина стержня; $Fo_k = e \tau_k / l$; $R_k = e r_k / l$ – безразмерные коэффициенты релаксации; $\gamma = \eta l / e$ – безразмерный коэффициент сопротивления среды.

Используя метод Фурье, в диссертации получено решение задачи (37) – (39) в виде бесконечного тригонометрического ряда

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^4 C_{jm} e^{z_{jm} Fo} \right] \psi_m = \sum_{m=1}^{\infty} (C_{1m} e^{z_{1m} Fo} + C_{2m} e^{z_{2m} Fo} + C_{3m} e^{z_{3m} Fo} + C_{4m} e^{z_{4m} Fo}) \psi_m,$$

где $\psi_m = \cos[(2m-1)\pi\xi/2]$ – координатная функция; $C_{jm} (j=\overline{1,4})$ – константы интегрирования, определяемые из условий (39); $z_{jm} (j=\overline{1,4})$ – корни характеристического уравнения.

На рис. 9 представлены результаты расчетов перемещений в точке $\xi = 0,4$. Показано, что учет релаксационных слагаемых в уравнении движения приводит к сглаживанию профиля волны, устраняя скачки искомой функции. Причем, влияние на колебательный процесс оказывают и производные высокого порядка (при достаточно больших значениях коэффициентов релаксации) (рис. 9, 10).

С целью подтверждения теоретических результатов были выполнены экспериментальные исследования продольных колебаний стального стержня (сталь

30ХГСА), закрепленного на одном из торцов. Исследования производились на специализированной установке, включающей стенд для создания начальных удлинений и индуктивный датчик перемещений, фиксирующий продольные колебания свободного торца стержня. Результаты исследований приведены на рис. 11 – 14.

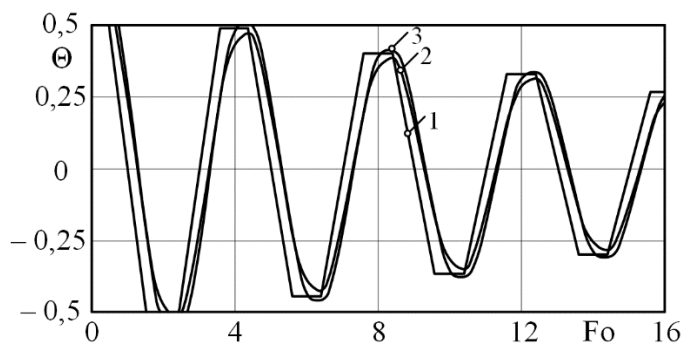


Рис. 9. Колебания стержня во времени ($\gamma = 0,1$):
1 – $Fo_k = R_k = 0$ ($k = 1, 2$); 2 – $Fo_1 = R_1 = 0,3$,
 $Fo_2 = R_2 = 0$; 3 – $Fo_1 = R_1 = 0,3$, $Fo_2 = R_2 = 0,2$

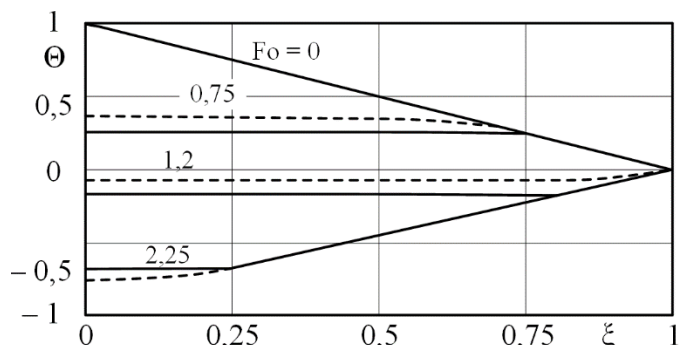


Рис. 10. Распределение перемещений по координате ($\gamma = 0,1$): сплошная линия – без релаксации; штриховая линия – с релаксацией ($Fo_1 = R_1 = 0,3$, $Fo_2 = R_2 = 0,2$)

Из анализа полученных результатов следует, что на различных временных участках колебательные процессы существенно отличаются. И, в частности, в первой стадии процесса происходит экспоненциальное уменьшение амплитуды колебаний ($0 < Fo \leq Fo^*$), во второй – линейное ($Fo > Fo^*$). Для исследуемого образца из эксперимента было установлено, что $Fo^* \approx 100$.

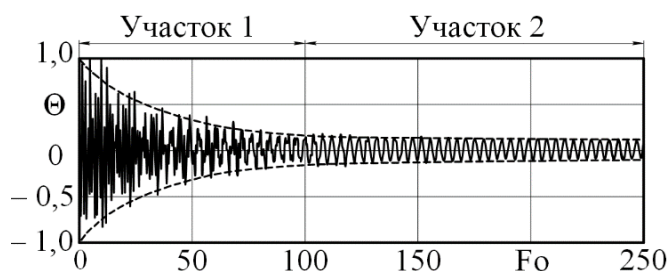


Рис. 11. Колебания торца стержня (эксперимент)

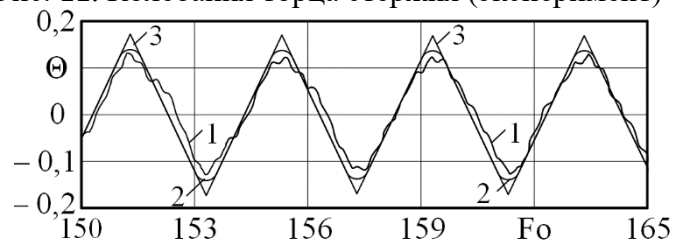


Рис. 13. Колебания стержня: 1 – эксперимент; 2 –
 $Fo_1 = R_1 = 0,5$; 3 – $Fo_1 = R_1 = 0$

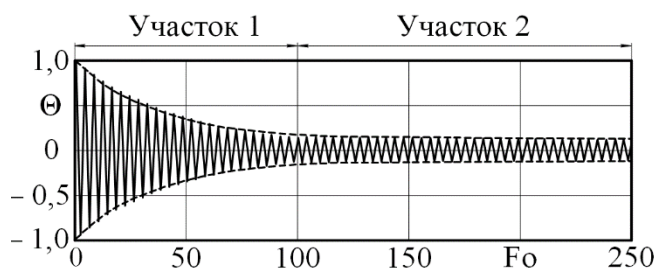


Рис. 12. Колебания торца стержня (расчет)

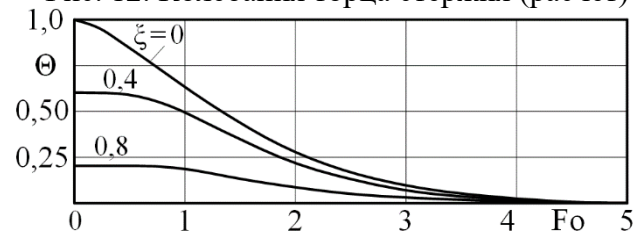


Рис. 14. Критическое затухание колебаний
($Fo_1 = R_1 = 0,5$; $\gamma = 3$)

В диссертации было получено численное решение уравнения (37) для двух стадий процесса, в предположении, что коэффициенты сопротивления для них различны ($\gamma_1 \neq \gamma_2$). Причем при получении решения во второй стадии процесса, в качестве начальных условий использовалось распределение функции перемещения в завершении первой стадии (с четырех последних временных слоев). Из решения обратной задачи были определены такие значения γ_1, γ_2 , при которых результаты расчетов практически совпадают с экспериментальными данными (см. рис. 12). Безразмерные коэффициенты сопротивления оказались равными $\gamma_1 = 0,03$ и $\gamma_2 = 0,003$ для первого и второго

временного участка соответственно.

На рис. 13 показано, что учет коэффициентов релаксации приводит к более высокой амплитуде колебаний по сравнению с экспериментальными данными при практически совпадающей частоте колебаний. Учет коэффициентов релаксации приводит к удовлетворительному совпадению результатов теоретических и экспериментальных исследований. Отмечается также, что при больших значениях коэффициентов сопротивления среды ($\gamma \geq 3$) может наблюдаться критическое затухание процесса (см. рис. 14) – возврат стержня в невозмущенное состояние происходит без колебаний (функция перемещения Θ монотонно убывает).

В пункте 4.4 диссертации приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований поперечных колебаний стержня. Математическая постановка задачи с учетом релаксационных свойств материала имеет вид

$$Fo_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial Fo^3} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} + \frac{\partial^4 \Theta}{\partial \xi^4} + \gamma \frac{\partial^5 \Theta}{\partial \xi^4 \partial Fo} = 0 \quad (Fo > 0; 0 < \xi < 1); \quad (40)$$

$$\Theta(\xi, 0) = \xi^2; \quad (41) \quad \frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial Fo} = 0; \quad (42) \quad \frac{\partial^2 \Theta(\xi, 0)}{\partial Fo^2} = 0, \quad (43)$$

$$\Theta(0, Fo) = 0; \quad (44) \quad \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^3} = 0, \quad (45)$$

где $\Theta = U/U_0$, $Fo = at/l^2$, $\xi = x/l$, $Fo_1 = a\tau_1/l^2$, $\gamma = a\eta/l^2$ – безразмерные поперечное перемещение, время, координата, коэффициенты релаксации и сопротивления; $a = \sqrt{EI/\mu}$; E – модуль упругости; I – момент инерции поперечного сечения относительно горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости колебаний; $\mu = \rho S$ – масса единицы длины стержня; ρ – плотность; S – площадь поперечного сечения; U – перемещение; $U_0 = bl^2$ – начальное перемещение свободного торца стержня; x – продольная координата; l – длина стержня; τ_1, η – коэффициенты релаксации и сопротивления.

В диссертации получено и детально исследовано аналитическое решение задачи (40) – (45), полученное в форме бесконечного тригонометрического ряда

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^3 C_{jm} e^{z_{jm} Fo} \psi_m \right] = \sum_{m=1}^{\infty} (C_{1m} e^{z_{1m} Fo} + C_{2m} e^{z_{2m} Fo} + C_{3m} e^{z_{3m} Fo}) \psi_m, \quad (46)$$

$\psi_m = \cosh(\mu_m \xi) - \cos(\mu_m \xi) + B_m [\sinh(\mu_m \xi) - \sin(\mu_m \xi)]$ – координатная функция; $\mu_m = \sqrt[4]{v_m}$; v_m – собственные числа; B_m – коэффициенты, определяемые из граничных условий (44), (45); C_{jm} ($j = \overline{1,3}$) – константы интегрирования, определяемые из условий (41) – (43); z_{jm} ($j = \overline{1,3}$) – корни характеристического уравнения.

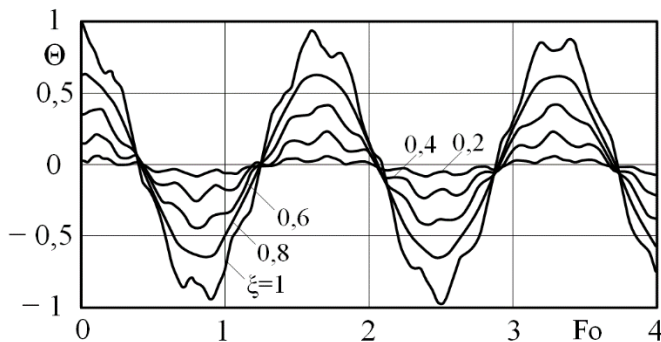


Рис. 15. Колебания стержня во времени:
 $Fo_1 = \gamma = 0$

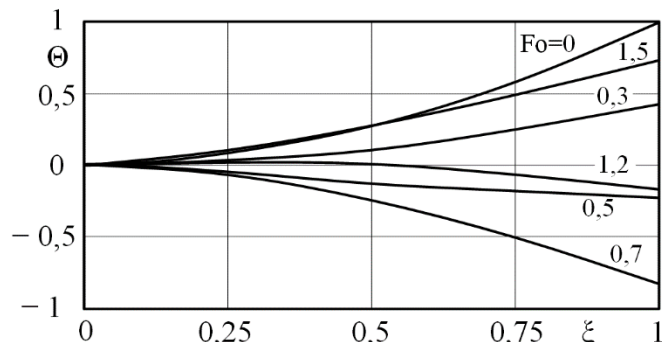


Рис. 16. Колебания стержня во времени:
 $Fo_1 = \gamma = 0,1$

Результаты расчетов по формуле (46) приведены на рис. 15, 16. Из их анализа следует, что в каждой точке стержня с течением времени совершаются колебания с различными частотами и амплитудами. При этом колебания с большой частотой совершаются при малых амплитудах, с малой частотой – при больших. Максимальная частота колебаний наблюдается в окрестности точки закрепления стержня. Отмечается, что учет релаксационных явлений приводит к сглаживанию скачков искомой функции.

В п. 4.5 диссертации приведены результаты экспериментальных исследований поперечных колебаний стержня, выполненных на специальном оборудовании АО «РКЦ «Прогресс». Для измерения перемещений использовались лазерные датчики перемещения «Призма» модели LS5-20/2, LS5-10/10, LS5-50/100. Принципиальная схема их подключения представлена на рис. 17.

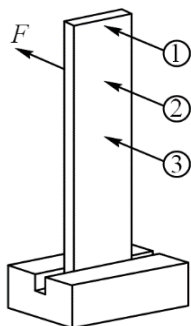


Рис. 17. Принципиальная схема измерений:
1, 2, 3 – датчики перемещения LS5-20/2, LS5-10/10, LS5-50/100 соответственно

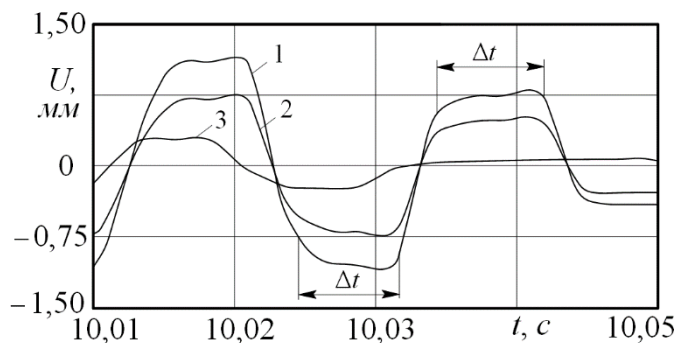


Рис. 18. Перемещение различных точек стержня во времени: 1, 2, 3 – показания датчиков LS5-20/2, LS5-10/10, LS5-50/100 соответственно

Сбор данных и регистрация сигналов датчиков перемещения осуществлялся посредством цифрового интерфейса ввода – вывода между измерительным усилителем Quantum X MX 840 и персональным компьютером.

Результаты экспериментальных исследований поперечных колебаний стержня, приведены на рис. 18. Интересной особенностью колебаний является наличие временной задержки стержня в крайних положениях. При этом в течение некоторого промежутка времени Δt функция U практически не изменяется (см. рис. 18). Данный факт подтверждается и теоретически.

В четвертой главе диссертации приведены результаты исследований колебаний сжимаемых жидкостей (газов) под действием внешней гармонической нагрузки. Постановка задачи имеет вид

$$Fo_1 \frac{\partial^3 \psi}{\partial Fo^3} + (1 + \gamma Fo_1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial Fo^2} + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + R_1 \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^2 \partial Fo} \quad (Fo > 0; 0 < \eta < 1); \quad (47)$$

$$\psi(\eta, 0) = 1; \quad \frac{\partial \psi(\eta, 0)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \psi(\eta, 0)}{\partial Fo^2} = 0; \quad \frac{\partial \psi(0, Fo)}{\partial \eta} = A \sin(\nu Fo); \quad \psi(1, Fo) = 0, \quad (48)$$

где ψ – безразмерное перемещение; Fo_1, R_1 – безразмерные коэффициенты релаксации; γ – безразмерный коэффициент сопротивления среды; A, ν – коэффициенты, характеризующие соответственно амплитуду и частоту колебаний внешней нагрузки.

Уравнение (47) получено на основе соотношения, связывающего изменение избыточного давления и деформацию (аналог закона Гука).

Для получения численного решения краевой задачи (47) – (48) в рассматриваемой области на основе метода конечных разностей вводилась пространственно – временная сетка с шагами $\Delta \eta = 0,005$, $\Delta Fo = 0,005$ соответственно по переменным η и Fo так, что

$$\eta_k = k \Delta \eta, \quad k = \overline{0, K}; \quad Fo_i = i \Delta Fo, \quad i = \overline{0, I}, \quad (49)$$

где K, I – число шагов по координатам η, Fo .

На сетке (49) вводились сеточные функции $\psi_k^i = \psi(\eta_k, Fo_i)$. Используя принятую схему аппроксимации дифференциальных операторов, задача (47) – (48) будет

$$\begin{aligned} Fo_1 \frac{\psi_k^{i+1} - 3\psi_k^i + 3\psi_k^{i-1} - \psi_k^{i-2}}{\Delta Fo^3} + (1 + \gamma Fo_1) \frac{\psi_k^{i-1} - 2\psi_k^i + \psi_k^{i+1}}{\Delta Fo^2} + \gamma \frac{\psi_k^{i+1} - \psi_k^i}{\Delta Fo} = \\ = \frac{\psi_{k-1}^i - 2\psi_k^i + \psi_{k+1}^i}{\Delta \eta^2} + \frac{R_1}{\Delta Fo} \left(\frac{\psi_{k-1}^i - 2\psi_k^i + \psi_{k+1}^i}{\Delta \eta^2} - \frac{\psi_{k-1}^{i-1} - 2\psi_k^{i-1} + \psi_{k+1}^{i-1}}{\Delta \eta^2} \right); \\ \psi_k^0 = 1; \quad \frac{\psi_k^1 - \psi_k^0}{\Delta Fo} = \frac{\psi_k^0 - 2\psi_k^1 + \psi_k^2}{\Delta \eta} = 0; \quad \frac{\psi_1^i - \psi_0^i}{\Delta \eta} = A \sin(v Fo_i); \quad \psi_K^i = 0. \end{aligned}$$

Результаты численного решения задачи приведены на рис. 19, 20. Показано, что в зависимости от частоты внешней нагрузки, коэффициентов релаксации и сопротивления могут наблюдаться два варианта резонансных колебаний – бифуркационный резонанс (биения), при котором амплитуда колебаний возрастает периодически (рис. 19) и резонанс, сопровождающийся неограниченным возрастанием амплитуды во времени (рис. 20). Отмечается, что биения наблюдаются при частотах внешней нагрузки близких к резонансным, но не достигающих их.

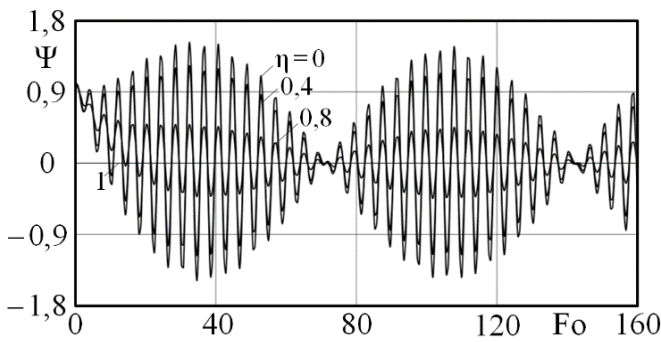


Рис. 19. Бифуркационные колебания газа ($Fo_1 = R_1 = 10$; $\gamma = 0,3$; $v = 1,575$; $A = 0,1$)

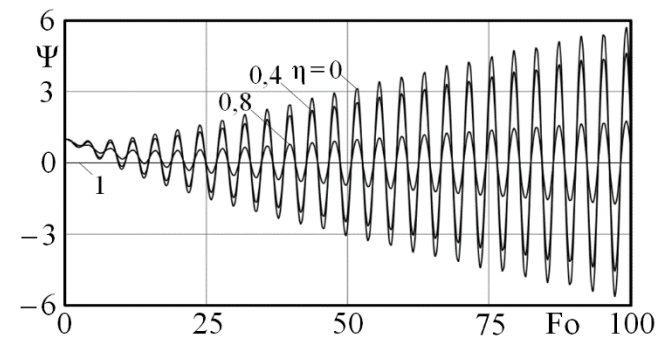


Рис. 20. Резонансные колебания газа во времени ($Fo_1 = R_1 = 10$; $\gamma = 0,3$; $v = 1,5$; $A = 0,1$)

В пятой главе приведены результаты разработки метода математического моделирования электромагнитных волн, описываемых телеграфным уравнением. Известно, что аналитические решения классических телеграфных уравнений приводят к скачкам искомых функций (напряжения или тока). Следовательно, эти уравнения описывают мгновенные их изменения, что эквивалентно передаче электрических потенциалов с бесконечной скоростью. В литературных источниках, где даются выводы телеграфных уравнений, отсутствует анализ причин скачкообразного изменения искомых функций, получаемых из их точных аналитических решений.

Распространение электрического тока в проводнике с распределенными параметрами характеризуется силой тока I и напряжением U , являющимися функциями положения точки x по длине проводника l и времени t . На основе закона Ома выводится следующая система дифференциальных уравнений:

$$I + \frac{L}{R} \frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial x}; \quad (50)$$

$$U + \frac{C}{G} \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{G} \frac{\partial I}{\partial x}, \quad (51)$$

где U – напряжение; x – координата; I – сила тока; R – активное сопротивление; t – время; L – коэффициент самоиндукции; C – емкость; G – проводимость изоляции; R, C, L, G – рассчитаны на единицу длины линии.

Уравнения (50), (51) могут быть сведены к двум независимым выражениям

относительно функций I и U . Например, для напряжения U такое уравнение будет

$$LC \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial U}{\partial t} + RGU = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (52)$$

или в безразмерном виде

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} + F_1 \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} + F_2 \Theta = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} \quad (Fo > 0; 0 < \xi < 1), \quad (53)$$

где $\Theta = U/U_0$; $Fo = at/l$; $\xi = x/l$; Θ , Fo , ξ – соответственно, безразмерные напряжение, время, координата; $a = 1/\sqrt{LC}$ – скорость распространения электрических колебаний; $F_1 = al(RC + LG)$, $F_2 = l^2 RG$ – безразмерные коэффициенты.

В диссертационной работе представлены результаты решения уравнения (53) для линии с равномерно распределенными параметрами, заряженной до потенциала U_0 . Один конец проводника ($\xi = 0$) изолирован, а второй ($\xi = 1$) – заземлен. Краевые условия для данной задачи записываются в виде

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (54) \quad \partial \Theta(\xi, 0) / \partial Fo = 0; \quad (55)$$

$$\partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi = 0; \quad (56) \quad \Theta(1, Fo) = 0. \quad (57)$$

Из анализа результатов решения задачи (53) – (57) (рис. 21, 22) видно, что в прямой волне напряжение скачкообразно изменяется от нулевого значения, заданного граничным условием первого рода (57), до значения равного единице, заданного начальным условием (54). Следовательно, на фронте волны производная от напряжения по пространственной переменной $\partial U / \partial x$ равна бесконечной величине.

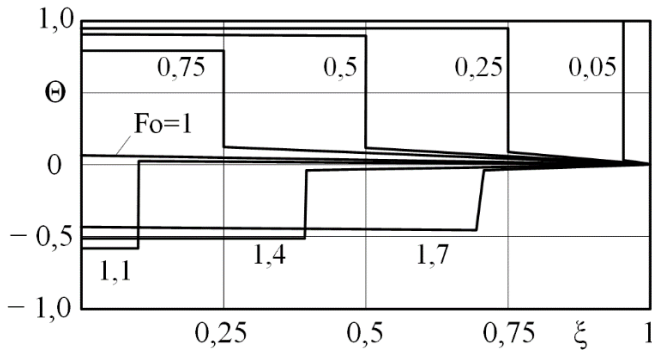


Рис. 21. Изменение напряжения по длине проводника ($F_1 = F_2 = 0,1$)

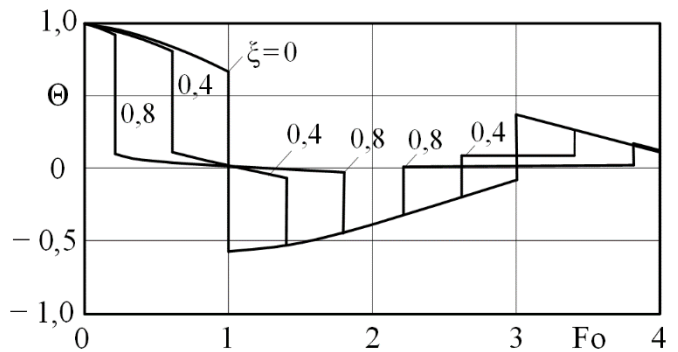


Рис. 22. Изменение напряжения во времени ($F_1 = F_2 = 0,1$)

С целью устранения скачкообразного изменения искомых функций в соотношениях (50), (51) выполнена релаксация как силы тока и напряжения, так и их градиентов:

$$I + \sum_{k=1}^N \tau_k \frac{\partial^k I}{\partial t^k} + \frac{L}{R} \frac{\partial}{\partial t} \left(I + \sum_{k=1}^N \tau_k \frac{\partial^k I}{\partial t^k} \right) = -\frac{1}{R} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \sum_{k=1}^N r_k \frac{\partial^{k+1} U}{\partial x \partial t^k} \right); \quad (58)$$

$$U + \sum_{k=1}^N \tau'_k \frac{\partial^k U}{\partial t^k} + \frac{C}{G} \frac{\partial}{\partial t} \left(U + \sum_{k=1}^N \tau'_k \frac{\partial^k U}{\partial t^k} \right) = -\frac{1}{G} \left(\frac{\partial I}{\partial x} + \sum_{k=1}^N r'_k \frac{\partial^{k+1} I}{\partial x \partial t^k} \right), \quad (59)$$

где τ_k , τ'_k , r_k , r'_k – коэффициенты релаксации. В выражениях (58), (59) показатели степени коэффициентов релаксации опущены.

На основе соотношений (58), (59) в диссертационной работе получено модифицированное телеграфное уравнение с учетом однократной ($N=1$) релаксации силы тока, напряжения и их градиентов. Выполнены комплексные исследования полученного уравнения при различных значениях коэффициентов релаксации. В случае их равенства (τ_1), модифицированное телеграфное уравнение принимает вид

$$\tau_1 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + [LC + \tau_1(RC + LG)] \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (RC + LG + \tau_1 RG) \frac{\partial U}{\partial t} + RGU = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \tau_1 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}. \quad (60)$$

Аналогичное уравнение можно записать и для функции I . Если положить $\tau_1 = 0$, модифицированное телеграфное уравнение приводится к классическому (52).

Найдем решение предыдущей задачи для уравнения (60). Математическая постановка задачи с учетом принятых выше обозначений для функций Θ , ξ , F_0 будет

$$F_{01} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial F_0^3} + (1 + F_{01} F_1) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial F_0^2} + (F_1 + F_{01} F_2) \frac{\partial \Theta}{\partial F_0} + F_2 \Theta = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + F_{01} \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial F_0} \quad (F_0 > 0; 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad \partial \Theta(\xi, 0) / \partial F_0 = 0; \quad \partial^2 \Theta(\xi, 0) / \partial F_0^2 = 0; \quad \partial \Theta(0, F_0) / \partial \xi = 0; \quad \Theta(1, F_0) = 0,$$

где $F_{01} = a\tau_1 / l$ – безразмерный коэффициент релаксации.

В диссертации получено аналитическое решение задачи в виде

$$\Theta(\xi, F_0) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^3 C_{jm} e^{z_{jm} F_0} \psi_m \right] = \sum_{m=1}^{\infty} (C_{1m} e^{z_{1m} F_0} + C_{2m} e^{z_{2m} F_0} + C_{3m} e^{z_{3m} F_0}) \psi_m, \quad (61)$$

$\psi_m = \cos[(2m-1)\pi\xi/2]$ – координатная функция; $C_{jm} (j=\overline{1,3})$ – константы интегрирования; $z_{jm} (j=\overline{1,3})$ – корни характеристического уравнения.

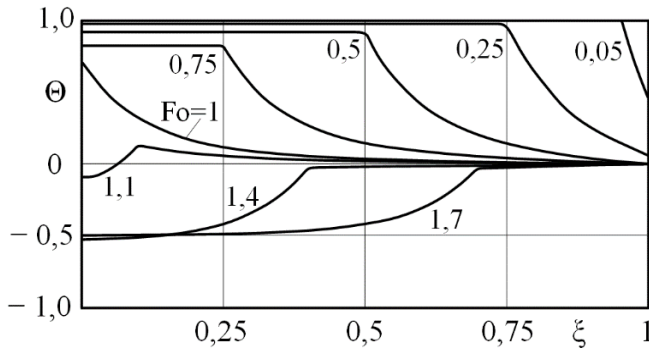


Рис. 23. Изменение напряжения по длине проводника ($F_1 = F_2 = F_{01} = 0,1$)

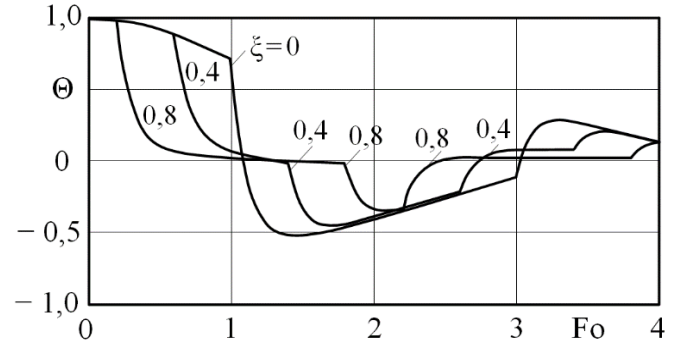


Рис. 24. Изменение напряжения во времени ($F_1 = F_2 = F_{01} = 0,1$)

Результаты расчетов по формуле (61) даны на рис. 23, 24 ($m = \overline{1, 1000}$). Из их анализа видно, что учет релаксационных слагаемых в формулах закона Ома позволяет устранить скачкообразное изменение искомой функции. Кроме того, обнаруживается, что граничное условие первого рода, заданное в точке $\xi = 1$, не может быть принято мгновенно – его установление происходит в течение некоторого отрезка времени $0 \leq F_0 \leq 0,5$ (рис. 23). Установленный расчетным путем факт задержки принятия граничного условия первого рода свидетельствует о невозможности мгновенного изменения напряжения в точке $\xi = 1$ ввиду оказываемого средой сопротивления процессу изменения ее потенциала.

В пятой главе диссертации приведены также результаты исследования плотности электронов в плазме на основе аналитического решения релятивистского уравнения Клейна – Гордона – Фока. От числа электронов в плазме зависит ее теплопроводность и электропроводность. Известно, что плазма, в зависимости от плотности электронов, является рассеивающей средой для электромагнитных волн. Используя решение уравнения распространения электромагнитных волн, можно определить плазменную частоту, дебаевский радиус и временной масштаб декомпенсации плазмы. Без учета магнитного поля уравнение распространения электромагнитных волн в плазме совпадает с релятивистским уравнением Клейна – Гордона – Фока. Для волны, в которой составляющая напряженности поля E_y распространяется в канале шириной δ

вдоль оси x , математическая постановка задачи будет

$$\frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^2} + Fo_r \Theta(\xi, Fo) = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \quad (Fo > 0; 0 < \xi < 1); \quad (62)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad \partial \Theta(\xi, Fo) / \partial Fo = 0; \quad \Theta(0, Fo) = \Theta(1, Fo) = 0, \quad (63)$$

где $\Theta = E_y / E_0$; $\xi = x / \delta$; $Fo = c\tau / \delta$; $Fo_r = \omega_p^2 \delta^2 / c^2$; Θ , ξ , Fo – безразмерные напряженность электромагнитного поля, координата, время; x – координата; t – время; c – скорость света в вакууме; E_y – напряженность электромагнитного поля; $\omega_p = \sqrt{n_e e^2 / (m_e \epsilon_0)}$ – плазменная частота; n_e – плотность электронов в плазме; m_e – масса электрона; e – заряд электрона; ϵ_0 – электрическая постоянная.

В диссертации получено решение задачи (62), (63) в форме бесконечного ряда

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}(-1)^{m+1}}{r\pi} \cos(\mu_m Fo) \cos[r\pi(1-2\xi)/2] \quad (\mu_m^2 = r^2 \pi^2 + Fo_r; r = 2m-1). \quad (64)$$

Результаты расчетов по формуле (64) для $Fo_r = 75000$ даны на рис. 25. Из их анализа видно, что в диапазоне времени $0 < Fo < 5$ происходит формирование профиля электромагнитной волны.

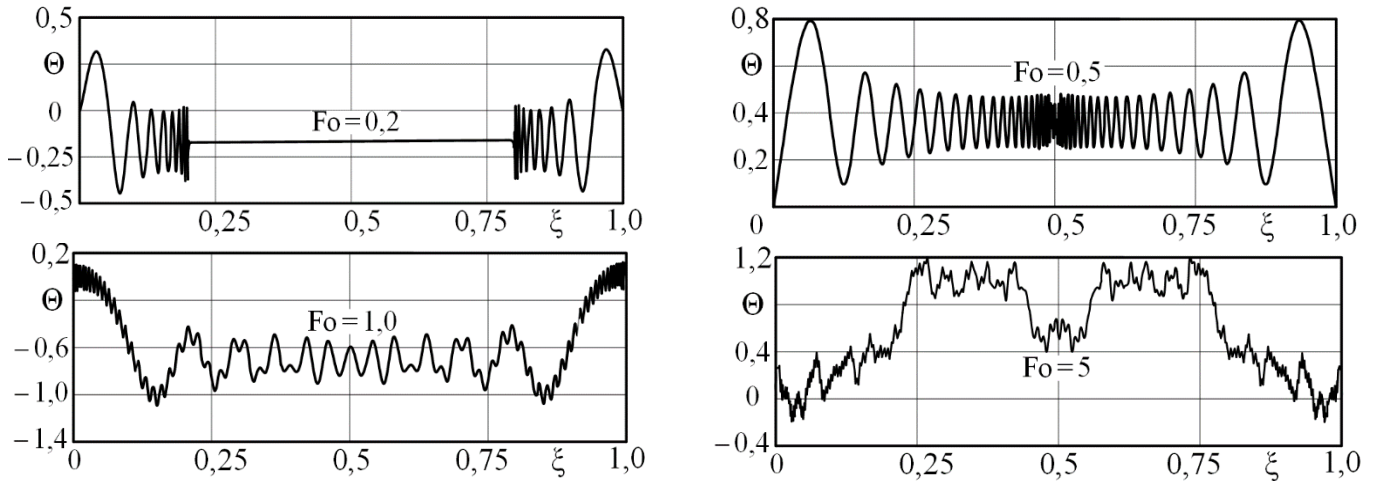


Рис. 25. Распределение функции Θ по координате ($Fo_r = 75000$)

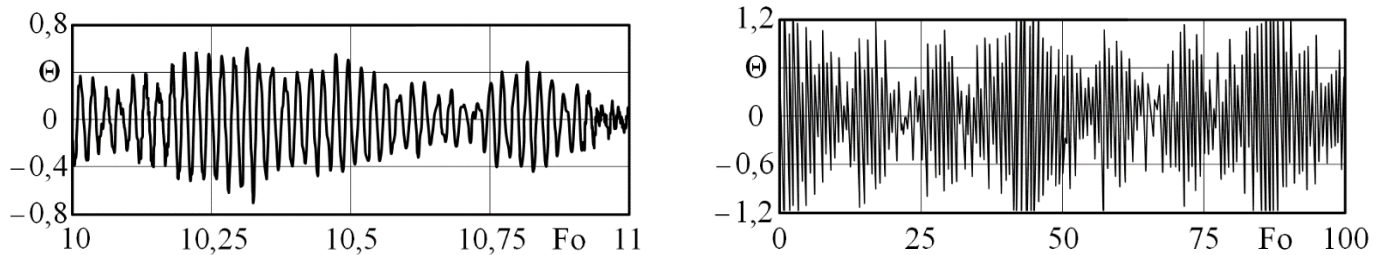


Рис. 26. Изменение функции Θ во времени в точке $\xi = 0,1$ ($Fo_r = 75000$)

Анализ распределения волновой функции показывает, что плазма при прохождении электромагнитных волн представляет дисперсионную среду, то есть фазовая скорость зависит от длины волны (частоты колебаний). При $Fo_r > 75000$ качественная картина формирования профиля волновой функции изменяется незначительно. На рис. 26 даны результаты расчетов для $\xi = 0,1$ в диапазоне $10 \leq Fo \leq 11$ и $0 \leq Fo \leq 100$.

На рис. 27 приведены результаты расчетов электромагнитных колебаний по формуле (64) для трех точек пространственной переменной: $\xi = 0,1; 0,3; 0,5$ в малых диапазонах числа Фурье. Их анализ позволяет заключить, что колебания в различных точках канала имеют одинаковую частоту, что свидетельствует о самосогласованности

(взаимосвязанности) колебаний во всем объеме плазмы. В то же время колебания в различных точках имеют различную амплитуду, которая в каждой точке с течением времени может уменьшаться или возрастать. Причем, изменение амплитуды во времени в различных точках происходит несогласованно – увеличение во времени амплитуды колебаний в какой – то одной точке может сопровождаться ее уменьшением в другой.

На рис. 28 приведены результаты расчетов по формуле (64) для диапазона $0,5 \leq \xi \leq 0,54$ при $Fo = 5,5$. Из их анализа видно, что колебания в каждой точке канала происходят с различными частотами и амплитудой.

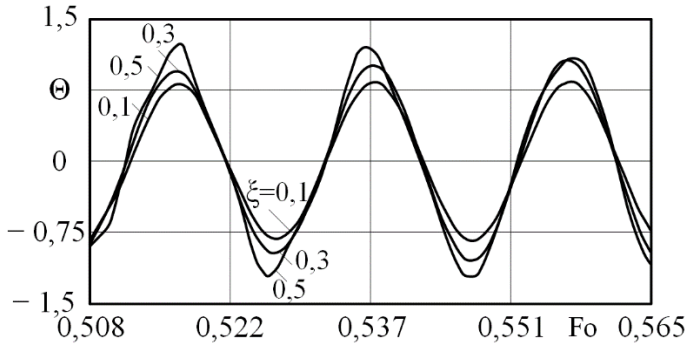


Рис. 27. Изменение функции Θ во времени
($Fo_r = 10^5$)

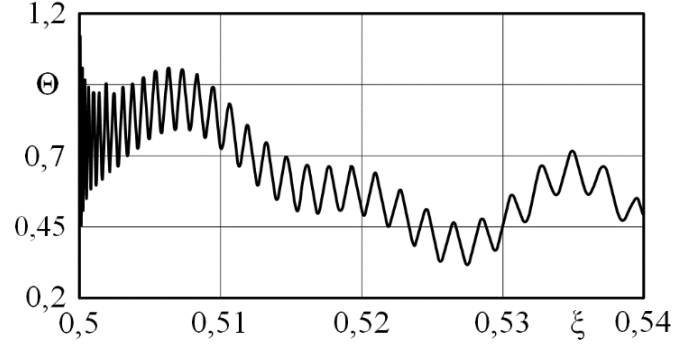


Рис. 28. Распределение функции Θ по координате
($Fo = 5,5$; $Fo_r = 10^5$)

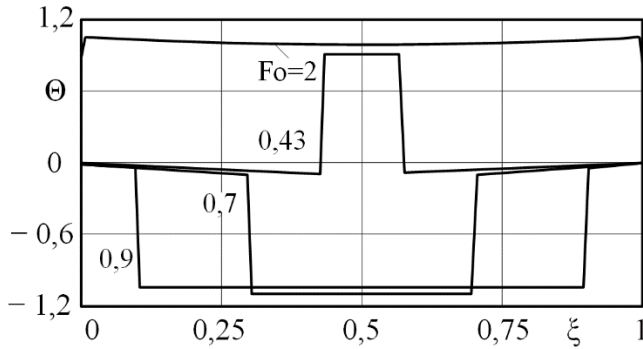


Рис. 29. Распределение волновой функции по координате: $Fo_r = 1$; $Fo_1 = 0$

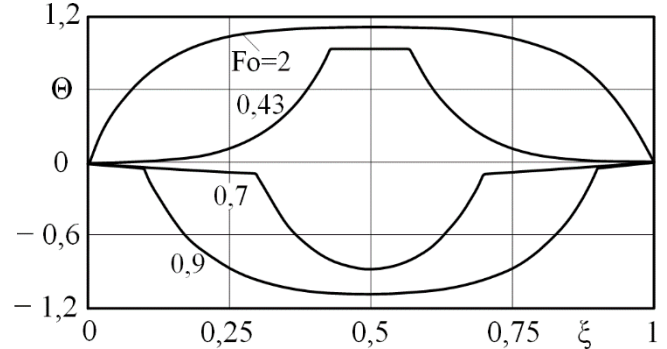


Рис. 30. Распределение волновой функции по координате: $Fo_r = 1$; $Fo_1 = 0,1$

Решение (64) допускает скачкообразное изменение волновой функции Θ , что не может быть реализовано в реальных физических процессах колебаний. В связи с этим, на основе разработанной в диссертации методологии, сформулировано модифицированное уравнение Клейна – Гордона – Фока вида:

$$Fo_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial Fo^3} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} + Fo_r \Theta = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + Fo_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo}, \quad (65)$$

где $Fo_1 = \tau_1 c / \delta$ – безразмерный коэффициент релаксации; τ_1 – время релаксации (временной масштаб декомпенсации плазмы).

Начальные и граничные условия к уравнению (65) следующие:

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad \partial \Theta(\xi, 0) / \partial Fo = 0; \quad \partial^2 \Theta(\xi, 0) / \partial Fo^2 = 0; \quad \Theta(0, Fo) = \Theta(1, Fo) = 0. \quad (66)$$

В диссертации получено решение задачи (65), (66) в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^3 C_{jm} e^{z_{jm} Fo} \psi_m \right] = \sum_{m=1}^{\infty} (C_{1m} e^{z_{1m} Fo} + C_{2m} e^{z_{2m} Fo} + C_{3m} e^{z_{3m} Fo}) \psi_m, \quad (67)$$

$\psi_m = \cos[r\pi(1 - 2\xi)/2]$ – координатная функция; C_{jm} ($j = \overline{1,3}$) – константы интегрирования; z_{jm} ($j = \overline{1,3}$) – корни характеристического уравнения.

Результаты расчетов по формуле (67) даны на рис. 29, 30. Из их анализа видно, что

при неучете релаксационных слагаемых ($Fo_1 = 0$) наблюдается скачкообразное изменение искомой функции Θ (рис. 27). При ($Fo_1 \neq 0$) скачки сглаживаются (рис. 28), что связано с наличием смешанной производной в уравнении (65).

В шестой главе приводится комплекс программ для компьютерных моделей трубопроводных систем различного назначения. При их построении были использованы найденные в диссертации решения задач для динамического и теплового пограничного слоя. На их основе были определены коэффициенты трения и коэффициенты теплоотдачи на внутренних поверхностях трубопроводов. При выполнении гидравлических расчетов, применялась автоматизированная идентификация параметров модели – итеративный процесс определения гидравлического сопротивления участков, на основе фактических (определяемых экспериментально) данных о гидравлическом режиме сети.

Применение разработанных алгоритмов рассмотрено на примере конкретных трубопроводных систем. В частности, выполнено построение объединенной компьютерной модели тепловых сетей Привокзальной отопительной котельной (ПОК) и Самарской ГРЭС (СГРЭС), входящих в систему централизованного теплоснабжения г. Самара (рис. 31). Из анализа полученных результатов сделан вывод о том, что передача нагрузки от второго вывода теплосети ПОК в количестве $800 \text{ м}^3/\text{ч}$ на первый вывод

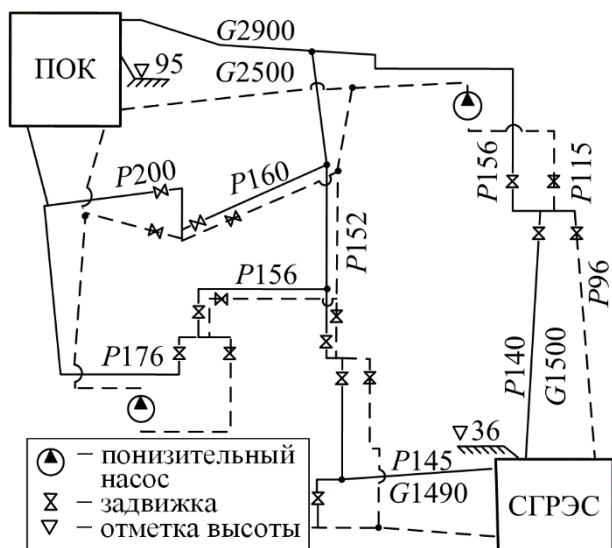


Рис. 31. Распределение давлений в тепловой сети от ПОК и СГРЭС: P – давление, м. вод. ст. ; G – расход, $\text{м}^3/\text{ч}$

теплосети СГРЭС позволяет поднять располагаемый перепад давлений на втором выводе ПОК до 35 м вод. ст.

В седьмой главе приведены алгоритмы и комплексы программ, реализующие разработанные в диссертации методы математического моделирования процессов переноса теплоты, массы, импульса с учетом релаксационных явлений.

В диссертации представлены результаты разработки вычислительного алгоритма, написанного на языке программирования APDL (ANSYS Parametric Design Language). Разработанный алгоритм позволил впервые исследовать температурные поля в телах сложной (произвольной) геометрической формы с учетом инерционности процесса переноса теплоты. Использование встроенных функций ANSYS для построения геометрической модели исследуемого объекта, нанесения расчетной сетки, решения систем уравнений позволяет выполнять расчеты температурных полей в телах произвольной формы, при граничных условиях различного вида. Разработанный алгоритм адаптирован для использования в ANSYS Workbench 2019 R2 и устанавливается с помощью стандартного менеджера расширений ANSYS ACT (Application Customization Toolkit).

В седьмой главе диссертации представлены также результаты разработки программы для ЭВМ, реализующей алгоритм решения задачи теплопроводности в двуслойной пластине (см. п. 2.7) методом конечных разностей. Реализация алгоритма выполнена в системе компьютерной алгебры MathCAD 15, позволяющей выполнять автоматизацию расчетов, а также предоставляющей широкий набор инструментов для

их анализа и обработки. Разработанный алгоритм позволяет в автоматическом режиме выполнять дискретизацию исследуемой области в зависимости от пределов изменения пространственной переменной и пространственного шага. Исследования локально – неравновесного процесса переноса теплоты в двуслойной конструкции осуществлялись с малым временным шагом $\Delta t_0 \approx 10^{-6}$, что позволило обнаружить скачки температуры в окрестности точки контакта слоев на начальном этапе протекания процесса.

На основе представленного в диссертации метода математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса теплоты, разработан алгоритм реализации численного метода решения задачи о нагреве твердого тела импульсным тепловым потоком высокой мощности (см. п. 2.5). Использование встроенных функций MathCAD позволило полностью автоматизировать вычислительный процесс и организовать вывод результатов расчетов в удобном для пользователя виде (графическом или текстовом).

Основные выводы и результаты работы:

1. Разработана методология математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса на основе модифицированных форм законов сохранения. Используя единый подход, сформулированы и детально исследованы дифференциальные уравнения, описывающие локально – неравновесные процессы теплопроводности, конвективного теплообмена в движущихся жидкостях, взаимосвязанного тепломассопереноса, электромагнитные колебания, а также колебания упругих тел, жидкостей и газов.

2. На основе предложенной методологии разработаны и детально исследованы математические модели локально – неравновесных процессов тепломассопереноса, имеющих большое прикладное значение (высокоинтенсивный нагрев потоком лазерного излучения, тепловое воспламенение и взрыв, теплоперенос в нанокompозитах др.). В результате комплексных исследований тепловых процессов, протекающих в условиях локальной неравновесности, установлен ряд общих закономерностей. Показано, что учет релаксационных слагаемых в уравнении теплопроводности приводит к уменьшению температурных градиентов внутри исследуемых областей; снижению интенсивности изменения температуры; ограничению величины теплового потока на поверхности тела при тепловом ударе. Сделан также вывод о необходимости учета релаксационных слагаемых высшего порядка при исследовании сильнонеравновесных процессов теплопереноса.

3. Используя единую концепцию математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса, разработана и детально исследована математическая модель теплообмена в ламинарном потоке несжимаемой жидкости с учетом диссипации энергии. В диссертационной работе выполнена многократная релаксация искомой функции температуры, конвективной и диффузионной составляющих теплового потока.

4. Разработан класс приближенных аналитических методов решения краевых задач теплообмена в жидкостях, основанный на использовании новых искомых функций и дополнительных граничных характеристик в интегральном методе теплового баланса. В частности, разработан метод математического моделирования гидродинамики и теплообмена в турбулентном пограничном слое, основанный на определении фронта динамического и температурного возмущения. Определение фронта возмущения означает принятие допущения о конечной скорости распространения теплоты, импульса, несмотря на то, что решению подлежат параболические уравнения движения и энергии. Впервые рассмотрено влияние профиля скорости в динамическом

пограничном слое, на толщину теплового пограничного слоя.

5. На основе разработанной методологии сформулированы и детально исследованы математические модели колебательных процессов (продольных и поперечных колебаний упругих тела, вынужденных колебаний сжимаемых жидкостей), протекающих в условиях локальной неравновесности. С целью проверки адекватности разработанных математических моделей выполнен комплекс экспериментальных исследований продольных и поперечных колебаний упругого стержня. Исследования проводились на специализированных стендах АО «РКЦ «Прогресс». На основе выполненных численных и экспериментальных исследований выполнена параметрическая идентификация разработанных математических моделей. Определены такие значения коэффициентов релаксации и затухания, при которых результаты численных расчетов практически совпадают с экспериментальными данными.

6. Разработан метод математического моделирования электромагнитных колебаний на основе модифицированного телеграфного уравнения. На примере решения задачи о распространении электрического тока в проводнике с распределенными параметрами показано, что учет релаксационных слагаемых в модифицированном телеграфном уравнении позволяет устранить скачкообразное изменение силы тока и напряжения в проводнике.

7. Выполнены комплексные исследования полученного в диссертации аналитического решения уравнения Клейна – Гордона – Фока, описывающего распределение электромагнитных волн в плазме. Показано, что колебания в различных точках плазмы происходят с различной амплитудой при одинаковой частоте, что свидетельствует об их самосогласованности. Используя полученное решение, разработаны рекомендации по определению плотности электронов в плазме путем проведения экспериментально – теоретических исследований. Предложен метод математического моделирования распространения электромагнитных колебаний в плазме на основе модифицированного уравнения Клейна – Гордона – Фока, учитывающего релаксационные явления.

8. Используя полученные в диссертации критериальные уравнения конвективного теплообмена, разработан метод математического моделирования гидравлических и тепловых процессов, протекающих в сложных трубопроводных системах. Благодаря применению метода автоматизированной идентификации, разработанные компьютерные модели трубопроводных систем позволяют определять параметры теплоносителя (температура, давление, расход и др.) с погрешностью не более 5% (в сравнении с результатами натурных измерений).

9. Используя язык программирования APDL, разработан вычислительный модуль для программного комплекса ANSYS, позволяющий при решении задач теплопроводности использовать не диффузионную модель переноса, а модель двухфазного запаздывания (DPL – модель). Совместное использование встроенных функций ANSYS (построения геометрической модели, нанесения расчетной сетки, решения систем уравнений) и разработанного алгоритма, позволило исследовать локально – неравновесные процессы переноса тепла в телах произвольной геометрической формы.

10. Используя современные средства автоматизации расчетов, разработан комплекс проблемно – ориентированных программ для ЭВМ, позволяющих выполнять численные исследования разработанных в диссертации локально – неравновесных моделей переноса.

Благодарности:

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18 – 79 – 00171), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18 – 38 – 00029 «мол_а»; № 20 – 38 – 70021 «Стабильность»), Совета по грантам Президента Российской Федерации (код проекта: МК – 614.2019.8), Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части государственного задания ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (проект №1.5551.2017/8.9), Министерства образования и науки Самарской области.

Список основных публикаций в рецензируемых журналах, состоящих в системе Web of Science:

[1] *Еремин А.В., Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Математическая модель теплообмена в жидкости с учетом ее релаксационных свойств // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2016. №1. С. 33 – 44.

[2] *Еремин А.В., Кудинов В.А., Стефанюк Е.В.* Теплообмен в цилиндрическом канале при стабилизированном ламинарном течении жидкости // Прикладная математика и механика, 2018. №1(82). С. 31 – 43.

[3] *Еремин А.В., Жуков В.В., Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Резонансные и бифуркационные колебания стержня с учетом сил сопротивления и релаксационных свойств среды // Известия РАН. Механика твердого тела, 2018. №5. С. 124 – 132.

[4] *Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В.* Исследование сильнонеравновесной модели теплового воспламенения с учетом пространственно – временной нелокальности // Физика горения и взрыва, 2018. №6(54). С. 25 – 29.

[5] *Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В.* Разработка и исследование сильнонеравновесной модели теплообмена в жидкости с учетом пространственно – временной нелокальности // Теплофизика и аэромеханика, 2017. №6. С. 929 – 935.

[6] *Кудинов В.А., Еремин А.В., Стефанюк Е.В.* Аналитические решения задач теплопроводности с переменными во времени коэффициентами теплоотдачи // Инженерно – физический журнал. Минск, 2015. №3(88). С. 663 – 673.

[7] *Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Курганова О.Ю. и др.* Обобщенные функции в задачах теплопроводности для многослойных конструкций с источниками теплоты // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2018. №3. С. 52 – 58.

[8] *Кудинов В.А., Еремин А.В., Стефанюк Е.В.* Критические условия теплового взрыва в пластине с нелинейным источником теплоты // Проблемы машиностроения и надежности машин. Москва, 2016. №1. С. 44 – 49.

[9] *Кудинов И.В., Кудинов В.А., Котова Е.В., Еремин А.В.* Об одном методе решения нестационарных краевых задач // Инженерно – физический журнал. Минск, 2017. №6(90). С. 1387 – 1397.

[10] *Кудинов И.В., Еремин А.В., Бранфилева А.Н., Колесников С.В.* Определение расхода жидкости в трубопроводе на основе решения обратной задачи теплообмена // Измерительная техника, 2016. №7. С. 33 – 36.

[11] *Еремин А.В., Кудинов И.В., Довгялло А.И., Кудинов В.А.* Теплообмен в жидкости с учетом диссипации энергии // Инженерно – физический журнал. Минск, 2017. №5(90). С. 1298 – 1306.

[12] *Еремин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В.* Об одном методе решения задач теплообмена при течении жидкостей в плоских каналах // Вестник СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки, 2016. №1(20). С. 109 – 120.

[13] *Kudinov I.V., Eremin A.V., Kudinov V.A., Dovgyallo A.I., Zhukov V.V.* Mathematical model of damped elastic rod oscillations with dual – phase – lag // International Journal of

Solids and Structures, 2020.

[14] *Eremin A.V., Kudinov V.A., Stefanyuk E.V.* Heat exchange in a cylindrical channel at stabilized fluid laminar flow // *Fluid Dynamics*, 2018. №82(1). С. 29 – 39.

[15] *Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V., Dovgyallo A.I.* Rod resonant oscillations considering material relaxation properties // *Procedia Engineering*, 2017. №176. Pp. 226 – 236.

[16] *Eremin A.V., Kudinov V.A., Trubitsyn K.V., Tkachev V.K., Kudinov I.V., Stefanyuk, E.V.* Study of Fast Relaxing Excitations Caused by Ultrashort Laser Pulses in Nanoscale Domain // *Advances in Engineering Research*, 2017. №133. Pp. 202 – 208.

[17] *Kudinov V.A., Nekrasova, S.O., Eremin A.V., Kudinov I.V.* Gas resonant oscillation considering gas relaxation properties // *Procedia Engineering*, 2017. №176. Pp. 237 – 245.

[18] *Kudinov I.V., Eremin A.V., Tkachev V.K., Kudinov V.A., Trubitsyn K.V., Stefanyuk, E.V.* Mathematical Modelling of Strongly Non – Equilibrium Transfer Processes at Nanoscopic Scale // *Advances in Engineering Research*, 2017. №133. Pp. 382 – 389.

[19] *Eremin A.V., Kudinov V.A., Stefanyuk E.V., Kudinov I.V.* Investigation of Temperature Change under Influence of Ultrashort Laser Pulses Taking into Account Relaxation Properties of Materials // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2018. №327(2). Pp. 6 – 13.

[20] *Kudinov V.A., Eremin A.V., Zhukov V.V.* Mathematical Models of Heat Ignition and Explosion Considering Local Non – Equilibrium of Processes // *Journal of Physics: Conference Series*, 2017. №891(1). Pp. 1 – 4.

[21] *Zhukov V.V., Eremin A.V., Stepanec D.V.* Determination of the Load Carrying Capacity of Honeycomb Panels at Fixing Points under an External Load // *Solid State Phenomena*, 2020. №299. Pp. 1184 – 1189.

[22] *Eremin A.V., Gubareva K.V.* Approximate analytical method for solving the heat transfer problem in a flat channel // *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 2021. №1259. Pp. 341 – 351.

[23] *Eremin A.V., Tkachev V.K., Klebleev R.M.* On One Method for Solving Heat Exchange Problems When a Fluid Flows in a Cylindrical Channel // *CSCMP: Control and modeling problems*, 2019. Pp. 435 – 440.

[24] *Eremin A.V., Zhukov V.V., Stepanec D.V.* Determination of Load-Carrying Capacity of the Honeycomb Panel at Fixing Points of Embedded Bushings Under In – Plane Load // *CSCMP: Control and modeling problems*, 2019. Pp. 667 – 670.

[25] *Kudinov I.V., Eremin A.V., Klebleev R.M., Tkachev V.K.* On a method for calculating heat transfer in a moving fluid taking into account energy dissipation// *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2020. 61(4). Pp. 557-565

[26] *Pashchenko D.I., Eremin A.V.* Heat flow inside a catalyst particle for steam methane reforming: CFD-modeling and analytical solution // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2021. №165.

Список публикаций в рецензируемых журналах, состоящих в системе Scopus:

[27] *Eremin A.V.* Study on heat transfer between the rod and the environment under conditions of forced convection // *IOP: Materials Science and Engineering*, 2020.

[28] *Eremin A.V.* Study of thermal exchange with liquid flowing in a cylindrical channel // *IEEE Xplore*, 2018.

[29] *Eremin A.V., Krasnova N.P.* One Method of Heat Transfer Process Mathematical Modeling in Solids // *IEEE Xplore*, 2019.

[30] *Eremin A.V., Trubitsyn K.V., Kolesnikov S.V., Kudinov I.V., Tkachev V.K.* Computer models of hydraulic systems of district heating // *MATEC*, 2018. №193. Pp. 1 – 9.

[31] *Eremin A.V., Trubitsyn K.V., Kudinov V.A.* Designing of hydraulic systems on

computer models // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2018. №194.

[32] Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В. Критические условия теплового взрыва с учетом пространственно – временной нелокальности // Известия ВУЗов. Авиационная техника, 2018. №2. С. 100 – 104.

[33] Кудинов В.А., Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Кузнецова А.Э. Температурные напряжения в многослойном полем цилиндре при тепловом ударе на его внешней поверхности // Известия ВУЗов. Авиационная техника, 2014. №1. С. 30–35.

[34] Кудинов И.В., Колесников С.В., Еремин А.В., Бранфилова А.Н. Компьютерные модели сложных многокольцевых разветвленных трубопроводных систем // Теплоэнергетика, 2013. №11. С. 64 – 69.

[35] Кудинов И.В., Кудинов В.А., Еремин А.В. Исследование распределения скорости течения вязкой жидкости в трубопроводе при гидравлическом ударе // Инженерно-физический журнал, 2013. №2(86). С. 387 – 393.

[36] Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В. Получение аналитического решения задачи Стефана с учетом абляции на основе определения фронта температурного возмущения // Инженерно-физический журнал, 2012. №6(85). С. 1332 – 1342.

Список основных публикаций в рецензируемых журналах из перечня ВАК:

[37] Еремин А.В. Методология моделирования локально – неравновесных процессов теплопроводности // Вестник ИГЭУ, 2020. №2.

[38] Еремин А.В. Об одном методе решения нелинейных задач теплопроводности // ВГТУ, 2018. №3(24). С. 471 – 481.

[39] Еремин А.В. Локально – неравновесный теплообмен в стержне в условиях вынужденной конвекции // Инженерный вестник Дона, 2019. №4. С. 1 – 8.

[40] Еремин А.В. Исследование быстрорелаксирующих температурных возбуждений, вызываемых сверхкороткими лазерными импульсами // Современная наука. Естественные и технические науки, 2019. №8. С. 47 – 52.

[41] Еремин А.В. Об одном методе математического моделирования процесса переноса теплоты в твердых телах // Перспективы науки, 2019. №7(118). С. 101 – 103.

[42] Еремин А.В., Губарева К.В. Аналитический метод решения задач теплопроводности с граничными условиями третьего рода // Вестник Ивановского государственного энергетического университета, 2019. №6. С. 67 – 74.

[43] Еремин А.В., Будыльников Н.М. Об одном методе получения аналитического решения задачи Гретца – Нуссельта // Вестник СамГТУ: физ. – мат. науки, 2011. №3(24). С. 193–198.

[44] Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Рассыпнов А.Ю., Кузнецова А.Э. Нестационарный теплообмен в цилиндрическом канале при ламинарном течении жидкости // Вестник СамГТУ: физ. – мат. науки, 2013. №4(33). С. 122–130.

[45] Еремин А.В., Будыльников Н.М., Кудинов И.В. Теплообмен при течении Куэтта с учетом диссипации энергии при граничных условиях третьего рода // Вестник СамГТУ: физ. – мат. науки, 2012. №3(28). С. 136–144.

[46] Кудинов В.А., Еремин А.В., Котова Е.В. Получение точных аналитических решений задач термоупругости для многослойных конструкций // Вестник СамГТУ: физ. – мат. науки, 2012. №2(27). С. 188–191.

[47] Кудинов И.В., Бранфилова А.Н., Еремин А.В., Скворцова М.П. Моделирование теплообмена в турбулентном пограничном слое с использованием полуэмпирической теории турбулентности // Вестник СамГТУ: физ. – мат. науки, 2014. №4. С. 157–169.

[48] Кудинов В.А., Кузнецова А.Э., Еремин А.В., Котова Е.В. Аналитические решения квазистатических задач термоупругости с переменными физическими

свойствами среды // Вестник СамГТУ: физ. – мат. науки, 2014. №2. С. 130–135.

[49] Кудинов В.А., Кузнецова А.Э., Еремин А.В., Котова Е.В. Аналитические решения задач термоупругости для многослойных конструкций с переменными свойствами // Вестник СамГТУ: физ. – мат. науки, 2013. №1(30). С. 215–221.

[50] Еремин А.В., Ткачев В.К., Тарабрина Т.Б. и др. Получение аналитического решения задачи теплообмена для турбулентного пограничного слоя // Вестник «МИФИ», 2019. № 6(8). С. 1 – 6.

Список программ для ЭВМ, зарегистрированных в Роспатенте:

[1] Исследование нестационарных процессов переноса тепла в телах сложной геометрической формы с учетом двухфазного запаздывания / Еремин А.В., Кудинов И.В. и др. // Свидетельство о регистрации №2020611223. Дата приоритета: 10.01.2020 г. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент).

[2] Теплопроводность в двухслойной пластине с учетом конечной скорости распространения теплоты / Еремин А.В., Попов А.И. и др. // Свидетельство о регистрации №2020611224. Дата приоритета: 10.01.2020 г. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент).

[3] Получение численных решений нестационарных задач теплопроводности на основе конечно – разностных методов с использованием метода прогонки / Кудинов В.А., Еремин А.В., Кузнецова А.Э. и др. // Свидетельство о регистрации №2015613327. Дата приоритета: 11.03.2015 г. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент).

[4] Расчет кольцевой гидравлической сети итеративным методом / Кудинов И.В., Колесников С.В., Еремин А.В. и др. // Свидетельство о регистрации №2015618298. Дата приоритета: 12.01.2015 г. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности.

[5] Теплообмен в плоскопараллельном канале при постоянных теплофизических свойствах жидкости / Еремин А.В., Попов А.И. и др. // Свидетельство о регистрации №2020611222. Дата приоритета: 10.01.2020 г. М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент).

Список монографий и учебных пособий:

[1] Еремин А.В., Кузнецова А.Э., Бранфилева А.Н., Абишева Л.С., Тарабрина Т.Б. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса и термоупругости. Уч. пос. Самара: Самарский государственный технический университет. 2018. 240 с.

[2] Кудинов И.В., Кудинов В.А., Еремин А.В., Колесников С.В. Математическое моделирование гидродинамики и теплообмена в движущихся жидкостях: Монография. СПб.: Издательство «Лань», 2014. 208 с.

[3] Кудинов И.В., Еремин А.В., Трубицын К.В., Стефанюк Е.В. Модели термомеханики с конечной и бесконечной скоростью распространения теплоты: Монография. М.: Издательство «Проспект», 2019.

Заказ №616. Формат 60х84 1/16 Уч. изд. л. 2,05. Тираж 120 экз.

Отпечатано в типографии Самарского государственного технического университета 443100, Россия, Самара, Молодогвардейская, 244, корпус 8.

Автореферат отпечатан с разрешения диссертационного совета Д 212.217.03
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»
(протокол №2 от «16» декабря 2021 г.)