

На правах рукописи



Ткачев Василий Константинович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ЛОКАЛЬНО РАВНОВЕСНЫХ И
НЕРАВНОВЕСНЫХ УСЛОВИЯХ**

Специальность: 1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации
на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Самара 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Самарский государственный технический университет» на кафедре «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика»

Научный руководитель: Кудинов Игорь Васильевич, доктор технических наук, доцент, и.о. заведующего кафедрой «Физика» ФГБОУ ВО «Самарский технический университет»

Официальные оппоненты: Вельмисов Петр Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет»

Литовка Юрий Владимирович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Системы автоматизированной поддержки принятия решений» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Защита состоится «20» апреля 2022 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.377.02 при ФГБОУ ВО «СамГТУ» по адресу: 443010, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244, ауд. 200.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «СамГТУ» и на сайте www.samgtu.ru.

Отзывы на автореферат (в двух экземплярах) с подписями, заверенные печатью учреждения, просим направлять по адресу: 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244, Ученый совет ФГБОУ ВО «СамГТУ».

Автореферат разослан «__» _____ 2022 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета 24.2.377.02

доктор технических наук, доцент



В.Е. Зотеев

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы. Математические модели, описывающие теплопроводность с переменными от температуры и от пространственной координаты физическими свойствами среды, гидродинамику и теплообмен в движущихся жидкостях, включают нелинейные уравнения, решаемые в общем случае лишь численными методами. Аналитические (приближенные аналитические) методы их решения в настоящее время недостаточно разработаны. Кроме того, для процессов гидродинамики и теплообмена, протекающих в локально-неравновесных условиях, в достаточной мере не разработаны адекватные математические модели. Особого внимания в современных исследованиях мирового уровня заслуживает теория двухфазного запаздывания (DPL-model), учитывающая конечную скорость распространения возмущений потенциалов переноса. Как показывают экспериментальные данные, модель двухфазного запаздывания позволяет с наибольшей точностью приблизиться к описанию локально-неравновесных процессов переноса теплоты. Однако в настоящее время математические модели на основе дифференциальных операторов были применены только к тепловым задачам, а методы исследования таких моделей ограничиваются численными расчетами в одномерной постановке. Также можно отметить практическое отсутствие математических моделей гидродинамики и теплообмена в движущихся жидкостях с учётом зависимости вязкости от температуры и градиента скорости, существенно влияющей на форму профиля скорости и характеристики теплообмена. Наиболее актуальной является проблема разработки математических моделей гидродинамики и теплообмена в ламинарных и турбулентных пограничных слоях с целью определения коэффициентов трения и теплоотдачи, используемых как для решения краевых задач, так и при разработке компьютерных моделей гидравлических систем различного назначения.

Цель работы состоит в получении и анализе новых численно-аналитических решений математических моделей для задач теплопроводности в твердых телах, а также гидродинамики и теплообмена движущихся жидкостей в локально – равновесных и неравновесных условиях на основе теории двухфазного запаздывания.

Задачи, решаемые в диссертации

1. Получение и анализ точных и приближенных аналитических решений математических моделей стационарных двумерных задач теплопроводности с внутренними источниками теплоты на основе определения дополнительных искоемых функций и дополнительных граничных условий.

2. Получение и анализ приближенных аналитических решений математических моделей для задач теплопроводности в твердых телах и теплообмена в жидкостях с переменными по координатам физическими свойствами среды.

3. Получение численных решений и исследование математических моделей гидродинамики и теплообмена на основе модифицированных законов Ньютона и Фурье, учитывающих скорости и ускорения движущих сил (градиентов

соответствующих величин) и вызываемых ими следствий (касательных напряжений и тепловых потоков).

4. Получение численно-аналитических решений и исследование математических моделей теплового и динамического ламинарного и турбулентного пограничных слоев на основе определения фронта теплового и динамического возмущения и дополнительных граничных условий.

5. Разработка алгоритмического и программного обеспечения, позволяющего получать точные решения для линейных и приближенные для нелинейных задач теплопроводности.

6. Разработка программы расчёта кольцевых гидравлических систем, отличающейся быстрой сходимостью итеративного расчёта по сравнению с классическими методами за счёт использования квадратичной зависимости для увязочного расхода.

Новые научные результаты

1. На основе определения дополнительных краевых условий и искомых функций получены точные и приближенные аналитические решения стационарных двумерных задач теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

2. Получены приближенные численно-аналитические решения задач моделирования теплопроводности в твердых телах и теплообмена в жидкостях с переменными по координатам физическими свойствами среды.

3. Получены и проанализированы численные решения математических моделей гидродинамики и теплообмена, полученных на основе модифицированных законов Ньютона и Фурье, учитывающих скорости и ускорения движущих сил и вызываемых ими следствий, в отличие от классических методов.

4. Получены численно-аналитические решения математических моделей для задач теплового и динамического ламинарного и турбулентного пограничных слоев на основе определения теплового и динамического фронтов возмущения и дополнительных краевых условий.

5. Разработана компьютерная программа для расчёта кольцевых гидравлических сетей, использующая уточненную формулу для определения увязочного расхода, что ускоряет сходимость итерационного расчёта.

На защиту выносятся

1. Точные и приближенные численно-аналитические решения при моделировании стационарных двумерных задач теплопроводности с внутренними источниками теплоты, теплопроводности в твердых телах и теплообмена в жидкостях с переменными по координатам физическими свойствами среды, полученные на основе метода дополнительных краевых условий.

2. Метод исследования математических моделей гидродинамики и теплообмена на основе использования модифицированных эмпирических законов Ньютона и Фурье, учитывающих скорости и ускорения движущих сил

(градиентов соответствующих величин) и вызываемых ими следствий (касательных напряжений и теплового потока).

3. Приближенные численно-аналитические решения при моделировании теплового и динамического ламинарного и турбулентного пограничных слоев на основе определения фронта возмущения и дополнительных краевых условий.

4. Математические модели гидродинамики и теплообмена в движущихся жидкостях, основанные на теории двухфазного запаздывания, учитывающей скорости и ускорения движущих сил и вызывающих ими следствий в законах Ньютона и Фурье.

5. Комплексы программ для расчета разработанных математических моделей процессов гидродинамики и теплопереноса.

Достоверность результатов обосновывается адекватностью разработанных моделей гидродинамики и теплообмена реальным процессам, происходящим в конкретных устройствах, на сопоставлении найденных решений с численными и экспериментальными данными из независимых источников.

Теоретическая и практическая значимость

1. Разработанные на основе теории двухфазного запаздывания математические модели локально-неравновесных процессов гидродинамики и теплообмена в жидкости позволили получить новые физические и теоретические данные об их протекании. Важной особенностью предложенных моделей является общность подходов при выводе модифицированных дифференциальных уравнений рассматриваемых процессов, заключающаяся в симметричной релаксации причинно-следственных связей в законах Фурье и Ньютона. Разработан инструментарий для решения класса новых задач, учитывающих релаксационные явления. Установлено, что течение жидкости в локально-неравновесных условиях сопровождается периодическими колебаниями скорости. Показано, что учет релаксационных свойств жидкости приводит к временной задержке формирования профиля скорости.

2. Получено критериальное уравнение для определения коэффициентов теплоотдачи на границе жидкость-стенка. На основании гидродинамической теории подобия по известным коэффициентам теплоотдачи на всех участках тепловой сети определяются коэффициенты трения, необходимые для выполнения идентификации модели, то есть ее максимального приближения к реальной тепловой сети. Разработанные в диссертации теоретические методы использованы при построении математических и компьютерных моделей теплосетей централизованного теплоснабжения г. Саратова и г. Тольятти, позволяющих выполнять их текущий мониторинг с расчетом скоростей, давлений, расходов, потерь напора, затрат энергии на привод насосов и проч., а также проектировать новые участки теплосетей.

3. Предложен метод, основанный на учете квадратичной зависимости для увязочного расхода и позволяющий ускорить сходимость итераций при расчете потокораспределения в кольцевых гидравлических системах. Данный метод

использовался в диссертации при проектировании нового участка теплосети, объединяющего теплосети ТЭЦ ВАЗ и Тольяттинской ТЭЦ, что позволило определить такие конфигурации теплосетей и расположение регулирующих элементов в них, при которых исключаются ситуации неработоспособности тепловой сети по причинам невозможности пропуска сверхнормативного расхода теплоносителя через отдельные участки сети (например, в ночное время, когда расход на горячее водоснабжение минимален).

4. Разработанные в диссертации математические модели с учетом конечной и бесконечной скорости распространения действующих сил (причин) и их следствий позволяют с высокой точностью воспроизводить реальные физические процессы, что подтверждается экспериментальными данными, приведенными в работах других авторов. Эти модели рекомендуется использовать в организациях, занимающихся эксплуатацией и проектированием гидравлического и теплотехнического оборудования (промышленные предприятия, научно-исследовательские организации, конструкторские бюро и проч.).

Связь работы с государственными программами научных исследований. Исследования выполнялись в соответствии с Аналитической ведомственной целевой программой «Развитие научного потенциала высшей школы» по тематическому плану НИР № 551/02, при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № FSSS-2020-0019), по грантам РНФ (проект № 18 – 79 – 00171) и РФФИ (проект № 20-38-70021).

Внедрение работы.

Результаты работы были использованы при выполнении энергообследования объектов Самарского государственного технического университета; при проведении работ с ПАО «Т Плюс» по внедрению компьютерных моделей теплосетей. Экономический эффект, подтвержденный актами о внедрении, составляет 1,8 млн. руб. (вклад автора 0,4 млн. руб.).

Апробация работы. Положения диссертации были обсуждены на Всероссийской научно-практической конференции «Научные и технические средства обеспечения энергосбережения и энергоэффективности в экономике РФ», Санкт-Петербург, 2012 г.; Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации», Новосибирск, 2012, 2013 гг.; Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием «Энерго- и ресурсосбережение. Энергообеспечение. Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии», Екатеринбург, 2015, 2016, 2017 г.; Седьмой Российской национальной конференции по теплообмену, Москва, 2018 г.; Всероссийской (с международным участием) молодежной научной конференции «Актуальные проблемы экологии волжского бассейна», Тольятти, 2019 г.; Международной научной конференции «Проблемы управления и моделирования в сложных системах», Самара, 2019 г.

Публикации. Содержание работы опубликовано в 24 печатных работах, из них 5 статей в международных журналах, состоящих в Web of Science, 2 статьи в журналах, индексируемых в Scopus, 5 статей – в журналах из перечня ВАК.

Личный вклад автора. Работы [6, 8] выполнены самостоятельно. В основных работах [1 – 5, 7, 9 – 12] диссертанту принадлежит постановка проблем исследований, непосредственное выполнение основной части работы, которая выполнена совместно с другими авторами. В остальных работах, также опубликованных в соавторстве, диссертанту в равной степени с другими авторами принадлежат постановки задач, получение решений, содержание работы и анализ результатов.

Благодарности. Результаты работы получены с использованием оборудования центра коллективного пользования «Учебно-научный производственный центр «Вибрационная прочность и надежность аэрокосмических изделий» при частичной финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № FSSS-2020-0019).

Объем диссертации. Работа содержит введение, 5 глав, выводы, список литературы, приложения; изложена на 142 страницах основного текста, содержит 60 рисунков. Список литературы содержит 135 наименований.

В первой главе приведены данные по обзору работ в избранном направлении исследований. И, в частности, показано, что разработке проблем построения математических моделей локально-неравновесных процессов посвящены труды Лыкова А.В., Карташова Э.М., Соболева С.Л., Цирельмана Н.М., Зарубина В.С., Кудинова И.В., Формалева В.Ф., Полянина А.Д. и других ученых. По результатам обзора работ отмечены имеющиеся проблемы в данном направлении.

Во второй главе диссертации приведены результаты получения точного и приближенного аналитического решения стационарной двумерной задачи теплопроводности для бесконечного прямоугольного бруса с источником теплоты в следующей математической постановке (рис. 1)

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + B = 0 \quad (0 < \xi < 1; 0 < \eta < 1); \quad (1)$$

$$\Theta(1, \eta) = \Theta(\xi, 1) = 0; \quad (2) \quad \frac{\partial \Theta(0, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial \eta} = 0, \quad (3)$$

где $\Theta = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_{\text{ст}}}$; $\xi = \frac{x}{\delta}$; $\eta = \frac{y}{\delta}$; $B = \frac{\nu_0 \delta^2}{\lambda T_{\text{ст}}}$; Θ, ξ, η – соответственно, безразмерные температура, координата, время; B – безразмерный комплекс; δ – половина ширины грани бруса; λ – коэффициент теплопроводности; $T_{\text{ст}}$ – температура на границе $x = y = \delta$; ν_0 – мощность внутреннего источника теплоты.

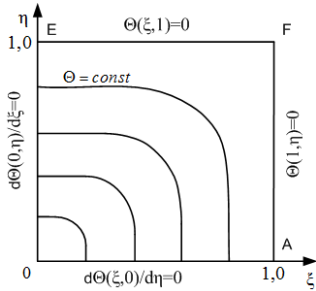


Рис. 1. Схема теплообмена в поперечном сечении бесконечного прямоугольного бруса

Введем дополнительную искомую функцию, характеризующую распределение температуры по линии ОА

$$q(\xi) = \Theta(\xi, 0). \quad (4)$$

Так как температура по этой линии является искомой величиной задачи (1) – (3), то ее отдельное рассмотрение никоим образом эту задачу не изменяет и является лишь дополнительным средством для упрощения получения ее аналитического решения.

Решение задачи (1) – (3) принимается в виде

$$\Theta(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^n b_k(q) \varphi_k(\eta), \quad (5)$$

где $b_k(q)$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(\eta) = \cos(r\pi\eta/2)$ – координатные функции ($r = 2k - 1$, $k = \overline{1, n}$).

Соотношение (5), благодаря принятой системе координатных функций, удовлетворяет граничным условиям (3). Неизвестные коэффициенты $b_k(q)$ находятся из соотношения (4) и некоторых дополнительных граничных условий, которые находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением (5) на границах области было эквивалентно выполнению на этих границах исходного дифференциального уравнения. Известно, что выполнение уравнения на границах приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области, причем, с точностью, зависящей от числа членов ряда (5), которое, в свою очередь, зависит от числа используемых дополнительных граничных условий. Дополнительные граничные условия находятся из основных граничных условий (2), (3) и исходного дифференциального уравнения (1) путем их многократного дифференцирования в граничных точках и сопоставления получающихся выражений. И, в частности, общие формулы для дополнительных граничных условий применительно к задаче (1) – (3) имеют вид

$$\frac{\partial^{2i-1}\Theta(\xi, 0)}{\partial \eta^{2i-1}} = 0; \quad (6) \quad \frac{\partial^{2i-1}\Theta(0, \eta)}{\partial \xi^{2i-1}} = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial^{2i}q(\xi)}{\partial \xi^{2i}} \pm \frac{\partial^{2i}\Theta(\xi, 0)}{\partial \eta^{2i}} = 0 \quad (i = 2, 3, 4, \dots), \quad (8)$$

где знак «+» в формуле (8) – для четных i , знак «-» – для нечетных.

Потребуем, чтобы соотношение (5) после определения его неизвестных коэффициентов $b_k(q)$ ($k = \overline{1, n}$) из основных и дополнительных граничных условий удовлетворяло не уравнению (1), а некоторому осредненному по координате η уравнению, то есть интегралу теплового баланса вида

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + B \right] d\eta = 0. \quad (9)$$

Подставляя (5) в (9), после определения интеграла относительно неизвестной функции $q(\xi)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение.

Например, в первом приближении решение задачи (1) – (3) имеет вид

$$\Theta(\xi, \eta) = \frac{2B}{\pi} \left[\frac{e^{\pi/2}}{1 + e^{\pi}} e^{\frac{\pi\xi}{2}} + e^{-\frac{\pi\xi}{2}} + 1 \right] \cos \frac{\pi\eta}{2}. \quad (10)$$

Используя дополнительные граничные условия (6) – (8), в диссертации получено решение задачи (1) – (3) во втором приближении:

$$\Theta(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{\pi^2} - q' + 2,25\pi^2 q - 1 \right) \cos \left(\frac{\pi\eta}{2} \right) + (q' - 0,25\pi^2 q + 1) \cos \left(\frac{3\pi\eta}{2} \right),$$

$$\text{где } q(\xi) = \frac{4B(\pi+1)}{3\pi^2} + C_1 e^{\frac{\pi\xi}{2}} + C_2 e^{\frac{3\pi\xi}{2}} + C_3 e^{-\frac{\pi\xi}{2}} + C_4 e^{-\frac{3\pi\xi}{2}}; \quad q' = \frac{dq(\xi)}{d\xi};$$

$$C_1 = C_3 = -\frac{(3\pi+2)e^{\frac{\pi}{2}}}{2\pi^2(e^{\pi}+0,5)}; \quad C_2 = C_4 = \frac{(\pi+2)e^{\frac{3\pi}{2}}}{6\pi^2(e^{3\pi}+1)}.$$

Используя ортогональный метод Бубнова – Галеркина, выявлена закономерность изменения получаемых решений в зависимости от приближений, таким образом, в диссертации получено точное аналитическое решение задачи (1) – (3), имеющее вид

$$\Theta(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_{1k} \exp \left(-\frac{2k-1}{2} \pi \xi \right) + C_{2k} \exp \left(\frac{2k-1}{2} \pi \xi \right) + \frac{(-1)^{k+1} 16B(\pi+1)}{(2k-1)^3 \pi^3} \right] \varphi_k(\eta), \quad (11)$$

$$\text{где } C_{1k} = C_{2k} = (-1)^k \left/ \left[\left(\frac{2k-1}{2} \pi \right)^3 \operatorname{ch} \left(\frac{2k-1}{2} \pi \right) \right] \right.$$

Возможность получения приближенных аналитических решений краевых задач с переменными физическими свойствами и источниками теплоты связана с использованием ортогонального метода Бубнова – Галеркина, являющегося универсальным, так как позволяет обходить трудности, связанные с различного рода нелинейностями в дифференциальных операторах краевых задач. Решение задачи с переменными физическими свойствами среды данным методом приводится в следующей главе диссертации.

В третьей главе приводятся результаты решения краевой задачи по формированию профиля скорости при нестационарном течении жидкости с переменной по поперечной координате вязкостью (вязкость – параболическая функция координаты $\mu(y) = \mu_0(1 + \gamma y^2)$ в следующей математической постановке (безразмерный вид):

$$\frac{\partial \upsilon(\eta, Zh)}{\partial Zh} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 + r\eta^2) \frac{\partial \upsilon(\eta, Zh)}{\partial Zh} \right] + \omega \quad (Zh > 0; \quad 0 < \eta < 1); \quad (12)$$

$$\upsilon(\eta, 0) = 0; \quad (13) \quad \partial \upsilon(0, Zh) / \partial \eta = 0; \quad (14) \quad \upsilon(1, Zh) = 0, \quad (15)$$

где υ – скорость; $\eta = y/\delta$ – безразмерная координата; $Zh = \omega t / \delta^2$ – критерий Жуковского (безразмерное время); $\omega = \Delta p \delta^2 / (\nu_0 \rho l)$; Δp – перепад давлений по длине канала; l – длина канала; ρ – плотность; ν_0 – кинематическая вязкость в центре канала ($\eta = 0$); δ – половина ширины канала; t – время; $r = \gamma \delta^2$; γ – коэффициент, учитывающий интенсивность изменения вязкости от координаты y .

Используя дополнительную искомую функцию и дополнительные краевые условия, в диссертации получено приближённое аналитическое решение задачи (12) – (15). Дополнительная искомая функция

$$q(Zh) = \upsilon(0, Zh) \quad (16)$$

представляет изменение во времени скорости в центре канала. Ввиду бесконечной скорости распространения импульса давления, описываемой параболическим уравнением (12), скорость в центре канала будет изменяться сразу после приложения граничного условия (15) на его поверхности. Следовательно, диапазон изменения функции $q(Zh)$ будет включать весь диапазон времени нестационарного процесса. Ввиду того, что скорость в центре канала является искомой величиной задачи (12) – (15), то её отдельное рассмотрение никоим образом не изменяет эту задачу, а лишь позволяет существенно упростить процесс получения её аналитического решения.

Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению уравнения в граничных точках. Показано (в том числе и через доказательство соответствующих теорем), что выполнение уравнения в точках границы приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области с точностью, зависящей от числа приближений (от числа используемых в данном приближении дополнительных граничных условий).

Решение задачи (12) – (15) в первом приближении имеет вид

$$\upsilon(\eta, Zh) = \left[\frac{\omega}{2} - \frac{1}{2(\eta+1)} \left(\omega - \exp \left(-3(r+1) \left(Zh + \frac{\ln(1/\omega)}{3(r+1)} \right) \right) \right) \right] (1 - \eta^2). \quad (17)$$

Результаты расчетов по формуле (17) приведены на рис. 2, 3. Из их анализа следует, что при $r = 0$ (постоянная вязкость) профиль скорости на участке гидродинамической стабилизации (рис. 2) незначительно отличается от профиля, полученного из точного решения (рис. 4) – максимальная относительная

погрешность в чебышевской норме составляет 15%. При $r \neq 0$ (переменная вязкость) с увеличением r время стабилизации профиля скорости уменьшается (рис. 3).

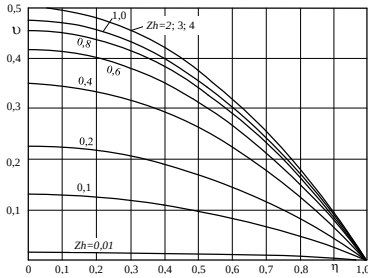


Рис. 2. Формирование нестационарного профиля скорости (расчёт по формуле (17)). $\omega = 1$; $r = 0$

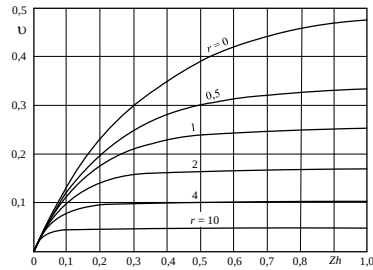


Рис. 3. Изменение скорости по времени (расчёт по формуле (17)). $\omega = 1$; $\eta = 0$

В четвертой главе представлены результаты получения точного аналитического решения краевой задачи формирования нестационарного профиля скорости в следующей математической постановке

$$\frac{\partial v(\eta, Zh)}{\partial Zh} = \frac{\partial^2 v(\eta, Zh)}{\partial \eta^2} + \omega \quad (Zh > 0; 0 < \eta < 1); \quad (18)$$

$$v(\eta, 0) = 0; \quad (19)$$

$$\partial v(0, Zh) / \partial \eta = 0; \quad (20)$$

$$v(1, Zh) = 0, \quad (21)$$

где $\omega = \Delta p \delta^2 / (\nu l p)$.

Для решения задачи (18) – (21) используются дополнительная искомая функция (16) и дополнительные краевые условия, определяемые по следующим общим формулам:

$$\partial^i v(0, Zh) / \partial \eta^i = 0 \quad (i = 3, 5, 7, \dots); \quad (22)$$

$$\partial^i v(1, Zh) / \partial \eta^i = 0 \quad (i = 4, 6, 8, \dots). \quad (23)$$

В диссертации получено точное аналитическое решение задачи (18) – (21) в виде следующего бесконечного ряда

$$v(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2} (1 - \eta^2) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \omega \exp(-\mu_k^2 Zh) \cos(\mu_k \eta), \quad (24)$$

где $A_k = 16(-1)^k / (r\pi)^3$; $\mu_k = r\pi / 2$.

Результаты расчетов по формуле (24) приведены на рис. 4. Из их анализа следует, что стабилизация профиля скорости происходит при $Zh \geq 2,5$.

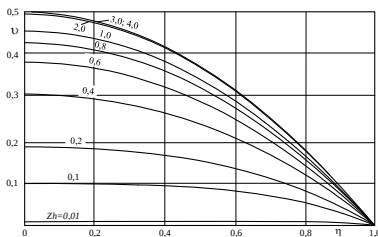


Рис. 4. Формирование нестационарного профиля скорости.

$\omega = 1$; $n = 100$ – число членов ряда (24)

В четвертой главе диссертации приводятся также результаты исследований краевых задач динамического и теплового (ламинарного и турбулентного) пограничных слоев на основе определения фронта возмущения и дополнительных краевых условий. Математическая постановка задачи для ламинарного динамического слоя имеет вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} [v - v_x(x, 0)] v_x dy = -v \frac{\partial v_x(x, 0)}{\partial y}; \quad (25)$$

$$v_x(x, 0) = v_y(x, 0) = 0; \quad (26) \quad v_x(x, \delta) = v; \quad (27)$$

$$v_x(x, \delta) / \partial y = 0; \quad (28) \quad \partial^2 v_x(x, 0) / \partial y^2 = 0, \quad (29)$$

где $\delta(x)$ – толщина динамического пограничного слоя; v – скорость невозмущенного потока; v_x, v_y – составляющие скорости по координатным осям x и y в пограничном слое; v – коэффициент кинематической вязкости.

Получение точных аналитических решений задачи (25) – (29), ввиду нелинейности интегрального уравнения (25), не представляется возможным. Её решение получено лишь в первом приближении. Отметим, что наиболее точное решение задачи (25) – (29) найдено численными методами. В настоящей диссертации рассматривается метод, позволяющий получить приближенное аналитическое решение задачи (25) – (29), практически с заданной степенью точности. При его использовании решение задачи (25) – (29) записывается в виде

$$v_x(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k(\delta) \varphi_k(y), \quad (30)$$

где $a_k(\delta)$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(y) = y^{2k-1}$ – координатные функции.

Соотношение (30), ввиду принятой системы координатных функций, удовлетворяет условиям (26), (29). При получении решения в первом приближении подставим (30) в (27), (28). Для неизвестных $a_k(\delta)$ ($k=1, 2$) получим два алгебраических уравнения. После их определения (30) будет

$$\frac{v_x(x, y)}{v} = \frac{3y}{2\delta} \left(1 - \frac{y^2}{3\delta^2} \right). \quad (31)$$

Подставляя (31) в (25), относительно $\delta(x)$ будем иметь обыкновенное дифференциальное уравнение $13v\delta d\delta = 140v dx$, интегрируя которое при начальном условии $\delta(0) = 0$, находим

$$\delta(x) = 4,64x / \text{Re}_x^{0.5}, \quad (32)$$

где $\text{Re}_x = vx/v$ – число Рейнольдса.

Соотношения (31), (32) являются первым приближением задачи (25) – (29). Максимальная относительная невязка решения (31) от значений v_x , полученных численным методом¹, в диапазоне $0 \leq \eta \leq 4,0$ составляет 3 % (рис. 5), в диапазоне $4 \leq \eta \leq 6,0$ – 15 %, а при $\eta > 6$ решение (31) не может быть использовано.

¹Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: наука, 1969. – 472 с.

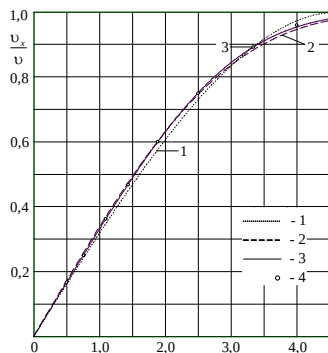


Рис. 5. Изменение безразмерной скорости v_x/v по безразмерной координате $\eta = y\sqrt{v/(vx)}$; 1, 2, 3 – первое, второе и третье приближения; 4 – численное решение

Для получения решения во втором приближении требуется использование дополнительных граничных условий. Общие формулы для них имеют вид: $\partial^i v_x(x,0)/\partial y^i = 0$; $\partial^i v_x(x,\delta)/\partial y^i = 0$; $\partial^{i+1} v_x(x,\delta)/\partial y^{i+1} = 0$, ($i = 2, 3, 4, \dots$).

Во втором приближении для безразмерной скорости получена следующая формула

$$\frac{v_x}{v} = \frac{35}{16} \frac{y}{\delta} \left(1 - \frac{y^2}{\delta^2} + \frac{3}{5} \frac{y^4}{\delta^4} - 7 \frac{y^6}{\delta^6} \right), \quad (33)$$

$$\text{где } \delta(x) = 7,35x \operatorname{Re}_x^{0,5}. \quad (34)$$

Краевая задача для теплового пограничного слоя имеет вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\Delta} v_x [T_{cp} - T(x,y)] dy = a \frac{\partial T(x,0)}{\partial y}; \quad (35)$$

$$T(x,0) = 0; \quad T(x,\Delta) = T_{cp}; \quad \partial T(x,\Delta)/\partial y = 0; \quad \partial^2 T(x,0)/\partial y^2 = 0, \quad (36)$$

где $T = t - t_{cm}$ – избыточная температура; t_{cm} – температура стенки; $T_{cp} = t_{cp} - t_{cm}$; $v_x(x,y)$ – скорость; a – коэффициент температуропроводности жидкости. В виду полной аналогии краевых задач (25) – (29) и (35), (36) их решения в безразмерном виде будут идентичными. То есть в решении температурной задачи вместо безразмерной скорости $v_x(x,y)/v$ в формуле (31) будем иметь безразмерную температуру $T(x,y)/T_{cp}$, а толщина теплового пограничного слоя будет определяться по формуле $\Delta(x) = 4,53x/(\sqrt{\operatorname{Re}_x} \sqrt[3]{\operatorname{Pr}})$.

В четвертой главе приводится также решение задачи для турбулентного теплового пограничного слоя. Следуя полуэмпирической теории турбулентности Прандтля, вводится коэффициент эквивалентной температуропроводности жидкости $a_t = a + a_m$, где a и a_m – соответственно коэффициенты молекулярной и турбулентной температуропроводности, из которых последний характеризует не свойство жидкости, а режим ее течения. Краевая задача для турбулентного пограничного слоя при использовании a_t совпадает с задачей для ламинарного пограничного слоя. При этом в качестве решения динамической

задачи принималось эмпирическое соотношение $v_x(x, y)/v = [\gamma/\delta(x)]^{1/7}$, где $\delta(x) = 0,37x/\text{Re}_x^{1/5}$. На основе аналитического решения для турбулентного пограничного слоя получено критериальное уравнение для определения коэффициентов теплоотдачи $\text{Nu}_x = 0,5\text{Re}_x^{0,48}\text{Pr}^{0,47}$, где $\text{Re}_x = vx/v$; $\text{Pr} = \nu/a$.

В четвертой главе диссертации рассматриваются также результаты, связанные с применением теории двухфазного запаздывания для построения математической модели теплообмена с учетом релаксационных свойств жидкости. Известно, что классическая теория переноса базируется на принципе локального равновесия, согласно которому в каждом малом элементе системы наблюдается локальное равновесие, несмотря на наличие во всей системе градиентов исследуемых величин. Для таких систем на основе законов сохранения получают параболические уравнения переноса, описывающие бесконечную скорость распространения теплоты. Однако любой реальный процесс не является локальным – перенос энергии от точки к точке происходит не мгновенно, а за конечный отрезок времени. Принимая принцип локального равновесия, конечной скоростью переноса пренебрегается. В настоящей работе с целью учета конечной скорости распространения теплоты при выводе дифференциального уравнения теплообмена в жидкости, движущейся в плоском канале, используются следующие модифицированные формулы закона Фурье:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau \frac{\partial q_x}{\partial t} - \lambda \tau \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + \rho \omega_x i; \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \tau \frac{\partial q_y}{\partial t} - \lambda \tau \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial t} + \rho \omega_y i, \quad (37)$$

где q_x, q_y – тепловые потоки по осям x и y ; ω_x, ω_y – скорости; i – энтальпия; τ – коэффициент релаксации; $\omega_x = \omega_{cp}$; ω_{cp} – средняя скорость; δ – ширина канала.

Используя формулы (37) и уравнение теплового баланса $\rho di/\partial t = -(\partial q_x/\partial x + \partial q_y/\partial y)$, пренебрегая конвективным переносом теплоты в поперечном направлении и теплопроводностью в продольном, получаем следующее уравнение локально – неравновесного теплопереноса:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} + \text{Fo}_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \text{Fo}^2} + \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + \text{Fo}_1 \frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} \text{Pe} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} \right), \quad (38)$$

$$\text{где } \Theta = \frac{T - T_{cm}}{T_0 - T_{cm}}; \quad \eta = \frac{y}{\delta}; \quad \text{Fo} = \frac{at}{\delta^2}; \quad \text{Fo}_1 = \frac{a\tau}{\delta^2}; \quad \xi = \frac{2}{3} \frac{ax}{\delta \omega_{cp}}; \quad \text{Pe} = \left(\frac{2}{3} \frac{a}{\delta \omega_{cp}} \right)^2.$$

Граничные условия для уравнения (38) применительно к плоскому каналу имеют вид

$$\Theta(\xi, \eta, 0) = \Theta_n; \quad \frac{\partial \Theta(\xi, \eta, 0)}{\partial \text{Fo}} = 0; \quad \Theta(0, \eta, \text{Fo}) = 1; \quad \frac{\partial \Theta(0, \eta, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \\ \frac{\partial \Theta(\xi, 0, \text{Fo})}{\partial \eta} = 0; \quad \Theta(\xi, 1, \text{Fo}) = 0, \quad (39)$$

где $\Theta_n = (T_n - T_{cm})/(T_0 - T_{cm})$ – начальная температура жидкости; T_{cm} – температура стенки.

В результате численного решения задачи (38), (39) установлено, что ввиду инерционности изменения теплового потока граничное условие первого рода (тепловой удар) не может быть реализовано мгновенно – его установление на стенке характеризуется некоторым временным интервалом, длительность которого определяется релаксационными свойствами жидкости (рис. 6). При некоторых больших значениях безразмерных коэффициентов релаксации граничное условие первого рода может быть реализовано лишь при установлении стационарного состояния (рис. 7).

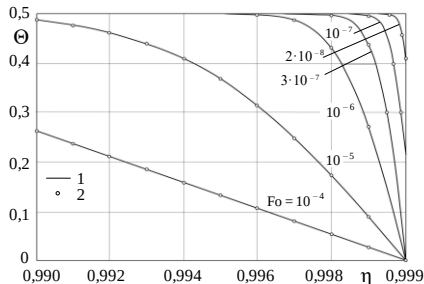


Рис. 6. Распределение температуры.

$\xi = 5 \cdot 10^{-5}$; $Fo_1 = 10^{-7}$, $Re = 10^{-7}$; $\Theta_n = 0,5$;

1 – численный метод, 2 – точное решение

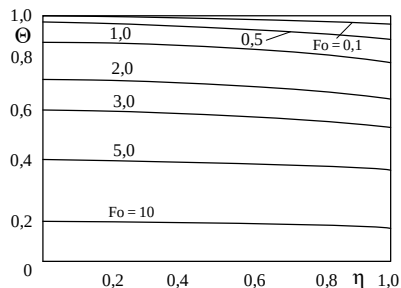


Рис. 7. Распределение температуры.

$\xi \rightarrow \infty$; $Fo_1 = 5$; $\Theta_n = 1$

В четвертой главе диссертации даны также основные положения, связанные с применением теории двухфазного запаздывания для разработки методов математического моделирования гидродинамики движущихся жидкостей с учетом релаксационных явлений. На основе учёта скоростей и ускорений касательного напряжения и градиента скорости классическая формула закона Ньютона $\tau = \mu \partial \vartheta / \partial y$ представляется в виде

$$\tau + r_1 \frac{\partial \tau}{\partial t} + \gamma_1^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} + r_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} + \gamma_2^2 \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial t^2} \right), \quad (40)$$

где τ – касательное напряжение; v – скорость; $r_1, r_2, \gamma_1, \gamma_2$ – коэффициенты релаксации; y – поперечная координата; t – время; μ – динамическая вязкость.

Подставляя (40) в уравнение равновесия Навье-Стокса (движения)

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\Delta p}{l}, \quad (41)$$

получаем следующее уравнение, описывающее изменение скорости в локально-неравновесных условиях

$$\gamma_1^2 \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + r_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} = v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + r_2 \frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} + \gamma_2^2 \frac{\partial^4 v}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + \frac{\Delta p}{\rho l}, \quad (42)$$

где $v = \mu / \rho$ – кинематическая вязкость; Δp – перепад давлений по длине канала; l – длина канала; ρ – плотность.

Если положить $r_1 = r_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$, то уравнение (42) приводится к

классическому уравнению Навье – Стокса применительно к течению жидкости в плоском канале.

Уравнение (42) и краевые условия к нему в безразмерном виде будут

$$G_1^2 \frac{\partial^3 v}{\partial Zh^3} + F_1 \frac{\partial^2 v}{\partial Zh^2} + \frac{\partial v}{\partial Zh} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + F_2 \frac{\partial^3 v}{\partial \eta^2 \partial Zh} + G_2 \frac{\partial^4 v}{\partial \eta^2 \partial Zh^2} + \omega; \quad (43)$$

$$v(\eta, 0) = 0; \quad \frac{\partial v(\eta, 0)}{\partial Zh} = 0; \quad \frac{\partial^2 v(\eta, 0)}{\partial Zh^2} = 0; \quad \frac{\partial v(0, Zh)}{\partial \eta} = 0; \quad v(1, Zh) = 0, \quad (44)$$

где $F_1 = \frac{r_1 v}{\delta^2}$; $F_2 = \frac{r_2 v}{\delta^2}$; $G_1 = \frac{\gamma_1 v}{\delta^2}$; $G_2 = \frac{\gamma_2 v}{\delta^2}$; $\omega = \frac{\Delta p \delta^2}{\rho l v}$.

Результаты численного решения задачи (43) – (44) приведены на рис. 8, 9. Из их анализа следует, что при $F_1 = F_2 = G_1 = G_2 = 0$ профиль скорости совпадает с классическим профилем².

Течение жидкости в локально-неравновесных условиях (рис. 9) сопровождается периодическими колебаниями скорости, максимальная амплитуда которых наблюдается на участке гидродинамической стабилизации профиля скорости.

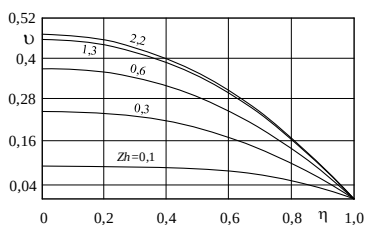


Рис. 8. Формирование нестационарного профиля скорости. $\omega = 1$;

$$F_1 = F_2 = G_1 = G_2 = 0$$

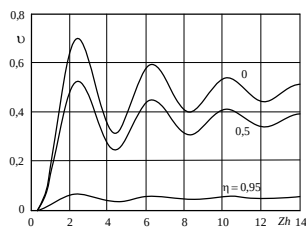


Рис. 9. Изменение скорости в отдельных точках поперечной координаты во времени.

$$\omega = 1; \quad F_1 = 0,8; \quad F_2 = 0,4; \quad G_1 = 0,89; \quad G_2 = 0,63$$

В пятой главе даны основные положения, связанные с разработкой математических и компьютерных моделей сложных трубопроводных сетей. В их основе лежит электрогидравлическая аналогия. Электрогидравлическая аналогия основана на двух законах Кирхгофа, широко применяемых в расчетах электрических цепей. Алгоритм их применения к расчетам гидравлических сетей сводится к итеративному определению так называемых увязочных расходов. При разработке модели необходимо определять гидравлические характеристики (зависимости потерь напора от расхода) всех участков сети.

Указанный алгоритм позволяет построить модель с паспортными данными. Однако реальные характеристики могут существенно отличаться от них. Для наибольшего приближения модели к реальному объекту необходимо выполнять идентификацию модели. В задачах идентификации неизвестными являются гидравлические сопротивления трубопроводов, которые в настоящей работе определяются на основе теоретических результатов, полученных в третьей главе

² Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. – 412 с.

диссертации. Результаты решения задачи теплового пограничного слоя были использованы для определения коэффициента теплоотдачи. Для этого в программных расчётах было задействовано полученное в четвертой главе диссертации критериальное уравнение теплообмена. Далее на основании гидродинамической теории теплообмена найденный коэффициент теплоотдачи использовался для определения коэффициента сопротивления трения. Вычисленные коэффициенты трения на всех участках рассматриваемых тепловых сетей позволили выполнить идентификацию моделей, т.е. их максимальное приближение к реальным тепловым сетям. Предложенный подход позволил сократить время вычислительных процедур на ЭВМ, т.к. коэффициент трения определялся не в результате длительного итеративного расчёта (известный классический способ), а по зависимостям, выведенным в настоящей работе. Существенное ускорение сходимости итераций было достигнуто ещё и благодаря использованию квадратичной зависимости в формуле увязочного расхода, определяемого в ходе каждой итерации.

Используя указанные алгоритмы, в диссертации приводятся результаты построения компьютерной модели теплосети централизованного теплоснабжения г. Саратова (от ТЭЦ-5 и ГРЭС). Результаты расчетов давлений для одного из участков теплосети приведены на рис. 10, из анализа которого следует, что ввиду неравномерного рельефа местности приходится одновременно использовать дросселирующие клапаны (B25, B27), каскад понизительных насосных (НС-2, НС-3) и подпорный клапан (B26). Выполненные на модели исследования позволили разработать рекомендации по наиболее оптимальному перераспределению нагрузки между ТЭЦ-5 и ГРЭС.

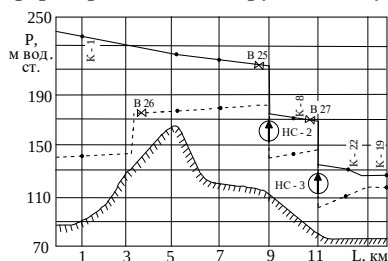


Рис. 10. Распределение давлений в прямой и обратной магистралях второго вывода ТЭЦ-5. P — давление; L — длина тепловывода; штрихованная — отметка высот местности; — — — прямая магистраль; — обратная магистраль

В пятой главе диссертации приводятся также результаты разработки компьютерной модели для проекта объединения теплосетей ТЭЦ Волжского автомобильного завода (ТЭЦ ВАЗ) и Тольяттинской ТЭЦ (ТоТЭЦ). Необходимо построить работу сети от двух источников, имеющих разные схемы снабжения (открытую (ТЭЦ ВАЗ) и закрытую (ТоТЭЦ)). Для обеспечения выполнения всех положений технического задания была разработана компьютерная модель единой гидравлической системы.

Основные выводы и результаты работы

1. На основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомым функций получены точное и приближенное аналитические решения математической модели стационарной двумерной задачи теплопроводности с источником теплоты. Метод построения численно-аналитического решения отличается большей универсальностью, поскольку он

может быть использован при переменных по координатам физических свойствах среды и источнике теплоты.

2. Получены численно-аналитические решения для математических моделей теплопроводности с переменными физическими свойствами среды и гидродинамики при зависимости вязкости от поперечной пространственной переменной. Метод основан на определении дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий. Применение дополнительной искомой функции позволяет сводить решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. Дополнительные граничные условия определяются в таком виде, чтобы их выполнение получаемым решением было эквивалентно выполнению исходного дифференциального уравнения в граничных точках.

3. Получены численно-аналитические решения для математических моделей гидродинамики и теплообмена в ламинарных и турбулентных пограничных слоях, основанные на определении фронта динамического и температурного возмущения и дополнительных граничных условий. Определение фронта возмущения означает принятие конечной скорости распространения действующих сил (причин) и их следствий, несмотря на то, что решению подлежат параболические уравнения движения и энергии, основанные на допущении о бесконечной скорости их распространения. Исследование, найденных таким путём решений, показало, что уже в третьем приближении они практически совпадают с известными в литературе классическими решениями, полученными численными методами.

4. Используя основные положения теории двухфазного запаздывания, разработан метод математического моделирования распределения скорости в движущихся жидкостях в локально-неравновесных условиях. Для вывода определяющего уравнения движения (модифицированного уравнения Навье – Стокса) используется формула Ньютона для касательного напряжения, в которой учитываются скорости и ускорения касательного напряжения и градиента скорости. Показано, что учет релаксационных свойств жидкости приводит к временной задержке формирования профиля скорости.

5. Разработана математическая модель нестационарного теплообмена в движущихся жидкостях с учётом локальной неравновесности реальных процессов, основанная на использовании теории двухфазного запаздывания, в которой учитывается скорость изменения во времени как теплового потока, так и градиента температуры.

6. Разработаны комплексы программ, предназначенные для получения решений рассматриваемых в диссертации задач. Создан комплекс программ для расчета гидравлических сетей, позволяющий за счет учёта квадратичных членов при определении увязочного расхода существенно ускорить сходимость итераций в задаче потокораспределения.

Список публикаций в рецензируемых журналах, состоящих в системе Web of Science:

[1] Кудинов И.В., Курганова О.Ю., Ткачев В.К. Получение точного аналитического решения стационарной двумерной задачи теплопроводности с

источником теплоты // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. 2019. Т. 23, № 1. – с. 1-9.

[2] Eremin, A. V., Stefanyuk, E. V., Kurganova, O. Y., Tkachev, V. K., & Skvortsova, M. P. A generalized function in heat conductivity problems for multilayer structures with heat sources // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2018. – Т. 47. – №. 3. – С. 249-255.

[3] Kolesnikov S.V., Kudinov V.A., Trubitsyn K.V., Tkachev V.K., & Stefanyuk E.V. Computer models of pipeline systems based on electro hydraulic analogy // Innovations and prospects of development of mining machinery and electrical engineering. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2017. – V. 87. – №. 3. – UNSP 032015.

[4] Eremin A.V., Trubitsyn K.V., Kudinov I.V., Kudinov V.A., Tkachev V.K., & Stefanyuk E.V. Study of fast relaxing excitations caused by ultrashort laser pulses in nanoscale domain // Proceedings of the International conference on actual issues of mechanical engineering, 2017. – V. 133. – P. 202-208.

[5] Kudinov I.V., Eremin A.V., Tkachev V.K., Kudinov V.A., Trubitsyn K.V., & Stefanyuk E.V. Mathematical modelling of strongly non-equilibrium transfer processes at nanoscopic scale // Proceedings of the International conference on actual issues of mechanical engineering, 2017. – V. 133. – P. 382-389.

Список публикаций в рецензируемых журналах, состоящих в системе Scopus:

[6] Tkachev V.K. Approximate analytical solution to the stationary two-dimensional heat conduction problem on infinite bar with the source of heat // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 552(1). 2019.

[7] Eremin A.V., Trubitsyn K.V., Kolesnikov S.V., Kudinov I.V., & Tkachev V.K. Computer models of hydraulic systems of district heating // International scientific conference environmental science for construction industry. MATEC Web of Conferences. – EDP Sciences, 2018. – V. 193. – UNSP 02028.

Список основных публикаций в рецензируемых журналах из перечня ВАК:

[8] Ткачев В.К. Получение точного аналитического решения нестационарного уравнения Навье-Стокса // Южно-Сибирский научный вестник. – 2019. – № 4. С. 296 – 302.

[9] Ткачев В.К., Еремин А.В., Тарабрина Т.Б., Кудинов И.В. Гидродинамика и теплообмен в жидкости при зависимости вязкости от температуры // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации. 2019. № 3 (44). С. 70-86.

[10] Еремин А.В., Ткачев В.К., Тарабрина Т.Б., Кудинов И.В., Колесников С.В. Получение аналитического решения задачи теплообмена для турбулентного пограничного слоя // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». – 2019. – Том 8, № 6. С. 540 – 545.

[11] Кудинов В.А., Котова Е.В., Курганова О.Ю., Ткачев В.К. Экспериментально-теоретическое исследование температуры цилиндра высокого давления турбины Т-100-130 // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. Т. 62. № 5. 2019. С. 459 – 468.

[12] Котова Е.В., Еремин А.В., Кудинов В.А., Ткачев В.К., Кузнецова А.Э. Метод дополнительных искомых функций в задачах теплопроводности с переменными физическими свойствами среды // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. – 2019. – №. 2. С. 59 – 70.

Список программ для ЭВМ, зарегистрированных в Роспатенте:

[13] Еремин А.В., Жуков В.В., Кудинов И.В., Курганова О.Ю., Ткачев В.К. и др. Решение нестационарных задач теплопроводности на основе совместного использования методов Л. В. Кантаровича и Бубнова – Галеркина. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017661494 от 16.10.2017 г.

[14] Котова Е.В., Кудинов И.В., Еремин А.В., Ткачев В.К. и др. Решение нелинейных задач нестационарной теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018660951 от 30.08.2018 г.

Автореферат отпечатан с разрешения диссертационного совета 24.2.377.02
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»
(протокол № 3 от 08.02.2022 г.)

Заказ № 78. Тираж 120 экз.

Отпечатано на ризографе.
ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»
Отдел типографии и оперативной полиграфии
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244