

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Самарский государственный технический университет»

На правах рукописи

Дилигенская Анна Николаевна

**Методы идентификации, анализ и синтез
алгоритмов последовательной параметрической
оптимизации в обратных задачах
технологической теплофизики**

05.13.01 – Системный анализ, управление и обработка информации
(в промышленности)

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора технических наук

Научный консультант

д. т. н., проф.

Рапопорт Эдгар Яковлевич

Самара – 2019

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Постановка проблемы системного анализа обратных задач технологической теплофизики	15
1.1. Прямые и обратные задачи математической физики	15
1.2. Обратные задачи теплопроводности в теплофизических исследованиях	18
1.3. Обзор методов решения обратных некорректных задач	28
1.4. Применение методов теории оптимального управления системами с распределенными параметрами для решения обратных задач	36
1.5. Выводы по главе 1	41
Глава 2. Метод минимаксной оптимизации в линейных одномерных обратных задачах теплопроводности	43
2.1. Экстремальная постановка обратной задачи теплопроводности	43
2.2. Переход к задаче оптимального управления с интегральным критерием качества	53
2.3. Предварительная параметризация искомым управлений и соответствующих им функций состояния объекта	58
2.4. Решение задачи математического программирования на основе альтернансного метода	63
2.5. Численные методы решения задачи математического программирования	68
2.6. Выводы по главе 2	72
Глава 3. Метод минимаксной оптимизации в базовых обратных задачах теплопроводности	73
3.1. Метод минимаксной оптимизации в задаче идентификации внутреннего сосредоточенного воздействия	73
3.2. Идентификация закона пространственного распределения внутренних источников тепла в обратных задачах теплопроводности	90

3.3.	Метод минимаксной оптимизации в граничных обратных задачах теплопроводности	106
3.4.	Метод минимаксной оптимизации в ретроспективной обратной задаче теплопроводности	112
3.5.	Метод минимаксной оптимизации в коэффициентных обратных задачах теплопроводности	123
3.6.	Метод минимаксной оптимизации в двумерной граничной обратной задаче теплопроводности	137
3.7.	Выводы по главе 3	154
Глава 4. Метод модальной идентификации в обратных задачах теплопроводности		
4.1.	Метод модальной идентификации внутреннего пространственно-временного управления	157
4.2.	Метод модальной идентификации граничного воздействия в двумерной обратной задаче теплопроводности	167
4.3.	Выводы по главе 4	180
Глава 5. Метод параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности с неточным измерением контролируемых температур		
5.1.	Метод параметрической оптимизации в граничной обратной задаче теплопроводности с предварительным сглаживанием результатов температурных измерений	182
5.2.	Метод параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности с учетом интервальных неопределенностей возмущений	187
5.3.	Выводы по главе 5	203
Глава 6. Примеры технических приложений методов параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности		
6.1.	Восстановление потока тепловых потерь в процессе индукционного нагрева металла	204

6.2.	Определение постоянной мощности тепловыделения в процессе индукционного нагрева	210
6.3.	Определение граничных условий теплообмена на поверхности барабана котла	213
6.4.	Идентификация теплофизических характеристик, зависящих от пространственной координаты, в задачах несвязанной термоупругости	216
6.5.	Выводы по главе 6	219
Заключение		220
Список литературы		222
Приложение А.		242
Приложение Б.		243
Приложение В.		244
Приложение Г.		245
Приложение Д.		246
Приложение Е.		247

Введение

Актуальность темы исследования. В настоящее время теория обратных задач математической физики (ОЗМФ) является одним из перспективных, интенсивно развивающихся направлений прикладной математики, актуальность которого обусловлена широким распространением данных задач в различных сферах естествознания, техники, научных и инженерных приложений, что отражается в большом количестве типов ОЗМФ и направлений их исследования.

В сфере инженерной теплофизики одну из широких областей применения теории некорректных и обратных задач составляют обратные задачи теплопроводности (ОЗТ), возникающие при идентификации и диагностике неизвестных характеристик технологических процессов, проектировании нагревательных установок и тепловых конструкций, выборе оптимальных режимов функционирования нагревательного оборудования, и решение таких задач является важной проблемой, во многом определяющей эффективность ответственных производственных процессов в энергетике, металлургии, машиностроении, авиационной и космической технике и других сферах.

В ОЗТ необходимо определить неизвестные характеристики тепловых процессов по некоторой экспериментально полученной информации о выходной величине — температурном поле, опосредованно содержащем проявления искомым характеристик. Такие задачи в исходной постановке относятся к числу некорректно поставленных, и обычно для получения их устойчивых решений требуется применение специального математического аппарата.

Теория некорректных задач математической физики была создана основополагающими работами академиков А.Н. Тихонова [1], М.М. Лаврентьева [2] и В.К. Иванова [3] и получила дальнейшее развитие в их работах и работах В.Я. Арсенина, А.Л. Бухгейма, Ф.П. Васильева, В.В. Васина, В.Б. Гласко, А.М. Денисова, С.И. Кабанихина, В.А. Морозова, А.И. Прилепко, В.Г. Романова, В.П. Тананы, А.М. Федотова, А.Г. Яголы, Р. Латтеса, Ж.Л. Лионса, J. Gullum, K. Miller и многих других [4–19], и к настоящему моменту является одним из основных направлений современной прикладной математики.

Значительные результаты в разработке методов решения ОЗТ в области

технологической теплофизики получены О.М. Алифановым, Е.А. Артюхиным, А.О. Ватульяном, Л.А. Коздобой, Ю.М. Мацевитым, А.В. Мултановским, А.В. Ненарокомовым, Д.Ф. Симбирским, Н.В. Шумаковым, J.V. Beck, V. Blackwell, D.A. Murio, H.-J. Reinhardt и другими учеными [20—32].

Для преодоления некорректности постановки ОЗТ в основном используются два возможных пути. Первый основывается на сведении задачи к условно-корректной постановке путем привлечения дополнительной информации об искомом решении и соответствует поиску решений на компактных множествах [2; 5; 9; 33]. Во втором подходе применяются классические алгоритмы нахождения приближенных решений некорректно поставленных задач на основе численных методов регуляризации с использованием сглаживающих функционалов [4; 31; 34—36].

Существующие методы решения ОЗТ в основном сводятся к достаточно сложным вычислительным алгоритмам, требующим высокой квалификации и большого предварительного опыта пользователей, и не содержат анализ общих качественных характеристик и базовых свойств получаемых по предлагаемым схемам идентифицируемых воздействий, на основе которых может быть построена в достаточной степени универсальная алгоритмически точная конструктивная процедура поиска искомых величин, сравнительно просто реализуемая на завершающем этапе с помощью стандартных численных методов.

Большие возможности дальнейшего развития методов решения ОЗТ в указанном направлении содержатся применительно к широко распространенным на практике экстремальным постановкам ОЗТ в форме минимизации температурных невязок в соответствующих функциональных пространствах [11; 23; 37].

Эффективное решение подобных задач оптимизации может быть реализовано на базе современной теории и техники оптимального управления системами с распределенными параметрами (ТОУ СРП), в которых учитываются особенности теплообменных процессов, связанные с пространственной распределенностью управляемых величин.

Начиная с основополагающих работ А.Г. Бутковского, к настоящему времени в трудах Г.Л. Дегтярева, А.И. Егорова, Ю.В. Егорова, В.А. Ковалея, Ж.-Л. Лионса, К.А. Лурье, И.М. Першина, В.И. Плотникова, Л.М. Пустыльникова,

Э.Я. Рапопорта, Т.К. Сиразетдинова, О.Ю. Торгашевой и других ученых получен ряд фундаментальных результатов, на базе которых могут быть построены новые эффективные подходы к решению ОЗТ [17; 38–52].

Учитывая изложенное, актуальной научно-технической задачей является разработка новых эффективных и реализуемых на практике подходов к решению обратных задач теплопроводности, основанных на положениях современной теории оптимизации объектов с распределенными параметрами и сохраняющих качественные особенности процессов нестационарной теплопроводности.

Диссертация посвящена разработке, теоретическому обоснованию, построению вычислительных алгоритмов и практическому применению нового конструктивного алгоритмически точного метода решения основного круга обратных задач технологической теплофизики в экстремальной постановке, обеспечивающего нахождение физически реализуемых идентифицируемых воздействий на сходящихся компактных множествах последовательно параметризуемых искомым величин.

Объектом исследования являются процессы нестационарной теплопроводности, описываемые математическими моделями в виде линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа в одномерных и двумерных областях канонической формы.

Цели и задачи диссертационной работы:

Целью работы является совершенствование существующих методов решения обратных задач технологической теплофизики путем использования предлагаемой процедуры их точной редукции к специальным условно-корректным задачам последовательной параметрической оптимизации искомым идентифицируемых воздействий, разрешаемым с помощью обоснованных в диссертации конструктивных вычислительных процедур без применения численных регуляризирующих алгоритмов.

Основные задачи в этом направлении сводятся к:

- разработке и теоретическому обоснованию процедуры редукции исходной некорректно поставленной обратной задачи теплопроводности в экстремальной постановке к условно-корректной ОЗТ путем сужения множества искомым решений до компактного множества физически реализуемых функций;

- построению и теоретическому обоснованию процедуры последовательной параметризации искомых решений условно-корректной ОЗТ и ее дальнейшей редукции к задаче минимизации оцениваемых в равномерной метрике невязок между результатами температурных измерений и их модельными представлениями;
- разработке и теоретическому обоснованию методов и вычислительных алгоритмов для решения полученной специальной минимаксной задачи математического программирования на основе специального метода параметрической оптимизации, использующего альтернативные свойства оптимальных температурных распределений, подобные свойствам нелинейных чебышевских приближений;
- разработке и теоретическому обоснованию процедуры последовательной параметризации идентифицируемых воздействий в условно-корректных ОЗТ на основе модального описания нестационарных температурных полей;
- разработке и исследованию методик и вычислительных алгоритмов решения широкого круга задач по идентификации основных воздействий в моделях процесса нестационарной теплопроводности: граничного теплового потока, внутренних сосредоточенных или распределенных воздействий по мощности внутреннего тепловыделения, а также зависящих от температуры или от пространственной координаты основных теплофизических характеристик.

Научная новизна заключается в разработке, теоретическом обосновании и технике применения для широкого круга технических приложений конструктивного алгоритмически точного метода последовательной параметрической оптимизации физически реализуемых решений обратных задач теплопроводности на компактных множествах их определения. В работе получены следующие основные научные результаты в указанном направлении:

- Предложена и теоретически обоснована процедура редукции широкого круга ОЗТ в экстремальной постановке к условно-корректным вариационным задачам оптимального управления бесконечномерным объектом

с распределенными параметрами по критерию минимизации температурных невязок в равномерной метрике на интервале идентификации, которые отличаются от известных поиском физически реализуемых решений ОЗТ на компактном множестве функций, непрерывных вместе со своими первыми производными.

- Разработаны и обоснованы не имеющие известных аналогов алгоритмы последовательной параметризации искомого решения минимаксной бесконечномерной вариационной задачи и ее точной редукции к задаче минимизации на компактном множестве искомого параметра погрешностей чебышевских приближений для отклонений температурных измерений от их модельных описаний.
- Разработаны и обоснованы конструктивные методики алгоритмически точного решения параметризуемых задач нелинейных чебышевских приближений температурных невязок на временном интервале периода идентификации заданной длительности применительно к основным постановкам типовых ОЗТ.
- Предложен, разработан и теоретически обоснован не имеющий известных аналогов метод идентификации упорядоченной совокупности модальных составляющих граничных и внутренних пространственно-временных воздействий в ОЗТ (метод модальной идентификации) по результатам температурных измерений с последующим восстановлением искомого значения в форме разложения в усеченный ряд по собственным функциям исследуемых краевых задач.
- Предлагаемые методы регуляризации и алгоритмы последовательной параметрической оптимизации решений обратных задач теплопроводности детализированы, конкретизированы и разработаны на уровне конструктивных расчетных методик применительно к представляющим самостоятельный научный интерес типичным обратным задачам технологической теплофизики: коэффициентным обратным задачам, ОЗТ с идентифицируемыми начальными состояниями, граничными и внутренними, сосредоточенными, пространственно-распределенными и пространственно-вре-

менными воздействиями, описываемыми линейными и нелинейными одномерными и двумерными уравнениями теплопроводности.

Теоретическая и практическая значимость. В диссертации разработан новый конструктивный метод нахождения с требуемой точностью физически реализуемых решений обратных задач технологической теплофизики без применения численных регуляризирующих алгоритмов, который может быть использован для решения широкого круга ОЗТ по идентификации основных характеристик и параметров процессов нестационарной теплопроводности при реализации технологических процессов, а также для решения задач идентификации, анализа, моделирования и оптимизации процессов и объектов технологической теплофизики, систем с распределенными параметрами, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа.

Предлагаемый метод обеспечивает повышение точности и снижение трудоемкости при идентификации основных не подлежащих непосредственному измерению характеристик процесса теплопроводности и позволяет получить искомые воздействия в удобной для практического использования параметризованной форме.

Практическая значимость работы заключается в разработанном специальном математическом, алгоритмическом и программном обеспечении, которое может быть непосредственно использовано для решения конкретных ОЗТ в различных технических приложениях.

На основе разработанного метода выполнены исследования основных теплофизических параметров теплопроводности и термоупругости полимерных и композиционных материалов при составлении их паспортных характеристик.

Полученные результаты используются при планировании экспериментальных исследований процессов нестационарной теплопроводности и термоупругости.

Предложенные автором методики использованы в практике определения режимов индукционного нагрева при производстве алюминиевых полуфабрикатов.

Результаты исследований применены при проведении идентификации математических моделей при создании компьютерного тренажёра основного тех-

нологического оборудования Стерлитамакской ТЭЦ и Новостерлитамакской ТЭЦ, филиалов ООО «Башкирская генерирующая компания».

Реализация результатов исследований. Полученные в работе теоретические положения и практические результаты использованы:

- при выполнении НИР по проектам Российского Фонда Фундаментальных Исследований «Методы и алгоритмы оптимизации процессов нестационарной теплопроводности в технологических объектах с распределёнными параметрами» (№ 18-08-00565); «Разработка и теоретическое обоснование алгоритмически точного метода решения векторных задач оптимального управления техническими объектами с распределёнными параметрами» (№ 18-08-00048); «Применение специальных методов оптимизации для решения обратных задач теплопроводности» (№ 15-08-06872); «Аналитические методы оценки и алгоритмы реализации программной управляемости детерминированных и не полностью определенных систем с распределёнными параметрами» (№ 15-08-01347); «Разработка основ теории и методов построения систем управления многооперационными, непрерывными технологическими процессами, гарантирующими достижение требуемого эксплуатационного качества выпускаемой продукции» (№ 15-08-04209); «Моделирование и управление объектами с распределёнными параметрами с применением нечёткой логики» (№ 14-08-00446); «Аналитическое конструирование агрегированных регуляторов в динамических системах с распределёнными параметрами» (№ 12-08-00277); «Разработка основ теории и методов реализации энергосберегающих систем оптимального управления технологическими процессами изолирования проводных кабелей связи» (№ 11-08-01171); «Разработка методов структурного моделирования объектов и систем управления с распределёнными параметрами на базе аппроксимации пространственного распределения информационных сигналов» (№ 10-08-00754);
- при выполнении НИР по проектам: «Теория, вычислительные алгоритмы и технические приложения специальных методов математического моделирования, идентификации и управления в сложноструктурированных системах» (в рамках базовой части государственного задания в сфере на-

учной деятельности по заданию № 1271 Минобрнауки РФ, 2014–2016 гг.); «Теория построения и методы реализации стратегий программного и позиционного управления техническими объектами с распределенными параметрами» (в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности по заданию Минобрнауки РФ, 2012–2014 гг.); «Теория и приложения аналитических методов синтеза агрегированных систем управления техническими объектами с распределенными параметрами» (в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности по заданию Минобрнауки РФ, 2011 г.);

- при выполнении НИР по проекту «Теория, вычислительные алгоритмы и технические приложения точных методов решения краевых задач оптимального управления системами с распределенными параметрами в условиях чебышевских оценок заданных множеств», (федерально-целевая научно-техническая программа 539/09, 2009–2011 гг.).

Материалы диссертационных исследований использованы в учебном процессе в ФГБОУ ВО «СамГТУ» при подготовке бакалавров и магистров по направлениям 27.03.04 и 27.04.04 «Управление в технических системах» и бакалавров по направлению 27.03.03 «Системный анализ и управление».

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы, основанные на системном подходе к решаемой проблеме, в том числе методы теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, теории систем автоматического управления, теории тепло- и массопереноса, аппарат конечных интегральных преобразований, методы численного и компьютерного моделирования: методы численного интегрирования и дифференцирования, численные методы аппроксимации и сглаживания экспериментальных данных.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод редукции ОЗТ к условно-корректной вариационной задаче минимизации температурных невязок, оцениваемых в равномерной метрике на компактном множестве физически реализуемых искомых решений.

2. Алгоритмы последовательной параметризации искомым решений минимаксной вариационной задачи и ее последующей точной редукции к задаче нелинейных чебышевских приближений для отклонений температурных измерений от их модельных описаний.
3. Конструктивные методики и результаты алгоритмически точного решения параметризуемых задач минимизации ошибок равномерного приближения температурных невязок на интервале идентификации заданной длительности применительно к основным постановкам ОЗТ.
4. Метод и алгоритмы модальной идентификации в обратных задачах теплопроводности.
5. Результаты решения обратных задач теплопроводности применительно к ответственным промышленным объектам технологической теплофизики.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях: Международная научная конференция «2018 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon)» (Владивосток, 2018 г.); XX международная конференция «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (Самара, 2018 г.); X Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела (Самара, 2017 г.); XVIII международная конференция «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (Самара, 2016 г.); XXIX международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях» (Самара, 2016 г.); VII международная научная конференция молодых ученых «Электротехника. Электротехнология. Энергетика» (ЭЭЭ-2015) (Новосибирск, 2015 г.); XVI международная конференция «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (Самара, 2014 г.); I международная научная конференция молодых ученых «Электротехника. Энергетика. Машиностроение» (ЭЭМ-2014)» (Новосибирск, 2014 г.); международная научно-практическая конференция «Техника и технологии: Пути инновационного развития», (Курск, 2011 г.); XII международная конференция «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (Самара, 2010 г.); международная научно-техническая конференция «Инфор-

мационные, измерительные и управляющие системы (ИИУС-2010)», (Самара, 2010 г.); международная научная конференция «Проблемы управления, передачи и обработки информации» (АТМ-ТКИ-50) (Саратов, 2009 г.); XI межвузовская конференция «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2001 г.); международная научно-техническая конференция «Качество, безопасность и энергосбережение» (Самара, 1998 г.); VII межвузовская конференция «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 1997 г.); VI межвузовская конференция «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 1996 г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 44 печатных работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах, состоящих в системах Web of Science и Scopus: [53–57], 14 статей в рецензируемых журналах из перечня ВАК [58–71], 22 публикации в других изданиях, сборниках научных трудов, материалов конференций разного уровня [72–93], 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [94], 2 учебных пособия [95; 96].

Личный вклад автора. Основные положения и результаты диссертационной работы получены автором лично. Постановка научной проблемы, постановка и решение задач исследования, непосредственное выполнение основной части работы, выполненной в соавторстве, принадлежат автору. В [54; 55; 57; 76] автором разработана концепция решения обратных задач теплопроводности, методы исследования проблемы параметрической оптимизации решений обратных задач теплопроводности на множествах непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций. В [62; 64] автором предложены, разработаны, исследованы и экспериментально отлажены методы решения ОЗТ. В [68; 69; 77–80; 82] выполнена постановка задачи, реализована методика решения задач исследования. Работы [53; 56; 58–61; 63; 65–67; 72–75; 81; 94] выполнены без соавторов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, 6 глав, заключения и библиографии. Общий объем диссертации 247 страниц, из них 221 страниц текста, включая 80 рисунков и 22 таблицы. Библиографический список включает 209 наименований.

Глава 1

Постановка проблемы системного анализа обратных задач технологической теплофизики

1.1. Прямые и обратные задачи математической физики

Обратные задачи математической физики формулируются по отношению к задачам прямого моделирования (условно называемым «прямыми» задачами). Задачи математической физики делятся на прямые и обратные на основе соблюдения или нарушения причинно-следственных связей, направление которых совпадает или противоположно направлению потока информации от входных данных задачи к искомой величине. В качестве обобщенной базовой математической модели задач математической физики рассматривается операторное уравнение

$$A\eta = \varkappa, \quad \eta \in H, \quad \varkappa \in \Xi, \quad (1.1)$$

задающее взаимосвязь между входными величинами η исследуемого явления, процесса или объекта и выходными переменными \varkappa .

Здесь A — некоторый оператор, действующий из метрического пространства H в метрическое пространство Ξ и ставящий в соответствие величине η величину \varkappa . Таким образом, оператор A формально задает преобразование входных величин в выходные и является математической моделью (ММ) исследуемого процесса или объекта.

К прямым задачам относятся задачи по определению вектора выхода \varkappa по известному оператору A и информации о входных воздействиях η .

При постановке обратных задач подразумевается, что η — это неизвестная характеристика ММ исследуемого объекта или процесса, которая не может быть непосредственно измерена; \varkappa — характеристика, наблюдаемая в результате эксперимента и связанная с η при помощи оператора A . Таким образом, в обратных задачах требуется найти решение η уравнения (1.1), отвечающее заданному оператору A и правой части \varkappa , что соответствует определению причинных характеристик η по результатам измерений их косвенных проявлений \varkappa .

Решение η обратной задачи, выбираемое из некоторого множества $H : \eta \in H$,

может быть записано в виде $\eta = \mathfrak{R}(\varkappa)$, где \mathfrak{R} — некоторый оператор, под которым понимается алгоритм вычисления искомой характеристики η объекта или процесса по данным \varkappa . Вид оператора \mathfrak{R} и свойства множеств H и Ξ определяются конкретными постановками задач, в которых также задается мера близости элементов (метрика) на рассматриваемых множествах. Таким образом, при решении конкретной задачи должны быть заданы H — метрическое пространство искомых характеристик объекта или процесса и Ξ — метрическое пространство характеристик наблюдаемого процесса (косвенных характеристик объекта).

Тем самым, обратные задачи заключаются в определении свойств объекта или среды, лежащих в основе протекающего процесса, что соответствует нарушению причинно-следственных связей в модели исследуемого объекта, и предусматривают построение (уточнение) модельного оператора или определение неизвестной информации о входных воздействиях по имеющимся данным о выходных характеристиках процесса.

Характерным признаком обратных задач является их физическая нереализуемость [20], обусловленная «обращением» причинно-следственной связи, что и приводит к неустойчивости их решений относительно погрешностей входных данных, неизбежных при измерениях. Такое положение вызывает необходимость использования специального математического аппарата для решения ОЗМФ.

Решение обратных задач основывается на понятии корректности их постановок, введенном французским математиком Ж.Адамаром на основе анализа задач математической физики в работах [97] и [98], последняя из которых известна в русском переводе [99].

Задача (1.1) называется корректно поставленной (по Адамару) на метрических пространствах H и Ξ , если выполняются следующие условия:

- 1) для любого $\varkappa \in \Xi$ существует решение $\eta \in H$ (условие разрешимости);
- 2) для любого $\varkappa \in \Xi$ решение $\eta \in H$ единственно (условие однозначности);
- 3) решение задачи η непрерывно зависит от исходных данных \varkappa (условие устойчивости).

Условия 1) и 2) связаны с математической определенностью задачи [4] и означают, что существует обратный оператор A^{-1} , область определения которого (или область значений оператора A) совпадает с Ξ . Условие 2) выполняется только в том случае, когда оператор A является взаимно однозначным. Условие 3) характеризует физическую детерминированность задачи и означает, что обратный оператор должен быть непрерывным, т.е. малым изменениям правой части \varkappa должны соответствовать малые изменения решения η [4].

Задачи, не удовлетворяющие условиям 1)–3), называются некорректно поставленными задачами, при этом устойчивость или неустойчивость решения зависят от выбора пространства решений H , а также способа задания нормы в этом пространстве. Задачи могут быть некорректно поставленными в одном пространстве решений (или при одном выборе нормы) и корректно поставленными в другом пространстве (или при другом задании нормы) [4]. Выбор пространства решений и способа задания в нем нормы обычно производится исходя из требований задачи.

В ситуации, когда получить точное аналитическое решение некорректно поставленной (по Адамару) задачи невозможно, существует возможность перехода к иной – корректной постановке задачи. Проблема устойчивого решения обратных задач впервые была рассмотрена А.Н. Тихоновым в работе [1], на основе которой М.М. Лаврентьевым в работе [2] было введено понятие корректности по Тихонову или условной корректности задачи.

Задача (1.1) называется корректно поставленной по Тихонову (условно корректной), если выполнены следующие условия:

- 1*) априори известно, что для точно заданного значения $\varkappa = \bar{\varkappa}$ существует решение $\bar{\eta}$ уравнения $A\bar{\eta} = \bar{\varkappa}$, принадлежащее заранее заданному подклассу $\bar{H}_0 \in H_0$ множества $H_0 \in H$ возможных решений уравнения (1.1);
- 2*) решение единственно на множестве \bar{H}_0 ;
- 3*) решение непрерывно зависит от правой части \varkappa , т.е. бесконечно малым вариациям \varkappa , не выводящим решение из класса \bar{H}_0 , соответствуют малые изменения решения η .

Множество \bar{H}_0 , на котором некорректная задача становится корректно поставленной, называется множеством (классом) корректности.

1.2. Обратные задачи теплопроводности в теплофизических исследованиях

1.2.1. Области применения и роль обратных задач в теплофизических исследованиях

Обратные задачи теплопроводности возникают при решении задач идентификации и диагностики технологических процессов, проектирования технических объектов и устройств, управления технологическими процессами, объектами или системами [21].

Задачи, возникающие при идентификации и диагностике технологических процессов основываются на результатах экспериментальных исследований и ориентированы на построение ММ процессов путем определения структуры модели и свойственной ей количественной информации. Такие задачи принято относить к типу, называемому задачами интерпретации данных физических экспериментов (наблюдений) (задачами распознавания, идентификации или диагностики).

Методы решения ОЗТ разрабатываются для всестороннего изучения тепловых процессов, их параметрической идентификации, диагностики технического состояния в условиях, когда выполнение экспериментальных исследований не может быть реализовано в полной мере или связано с большой сложностью, в том числе с существенными материальными и временными затратами, и как следствие, не может являться достаточным источником информации.

Решение ОЗТ позволяет по ограниченной, полученной в результате проведения эксперимента информации о температуре в некоторой части объекта, доступной для измерения, определить теплофизические свойства объекта, идентифицировать начальные и граничные условия, уточнить математическую модель процесса.

Область применения ОЗТ в промышленности широка, перечислим только некоторые практические приложения [21], нашедшие отражение в данной диссертационной работе.

1. Нестационарная теплометрия технологических процессов нагрева и охлаждения.

В технологических процессах, связанных с нагревом или охлаждением из-

делий, например, процессах закалки, горячей штамповки деталей для определения нужных тепловых режимов их обработки необходимо определить условия теплообмена на поверхности тела. Обычно непосредственное измерение меняющихся во времени плотностей тепловых потоков и коэффициентов теплоотдачи не представляется возможным или слишком затруднено. В большом числе случаев измерение температуры на поверхности контакта также оказывается невозможным. При этом температура на части поверхности или в отдельных точках внутри тела может быть доступной для измерений.

В такой ситуации возникает необходимость решать граничные ОЗТ, позволяющие расчетным путем находить тепловые условия на поверхности тела по результатам температурных измерений на доступной области.

Также подобные задачи могут встречаться при исследовании режима теплообмена в трубопроводах или газоведах, на экспериментальных газодинамических стендах, при испытаниях различных двигательных установок или технических объектов.

2. Идентификация пространственно-временных условий теплообмена.

В задаче определения пространственно-временных функций плотностей тепловых потоков или коэффициентов теплоотдачи, характеризующих теплообмен на поверхности, использование некоторого количества одномерных датчиков в разных точках по объему тела позволяет найти дискретные поля искомых величин. На основе решения двух- и трехмерных граничных ОЗТ возможно идентифицировать искомые характеристики в форме непрерывных пространственно-временных полей. При этом измерения температуры могут выполняться внутри твердого тела или на части его теплоизолированной границы.

3. Исследование теплофизических свойств сред.

Определение теплофизических характеристик (ТФХ) материалов на основе решения коэффициентных ОЗТ обладает рядом преимуществ перед обычными методами их нахождения, особенно, при исследовании ТФХ на больших интервалах температур, при высоких скоростях и градиентах изменения температуры.

Примером является актуальная задача нахождения зависимости коэффициента теплопроводности от температуры и определения температурного поля

стальной заготовки в процессе ее охлаждения при закалке стали. Такой процесс характеризуется высокой скоростью снижения температуры и достаточно широким интервалом ее изменения, что зачастую делает непригодными для использования традиционные методы теплофизических измерений. Решение коэффициентных ОЗТ позволяет получить нужный результат с удовлетворительной точностью.

4. Оптимизация проектных решений с учетом тепловых ограничений.

На этапе проектирования тепловых устройств происходит выбор технических решений, позволяющих реализовать необходимый тепловой режим: расчет проектных параметров, уточнение характеристик объекта. Основу теплового проектирования составляет ММ системы, связывающая искомые проектные характеристики с величинами, выражающими тепловое состояние объекта и прочими внешними или внутренними воздействиями на объект.

Различные конкретные энергетические, теплообменные или геометрические характеристики системы соответствуют возможным вариантам проектно-конструкторских решений. Такая задача оптимального теплового проектирования по своей сути соответствует обратной задаче в экстремальной постановке: при выбранном критерии оптимальности по условиям, определяющим требования к допустимому состоянию объекта, найти причинные характеристики, удовлетворяющие заданному состоянию [21].

Основные задачи технологической теплофизики, исследуемые в диссертации, представлены в табл. 1.1.

1.2.2. Общая математическая формулировка обратных задач теплопроводности

При исследовании теплофизических процессов в большинстве случаев либо не наблюдается слишком резких изменений теплового потока, либо время релаксации исследуемых сред достаточно мало, и в такой ситуации в теории теплопроводности применяется гипотеза Фурье (основной закон теплопроводности) о пропорциональности плотности теплового потока градиенту $\text{grad } T = \nabla T$ температуры T , что приводит к уравнению параболического типа — нелинейно-

Таблица 1.1. Проблемы технологической теплофизики, решаемые с помощью обратных задач теплопроводности

Задачи технологической теплофизики	Прикладная обратная задача теплопроводности	Определяемые характеристики	Тип обратной задачи теплопроводности
Исследование технологических процессов нагрева и охлаждения металлических заготовок (деталей) перед обработкой давлением	Идентификация условий теплообмена на поверхности тела для определения нужных для обработки тепловых режимов	Плотности тепловых потоков; Коэффициенты теплоотдачи на поверхности тел	Граничные ОЗТ
Оптимальное по технологическим критериям качества (быстродействие, точность процесса) управление нестационарным температурным полем в термических процессах	Идентификация и диагностика нестационарных условий теплообмена; Управление тепловыми нагрузками	Плотности тепловых потоков; Коэффициенты теплоотдачи на поверхности тел	Граничные ОЗТ
Оптимальное по технологическим критериям качества (быстродействие, точность процесса, энергосбережение) управление нестационарным температурным полем в процессах индукционного нагрева металла	Идентификация и диагностика нестационарных условий теплообмена; Управление тепловыми нагрузками	Плотности тепловых потоков; Коэффициенты теплоотдачи на поверхности тел	Граничные ОЗТ
	Идентификация тепловых источников	Удельная мощность внутреннего тепловыделения; Закон пространственного распределения теплоисточников	Внутренние ОЗТ

Продолжение табл. 1.1

<p>Оптимальное проектирование теплового оборудования (индукционных нагревателей)</p>	<p>Идентификация тепловых источников</p>	<p>Удельная мощность внутреннего тепловыделения; Закон пространственного распределения теплоисточников</p>	<p>Внутренние ОЗТ</p>
<p>Изучение теплофизических характеристик материалов и конструкций</p>	<p>Идентификация теплотехнических коэффициентов</p>	<p>Коэффициенты теплопроводности, теплоемкости</p>	<p>Коэффициентные ОЗТ</p>

му уравнению нестационарной теплопроводности

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T(P,t)}{\partial t} = \nabla(\lambda(T)\nabla T(P,t)) + F(T), \quad P \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, t^*). \quad (1.2)$$

Здесь λ , c , ρ — коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность материала, в общем случае зависящие от температуры; F — мощность внутренних источников тепла; P — вектор пространственных координат; n принимает значения 1, 2, 3; t — время, $t^* \leq +\infty$.

Если зависимостью теплофизических характеристик λ , c , ρ исследуемого объекта и мощности тепловых источников F от температуры, а также от пространственных координат можно пренебречь, то осуществляется переход от уравнения (1.2) к базовой линейной модели процесса нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial T(P,t)}{\partial t} = a\nabla^2 T(P,t) + \frac{F}{c\rho}, \quad P \in \Omega, \quad t \in (0, t^*), \quad (1.3)$$

где $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ — коэффициент температуропроводности.

При отсутствии тепловых источников ($F = 0$) уравнение (1.3) называется уравнением Фурье и имеет вид

$$\frac{\partial T(P,t)}{\partial t} = a\nabla^2 T(P,t), \quad P \in \Omega, \quad t \in (0, t^*). \quad (1.4)$$

Уравнение (1.2), (1.3) или (1.4) дополняется начальным условием, задающим закон распределения температуры внутри тела в начальный момент времени

$$T(P, 0) = T_0(P), \quad P \in \Omega, \quad (1.5)$$

и условиями теплообмена на ограничивающих поверхностях, обычно в виде граничных условий второго (ГУ-2)

$$-\lambda \frac{\partial T(P,t)}{\partial \bar{n}} = q(P,t), \quad P \in \Pi \quad (1.6)$$

или третьего (ГУ-3) рода

$$-\lambda \frac{\partial T(P,t)}{\partial \bar{n}} = \alpha(T(P,t) - T_c(t)), \quad (1.7)$$

где \bar{n} — внутренняя нормаль к кусочно-гладкой поверхности Π , ограничивающей область $\Omega \ni P$; q — плотность теплового потока или величина тепловых

потерь на поверхности Π ; α — коэффициент конвективной теплоотдачи между твердым телом и окружающей средой; T_c — температура окружающей среды.

В обратных задачах теплопроводности какие-либо из совокупности причинных характеристик $\lambda, c, \rho, T_0, q, \alpha, T_c$ неизвестны, требуется найти их и соответствующее температурное поле $T(P, t)$ по известным остальным характеристикам и дополнительной информации о распределении температуры в некоторых фиксированных (или со временем меняющих свое положение) точках $d_i \in \Omega$ (в некоторых постановках рассматривается пространственно-непрерывное измерение температур).

Актуальными задачами технологической теплофизики являются задачи определения характеристик процессов (тепловых потоков на поверхности, коэффициентов теплообмена между взаимодействующими средами), а также внутренних тепловых состояний изделий или неизвестных теплофизических характеристик материалов по измеряемым температурным полям.

1.2.3. Анализ корректности обратных задач теплопроводности

Многие типовые ОЗТ в зависимости от постановок [21; 26], могут быть сведены к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$A\eta \equiv \int_a^b K^{(x)}(x, \xi)\eta(\xi)d\xi = \varkappa(x), \quad c \leq t \leq d \quad (1.8)$$

или уравнению Вольтерра первого рода

$$A\eta \equiv \int_0^t K^{(t)}(t, \tau)\eta(\tau)d\tau = \varkappa(t), \quad 0 \leq t \leq t^*. \quad (1.9)$$

Здесь оператор A имеет форму линейного интегрального оператора, заданного дифференциальным уравнением в совокупности с краевыми условиями; $K^{(x)}(x, \xi)$ и $K^{(t)}(t, \tau)$ — измеримые по своим переменным функции, определенные на соответствующих пространствах.

Анализ выполнения условий корректности для уравнений (1.8), (1.9) показывает [4; 6; 13], что первое условие корректности по Адамару выполняется не для любой функции $\varkappa(x)$ или $\varkappa(t)$, т.к. не для всякой правой части уравнений решение существует на заданной области изменения соответствующего

аргумента. Также для этих уравнений не выполняется третье условие корректности.

В большинстве случаев при рассмотрении линейных постановок задач математической физики и, в частности, ОЗТ оператор A вполне непрерывен, и следовательно, не имеет ограниченного обратного [100]. Вследствие этого, решения обратной задачи с разными, но достаточно близкими правыми частями могут сколь угодно сильно отличаться друг от друга. Обратное отображение $A^{-1}\varkappa$ в этом случае не будет обладать свойством непрерывности.

Таким образом, ОЗТ, например, в одной из базовых постановок — краевой постановке, — сводится к решению интегрального уравнения первого рода, являющегося типичной неустойчивой задачей [4; 13]. Другие примеры неустойчивых обратных задач различных типов, соответствующих возможным случаям вычислительных постановок: краевой постановке, постановке в форме Коши и вариационной постановке, — приведены в работах [20; 21].

Некорректность постановки задачи интерпретации данных физического эксперимента вызвана следующими физическими факторами [6]:

1. Свойства элементов \varkappa из множества Ξ определяются свойствами пространства H и заданным оператором A . Погрешности измерений могут вывести данные $\tilde{\varkappa}$ из множества Ξ . В таком случае уравнение с возмущенными данными $A\eta = \tilde{\varkappa}$ не имеет решений.
2. Оператор A обратных задач имеет «интегральный» характер. Значения $A\eta$ таких операторов слабо чувствительны к возмущениям воздействий η , что и вызывает большие отклонения решений η , соответствующие малым возмущениям исходных данных \varkappa .

Под операторами, обладающими интегральным характером, понимаются вполне непрерывные или компактные операторы [100]. В этом случае обратный оператор либо не существует, либо неограничен.

Анализ условий 1*)–3*) корректности по Тихонову для ОЗТ, сводимых к уравнениям типа (1.8) или (1.9), приводит к следующим положениям [4; 6; 9]: исследование существования решения обратной задачи интерпретации данных наблюдений обычно проводится на основе физических соображений и может

рассматриваться как естественное следствие правильности принятой модели A и наблюдаемости величины \varkappa .

Выполнение условия 2^*), означающего обратимость оператора, требуется только на множестве \overline{H}_0 .

Единственность решения зависит от конкретного вида уравнения. Вопрос о единственности, рассматриваемый только при точных входных данных, имеет существенное значение, т.к. вносит содержательный смысл в задачу поиска приближения к решению при неточных входных данных. Единственность решения может следовать из физического смысла задачи, или же его доказательство является чисто математической проблемой, которая требует строгого исследования и решение которой полагается проведенным на предыдущих этапах [6]. Для задач интерпретации данных физических экспериментов вопрос о единственности решения уравнения рассматривается применительно к их конкретным постановкам при использовании точной входной информации $\varkappa \in \Xi$ [6] и является принципиальным вопросом при поиске приближений к точному решению в случае использования неточных данных.

Доказательства теорем единственности для некоторых ОЗТ приведены, например, в работе [101].

В наиболее актуальной вариационной постановке ОЗТ, т.е. в задаче о минимизации расстояния между $A\eta$ и $\tilde{\varkappa}$ устойчивое решение может быть получено только при определенных ограничениях на A и H . Оператор A не должен быть вполне непрерывным, иначе малым отклонениям $A\eta$ и, следовательно, расстоянию между $A\eta$ и $\tilde{\varkappa}$ могут соответствовать возмущения η (и, следовательно, $\tilde{\eta}$), далекие от точного решения задачи. Рассмотрение задачи на множестве \overline{H}_0 автоматически обеспечивает получение устойчивого решения задачи и может служить способом решения обратных задач.

1.2.4. Классификация обратных задач теплопроводности

Обратные задачи теплопроводности формулируются по отношению к определению коэффициентов или функций самого уравнения теплопроводности или краевых условий, включающих начальное условие, характеризующее состояние объекта в начальный момент времени и граничные условия, описывающие характер теплообмена на границах области, занимаемой объектом. Такие задачи

предусматривают определение ТФХ материалов или параметров теплообмена, мощности внутренних источников, начального (или просто более раннего) теплового состояния или функций, входящих в граничные условия. Также к ОЗТ относятся задачи по определению геометрических параметров объекта, а также задачи, предусматривающие уточнение математической модели объекта.

В литературе встречаются разные подходы к классификации ОЗТ [14; 20; 26; 102; 103]. В данной работе будем придерживаться классификации, подобно [20; 26], где деление ОЗТ производится в соответствии с принадлежностью искомым характеристикам рассматриваемых процессов какому-либо классу. Таким образом, в диссертационной работе рассматриваются граничные (идентификация ГУ), внутренние, которые подразделяются на задачи определения мощности внутренних тепловых источников и ТФХ, и ретроспективные (определение начального состояния) ОЗТ. Геометрические, комбинированные ОЗТ, а также модельные задачи, являющиеся задачами структурной идентификации, в данной работе не рассматриваются.

Основные типы ОЗТ, решению которых посвящены разработанные в диссертации методы, отражены на рис. 1.1.

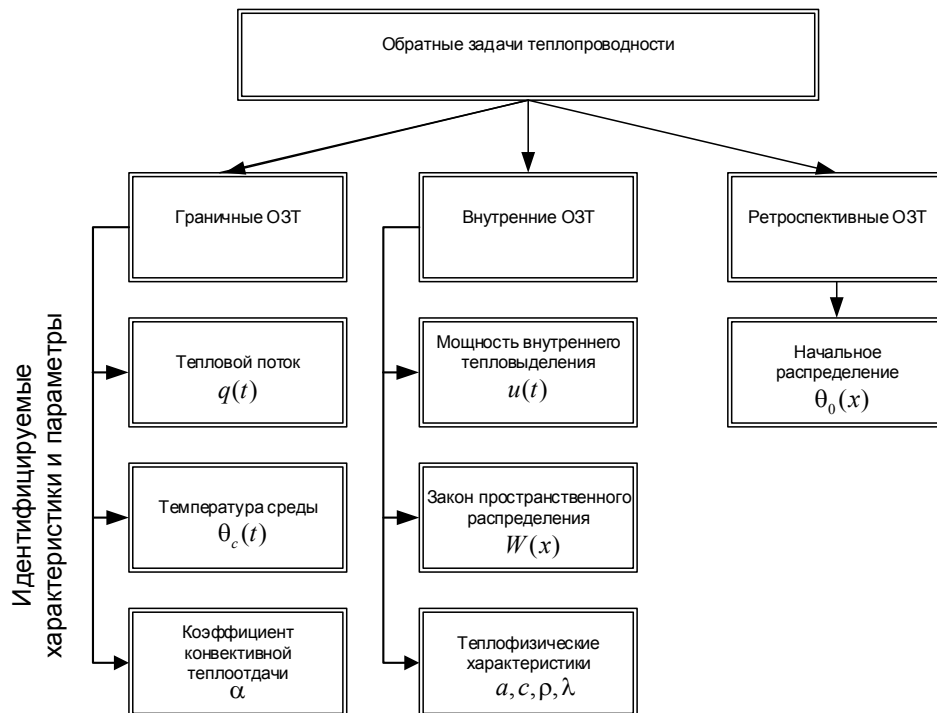


Рис. 1.1. Классификация по основным системным признакам обратных задач теплопроводности

1.3. Обзор методов решения обратных некорректных задач

Методы решения обратных задач математической физики базируются на общих принципах решения некорректных задач, отраженных в математической теории регуляризации, интенсивное развитие которой с момента ее появления и до настоящего времени привело к большому числу научных публикаций.

В данной работе приведен лишь краткий обзор методов решения обратных некорректных задач только в той мере, насколько это касается выполняемых исследований. Базовыми монографиями, посвященными теории и методам решения некорректных и обратных задач, являются книги А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина [4], В.К. Иванова, В.В. Васина и В.П. Тананы [9], М.М. Лаврентьева [2; 8]. Также подробное изложение теоретических аспектов некорректных задач и методов их решения можно найти в работах [5; 12; 13; 15; 16; 104; 105], в больших систематических обзорах [106] 1972 года и [107] 1982 года и других.

Развитие и практическое применение теории и техники некорректных задач для решения конкретных обратных задач теплопроводности, разработка методологии параметрической идентификации тепловых процессов применительно к технологическим объектам, объектам энергетики, машиностроения, космической области, к летательным аппаратам отражены в работах многих отечественных и зарубежных ученых. Основной вклад в эту область вносят такие всемирно известные школы ученых-теплофизиков, занимающихся решением ОЗТ, как российская школа, ведущими представителями которой являются О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, В.В. Михайлов, А.В. Ненарокомов, П.В. Прохунцов, С.В. Румянцев, С.В. Резник и др., [20–24; 36; 108–110], украинская школа, основу которой составили Л.А. Коздоба, П.Г. Круковский, Ю.М. Мацевитый, А.В. Мултановский, Д.Ф. Симбирский [25–28; 102; 111; 112], американская, которую в первую очередь составляют J.V. Beck, V. Blackwell, D.A. Murio [31], и западно-европейская, в первую очередь представленная Н.-И. Reinhardt [30], и другие.

1.3.1. Общее понятие регуляризирующего алгоритма

Анализ корректности ОЗМФ устанавливает тот факт, что их решение может не обладать свойством устойчивости, и для эффективного решения таких задач теория регуляризации предлагает подход, состоящий в формулировке иной – корректной постановки задачи. Основу этой постановки составляет понятие регуляризирующего алгоритма (РА) как способа приближенного решения некорректно поставленной задачи с приближенно известной входной информацией [4].

Пусть уравнение $A\eta = \bar{\varkappa}$ с точным значением правой части $\bar{\varkappa}$ имеет единственное решение $\eta = \bar{\eta} \in H$. Пусть вместо $\bar{\varkappa}$ имеется информация о его приближенном значении: $\tilde{\varkappa} \in \Xi$, таком, что $\mathbf{p}_{\Xi}(\tilde{\varkappa}, \bar{\varkappa}) \leq \delta$, где $\mathbf{p}_{\Xi}(\varkappa_1, \varkappa_2)$ – мера близости (расстояние) в Ξ , зависящая от конкретной задачи, δ – погрешность задания элемента $\bar{\varkappa}$.

Тогда регуляризирующим алгоритмом называется оператор \mathfrak{R} , который каждой паре элементов $(\tilde{\varkappa}, \delta)$ ставит в соответствие вполне определенный элемент $\tilde{\eta} \in H$, причем $\tilde{\eta} \rightarrow \bar{\eta}$ при $\delta \rightarrow 0$ [4].

К настоящему времени создано большое число специальных (так называемых, регулярных) методов, предусматривающих замену исходной некорректной (неустойчивой) задачи задачей или последовательностью задач, корректных в обычном смысле. В обобщенном смысле под регуляризирующей последовательностью \mathfrak{R}_n операторов понимается совокупность таких операторов \mathfrak{R}_n , каждый из которых позволяет устойчивым образом находить приближенное решение $\tilde{\eta}_n = \mathfrak{R}_n \varkappa$ уравнения (1.1), которое стремится к точному решению $\bar{\eta}$ при $n \rightarrow \infty$. Также регуляризирующая последовательность \mathfrak{R}_n позволяет построить приближенное решение $\tilde{\eta}_n = \mathfrak{R}_n \tilde{\varkappa}$ по приближенным данным. При этом, при стремлении к нулю погрешности δ задания правой части \varkappa обеспечивается сходимость $\tilde{\eta}_n$ к точному решению $\bar{\eta}$ при $n \rightarrow \infty$.

Существуют два базовых подхода преодоления некорректности постановки обратной задачи [4].

1.3.2. Введение задачи в класс корректности

Первый подход, впервые предложенный в работе [9], предусматривает переход к условно-корректной постановке задачи на основе привлечения дополнительной информации о решении.

Один из способов построения РА для некорректно поставленной задачи (1.1) применяется в случае, когда существует априорная информация о том, что точное решение $\bar{\eta}$ принадлежит некоторому компактному множеству корректности $\overline{\overline{H}}_0$. Основываясь на информации, позволяющей выделить компакт $\overline{\overline{H}}_0$, содержащий точное решение задачи, производится введение задачи в класс корректности [9], и далее для ее решения на указанном множестве могут использоваться существующие численные методы и алгоритмы. Априорная информация о решении задается исходя из физических соображений в виде сведений, например, о монотонности, выпуклости или ограниченности искомых функций.

Математические результаты, обобщенные в понятии условной корректности, отражают следующий факт [5; 6].

Основанное на идеях, высказанных в работе [1], и введенное в работе [8] понятие условно-корректной (корректной по Тихонову) постановки задачи сформулировано по отношению к уравнению (1.1) со вполне непрерывным оператором A , при каждом $\varkappa \in \Xi$ имеющим единственное решение. Тогда для обеспечения устойчивости решения достаточно, чтобы множество искомых решений было компактным. Учет условия компактности в постановке задачи практически осуществляется на основе количественной информации об искомом решении, и решение задачи в такой постановке сводится к решению исходного уравнения на некотором множестве функций с некоторыми априорными количественными ограничениями на решение.

Множество $\overline{\overline{H}}_0$, на образе $\overline{\overline{\Xi}}_0 = A\overline{\overline{H}}_0$ которого обратный оператор A^{-1} существует и является непрерывным, является множеством корректности.

Для некоторых задач множество корректности может быть построено естественным образом, исходя из физического смысла задачи. Для актуальных прикладных ОЗМФ наиболее важными являются компактные и ограниченно компактные множества. Проведенные исследования [9; 113–116] доказывают, что компактные множества могут служить примерами множеств корректности в задаче (1.1) для непрерывных (замкнутых) операторов.

При решении ОЗМФ понятие компакта может быть распространено на произвольные метрические пространства [6]. Например, на множестве функций одной переменной, заданных на некотором отрезке, подмножество функций, ограниченных и имеющих ограниченную первую производную, является компактным. Такое подмножество не содержит функций с резкими локальными выбросами, что является определяющим для их физической реализуемости.

Для применения этого подхода необходима априорная информация о принадлежности точного решения $\bar{\eta}$ задачи некоторому компактному множеству $\overline{\overline{H}}_0$. Также должно быть известно, что непрерывный оператор A взаимно однозначно отображает $\overline{\overline{H}}_0$ на $A\overline{\overline{H}}_0 \subset \Xi$.

В задачах интерпретации данных физических экспериментов информация о состоянии объекта (температурном поле), как правило, подвержена действию возмущений (погрешностей измерений). В такой ситуации вместо уравнения (1.1) приходится рассматривать уравнение $A\eta = \tilde{\varkappa}$, при этом возмущенный элемент $\tilde{\varkappa}$ может и не принадлежать Ξ .

В этом случае имеет смысл перейти к вариационной постановке задачи - сформулировать задачу о минимизации расстояния между $A\eta$ и $\tilde{\varkappa}$ [6].

Пусть $\tilde{\Xi}$ - множество экспериментальных данных, учитывающих возможные погрешности наблюдения.

За приближение $\tilde{\eta}$ к точному решению уравнения $A\eta = \varkappa$ возможно принять элемент, на котором достигается точная нижняя грань расстояния между $A\eta$ и $\tilde{\varkappa}$

$$\tilde{\eta} = \arg \inf_{\eta \in H} \mathbf{p}_{\tilde{\Xi}}(A\eta, \tilde{\varkappa}), \quad (1.10)$$

Построению и исследованию методов приближенного решения задач на классах корректности посвящены, в первую очередь, работы М.М. Лаврентьева и представителей его школы. Идея метода, представленного в [2], заключается в том, что для нахождения приближенных решений на классах корректности, в качестве которых рассматриваются компактные множества, строятся последовательные приближения к точному решению уравнения (1.1). В работах [2; 8; 106; 117] и других авторами рассматриваются вопросы отыскания классов корректности, оценки устойчивости (поиск так называемой функции корректности).

Основными недостатками данного подхода является необходимость удачно-

го задания априорных количественных ограничений на искомое решение (функции корректности), а также необходимость решения задачи сглаживания реальной входной информации $\tilde{\mathcal{K}}$, чтобы обеспечить ее принадлежность некоторому подмножеству, обладающему нужными свойствами, согласованными со свойствами выделенного компакта $\overline{\overline{H_0}}$. Необходимость непосредственного задания ограничений на искомое решение значительно сужает круг решаемых задач.

В дальнейшем, подход М.М. Лаврентьева получил свое развитие в методе квазирешений В.К. Иванова и методе регуляризации А.Н. Тихонова.

Понятие квазирешения, введенное В.К. Ивановым в работе [3] обобщает понятие решения в обычном смысле и восстанавливает все условия корректности. Приведем определение понятия квазирешения для задач класса интерпретации [3; 118].

Рассматривается уравнение (1.1) с непрерывным оператором A , действующим из нормированного пространства H в нормированное пространство Ξ , решение которого при точном значении правой части $\overline{\mathcal{K}} \in \Xi$ принадлежит компакту $\overline{\overline{H_0}}$. Пусть вместо $\overline{\mathcal{K}}$ задано его приближенное значение $\tilde{\mathcal{K}} \in \tilde{\Xi}$, $\tilde{\Xi} \supset \Xi$. Квазирешением уравнения (1.1) называется элемент η_K , минимизирующий невязку $\|A\eta - \tilde{\mathcal{K}}\|$ на множестве $\overline{\overline{H_0}}$

$$\eta_K = \arg \inf_{\eta \in \overline{\overline{H_0}}} \|A\eta - \tilde{\mathcal{K}}\|. \quad (1.11)$$

Тем самым, в задаче о квазирешении на априори заданном компакте, содержащем точное решение уравнения (1.1), ищется элемент, на котором достигается точная нижняя грань расстояния между $A\eta$ и $\tilde{\mathcal{K}}$.

Ввиду непрерывности оператора A , невязка $\|A\eta - \tilde{\mathcal{K}}\|$ является непрерывным функционалом $I(\eta) = \|A\eta - \tilde{\mathcal{K}}\|$, достигающим своей нижней грани на компакте $\overline{\overline{H_0}}$, т.е. квазирешение существует для любого $\tilde{\mathcal{K}} \in \tilde{\Xi}$. Если $\tilde{\mathcal{K}} = \overline{\mathcal{K}} \in \overline{\overline{AH_0}}$, то квазирешение совпадает с обычным решением, т.к. $A\bar{\eta} = \overline{\mathcal{K}}$, и, следовательно, $I(\bar{\eta}) = \|A\bar{\eta} - \overline{\mathcal{K}}\| = 0$.

В.К. Ивановым доказано [9], что при выполнении определенных условий квазирешение уравнения (1.1) существует, единственно и непрерывно зависит от правой части, тем самым, задача о квазирешении является условно-корректной.

В.К. Иванов предложил основную идею метода квазирешений и исследо-

вал вопросы существования, единственности, устойчивости квазирешений относительно возмущений правой части. Для численного нахождения квазирешений предложено использовать цепочку конечномерных расширяющихся компактов $\overline{\overline{H}}_{0n}$, $n = 1, 2, \dots, N$, в этом случае последовательность решений конечномерных задач сходится к «точному» квазирешению [118].

В основе теории условно-корректных задач лежит теорема [4] о непрерывности обратного отображения $A^{-1} : A(\overline{\overline{H}}_0) \rightarrow \overline{\overline{H}}_0$ в случае, если $\overline{\overline{H}}_0$ — компактное множество, а оператор A является непрерывным и взаимно однозначным.

Из приведенной теоремы следует факт, что минимизирующая последовательность $\{\eta_n\}$ сходится к точному решению $\bar{\eta}$ при $n \rightarrow \infty$, если η_n принадлежит классу возможных решений $\overline{\overline{H}}_0$, и множество $\overline{\overline{H}}_0$ является компактом.

Из теоремы Вейерштрасса [37; 119] следует, что для приближенного решения на компактном множестве задачи минимизации

$$I(\eta) \rightarrow \inf, \eta \in H$$

достаточно с помощью какого-либо метода построить любую минимизирующую последовательность $\{\eta_n\}$:

$$\eta_n \in \overline{\overline{H}}_0, \quad n = 1, 2, \dots; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I(\eta_n) \geq I^* = \inf_{\overline{\overline{H}}_0} I(\eta) > -\infty,$$

и в качестве искомой величины взять значение функции $I(\eta_n)$ с достаточно большим номером n .

Минимизирующая последовательность $\{\eta_n\}$, из которой может быть отобрана хотя бы одна подпоследовательность, сходящаяся к некоторой точке из $\overline{\overline{H}}_0$, и которая сходится ко множеству $\{\eta \in \overline{\overline{H}}_0 : I(\eta) = I^*\}$ в метрике $\mathfrak{p}_{\overline{\overline{H}}_0}$, является регулярной в метрике $\mathfrak{p}_{\overline{\overline{H}}_0}$ и лежит в основе построения устойчивых решений некорректно поставленных задач на компактных множествах.

На практике для поиска квазирешения используются методы минимизации функционалов или функций многих переменных на множестве с ограничениями.

В качестве основного недостатка метода квазирешений по-прежнему указывается необходимость априорного задания компакта, содержащего точное решение, в виде определенной количественной информации о точном решении.

Разработке эффективных алгоритмов приближенного решения некорректных задач на основе априорной информации о характере искомого решения посвящены работы [33; 120–122] и другие. Некоторые новые методы решения некорректно поставленных обратных задач математической физики на множестве ограниченных кусочно-непрерывных функций с использованием априорной информации о решении представлены в работах [123–125].

1.3.3. Численные методы регуляризации решений некорректных обратных задач

Второй подход использует классические алгоритмы решения некорректно поставленных задач с применением численных методов регуляризации. Методы, не требующие задания априорной информации о решении, условно делятся на два класса: использующие принцип саморегуляризации (регуляризация за грублением, естественной регуляризации) и регуляризации по методу А.Н. Тихонова.

При использовании естественной регуляризации рассматривается некорректная задача в исходной постановке, и ее решение строится на основе приближенных методов, допускающих управление мерой близости получаемого решения к точному за счет изменения параметров вычислительных алгоритмов [21]. На практике при реализации данного подхода используется шаговая регуляризация, при которой в качестве параметров, подлежащих изменению, рассматриваются шаги по аргументам, которые согласуются с ошибками входных данных и погрешностью аппроксимации оператора, или степенная регуляризация (за счет выбора степени аппроксимирующего полинома или числа членов ряда в разложении функций, сплайнов и т.д.). В этом случае источники саморегуляризации обычно связаны с эффектом регуляризации самого процесса технологической теплофизики (режим нагрева точки тела, в которой установлен датчик температуры) или с «вязкостными» свойствами вычислительных алгоритмов, заключающимися в естественной фильтрации высокочастотных составляющих в искомой причинной характеристике.

Методы, основанные на принципах естественной регуляризации, используются для решения ряда граничных и коэффициентных ОЗТ [29; 126; 127].

Наиболее общий и универсальный из известных в настоящее время мето-

дов регуляризации для решения некорректных задач, предложен А.Н. Тихоновым [4; 34; 35] и основан на аппроксимации обратного, не являющегося непрерывным, оператора A^{-1} семейством непрерывных операторов.

Существуют различные подходы к построению регуляризирующих операторов, среди которых наиболее распространен вариационный подход. Основная идея состоит в стабилизации минимума среднеквадратического отклонения $A\eta$ от заданной правой части \mathfrak{z} при помощи вспомогательного функционала, зависящего от параметра регуляризации β . Используется сглаживающий функционал

$$I^\beta(\eta) = \|A\eta - \tilde{\mathfrak{z}}\|_{\Xi}^2 + \beta\|\eta\|_H^2. \quad (1.12)$$

Пусть $\tilde{\eta}^\beta$ — элемент, минимизирующий функционал $I^\beta(\eta)$ на множестве H . Если величину параметра β определенным образом согласовать с погрешностью δ задания входных данных, т.е. потребовать $\beta = \beta(\delta)$, то $\tilde{\eta}^{\beta(\delta)} \rightarrow \tilde{\eta}$ при $\delta \rightarrow 0$ (если выполняется условие единственности решения). В работах [114; 120; 128—130] выбор параметра регуляризации осуществляется в соответствии с обобщенным принципом невязки.

Позже возник ряд других алгоритмов, использующих спектральный [131; 132], итерационный способ построения регуляризирующих операторов, шаговую регуляризацию, и т.д.

В настоящее время при решении задач инженерной теплофизики одним из широко используемых и наиболее эффективных подходов является итерационная регуляризация, основанная на минимизации целевого функционала

$$I(\eta) = \|A\eta - \tilde{\mathfrak{z}}\|_{\Xi}^2 \quad (1.13)$$

и методах градиентного спуска. В этом случае для построения регуляризирующих алгоритмов применяются различные итерационные методы, при этом номер итерации используется в качестве параметра регуляризации. Устойчивые приближения получаются при прерывании итерационного процесса на некотором номере итерации, согласованном с погрешностями в исходных данных, что ограничивает постепенное накопление ошибок с ростом числа итераций.

Данный подход для решения широкого спектра ОЗТ предложен О.М. Алифановым и эффективно развивается, в первую очередь, представителями его

школы. Некоторые из полученных обширных результатов представлены в работах [20—23; 36; 108].

1.4. Применение методов теории оптимального управления системами с распределенными параметрами для решения обратных задач

С точки зрения причинно-следственных связей задачи управления, в которых в рамках принятой математической модели нужно найти управляющую функцию, обеспечивающую заданные требования технологического процесса, могут быть отнесены к классу обратных задач. Задачи оптимального управления, использующие критерий оптимальности, и задачи синтеза (проектирования) промышленного оборудования с заданными эксплуатационными характеристиками также могут рассматриваться как обратные задачи.

Поэтому решение широкого круга обратных задач математической физики может быть основано на методах теории автоматического управления и теории оптимального управления.

Точная ММ процесса теплопроводности описывается дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных параболического типа (1.2), (1.3) или (1.4) с краевыми условиями (1.5), (1.6) или (1.7). Такие модели используются для описания процессов или поведения объектов, характеризующихся пространственной распределенностью управляемых величин, и, в общем случае, управляющих воздействий рассматриваемых объектов.

Широкий круг задач системного анализа процессов, учитывающих изменение функции состояния не только во времени, но и в пространственной области, синтеза систем автоматического управления такими процессами и формирования управляющих воздействий рассматривается в современной теории оптимального управления системами с распределенными параметрами (ТОУ СРП), основы которой заложены профессором А.Г. Бутковским во второй половине XX века [38—40; 133—137].

В настоящее время эффективным подходом для научно-технических приложений является формулировка ОЗТ в вариационной постановке и использование экстремального подхода, предусматривающего минимизацию целевого

функционала на множестве возможных решений, для последующего решения задач. Для решения ОЗТ, сформулированных в экстремальной постановке, могут быть использованы методы оптимального управления СРП, которые к настоящему моменту достаточно полно разработаны, исследованы и доведены до получения конкретных результатов. Таким образом, в ТОУ СРП созданы достаточные условия для применения ее математического аппарата для решения широкого круга разнообразных задач и проблем применительно к различным предметным областям.

Для СРП одной из основных форм отыскания условий оптимальности, особенно актуальной для задач программного оптимального управления, позволяющей строить оптимальные алгоритмы изменения управляющих воздействий во времени и в пространстве, является использование необходимых условий оптимальности в форме различных принципов максимума, разработанных для систем с сосредоточенными параметрами (ССП), среди которых центральным результатом, обобщающим положения теории оптимального управления ССП является принцип максимума Понтрягина (ПМП) [138].

В ТОУ СРП получены важные результаты, позволяющие распространить ПМП на объекты с распределенными параметрами (ОРП) при учете ряда принципиальных особенностей.

Результаты, полученные Ю.В. Егоровым, показывают, что применительно к точному модальному описанию ОРП в виде бесконечного числа обыкновенных дифференциальных уравнений возможно непосредственное распространение ПМП в условиях некоторых малостеснительных для прикладных задач допущений [39; 139; 140]. Такой подход может быть применен для поиска сосредоточенных управляющих воздействий (УВ), что позволяет использовать разработанные процедуры синтеза оптимальных алгоритмов управления для ССП.

Для задач оптимального управления СРП, описываемыми интегральными вход-выходными соотношениями относительно управляемой функции состояния ОРП (в виде пространственно-временной композиции функции Грина и стандартизирующего входного воздействия), новый результат в виде принципа максимума получен А.Г. Бутковским [38; 133; 136; 137; 141].

Некоторые частные формы принципов максимума для большого класса

задач оптимального управления ОРП разной пространственной размерности, описываемых дифференциальными уравнениями (ДУ) различного порядка, получены Т.К. Сиразетдиновым [51], А.И. Егоровым [42; 43], Ж.-Л. Лионсом [17], К.А. Лурье [47].

Основным преимуществом использования различных форм принципов максимума в качестве необходимых условий оптимальности (а в случае линейных систем, и в качестве достаточных) служит возможность построения на их основе структуры алгоритмов оптимального управления, априори определяемых с использованием базовых закономерностей предметной области с точностью до некоторого вектора $\Delta^{(N)} = (\Delta_i)$, $i = \overline{1, N}$ упорядоченной последовательности параметров Δ_i [38; 49; 50; 133].

Поиск числа N данных параметров и их конкретных значений Δ_i , обеспечивающих выполнение условий оптимальности соответствующих функционалов качества при заданных прочих условиях краевой задачи, и составляет решение соответствующей задачи оптимального управления.

В типовых ситуациях в качестве параметров Δ_i рассматриваются длительности во времени или протяженности по пространственным координатам отдельных интервалов искомого оптимального управления [38; 49; 50; 133; 136; 142; 143].

Профессором Э.Я. Рапопортом разработан точный метод [142] решения параметризуемых указанным образом краевых задач оптимального управления ОРП, предусматривающий на этапе постановки задачи задание целевого множества допустимых конечных состояний ОРП в бесконечномерном фазовом пространстве (например, в пространстве временных мод управляемой величины).

Точность приближения результирующего состояния оптимального процесса к требуемому конечному пространственному распределению управляемой величины оценивается в равномерной (чебышевской) метрике [144], т.е. по максимальной величине абсолютного отклонения конечного состояния оптимального процесса, соответствующего искомому оптимальному управлению, от заданного в пределах всей области изменения пространственных переменных ОРП. Применение полученного на основе ПМП параметрического представления управляющего воздействия к математической модели ОРП приводит к описанию функции состояния управляемой величины (температурного поля) в виде яв-

ной зависимости от искомого вектора $\Delta^{(N)}$ параметров и пространственных аргументов P , использование которого в выражении соответствующего критерия оптимальности, в свою очередь, позволяет сформулировать задачу параметрической оптимизации процесса управления ОРП.

Такой подход реализует точное (свободное от погрешностей дискретизации или других приемов сведения бесконечномерной модели к сосредоточенной) решение поставленной задачи и использует методы завершающей дискретизации [145; 146] объекта управления только на заключительном этапе нахождения численных решений.

Приведем здесь, согласно [50], на примере пространственно одномерной модели краткое описание алгоритмически точного метода решения краевых задач оптимального управления ОРП [49; 50; 142] при переводе объекта, описываемого пространственно-временной функцией его состояния $Q(x, t)$, из начального ($t = t_0$) в требуемое конечное ($t = t^*$) состояние, заданное функцией $Q^*(x)$ пространственной координаты, с оценкой достигаемой точности

$$\varepsilon = \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, t^*) - Q^*(x)|$$

приближения $Q(x, t^*)$ к $Q^*(x)$ в равномерной метрике.

Пусть найдена параметрическая форма искомого управления $u = u(\Delta) = u(\Delta^{(N)})$, которое характеризуется числом N и значениями $\Delta_i, i = \overline{1, N}$, образующими вектор $\Delta^{(N)} = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N)$. Пусть с его помощью получена параметрическая форма представления аналитической или численной модели поведения управляемой величины $Q(x, t, \Delta^{(N)})$, и на ее основе сформирован критерий оптимальности $I(\Delta^{(N)})$ в форме соответствующей функции $\Delta^{(N)}$

$$I(\Delta^{(N)}) \rightarrow \min_{\Delta^{(N)} \in \Omega} \quad (1.14)$$

на множестве N -мерного пространства Ω параметров Δ_i и задано ограничение на максимально допустимую величину ε_0 абсолютного отклонения конечного температурного состояния от заданного в пределах занимаемой объектом пространственной области:

$$\Phi_{\max}(\Delta^{(N)}) = \max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, t^*, \Delta^{(N)}) - Q^*(x)| \leq \varepsilon_0, \varepsilon_0 > 0. \quad (1.15)$$

Таким образом, критерий оптимальности (1.14) в совокупности с ограничениями (1.15) позволяют поставить специальную задачу нелинейного программирования (или задачу полубесконечной оптимизации (ЗПО)), которая формулируется относительно целевой функции (1.14) конечного числа N переменных Δ_i с бесконечным числом ограничений (1.15) на всем отрезке $[x_0, x_1] \ni x$, определяемых негладкой функцией максимума $\Phi_{\max}(\Delta^{(N)})$ по промежуточной переменной x .

Такая процедура редукции исходной задачи оптимального управления ОРП является точной при использовании точной ММ исследуемого процесса (например, в виде полной бесконечной системы уравнений ОРП), и, следовательно, не сопровождается погрешностями аппроксимации. Формально поиск $\Delta^{(N)} \in \Omega$ производится в некотором N -мерном пространстве параметров Δ_i . Полученная ЗПО может быть решена только с использованием специальных численных методов [142].

Разработанный Э.Я. Рапопортом специальный (альтернативный) метод [142], базирующийся на некоторых качественных свойствах оптимальных состояний $Q(x, t^*, \Delta^{(N)})$ управляемой системы, позволяет на основе дополнительной информации о базовых закономерностях предметной области получить решение задачи (1.14), (1.15).

Условие (1.15) означает, что абсолютное отклонение управляемой величины $Q(x, t)$ в конце оптимального процесса ($t = t^*$) от требуемого состояния $Q^*(x)$ может быть либо меньшим заданного значения $\varepsilon_0 > 0$ на всей области $x \in [x_0, x_1]$, либо в отдельных точках максимума данных отклонений достигать его. Для разрешимости задачи значение ε_0 должно быть не меньше минимально возможной ошибки ε_{\inf} , достижимой при управлении, характеризуемом вектором $\Delta^{(N)}$ с любым числом N .

Основное свойство оптимального результирующего состояния $Q(x, t^*, \bar{\Delta}^{(N)})$ объекта, достигаемого на оптимальном решении $\bar{\Delta}^{(N)}$ ЗПО (1.14), (1.15), состоит в том, что число R таких точек, в которых достигаются предельные допустимые абсолютные отклонения $Q(x, t^*, \Delta^{(N)})$ от $Q^*(x)$, равные ε_0 , не может быть меньше числа искомых параметров оптимального процесса [142].

Если требуемая точность ε_0 задается значением, превышающим минимально достижимую величину (минимакс) $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(N)} > 0$ в классе управлений, опре-

деляемых числом N , то количество R точек с предельно допустимыми отклонениями оказывается равным N . В случае, если задача предусматривает поиск заранее неизвестной величины минимакса $\varepsilon_{\min}^{(N)}$, эта величина также включается в число неизвестных параметров, и число $R = N + 1$ точек альтернанса на единицу превышает число N .

Таким образом, во всех случаях существует равное числу неизвестных в задаче (1.14), (1.15) число R точек $x_j^0 \in [x_0, x_1], j = \overline{1, R}$, в которых при оптимальных значениях параметров $\Delta = \overline{\Delta}^{(N)}$ достигаются предельно допустимые отклонения $\left| Q(x_j^0, t^*, \overline{\Delta}^{(N)}) - Q^*(x_j^0) \right|$.

На основе данного основного свойства удается построить систему соотношений, фиксирующую в R точках $x_j^0 \in [x_0, x_1], j = \overline{1, R}$ выполнение равенств

$$\left| Q(x_j^0, t^*, \overline{\Delta}^{(N)}) - Q^*(x_j^0) \right| = \varepsilon_0, \quad \overline{\Delta}^{(N)} = (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}_2, \dots, \overline{\Delta}_N). \quad (1.16)$$

Эта система оказывается замкнутой относительно всех параметров оптимального процесса, т.е. число соотношений в (1.16) равно числу всех искомым неизвестных. На этой основе возможно осуществить перевод этой системы в систему уравнений относительно всех неизвестных параметров, используя дополнительную информацию о базовых закономерностях предметной области для опознания формы кривой $Q(x, t^*, \overline{\Delta}^{(N)})$. Ее последующее решение соответствует решению исходной задачи. Доказательства альтернансных свойств приведены в [142].

Данный точный метод решения краевых задач с использованием параметрической оптимизации, основанной на альтернансном методе, успешно апробирован и применен к решению широкого круга задач оптимизации технологических процессов тепло- и массопереноса: синтезу алгоритмов программного управления ОРП, решению задач оптимизации процессов нестационарной теплопроводности по различным критериям качества и других [147–150].

1.5. Выводы по главе 1

1. Поставлена научная проблема всестороннего исследования, системного анализа и идентификации процессов технологической теплофизики с позиций современной теории обратных некорректных задач математической

физики.

2. Проанализированы основные типы обратных задач теплопроводности в соответствии с принадлежностью искомым характеристикам какому-либо классу. Приведен круг задач, поставленных относительно идентификации объектов и процессов технологической теплофизики, составляющих технические приложения, представленные в данной диссертационной работе.
3. Проведен обзор современных методов решения обратных некорректных задач математической физики, проанализированы возможности, преимущества и недостатки основных подходов к решению обратных задач теплопроводности: приведение задачи к условно-корректной постановке на основе дополнительной информации о принадлежности решения компактному множеству и применение численных методов регуляризации.
4. Выявлены большие возможности методов построения регулярных решений ОЗТ на компактных множествах, задаваемых исходя из требований физической реализуемости решения, путем построения минимизирующей последовательности, сходящейся к точному решению, принадлежащему компактному.
5. Показаны широкие возможности применения методов теории оптимального управления системами с распределенными параметрами для решения обратных задач теплопроводности, сформулированных в экстремальной постановке, позволяющих установить структуру алгоритмов оптимального управления на основе использования в качестве необходимых условий оптимальности условий, заданных в форме принципов максимума.
6. Продемонстрированы возможности использования алгоритмически точного метода решения краевых задач оптимального управления объектами с распределенными параметрами при оценивании точности приближения результирующего состояния оптимального процесса к требуемому в равномерной метрике, который позволяет получить описание результирующего состояния в виде явной зависимости от вектора параметров, задающего идентифицируемое воздействие, и пространственного аргумента.

Глава 2

Метод минимаксной оптимизации в линейных одномерных обратных задачах теплопроводности

Вначале основные положения метода минимаксной оптимизации рассматриваются применительно к обратным задачам теплопроводности, заданным на основе базовой модели в виде линейных краевых задач, предоставляющих наибольшие возможности для аналитического исследования поставленной проблемы и получения результатов общего характера. В то же время, такие модели в большом числе случаев позволяют осуществлять качественное и количественное описание широкого круга реальных управляемых процессов с достаточной точностью. В дальнейшем в работе полученные результаты будут распространены на решение более сложных ОЗТ.

Основное содержание данной главы отражено в работах [75; 76; 81].

2.1. Экстремальная постановка обратной задачи теплопроводности

Рассматривается базовая линейная одномерная модель процесса нестационарной теплопроводности с внутренним тепловыделением, сформулированная относительно температурного поля $\theta(x, \varphi)$, зависящего от числа Фурье φ и пространственной координаты $x \in [0, 1]$, заданная уравнением теплопроводности в относительных единицах [145; 151; 152]

$$\frac{\partial \theta(x, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \theta(x, \varphi)}{\partial x^2} + \frac{\Gamma}{x} \frac{\partial \theta(x, \varphi)}{\partial x} + \Psi(x)v(\varphi); \quad 0 < x < L; \quad 0 < \varphi \leq \varphi^*, \quad (2.1)$$

дополненная начальным

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad x \in [0, L] \quad (2.2)$$

и граничными условиями второго

$$\frac{\partial \theta(L, \varphi)}{\partial x} = q(\varphi); \quad \frac{\partial \theta(0, \varphi)}{\partial x} = 0; \quad \varphi \in [0, \varphi^*] \quad (2.3)$$

или третьего рода

$$\frac{\partial \theta(L, \varphi)}{\partial x} + Bi \cdot \theta(L, \varphi) = Bi \cdot \theta_c(\varphi); \quad \frac{\partial \theta(0, \varphi)}{\partial x} = 0; \quad \varphi \in [0, \varphi^*]. \quad (2.4)$$

Здесь $v(\varphi)$ и $\Psi(x)$ — соответственно мощность внутренних источников тепла и закон их пространственного распределения;

$q(\varphi)$ — плотность теплового потока на границе $x = L$;

$Bi = \frac{\alpha L}{\lambda}$ — критерий Био, где α — усредненная величина коэффициента теплопередачи;

$\theta_c(\varphi)$ — относительное значение температуры окружающей среды;

$\Gamma \in \{1, 2, 3\}$ — коэффициент формы нагреваемого тела.

Данная математическая модель, несмотря на принятые допущения, при правильно выбранных усредненных значениях теплофизических параметров во многих ситуациях адекватно отражает реальные процессы теплопроводности на соответствующем интервале линеаризации.

В случае $v(\varphi) \neq 0$ модель (2.1)–(2.4) описывает тепловые процессы, характеризующиеся наличием внутренних источников тепла. Одним из наиболее типичных и востребованных на практике таких процессов является индукционный нагрев металла, и линеаризованная модель (2.1)–(2.4) применяется для построения температурных полей, в частности, в процессе нагрева изделий из парамагнитных металлов.

На основе математической модели (2.1)–(2.3) или (2.1), (2.2) и (2.4) могут быть сформулированы базовые постановки внутренней (идентификация источника) [153], граничной [154] и ретроспективной [155–157] ОЗТ.

Так, при постановке внутренней ОЗТ по идентификации мощности внутреннего тепловыделения или закона пространственного распределения теплоисточников, соответственно воздействие $v(\varphi)$ или $\Psi(x)$ является неизвестной величиной, подлежащей идентификации, при известных прочих характеристиках и параметрах.

В граничной ОЗТ плотность теплового потока $q(\varphi)$ неизвестна и является искомой характеристикой, остальные величины считаются заданными.

В ретроспективной ОЗТ начальное температурное распределение $\theta_0(x)$ является идентифицируемой функцией, все другие воздействия считаются известными.

Для решения ОЗТ должна быть задана дополнительная информация о температуре, в качестве которой используются результаты проведения эксперимента, полученные на определенном временном интервале идентификации в некоторых доступных для измерения точках на отрезке $[0, L] \ni x$ при решении одномерной ОЗТ.

Для внутренних и граничных задач наиболее универсальными являются измерения $\theta^*(\varphi)$, осуществляемые на интервале идентификации $\varphi \in [0, \varphi^*]$ в некоторой фиксированной пространственной точке x^* , в качестве которой рассматривается или граница $x^* \in \{0, L\}$ исследуемой области или некоторая точка внутри нее $x^* \in (0, L)$ [14; 21].

В наиболее распространенных постановках ретроспективных обратных задач или считается заданной экспериментальная информация $\theta^*(\varphi)$, полученная подобным образом при $\varphi \in [0, \varphi^*]$, $x^* \in [0, L]$ (здесь и далее такие задачи называются ретроспективными ОЗТ в первой типичной постановке), или могут использоваться так называемые "финальные" наблюдения о пространственно-непрерывном распределении температур $\theta^*(x)$, $x \in [0, L]$ в некоторый фиксированный (финальный) момент времени φ^* (вторая постановка ретроспективных ОЗТ) [14; 21; 158].

В соответствии со сказанным сформулируем модельные внутреннюю, граничную и ретроспективную ОЗТ в экстремальных постановках.

Внутренняя, граничная и ретроспективная ОЗТ в первой постановке формулируются следующим образом.

По заданной температурной зависимости $\theta^*(\varphi)$, полученной в некоторой фиксированной точке контроля $x^* \in [0, L]$ на интервале идентификации $[0, \varphi^*] \ni \varphi$, требуется восстановить неизвестную характеристику, в качестве которой в соответствующей ОЗТ рассматривается одна из следующих функций:

- сосредоточенная мощность внутренних теплоисточников $v(\varphi)$ (во внутренней ОЗТ);
- закон их пространственного распределения $\Psi(x)$ (также во внутренней ОЗТ);
- плотность теплового потока $q(\varphi)$ на границе $x = L$ (в граничной ОЗТ);

- пространственное распределение температур $\theta_0(x)$ в начальный момент времени (в ретроспективной ОЗТ).

При постановке соответствующей ОЗТ идентифицируемая характеристика рассматривается как управляющее воздействие, минимизирующее невязку между наблюдаемой зависимостью $\theta^*(\varphi)$ и аналитическим решением $\theta(x^*, \varphi)$ краевой задачи (2.1) – (2.3) или (2.1), (2.2), (2.4), полученным в той же точке x^* на интервале $[0, \varphi^*]$ при искомом воздействии $v(\varphi)$, $\Psi(x)$, $q(\varphi)$ или $\theta_0(x)$.

Ретроспективная ОЗТ во второй постановке формулируется следующим образом.

По известной температурной зависимости $\theta^*(x)$, $x \in [0, L]$ при $\varphi = \varphi^*$ требуется восстановить начальное распределение температур $\theta_0(x)$, которое минимизирует отклонение от заданного состояния $\theta^*(x)$ точного решения $\theta(x, \varphi^*)$ краевой задачи (2.1)–(2.3) или (2.1), (2.2), (2.4), отвечающего искомой функции $\theta_0(x)$.

При решении указанных задач, сформулированных в экстремальной постановке в форме соответствующей задачи оптимального управления, идентифицируемая характеристика рассматривается в качестве искомого оптимального управляющего воздействия. В целях общности получаемых далее результатов, сформируем вектор искомых управляющих воздействий $\mathbf{u} = u_i$, $i = \overline{1, 4} = \{v(\varphi), \Psi(x), q(\varphi), \theta_0(x)\}$. При этом, в каждой из рассматриваемых ОЗТ идентифицируемым воздействием является только одна из составляющих компонент вектора \mathbf{u} , остальные элементы считаются известными.

На управляющее воздействие u накладываются ограничения

$$v(\varphi) \in V_1, \varphi > 0, \quad (2.5)$$

$$\Psi(x) \in V_2, x \in [0, L], \quad (2.6)$$

$$q(\varphi) \in V_3, \varphi > 0 \quad (2.7)$$

или

$$\theta_0(x) \in V_4, x \in [0, L] \quad (2.8)$$

принадлежности заданному подходящему множеству $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ физически реализуемых функций соответствующего аргумента.

В соответствии с общей концепцией минимаксной оптимизации [49; 50; 142; 143], оценивание абсолютного отклонения модельного значения температурного поля $\theta(x^*, \varphi)$ или $\theta(x, \varphi^*)$ от требуемого распределения $\theta^*(\varphi)$ или $\theta^*(x)$ на заданном временном $[0, \varphi^*] \ni \varphi$ или пространственном $[0, L] \ni x$ интервале осуществляется в равномерной метрике применительно к представляющим наибольший интерес ситуациям в прикладных задачах.

Поставим соответствующие задачи оптимального управления.

Внутренняя, граничная и ретроспективная ОЗТ в первой постановке формулируются следующим образом.

Для объекта (2.1) – (2.3) или (2.1), (2.2), (2.4) необходимо найти такое подчиненное ограничению (2.5), (2.6), (2.7) или (2.8) управляющее воздействие u , при котором на заданном временном интервале $[0, \varphi^*] \ni \varphi$ достигается мини-макс

$$I_1^{(i)}(u) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} |\theta(x^*, \varphi) - \theta^*(\varphi)| \rightarrow \min_{u \in V_i}, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (2.9)$$

Здесь функционал $I_1^{(1)}(u) = I_1(v(\varphi))$ применяется при решении внутренней ОЗТ при идентификации $v(\varphi)$, критерий $I_1^{(2)}(u) = I_1(\Psi(x))$ – при определении $\Psi(x)$, а $I_1^{(3)}(u) = I_1(q(\varphi))$ – при решении граничной обратной задачи, предусматривающей восстановление $q(\varphi)$. Функционал $I_1^{(4)}(u) = \theta_0(x)$ используется при решении ретроспективной ОЗТ в первой типичной постановке.

Ретроспективная ОЗТ во второй постановке формулируется следующим образом.

Для объекта (2.1)–(2.3) или (2.1), (2.2), (2.4) требуется определить подчиненное ограничению (2.8) управляющее воздействие $u = \theta_0(x)$, обеспечивающее на заданной области изменения пространственной переменной $[0, L] \ni x$ выполнение минимаксного соотношения

$$I_1^{(5)}(u) = \max_{x \in [0, L]} |\theta(x, \varphi^*) - \theta^*(x)| \rightarrow \min_{u \in V_4}. \quad (2.10)$$

Переход к условно-корректной постановке обратной задачи осуществляется путем сужения множества V возможных решений до компакта. В разработанном методе сужение производится до класса физически реализуемых на

интервале идентификации функций $u(\varphi)$ или $u(x)$, исходя из требований достаточной гладкости искомых решений.

Для этого за управление вместо функции $u \in \{u(\varphi), u(x)\}$ принимается ее k -ая производная

$$w(\varphi) = \frac{d^k u(\varphi)}{d\varphi^k}, k > 1 \quad (2.11)$$

или

$$w(x) = \frac{d^k u(x)}{dx^k}, k > 1 \quad (2.12)$$

по соответствующему временному φ или пространственному x аргументу, подчиненная типовому ограничению на максимально допустимое (априори неизвестное) значение

$$|w(\varphi)| \leq |w_{\max}(\varphi)|, \varphi \in [0, \varphi^*] \quad (2.13)$$

или

$$|w(x)| \leq |w_{\max}(x)|, x \in [0, L]. \quad (2.14)$$

Условие (2.13) или (2.14) совместно с соотношениями (2.11) или (2.12), соответственно, гарантирует непрерывность $u(\varphi)$ или $u(x)$ вместе с ее $k-1$ производными на рассматриваемом временном или пространственном интервалах.

Далее везде, если не оговаривается иное, рассматривается случай $k = 2$, который обеспечивает поиск управляющего воздействия \mathbf{u} в классе непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций соответствующей временной или пространственной переменной, что исключает резкие локальные скачки \mathbf{u} по времени или по координате, и, тем самым, в большинстве практических ситуаций соответствует физически оправданным требованиям. Указанный класс непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций образует компактное множество, и тем самым, соответствует приведению исходной задачи (2.9) – (2.14) к условно-корректной постановке [159].

Таким образом, условия (2.11) или (2.12) при $k = 2$ обеспечивают переход от искомого оптимального управления $u(\varphi)$ или $u(x)$ к новому (условному) управляющему воздействию $w(\varphi)$ или $w(x)$, подчиненному соответствующему ограничению (2.13) или (2.14) на максимально допустимое значение.

Во внутренней ОЗТ эти соотношения принимают вид

$$V_1 \ni v(\varphi) : \left| \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right| = |w_1(\varphi)| \leq |w_{1 \max}|, \varphi \in (0, \varphi^*) \quad (2.15)$$

в задаче поиска $v(\varphi)$ или

$$V_2 \ni \Psi(x) : \left| \frac{d^2 \Psi}{dx^2} \right| = |w_2(x)| \leq |w_{2 \max}|, \quad x \in (0, L) \quad (2.16)$$

при определении $\Psi(x)$.

При решении граничной ОЗТ сужение множества возможных решений осуществляется на основе выполнения соотношений

$$V_3 \ni q(\varphi) : \left| \frac{d^2 q}{d\varphi^2} \right| = |w_3(\varphi)| \leq |w_{3 \max}|, \quad \varphi \in (0, \varphi^*), \quad (2.17)$$

а для ретроспективной обратной задачи принимается следующий переход

$$V_4 \ni \theta_0(x) : \left| \frac{d^2 \theta_0}{dx^2} \right| = |w_4(x)| \leq |w_{4 \max}|, \quad x \in (0, L). \quad (2.18)$$

В задаче поиска $v(\varphi)$ и $q(\varphi)$ связь искомой функции $u(\varphi)$ с новым управлением $w(\varphi)$ по второй производной $(u)''_{\varphi}$ выполняется на основе соотношений

$$\frac{du(\varphi)}{d\varphi} = \nu(\varphi), \quad \frac{d\nu(\varphi)}{d\varphi} = w(\varphi), \quad u(0) = u_0, \quad \nu(0) = u'_{\varphi}(0) = \nu_0. \quad (2.19)$$

Пространственно распределенные искомые величины $u(x)$ при идентификации $\Psi(x)$ и $\theta_0(x)$ связаны с $w(x)$ соответствующим образом

$$\frac{du(x)}{dx} = \nu(x), \quad \frac{d\nu(x)}{dx} = w(x), \quad u(0) = u_0, \quad \nu(0) = u'_x(0) = \nu_0. \quad (2.20)$$

Априори неизвестные предельные величины $w_{\max} = \{w_{1 \max}, w_{2 \max}, w_{3 \max}, w_{4 \max}\}$ в (2.15), (2.16), (2.17), (2.18) и соответствующие начальные значения $u_0 = \{u(\varphi)(0), u(x)(0)\}$ и $u'(0) = \{u'_{\varphi}(0), u'_x(0)\}$ в (2.19) и (2.20) в каждой из ОЗТ относятся к числу искомых параметров, которые должны быть определены на последующем этапе решения задачи.

В задачах восстановления сосредоточенных воздействий $v(\varphi)$ или $q(\varphi)$ используется точное описание объекта управления (2.1) – (2.3) или (2.1), (2.2), (2.4) в виде бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка относительно коэффициентов $\bar{\theta}_m(\mu_m, \varphi)$ разложения $\theta(x, \varphi)$ в бесконечный ряд по собственным функциям тепловой задачи [151; 160].

Рассмотрим задачу идентификации мощности $v(\varphi)$ внутреннего тепловыделения [57] на примере процесса нестационарной теплопроводности для бесконечной пластины ($\Gamma = 0$), где для простоты изложения и наглядности исследования примем $\theta_0(x) = 0, L = 1$, что не оказывает влияния на сущность предлагаемого метода.

В этом случае модальное описание объекта примет вид [145]

$$\frac{d\bar{\theta}_m(\mu_m, \varphi)}{d\varphi} = -\mu_m^2 \bar{\theta}_m(\mu_m, \varphi) + \bar{\Psi}_m(\mu_m)v(\varphi) + \bar{q}_m(\mu_m, \varphi), m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

при учете граничных условий второго рода (2.3) или

$$\frac{d\bar{\theta}_m(\mu_m, \varphi)}{d\varphi} = -\mu_m^2 \bar{\theta}_m(\mu_m, \varphi) + \bar{\Psi}_m(\mu_m)v(\varphi) + Bi\theta_c(\varphi) \cos \mu_m, m = 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

при действии ГУ-3 (2.4) и начальных условий

$$\bar{\theta}_m(\mu_m, 0) = 0; m = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, \text{при ГУ - II} \\ 1, 2, \dots, \text{при ГУ - III.} \end{cases} \quad (2.23)$$

Здесь для ОРП (2.1) – (2.3) в случае граничных условий второго рода собственные числа $\mu_m^2 = \pi^2 m^2$ вычисляются при $m = 0, 1, 2, \dots$, а для объекта управления (2.1), (2.2), (2.4) при действии граничных условий третьего рода определяются корнями уравнения

$$\mu \operatorname{tg} \mu - Bi = 0, \quad (2.24)$$

функции $\bar{\Psi}_m(\mu_m), \bar{q}_m(\mu_m, \varphi)$ и $\bar{\theta}_m(\mu_m, 0)$ являются коэффициентами разложения в ряд по собственным функциям $\cos \mu_m x$ функций $\Psi(x), q(\varphi)$ и $\theta_0(x)$ соответственно.

Система (2.21), (2.23) дополняется соотношениями (2.19), связывающими искомое управление $u(\varphi) = v(\varphi)$ с новым $w(\varphi)$, подчиненным ограничению (2.13).

Решение краевой задачи (2.1)–(2.3) или (2.1), (2.2), (2.4) для температурного поля может быть представлено в форме его разложения в сходящийся в среднем ряд Фурье [145]

$$\theta(x, \varphi) = \Theta_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\theta}_m(\mu_m, \varphi) \cos \mu_m x \quad (2.25)$$

по тригонометрическим функциям $\cos \mu_m x$, где

$$\Theta_0 = \begin{cases} \bar{\theta}_0(\varphi), & \text{при ГУ - II} \\ 0, & \text{при ГУ - III} \end{cases} \quad (2.26)$$

выбирается в зависимости от типа граничных условий.

На основе выражения (2.9) для минимаксного критерия при $I_1^{(1)}(u) = I_1^{(1)}(v(\varphi))$ и соотношения (2.25) при $x = x^*$ перейдем от исходной ОЗТ к следующей задаче оптимального управления.

Требуется для бесконечномерного объекта управления (2.21), (2.23), (2.25), (2.26), (2.19) найти стесненное ограничением (2.13) условное управляющее воздействие $w_1^0(\varphi)$, при котором на заданном интервале идентификации $[0, \varphi^*]$ достигается минимальная величина функционала

$$I_2^{(1)}(w(\varphi)) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} |\theta(x^*, \varphi) - \theta^*(\varphi)| \rightarrow \min_{w(\varphi)}. \quad (2.27)$$

В задаче определения сосредоточенного граничного воздействия по плотности теплового потока $q(\varphi)$ [159] для объекта (2.1), (2.2) с граничными условиями (2.3) или (2.4) примем, не теряя общности результатов, $\theta_0(x) = 0$ и $v(\varphi) = 0$. Система ОДУ в этом случае принимает вид

$$\frac{d\bar{\theta}_m(\mu_m, \varphi)}{d\varphi} = -\mu_m^2 \bar{\theta}_m(\mu_m, \varphi) + (-1)^m q(\varphi); \quad \bar{\theta}_m(\mu_m, 0) = 0; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

и дополняется выражениями вида (2.19) при искомом управлении $u(\varphi) = q(\varphi)$, как и в предыдущем случае, подчиненном ограничению (2.13).

Таким образом, формулируется задача отыскания подчиненного ограничению (2.13) оптимального управления $w_3^0(\varphi)$ объектом (2.28), (2.19), при котором на заданном интервале $[0, \varphi^*] \ni \varphi$ достигается минимальная величина функционала (2.27).

При решении задачи идентификации пространственно распределенных воздействий используется точная модель объекта в виде обыкновенного дифференциального уравнения относительно изображения $\tilde{\theta}(x, p)$ температурного поля, где p — оператор Лапласа.

Так, в задаче определения закона пространственного распределения внутренних источников тепла $\Psi(x)$ принимаются допущения $\theta_0(x) = 0$, и дифферен-

циальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2\tilde{\theta}(x, p)}{dx^2} - p\tilde{\theta}(x, p) + \tilde{v}(p)\Psi(x) = 0 \quad (2.29)$$

при граничных условиях второго

$$\frac{d\tilde{\theta}(1, p)}{dx} = \tilde{q}(p), \quad \frac{d\tilde{\theta}(0, p)}{dx} = 0 \quad (2.30)$$

или третьего рода

$$\frac{d\tilde{\theta}(1, p)}{dx} + Bi \cdot \tilde{\theta}(1, p) = Bi \cdot \tilde{\theta}_c(p), \quad \frac{d\tilde{\theta}(0, p)}{dx} = 0. \quad (2.31)$$

Уравнение объекта (2.29) совместно с граничными условиями (2.30) или (2.31) дополняется соотношениями (2.20), связывающими искомое управление $u(x) = \Psi(x)$ с условным $w_2(x)$, подчиненным ограничению (2.14).

Теперь задача оптимального управления может быть сформулирована следующим образом.

Для объекта управления (2.29), (2.30), (2.20) или (2.29), (2.31), (2.20) требуется найти подчиненное ограничению (2.14) управляющее воздействие $w_2^0(x)$, при котором на интервале идентификации $[0, \varphi^*]$ достигается минимальная величина функционала

$$I_2^{(2)}(w(x)) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} |\theta(x^*, \varphi) - \theta^*(\varphi)| \rightarrow \min_{w(x)}. \quad (2.32)$$

При решении ретроспективной ОЗТ [53] также рассматривается модель в пространстве изображений Лапласа, которая при $v(\varphi) = 0$ и соответствующих однородных ГУ ($q(\varphi) = 0$ или $\theta_c(\varphi) = 0$) имеет следующий вид

$$\frac{d^2\tilde{\theta}(x, p)}{dx^2} - p\tilde{\theta}(x, p) + \theta_0(x) = 0 \quad (2.33)$$

и дополняется граничными условиями второго

$$\frac{d\tilde{\theta}(1, p)}{dx} = 0, \quad \frac{d\tilde{\theta}(0, p)}{dx} = 0 \quad (2.34)$$

или третьего рода

$$\frac{d\tilde{\theta}(1, p)}{dx} + Bi \cdot \tilde{\theta}(1, p) = 0, \quad \frac{d\tilde{\theta}(0, p)}{dx} = 0. \quad (2.35)$$

При решении ретроспективной ОЗТ в первой постановке уравнения объекта (2.33), (2.34) или (2.33), (2.35) дополняются соотношениями (2.20) при учете управления $u(x) = \theta_0(x)$, стесненного ограничением (2.14).

Задача оптимального управления теперь формулируется следующим образом. Требуется для объекта управления (2.33), (2.34), (2.20) или (2.33), (2.35), (2.20) найти подчиненное ограничению (2.14) управляющее воздействие $u^0(x) = \theta_0^0(x)$, обеспечивающее на интервале $[0, \varphi^*]$ выполнение минимаксного соотношения (2.32).

Ретроспективная ОЗТ во второй постановке принимает следующую формулировку. Для объекта управления (2.33), (2.34), (2.20) или (2.33), (2.35), (2.20) необходимо найти такое подчиненное ограничению (2.14) управляющее воздействие $u^0(x) = \theta_0^0(x)$, которое обеспечивало бы на заданной области изменения пространственной переменной $[0, 1] \ni x$ достижение соотношения

$$I_2^{(3)}(w(x)) = \max_{x \in [0,1]} |\theta(x, \varphi^*) - \theta^*(x)| \rightarrow \min_{w(x)}. \quad (2.36)$$

2.2. Переход к задаче оптимального управления с интегральным критерием качества

Редукция полученных минимаксных задач ОУ (2.27), (2.32), (2.36) к типичным вариационным задачам с интегральным функционалом качества, для решения которых могут быть использованы стандартные процедуры принципа максимума, может быть основана на приеме, предложенном в [161] и далее развитом в [162].

Введем независимый от аргумента φ или x в соответствующих задачах поиска сосредоточенного или пространственно распределенного управления вспомогательный параметр κ и перейдем к эквивалентным задачам оптимального управления рассматриваемым объектом со стандартным интегральным функционалом качества и дополнительным фазовым ограничением.

Тогда задача (2.27) поиска $v(\varphi)$ или $q(\varphi)$ сводится к задаче с критерием качества

$$I_3^{(i)}(w_i, \kappa) = \frac{1}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \kappa d\varphi = \kappa \rightarrow \min_{w_i, \kappa}, \quad i = 1, 3 \quad (2.37)$$

при дополнительном фазовом ограничении

$$|\theta(x^*, \varphi) - \theta^*(\varphi)| - \kappa \leq 0, \quad \varphi \in (0, \varphi^0). \quad (2.38)$$

В задачах восстановления пространственно распределенных воздействий (2.32), (2.36) функционал приобретает вид

$$I_3^{(i)}(w, \kappa) = \int_0^1 \kappa dx = \kappa \rightarrow \min_{w, \kappa}, \quad x^* \in [0, 1], \quad i = 2, 4, \quad (2.39)$$

а фазовое ограничение записывается в форме (2.38)

$$\left| \tilde{\theta}(x^*, p) - \tilde{\theta}^*(p) \right| - \kappa \leq 0 \quad (2.40)$$

при идентификации $\Psi(x)$ и $\theta_0(x)$ по данным $\theta^*(\varphi)$ или в виде

$$|\theta(x, \varphi^*) - \theta^*(x)| - \kappa \leq 0, \quad x \in [0, 1], \quad \varphi^* \in [0, \varphi^0] \quad (2.41)$$

при использовании экспериментальных данных $\theta^*(x)$ для восстановления $\theta_0(x)$.

Такой переход соответствует компоновке оптимального программного управления $w^0(\varphi)$ или $w^0(x)$ из интервалов, где фазовые ограничения (2.38) или (2.41) выполняются со знаком строгого неравенства, и отдельных участков, на протяжении которых данные ограничения соблюдаются в виде равенств (участков движения по ограничению).

Сделаем допущение, которое будет подтверждено далее, что фазовые ограничения (2.38), (2.40) или (2.41) нигде на интервале идентификации соответствующей переменной (времени или координаты) не нарушаются, и далее будем искать оптимальные управления $w^{\bar{0}}(\varphi)$ или $w^{\bar{0}}(x)$ без учета этих ограничений.

Современная теория управления не содержит общих методов точного решения сформулированных задач оптимального управления системами с распределенными параметрами (ЗОУ СРП).

Применим для решения рассматриваемых ОЗТ с критериями оптимальности (2.37), (2.39) подход, основанный на непосредственном применении необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина (ПМП) для задач оптимального управления ОРП с подвижным (в частности, со свободным) правым концом траектории при использовании точной модели

объекта в виде бесконечной системы ОДУ на примере задачи идентификации $v(\varphi)$ при граничных условиях 3-го рода (2.4).

На такие задачи ПМП распространяется без каких-либо ограничений [44; 139] и во многих ситуациях позволяет установить в явной форме характер оптимальных алгоритмов изменения во времени сосредоточенных управлений $u(\varphi) = v(\varphi)$.

Для объекта (2.15), (2.19), (2.22) при $\psi_0 = -1$ функция Понтрягина $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\bar{\theta}, v, \nu, w, \psi, \psi_0, \varphi)$ [138; 161; 163–165] принимает вид [50]

$$\mathfrak{N} = -\kappa + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(\varphi) \left(-\mu_m^2 \bar{\theta}_m(\mu_m, \varphi) + \bar{\Psi}_m(\mu_m) v(\varphi) + Bi \theta_c(\varphi) \cos \mu_m \right) + \psi_\nu(\varphi) \nu(\varphi) + \psi_w(\varphi) w(\varphi), \quad (2.42)$$

где $(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots)$ образуют вектор фазовых переменных, при этом v и ν также рассматриваются в качестве дополнительных фазовых переменных.

Вспомогательные (сопряженные) функции $\psi_m(\varphi)$, $m = 1, 2, \dots$ описываются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi_j}{d\varphi} = -\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \bar{\theta}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2.43)$$

к которой добавляются дополнительные уравнения для ψ_ν и ψ_w в виде

$$\frac{d\psi_\nu}{d\varphi} = -\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v}, \quad \frac{d\psi_w}{d\varphi} = -\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial w}. \quad (2.44)$$

С учетом (2.42) из условия максимума H по w получается выражение для оптимального (условного) управления

$$w^0(\varphi) = \beta |w_{\max}| \operatorname{sign} \psi_w(\varphi), \quad \beta = \pm 1. \quad (2.45)$$

Здесь, согласно (2.42) и (2.44) получается, что

$$\frac{d\psi_w}{d\varphi} = -\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial w} = -\psi_\nu(\varphi); \quad \frac{d\psi_\nu}{d\varphi} = -\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial v} = -\sum_{m=1}^{\infty} \bar{\Psi}_m(\mu_m) \psi_m(\varphi). \quad (2.46)$$

Т.к. согласно (2.43)

$$\frac{d\psi_j}{d\varphi} = \mu_j^2 \psi_j \Rightarrow \psi_j(\varphi) = \psi_j(0) e^{\mu_j^2 \varphi}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2.47)$$

то, подставляя этот результат в (2.46), получим

$$\frac{d\psi_\nu}{d\varphi} = - \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\Psi}_m(\mu_m) \psi_m(0) e^{\mu_m^2 \varphi} \Rightarrow \psi_\nu(\varphi) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{\Psi}_m(\mu_m)}{\mu_m^2} \psi_m(0) e^{\mu_m^2 \varphi}. \quad (2.48)$$

Далее, учитывая (2.48) и (2.46), можно получить выражение для $\tilde{\psi}_w(\varphi)$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_w}{d\varphi} &= -\psi_\nu(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{\Psi}_m(\mu_m)}{\mu_m^2} \psi_m(0) e^{\mu_m^2 \varphi} \Rightarrow \\ \psi_w(\varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{\Psi}_m(\mu_m)}{\mu_m^4} \psi_m(0) e^{\mu_m^2 \varphi}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где, как и в (2.48), постоянные, полученные после интегрирования, полагаются равными нулю. Структура оптимального управления не изменится и в случае их ненулевых значений.

Таким образом, согласно (2.45), оптимальное (условное) управление принимает вид

$$w^0(\varphi) = \beta |w_{\max}| \operatorname{sign} C_m e^{\mu_m^2 \varphi}, \quad (2.50)$$

где $C_m = \psi_m(0) \frac{\bar{\Psi}_m(\mu_m)}{\mu_m^4}$ — коэффициенты, значения которых априори неизвестны из-за неизвестных значений $\psi_m(0)$, $m = 1, 2, \dots$

Таким образом, согласно (2.50), $w^0(\varphi)$ является релейной функцией переменной φ вида

$$w^0(\varphi) = \beta w_{\max} (-1)^{j+1}; \quad \beta = \pm 1; \quad \sum_{m=0}^{j-1} \Delta_m < \varphi < \sum_{m=0}^j \Delta_m; \quad j = \overline{1, n}, \quad \Delta_0 = 0. \quad (2.51)$$

С помощью ПМП также может быть осуществлен поиск структуры оптимального пространственного управления $w^0(x)$. В этом случае уравнения модели объекта (2.29), (2.20) можно записать в нормальной форме

$$\frac{d\tilde{\theta}(x, p)}{dx} = \tilde{\theta}_1(x, p), \quad (2.52)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_1(x, p)}{dx} = p\tilde{\theta}(x, p) - \tilde{v}(p)\Psi(x), \quad (2.53)$$

$$\frac{d\Psi(x)}{dx} = \nu(x), \quad (2.54)$$

$$\frac{d\nu(x)}{dx} = w(x). \quad (2.55)$$

Функция Понтрягина $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\tilde{\theta}, \tilde{\theta}_1, \Psi(x), \nu(x), w, h)$ для задачи управления объектом (2.53) по критерию (2.39) с подвижными концами траектории, согласно граничным условиям (2.30) в предположении отсутствия участков движения по фазовому ограничению (2.40), принимает следующий вид

$$\tilde{H} = -\kappa + h_1 \tilde{\theta}_1 + h_2(p\tilde{\theta} - \tilde{v}(p)\Psi(x)) + h_3\nu(x) + h_4w, \quad (2.56)$$

где $h = (h_1, h_2, h_3, h_4)$ — вектор сопряженных переменных.

Минимальное значение критерия (2.39) обеспечивается на оптимальном управляющем воздействии $w^0(x)$, определяемом без учета условий (2.40), если при этом управлении данные условия не нарушаются. В таком случае, строгие равенства в (2.40) могут выполняться только в некоторых отдельных точках отражения от допустимой границы на отрезке $[0, 1] \ni x$, в которых согласно условиям скачка для ограничивающей поверхности в (2.40) [166] сопряженные переменные, описываемые на всех промежутках непрерывности решениями системы уравнений

$$\frac{dh_1}{dx} = -\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \tilde{\theta}}, \quad \frac{dh_2}{dx} = -\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \tilde{\theta}_1}; \quad (2.57)$$

$$\frac{dh_3}{dx} = -\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \Psi}, \quad \frac{dh_4}{dx} = -\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \nu} \quad (2.58)$$

претерпевают разрывы первого рода.

В рассматриваемой ситуации $w^0(x)$ находится из условия достижения максимума \mathfrak{N} на оптимальном управлении в классе кусочно-постоянных функций пространственной координаты, попеременно принимающих предельно допустимые значения $\pm w_{\max}$

$$w^0(x) = \beta |w_{\max}| \operatorname{sign} h_4(x), \beta = \pm 1. \quad (2.59)$$

Здесь, согласно (2.56), (2.58), получим

$$\frac{dh_4}{dx} = -h_3; \quad (2.60)$$

$$\frac{dh_3}{dx} = \tilde{v}(p)h_2; \quad (2.61)$$

$$\frac{dh_2}{dx} = -h_1; \quad (2.62)$$

$$\frac{dh_1}{dx} = -ph_2. \quad (2.63)$$

Дифференцируя (2.62), получаем, согласно (2.63),

$$\frac{d^2h_2}{dx^2} - ph_2 = 0 \Rightarrow h_2(x) = C_1e^{\sqrt{p}x} + C_2e^{-\sqrt{p}x}. \quad (2.64)$$

Из (2.60), (2.61) получаем, что

$$\frac{d^2h_4}{dx^2} = -\tilde{v}(p)h_2. \quad (2.65)$$

Подстановка (2.64) в (2.65) приводит после интегрирования к явной форме для сопряженной переменной $h_4(x)$, являющейся решением системы (2.60)–(2.63).

За счет априори неизвестного числа скачков сопряженных переменных в точках отражения траектории $\tilde{\theta}(x, p)$ от границы в (2.40) $w^0(x)$, подобно $w^0(\varphi)$, определяется аналогично, с точностью до числа N и пространственной протяженности участков постоянства Δ_j^0 управляющего воздействия, образуя параметрическое представление $w^0(x) \Leftrightarrow \Delta^0 = (\Delta_j^0), j = \overline{1, N}$.

Далее будет показано, что в оптимальном процессе идентификации заведомо выполняется условие (2.40) с выходом на фазовое ограничение только в точках касания допустимой границы, и следовательно, управление (2.59) действительно является оптимальным.

2.3. Предварительная параметризация искомым управлений и соответствующих им функций состояния объекта

Применение необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина к задачам (2.37) и (2.39) позволяет получить параметрическое представление искомым (условным) оптимальным управлений $w^{\bar{0}}(\varphi)$ и $w^{\bar{0}}(x)$ (в предположении, что фазовые ограничения (2.38), (2.40), (2.41) не нарушаются) в виде кусочно-постоянных функций соответствующего аргумента.

Тем самым, рассмотренный подход реализует предварительную параметризацию управляющих воздействий, которые однозначно характеризуются некоторой совокупностью конечного числа искомых параметров, в роли которых выступают длительности во времени $\tilde{\Delta}^{(i)}$, $i = 1, 3$ отдельных интервалов постоянства условного сосредоточенного управления $w^{\bar{0}}(\varphi)$ или протяженности в пространстве $\tilde{\Delta}^{(i)}$, $i = 2, 4$ интервалов постоянства $w^{\bar{0}}(x)$ при предварительной параметризации пространственных управлений (в предположении, что фазовые ограничения (2.38), (2.40) или (2.41) не нарушаются).

В случае поиска сосредоточенных управлений параметризованная форма $w(\varphi)$, согласно (2.50), имеет вид

$$w_i^{\bar{0}}(\varphi) = \beta_i (-1)^{j+1} w_{i \max}; \quad \sum_{m=0}^{j-1} \Delta_{im} < \varphi < \sum_{m=0}^j \Delta_{im}; \quad j = \overline{1, N};$$

$$\beta_i = \pm 1; \quad \Delta_{i0} = 0; \quad \sum_{m=0}^N \Delta_{im} = \varphi^*, \quad i = 1, 3 \quad (2.66)$$

релейной функции времени, а при определении пространственно распределенных управляющих воздействий – кусочно-постоянных функций пространственной координаты

$$w_i^{\bar{0}}(x) = \beta_i (-1)^{j+1} w_{i \max}; \quad \sum_{m=0}^{j-1} \Delta_{im} < x < \sum_{m=0}^j \Delta_{im}; \quad j = \overline{1, N};$$

$$\beta_i = \pm 1; \quad \Delta_{i0} = 0; \quad \sum_{m=0}^N \Delta_{im} = 1, \quad i = 2, 4. \quad (2.67)$$

Тем самым, искомые управления $w^{\bar{0}}(\varphi)$ и $w^{\bar{0}}(x)$ однозначно задаются соответствующим вектором параметров $\tilde{\Delta}^{(i)} \in \left\{ \tilde{\Delta}_n^{(i)}, n = \overline{1, N}; i \in \overline{1, 4} \right\}$, характеризуемым заданным числом N и длительностями $\tilde{\Delta}_n^{(i)}$ знакопередающихся интервалов постоянства $w^{\bar{0}}$.

Интегрирование соотношений (2.19) или (2.20) при кусочно-постоянном воздействии (2.66) или (2.67) приводит к параметрическому представлению идентифицируемых величин \mathbf{u} в форме кусочно-параболических зависимостей от времени (при $i = 1, 3$)

$$u^0(\varphi) = \begin{cases} \gamma_1^{(i)} + \gamma_2^{(i)}\varphi + \frac{\beta_i \cdot w_{i \max}}{2}\varphi^2, & \beta_i = \pm 1, \quad \varphi \in [0, \tilde{\Delta}_1^{(i)}], \quad n \geq 1; \\ \gamma_1^{(i)} + \gamma_2^{(i)}\varphi + \frac{\beta_i \cdot w_{i \max}}{2}\varphi^2 + \beta_i \cdot w_{i \max} \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \left(\varphi - \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_s^{(i)} \right)^2, \\ \beta_i = \pm 1, \quad \sum_{s=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_s^{(i)} \leq \varphi \leq \sum_{s=1}^j \tilde{\Delta}_s^{(i)}, \quad j = \overline{2, n}, \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (2.68)$$

при идентификации $v(\varphi)$, $q(\varphi)$ или имеет аналогичную структуру функции пространственной координаты (при $i = 2, 4$)

$$u^0(x) = \begin{cases} \gamma_1^{(i)} + \gamma_2^{(i)}x + \frac{\beta_i \cdot w_{i \max}}{2}x^2, & \beta_i = \pm 1, \quad x \in [0, \tilde{\Delta}_1^{(i)}], \quad n \geq 1; \\ \gamma_1^{(i)} + \gamma_2^{(i)}x + \frac{\beta_i \cdot w_{i \max}}{2}x^2 + \beta_i \cdot w_{i \max} \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \left(x - \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_s^{(i)} \right)^2, \\ \beta_i = \pm 1, \quad \sum_{s=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_s^{(i)} \leq x \leq \sum_{s=1}^j \tilde{\Delta}_s^{(i)}, \quad j = \overline{2, n}, \quad n \geq 2 \end{cases} \quad (2.69)$$

в случае восстановления $\Psi(x)$, $\theta_0(x)$.

В этом случае искомые управления $u(\varphi)$, $u(x)$ однозначно характеризуются соответствующим вектором параметров

$$\Delta^{(i)} = \left(\tilde{\Delta}^{(i)}, w_{i \max}, \gamma^{(i)} \right), \quad i \in \overline{1, N}; \quad \gamma^{(1)} = (v(0), v'(0)); \\ \gamma^{(2)} = (\Psi(0), \Psi'(0)); \quad \gamma^{(3)} = (q(0), q'(0)); \quad \gamma^{(4)} = (\vartheta(0), \vartheta'(0)), \quad (2.70)$$

заданным на замкнутом ограниченном множестве $D_{N+2} \ni \Delta^{(i)}$ и содержащим кроме искомых величин $\tilde{\Delta}^{(i)}$ априори неизвестные значения учитываемых ограничений $w_{i \max}$, $i \in \overline{1, N}$ в (2.13), (2.14) и начальных значений u_0, ν_0 , $i \in \overline{1, N}$ в (2.19) или (2.20).

Выражение для $\theta(x, \varphi)$ может быть получено, например, на основе общего решения краевой задачи [151; 167], представленного в интегральной форме [160; 167–169], и связывающего температурное поле $\theta(x, \varphi)$ с входными воздействиями, в качестве которых в общем случае рассматриваются внутренние распределенные $g_0(x, \varphi)$ и сосредоточенные граничные воздействия $g_1(\varphi)$ и $g_2(\varphi)$, а также начальное состояние объекта $\theta_0(x)$

$$\theta(x, \varphi) = \int_0^1 K_0(x, \xi, \varphi) \theta_0(\xi) d\xi + \int_0^\varphi \int_0^1 G(x, \xi, \varphi - \tau) g_0(\xi, \tau) d\xi d\tau +$$

$$+ \int_0^{\varphi} K_1(x, 0, \varphi - \tau) g_1(\tau) d\tau + \int_0^{\varphi} K_2(x, 1, \varphi - \tau) g_2(\tau) d\tau, \quad (2.71)$$

где ξ и τ — переменные интегрирования по пространственной координате и времени.

Здесь ядра интегральных операторов K_0 , K_1 и K_2 , определенные на соответствующих пространственно-временных областях, однозначно определяются функцией Грина $G(x, \xi, \varphi - \tau)$ рассматриваемого объекта, которая полностью описывает его свойства и является его основной фундаментальной характеристикой [134; 135; 160; 168].

Интегрирование уравнений объекта (2.71) при учете параметрической формы управляющего воздействия $\{v(\varphi), \Psi(x), q(\varphi), \theta_0(x)\}$ в виде (2.68) или (2.69) приводит в случае идентификации сосредоточенных воздействий к представлению $\theta(x, \varphi)$ в виде явной функции от искомого вектора параметров $\Delta^{(N)}$. Таким образом, результирующее температурное состояние $\theta(x, \varphi, \Delta)$ также является функцией параметров (2.70), однозначно характеризуется соответствующим вектором $\Delta^{(i)}$ на замкнутом ограниченном множестве $D_{n+2} \ni \Delta^{(i)}, i = \overline{1, 4}$, и может быть представлено как реакция на сумму составляющих искомого сосредоточенного (2.68) или пространственного управления (2.69) на каждом j -ом интервале

$$\theta(x, \varphi, \Delta^{(i)}) = \begin{cases} \Phi_i(x, \varphi, \gamma^{(i)}) + \Lambda_i(x, \varphi, w_{i \max}), & n = 1; \\ \Phi_i(x, \varphi, \gamma^{(i)}) + \Lambda_i(x, \varphi, w_{i \max}) + \bar{\Lambda}_i(x, \varphi, w_{i \max}, \tilde{\Delta}^{(i)}), & n \geq 2. \end{cases} \quad (2.72)$$

Здесь $\Phi_i(x, \varphi, \gamma^{(i)})$ — решение краевой задачи (2.1) – (2.3) или (2.1), (2.2) и (2.4) при управлении $u(\varphi) = \gamma_1^{(i)} + \gamma_2^{(i)}\varphi$ для $i = 1, 3$ или $u(x) = \gamma_1^{(i)} + \gamma_2^{(i)}x$ для $i = 2, 4$ соответственно, а $\Lambda_i(x, \varphi, w_{i \max})$ — решение той же краевой задачи для $u(\varphi) = 0.5 \cdot \beta_i w_{1 \max} \varphi^2$ или $u(x) = 0.5 \cdot \beta_i w_{2 \max} x^2$. Слагаемое $\bar{\Lambda}_i(x, \varphi, w_{i \max}, \tilde{\Delta}^{(i)})$ представляет собой реакцию температурного поля при $n_i \geq 2$ на управление

$$u(\varphi) = \beta_i w_{i \max} \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \left(\varphi - \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_s^{(i)} \right)^2, \quad (2.73)$$

$$\sum_{s=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_s^{(i)} \leq \varphi \leq \sum_{s=1}^j \tilde{\Delta}_s^{(i)}, \quad j = \overline{2, n}, \quad n \geq 2,$$

если $i = 1, 3$ или при $i = 2, 4$

$$u(x) = \beta_i w_{i \max} \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \left(x - \sum_{s=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_s^{(i)} \right)^2, \quad (2.74)$$

$$\sum_{s=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_s^{(i)} \leq x \leq \sum_{s=1}^j \tilde{\Delta}_s^{(i)}, \quad j = \overline{2, n}, \quad n \geq 2.$$

Полученное параметрическое представление температурного поля (2.72) позволяет провести редукцию задач (2.27), (2.32) или (2.36) к соответствующим задачам математического программирования.

Таким образом, формулируется специальная негладкая задача математического программирования (СЗМП) относительно искомого вектора параметров $\Delta = (\tilde{\Delta}, w_{\max}, u(0), u'(0))$ временной или пространственной переменной, принадлежащего замкнутому ограниченному множеству D_{N+2} , обеспечивающего при $\theta^* = \theta^*(\varphi)$ для задачи (2.37) выполнение соотношения

$$I_0^{(i)}(\Delta^{(i)}) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^0]} \left| \theta(x^*, \varphi, \Delta^{(i)}) - \theta^*(\varphi) \right| \rightarrow \min_{\Delta^{(i)}}, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (2.75)$$

При решении задачи (2.39) рассматривается минимаксный критерий

$$I_0^{(5)}(\Delta^{(4)}) = \max_{x \in [0, 1]} \left| \theta(x, \varphi^*, \Delta^{(4)}) - \theta^*(x) \right| \rightarrow \min_{\Delta^{(4)}}. \quad (2.76)$$

Проведенные преобразования, по существу, сводят исходные ОЗТ к задачам построения кусочно-параболических сплайн-аппроксимаций вида (2.68) или (2.69), оптимальных по минимаксному критерию (2.75) или (2.76), для идентифицируемых характеристик $\mathbf{u} = \{v(\varphi), \Psi(x), q(\varphi), \theta_0(x)\}$.

Для решения СЗМП используются альтернативные формы условий экстремума [170–175].

Сформулированные задачи (2.75) и (2.76) предусматривают оценивание отклонения расчетного состояния $\theta(x^*, \varphi)$ или $\theta(x, \varphi^*)$ от экспериментально заданного $\theta^*(\varphi)$ или $\theta^*(x)$ на соответствующем временном $[0, \varphi^*] \ni \varphi$ или пространственном $[0, 1] \ni x$ интервале идентификации в равномерной (чебышевской) метрике.

Базовая постановка СЗМП, частными случаями которой являются задачи (2.75) и (2.76), при поиске оптимального управления, заданного вектором $\Delta = \Delta^{(N)}$ на пространственном интервале $[x_0, x_1] \ni x$, может быть записана в

следующем виде [50; 142]

$$I(\Delta^{(N)}) \rightarrow \min_{\Delta^{(N)} \in \Omega}; \quad (2.77)$$

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} |Q(x, \Delta^{(N)}) - Q^*(x)| \leq \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 > 0. \quad (2.78)$$

Соотношения (2.77) и (2.78) образуют специальную задачу нелинейного программирования, задающую оптимизацию функционала (2.77) конечного числа N переменных Δ с бесконечным числом ограничений

$$|Q(x, \Delta^{(N)}) - Q^*(x)| \leq \varepsilon_0, \quad \forall x \in [x_0, x_1] \quad (2.79)$$

по переменной x .

При этом число N искомым параметров, однозначно задающих оптимальное управление, заранее неизвестно, и, таким образом, задача (2.77), (2.78) должна решаться в условиях априори нефиксируемой размерности вектора $\Delta^{(N)}$, зависящей от погрешности ε_0 равномерного приближения.

Формально поиск $\Delta^{(N)}$ осуществляется в пределах некоторого множества Ω в N -мерном пространстве параметров Δ_j .

2.4. Решение задачи математического программирования на основе альтернансного метода

Решение задачи (2.77), (2.78) может быть осуществлено на основе альтернансных свойств оптимальных температурных распределений, установленных в [142].

Согласно этим свойствам, на отрезке $[x_0, x_1]$ при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(N)}$ в (2.78) найдутся R точек $x_j^0 \in [x_0, x_1]$, $j = \overline{1, R}$, в которых выполняются равенства

$$|Q(x_j^0, \Delta^{(N)}) - Q^*(x_j^0)| = \varepsilon_{\min}^{(N)}; \quad j = \overline{1, R}, \quad \Delta^{(N)} = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N), \quad (2.80)$$

где

$$R = N + 1. \quad (2.81)$$

Здесь $\varepsilon_{\min}^{(N)} > 0$ соответствует некоторой минимально достижимой величине (минимуму) в классе управлений с N интервалами постоянства.

Таким образом, всегда существует число R точек x_j^0 в (2.80), которое равно числу неизвестных в общей задаче математического программирования (2.77), (2.78), к которым относятся N составляющих $\Delta_i, i = \overline{1, N}$ вектора Δ_N и минимакс $\varepsilon_{\min}^{(N)}$.

Тем самым, соотношения (2.80), (2.81) образуют замкнутую относительно всех параметров оптимального процесса систему, откуда следует принципиальная возможность ее перевода с использованием физических закономерностей предметной области в системы расчетных уравнений относительно искомым параметров, последующее решение которой исчерпывает решение исходной проблемы (2.77), (2.78) [50; 142].

В целом ряде ситуаций при выполнении допущений, указанных в [142], максимально допустимые отклонения $Q(x, \Delta^0)$ от $Q^*(x)$ достигаются с разными знаками для каждой пары подряд расположенных точек x_j^0 (являются знакочередующимися), то есть равенства (2.80) уточняются следующим образом

$$Q(x_j^0, \Delta^0) - Q^*(x_j^0) = \beta(-1)^j \varepsilon_{\min}^{(N)}; \quad j = \overline{1, R}, \quad \beta = \pm 1. \quad (2.82)$$

Набор R точек x_j^0 , в которых выполняются равенства (2.82), образует чебышевский альтернанс.

Уравнения (2.82) совместно с условиями существования экстремума (т.е. равенствами нулю производных) в точках $\{x_{j_s}^0\} \subseteq \{x_j^0\}, s = \overline{1, R_1}, R_1 \leq R$, не совпадающих с границами интервала $[x_0, x_1]$, задают переход к основной системе равенств, замкнутой относительно всех искомым неизвестных

$$\begin{aligned} Q(x_j^0, \Delta^0) - Q^*(x_j^0) &= \beta(-1)^j \varepsilon_{\min}^{(N)}; \quad j = \overline{1, R}, \quad \beta = \pm 1; \\ \frac{\partial}{\partial x} (Q(x_{j_s}^0, \Delta^0) - Q^*(x_{j_s}^0)) &= 0, \quad s = \overline{1, R_1}, R_1 \leq R. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Согласно [50; 142], в большинстве ситуаций в условиях малостеснительных ограничений альтернансные свойства (2.80), (2.81) и существование чебышевского альтернанса в (2.82) одновременно являются достаточными условиями строгого локального минимума $\Delta^{(N)}$ и признаками единственности этих решений в задаче (2.77), (2.78).

Решение $\Delta^0 = (\Delta_j^0), j = N + 2$ соответствующей задачи (2.75) или (2.76) при заданной размерности вектора $\tilde{\Delta}^0$ определяет погрешность $\theta(x, \varphi, \Delta^0) - \theta^*$

аппроксимации температурного поля θ^* , обладающую свойствами чебышевского альтернанса, подобными (2.81), (2.82).

На основе этих свойств при решении задачи (2.75) на интервале идентификации $[0, \varphi^*] \ni \varphi$ в отдельных точках φ_j^0 , число которых $R = (N + 2) + 1$, согласно (2.81), на единицу превышает число искомых параметров, достигаются знакопередающиеся максимальные по абсолютной величине значения невязки температурного поля, равные $\pm I_0^{(i)}(\Delta^0)$.

Таким образом, данные свойства позволяют заключить, что во введенных дополнительных фазовых ограничениях (2.38), (2.40) или (2.41) строгие равенства при $I_0^{(i)}(\Delta^0) = \varepsilon_0$ обеспечиваются только на множестве нулевой меры, (достигаются только в отдельные моменты времени φ_j^0 в точках отражения от допустимой границы (по терминологии теории оптимального управления)).

Тем самым, управления w^0 действительно совпадают с искомыми условиями управляющими воздействиями w^0 .

На основании данных свойств возможно составить замкнутую систему $N + 3$ соотношений для предельных значений температурных невязок в точках альтернанса φ_j^0 относительно всех неизвестных – вектора параметров Δ^0 и значения минимакса $I_0^{(i)}(\Delta^0)$.

При решении задачи математического программирования (2.75) для $i = \overline{1, 4}$ расчетная система соотношений (2.83) имеет вид

$$\theta(x^*, \varphi_j^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_j^0) = \pm(-1)^{j+1} I_0^{(i)}(\Delta^0), \quad j = \overline{1, N + 3} \quad (2.84)$$

и дополняется условиями существования экстремума $(\theta(x^*, \varphi_{j_s}^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_{j_s}^0))'_{\varphi}$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta(x^*, \varphi_{j_s}^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_{j_s}^0)) = 0 \quad (2.85)$$

во внутренних точках $\varphi_{j_s}^0$ интервала идентификации $[0, \varphi^*]$, где $I_0^{(i)}$ понимается в смысле $\varepsilon_{\min}^{(N)}$ в (2.82) и относится к числу искомых величин.

Здесь возможны следующие варианты расположения точек экстремума $s = \overline{1, N + 2}; s = \overline{2, N + 2}; s = \overline{1, N + 3}$ или $s = \overline{2, N + 3}$.

При решении задачи (2.76) расчетные соотношения принимают вид замкнутой системы для предельных разностей температур в точках альтернанса x_j^0 на заданном интервале изменения $[0, 1] \ni x$ пространственной переменной x

$$\theta(x_j^0, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x_j^0) = \pm(-1)^{j+1} I_0^{(4)}(\Delta^0), \quad j = \overline{1, N+3} \quad (2.86)$$

с учетом условий существования экстремума

$$\frac{\partial}{\partial x} (\theta(x_{j_s}^0, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x_{j_s}^0)) = 0 \quad (2.87)$$

во внутренних точках $x_{j_s}^0$ интервала $[0, 1] \ni x$.

Решение полученных систем уравнений (2.84), (2.85) или (2.86), (2.87) стандартными численными методами позволяет определить искомый вектор параметров Δ^0 , на основе которого проводится кусочно-параболическая аппроксимация искомых функций $u(\varphi)$ или $u(x)$.

Альтернативные свойства оптимальных решений $\Delta^0 = (\Delta_1^0, \Delta_2^0, \dots, \Delta_N^0)$ формулируются относительно заданной размерности $N = N_0$ вектора Δ^0 , при этом в исходной постановке ЗПО число N искомых параметров априори неизвестно.

Размерность N вектора параметров $\Delta^{(N)}$ в задаче (2.77), (2.78) однозначным образом зависит от требуемой (допустимой) точности $\varepsilon_0 > 0$ аппроксимации заданного температурного распределения $Q^*(x)$ [142].

Задачи с подвижным правым концом оптимальной траектории, допускающие ненулевые допуски $\varepsilon_0 > 0$ на отклонение от $Q^*(x)$, характеризуются конечной и монотонно убывающей с ростом размерности N вектора параметров $\Delta^{(N)}$ величиной ε_0 . При достижимых значениях $\varepsilon_0 > 0$ задача оптимального управления всегда имеет реализуемые решения. Конечное число искомых параметров обеспечивает алгоритмически точные и технически реализуемые решения.

На основе опыта решения задач оптимального управления установлено, что для получения удовлетворительной по типичным техническим требованиям точности $\varepsilon_0 > 0$ отклонения температурного состояния часто оказывается достаточным, чтобы число N не превышало двух – четырех.

Так как величина ε_0 , определяющая необходимое число N_0 интервалов оптимального управления, никак не входит в процедуру поиска оптимального управления на основе ПМП, то искомое управление u задается в параметрической форме с точностью до вектора $\Delta^{(N)} = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N)$ заранее неизвестной размерности N .

Для каждого конечного числа $N < \infty$ существует некоторая минимально достижимая величина (минимакс) $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(N)} > 0$ в классе управлений с N интервалами постоянства.

С ростом N значения минимакса образуют невозрастающий (как правило, строго убывающий) [142] ряд неравенств

$$\varepsilon_{\min}^{(1)} > \varepsilon_{\min}^{(2)} > \dots > \varepsilon_{\min}^{(j)} > \varepsilon_{\min}^{(j+1)} > \dots > \varepsilon_{\min}^{(M)} = \varepsilon_{\inf} \geq 0. \quad (2.88)$$

Здесь некоторое число M соответствует минимально возможной ошибке (точной нижней грани) ε_{\inf} равномерного приближения к требуемому состоянию, достижимой на множестве управлений с любым числом N .

Минимально возможная ошибка или соответствует $\varepsilon_{\inf} > 0$, что, как правило, выполняется при $M < \infty$ или $\varepsilon_{\inf} = 0$, что, как правило, имеет место при $M = \infty$.

С помощью кусочно-параболической аппроксимации $u^0(\varphi)$ или $u^0(x)$ вида (2.68) или (2.68) возможно аппроксимировать с любой требуемой точностью любую непрерывную и непрерывно-дифференцируемую функцию $u(\varphi)$ или $u(x)$ на соответствующем временном $[0, \varphi^*] \ni \varphi$ или пространственном $[0, 1] \ni x$ интервале идентификации фиксированной длительности путем выбора соответствующего значения N и вектора параметров Δ .

Следовательно, при $N \rightarrow \infty$ последовательность $I_0^N, N = 1, 2, \dots$ минимальных значений функционала (2.75) или (2.76), достигаемых на решениях соответствующей задачи для заданного N , сходится к минимально возможной величине I_0^* [162].

При этом задача (2.75) или (2.76) определения конечномерного вектора $\Delta^0(N) \in D_{N+2}$, обеспечивающего достижение I_0^N для каждого конкретного значения N вследствие принадлежности искомым воздействий компактному множеству непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций (имеющих ограниченную первую производную на интервале идентификации) остается корректно поставленной и при $N \rightarrow \infty$.

Отсюда следует возможность решения исходных ОЗТ практически с любой требуемой точностью путем решения ряда задач параметрической оптимизации (2.75) или (2.76) для возрастающих значений $N = 1, 2, \dots, N^0$ до величины N^0 , согласованной со значением I_0^N при учете погрешности задания

экспериментальных данных [21]. В случае точного соответствия θ^* решению краевых задач (2.1), (2.2), (2.3) или (2.1), (2.2) и (2.4) в точке $x = x^*$ или в момент времени $\varphi = \varphi^*$ величина I_0^N при $N \rightarrow \infty$ становится равной нулю.

Во многих практических случаях решение $\Delta^0(N)$ обеспечивает достаточно малую ошибку уже при $N = 2 \div 4$.

2.5. Численные методы решения задачи математического программирования

Решение задачи (2.75) основывается на замкнутости системы (2.84), (2.85) относительно неизвестных величин, которыми являются $N-1$ значений $\{\tilde{\Delta}_j\}$, $j = \overline{1, N}$ длительностей интервалов постоянства $w^{\bar{0}}(\varphi)$, три априори неизвестных значения w_{\max} , $u(0)$, $u'(0)$, значение минимизируемой невязки I_0 и некоторые из координат φ_j^0 точек достижения предельно допустимых отклонений I_0 .

Координаты φ_j^0 могут совпадать с обеими или одной из границ отрезка $[0, \varphi^*]$, или быть точками экстремума $(\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi))'_\varphi$ на этом отрезке.

Здесь возможны следующие ситуации.

Количество неизвестных параметров оптимального процесса, равное $N+2$ значениям $\tilde{\Delta}$ интервалов постоянства $w^{\bar{0}}$ и значению минимакса I_0 , приводят к общему числу $N+3$ неизвестных в системе (2.84), (2.85), вследствие чего на основе (2.81) предельно допустимые отклонения достигаются в том же количестве $N+3$ точек на интервале идентификации.

Координаты точек альтернанса, если они не совпадают с границами интервала $[0, \varphi^*]$, также являются неизвестными, что должно быть учтено при составлении системы. При этом возможны следующие ситуации (рис. 2.1):

- обе граничные точки являются точками альтернанса, тем самым, их координаты известны, и они исключаются из числа неизвестных координат φ_j^0 , в результате чего количество неизвестных координат φ_j^0 , $j = \overline{2, N+2}$, равно $N+1$;
- одна из граничных точек принадлежит точкам альтернанса, а другая - нет. Следовательно, одна из координат исключается из числа неизвестных φ_j^0 , где $j = \overline{1, N+2}$ или $j = \overline{2, N+3}$, которое, тем самым, равно $N+2$;

- все точки альтернанса являются внутренними точками интервала идентификации, по отношению к которым формулируются условия экстремума (2.85), количество неизвестных координат точек альтернанса $\varphi_j^0, j = \overline{1, N+3}$ равно $N+3$.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях система расчетных соотношений (2.84), (2.85) содержит $2N+4$, либо $2N+5$, либо $2N+6$ уравнений относительно того же количества неизвестных, и тем самым, является замкнутой. Это свойство предоставляет принципиальную возможность редукции исходной задачи к конкретным расчетным системам уравнений.

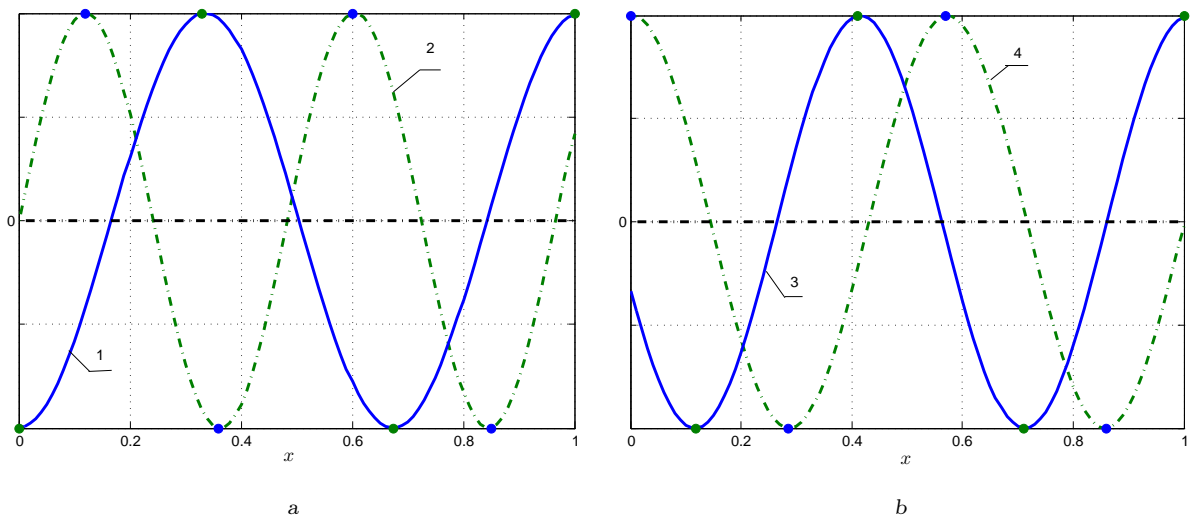


Рис. 2.1. Варианты конфигурации $(\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi))$ при $N=1, q = \overline{1, 4}$: $s=2, 3$ – кривая 1, $s = \overline{1, 4}$ – кривая 2 (а) и $s = \overline{1, 3}$ – кривая 3, $s = \overline{2, 4}$ – кривая 4 (б)

Использование дополнительной информации о предметной области позволяет уменьшить число вариантов конфигурации распределения температурной невязки $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi)$, и задать либо некоторое число однозначно выбираемых вариантов (в данном случае - не превышающее четырех) систем расчетных соотношений, либо свести их к единственно возможному варианту.

Решение полученной системы численными методами может быть реализовано в виде итерационной процедуры поочередного уточнения по методу Ньютона координат точек $\varphi_{j_s}^0$ или $x_{j_s}^0$ при зафиксированных значениях Δ^0 путем вычисления нулей производных $(\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi))'_\varphi$ или $(\theta(x, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x))'_x$ и последующего нахождения значений вектора параметров Δ^0 при закрепленных значениях координат точек альтернанса φ_j^0 или x_j^0 (так называемое "вырав-

нивание максимумов") путем решения системы пониженного порядка. Такой метод представляет модификацию блочного нелинейного метода Гаусса-Зайделя [176].

При достаточно хороших начальных приближениях доказана сходимость такой итерационной процедуры и установлены оценки скорости сходимости к искомому решению [177–180].

В общем случае задача (2.77), (2.78) может быть решена только с использованием специальных численных методов недифференцируемой оптимизации.

Среди таких методов получили распространение специальные градиентные методы, основанные на вычислении производных функций максимума по направлениям [177; 178; 181–184], метод обобщенного градиента и растяжения пространства, квазиградиентный метод, метод псевдоградиентов [179; 181; 185; 186] и некоторые другие.

Алгоритм изложенного метода минимаксной оптимизации решения ОЗТ представлен на рис. 2.2.

Предложенная схема применения метода минимаксной оптимизации может быть распространена по алгоритму рис. 2.2 без каких-либо особенностей принципиального характера на значительно более широкий круг моделей температурного поля в рассмотренных ОЗТ (включая нелинейные и многомерные модели процессов нестационарной теплопроводности) в силу универсального характера используемых альтернативных свойств температурных невязок [142]. В следующих разделах настоящей работы иллюстрируется справедливость этого утверждения на конкретных примерах.



Рис. 2.2. Регулярная процедура минимаксной оптимизации в обратных задачах теплопроводности

2.6. Выводы по главе 2

Разработан и теоретически обоснован метод минимаксной оптимизации решения граничной, внутренней и ретроспективной задач теплопроводности в линейной одномерной постановке на компактном множестве кусочно-параболических функций.

В рамках этого получены следующие результаты:

1. Теоретически обоснована экстремальная постановка ОЗТ с минимаксным критерием оптимизации в условиях оценивания точности приближения результирующего конечного состояния к требуемому в равномерной метрике.
2. Обосновано изменение исходной постановки обратной задачи теплопроводности на основе сужения множества искомых решений до класса непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций.
3. Разработана и теоретически обоснована процедура перехода от исходной вариационной задачи с минимаксным критерием качества к эквивалентной задаче оптимального управления объектом со стандартным интегральным функционалом качества при дополнительном фазовом ограничении.
4. Разработана и обоснована процедура параметризации временных и пространственных управляющих воздействий, определена их структура и параметрическое представление.
5. Разработана и обоснована процедура редукции на основе проведенной параметризации исходной вариационной постановки обратной задачи теплопроводности к задаче полубесконечной оптимизации.
6. На параметризуемый класс базовых ОЗТ, представляемых в форме соответствующих модификаций задач полубесконечной оптимизации, распространен алгоритмически точный альтернативный метод их решения, базирующийся на специальных свойствах оптимизируемых температурных невязок в процессе идентификации искомых характеристик.

Глава 3

Метод минимаксной оптимизации в базовых обратных задачах теплопроводности

Данная глава посвящена практическому применению представленного в главе 2 метода минимаксной оптимизации, разработке методики расчета и вычислительных алгоритмов решения базовых обратных задач теплопроводности с управляющими воздействиями различного типа и анализу полученных результатов.

Основное содержание данной главы отражено в работах [53; 55; 57; 58; 64—66; 75; 81].

Разработанные методы параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности с управляющими воздействиями различного типа представлены на рис. 3.1.

3.1. Метод минимаксной оптимизации в задаче идентификации внутреннего сосредоточенного воздействия

3.1.1. Постановка задачи оптимального управления и ее редукция к задаче параметрической оптимизации

В рамках общего математического описания (2.1) рассматривается базовая модель процесса нестационарной теплопроводности с внутренним тепловыделением для тел прямоугольной формы, заданная линейным одномерным неоднородным уравнением Фурье в относительных единицах

$$\frac{\partial \theta(x, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \theta(x, \varphi)}{\partial x^2} + F(x, \varphi); \quad 0 < x < 1; \quad 0 < \varphi \leq \varphi^* \quad (3.1)$$

при нулевых начальных условиях

$$\theta(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1] \quad (3.2)$$

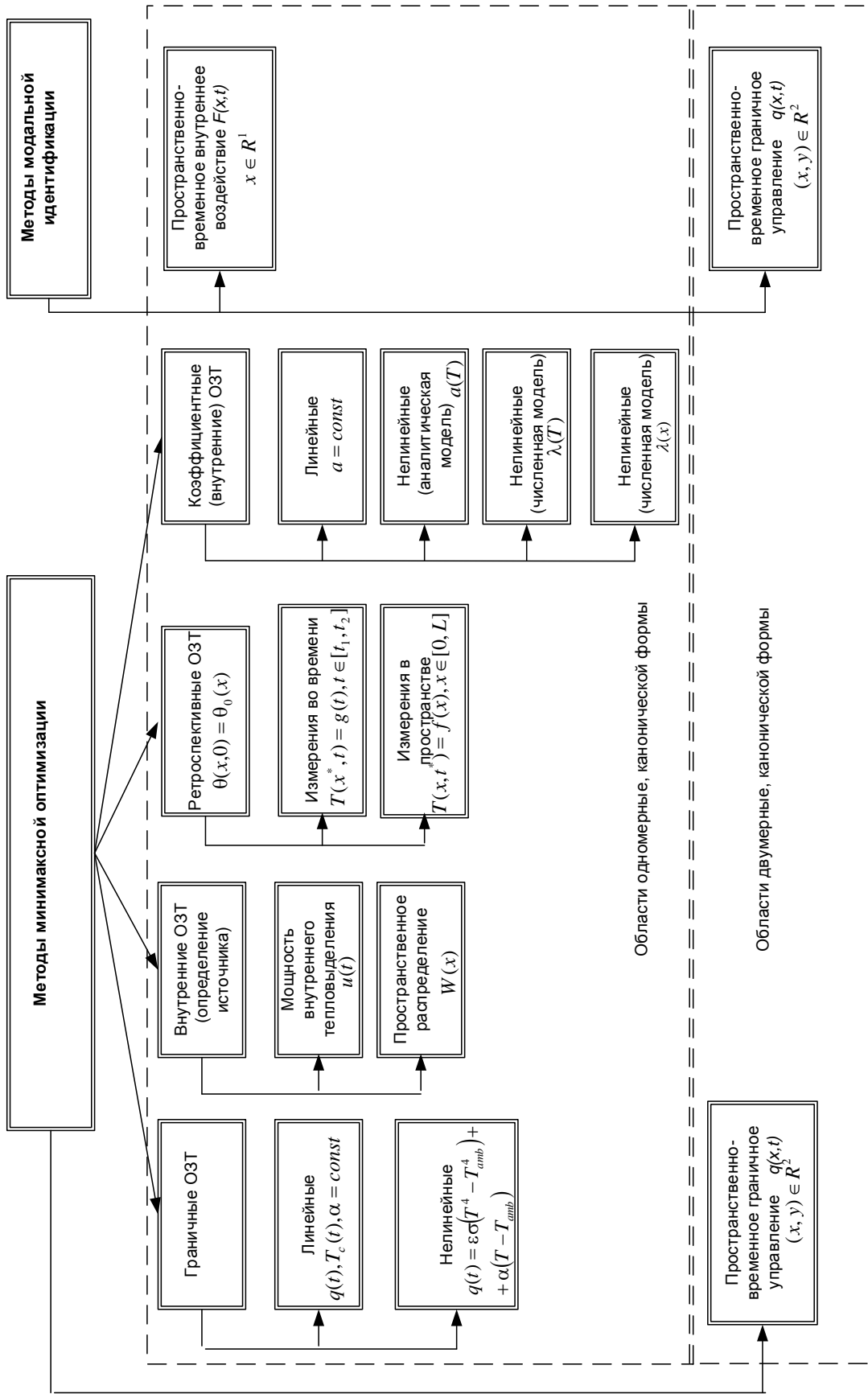


Рис. 3.1. Разработанные методы параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности

и граничных условиях третьего рода:

$$\frac{\partial \theta(1, \varphi)}{\partial x} + \text{Bi} \cdot \theta(1, \varphi) = \text{Bi} \cdot \theta_c(\varphi); \quad \frac{\partial \theta(0, \varphi)}{\partial x} = 0; \quad \varphi \in [0, \varphi^*]. \quad (3.3)$$

При моделировании ряда важных прикладных задач технологической теплофизики, таких как процессы индукционного нагрева (ИН) металла, функция пространственно-временного управления по мощности внутреннего тепловыделения $F(x, \varphi)$ может быть записана в стандартном виде как произведение

$$F(x, \varphi) = \Psi(x)v(\varphi) \quad (3.4)$$

двух функций, зависящих от одной переменной, где $v(\varphi)$ — удельная величина полной мощности источников тепла, выделяемого в нагреваемом теле, а $\Psi(x)$ — закон их распределения по пространственной координате.

При моделировании процессов индукционного нагрева закон распределения источников тепла $\Psi(x)$ по пространственной координате в первую очередь определяется решением уравнения Максвелла для электромагнитного поля, что является сложной самостоятельной проблемой. В случае использования линеаризованных ММ процесса индукционного нагрева с учетом стандартных допущений для тел простейшей геометрической формы при неизменной частоте питающего индуктор тока решение этой задачи имеет известный вид [49; 143; 187].

Так, при симметричном нагреве бесконечной пластины для функции $\Psi(x)$ получено соответствующее выражение [49; 143; 187]

$$\Psi(\zeta, x) = \frac{\text{ch}(\sqrt{2}\zeta x) - \cos(\sqrt{2}\zeta x)}{\text{sh}(\sqrt{2}\zeta) - \sin(\sqrt{2}\zeta)} \sqrt{2}\zeta, \quad (3.5)$$

где ζ — характерный параметр, зависящий от глубины проникновения тока в металл, который в типовой ситуации постоянства частоты питающего индуктор тока $\zeta = \text{const}$. Тогда при расчете индукционных нагревателей (на стадии проектирования устройств индукционного нагрева) или при выборе необходимых (оптимальных) режимов нагрева (на стадии эксплуатации установки) возникает задача определения закона изменения удельной мощности $v(\varphi)$ по известной информации об измерениях температуры $\theta^*(\varphi)$ на поверхности тела или в некоторой внутренней точке $x^* \in [0, 1]$.

Рассмотрим применение предложенного в главе 2 метода минимаксной оптимизации для решения этой задачи и проведем анализ основных полученных на его основе результатов.

Согласно разработанному методу, идентифицируемая функция рассматривается в качестве управляющего воздействия $u(\varphi) = v(\varphi)$, подчиненного ограничению (2.5) принадлежности заданному подходящему множеству V соответствующих управлений.

Исходная обратная задача теплопроводности в экстремальной постановке формулируется следующим образом. По заданной температурной зависимости $\theta^*(\varphi)$ в некоторой фиксированной точке контроля $x^* \in [0, 1]$ требуется восстановить удельную величину мощности внутреннего тепловыделения $v^0(\varphi)$, минимизирующую отклонение точного решения $\theta(x^*, \varphi)$ краевой задачи (3.1)–(3.3), соответствующим $v^0(\varphi)$ от наблюдаемой температуры $\theta^*(\varphi)$.

В соответствующей задаче оптимального управления объектом (3.1)–(3.4) требуется найти подчиненное ограничению (2.5) управление $v(\varphi)$, обеспечивающее на интервале идентификации $[0, \varphi^*]$ минимизацию (согласно (2.9))

$$I_1(v) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} |\theta(x^*, \varphi) - \theta^*(\varphi)| \rightarrow \min_{v \in V} \quad (3.6)$$

ошибки равномерного приближения $\theta(x^*, \varphi)$ к $\theta^*(\varphi)$.

Согласно (2.11) производится сужение исходного класса управляющих воздействий до компактного множества V физически реализуемых на интервале идентификации функций, для чего, в соответствии с (2.15), вводится новое (условное) управляющее воздействие $w(\varphi) = v''(\varphi)$, подчиненное ограничению $|w(\varphi)| \leq |w_{\max}|$, $\varphi \in (0, \varphi^*)$, что гарантирует непрерывность искомой функции $u(\varphi)$ вместе с ее производной на интервале $\varphi \in [0, \varphi^*]$.

Для редукции к ЗПО используется точное представление объекта (3.1), (3.2), (3.3) бесконечной системой ОДУ для коэффициентов $\bar{\theta}_m(\mu_m, \varphi)$ вида (2.21), (2.23).

Система дополняется соотношениями (2.19), связывающими искомое воздействие $v(\varphi)$ с новым управлением $w(\varphi)$.

Представление температурного поля $\theta(x, \varphi)$ в виде разложения в бесконечный ряд (2.21), (2.23) позволяет сформулировать задачу поиска оптималь-

ного управления $w(\varphi) = w^0(\varphi)$, согласно (2.27), в следующем виде

$$I_2(w(\varphi)) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} \left| 2 \sum_{l=1}^{\infty} \bar{\theta}_l(\mu_l, \varphi) \cos \mu_l x^* - \theta^*(\varphi) \right| \rightarrow \min_{w(\varphi)}. \quad (3.7)$$

В соответствии с соотношением (2.71) температурное поле для объекта (3.1) – (3.3) определяется на основе выражения

$$\theta(x, \varphi) = \int_0^{\varphi} \int_0^1 G(x, \xi, \varphi - \tau) \Psi(\xi) v(\tau) d\xi d\tau + \text{Bi} \int_0^{\varphi} G(x, 1, \varphi - \tau) \theta_c(\tau) d\tau. \quad (3.8)$$

Здесь функция Грина имеет известный вид [134; 135]

$$G(x, \xi, \varphi - \tau) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2\mu_m}{\mu_m + \sin \mu_m \cos \mu_m} \cos(\mu_m x) \cos \mu_m \xi \cdot e^{-\mu_m^2(\varphi - \tau)}, \quad (3.9)$$

где собственные числа μ_m^2 соответствуют пронумерованным в порядке возрастания корням уравнения (2.24).

На основе (3.8) и (3.9) выражение для результирующего температурного поля может быть получено в виде бесконечного ряда

$$\begin{aligned} \theta(x, \varphi) = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\mu_m}{\mu_m + \sin \mu_m \cos \mu_m} \cos(\mu_m x) \times \\ & \times \int_0^{(\varphi)} v(\tau) e^{-\mu_m^2(\varphi - \tau)} d\tau \int_0^1 \Psi(\xi) \cos \mu_m \xi d\xi + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\mu_m}{\mu_m + \sin \mu_m \cos \mu_m} \cos(\mu_m x)(x) \cos \mu_m \cdot \text{Bi} \int_0^{(\varphi)} \theta_c(\tau) e^{-\mu_m^2(\varphi - \tau)} d\tau \end{aligned} \quad (3.10)$$

разложения температурного поля $\theta(x, \varphi)$ по собственным функциям $\cos(\mu_m x)$ тепловой задачи.

Введя соответствующие обозначения

$$B_m(x) = \frac{2\mu_m}{\mu_m + \sin \mu_m \cos \mu_m} \cos(\mu_m x) \quad (3.11)$$

для коэффициентов под знаком бесконечной суммы, и полагая для коэффициентов

$$\bar{\Psi}_m(\mu_m) = \int_0^1 \Psi(\xi) \cos \mu_m \xi d\xi$$

разложения $\Psi(x)$ в ряд по собственным функциям, выражение (3.10) можно записать в удобной для практического использования форме

$$\begin{aligned} \theta(x, \varphi) = & \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \bar{\Psi}_m(\mu_m) \cdot e^{-\mu_m^2 \varphi} \int_0^{(\varphi)} v(\tau) e^{\mu_m^2 \tau} d\tau + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \cos \mu_m \cdot \text{Bi} \cdot e^{-\mu_m^2 \varphi} \int_0^{(\varphi)} \theta_c(\tau) e^{\mu_m^2 \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (3.12)$$

На основе выражения (3.12) возможно конкретизировать минимаксный критерий (3.7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} I(w) = & \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} \left| \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \bar{\Psi}_m(\mu_m) \cdot e^{-\mu_m^2 \varphi} \int_0^{(\varphi)} v(\tau) e^{\mu_m^2 \tau} d\tau + \right. \\ & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \cos \mu_m \text{Bi} \cdot e^{-\mu_m^2 \varphi} \int_0^{(\varphi)} \theta_c(\tau) e^{\mu_m^2 \tau} d\tau - \theta^*(\varphi) \right| \rightarrow \min_w. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Далее, вводится вспомогательный параметр κ , что позволяет перейти к задаче с интегральным функционалом качества (2.37) и дополнительным фазовым ограничением (2.38). В этом случае для поиска оптимальной программы $w^0(\varphi)$ (без учета фазового ограничения) возможно использовать необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Применение стандартной процедуры принципа максимума приводит к параметрическому представлению $w(\varphi)$ в виде кусочно-постоянной функции времени (2.66).

Параметрическая форма искомой характеристики $u(\varphi)$ в этом случае имеет вид кусочно-параболической функции (2.68), также однозначно определяемой вектором параметров Δ , содержащим длительности $\tilde{\Delta} = (\tilde{\Delta}_j)$, $j = \overline{1, N}$ знакопередающихся интервалов постоянства, а также априори неизвестные значения w_{\max} , $v(0)$, $v'(0)$.

Параметризованное представление (2.72) результирующего температурно-

го поля отражает реакцию на сумму составляющих искомой $v(\varphi)$:

$$\theta(x, \varphi, \Delta) = \begin{cases} \Phi(x, \varphi, v(0), v'(0)) + \Lambda(x, \varphi, w_{\max}) + Q_c(x, \varphi), \\ \text{при } \varphi \in [0, \tilde{\Delta}_1], n \geq 1; \\ \Phi(x, \varphi, v(0), v'(0)) + \Lambda(x, \varphi, w_{\max}) + Q_c(x, \varphi) + \\ + 2 \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \Lambda \left(x, \varphi - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2, \\ \text{при } \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \leq \varphi \leq \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i, j = \overline{2, n}, n \geq 2. \end{cases} \quad (3.14)$$

Здесь $\Phi(x, \varphi, v(0), v'(0))$ — решение краевой задачи (3.1)–(3.3) при управляющем воздействии $u(\varphi) = v(0) + v'(0)\varphi$, которое на основе (3.12) имеет следующий вид:

$$\Phi(x, \varphi, v(0), v'(0)) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \bar{\Psi}_m(\mu_m) \left(\frac{v(0)}{\mu_m^2} (1 - e^{-\mu_m^2 \varphi}) + \frac{v'(0)}{\mu_m^4} (\mu_m^2 \varphi - 1 + e^{-\mu_m^2 \varphi}) \right); \quad (3.15)$$

$\Lambda(x, \varphi, w_{\max})$ — решение той же краевой задачи для $u(\varphi) = \frac{w_{\max}}{2} \varphi^2$, полученное в виде

$$\Lambda(x, \varphi, w_{\max}) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \bar{\Psi}_m(\mu_m) \frac{w_{\max}}{2} \left(\frac{\varphi^2}{\mu_m^2} - \frac{2\varphi}{\mu_m^4} + \frac{2}{\mu_m^6} (1 - e^{-\mu_m^2 \varphi}) \right); \quad (3.16)$$

$Q_c(x, \varphi)$ определяет теплообмен с внешней средой как

$$Q_c(x, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \cos \mu_m Bi \cdot e^{-\mu_m^2 \varphi} \int_0^{(\varphi)} e^{\mu_m^2 \tau} \theta_c(\tau) d\tau, \quad (3.17)$$

и в частном случае $\theta_c(\tau) = \theta_c = \text{const}$

$$Q_c(x, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \cos \mu_m \cdot Bi \cdot \theta_c \left(\frac{1 - e^{-\mu_m^2 \varphi}}{\mu_m^2} \right). \quad (3.18)$$

Таким образом, на основании (2.68), (3.14), (3.15), (3.16), (3.18) вектор параметров $\Delta = (\tilde{\Delta}, w_{\max}, v(0), v'(0))$, заданный при известном значении x^* на замкнутом ограниченном множестве $D_{N+2} \ni \Delta$ однозначно характеризует искомое управляющее воздействие $v(\varphi)$ и соответствующее ему температурное поле $\theta(x, \varphi, \Delta)$.

Используя полученное параметрическое описание (3.14)–(3.17) температурного поля $\theta(x, \varphi, \Delta)$, на основе минимаксного функционала (3.13) осуществляется точная редукция исходной некорректной постановки обратной задачи теплопроводности (3.1)–(3.3) к специальной негладкой задаче математического программирования общего вида (2.75)

$$I_0(\Delta^{(N)}) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} \left| \theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi) \right| \rightarrow \min_{\Delta \in D_{N+2}}. \quad (3.19)$$

3.1.2. Альтернансные свойства оптимальных решений и вычислительные алгоритмы

Специальные свойства чебышевского альтернанса, применительно к ошибке приближения температурного поля $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi)$, фиксирующие на интервале $\varphi \in [0, \varphi^*]$ в точках $\varphi_q^0, q = \overline{1, R}$ выполнение знакочередующихся максимальных по абсолютной величине отклонений $\pm I_0(\Delta^0)$, достигаемых на оптимальном решении Δ^0 задачи (3.19), позволяют составить замкнутую систему соотношений (2.84), (2.85), которая конкретизируется на основе дополнительной информации о расположении точек экстремума φ_s^0 на интервале $[0, \varphi^*]$, где, в общем случае, возможны варианты $s = \overline{1, N+2}; s = \overline{2, N+2}; s = \overline{1, N+3}$ или $s = \overline{2, N+3}$.

Согласно начальным условиям (3.2), в случае отсутствия возмущений при $\varphi = 0$ получаем для ошибки приближения $\theta(x^*, 0, \Delta^0) - \theta^*(0) = 0$. Тем самым, первая по порядку на интервале идентификации точка альтернанса $\varphi_1^0 \neq 0$, является точкой, в которой достигается экстремум $(\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi))'_\varphi$.

Физические соображения и большое число решенных задач показывают, что в большинстве случаев в конечный момент интервала идентификации φ^* ошибка аппроксимации $\theta(x^*, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(\varphi^*)$ стремится к возрастанию и достигает предельно возможной величины $\pm I_0(\Delta^0)$.

Следовательно, в таком случае, из всех возможных вариантов конфигурации $\theta(x^*, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(\varphi^*)$ первоочередным является вариант $s = \overline{1, N+2}$.

Расчетные соотношения (2.84) формируются относительно $N+2$ неизвестных параметров $\{w_{\max}, v(0), v'(0), \tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2, \dots, \tilde{\Delta}_{N-1}\}$ искомого управления $u^0(\varphi)$ и неизвестного значения минимакса $I_0(\Delta^0)$ с неопределенным знаком $\beta = \pm 1$, что, в соответствии с основным свойством (2.81), приводит к суще-

ствованию $R = N + 3$ точек альтернанса. Предполагаемый первоочередной вариант $s = \overline{1, N + 2}$ означает, что одна из координат $\varphi_j^0, j = \overline{1, N + 3}$ известна ($\varphi_{N+3}^0 = \varphi^*$), следовательно, система содержит $N + 2$ неизвестных координат точек альтернанса, по отношению к которым должны быть сформулированы условия экстремума $(\theta(x^*, \varphi_{j_s}^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_{j_s}^0))'_\varphi$.

Тогда система (2.84) записывается в виде

$$\begin{aligned} \theta(x^*, \varphi_j^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_j^0) &= \beta I_0^{(N)}, & j = 1, 3, \dots, N + 2; \\ \theta(x^*, \varphi_j^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_j^0) &= \beta(-1)I_0^{(N)}, & j = 2, 4, \dots, N + 3, \end{aligned} \quad (3.20)$$

если N — нечетное число, где неопределенный множитель β может принимать значения ± 1 .

В случае четного N система (2.84) принимает вид

$$\begin{aligned} \theta(x^*, \varphi_j^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_j^0) &= \beta I_0^{(N)}, & j = 1, 3, \dots, N + 3; \\ \theta(x^*, \varphi_j^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_j^0) &= \beta(-1)I_0^{(N)}, & j = 2, 4, \dots, N + 2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Условия (2.85) формулируются относительно точек альтернанса внутри интервала $(0, \varphi^*)$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta(x^*, \varphi_j^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_j^0)) = 0, \quad j = \overline{1, N + 2}. \quad (3.22)$$

Систему (3.20) или (3.21) можно упростить, исключив неизвестную $I_0(\Delta^0)$ с неопределенным знаком множителя β , для чего нужно сложить уравнения для двух соседних точек альтернанса с противоположными знаками $I_0^{(N)}$:

$$(\theta(x^*, \varphi_j^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_j^0)) + (\theta(x^*, \varphi_{j+1}^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_{j+1}^0)) = 0, \quad j = \overline{1, N + 2}. \quad (3.23)$$

Ниже приведены конкретные варианты расчетных систем соотношений для ситуаций $N = 1, 2$.

Простейший случай $N = 1$, соответствующий оптимальной параболической аппроксимации $u(\varphi) = v(0) + v'(0)\varphi + \frac{w_{\max}}{2}\varphi^2$ искомой функции $v(\varphi)$, приводит к существованию $R = 4$ точек альтернанса. Расчетная система соотношений принимает вид

$$\begin{aligned} \theta(x^*, \varphi_1^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_1^0) &= \beta I_0^{(1)}; \\ \theta(x^*, \varphi_2^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_2^0) &= -\beta I_0^{(1)}; \\ \theta(x^*, \varphi_3^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_3^0) &= \beta I_0^{(1)}; \\ \theta(x^*, \varphi_4^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_4^0) &= -\beta I_0^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где $\beta = \pm 1$.

Уравнения (3.22) записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta(x^*, \varphi_j^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_j^0)) = 0, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (3.25)$$

Таким образом, система (3.24) содержит четыре уравнения относительно трех неизвестных параметров $w_{\max}, v(0), v'(0)$ (при $\tilde{\Delta}_1 = \varphi^*$) искомого воздействия, значения минимакса $I_0(\Delta^0)$ с неопределенным знаком $\beta = \pm 1$ и трех неизвестных координат точек альтернанса $\varphi_j^0, j = \overline{1, 3}$. Система дополняется тремя уравнениями (3.25), что приводит к ее замкнутости.

Исключение неизвестной $\beta I_0(\Delta^0)$ приводит к системе вида (3.23)

$$(\theta(x^*, \varphi_j^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_j^0)) + (\theta(x^*, \varphi_{j+1}^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_{j+1}^0)) = 0, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (3.26)$$

Решение системы расчетных соотношений (3.26) совместно с (3.25) позволяет найти оптимальные значения вектора параметров Δ^0 .

Случай $N = 2$ соответствует кусочно-параболической аппроксимации идентифицируемого воздействия

$$u(\varphi) = \begin{cases} v(0) + v'(0)\varphi + \frac{w_{\max}}{2}\varphi^2, & 0 \leq \varphi \leq \tilde{\Delta}_1; \\ v(0) + v'(0)\varphi + \frac{w_{\max}}{2}\varphi^2 - w_{\max}(\varphi - \tilde{\Delta}_1)^2, & \tilde{\Delta}_1 \leq \varphi \leq \varphi^* \end{cases} \quad (3.27)$$

с двумя участками постоянства $u''(\varphi)$ и приводит к существованию $R = (N + 2) + 1 = 5$ точек альтернанса. Расчетная система соотношений (3.21) записывается в форме

$$\begin{aligned} \theta(x^*, \varphi_j^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_j^0) &= \beta I_0^{(2)}, \quad j = 1, 3, 5; \beta = \pm 1; \\ \theta(x^*, \varphi_j^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_j^0) &= \beta(-1)I_0^{(2)}, \quad j = 2, 4; \beta = \pm 1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

или в упрощенном виде

$$(\theta(x^*, \varphi_j^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_j^0)) + (\theta(x^*, \varphi_{j+1}^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_{j+1}^0)) = 0, \quad j = \overline{1, 4}. \quad (3.29)$$

Условия (2.85) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta(x^*, \varphi_j^0, \Delta^0) - \theta^*(\varphi_j^0)) = 0, \quad j = \overline{1, 4}. \quad (3.30)$$

Решение системы (3.29) совместно с (3.30) позволяет найти четыре неизвестных параметра $\{w_{\max}, v(0), v'(0), \tilde{\Delta}_1\}$ (при $\tilde{\Delta}_2 = \varphi^* - \tilde{\Delta}_1$) искомого вектора Δ^0 и четыре координаты $\varphi_j^0, j = \overline{1, 4}$.

Дальнейший анализ для случаев $N = 3, 4, \dots$ проводится аналогично.

Другие варианты, соответствующие случаям $s = \overline{2, N+2}$; $s = \overline{1, N+3}$ или $s = \overline{2, N+3}$, могут быть обусловлены влиянием дополнительных факторов, например, ненулевыми начальными условиями, действием возмущений или погрешности дискретизации в соответствующих ММ и будут рассмотрены далее в работе при возникновении таких ситуаций.

3.1.3. Результаты и анализ решения внутренней обратной задачи теплопроводности

В модельном примере экспериментальная температурная зависимость $\theta^*(\varphi)$ рассматривалась в форме точного решения краевой задачи (3.1)–(3.4) для $x = x^* \in [0, 1]$ при экспоненциальном характере изменения удельной мощности внутренних теплоисточников

$$v^*(\varphi) = 1 - e^{-\beta_1 \varphi}, \quad \varphi \in [0, 1] \quad (3.31)$$

и получена на основе (3.12) в виде

$$\theta^*(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \bar{\Psi}_m(\mu_m) \left(\frac{1 - e^{-\mu_m^2 \varphi}}{\mu_m^2} + \frac{e^{-\mu_m^2 \varphi} - e^{-\beta_1 \varphi}}{\mu_m^2 - \beta_1} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \cos \mu_m \cdot \text{Bi} \cdot \theta_c \left(\frac{1 - e^{-\mu_m^2 \varphi}}{\mu_m^2} \right). \quad (3.32)$$

Выражения для производных в (3.22) определяются непосредственным дифференцированием соотношений (3.14)–(3.16), (3.18) и (3.32)

$$\frac{\partial \theta(x, \varphi, \Delta)}{\partial \varphi} = \begin{cases} \Phi'_\varphi(x, \varphi, v(0), v'(0)) + \Lambda'_\varphi(x, \varphi, w_{\max}) + Q'_\varphi(x, \varphi), \\ \text{при } \varphi \in [0, \tilde{\Delta}_1], n \geq 1; \\ \Phi'_\varphi(x, \varphi, v(0), v'(0)) + \Lambda'_\varphi(x, \varphi, w_{\max}) + Q'_\varphi(x, \varphi) + \\ + 2 \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \Lambda'_\varphi \left(x, \varphi - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2, \\ \text{при } \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \leq \varphi \leq \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i, j = \overline{2, n}, n \geq 2; \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\Phi'_\varphi(x, \varphi, v(0), v'(0)) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \bar{\Psi}_m(\mu_m) \left(v(0) e^{-\mu_m^2 \varphi} + \frac{v'(0)}{\mu_m^2} (1 - e^{-\mu_m^2 \varphi}) \right); \quad (3.34)$$

$$\Lambda'_\varphi(x, \varphi, w_{\max}) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \bar{\Psi}_m(\mu_m) \frac{w_{\max}}{2} \frac{2}{\mu_m^2} \left(\varphi - \frac{1}{\mu_m^2} (1 - e^{-\mu_m^2 \varphi}) \right); \quad (3.35)$$

$$Q'_\varphi(x, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \cos \mu_m \cdot \text{Bi} \cdot \theta_c \cdot e^{-\mu_m^2 \varphi}; \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta^*(\varphi)}{\partial \varphi} = & \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \bar{\Psi}_m(\mu_m) \left(e^{-\mu_m^2 \varphi} + \frac{\beta_1 e^{-\beta_1 \varphi} - \mu_m^2 e^{-\mu_m^2 \varphi}}{\mu_m^2 - \beta_1} \right) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \cos \mu_m \cdot \text{Bi} \cdot \theta_c \cdot e^{-\mu_m^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Решение задачи по изложенной методике было выполнено при следующих значениях параметров: $\varphi^* = 1$; $x^* = 0.9$; $\text{Bi} = 0.5$; $\theta_c(\varphi) = 0.05$; в (3.31) $\beta_1 = 5$; функция $\Psi(\zeta, x)$ соответствовала (3.5) при $\zeta = 4$.

Результаты численного решения для возрастающего ряда значений N числа интервалов постоянства $v''(\varphi)$ представлены в табл. 3.1, 3.2 и на рис. 3.2–3.4.

На примере рассматриваемой задачи проведем анализ результатов решения ОЗТ, отражающий качественные особенности, общие для всех типов исследуемых задач.

Как показывают полученные результаты, значения $I_0(\Delta^0)$ образуют монотонно убывающий с ростом числа N ряд значений. Во всех случаях $N = \overline{1, 8}$ выполняется выбранный вариант $s = \overline{1, N + 2}$.

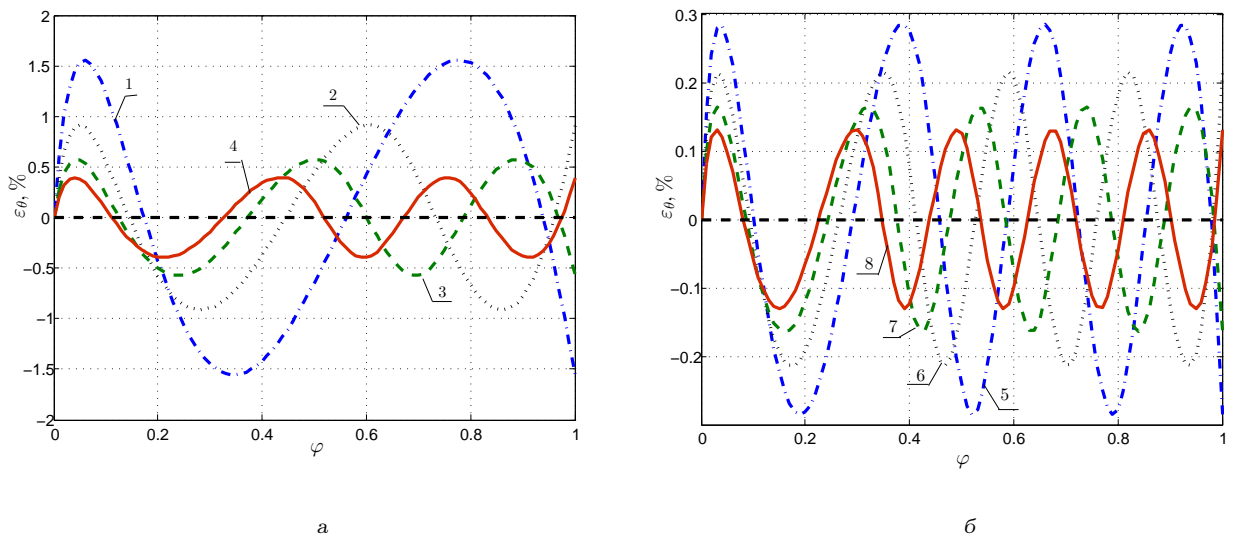


Рис. 3.2. Погрешность $\varepsilon_\theta(\varphi) = \frac{\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)}{\theta_{\max}^*} \cdot 100\%$ приближения температурного распределения $\theta^*(\varphi)$; $\varphi^* = 1$, $x^* = 0.9$: 1 – при $N = 1$; 2 – при $N = 2$; 3 – при $N = 3$; 4 – при $N = 4$ (а) и 5 – при $N = 5$; 6 – при $N = 6$; 7 – при $N = 7$; 8 – при $N = 8$ (б)

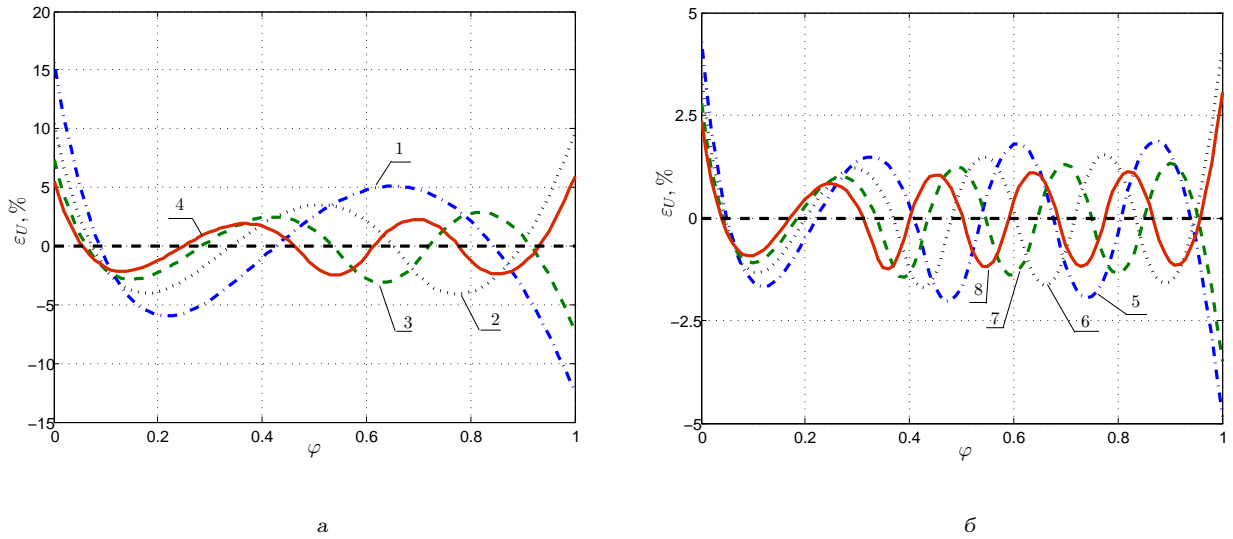


Рис. 3.3. Погрешность $\varepsilon_u(\varphi) = \frac{u(\varphi) - u^*(\varphi)}{u_{max}^*} \cdot 100\%$ аппроксимации искомого воздействия $u^*(\varphi) = v^*(\varphi)$; $\varphi^* = 1$, $x^* = 0.9$: 1 – при $N = 1$; 2 – при $N = 2$; 3 – при $N = 3$; 4 – при $N = 4$ (а) и 5 – при $N = 5$; 6 – при $N = 6$; 7 – при $N = 7$; 8 – при $N = 8$ (б)

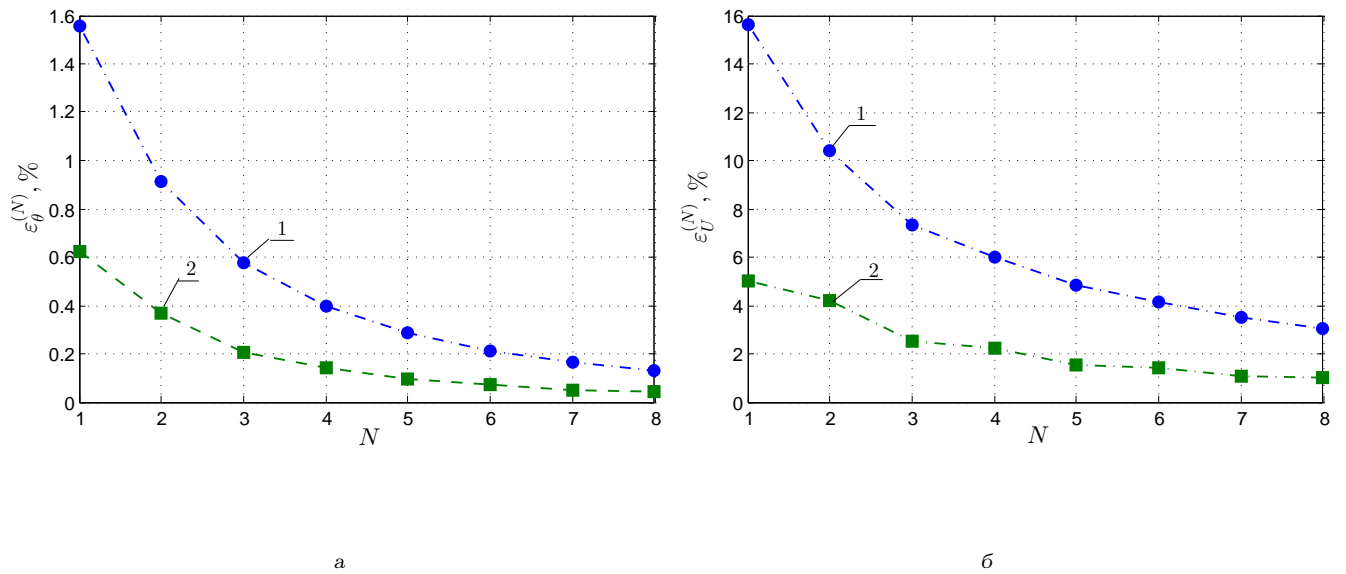


Рис. 3.4. Погрешность $\varepsilon_\theta^0 = \frac{\max|\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)|}{\theta_{max}^*} \cdot 100\%$ приближения температуры (а) и ошибка $\varepsilon_u^0 = \frac{\max|u(\varphi) - u^*(\varphi)|}{u_{max}^*} \cdot 100\%$ аппроксимации мощности тепловыделения (б) при $N = \overline{1, 8}$: 1 – при $\varphi^* = 1$, $x^* = 0.9$; 2 – при $\varphi^* = 0.5$, $x^* = 1$

Таблица 3.1. Погрешность $\varepsilon_\theta^0 = \frac{\max|\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)|}{\theta_{max}^*} \cdot 100\%$ приближения температуры и ошибка $\varepsilon_u^0 = \frac{\max|u(\varphi) - u^*(\varphi)|}{u_{max}^*} \cdot 100\%$ аппроксимации мощности тепловыделения при $N = \overline{1, 8}$, $\varphi^* = 1$, $x^* = 0.9$;

N	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varepsilon_\theta^0, \%$	1.55	0.91	0.57	0.40	0.28	0.21	0.16	0.13
$\varepsilon_u^0, \%$	15.62	10.41	7.32	5.97	4.84	4.14	3.49	3.06

Таблица 3.2. Погрешность $\varepsilon_{\theta}^0 = \frac{\max |\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)|}{\theta_{max}^*} \cdot 100\%$ приближения температуры и ошибка $\varepsilon_u^0 = \frac{\max |u(\varphi) - u^*(\varphi)|}{u_{max}^*} \cdot 100\%$ аппроксимации мощности тепловыделения при $N = \overline{1, 8}$, $\varphi^* = 0.5$, $x^* = 1$;

N	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varepsilon_{\theta}^0, \%$	0.62	0.37	0.20	0.14	0.094	0.071	0.052	0.041
$\varepsilon_u^0, \%$	5.038	4.174	2.501	2.231	1.547	1.423	1.060	0.997

Погрешность $\max |u(\varphi) - u^*(\varphi)| = \max |v(\varphi) - v^*(\varphi)|$ приближения иско- мой характеристики $v(\varphi)$, в общем случае, убывает с ростом N , при этом зави- сит от других значимых факторов, сочетание которых в частном случае может иметь существенное влияние. Основными определяющими факторами являют- ся длительность интервала идентификации φ^* и координата точки контроля температуры x^* . Влияние длительности интервала идентификации имеет одно- значный характер – его уменьшение приводит к снижению погрешностей $I_0(\Delta^0)$ и $\varepsilon_u^0 = \max |u(\varphi) - u^*(\varphi)|$ (табл. 3.3, рис. 3.5). С сокращением φ^* погрешность ε_u^0 уменьшается приблизительно пропорционально, при этом на интервале иден- тификации $[0, \varphi^*]$ сохраняется приблизительно одинаковая конфигурация раз- ности $u(\varphi) - u^*(\varphi)$ (рис. 3.6).

Влияние координаты x^* на точность решения задачи имеет более сложный характер, который зависит от многих особенностей задачи: типа ОЗТ, характе- ра внутреннего и внешних воздействий, конкретных значений (и их сочетаний) параметров процесса теплопроводности, длительности интервала иденти- фикации и значения N .

Погрешность ε_u^0 , как правило, достигается на границах интервала $[0, \varphi^*]$ и определяется конфигурацией $u(\varphi) - u^*(\varphi)$, которая может существенно изме-

Таблица 3.3. Зависимость погрешностей $\varepsilon_{\theta}^0 = \frac{\max |\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)|}{\theta_{max}^*} \cdot 100\%$ и $\varepsilon_u^0 = \frac{\max |u(\varphi) - u^*(\varphi)|}{u_{max}^*} \cdot 100\%$ от длительности интервала идентификации φ^* при $x^* = 0.9$; $\varepsilon_{\theta}^{(3)}, \varepsilon_u^{(3)}$ – $N = 3$; $\varepsilon_{\theta}^{(4)}, \varepsilon_u^{(4)}$ – $N = 4$;

φ^*	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
$\varepsilon_{\theta}^{(3)}, \%$	0.574	0.497	0.418	0.340	0.263	0.190
$\varepsilon_u^{(3)}, \%$	7.32	6.34	5.41	4.46	3.53	2.63
$\varepsilon_{\theta}^{(4)}, \%$	0.403	0.341	0.288	0.232	0.175	0.129
$\varepsilon_u^{(4)}, \%$	5.97	5.24	4.51	3.78	3.06	2.37

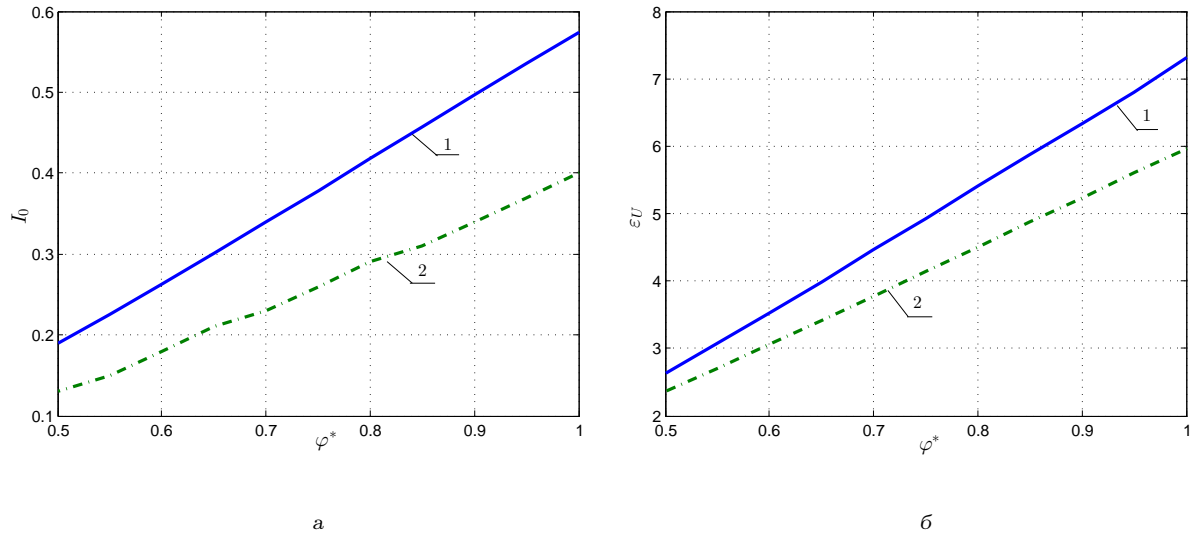
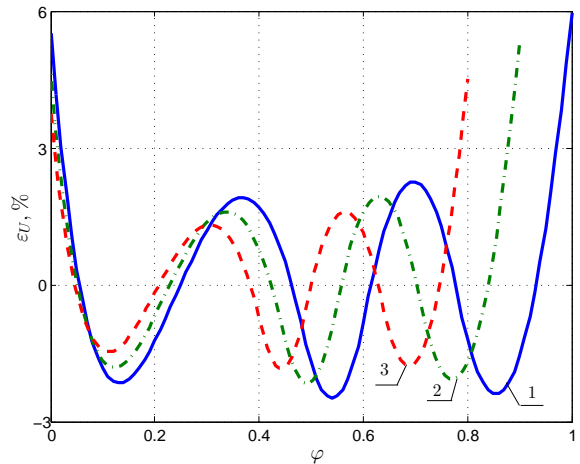


Рис. 3.5. Влияние длительности интервала идентификации φ^* на погрешность $\varepsilon_\theta^0 = \frac{\max |\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)|}{\theta_{max}^*} \cdot 100\%$ приближения температуры (а) и ошибку $\varepsilon_u^0 = \frac{\max |u(\varphi) - u^*(\varphi)|}{u_{max}^*} \cdot 100\%$ аппроксимации искомой характеристики (б), $x^* = 0.9$: 1 – при $N = 3$; 2 – при $N = 4$;

Рис. 3.6. Влияние длительности интервала идентификации φ^* на конфигурацию $u(\varphi) - u^*(\varphi)$ при $x^* = 0.9$, $N = 4$: 1 – при $\varphi^* = 1$; 2 – при $\varphi^* = 0.9$; 3 – при $\varphi^* = 0.8$



няться с изменением координаты x^* (табл. 3.4, рис. 3.7).

Например, в приведенных примерах в классе решений $N = 2$ при $x^* = 1$ максимальное отклонение наблюдается в момент времени $\varphi = 0$. Далее, с перемещением точки x^* вглубь интервала $[0, \varphi^*]$ конфигурация $u(\varphi) - u^*(\varphi)$ перестраивается, вследствие чего погрешность ε_u^0 наблюдается далее в момент $\varphi = \varphi^*$. В данном примере уменьшение координаты x^* , вызывающее изменение конфигурации $u(\varphi) - u^*(\varphi)$, на всем интервале $x^* \in [0, 1]$ сопровождается ростом погрешности ε_u^0 (рис. 3.8, (а)). При этом ошибка аппроксимации температурного распределения I_0 уменьшается.

Таблица 3.4. Зависимость погрешностей $\varepsilon_{\theta}^0 = \frac{\max|\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)|}{\theta_{max}^*} \cdot 100\%$ и $\varepsilon_u^0 = \frac{\max|u(\varphi) - u^*(\varphi)|}{u_{max}^*} \cdot 100\%$ от координаты x^* точки контроля температуры при $\varphi^* = 1$, $\varepsilon_{\theta}^{(2)}, \varepsilon_u^{(2)} - N = 2$; $\varepsilon_{\theta}^{(4)}, \varepsilon_u^{(4)} - N = 4$;

x^*	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0
$\varepsilon_{\theta}^{(2)}, \%$	0.960	0.911	0.803	0.679	0.557	0.450	0.364	0.306	0.276	0.263	0.261
$\varepsilon_u^{(2)}, \%$	10.37	10.41	10.47	11.10	12.15	13.46	15.13	17.25	19.63	21.62	22.40
$\varepsilon_{\theta}^{(4)}, \%$	0.423	0.397	0.342	0.280	0.220	0.167	0.125	0.096	0.080	0.074	0.073
$\varepsilon_u^{(4)}, \%$	5.73	5.97	6.46	7.08	7.80	8.65	9.75	11.30	13.31	15.20	15.98

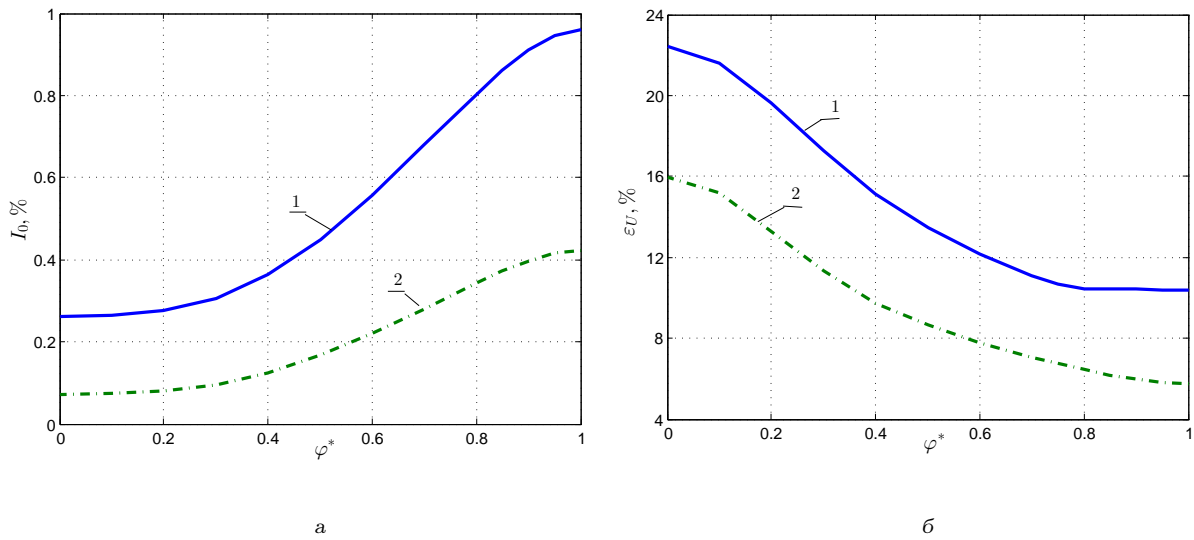


Рис. 3.7. Влияние координаты x^* на погрешность $\varepsilon_{\theta}^0 = \frac{\max|\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)|}{\theta_{max}^*} \cdot 100\%$ приближения температуры (а) и ошибку $\varepsilon_u^0 = \frac{\max|u(\varphi) - u^*(\varphi)|}{u_{max}^*} \cdot 100\%$ аппроксимации искомой характеристики (б), $\varphi^* = 1$: 1 – при $N = 2$; 2 – при $N = 4$;

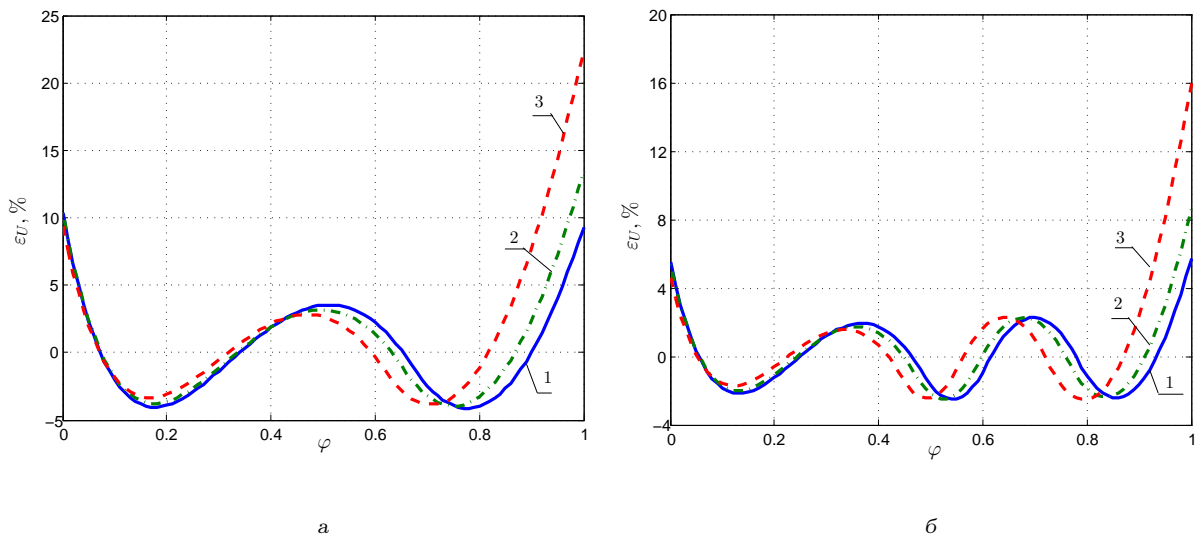
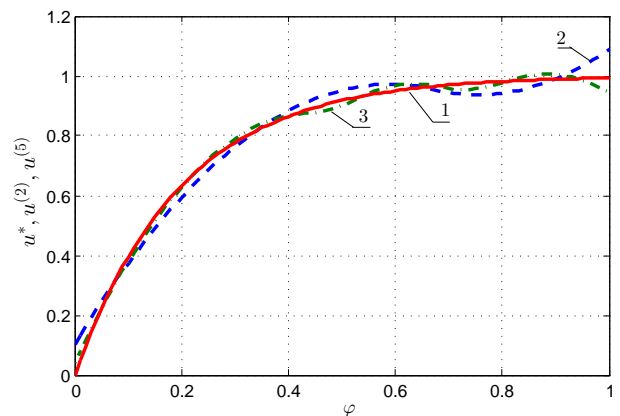


Рис. 3.8. Влияние координаты x^* на конфигурацию $u(\varphi) - u^*(\varphi)$ при $N = 2$ (а) и $N = 4$ (б) и $\varphi^* = 1$: 1 – при $x^* = 1$; 2 – при $x^* = 0.5$; 3 – при $x^* = 0$;

Таблица 3.5. Результаты решения внутренней ОЗТ (параметры оптимального процесса) при $N = \overline{1,8}$, $\varphi^* = 1$, $x^* = 0.9$;

N	1	2	3	4	5	6	7	8
w_{\max}	-3.443	-5.019	-6.443	-7.582	-8.604	-9.460	-10.235	-10.90
$u(0)$	0.155	0.103	0.073	0.055	0.043	0.034	0.028	0.023
$u'(0)$	2.437	2.953	3.328	3.583	3.784	3.935	4.059	4.157
φ_1^0	0.059	0.050	0.044	0.040	0.036	0.033	0.031	0.029
φ_2^0	0.346	0.281	0.239	0.212	0.190	0.174	0.160	0.150
φ_3^0	0.778	0.606	0.501	0.436	0.387	0.350	0.320	0.297
φ_4^0	1.0	0.860	0.695	0.595	0.522	0.468	0.425	0.391
φ_5^0	-	1.0	0.889	0.757	0.660	0.590	0.535	0.491
φ_6^0	-	-	1.0	0.913	0.791	0.704	0.635	0.581
φ_7^0	-	-	-	1.0	0.925	0.821	0.739	0.675
φ_8^0	-	-	-	-	1.0	0.936	0.840	0.766
φ_9^0	-	-	-	-	-	1.0	0.943	0.859
φ_{10}^0	-	-	-	-	-	-	1.0	0.950
φ_{11}^0	-	-	-	-	-	-	-	1.0
Δ_1^0	1	0.671	0.556	0.484	0.430	0.390	0.357	0.331
Δ_2^0	-	0.329	0.158	0.122	0.098	0.081	0.069	0.059
Δ_3^0	-	-	0.287	0.175	0.153	0.138	0.127	0.117
Δ_4^0	-	-	-	0.219	0.123	0.104	0.090	0.078
Δ_5^0	-	-	-	-	0.196	0.122	0.110	0.101
Δ_6^0	-	-	-	-	-	0.164	0.097	0.086
Δ_7^0	-	-	-	-	-	-	0.151	0.095
Δ_8^0	-	-	-	-	-	-	-	0.131

Рис. 3.9. Результаты решения внутренней ОЗТ при $\varphi^* = 1$, $x^* = 0.9$: 1 – искомая характеристика $v^*(\varphi)$ и ее кусочно-параболическая аппроксимация $v^{(N)}(\varphi)$: 2 – при $N = 2$; 3 – при $N = 5$



Для $N = 4$ для всех $x^* \in [0, 1]$ сохраняется единая конфигурация распределения $u(\varphi) - u^*(\varphi)$, при которой погрешность ε_u^0 достигается на границе $\varphi = \varphi^*$ и также возрастает с уменьшением координаты x^* (рис. 3.8, (б)).

Эта погрешность, при возможности, может быть снижена сдвигом начального и (или) конечного моментов.

3.2. Идентификация закона пространственного распределения внутренних источников тепла в обратных задачах теплопроводности

3.2.1. Постановка ОЗТ и редукция к задаче параметрической оптимизации

По-прежнему рассматривается типовая модель процесса теплопроводности с внутренним тепловыделением при краевых условиях третьего рода (3.1)–(3.3) при моделировании пространственно-временного управления $F(x, \varphi)$ по мощности внутреннего тепловыделения в виде произведения (3.4) двух функций одной переменной.

В технологических процессах индукционного нагрева металлических изделий удельная мощность внутреннего тепловыделения связана с напряжением на индукторе квадратичной зависимостью [188] и, при определенных допущениях, может считаться известной с высокой степенью достоверности.

Процессам ИН присущ ряд эффектов, приводящих к искажению закона пространственного распределения тепловых источников, и задача идентификации в этом случае сводится к определению (уточнению) функции $\Psi(x)$, подчиненной ограничению (2.6) принадлежности заданному множеству V_2 соответствующих управляющих воздействий.

Согласно разработанному подходу, рассматривается соответствующая ОЗТ в экстремальной постановке.

По известной температурной зависимости $\theta^*(\varphi)$, полученной в некоторой фиксированной точке контроля x^* , необходимо восстановить закон распределения источников тепла $\Psi(x)$ по пространственной координате, минимизирующий отклонение от $\theta^*(\varphi)$ решения $\theta(x^*, \varphi)$ краевой задачи (3.1)–(3.3), соответству-

ющего искомой функции $\Psi^*(x)$ при заданном характере изменения во времени мощности $v(\varphi)$ внутреннего тепловыделения.

Для оценки ошибки приближения $\theta(x^*, \varphi)$ к $\theta^*(\varphi)$ используется равномерная метрика на заданном временном интервале $[0, \varphi^*]$, что приводит к соответствующей минимаксной задаче оптимального управления вида (2.9)

$$I_1(\Psi) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} |\theta(x^*, \varphi) - \theta^*(\varphi)| \rightarrow \min_{\Psi \in V}, \quad (3.38)$$

в которой за искомое пространственно распределенное оптимальное управляющее воздействие $u(x)$ теперь принимается идентифицируемая характеристика $u(x) = \Psi(x)$.

Используется условное управляющее воздействие $w(x) = \Psi''(x)$, согласно (2.16), подчиненное ограничению $|w(x)| \leq |w_{\max}|$, что обеспечивает поиск решений на компактном множестве искомых управлений в классе непрерывных и непрерывно-дифференцируемых на заданном интервале функций $\Psi(x)$.

Теперь на основе соотношений (2.16), уравнений (2.20), связывающих $w(x)$ с искомой характеристикой, и точной математической модели ОРП (3.10) формулируется задача оптимального управления (2.32).

Специфической особенностью по сравнению с типичной задачей поиска сосредоточенных управляющих воздействий, изменяющихся во времени, подобно $v(\varphi)$, является нахождение пространственно распределенного управления $u''(x) = w(x)$ в пределах заданного интервала изменения пространственной координаты $[0, 1] \ni x$.

Далее осуществляется переход к эквивалентной задаче оптимального управления объектом (3.1) – (3.3), (2.20) [2, 5] со стандартным интегральным функционалом качества, аналогичным (2.37), при дополнительном фазовом ограничении, подобным (2.38).

В такой ситуации для уравнений (3.1) – (3.3), (2.14), (2.20), (2.32) применяется преобразование Лапласа по времени с оператором "р", что позволяет получить описание модели объекта управления в форме следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений по пространственной переменной относительно изображений $\tilde{\theta}(x, p), \tilde{\Psi}(x, p), \tilde{v}(p), \tilde{\vartheta}(x, p), \tilde{w}(x, p)$ соответствующих

функций $\theta(x, \varphi)$, $\Psi(x)$, $v(\varphi)$, $\vartheta(x)$ и $w(x)$:

$$\frac{d^2\tilde{\theta}(x, p)}{dx^2} - p\tilde{\theta}(x, p) + \tilde{v}(p)\tilde{\Psi}(x) = 0; \quad (3.39)$$

$$\frac{d\tilde{\Psi}(x, p)}{dx} = \tilde{\vartheta}(x, p); \quad (3.40)$$

$$\frac{d\tilde{\vartheta}(x, p)}{dx} = \tilde{w}(x, p) \quad (3.41)$$

с граничными условиями

$$\frac{d\tilde{\theta}(1, p)}{dx} + \text{Bi}\tilde{\theta}(1, p) = 0; \quad \frac{d\tilde{\theta}(0, p)}{dx} = 0; \quad \tilde{\Psi}(0, p) = \frac{\Psi(0)}{p}; \quad \tilde{\vartheta}(0, p) = \frac{\Psi'(0)}{p} \quad (3.42)$$

и управляющим воздействием $\tilde{w}(x, p)$, стесненным ограничением

$$|\tilde{w}(x, p)| \leq \frac{w_{\max}}{p}. \quad (3.43)$$

Здесь

$$\tilde{\Psi}(x, p) = \frac{\Psi(x)}{p}; \quad \tilde{\vartheta}(x, p) = \frac{\vartheta(x)}{p}; \quad \tilde{w}(x, p) = \frac{w(x)}{p}. \quad (3.44)$$

Критерий оптимальности (2.37), заданный в интегральной форме с постоянным параметром κ , в этом случае принимает вид (2.39) и дополняется фазовым ограничением (2.38).

В итоге, задача сводится к поиску управляющего воздействия $\tilde{w}(x, p)$, подчиненного ограничению (3.43), обеспечивающего при управлении объектом (3.39)–(3.43) минимизацию критерия качества (2.39) в условиях фазового ограничения (2.38).

Как показано в главе 2, фазовые ограничения (2.38) в виде равенств выполняются только в отдельных точках альтернанса, вследствие чего правомерно рассматривать решение задачи (2.39) без ограничения (2.38), и найденное в результате (без учета ограничений) управление $\tilde{w}^0(x, p)$ будет совпадать с искомым воздействием $\tilde{w}^0(x, p)$.

Для поиска $\tilde{w}^0(x, p)$ для модели объекта в изображениях по Лапласу применяется принцип максимума Понтрягина с использованием здесь интегральной формы критерия (2.39) и ограничения вида (3.43) на управляющее воздействие. Как показано в разделе 2.2, стандартная процедура принципа максимума в задаче оптимизации (3.1), (2.39) приводит к отысканию в форме кусочно-посто-

янной (релейной) функции пространственной координаты, попеременно принимающей только свои предельно допустимые согласно (3.43) значения.

В соответствии с этим, при переходе к оригиналам управляющее воздействие $w^{\bar{0}}(x)$ общего вида (2.67) состоит из знакопередающихся участков своего постоянства и определяется их общим числом N и протяженностями $\tilde{\Delta}_j$, $j = \overline{1, N}$:

$$w^{\bar{0}}(x) = \begin{cases} \beta w_{\max}, & 0 < x < \tilde{\Delta}_1; \\ \beta(-1)^{j+1} w_{\max}; & \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i < x < \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i; j = \overline{2, n}, \end{cases} \quad (3.45)$$

где $\beta = \pm 1$, $\sum_{i=1}^n \tilde{\Delta}_i = 1$.

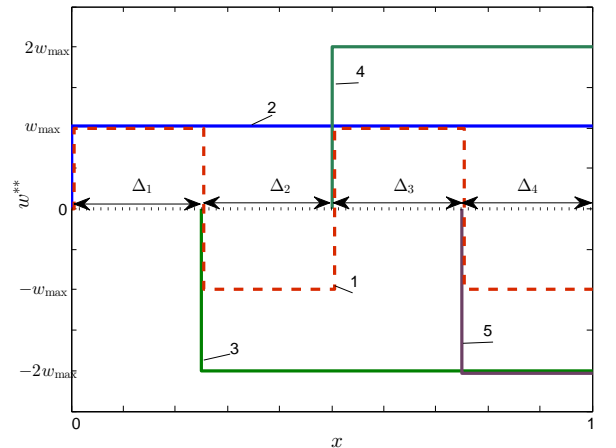
Приняв для определенности $\beta = 1$, представим управляющее воздействие (3.45) в следующем виде (рис. 3.10):

$$w^{\bar{0}}(x) = \begin{cases} w_{\max}, & 0 < x < \tilde{\Delta}_1; \\ w_{\max} + 2w_{\max} \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \beta_1 \left(x - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right), & \\ \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i < x < \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i, j = \overline{2, n}, n \geq 2, \end{cases} \quad (3.46)$$

где

$$\beta_1 \left(x - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right) = \begin{cases} 0, & x < \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \\ 1, & x > \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i. \end{cases}$$

Рис. 3.10. Кусочно-постоянное представление $w^{\bar{0}}(x)$: 1 – представление, согласно (3.45), 2, 3, 4, 5 – отдельные составляющие, согласно (3.46)



Для получения параметрической формы идентифицируемой характеристики $\Psi^{\bar{0}}(x)$ (без учета фазового ограничения (2.38)) используем соотношения (2.20), связывающие полученное управление $w(x)$ с искомым воздействием $\Psi(x)$. Проинтегрировав сначала второе соотношение $\frac{d\nu}{dx} = w$, $\nu(0) = u'_x(0) = \nu_0$ с учетом (3.46), получим

$$\nu^{\bar{0}}(x) = \int_0^x w^{\bar{0}}(\xi) d\xi + \Psi'(0), \quad (3.47)$$

которое на первом интервале (при $0 < x < \tilde{\Delta}_1$) принимает вид

$$\nu^{\bar{0}}(x) = \int_0^x w_{\max} d\xi + \Psi'(0) = w_{\max}x + \Psi'(0). \quad (3.48)$$

На последующих интервалах при $\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i < x < \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i$, $j = \overline{2, n}$, $n \geq 2$, соответствующее выражение может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} \nu^{\bar{0}}(x) &= \int_0^x \left(w_{\max} + 2w_{\max} \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \beta_1 \left(x - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right) \right) d\xi + \Psi'(0) = \\ &= w_{\max}x + \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} 2 \int_{\sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i}^x w_{\max} d\xi + \Psi'(0) = \\ &= w_{\max}x + 2 \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} w_{\max} \left(x - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right) + \Psi'(0). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Для получения выражения для $\Psi^{\bar{0}}(x)$ проинтегрируем первое выражение $\frac{du}{dx} = \nu$, $u(0) = u_0$ в (2.20)

$$\Psi^{\bar{0}}(x) = \int_0^x \nu^{\bar{0}}(\xi) d\xi + \Psi(0), \quad (3.50)$$

используя полученную в (3.48) и (3.49) функцию $\nu^{\bar{0}}(x)$.

При $0 < x < \tilde{\Delta}_1$ выражение принимает вид

$$\Psi^{\bar{0}}(x) = \int_0^x (w_{\max}\xi + \Psi'(0)) d\xi + \Psi(0) = \frac{w_{\max}}{2} x^2 + \Psi'(0)x + \Psi(0), \quad (3.51)$$

а при $\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i < x < \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i$, $j = \overline{2, n}$, $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \Psi^{\bar{0}}(x) &= \int_0^x \left(w_{\max} \xi + 2w_{\max} \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \beta_1 \left(\xi - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right) + \Psi'(0) \right) d\xi + \Psi(0) = \\ &= \frac{w_{\max}}{2} x^2 + \Psi'(0)x + \Psi(0) + 2 \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} w_{\max} \int_{\sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i}^x \left(\xi - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right) d\xi = \\ &= \frac{w_{\max}}{2} x^2 + \Psi'(0)x + \Psi(0) + \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} w_{\max} \left(x - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2, \quad (3.52) \end{aligned}$$

что соответствует параметрической форме искомого пространственно распределенного воздействия (2.69).

Параметризованная форма температурного поля $\theta(x, \varphi, \Delta)$ может быть получена при подстановке (2.69) в (3.10) и описывается выражением (2.72).

Таким образом, искомое управление и соответствующая ему температура однозначно характеризуются вектором параметров $\Delta = (\tilde{\Delta}, w_{\max}, \gamma)$, содержащим протяженности $\tilde{\Delta} = (\tilde{\Delta}_j)$, $j = \overline{1, N}$ интервалов постоянства $w^{\bar{0}}(x)$, величину w_{\max} и начальные значения $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (\Psi(0), \Psi'(0))$.

Составляющие $\Phi(x, \varphi, \Psi(0), \Psi'(0))$, $\Lambda(x, \varphi, w_{\max})$ и $\bar{\Lambda}(x, \varphi, w_{\max}, \tilde{\Delta})$ определяются на основе (3.10) как реакция на соответствующие слагаемые искомого пространственного управления (2.69).

В условиях постоянства во времени полной мощности внутреннего тепловыделения $v(\varphi) = 1$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ в (3.4) указанные составляющие принимают следующий вид. Слагаемое $\Phi(x, \varphi, \Psi(0), \Psi'(0))$ представляет решение краевой задачи (3.1) – (3.3), при управляющем воздействии $\Psi(x) = \Psi(0) + \Psi'(0)x$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, \varphi, \Psi(0), \Psi'(0)) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \frac{(1 - e^{-\mu_m^2 \varphi})}{\mu_m^3} \times \\ &\times \left((\Psi(0) + \Psi'(0)) \sin \mu_m + \frac{\Psi'(0)}{\mu_m} (\cos \mu_m - 1) \right); \quad (3.53) \end{aligned}$$

$\Lambda(x, \varphi, w_{\max})$ – решение той же краевой задачи для $u(x) = \frac{w_{\max}}{2} x^2$:

$$\Lambda(x, \varphi, w_{\max}) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \frac{(1 - e^{-\mu_m^2 \varphi}) w_{\max}}{\mu_m^2} \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cos \mu_m}{\mu_m^2} + \left(\frac{1}{\mu_m} - \frac{2}{\mu_m^3} \right) \sin \mu_m \right), \quad (3.54)$$

где $B_m(x)$ по-прежнему определяется на основе (3.11).

Для нахождения $\bar{\Lambda}(x, \varphi, w_{\max}, \tilde{\Delta})$ получим выражение для $\theta(x, \varphi, \Delta)$ в соответствии с (2.74) при $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \theta(x, \varphi, \Delta) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \frac{(1 - e^{-\mu_m^2 \varphi})}{\mu_m^2} \int_0^1 \Psi(\xi) \cos \mu_m \xi d\xi = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \frac{(1 - e^{-\mu_m^2 \varphi})}{\mu_m^2} \left(\int_0^{\tilde{\Delta}_1} \cos \mu_m \xi \left(\frac{w_{\max}}{2} \xi^2 + \Psi'(0)\xi + \Psi(0) \right) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Delta_1}^{\Delta_1 + \Delta_2} \cos \mu_m \xi \left(\frac{w_{\max}}{2} \xi^2 + \Psi'(0)\xi + \Psi(0) - w_{\max}(\xi - \Delta_1)^2 \right) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Delta_1 + \Delta_2}^{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3} \cos \mu_m \xi \left(\frac{w_{\max}}{2} \xi^2 + \Psi'(0)\xi + \Psi(0) - w_{\max}(\xi - \Delta_1)^2 + w_{\max}(\xi - \Delta_1 - \Delta_2)^2 \right) d\xi + \right. \\ &\quad \left. \dots + \int_{\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i}^{\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i} \cos \mu_m \xi \left(\frac{w_{\max}}{2} \xi^2 + \Psi'(0)\xi + \Psi(0) + \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} w_{\max} \left(\xi - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 \right) d\xi + \right. \\ &\quad \left. \dots + \int_{\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\Delta}_i}^1 \cos \mu_m \xi \left(\frac{w_{\max}}{2} \xi^2 + \Psi'(0)\xi + \Psi(0) + \sum_{k=2}^n (-1)^{k+1} w_{\max} \left(\xi - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 \right) d\xi \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \frac{(1 - e^{-\mu_m^2 \varphi})}{\mu_m^2} \int_0^1 \cos \mu_m \xi \left(\frac{w_{\max}}{2} \xi^2 + \Psi'(0)\xi + \Psi(0) \right) d\xi + \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \frac{(1 - e^{-\mu_m^2 \varphi})}{\mu_m^2} \sum_{j=2}^n \left\{ \int_{\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i}^{\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i} \cos \mu_m \xi \left(\sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} w_{\max} \left(\xi - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 \right) d\xi \right\} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Здесь первое слагаемое

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \frac{(1 - e^{-\mu_m^2 \varphi})}{\mu_m^2} \int_0^1 \cos \mu_m \xi \left(\frac{w_{\max}}{2} \xi^2 + \Psi'(0) \xi + \Psi(0) \right) d\xi$$

представляет собой сумму $\Phi(x, \varphi, u(0), u'(0))$ и $\Lambda(x, \varphi, w_{\max})$, выражения для которых получены в (3.53) и (3.54). Второе слагаемое

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \frac{(1 - e^{-\mu_m^2 \varphi})}{\mu_m^2} \sum_{j=2}^n \left\{ \int_{\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i}^{\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i} \cos \mu_m \xi \left(\sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} w_{\max} \left(\xi - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 \right) d\xi \right\}$$

соответствует составляющей $\bar{\Lambda}(x, \varphi, w_{\max}, \tilde{\Delta})$ в (2.72), выражение для которого можно найти с использованием следующих соотношений. Проведем преобразования в (3.55)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^n \left\{ \int_{\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i}^{\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i} \cos \mu_m \xi \left(\sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} w_{\max} \left(\xi - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 \right) d\xi \right\} = \\ & = w_{\max} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \left\{ \int_{\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i}^{\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i} \left(\xi - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 \cos \mu_m \xi d\xi \right\} = \\ & = w_{\max} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \left\{ \int_{\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i}^{\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i} \left(\xi^2 - 2\xi \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 \right) \cos \mu_m \xi d\xi \right\} = \\ & = w_{\max} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \left\{ \int_{\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i}^{\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i} \xi^2 \cos \mu_m \xi d\xi - 2 \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \int_{\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i}^{\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i} \xi \cos \mu_m \xi d\xi + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 \int_{\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i}^{\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i} \cos \mu_m \xi d\xi \Bigg\} = w_{\max} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \left\{ \left[\frac{2 \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \cos \left(\mu_m \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \right)}{\mu_m^2} + \right. \right. \\
& + \frac{\mu_m^2 \left(\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \right)^2 - 2}{\mu_m^3} \sin \left(\mu_m \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \right) - \frac{2 \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \cos \left(\mu_m \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \right)}{\mu_m^2} \\
& - \left. \frac{\mu_m^2 \left(\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 - 2}{\mu_m^3} \sin \left(\mu_m \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \right) \right] - 2 \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \left[\frac{\cos \left(\mu_m \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \right)}{\mu_m^2} + \right. \\
& + \left. \frac{\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i}{\mu_m} \sin \left(\mu_m \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \right) - \frac{\cos \left(\mu_m \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \right)}{\mu_m^2} - \frac{\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i}{\mu_m} \sin \left(\mu_m \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \right) \right] + \\
& \left. + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 \left[\frac{1}{\mu_m} \sin \left(\mu_m \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \right) - \frac{1}{\mu_m} \sin \left(\mu_m \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \right) \right] \right\}. \quad (3.56)
\end{aligned}$$

Таким образом, слагаемое $\bar{\Lambda}(x, \varphi, w_{\max}, \tilde{\Delta})$ с учетом соотношений (3.55), (3.56) может быть записано как

$$\bar{\Lambda}(x, \varphi, w_{\max}, \tilde{\Delta}) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \frac{(1 - e^{-\mu_m^2 \varphi})}{\mu_m^2} w_{\max} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} S_{jk}^{(N)}, \quad (3.57)$$

где

$$\begin{aligned}
S_{jk}^{(N)} = & \frac{2 \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \cos \left(\mu_m \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \right)}{\mu_m^2} + \frac{\mu_m^2 \left(\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \right)^2 - 2}{\mu_m^3} \sin \left(\mu_m \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \right) - \\
& - \frac{2 \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \cos \left(\mu_m \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \right)}{\mu_m^2} - \frac{\mu_m^2 \left(\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 - 2}{\mu_m^3} \sin \left(\mu_m \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \right) - \\
& - 2 \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \left[\frac{\cos \left(\mu_m \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \right)}{\mu_m^2} + \frac{\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i}{\mu_m} \sin \left(\mu_m \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left. \frac{\cos \left(\mu_m \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \right)}{\mu_m^2} - \frac{\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i}{\mu_m} \sin \left(\mu_m \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \right) \right] + \\
& + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 \left[\frac{1}{\mu_m} \sin \left(\mu_m \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \right) - \frac{1}{\mu_m} \sin \left(\mu_m \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \right) \right]. \quad (3.58)
\end{aligned}$$

На основе (3.57), (3.58) можно получить выражения для $\bar{\Lambda}(x, \varphi, w_{\max}, \tilde{\Delta})$ при $N \geq 2, j \geq 2$. Например, в классе управлений $N = 2$ на втором интервале постоянства $w(x)$ выражение (3.57) принимает вид

$$\bar{\Lambda}^{(2)}(x, \varphi, w_{\max}, \tilde{\Delta}) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \frac{(1 - e^{-\mu_m^2 \varphi})}{\mu_m^2} w_{\max} (-1) S_{22}^{(2)}, \quad (3.59)$$

а при $N = 3$ оно соответствует

$$\bar{\Lambda}^{(3)}(x, \varphi, w_{\max}, \tilde{\Delta}) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \frac{(1 - e^{-\mu_m^2 \varphi})}{\mu_m^2} w_{\max} \left(-S_{22}^{(3)} - S_{32}^{(3)} + S_{33}^{(3)} \right). \quad (3.60)$$

Слагаемые $S_{jk}^{(N)}, j = \overline{2, N}, k = \overline{2, j}$ вычисляются на основе (3.58), при этом необходимо учитывать следующие обстоятельства. Например, в классе $N = 2$ при расчете $S_{22}^{(2)}$ сумма $\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i = \Delta_1 + \Delta_2 = 1$, что приводит к следующему выражению

$$\begin{aligned}
S_{22}^{(2)} = & \frac{2 \cos(\mu_m)}{\mu_m^2} + \frac{\mu_m^2 - 2}{\mu_m^3} \sin(\mu_m) - \frac{2\Delta_1 \cos(\mu_m \Delta_1)}{\mu_m^2} - \frac{\mu_m^2 (\Delta_1)^2 - 2}{\mu_m^3} \sin(\mu_m \Delta_1) - \\
& - 2\Delta_1 \left[\frac{\cos(\mu_m)}{\mu_m^2} + \frac{1}{\mu_m} \sin(\mu_m) - \frac{\cos(\mu_m \Delta_1)}{\mu_m^2} - \frac{\Delta_1}{\mu_m} \sin(\mu_m \Delta_1) \right] + \\
& + (\Delta_1)^2 \left[\frac{1}{\mu_m} \sin(\mu_m) - \frac{1}{\mu_m} \sin(\mu_m \Delta_1) \right]. \quad (3.61)
\end{aligned}$$

В классе $N = 3$ при вычислении $S_{22}^{(3)}$ сумма $\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i = \Delta_1 + \Delta_2 \neq 1$, в результате чего соответствующее выражение принимает вид

$$\begin{aligned}
S_{22}^{(3)} = & \frac{2(\Delta_1 + \Delta_2) \cos(\mu_m(\Delta_1 + \Delta_2))}{\mu_m^2} + \frac{\mu_m^2 (\Delta_1 + \Delta_2)^2 - 2}{\mu_m^3} \sin(\mu_m(\Delta_1 + \Delta_2)) - \\
& - \frac{2\Delta_1 \cos(\mu_m \Delta_1)}{\mu_m^2} - \frac{\mu_m^2 (\Delta_1)^2 - 2}{\mu_m^3} \sin(\mu_m \Delta_1) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2\Delta_1 \left[\frac{\cos(\mu_m(\Delta_1 + \Delta_2))}{\mu_m^2} + \frac{(\Delta_1 + \Delta_2)}{\mu_m} \sin(\mu_m(\Delta_1 + \Delta_2)) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\cos(\mu_m\Delta_1)}{\mu_m^2} - \frac{\Delta_1}{\mu_m} \sin(\mu_m\Delta_1) \right] + \\
& \quad + (\Delta_1)^2 \left[\frac{1}{\mu_m} \sin(\mu_m(\Delta_1 + \Delta_2)) - \frac{1}{\mu_m} \sin(\mu_m\Delta_1) \right]. \quad (3.62)
\end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования и вычисления проводятся аналогично.

Полученное параметрическое представление (2.69) управляющего воздействия $\Psi(x, \Delta)$ и параметризованная форма (2.72), (3.53), (3.54), (3.57) температурного поля $\theta(x, \varphi, \Delta)$ при использовании минимаксного функционала вида (2.75) позволяют осуществить точную редукцию исходной некорректной постановки обратной задачи теплопроводности к специальной негладкой задаче математического программирования вида (3.19).

3.2.2. Альтернансные свойства оптимальных решений

и вычислительные алгоритмы. Анализ результатов решения

Аналогично задаче (3.14)–(3.17), (3.19) поиска сосредоточенного управляющего воздействия $v(\varphi)$, в задаче (3.19) (2.72), (3.53), (3.54), (3.57) решение $\Delta^0 = (\Delta_j), j = \overline{1, N+2}$ при заданной размерности N вектора Δ определяет ошибку $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi)$ приближения температурного поля, обладающую на интервале $\varphi \in [0, \varphi^*]$ свойствами чебышевского альтернанса, что приводит в общем случае к той же самой замкнутой системе соотношений (2.84), (2.85), для решения которой может быть применен анализ, приведенный в пункте 3.1.3.

В качестве систем расчетных соотношений также, как и в предыдущем случае, используются уравнения (3.20), (3.21) или (3.23) и условия существования экстремумов (3.22).

Наиболее вероятным вариантом расположения точек φ_s^0 экстремума $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi)$ на интервале идентификации $[0, \varphi^*]$, конкретизирующим форму разности $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi)$, также, как и при поиске $v(\varphi)$, остается случай $s = \overline{1, N+2}$.

Приведем результаты решения задачи по восстановлению закона пространственного распределения теплоисточников $\Psi(x)$ в классе $N = \overline{1, 4}$, когда экспериментальная температурная зависимость $\theta^*(\varphi)$ представляет собой точное

решение краевой задачи (3.1)–(3.3), полученное на основе (3.8) и (3.9) при $x = x^* \in [0, 1]$, $v(\varphi) = 1$, $\theta_c = 0$ и при заданном характере изменения $\Psi^*(x) = k_2(e^{\beta_2 x} - 1)$, близко аппроксимирующем стандартную для процесса ИН бесконечной пластины зависимость (3.5), в виде

$$\begin{aligned} \theta^*(\varphi) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x^*) \int_0^{(\varphi)} v(\tau) e^{-\mu_m^2(\varphi-\tau)} d\tau \int_0^1 \Psi(\xi) \cos \mu_m \xi d\xi = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x^*) \int_0^{(\varphi)} e^{-\mu_m^2(\varphi-\tau)} d\tau k_2 \int_0^1 (e^{\beta_2 \xi} - 1) \cos \mu_m \xi d\xi = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x^*) \frac{(1 - e^{-\mu_m^2 \varphi})}{\mu_m^2} k_2 \left(\frac{e^{\beta_2} (\beta_2 \cos \mu_m + \mu_m \sin \mu_m) - \beta_2}{\mu_m^2 + \beta_2^2} - \frac{\sin \mu_m}{\mu_m} \right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

Поиск экстремумов в (3.22) осуществляется путем дифференцирования выражения (2.72)

$$\theta'_\varphi(x, \varphi, \Delta) = \begin{cases} \Phi'_\varphi(x, \varphi, \Psi(0), \Psi'(0)) + \Lambda'_\varphi(x, \varphi, w_{\max}), & n = 1; \\ \Phi'_\varphi(x, \varphi, \Psi(0), \Psi'(0)) + \Lambda'_\varphi(x, \varphi, w_{\max}) + \bar{\Lambda}'_\varphi(x, \varphi, w_{\max}, \tilde{\Delta}), & n \geq 2, \end{cases} \quad (3.64)$$

где составляющие принимают вид

$$\begin{aligned} \Phi'_\varphi(x, \varphi, \Psi(0), \Psi'(0)) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) \frac{e^{-\mu_m^2 \varphi}}{\mu_m} \times \\ &\times \left((\Psi(0) + \Psi'(0)) \sin \mu_m + \frac{\Psi'(0)}{\mu_m} (\cos \mu_m - 1) \right), \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\Lambda'_\varphi(x, \varphi, w_{\max}) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) e^{-\mu_m^2 \varphi} \cdot \frac{w_{\max}}{2} \left(\frac{2 \cos \mu_m}{\mu_m^2} + \left(\frac{1}{\mu_m} - \frac{2}{\mu_m^3} \right) \sin \mu_m \right), \quad (3.66)$$

$$\bar{\Lambda}'_\varphi(x, \varphi, w_{\max}, \tilde{\Delta}) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x) e^{-\mu_m^2 \varphi} w_{\max} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} S_{jk}^{(N)}, \quad (3.67)$$

а $S_{jk}^{(N)}$ определяется с помощью (3.58);

$$\frac{\partial \theta^*(\varphi)}{\partial \varphi} = \sum_{m=1}^{\infty} B_m(x^*) e^{-\mu_m^2 \varphi} \cdot k_2 \left(\frac{e^{\beta_2} (\beta_2 \cos \mu_m + \mu_m \sin \mu_m) - \beta_2}{\mu_m^2 + \beta_2^2} - \frac{\sin \mu_m}{\mu_m} \right). \quad (3.68)$$

Результаты решения ОЗТ для значений параметров $k_2 = 0.035$, $\beta_2 = 5$, $\varphi^* = 1$, $x^* = 0.91$ представлены на рис. 3.11–3.16 и в табл. 3.6, 3.7.

При идентификации пространственно распределенного управляющего воздействия также, согласно общему подходу минимаксной оптимизации, обеспечивается корректная постановка задачи для любого числа N . С ростом N погрешность I^0 убывает, стремясь к нулю, что вызывает уменьшение ошибки $\Psi(x, \Delta^{(N)}) - \Psi^*(x)$ аппроксимации искомой характеристики (табл. 3.6).

При этом, задача восстановления пространственного управления $u(x) = \Psi(x)$ на основе измерений $\theta^*(\varphi)$ во времени $\varphi \in [0, \varphi^*]$ в фиксированной точке x^* имеет специфические особенности.

Рис. 3.11.
 $\frac{\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)}{\theta_{max}^*} 100\%$
 погрешность приближения температуры при $N = 1$

Погрешность приближения

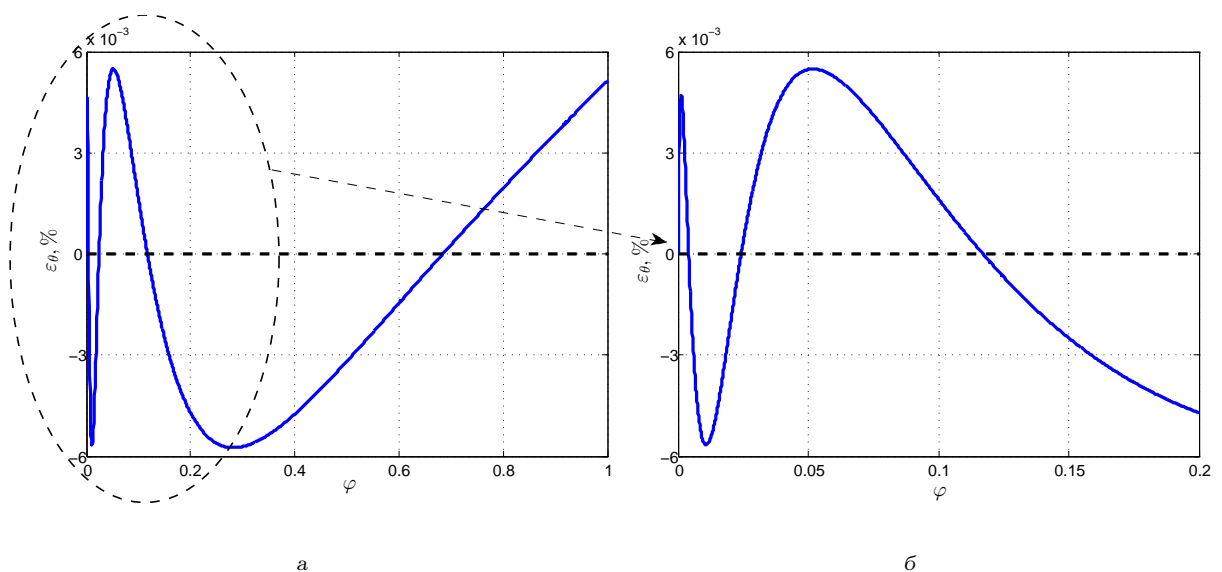
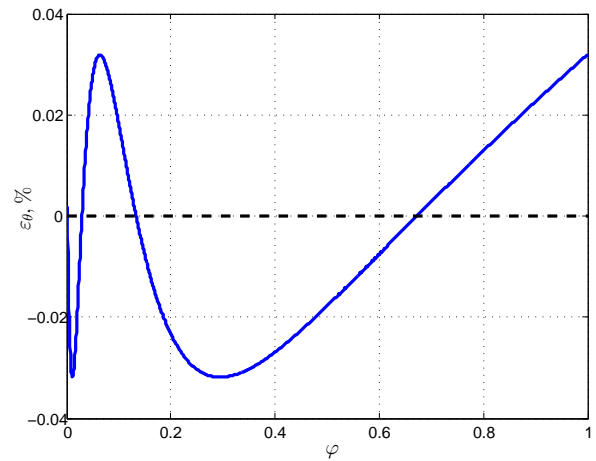


Рис. 3.12. Погрешность $\frac{\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)}{\theta_{max}^*} 100\%$ приближения температуры (а) и укрупненно начальный участок (б) при $N = 2$

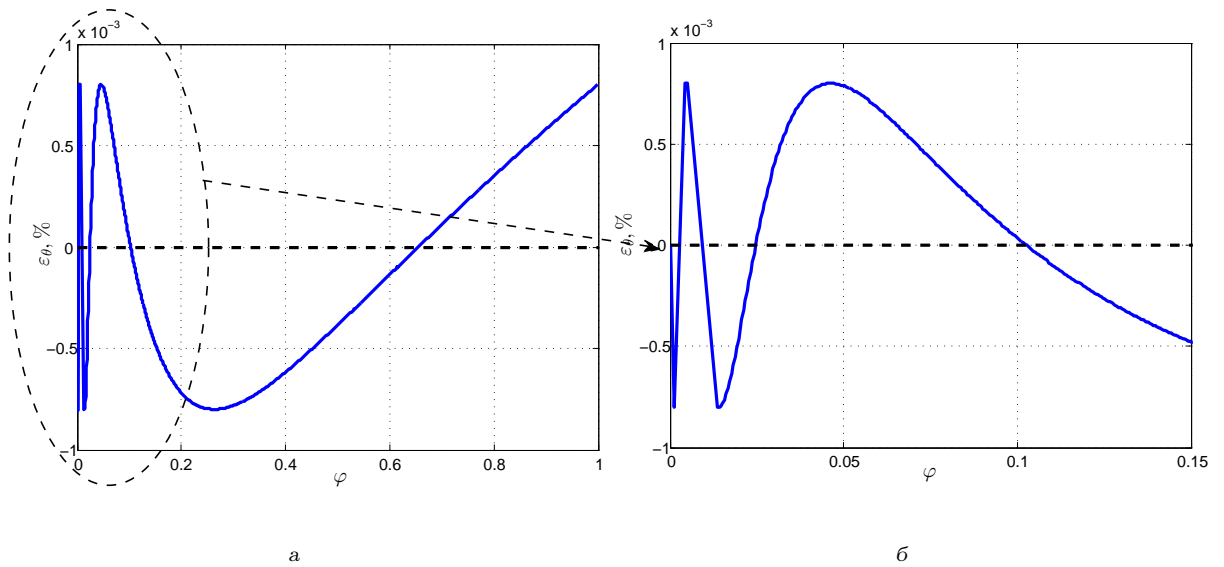


Рис. 3.13. Погрешность $\frac{\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)}{\theta_{max}^*} 100\%$ приближения температуры (а) и укрупненно начальный участок (б) при $N = 3$

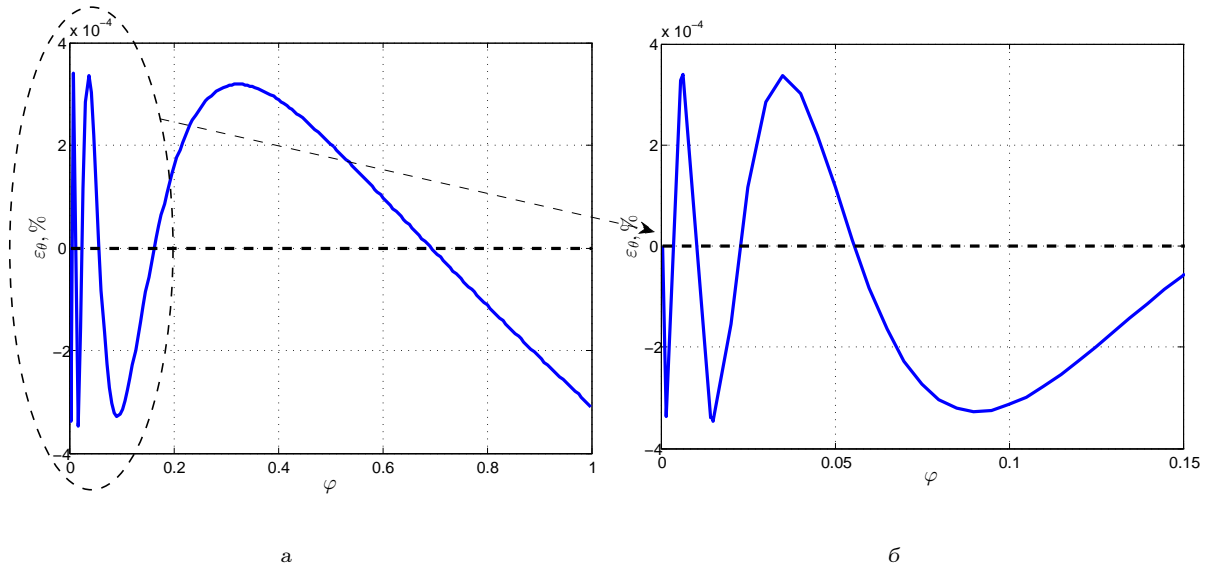


Рис. 3.14. Погрешность $\frac{\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)}{\theta_{max}^*} 100\%$ приближения температуры (а) и укрупненно начальный участок (б) при $N = 4$

Последняя ($j = R$) точка φ_R^0 достижения предельно допустимого отклонения совпадает с концом интервала идентификации φ^* . Остальные точки альтернанса $\varphi_j^0, j = \overline{1, R-1}$, как правило, располагаются на начальном участке интервала $[0, \varphi^*]$, частота их расположения возрастает при $\varphi \rightarrow 0$ (рис. 3.11–3.14).

С увеличением числа N и, соответственно, с ростом числа точек альтернанса сохраняется та же ситуация. Новые точки альтернанса сконцентрированы в достаточно узкой области при $\varphi \approx 0$, при этом на начальном участке интервала идентификации для некоторых точек $\varphi_j^0 \approx \varphi_{j+1}^0$, что может приводить к определенным сложностям в распознавании формы $\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)$.

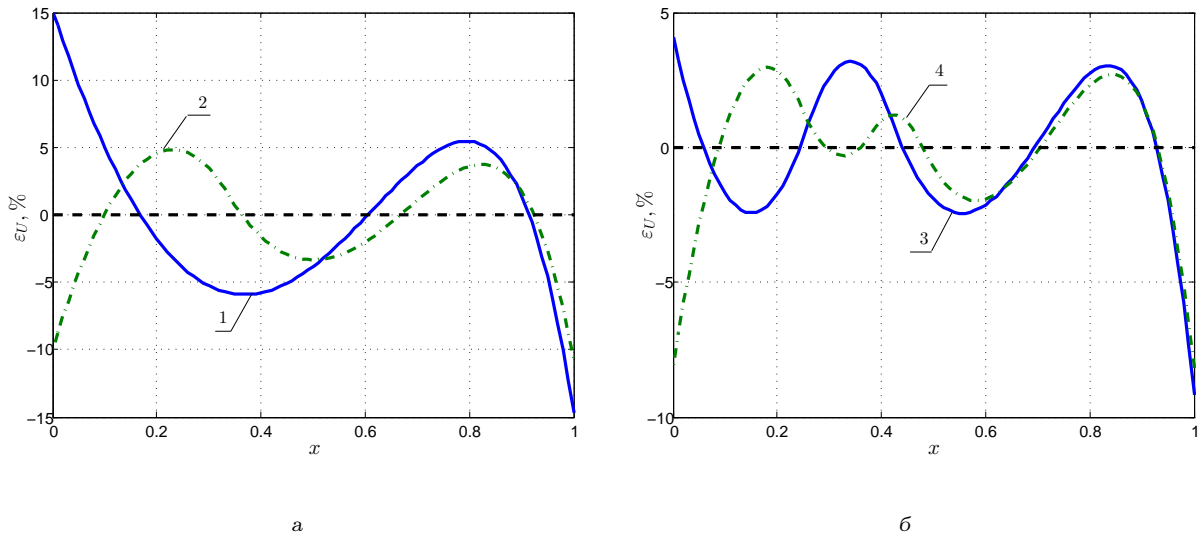


Рис. 3.15. Погрешность $\frac{\Psi(x, \Delta^{(N)}) - \Psi^*(x)}{\Psi_{max}^*} 100\%$ аппроксимации искомой характеристики: 1 – при $N = 1$, 2 – при $N = 2$ (а) и 3 – при $N = 3$, 4 – при $N = 4$ (б)

Рис. 3.16. Результаты решения внутренней ОЗТ при $\varphi^* = 1$, $x^* = 0.91$: 1 – искомая характеристика $\Psi^*(x)$ и ее кусочно-параболическая аппроксимация $\Psi^{(3)}(x)$ – 2

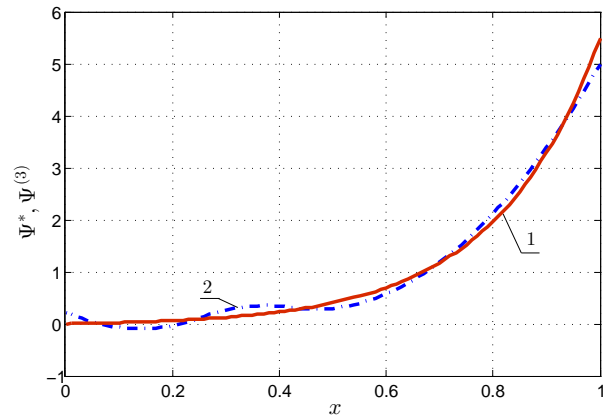


Таблица 3.6. Погрешность $\varepsilon_{\theta}^0 = \frac{\max |\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)|}{\theta_{max}^*} \cdot 100\%$ аппроксимации температуры и ошибка $\varepsilon_u^0 = \frac{\max |u(x) - u^*(x)|}{u_{max}^*} \cdot 100\%$ приближения пространственно распределенного управления во внутренней ОЗТ при $N = \overline{1, 4}$, $\varphi^* = 1$, $x^* = 0.91$;

N	1	2	3	4
$\varepsilon_{\theta}^0, \%$	0.0319	0.0057	7.998e-04	3.578e-04
$\varepsilon_u^0, \%$	15.21	10.77	9.16	8.22

Решение Δ^0 конкретных ОЗТ зависит от многих факторов, таких как длительность интервала идентификации, координата x^* , а также значение N (табл. 3.7).

Таблица 3.7. Результаты решения внутренней ОЗТ (параметры оптимального процесса) по восстановлению $\Psi(x)$ при $N = \overline{1, 4}$, $\varphi^* = 1$, $x^* = 0.91$;

N	1	2	3	4
w_{\max}	20.48	-28.54	32.9228	-33.5988
$u(0)$	0.8336	-0.5448	0.2240	-0.4222
$u'(0)$	-6.3966	7.1410	-4.5824	6.5176
φ_1^0	0.0110	0.0075	0.0011	0.0014
φ_2^0	0.0638	0.0108	0.0049	0.0051
φ_3^0	0.2956	0.0520	0.0146	0.0148
φ_4^0	1.0	0.2834	0.0463	0.0349
φ_5^0	-	1.0	0.2641	0.0905
φ_6^0	-	-	1.0	0.3200
φ_7^0	-	-	-	1.0
Δ_1^0	1	0.3365	0.2557	0.2467
Δ_2^0	-	0.6635	0.1633	0.1367
Δ_3^0	-	-	0.5810	0.0926
Δ_4^0	-	-	-	0.5240

3.3. Метод минимаксной оптимизации в граничных обратных задачах теплопроводности

3.3.1. Постановка граничной обратной задачи теплопроводности

Рассматривается модель процесса теплопроводности без внутреннего тепловыделения

$$\frac{\partial \theta(x, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \theta(x, \varphi)}{\partial x^2}; \quad 0 < x < 1; \quad 0 < \varphi \leq \varphi^* \quad (3.69)$$

при нулевых начальных условиях (3.2) и граничных условиях второго рода

$$\frac{\partial \theta(1, \varphi)}{\partial x} = q(\varphi); \quad \frac{\partial \theta(0, \varphi)}{\partial x} = 0; \quad \varphi \in [0, \varphi^*], \quad (3.70)$$

где идентифицируемой величиной является плотность $q(\varphi)$ теплового потока на границе $x = 1$, рассматриваемая в качестве управляющего воздействия $u(\varphi) = q(\varphi)$, подчиненного ограничению (2.7).

Формулируется модельная граничная ОЗТ в экстремальной постановке, в которой требуется по экспериментальной температурной зависимости $\theta^*(\varphi)$ в некоторой точке $x^* \in [0, 1]$ восстановить плотность теплового потока $q(\varphi)$, минимизирующую оцениваемую в равномерной метрике на интервале идентификации $[0, \varphi^*]$ невязку между $\theta^*(\varphi)$ и решением $\theta(x^*, \varphi)$ задачи (3.69), (3.2), (3.70), соответствующим граничному воздействию $q(\varphi)$.

Оценивание невязки в равномерной метрике приводит к задаче оптимального управления (2.9).

Для дальнейшего перехода к СЗМП производится сужение области возможных решений (2.17) до компактного множества при учете уравнений (2.19) перехода к новому управлению $w(\varphi)$ по второй производной $q''(\varphi)$.

Используется точное представление объекта (3.69), (3.2), (3.70) бесконечной системой ОДУ первого порядка

$$\frac{d\bar{\theta}_m}{d\varphi} = -\pi^2 m^2 \bar{\theta}_m + (-1)^m q(\varphi), \quad \bar{\theta}_m(0) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.71)$$

относительно коэффициентов $\bar{\theta}_m$ (временных мод) разложения температурного поля в бесконечный ряд (2.28).

На основе математического описания (3.71), (2.28) совместно с уравнениями (2.17), (2.19) формулируется задача оптимального управления (2.27), которая для рассматриваемого объекта записывается следующим образом

$$I_2(w(\varphi)) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} \left| \bar{\theta}_0(\varphi) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\theta}_m(\varphi) \cos(\pi m x^*) - \theta^*(\varphi) \right| \rightarrow \min_{w(\varphi)}. \quad (3.72)$$

Переход к эквивалентной задаче оптимального управления объектом (3.71), (2.28), (2.17), (2.19) с минимизируемым интегральным функционалом (2.37) и дополнительным фазовым ограничением (2.38), принимающим здесь вид

$$\left| \bar{\theta}_0(\varphi) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\theta}_m(\varphi) \cos(\pi m x^*) - \theta^*(\varphi) \right| - \kappa \leq 0, \quad \varphi \in (0, \varphi^0), \quad (3.73)$$

в предположении, что оно не нарушается, позволяет на основе необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина получить кусочно-постоянный характер (2.66) оптимального управления $w^0(\varphi)$.

Найденное (2.66) параметрическое представление $w^0(\varphi)$ приводит к параметризованной форме $u^0(\varphi) = q^0(\varphi)$ в виде кусочно-параболической функции (2.68) и к соответствующему описанию температурного поля вида (2.72)

$$\theta(x, \varphi, \Delta) = \begin{cases} \Phi(x, \varphi, q(0), q'(0)) + \Lambda(x, \varphi, w_{\max}), \\ \text{при } \varphi \in [0, \tilde{\Delta}_1], n \geq 1; \\ \Phi(x, \varphi, q(0), q'(0)) + \Lambda(x, \varphi, w_{\max}) + \\ + 2 \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \Lambda \left(x, \varphi - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2, \\ \text{при } \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \leq \varphi \leq \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i, j = \overline{2, n}, n \geq 2. \end{cases} \quad (3.74)$$

Общее соотношение (2.71), принимающее здесь вид

$$\theta(x, \varphi) = \int_0^{\varphi} G(x, 1, \varphi - \tau) q(\tau) d\tau, \quad (3.75)$$

с учетом функции Грина [134; 135] для объекта (3.69), (3.2), (3.70)

$$G(x, \xi, \varphi - \tau) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\pi m x) \cos(\pi m \xi) e^{-\pi^2 m^2 (\varphi - \tau)} \quad (3.76)$$

позволяет найти выражения для составляющих температурного поля (3.74)

$$\begin{aligned} \Phi(x, \varphi, q(0), q'(0)) = & q(0) \left(\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \cos(\pi mx)}{\pi^2 m^2} (1 - e^{-\pi^2 m^2 \varphi}) \right) + \\ & + q'(0) \left(\frac{\varphi^2}{2} + \varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \cos(\pi mx)}{\pi^2 m^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \cos(\pi mx)}{\pi^4 m^4} (1 - e^{-\pi^2 m^2 \varphi}) \right), \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \Lambda(x, \varphi, w_{\max}) = & w_{\max} \left(\frac{\varphi^3}{6} + \varphi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos(\pi mx)}{\pi^2 m^2} - \right. \\ & \left. - \varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \cos(\pi mx)}{\pi^4 m^4} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \cos(\pi mx)}{\pi^6 m^6} (1 - e^{-\pi^2 m^2 \varphi}) \right). \end{aligned} \quad (3.78)$$

На основе полученного параметрического описания (3.74), (3.77), (3.78) температурного поля $\theta(x, \varphi, \Delta)$, характеризуемого вектором параметров $\Delta = (\tilde{\Delta}, w_{\max}, q(0), q'(0))$, при его вычислении в точке x^* реализуется процедура точной редукции исходной задачи (3.69), (3.2), (3.70), (2.7), (2.9) к задаче математического программирования (3.19).

3.3.2. Альтернансные соотношения, вычислительные алгоритмы и анализ результатов решения граничной ОЗТ

Анализ альтернансных свойств оптимальных решений, сформулированных относительно ошибки температурной невязки $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi)$ на интервале $\varphi \in [0, \varphi^*]$, проводится здесь аналогично приведенному в пункте 3.1.3 и приводит к системам альтернансных соотношений (3.20), (3.21), (3.23) и условиям существования экстремума (3.22).

Приведем результаты решения граничной ОЗТ при изменении плотности теплового потока по экспоненциальному закону

$$q^*(\varphi) = 1 - e^{-\beta_3 \varphi}, \quad \varphi \in [0, 1]. \quad (3.79)$$

Экспериментальная температурная зависимость получена на основе (3.75), (3.76) в виде

$$\theta^*(\varphi) = \varphi - \frac{1}{\beta_3}(1 - e^{-\beta_3\varphi}) + \sum_{m=1}^{\infty} 2(-1)^m \left(\frac{1 - e^{-\pi^2 m^2 \varphi}}{\pi^2 m^2} + \frac{e^{-\pi^2 m^2 \varphi} - e^{-\beta_3 \varphi}}{\pi^2 m^2 - \beta_3} \right) \cos(\pi m x^*). \quad (3.80)$$

Для нахождения точек экстремума температурной невязки на интервале идентификации вычисляются производные от параметризованной зависимости (3.74)

$$\theta'_\varphi(x, \varphi, \Delta) = \begin{cases} \Phi'_\varphi(x, \varphi, q(0), q'(0)) + \Lambda'_\varphi(x, \varphi, w_{\max}), \\ \text{при } \varphi \in [0, \tilde{\Delta}_1], n \geq 1; \\ \Phi'_\varphi(x, \varphi, q(0), q'(0)) + \Lambda'_\varphi(x, \varphi, w_{\max}) + \\ + 2 \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \Lambda'_\varphi \left(x, \varphi - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2, \\ \text{при } \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \leq \varphi \leq \sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i, j = \overline{2, n}, n \geq 2, \end{cases} \quad (3.81)$$

где

$$\Phi'_\varphi(x, \varphi, q(0), q'(0)) = q(0) \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2(-1)^m \cos(\pi m x) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} \right) + q'(0) \left(\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \cos(\pi m x)}{\pi^2 m^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \cos(\pi m x)}{\pi^2 m^2} e^{-\pi^2 m^2 \varphi} \right), \quad (3.82)$$

$$\Lambda'_\varphi(x, \varphi, w_{\max}) = w_{\max} \left(\frac{\varphi^2}{2} + 2\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos(\pi m x)}{\pi^2 m^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \cos(\pi m x)}{\pi^4 m^4} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \cos(\pi m x)}{\pi^4 m^4} e^{-\pi^2 m^2 \varphi} \right) \quad (3.83)$$

и экспериментальной зависимости (3.80)

$$\frac{\partial \theta^*(\varphi)}{\partial \varphi} = 1 - e^{-\beta_3 \varphi} + \sum_{m=1}^{\infty} 2(-1)^m \left(e^{-\pi^2 m^2 \varphi} + \frac{-\pi^2 m^2 e^{-\pi^2 m^2 \varphi} + \beta_3 e^{-\beta_3 \varphi}}{\pi^2 m^2 - \beta_3} \right) \cos(\pi m x^*). \quad (3.84)$$

Некоторые результаты решения граничной ОЗТ при $\beta_3 = 3.2, \varphi^* = 1$ представлены на рис. 3.17–3.19 и в табл. 3.8, 3.9.

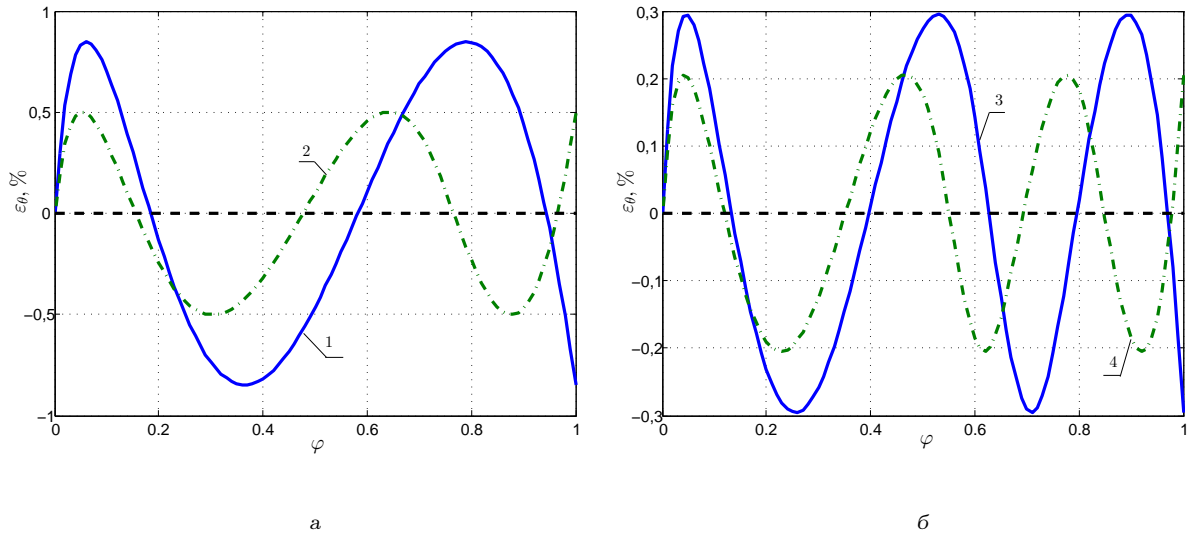


Рис. 3.17. Погрешность $\varepsilon_{\theta}^0 = \frac{\max|\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)|}{\theta_{max}^*} \cdot 100\%$ аппроксимации температурного распределения в граничной ОЗТ при $\varphi^* = 1$, $x^* = 0.9$: 1 – при $N = 1$; 2 – при $N = 2$; (а) и 3 – при $N = 3$; 4 – при $N = 4$; (б)

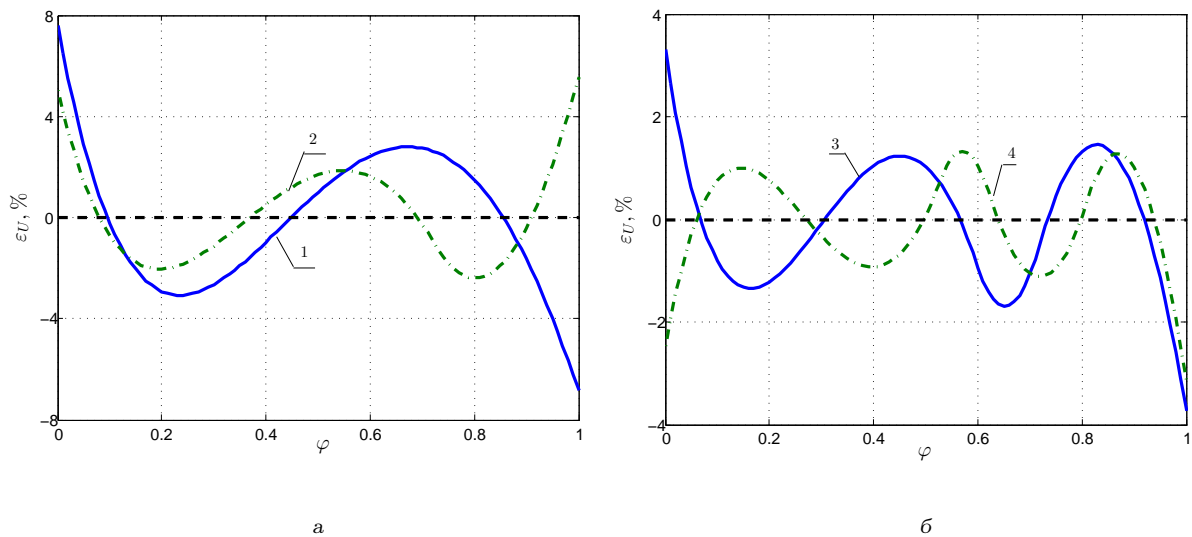


Рис. 3.18. Погрешность $\varepsilon_U(\varphi) = \frac{u(\varphi) - u^*(\varphi)}{u_{max}^*} \cdot 100\%$ аппроксимации искомого воздействия $q^*(\varphi)$ в граничной ОЗТ при $\varphi^* = 1$, $x^* = 0.9$: 1 – при $N = 1$; 2 – при $N = 2$; (а) и 3 – при $N = 3$; 4 – при $N = 4$ (б)

Полученные данные (табл. 3.8) показывают уменьшение погрешностей $\max|\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)|$ и $\max|u(\varphi) - u^*(\varphi)|$ с ростом числа N .

Подобно задаче поиска $v(\varphi)$, значительное влияние на точность решения задачи имеет значение координаты x^* (табл. 3.9). Перемещение x^* в глубину тела ($x^* \rightarrow 0$) сопровождается уменьшением погрешности аппроксимации температуры и увеличением ошибки приближения искомой характеристики. При этом происходит изменение конфигурации температурной невязки $\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) -$

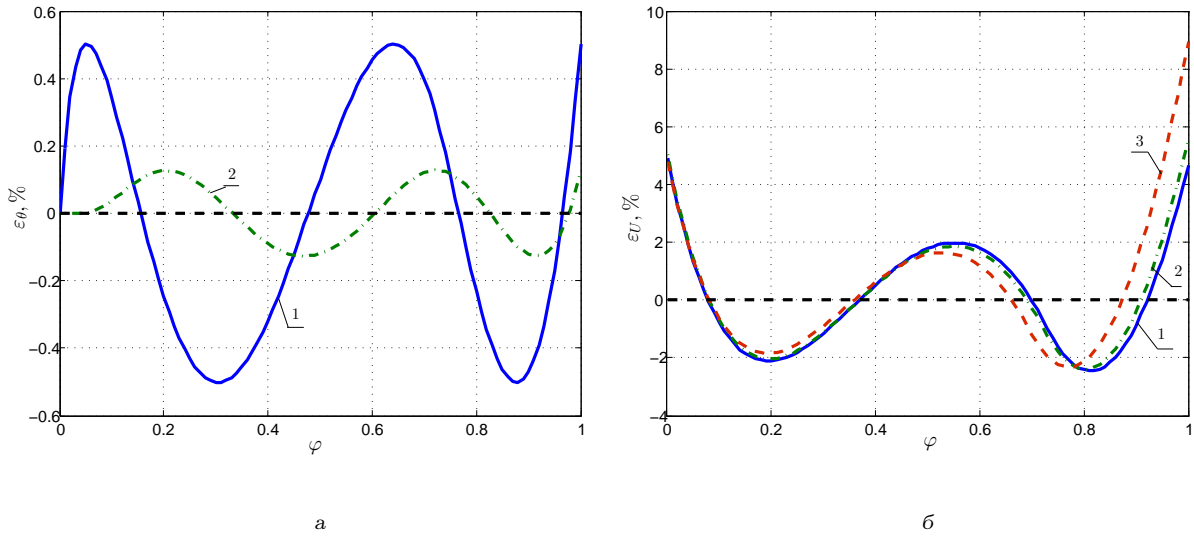


Рис. 3.19. Влияние координаты x^* на конфигурацию $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi)$ (а) 1 – при $x^* = 0.9$; 2 – при $x^* = 0$; и $u(\varphi, \Delta^0) - u^*(\varphi)$ (б) 1 – при $x^* = 1$; 2 – при $x^* = 0.9$; 3 – при $x^* = 0.6$; при $N = 2, \varphi^* = 1$

Таблица 3.8. Погрешность аппроксимации температуры $\varepsilon_\theta^0 = \frac{\max|\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)|}{\theta_{max}^*} \cdot 100\%$ и плотности теплового потока $\varepsilon_u^0 = \frac{\max|u(\varphi) - u^*(\varphi)|}{u_{max}^*} \cdot 100\%$ в граничной ОЗТ при $N = \overline{1, 4}, \varphi^* = 1, x^* = 0.9$;

N	1	2	3	4
$\varepsilon_\theta^0, \%$	0.83	0.50	0.30	0.21
$\varepsilon_u^0, \%$	7.6	5.58	3.72	3.17

Таблица 3.9. Зависимость $\varepsilon_\theta^0 = \frac{\max|\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)|}{\theta_{max}^*} \cdot 100\%$ и $\varepsilon_u^0 = \frac{\max|u(\varphi) - u^*(\varphi)|}{u_{max}^*} \cdot 100\%$ в граничной ОЗТ от координаты x^* при $N = 2, \varphi^* = 1, ;$

x^*	1	0.95	0.9	0.8	0.6	0.3	0
$\varepsilon_\theta^0, \%$	0.61	0.55	0.50	0.41	0.27	0.15	0.13
$\varepsilon_u^0, \%$	4.92	5.10	5.58	6.59	8.93	13.91	18.04

$\theta^*(\varphi)$ во времени, первый экстремум перемещается дальше от нуля (рис. 3.19, а). Максимальная точность восстановления $q(\varphi)$ достигается при $x^* \rightarrow 1$, конфигурация $u(\varphi) - u^*(\varphi)$ зависит от значения x^* , при некотором значении x^* максимум погрешности переходит из точки $x^* = 0$ в точку $x^* = 1$ (рис. 3.19, б).

3.4. Метод минимаксной оптимизации в ретроспективной обратной задаче теплопроводности

3.4.1. Постановка задачи и ее редукция к задаче математического программирования

Рассматривается типовая модельная ретроспективная ОЗТ, содержащая уравнение Фурье в относительных единицах (3.69) и однородные граничные условия второго рода

$$\frac{\partial \theta(1, \varphi)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \theta(0, \varphi)}{\partial x} = 0; \quad \varphi \in [0, \varphi^*]. \quad (3.85)$$

В рассматриваемой постановке решение задачи (3.69), (3.85) в начальный момент времени $\varphi = 0$ неизвестно, функция $\theta(x, 0) = \theta_0(x)$, $x \in [0, 1]$ является искомой величиной.

Вместо этого считается заданной информация о температурном распределении, полученная в некоторой доступной для измерений пространственно-временной области.

В зависимости от способа термометрирования и требований к восстанавливаемой характеристике встречаются несколько типов постановок ретроспективных ОЗТ [13; 23; 158], две наиболее распространенные среди которых [158] рассматриваются в данной работе. В ретроспективной ОЗТ в первой постановке идентификация $\theta_0(x)$ осуществляется на основе экспериментальной информации

$$\theta(x_j^*, \varphi) = \theta_j^*(\varphi), \quad \varphi \in [0, \varphi^*], \quad j = \overline{1, M}, \quad M \geq 1, \quad (3.86)$$

полученной в ограниченном числе точек (чаще всего, в одной фиксированной точке) в пределах пространственной области определения $x \in [0, 1]$. Подобные ОЗТ представляют существенный практический интерес, и их решению в одномерных или двумерных областях посвящены работы [189; 190]. Во второй постановке требуется определить начальное состояние $\theta_0(x)$ на основе информации о пространственно непрерывном распределении температур

$$\theta(x, \varphi^*) = \theta^*(x), \quad x \in [0, 1] \quad (3.87)$$

в некоторый (финальный) момент времени $\varphi = \varphi^*$ [155–157].

В настоящей работе формулируется обратная задача теплопроводности в экстремальной постановке, в которой начальное температурное состояние $\theta_0(x)$ рассматривается в качестве управления $u(x)$, подчиненного ограничению (2.8).

По известной температурной зависимости $\theta^*(x)$ или $\theta^*(\varphi)$ при $M = 1$ в (3.86) требуется восстановить начальное распределение температуры $u(x) = \theta_0(x)$ по пространственной координате x , которое минимизирует отклонение от заданного состояния $\theta^*(x)$ или $\theta^*(\varphi)$ точного решения $\theta(x^*, \varphi)$ или, соответственно, $\theta(x, \varphi^*)$ краевой задачи (3.69), (3.85), отвечающего искомой функции $u(x)$.

Использование равномерной метрики оценивания температурной невязки между заданным состоянием $\theta^*(x)$ или $\theta^*(\varphi)$ и расчетной температурой $\theta(x^*, \varphi)$ или $\theta(x, \varphi^*)$ соответственно приводит к следующим задачам оптимального управления.

Первая постановка ретроспективной ОЗТ.

Для объекта (3.69), (3.85), (3.86) требуется найти подчиненное ограничению (2.8) управляющее воздействие $u(x) = \theta_0(x)$, при котором на заданном временном интервале достигается минимакс

$$I_1^{(\varphi)}(u) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} |\theta(x^*, \varphi) - \theta^*(\varphi)| \rightarrow \min_{u \in V}. \quad (3.88)$$

Вторая постановка ретроспективной ОЗТ.

Для объекта (3.69), (3.85), (3.87) необходимо определить подчиненное ограничению (2.8) управление $u(x) = \theta_0(x)$, обеспечивающее на заданной области изменения пространственной переменной выполнение минимаксного соотношения

$$I_1^{(x)}(u) = \max_{x \in [0, 1]} |\theta(x, \varphi^*) - \theta^*(x)| \rightarrow \min_{u \in V}. \quad (3.89)$$

Переход к условному управляющему воздействию $w(x)$ по второй производной $w(x) = u''(x)$, подчиненному ограничению (2.18), обеспечивает поиск решений на компактном множестве непрерывных и непрерывно-дифференцируемых функций.

Решение прямой задачи теплопроводности при использовании модели объекта (3.69), (3.85), дополненной начальным условием (2.2), осуществлялось на базе общего интегрального соотношения (2.71) при описании функции Грина

$G(x, \xi, \varphi - \tau)$ в виде

$$G(x, \xi, \varphi - \tau) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\pi m x) \cos(\pi m \xi) e^{-\pi^2 m^2 (\varphi - \tau)}, \quad (3.90)$$

где в данном случае при тривиальных граничных условиях в качестве входных воздействий рассматривается только начальное распределение

$$\begin{aligned} \theta(x, \varphi) = \int_0^1 G(x, \xi, \varphi) \cdot \theta_0(\xi) d\xi = \int_0^1 \theta_0(\xi) d\xi + \\ + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\pi m x) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} \int_0^1 \theta_0(\xi) \cos(\pi m \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Теперь для объекта управления (3.69), (3.85), (3.86), (2.20), (3.90), (3.91) формулируется задача оптимального управления, в которой требуется определить такое подчиненное ограничению (2.14) управляющее воздействие $w^0(x)$, которое обеспечивает при вычислении $\theta(x^*, \varphi)$, согласно (3.91), выполнение минимаксного соотношения (3.88).

При оптимизации минимаксного функционала (3.89) соответствующая задача оптимального управления предусматривает для объекта управления (3.69), (3.85), (3.87), (2.20), (3.90), (3.91) поиск подчиненного ограничению (2.14) управляющего воздействия $w^0(x)$, обеспечивающего при вычислении $\theta(x, \varphi^*)$, согласно (3.91), на заданной области изменения пространственной переменной $[0, 1] \ni x$ в финальный момент времени φ^* достижение минимальной величины $I_1^{(x)}(u)$.

Решение сформулированных задач оптимального управления осуществляется при использовании для объекта (3.69), (3.85) его математической модели в пространстве изображений по Лапласу (2.33), (2.34).

Введение вспомогательного параметра κ реализует переход к эквивалентной задаче поиска подчиненного ограничению (2.8) оптимального управления $w^0(x)$ объектом (2.20), (3.90), (3.91) с интегральным функционалом качества (2.39) при учете дополнительного фазового ограничения (2.40).

Для второй постановки ретроспективной ОЗТ задача сводится к поиску подчиненного ограничению (2.8) управляющего воздействия $w^0(x)$, которое при управлении объектом (2.20), (2.33), (2.34) обеспечивает минимизацию функционала (2.39) с учетом фазового ограничения (2.41).

Подобно разделу 3.2.1, применение принципа максимума Понтрягина приводит к заключению, что найденное без учета фазовых ограничений оптимальное управление представляет, согласно (2.67), релейную функцию пространственной координаты и определяется числом N знакопередающихся интервалов постоянства и их протяженностями по пространственной координате $\tilde{\Delta}_j$, $j = \overline{1, N}$.

Параметризованная форма искомого начального состояния $u^0(x) = \theta_0(x)$ (без учета ограничений (2.38) или (2.41)), полученная при интегрировании соотношений (2.20) с учетом (2.67), имеет вид кусочно-параболической зависимости (2.69).

Параметрическое представление температурного поля $\theta(x, \varphi)$ описывается соотношением (2.72), где составляющие $\Phi(x, \varphi, \vartheta(0), \vartheta'(0))$ и $\Lambda(x, \varphi, w_{\max})$, найденные на основе (3.91) при $u(x) = \vartheta(0) + \vartheta'(0)x$ и $u(x) = 0.5 \cdot \beta w_{\max} x^2$, соответственно принимают вид

$$\begin{aligned} \Phi(x, \varphi, \vartheta(0), \vartheta'(0)) = & \vartheta(0) + \frac{\vartheta'(0)}{2} + 2\vartheta(0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi m x) \sin(\pi m)}{\pi m} e^{-\pi^2 m^2 \varphi} + \\ & + 2\vartheta'(0) \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\pi m x) \left(\frac{\cos(\pi m) - 1}{\pi^2 m^2} + \frac{\sin(\pi m)}{\pi m} \right) e^{-\pi^2 m^2 \varphi}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} \Lambda(x, \varphi, w_{\max}) = & \frac{w_{\max}}{6} + w_{\max} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\pi m x) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} \left(\frac{2 \cos(\pi m)}{\pi^2 m^2} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{\pi m} - \frac{2}{\pi^3 m^3} \right) \sin(\pi m) \right). \end{aligned} \quad (3.93)$$

При $N \geq 2$ слагаемое $\bar{\Lambda}(x, \varphi, w_{\max}, \tilde{\Delta})$, соответствующее реакции объекта на управляющее воздействие (2.74), имеет вид

$$\bar{\Lambda}(x, \varphi, w_{\max}, \tilde{\Delta}) = w_{\max} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \int_{\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i}^{\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i} G(x, \xi, \varphi) \cdot \left(\xi - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 d\xi =$$

$$\begin{aligned}
&= w_{\max} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \left(\int_{\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i}^{\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i} \left(\xi - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 d\xi + \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\pi m x) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} \int_{\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i}^{\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i} \cos(\pi m \xi) \cdot \left(\xi - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 d\xi \right) = \\
&= w_{\max} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} \left(E_{jk}^{(N)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\pi m x) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} S_{jk}^{(N)} \right), \quad (3.94)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
E_{jk}^{(N)} &= \frac{1}{3} \left[\left(\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \right)^3 - \left(\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \right)^3 \right] - \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \left[\left(\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 \right] + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\Delta}_i \right)^2 \left[\sum_{i=1}^j \tilde{\Delta}_i - \sum_{i=1}^{j-1} \tilde{\Delta}_i \right], \quad (3.95)
\end{aligned}$$

а слагаемые $S_{jk}^{(N)}$ вычисляются на основе (3.58) при учете равенств $\mu_m = \pi m$, $m = 1, 2, \dots$ для граничных условий второго рода.

Полученное параметрическое описание (2.72), (3.92), (3.93), (3.94), (3.95) температурного поля позволяет перейти от исходной постановки ОЗТ к специальной задаче математического программирования относительно искомого вектора параметров $\Delta = (\tilde{\Delta}, w_{\max}, \vartheta(0), \vartheta'(0))$, которая при решении задачи в первой постановке формулируется в виде (2.75), а во втором случае описывается функционалом (2.76).

3.4.2. Алгоритмы решения задачи математического программирования и численные результаты

Альтернансные свойства оптимальных решений, сформулированные относительно ошибки приближения температурного поля $\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(i)}) - \theta^*(\varphi)$ в задаче (2.75) или $\theta(x, \varphi^*, \Delta^{(4)}) - \theta^*(x)$ в задаче (2.76), позволяют составить замкнутую систему $N + 3$ соотношений для предельных разностей температур в точках альтернанса относительно вектора Δ и значения I_0 .

Для ЗПО (2.75) система расчетных уравнений принимает вид (2.84) и дополняется условиями (2.85) существования экстремума $(\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi))'_\varphi$, а для задачи (2.76) записывается как (2.86) с учетом условий (2.87) существования экстремума $(\theta(x, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x))'_x$.

Решение ретроспективной ОЗТ также имеет свои особенности. Это связано с тем, что в задаче определения неизвестного начального состояния изменяется конфигурация ошибки результирующей температурной невязки $\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)$ или $\theta(x, \varphi^*, \Delta^{(N)}) - \theta^*(x)$, что обуславливает формирование другой системы расчетных соотношений. Здесь сама функция начального распределения температуры является неизвестной, поэтому при решении ОЗТ на основе экспериментальных данных $\theta(x^*, \varphi) = \theta^*(\varphi)$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (задача (2.75)) в момент времени $\varphi = 0$ экспериментальная температура, а следовательно, и значение температурной невязки, в общем случае отличны от нуля, что приводит к условиям (2.85) существования экстремума $(\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi))'_\varphi$ в виде варианта $s = \overline{2, N + 2}$.

Тем самым, итоговая система расчетных соотношений записывается в виде (3.20) или (3.21) соответственно для нечетного или четного числа N , которая может быть упрощена до вида (3.23) и дополняется условиями (2.85) при $s = \overline{2, N + 2}$.

При решении задачи (2.76) на основе данных $\theta(x, \varphi^*) = \theta^*(x)$, $x \in [0, 1]$ система вида (2.86) принимает вид

$$\begin{aligned} \theta(x_j^0, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x_j^0) &= \beta I_0^{(N)}, & j = 1, 3, \dots, N + 2; \\ \theta(x_j^0, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x_j^0) &= \beta(-1)I_0^{(N)}, & j = 2, 4, \dots, N + 3, \end{aligned} \quad (3.96)$$

при нечетном значении N или

$$\begin{aligned} \theta(x_j^0, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x_j^0) &= \beta I_0^{(N)}, & j = 1, 3, \dots, N + 3; \\ \theta(x_j^0, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x_j^0) &= \beta(-1)I_0^{(N)}, & j = 2, 4, \dots, N + 2 \end{aligned} \quad (3.97)$$

при четном N .

Исключая неизвестную $I_0(\Delta^0)$ с неопределенным знаком множителя β , систему (3.96) или (3.97) можно привести к виду

$$(\theta(x_j^0, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x_j^0)) + (\theta(x_j^0, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x_{j+1}^0)) = 0, \quad q = \overline{1, N + 2}. \quad (3.98)$$

В задаче (2.76) значение температурной невязки $\theta(x, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x)$ при $x = 0$ также в общем случае отлично от нуля, в связи с чем условия (2.87)

существования экстремума $(\theta(x, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^*(x))'_x$ конкретизируются выбором того же варианта $s = \overline{2, N + 2}$.

Ниже представлены результаты решения модельной задачи в обеих постановках при заданном начальном распределении

$$\theta_0^*(x) = k_1(1 - e^{-\beta_4 x}) + k_2 \sin(\beta_5 \pi x), \quad x \in [0, 1]. \quad (3.99)$$

Для решения задачи в первой постановке экспериментальная температурная зависимость $\theta^*(\varphi)$ получена на основе решения

$$\begin{aligned} \theta(x, \varphi) = & k_1 \left(1 + \frac{1}{\beta_4} (e^{-\beta_4} - 1) \right) + \frac{2k_2}{\pi} (1 - \cos(\beta_5 \pi)) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\pi m x) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} \times \\ & \times k_1 \left(\frac{1}{\pi m} \sin(\pi m) - \frac{1}{\beta_4^2 + \pi^2 m^2} (e^{-\beta_4} (-\beta_4 \cos(\pi m) + \pi m \sin(\pi m)) + \beta_4) \right) + \\ & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\pi m x) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} k_2 \left(\frac{1 - \cos(\beta_5 \pi + \pi m)}{2(\beta_5 \pi + \pi m)} + \frac{1 - \cos(\beta_5 \pi - \pi m)}{2(\beta_5 \pi - \pi m)} \right) \end{aligned} \quad (3.100)$$

прямой задачи теплопроводности (3.69), (3.85) с учетом (3.99) на интервале идентификации $[0, \varphi^*] \ni \varphi$ в точке x^* .

Для решения ретроспективной ОЗТ во второй постановке при идентификации того же самого начального состояния (3.99), экспериментальная зависимость $\theta^*(x)$ получена на основе (3.100) во всей области изменения пространственной координаты $x \in [0, 1]$ в фиксированный момент времени φ^* .

Выражение для $(\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi))'_\varphi$ при решении задачи (2.75) формируется на основе (3.64), где необходимые составляющие принимают вид

$$\begin{aligned} \Phi'_\varphi(x, \varphi, \vartheta(0), \vartheta'(0)) = & -2\vartheta(0) \sum_{m=1}^{\infty} \pi m \cos(\pi m x) \sin(\pi m) \cdot e^{-\pi^2 m^2 \varphi} - \\ & - 2\vartheta'(0) \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\pi m x) (\cos(\pi m) - 1 + \pi m \sin(\pi m)) e^{-\pi^2 m^2 \varphi}, \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} \Lambda'_\varphi(x, \varphi, w_{\max}) = & -w_{\max} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\pi m x) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} (2 \cos(\pi m) + \\ & + \left(\pi m - \frac{2}{\pi m} \right) \sin(\pi m)), \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\bar{\Lambda}'_{\varphi}(x, \varphi, w_{\max}, \tilde{\Delta}) = -w_{\max} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} 2 \sum_{m=1}^{\infty} \pi^2 m^2 \cos(\pi m x) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} S_{jk}^{(N)}, \quad (3.103)$$

и выражения для производной экспериментальной зависимости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta^*(\varphi)}{\partial \varphi} &= -2 \sum_{m=1}^{\infty} \pi^2 m^2 \cos(\pi m x) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} \times \\ &\times k_1 \left(\frac{1}{\pi m} \sin(\pi m) - \frac{1}{\beta_4^2 + \pi^2 m^2} (e^{-\beta_4} (-\beta_4 \cos(\pi m) + \pi m \sin(\pi m)) + \beta_4) \right) - \\ &- 2 \sum_{m=1}^{\infty} \pi^2 m^2 \cos(\pi m x) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} k_2 \left(\frac{1 - \cos(\beta_5 \pi + \pi m)}{2(\beta_5 \pi + \pi m)} + \frac{1 - \cos(\beta_5 \pi - \pi m)}{2(\beta_5 \pi - \pi m)} \right). \end{aligned} \quad (3.104)$$

Выражение для $(\theta(x, \varphi^*, \Delta^{(N)}) - \theta^*(x))'_x$ при решении задачи (2.76) определяется дифференцированием параметрического описания (2.72)–(3.95) температурного поля

$$\theta'_x(x, \varphi, \Delta) = \begin{cases} \Phi'_x(x, \varphi, \Psi(0), \Psi'(0)) + \Lambda'_x(x, \varphi, w_{\max}), & n = 1; \\ \Phi'_x(x, \varphi, \Psi(0), \Psi'(0)) + \Lambda'_x(x, \varphi, w_{\max}) + \bar{\Lambda}'_x(x, \varphi, w_{\max}, \tilde{\Delta}), & n \geq 2, \end{cases} \quad (3.105)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi'_x(x, \varphi, \vartheta(0), \vartheta'(0)) &= -2\vartheta(0) \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m x) \sin(\pi m) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} - \\ &- 2\vartheta'(0) \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m x) \left(\frac{\cos(\pi m) - 1}{\pi m} + \sin(\pi m) \right) e^{-\pi^2 m^2 \varphi}, \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \Lambda'_x(x, \varphi, w_{\max}) &= -w_{\max} \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m x) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} \left(\frac{2 \cos(\pi m)}{\pi m} + \right. \\ &\left. + \left(1 - \frac{2}{\pi^2 m^2} \right) \sin(\pi m) \right), \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\bar{\Lambda}'_x(x, \varphi, w_{\max}, \tilde{\Delta}) = -w_{\max} \sum_{j=2}^n \sum_{k=2}^j (-1)^{k+1} 2 \sum_{m=1}^{\infty} \pi m \sin(\pi m x) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} S_{jk}^{(N)}, \quad (3.108)$$

и экспериментальной зависимости

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta^*(x)}{\partial x} = & -2 \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m x) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} \times \\ & \times k_1 \left(\sin(\pi m) - \frac{\pi m}{\beta_4^2 + \pi^2 m^2} (e^{-\beta_4} (-\beta_4 \cos(\pi m) + \pi m \sin(\pi m)) + \beta_4) \right) - \\ & - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \pi m \sin(\pi m x) e^{-\pi^2 m^2 \varphi} k_2 \left(\frac{1 - \cos(\beta_5 \pi + \pi m)}{2(\beta_5 \pi + \pi m)} + \frac{1 - \cos(\beta_5 \pi - \pi m)}{2(\beta_5 \pi - \pi m)} \right). \end{aligned} \quad (3.109)$$

Численные решения задачи получены при значениях исходных данных $k_1 = 0.5, k_2 = 0.5, \beta_4 = 4, \beta_5 = 0.5$. Результаты решения ретроспективной ОЗТ в первой постановке представлены в табл. 3.10 и на рис. 3.20–3.23, а результаты восстановления начального состояния в задаче, сформулированной во второй постановке, в табл. 3.11, и на рис. 3.24–3.26.

Представленные результаты подтверждают возможность использования метода минимаксной оптимизации для решения ретроспективных ОЗТ в обеих рассматриваемых постановках. Увеличение числа N приводит к быстрому уменьшению температурной невязки, что влечет снижение погрешности идентификации искомого начального распределения.

Полученные свойства решения задачи (3.88) на основе экспериментальных

Таблица 3.10. Погрешность аппроксимации температуры $\varepsilon_{\theta}^0 = \frac{\max |\theta(x^*, \varphi, \Delta^{(N)}) - \theta^*(\varphi)|}{\theta_{max}^*} \cdot 100\%$ и приближения начального состояния $\varepsilon_u^0 = \frac{\max |\theta_0(x) - \theta_0^*(x)|}{\theta_{0max}^*} \cdot 100\%$ в ретроспективной ОЗТ в первой постановке при $N = \overline{1, 3}, \varphi^* = 1, x^* = 0.9$;

N	1	2	3
$\varepsilon_{\theta}^0, \%$	0.0547	0.0035	1.8988e-04
$\varepsilon_u^0, \%$	7.2872	4.3320	2.2115

Таблица 3.11. Погрешность аппроксимации температуры $\varepsilon_{\theta}^0 = \frac{\max |\theta(x, \varphi^*, \Delta^{(N)}) - \theta^*(x)|}{\theta_{max}^*} \cdot 100\%$ и приближения начального состояния $\varepsilon_u^0 = \frac{\max |\theta_0(x) - \theta_0^*(x)|}{\theta_{0max}^*} \cdot 100\%$ в ретроспективной ОЗТ во второй постановке при $N = \overline{1, 3}, \varphi^* = 0.1$;

N	1	2	3
$\varepsilon_{\theta}^0, \%$	2.6669e-04	2.3783e-07	2.2426e-11
$\varepsilon_u^0, \%$	5.3801	4.9836	2.2256

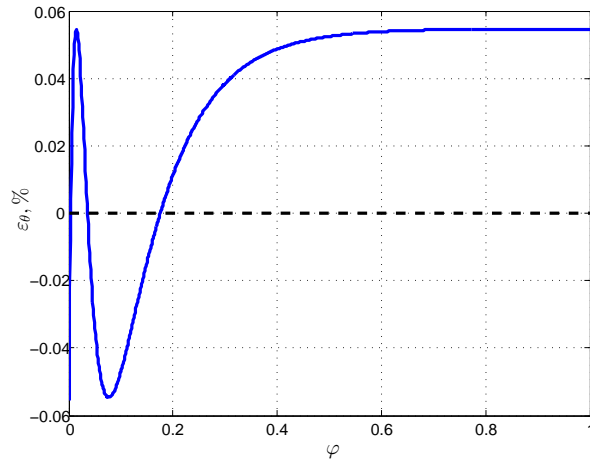


Рис. 3.20. Погрешность $\frac{\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi)}{\theta_{max}^*} 100\%$ приближения температуры при $N = 1$

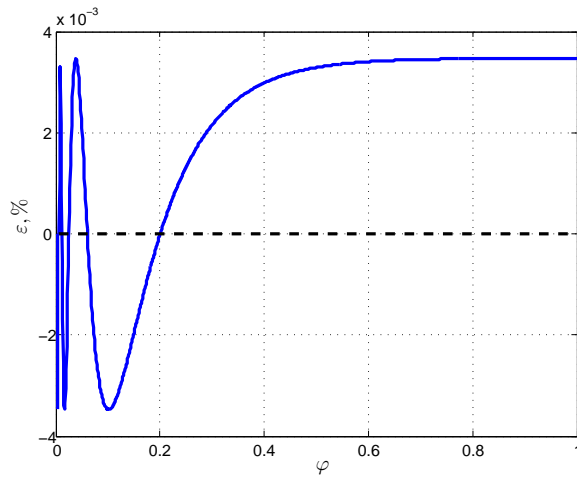


Рис. 3.21. Погрешность $\frac{\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi)}{\theta_{max}^*} 100\%$ приближения температуры при $N = 2$

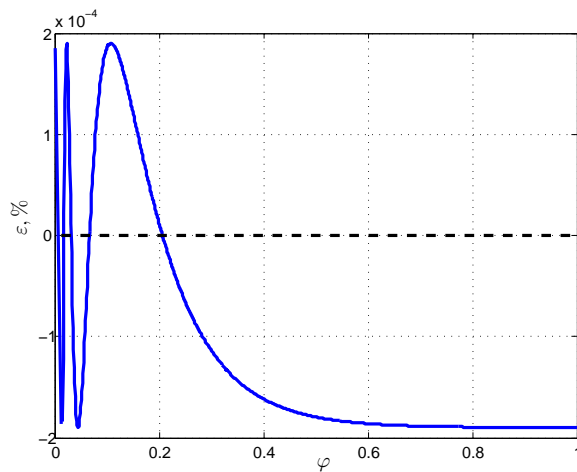
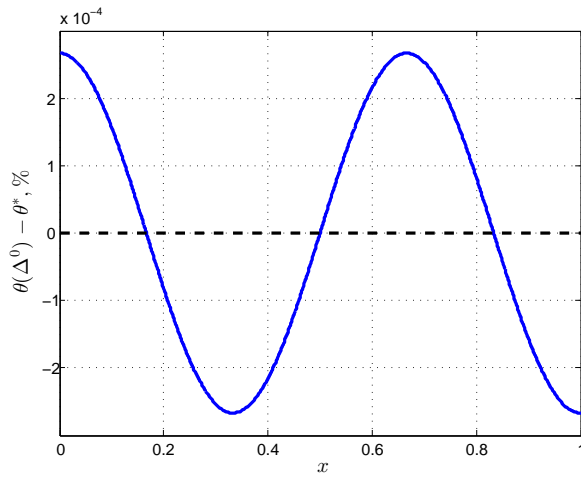
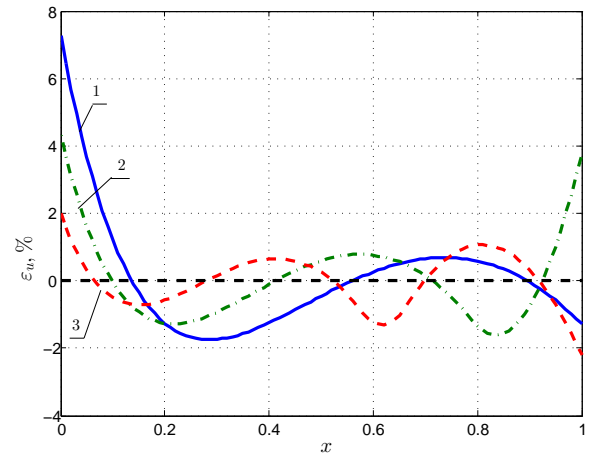
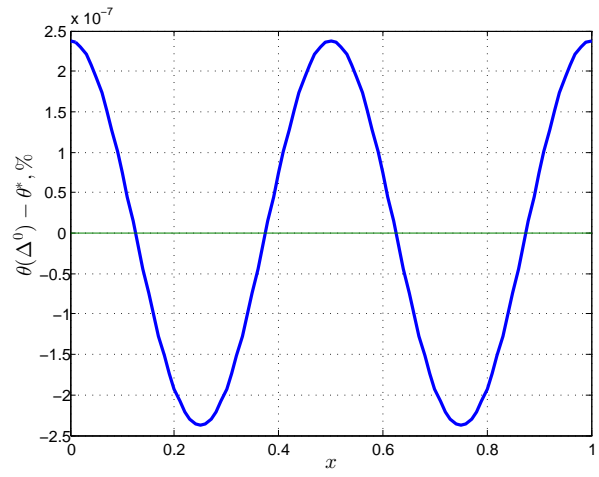


Рис. 3.22. Погрешность $\frac{\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(\varphi)}{\theta_{max}^*} 100\%$ приближения температуры при $N = 3$

Рис. 3.23. Погрешность $\varepsilon_u = \frac{\max |u(x, \Delta^{(N)}) - u^*(x)|}{u_{max}^*} \cdot 100\%$ аппроксимации начального температурного распределения в ретроспективной ОЗТ в первой постановке при $\varphi^* = 1$, $x^* = 0.9$: 1 – при $N = 1$; 2 – при $N = 2$; 3 – при $N = 3$;



а



б

Рис. 3.24. Погрешность $\frac{\theta(x, \varphi^*, \Delta^N) - \theta^*(x)}{\theta_{max}^*} 100\%$ приближения температуры при $N = 1$ (а) и $N = 2$; (б)

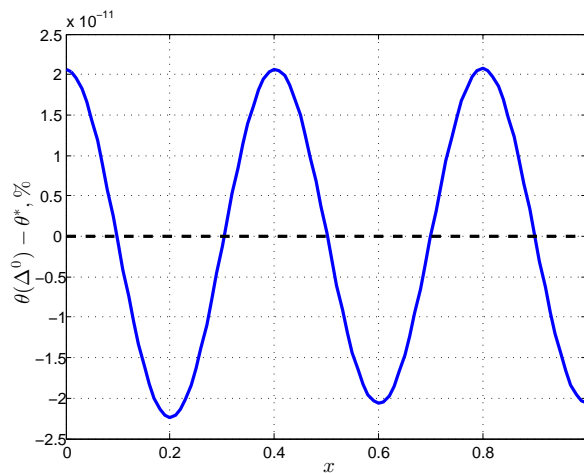
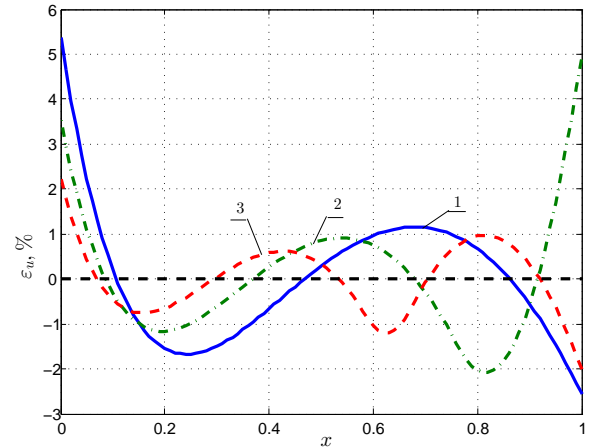


Рис. 3.25. Погрешность $\frac{\theta(x, \varphi^*, \Delta^N) - \theta^*(x)}{\theta_{max}^*} 100\%$ приближения температуры при $N = 3$

Рис. 3.26. Погрешность $\varepsilon_u = \frac{\max |u(x, \Delta^{(N)}) - u^*(x)|}{u_{max}^*} \cdot 100\%$ аппроксимации начального температурного распределения в ретроспективной ОЗТ во второй постановке при $\varphi^* = 0.1$: 1 – при $N = 1$; 2 – при $N = 2$; 3 – при $N = 3$;



данных $\theta^*(\varphi)$ показывают сконцентрированное расположение точек альтернанса около внутренней границы пространственной области, занимаемой объектом, и, тем самым, аналогичны свойствам решения соответствующей задачи поиска пространственно распределенного внутреннего управления (мощности внутренних теплоисточников).

В задаче (3.89) с использованием $\theta^*(x)$ точки альтернанса располагаются примерно пропорционально по всей занимаемой пространственной области, что аналогично задачам определения сосредоточенного внутреннего или граничного управления по температурной зависимости, полученной в фиксированной пространственной точке на временном интервале идентификации.

С ростом N такие тенденции для обеих задач (3.88) и (3.89) сохраняются.

3.5. Метод минимаксной оптимизации в коэффициентных обратных задачах теплопроводности

В данном разделе разработанный метод минимаксной оптимизации распространен на решение коэффициентных обратных задач теплопроводности, позволяющих определять коэффициенты уравнения математической модели объекта на примере восстановления неизвестных параметров и характеристик, входящих в уравнение теплопроводности.

Для большинства материалов, используемых в теплотехнике, зависимость теплофизических характеристик ℓ от температуры имеет достаточно простой вид и с высокой степенью точности может быть представлена в полиномиальной

форме [191]

$$\ell(T) = \sum_{n=0}^N l_n T^n. \quad (3.110)$$

Сначала рассмотрим решения ОЗТ по восстановлению зависящего от температуры коэффициента температуропроводности в классе постоянных функций и в классе функций специальной структуры, которые могут рассматриваться как первые приближения к поиску искомой характеристики вида (3.110).

3.5.1. Метод минимаксной оптимизации в линейной коэффициентной ОЗТ

Рассмотрим стандартную постановку линейной внутренней ОЗТ по определению средних значений теплофизических характеристик материала на базе одномерного уравнения нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}; \quad 0 < x < \infty; \quad 0 < t \leq t^*, \quad (3.111)$$

описывающего распределение температуры $T(x, t)$ в полуограниченной области изменения пространственной переменной x и во времени t . Уравнение (3.111) должно удовлетворять соответствующим краевым условиям, имеющим вид

$$T(x, 0) = 0, \quad T(0, t) = T_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (3.112)$$

Начальное распределение $T(x, 0)$, температура поверхности нагреваемого тела T_0 полагаются известными, а определению подлежит значение коэффициента температуропроводности a . Считается, что в некоторой фиксированной точке $x^* \in (0, \infty)$ ведется измерение температуры и получена температурная зависимость $T^*(t)$, на основе которой требуется определить значение a , аппроксимирующее его общую зависимость от температуры $a(T)$ на всем интервале нагрева некоторой средней величиной. Таким образом, поиск решений осуществляется в классе постоянных функций $a^0 = \text{const} > 0, t > 0$.

Формулируется модельная коэффициентная линейная ОЗТ в экстремальной постановке [61], в которой требуется по заданной температурной зависимости $T^*(t)$ отыскать значение a^0 , минимизирующее невязку между $T^*(t)$ и точным решением $T(x^*, t, a^0)$ краевой задачи (3.111), (3.112), соответствующим искомому a^0 .

Для оценивания невязки используется ошибка равномерного приближения $T(x^*, t) - T^*(t)$ результирующего температурного поля к требуемому на заданном временном интервале $t \in [0, t^*]$, и формулируется задача оптимального управления.

Для объекта (3.111), (3.112) необходимо найти значение $a^0 = \text{const} > 0$, обеспечивающее на заданном интервале $t \in [0, t^*]$ выполнение минимаксного соотношения

$$I(a^0) = \min_a \max_{t \in [0, t^*]} |T(x^*, t, a^0) - T^*(t)|. \quad (3.113)$$

Для получения конечномерной постановки задачи искомая величина $a^0 = \text{const}$ принимается за управляющее воздействие, подчиненное типовому ограничению

$$a = a^0 = \text{const} \leq a_{\max}, \quad t \in [0, t^*], \quad (3.114)$$

и неизвестное значение a^0 рассматривается как единственный параметр искомого управления.

В этом случае температурное поле объекта определяется известным решением краевой задачи (3.111), (3.112) при $T_0 = \text{const}$ [152]:

$$T(x, t, a) = T_0 \left(1 - \text{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right). \quad (3.115)$$

Таким образом, требуется найти подчиненное ограничению (3.114) управляющее воздействие a^0 , при котором на заданном интервале $[0, t^*]$ достигается минимакс (3.113), где $T(x^*, t, a)$ определяется согласно (3.115) при $x = x^*$.

Исходная задача сводится к специальной негладкой задаче математического программирования (3.113) относительно искомого параметра a^0 . Решение задачи (3.113) по-прежнему основывается на использовании специальных альтернативных свойств разности $T(x^*, t, a^0) - T^*(t)$, в соответствии с чем на интервале $[0, t^*]$ достигаются знакопеременяющиеся максимальные по абсолютной величине значения $T(x^*, t, a^0) - T^*(t)$ в точках $t_j \in [0, t^*]$, $j = \overline{1, R}$, число $R = 2$ которых на единицу превышает число искомых параметров, равное в данном случае единице. На основании этих свойств составляется замкнутая относительно всех неизвестных, включая величину a^0 , значение $I_0(a^0)$ и моменты времени t_1, t_2 , система двух соотношений для предельных разностей температур при $t = t_1$ и $t = t_2$, дополненная условиями существования экстремума температурной

невязки в точках, не совпадающих с границами интервала,

$$\begin{aligned} T(x^*, t_j, a^0) - T^*(t_j) &= \beta(-1)^j I_0(a^0); \quad j = 1, 2, \quad \beta = \pm 1; \\ \frac{\partial}{\partial t} (T(x^*, t_s, a^0) - T^*(t_s)) &= 0, \quad s = \{1; 2; \{1, 2\}\}. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Решение системы уравнений (3.116) дает среднее значение $a^0 = \text{const}$, аппроксимирующее действительную зависимость $a(T)$ реализуемого на интервале $[0, t^*]$ процесса нестационарной теплопроводности, соответствующего измеряемой температуре $T^*(t)$.

При практическом решении задачи моделирование экспериментальной температурной зависимости $T^*(t)$ производилось на основе нелинейного уравнения теплопроводности, которое при постоянных значениях удельной теплоемкости c и плотности материала ρ ($c\rho = \text{const}$) имеет вид [152; 192]

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(T) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \in (0, t^*), \quad (3.117)$$

где

$$a(T) = \frac{\lambda(T)}{c\rho}. \quad (3.118)$$

Аналитическое решение уравнения (3.117) с краевыми условиями (3.112) при зависимости коэффициентов переноса от температуры вида

$$a(T) = \frac{\varpi_1}{(1 - \varpi_2 T)^2}, \quad \varpi_1, \varpi_2 = \text{const}, \quad (3.119)$$

полученное в [192], приведено в [152] и состоит в следующем. На основе соотношения

$$W(\varsigma, \chi_2) = \sqrt{\pi} \chi_2 (1 - \text{erf}(\chi_2 \varsigma)) e^{\chi_2^2} \quad (3.120)$$

из уравнения

$$W(1, \chi_2) = \chi_1 \quad (3.121)$$

при $\chi_1 = \varpi_2 T_0$, ($0 < \chi_1 < 1$) определяется константа χ_2 , которая далее используется для численного решения нелинейного уравнения

$$\wp = \frac{\chi_2}{1 - \chi_1} \left((1 - \chi_1 + W(\varsigma, \chi_2)) \varsigma - e^{\chi_2^2(1 - \varsigma^2)} \right) \quad (3.122)$$

относительно параметра ς , значения которого находятся в интервале $1 \leq \varsigma \leq \infty$, где $\wp = x/\sqrt{4\varpi_1 t}$. Относительное значение температуры $\theta T/T_0$ определяется следующим образом:

$$\theta = \frac{W(\varsigma, \chi_2)}{\chi_1(1 - \chi_1 + W(\varsigma, \chi_2))}. \quad (3.123)$$

С использованием (3.119), (3.123) прямая задача теплопроводности, моделирующая экспериментальные данные $T^*(t)$, была решена при значениях параметров $\varpi_1 = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\varpi_2 = 0.8 \cdot 10^{-3}$, $T_0 = 100^\circ\text{C}$ на интервале идентификации $t \in [0, 2000]$ с. Результаты решения ОЗТ по определению среднего значения $a^0 = \text{const}$, аппроксимирующего $a(T)$ на температурном диапазоне $T \in [0, 100]^\circ\text{C}$, при $x^* = 0.01$ представлены на рис. 3.27, 3.28.

Точность решения ОЗТ существенно зависит от характера нелинейной зависимости $a(T)$, от выбранного диапазона изменения температур, от значения T_0 и от координаты x^* , и при соответствующем выборе значимых параметров может считаться удовлетворительной.

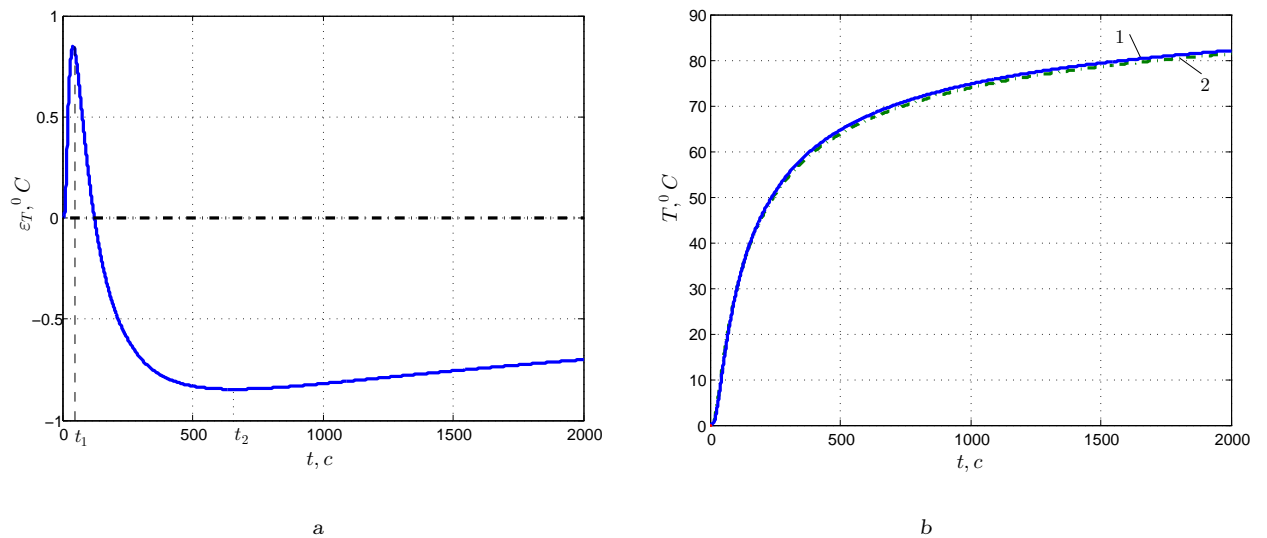


Рис. 3.27. Ошибка приближения температурного поля $\varepsilon_T = (T(x^*, t, a) - T^*(t))$ (а) и температурные зависимости: $T(x^*, t, a) - 1$ и $T^*(t) - 1$ (б) на интервале идентификации

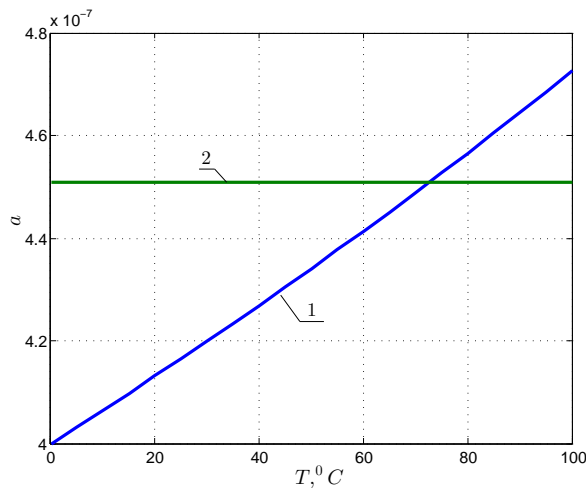


Рис. 3.28. Результат восстановления коэффициента a : истинное значение $a(T) - 1$ и его аппроксимация $a^0 - 2$

3.5.2. Метод минимаксной оптимизации в нелинейной коэффициентной ОЗТ на основе аналитической модели температурного поля

Далее задача восстановления $a(T)$ [60] была решена в классе функций

$$a(T) = \frac{\omega_1}{1 - \omega_2 T}, \quad \omega_1, \omega_2 = \text{const}, \quad (3.124)$$

для которых также в [192] получено аналитическое решение, приведенное в [152].

Формулируется экстремальная постановка нелинейной коэффициентной ОЗТ, в которой по заданному температурному распределению $T^*(t)$ требуется определить зависимость $a(T)$, минимизирующую невязку между $T^*(t)$ и точным аналитическим решением $T(x^*, t)$ краевой задачи (3.117), (3.112), (3.124), соответствующим искомой функции $a(T)$. Оценивание этой невязки производится на основе ошибки равномерного приближения результирующего температурного поля к требуемому на заданном временном интервале $t \in (0, t^*)$.

В соответствии с (3.124), искомая зависимость $a(T)$ заведомо определена в заданном классе функций переменной T с точностью до выбора некоторого вектора постоянных параметров $\omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

В этом случае вектор параметров ω принимается за искомое управляющее воздействие, и решение ОЗТ сводится к задаче оптимального управления, которая формулируется следующим образом. Для объекта (3.117), (3.112), (3.124) необходимо найти вектор параметров $\omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ зависимости $a(T)$ в виде (3.124), обеспечивающий на заданном интервале $(0, t^*)$ выполнение минимаксного соотношения

$$I(\omega) = \max_{t \in [0, t^*]} |T(x^*, t, \omega) - T^*(t)| \rightarrow \min_{\omega}. \quad (3.125)$$

Использование для решения СЗМП (3.125) альтернансного метода приводит к системе $R = N + 1 = 3$ соотношений для предельных разностей температур в точках альтернанса, которая дополняется условиями существования экстремума функции во внутренних точках интервала идентификации

$$\begin{aligned} T(x^*, t_j, \omega^0) - T^*(t_j) &= \beta(-1)^j I_0(\omega^0); \quad j = 1, 2, 3, \quad \beta = \pm 1; \\ \frac{\partial}{\partial t} (T(x^*, t_{j_s}, \omega^0) - T^*(t_{j_s})) &= 0, \quad s = \{2; \{1, 2\}; \{2, 3\}; \{1, 2, 3\}\} \end{aligned} \quad (3.126)$$

и оказывается в итоге замкнутой относительно всех неизвестных, включая искомый вектор параметров $\omega^0 = \{\omega_1^0, \omega_2^0\}$ и величину предельно допустимого отклонения $I_3(\omega^0)$.

Для нахождения значения $T(x^*, t, \omega^0)$ использовалось аналитическое решение задачи (3.117), (3.112), (3.124), полученное согласно следующей последовательности действий.

Значение $\chi_1 = \omega_2 T_0$ позволяет получить параметр χ_2 на основе соотношения

$$\chi_2 = -\ln(1 - \chi_1). \quad (3.127)$$

Здесь полагается, что $\omega_2 > 0$, $0 < \chi_1 < 1$.

Численным решением нелинейного уравнения

$$\chi_2 = 2 \int_0^1 (\zeta^2 - v \ln \zeta^2)^{-1/2} d\zeta, \quad (3.128)$$

определяется значение v .

Учитывая, что $\wp = x\sqrt{4\omega_1 t}$, находим решение уравнения

$$\wp = \frac{1}{\sqrt{2v}} \left((\zeta^2 - v \ln \zeta^2)^{1/2} - \zeta \right) \cdot e^{\int_0^{\zeta} (\zeta_1^2 - v \ln \zeta_1^2)^{-1/2} d\zeta_1} \quad (3.129)$$

относительно ζ , откуда можно определить относительное значение температуры

$$\theta = \frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 - e^{-\chi_2}} \left(1 - e^{-2 \int_0^{\zeta} (\zeta_1^2 - v \ln \zeta_1^2)^{-1/2} d\zeta_1} \right). \quad (3.130)$$

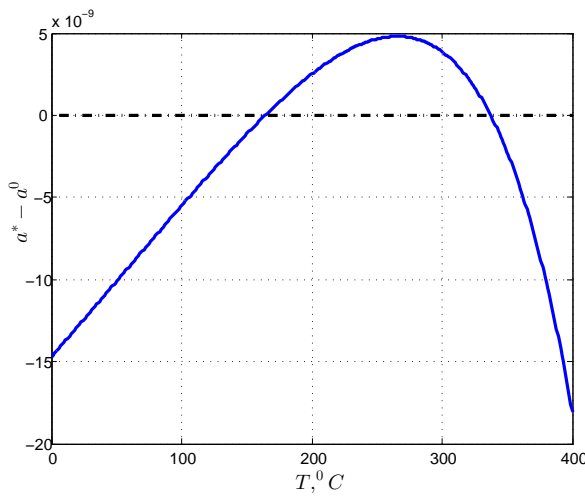
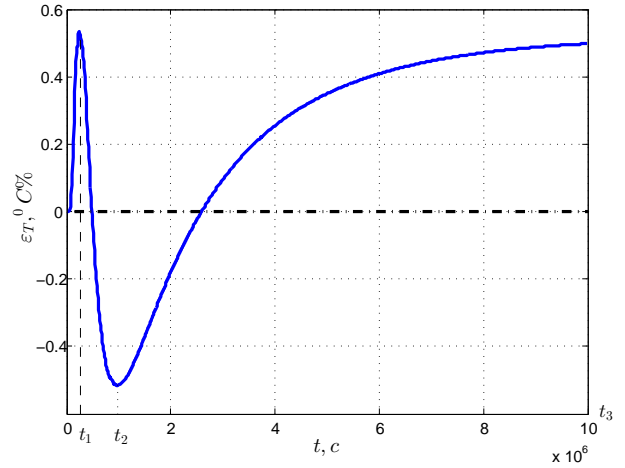
Экспериментальная температурная зависимость $T^*(t)$ получена на основе (3.119)–(3.123) при значениях $\varpi_1 = 0.4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\varpi_2 = 0.8 \cdot 10^{-3}$, $T_0 = 400 \text{ }^\circ\text{C}$ на интервале идентификации $t \in [0, 10^7] \text{ с}$.

Результаты численного решения ОЗТ при $x^* = 0.8$ при изменении температур в диапазоне $T \in [0, 400] \text{ }^\circ\text{C}$, представлены на рис. 3.29, 3.30.

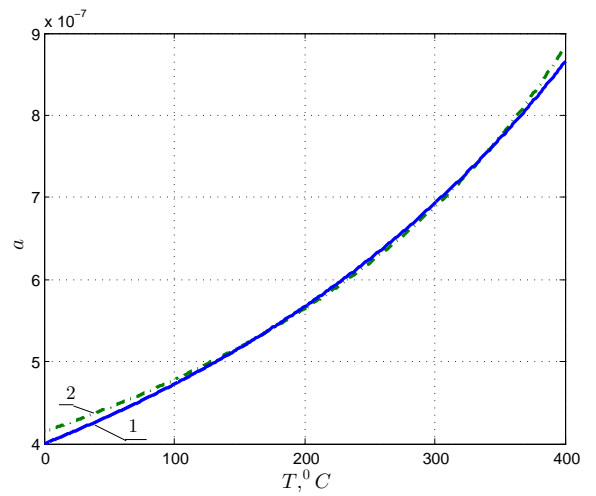
В рассматриваемом случае, когда класс искомых воздействий, определяемый зависимостью (3.124), является адекватным приближением к искомой характеристике вида (3.119), решение ОЗТ дает достаточно высокую точность аппроксимации $a^*(T)$.

Точность решения задачи зависит от длины интервала идентификации t^* , характера $a^*(T)$, значения T_0 и координаты x^* .

Рис. 3.29. Ошибка приближения температурного поля $\varepsilon_T = (T(x^*, t, \omega^0) - T^*(t))$



a



b

Рис. 3.30. Ошибка аппроксимации $a^*(T) - a^0(T)$ (а) и результат восстановления коэффициента a : истинное значение $a^*(T) - 1$ и его приближение $a^0 - 2$ (б)

3.5.3. Метод минимаксной оптимизации в коэффициентной обратной задаче теплопроводности на основе численной модели температурного поля

Рассматривается обратная задача теплопроводности по идентификации зависящего от температуры T коэффициента теплопроводности $\lambda(T)$ при известных прочих теплофизических, геометрических характеристиках объекта и краевых условиях на основе экспериментальных данных о температурном состоянии $T(t)$ в некоторой фиксированной точке $x \in [0, L]$. Базовая математическая модель температурного поля $T(x, t)$ пластины толщиной $2L$, зависящего от времени t и пространственной координаты x , описывается одномерным нелинейным

однородным уравнением теплопроводности следующего вида

$$c(T)\rho(T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right); \quad 0 < x < L; \quad 0 < t \leq t^* \quad (3.131)$$

при заданных начальных условиях

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad x \in [0, L] \quad (3.132)$$

и граничных условиях второго рода

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0; \quad \lambda(T)\frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = q(t); \quad t \in [0, t^*]. \quad (3.133)$$

Функция $\lambda(T)$ неизвестна и подлежит определению при известных остальных воздействиях: плотности теплового потока $q(t)$, начальном температурном распределении $T_0(x)$ и теплофизических характеристиках $c(T), \rho(T)$.

В экстремальной постановке ОЗТ $\lambda(T)$ рассматривается в качестве искомого управления, подчиненного условию

$$\lambda(T) \in V, \quad T \in [T_{\min}, T_{\max}]$$

принадлежности подходящему множеству V управляющих воздействий, под которым чаще всего понимаются достаточно гладкие зависимости $\lambda(T)$.

Будем искать зависимость коэффициента теплопроводности от температуры в стандартной полиномиальной форме [191]

$$\lambda(T) = \sum_{n=0}^N l_n T^n \in V. \quad (3.134)$$

Вариационная постановка ОЗТ формулируется следующим образом.

На основе экспериментальных данных о распределении температуры $T^*(t)$ в некоторой фиксированной точке измерения $x^* \in [0, L]$ необходимо найти зависимость $\lambda(T) \in V$, которая минимизирует невязку между расчетным температурным состоянием $T(x^*, t, \lambda)$, соответствующим искомой функции $\lambda^0(T)$, и заданной температурой $T^*(t)$.

Использование в качестве меры оценивания на интервале идентификации ошибки равномерного приближения $T(x^*, t, \lambda)$ к $T^*(t)$ приводит к задаче оптимального управления

$$I_1(\lambda) = \max_{t \in [0, t^*]} |T(x^*, t) - T^*(t)| \rightarrow \min_{\lambda(T) \in V}, \quad (3.135)$$

в которой для поиска $\lambda^0(T)$ осуществляется переход от исходного множества V в (3.135) до физически реализуемых в процессе идентификации функций, задаваемых в форме полиномов вида (3.134). Выбор числа N , определяющего степень аппроксимирующего полинома, обеспечивает принадлежность заданному классу управляющих воздействий. Значение N должно обеспечивать удовлетворительное качество аппроксимации полиномиального приближения $\lambda(T)$ к таблично заданным зависимостям, что для большого числа используемых в теплотехнике материалов выполняется уже при степени аппроксимирующего полинома не выше пятой. Результирующее среднеквадратическое отклонение при этом не превышает 3% [26].

Для поиска решений $\lambda^0(T)$ в классе полиномиальных функций искомое управляющее воздействие задается в параметризованной форме, где при выбранном числе N полиномиальные коэффициенты однозначно образуют подлежащий определению вектор параметров $\Delta = (l_0, l_1, \dots, l_N)$. Температурное поле $T(x^*, t, \Delta)$ в этом случае также является функцией рассматриваемого вектора параметров Δ , и вычисляется в процессе численного моделирования как реакция на управляющее воздействие вида (3.134) при заданных числе N и векторе Δ . Для расчета $T(x^*, t, \Delta)$ используется приближенная численная математическая модель, полученная на основе конечно-разностной аппроксимации задачи (3.131)–(3.133).

На основе параметрического представления управляющего воздействия (3.134) и температурного поля $T(x^*, t, \Delta)$ возможно перейти от исходной некорректной постановки ОЗТ (3.135) к эквивалентной задаче математического программирования относительно вектора параметров Δ

$$I_0(\Delta) = \max_{t \in [0, t^*]} |T(x^*, t, \Delta) - T^*(t)| \rightarrow \min_{\Delta}. \quad (3.136)$$

Подобно общему подходу на основе метода минимаксной оптимизации задача становится корректно поставленной при любом конечном N на компактном множестве $N + 1$ коэффициентов l_n и остается таковой при $N \rightarrow \infty$ в силу определения на множестве непрерывно дифференцируемых функций (3.134) при любом $N \leq \infty$.

Точность процедуры редукции внутренней коэффициентной ОЗТ к СЗМП (3.136) определяется только точностью используемой приближенной математи-

ческой модели температурного поля.

Решение задачи математического программирования

Согласно разработанному методу минимаксной оптимизации, решение Δ^0 полученной задачи (3.136) основывается на качественных свойствах оптимальных температурных состояний $T(x^*, t, \Delta^0)$, устанавливающих характер кривой погрешности $T(x^*, t, \Delta^0) - T^*(t)$ аппроксимации температурного поля на заданном интервале идентификации.

Подобно (3.116), (3.126), на основе базового соотношения $R = N + 2$ составляется замкнутая система $N + 2$ уравнений для предельных разностей температур $T(x^*, t_j^0, \Delta^0) - T^*(t_j^0)$, в которой в качестве неизвестных фигурируют $N + 1$ компонент вектора Δ^0 и минимакс $I_0(\Delta^0)$. Соотношения дополняются условиями существования экстремума функции $T(x^*, t, \Delta^0) - T^*(t)$ в точках t_s^0 , не совпадающих с границами интервала $[0, t^*]$, и итоговая система принимает вид

$$\begin{aligned} T(x^*, t_j^0, \Delta^0) - T^*(t_j^0) &= (-1)^{j+1} \beta I_0; \quad j = \overline{1, R}, \quad \beta = \pm 1; \\ \frac{\partial}{\partial t} (T(x^*, t_{j_s}^0, \Delta^0) - T^*(t_{j_s}^0)) &= 0, \end{aligned} \quad (3.137)$$

где возможен любой из вариантов расположения точек экстремума $s = \overline{1, N + 2}$; $s = \overline{2, N + 2}$; $s = \overline{1, N + 3}$ или $s = \overline{2, N + 3}$.

Для поиска корней расчетной системы уравнений (3.137) на основе численного моделирования температурного поля $T(x^*, t, \Delta^0)$ оказывается целесообразным переход к эквивалентной задаче минимизации в пространстве искомых параметров $\Delta_j, j = \overline{1, N}$ целевой функции $I_2(\Delta)$ [142], сформированной так, что ее глобальный минимум, равный нулю, достигается при $\Delta = \Delta^0$. $I_2(\Delta)$ образуется как сумма квадратов алгебраической суммы разностей $T(x^*, t_j^0, \Delta^0) - T^*(t_j^0)$ в точках $t = \bar{t}_i^0 \in \{t_j^0\}, i = \overline{1, N_{\max}}$ и $t = \tilde{t}_k^0 \in \{t_j^0\}, k = \overline{1, N_{\min}}$ их одинакового по модулю (при $\Delta = \Delta^0$) максимального и минимального значений соответственно:

$$\begin{aligned} I_2(\Delta) &= \sum_{\substack{i=\overline{1, N_{\max}} \\ k=\overline{1, N_{\min}}}} \left(T_{\max}(x^*, \bar{t}_i^0, \Delta) - T^*(\bar{t}_i^0) + T_{\min}(x^*, \tilde{t}_k^0, \Delta) - T^*(\tilde{t}_k^0) \right)^2 \rightarrow \min_{\Delta}; \\ I_2(\Delta^0) &= 0; \quad N_{\max} + N_{\min} = R. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Экстремум $I_2(\Delta)$ может быть найден градиентными методами с использованием полиномиальных аппроксимаций зависимостей $T_{\max}(x^*, \bar{t}_i^0, \Delta)$ и $T_{\min}(x^*, \bar{t}_k^0, \Delta)$ от Δ , что и обеспечивает решение задачи параметрической оптимизации относительно вектора Δ . Начальные приближения для компонент вектора Δ выбирались на основе априорных сведений о характере зависимости $\lambda(T)$ на рассматриваемом температурном диапазоне. Выбором достаточно большого числа $N = N^0$ обеспечивается восстановление искомой функции $\lambda^*(T)$ с любой требуемой точностью.

Численная реализация

На основе предложенной методики была решена модельная внутренняя ОЗТ по восстановлению температурной зависимости $\lambda(T)$ при $N = 1, 2, 3$ в процессе нестационарной теплопроводности бесконечной пластины толщиной $2L = 0.2$ м. ТФХ материала соответствовали стали марки 08кп. Температурное поле, как при решении прямой задачи, так и обратной, определялось в результате численного моделирования методом конечных элементов при учете температурных зависимостей $c(T)$ и $\rho(T)$ в виде полиномов третьего и первого порядка соответственно. В качестве заданного температурного распределения $T^*(t)$ рассматривалось решение прямой задачи при полиномиальной зависимости $\lambda^*(T) = 84.13 - 0.09T + 1.06 \cdot 10^{-4}T^2 - 1.12 \cdot 10^{-7}T^3 + 4.46 \cdot 10^{-11}T^4$, полученной аппроксимацией табличных данных [193] в диапазоне изменения температуры $T \in [0, 1100]^\circ\text{C}$.

Задача сводилась к численному поиску глобального минимума функционала (3.138) для фиксированных значений $N = 1, 2, 3$ в (3.134). Начальные приближения для вектора $\Delta = (l_0, l_1, \dots, l_N)$ соответствовали аппроксимации $\lambda^*(T)$ полиномом N -го порядка.

Результаты решения коэффициентной ОЗТ представлены далее.

Как видно из полученных результатов, значения минимакса $I_0(\Delta^0)$ в (3.136) монотонно убывают с ростом степени полинома N , и при наличии экстремума в искомой зависимости $\lambda^*(T)$ обеспечивают удовлетворительное качество аппроксимации уже при $N = 3$ (рис. 3.32, а). В случае монотонного характера $\lambda^*(T)$ (например, на интервале температур $T \in [0, 900]^\circ\text{C}$), достаточное качество идентификации может быть получено уже при $N = 1$ (рис. 3.32, б).

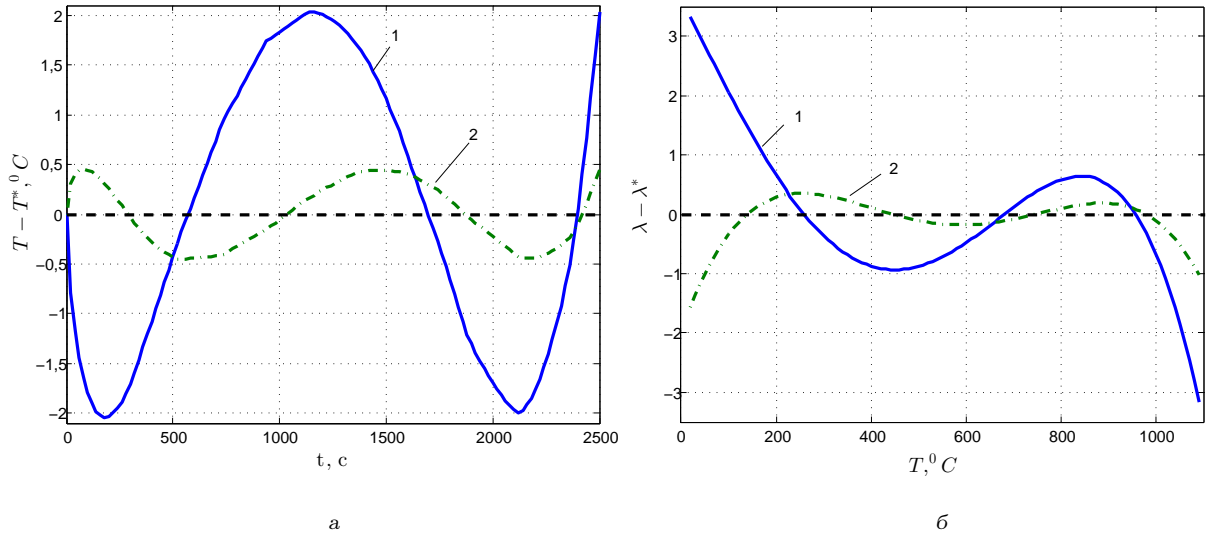


Рис. 3.31. Погрешность аппроксимации температурного поля $T(x^*, t, \Delta^0) - T^*(t)$ (а) и коэффициента теплопроводности $\lambda^0(T) - \lambda^*(T)$ (б) при $N = 2 - 1$ и $N = 3 - 2$

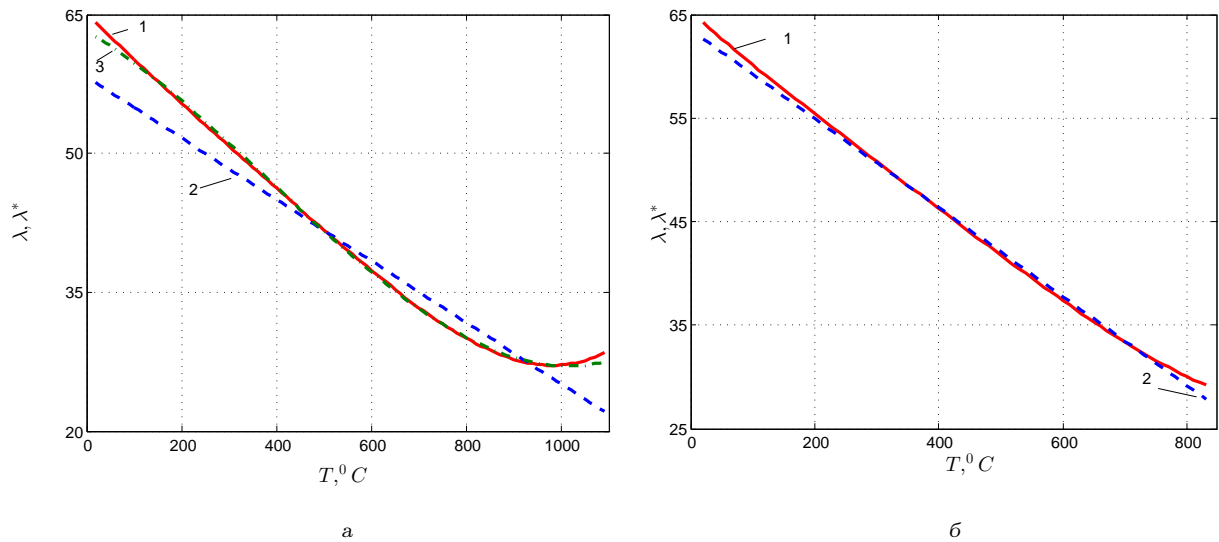


Рис. 3.32. Результат $\lambda^0(T)$ восстановления зависимости $\lambda^*(T)$ при $T \in [0, 1100]^0C$ (а) и $T \in [0, 900]^0C$ (б): 1 – $\lambda^*(T)$; 2 – при $N = 1$; 3 – при $N = 3$;

Таблица 3.12. Погрешность аппроксимации температуры в абсолютных единицах $\varepsilon_T^{(1)} = \max |T(x^*, t, \Delta^0) - T^*(t)|$, ^0C и в относительных $\varepsilon_T^{(2)} = \frac{\max |T(x^*, t, \Delta^0) - T^*(t)|}{T_{max}^*} \cdot 100\%$; ошибка приближения коэффициента теплопроводности в абсолютных единицах $\varepsilon_\lambda^{(1)} = \max |\lambda^0(T) - \lambda^*(T)|$, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot ^0\text{C})$ и в относительных $\varepsilon_\lambda^{(2)} = \frac{\max |\lambda^0(T) - \lambda^*(T)|}{\lambda_{max}^*} \cdot 100\%$ при $N = \overline{1, 3}$, $T \in [0, 1100]^0\text{C}$ $t \in [0, 2500]$ с, $x^* = 0.96 \cdot L = 0.096$ м;

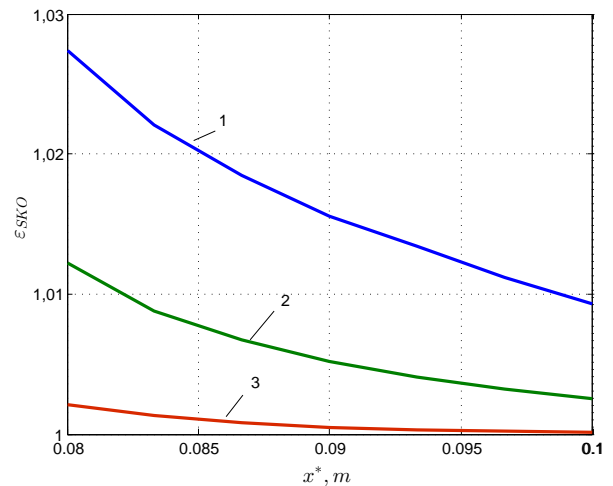
N	1	2	3
$\varepsilon_T^{(1)}, ^0\text{C}$	11.7	2.09	0.488
$\varepsilon_T^{(2)}, \%$	0.0106	0.0019	4.4364e-04
$\varepsilon_\lambda^{(1)}, \text{Вт}/(\text{м} \cdot ^0\text{C})$	6.67	3.2	1.58
$\varepsilon_\lambda^{(2)}, \%$	0.1817	0.0872	0.0431

Одним из ключевых моментов, существенно влияющих на точность восстановления ТФХ, является расположение точки измерения. Вычисление относительной интегральной квадратичной погрешности

$$\varepsilon_{sko} = \sqrt{\sum_{k=1}^K \left(\frac{\lambda^0(T(x^*, k \cdot d, \Delta^0)) - \lambda^*(T(k \cdot d))}{\lambda_{max}} \right)^2},$$

где λ_{max} — максимальное значение коэффициента теплопроводности на заданном диапазоне его изменения в процессе нагрева на временном интервале $t \in [0, 2500]$ с с шагом $d = 20$ с, при изменении координаты точки измерения в диапазоне $[0.8, 1]L \ni x^*$ показывают, что точность восстановления искомой характеристики уменьшается при перемещении точки термометрирования вглубь заготовки (рис. 3.33).

Рис. 3.33. Зависимость погрешности аппроксимации ε_{sko} от координаты точки измерения x^* : 1 — при $N = 1$; 2 — при $N = 2$; 3 — при $N = 3$;



3.6. Метод минимаксной оптимизации в двумерной граничной обратной задаче теплопроводности

3.6.1. Постановка двумерной граничной обратной задачи теплопроводности и ее редукция к задаче математического программирования

Далее показаны возможности распространения представленного выше метода минимаксной оптимизации для решения многомерных обратных задач теплопроводности на примере определения граничного теплового потока, зависящего от времени и пространственной координаты для двумерной модели уравнения теплопроводности.

Двумерная обратная задача нестационарной теплопроводности формулируется, подобно [21; 194–196], для процесса одностороннего нагрева плоского тела прямоугольной формы.

Температурное поле $\theta(x, y, \varphi)$ в зависимости от времени φ и пространственных координат x, y описывается двумерным уравнением теплопроводности в относительных единицах

$$\frac{\partial \theta(x, y, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \theta(x, y, \varphi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, y, \varphi)}{\partial y^2}, \quad x, y \in (0, 1); \quad \varphi \in (0, \varphi^*), \quad (3.139)$$

дополненным начальным условием

$$\theta(x, y, 0) = 0, \quad x, y \in [0, 1] \quad (3.140)$$

и граничными условиями второго рода

$$\frac{\partial \theta(0, y, \varphi)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(x, 0, \varphi)}{\partial y} = \frac{\partial \theta(x, 1, \varphi)}{\partial y} = 0, \quad \varphi \in [0, \varphi^*], \quad (3.141)$$

$$\frac{\partial \theta(1, y, \varphi)}{\partial x} = q(y, \varphi), \quad \varphi \in [0, \varphi^*]. \quad (3.142)$$

Здесь функция $q(y, \varphi)$ неизвестна и является искомой величиной. Задана дополнительная информация о температуре $\theta^*(y, \varphi)$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ на некоторой линии $x = x^* = \text{const}$, $0 \leq x^* \leq 1$.

Полагается, что пространственно-временная функция $q(y, \varphi)$ двух переменных может быть представлена в виде произведения двух функций одной

переменной

$$q(y, \varphi) = q^{(1)}(y)q^{(2)}(\varphi), \quad (3.143)$$

что соответствует большинству физически обоснованных ситуаций.

Идентифицируемая функция $q(y, \varphi)$ рассматривается в качестве управляющего воздействия $u(y, \varphi) = q(y, \varphi)$, структура которого соответствует виду (3.143)

$$u(y, \varphi) = u^{(1)}(y)u^{(2)}(\varphi), \quad (3.144)$$

где функции $u^{(1)}(y)$ и $u^{(2)}(\varphi)$ выступают как пространственно-распределенное и сосредоточенное управляющие воздействия, подчиненные типовым ограничениям

$$u^{(1)}(y) \in V_1, \quad 0 < y < 1, \quad (3.145)$$

$$u^{(2)}(\varphi) \in V_2, \quad 0 < \varphi < \varphi^* \quad (3.146)$$

принадлежности заданным подходящим множествам V_1 и V_2 в функциональном пространстве функций. Таким образом, искомое управление $u(y, \varphi)$ представляет собой произведение (3.144) пространственно-распределенной и сосредоточенной составляющих.

Рассмотрим ОЗТ в экстремальной постановке, предусматривающую минимизацию погрешности равномерного приближения модельного значения $\theta(x^*, y, \varphi)$, соответствующего искомой функции $u(y, \varphi)$, к измеряемому температурному состоянию $\theta^*(y, \varphi)$ на заданной области $\Omega = \{(y, \varphi); y \in [0, 1]; \varphi \in [0, \varphi^*]\}$ изменения пространственной переменной и временном интервале идентификации.

Для объекта (3.139) – (3.142) требуется определить управляющее воздействие $u(y, \varphi)$, подчиненное согласно (3.144) ограничениям (3.145) и (3.146), обеспечивающее на заданной области изменения пространственной и временной переменной выполнение минимаксного соотношения

$$I(u) = I(u^{(1)}, u^{(2)}) = \max_{\substack{\varphi \in [0, \varphi^*] \\ y \in [0, 1]}} \left| \theta(x^*, y, \varphi, u^{(1)}, u^{(2)}) - \theta^*(y, \varphi) \right| \rightarrow \min_{\substack{u^{(1)} \in V_1 \\ u^{(2)} \in V_2}}. \quad (3.147)$$

Для решения задачи производится сужение множеств V_1, V_2 допустимых решений до класса корректности – физически реализуемых на заданных областях изменения соответствующих переменных функций, – осуществляемое на основе требований их достаточной гладкости [21]. Здесь, подобно предыдущим

вариантам ОЗТ, в качестве класса корректности (компакта) рассматривается множество управляющих воздействий, непрерывных по соответствующим аргументам вместе со своими производными, которое априори задается в полиномиальной форме

$$u^{(1)}(y) = \sum_{n=0}^N \Delta_n^{(y)} y^n, \quad (3.148)$$

$$u^{(2)}(\varphi) = \sum_{m=0}^M \Delta_m^{(\varphi)} \varphi^m. \quad (3.149)$$

Значения N и M определяют порядки полиномов (3.148) и (3.149) и, тем самым, задают точную структуру искоемых функций, что позволяет перейти к параметризованной форме представления искоемых управлений. Таким образом, при фиксированных значениях N и M идентифицируемое воздействие $u(y, \varphi)$ однозначно задается значениями полиномиальных коэффициентов в (3.148) и (3.149), образующих векторы параметров $\Delta^{(y)} = (\Delta_0^{(y)}, \Delta_1^{(y)}, \dots, \Delta_N^{(y)})$ и $\Delta^{(\varphi)} = (\Delta_0^{(\varphi)}, \Delta_1^{(\varphi)}, \dots, \Delta_M^{(\varphi)})$ соответственно. В результате, на основе (3.144), (3.148) и (3.149) параметрическое представление управляющего воздействия имеет вид

$$u(y, \varphi) = u^{(1)}(y) \cdot u^{(2)}(\varphi) = \left(\Delta_0^{(y)} + \Delta_1^{(y)} y + \dots + \Delta_N^{(y)} y^N \right) \cdot \left(\Delta_0^{(\varphi)} + \Delta_1^{(\varphi)} \varphi + \dots + \Delta_M^{(\varphi)} \varphi^M \right) = \tilde{\Delta}_0 \left(1 + \tilde{\Delta}_1^{(y)} y + \dots + \tilde{\Delta}_N^{(y)} y^N \right) \cdot \left(1 + \tilde{\Delta}_1^{(\varphi)} \varphi + \dots + \tilde{\Delta}_M^{(\varphi)} \varphi^M \right), \quad (3.150)$$

где $\tilde{\Delta}_0 = \Delta_0^{(y)} \cdot \Delta_0^{(\varphi)}$; $\tilde{\Delta}_i^{(y)} = \Delta_i^{(y)} / \Delta_0^{(y)}$, $i = \overline{1, N}$; $\tilde{\Delta}_j^{(\varphi)} = \Delta_j^{(\varphi)} / \Delta_0^{(\varphi)}$, $j = \overline{1, M}$, и, следовательно, вектор $\Delta = (\tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1^{(y)}, \dots, \tilde{\Delta}_N^{(y)}, \tilde{\Delta}_1^{(\varphi)}, \dots, \tilde{\Delta}_M^{(\varphi)})$ искомого управления содержит $N + M + 1$ параметр.

При этом температурное поле $\theta(x^*, y, \varphi, u^{(1)}, u^{(2)}) = \theta(x^*, y, \varphi, \Delta)$ также является функцией рассматриваемого вектора Δ параметров и вычисляется как реакция на управляющее воздействие (3.150) при заданных значениях N и M и векторе Δ . Использование параметрического представления температурного поля $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta)$ позволяет перейти от исходной некорректно поставленной обратной задачи к эквивалентной задаче параметрической оптимизации относительно вектора Δ , минимизирующей отклонение расчетного температурного

состояния от измеряемого в равномерной метрике оценивания

$$I^0(\Delta) = \max_{\substack{\varphi \in [0, \varphi^*] \\ y \in [0, 1]}} |\theta(x^*, y, \varphi, \Delta) - \theta^*(y, \varphi)| \rightarrow \min_{\Delta}. \quad (3.151)$$

Решение полученной задачи математического программирования (3.151), сформулированной относительно температурного состояния, заданного теперь в двумерной пространственной области, также может основываться, подобно [142; 147; 197], на известных качественных свойствах оптимальных температурных распределений, обладающих при $\Delta = \Delta^0$ наилучшим равномерным приближением к требуемому состоянию $\theta^*(y, \varphi)$. Данные свойства фиксируют в отдельных точках $z^0 = (y^0, \varphi^0)$ на всей пространственно-временной области идентификации достижение предельных отклонений расчетной температуры $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0)$ от заданной $\theta^*(y, \varphi)$, равных $\pm I^0$, и тем самым, устанавливают требования к конфигурации погрешности $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$ аппроксимации температурного распределения $\theta^*(y, \varphi)$. Число точек, где достигаются предельно допустимые максимальные по абсолютной величине значения погрешности $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$ должно быть не меньше числа неизвестных оптимального процесса [142], в роли которых выступают вектор Δ параметров искомого управления и сама величина погрешности I^0 . Таким образом, при поиске аппроксимирующей функции $u(y, \varphi)$, заданной, согласно (3.150), фиксированными значениями N и M на наблюдаемой пространственно-временной области Ω всегда найдутся такие $R = N + M + 2$ точек $z = z_k^0 = (y_k^0, \varphi_k^0)$; $k = \overline{1, R}$, для которых выполняются равенства

$$|\theta(x^*, y_k^0, \varphi_k^0, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)| = I^0(\Delta^0), k = \overline{1, R}; \Delta^0 = (\tilde{\Delta}_0^0, \tilde{\Delta}_1^{y^0}, \dots, \tilde{\Delta}_N^{y^0}, \tilde{\Delta}_1^{\varphi^0}, \dots, \tilde{\Delta}_M^{\varphi^0}). \quad (3.152)$$

В силу замкнутости системы равенств (3.152) относительно всех параметров оптимального управления, ее возможно перевести в систему расчетных уравнений относительно этих параметров. Последующее решение полученной системы и окажется решением задачи полубесконечной оптимизации (3.151). Специфика данной задачи по сравнению с одномерными случаями, где минимизация ошибки равномерного приближения осуществляется по одной (временной или пространственной) переменной, заключается в требованиях достижения минимаксной погрешности $I^0(\Delta^0) = \max_{\varphi, y} |\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)|$ аппроксима-

ции $\theta^*(y, \varphi)$ на всей пространственно-временной области Ω . В связи со сложным многоэкстремальным характером зависимости $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$ от искомого вектора параметров, пространственной координаты и времени, в общем случае может возникать множество вариантов комбинаций расположения точек $z^0 = (y^0, \varphi^0)$ с предельно допустимыми отклонениями I^0 , соответствующих равенствам (3.152). Эти варианты различаются формой поверхности распределения $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$ относительно переменных y и φ , и координатами (y^0, φ^0) точек z^0 . Процедура опознавания точек z^0 на плоскости (y, φ) и знаков предельных отклонений I^0 в этих точках на множестве возможных вариантов представляет основную сложность при решении двумерной задачи. Тем не менее, в большинстве ситуаций, представляющих практический интерес, на основе физических закономерностей процесса теплопроводности возможно существенно уменьшить число претендентов на роль точек z^0 альтернанса, и среди оставшихся вариантов (если их количество больше одного), отвечающих системе равенств (3.152), выделить единственный вариант распределения $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$, обеспечивающий выполнение минимаксного соотношения (3.151).

С целью распространения результатов решения одномерных ОЗТ по идентификации сосредоточенного граничного воздействия $q(\varphi)$ на двумерную область, будем далее рассматривать конфигурацию поверхности температурной невязки как совокупность температурных кривых $\theta(x^*, y_k, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y_k, \varphi)$, $k = \overline{1, R}$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$, характеризуемых предельно допустимыми отклонениями, достигаемыми на различных сечениях $y_k = const$ по объему тела $y_k \in [0, 1]$. При этом число точек альтернанса на всей совокупности зависимостей $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$ во времени $\varphi \in [0, \varphi^*]$ равно количеству искомым параметров оптимального управления R , но достигаются они в точках с разными координатами y_k .

Методика решения двумерных граничных ОЗТ, основанная на минимаксной оптимизации погрешности аппроксимации наблюдаемого температурного поля, может быть сведена к следующей последовательности действий.

3.6.2. Вычислительная процедура и альтернансные соотношения

Решается последовательность задач полубесконечной оптимизации (3.151), ориентированных на выявление формы кривой $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$ для раз-

личных значений N и M , поочередно возрастающих, начиная с $N = M = 0$. На каждом этапе система равенств (3.152) трансформируется в систему R расчетных соотношений

$$\theta(x^*, y_k^0, \varphi_k^0, \Delta^0) - \theta^*(y_k^0, \varphi_k^0) = \pm I^0(\Delta^0), \quad k = \overline{1, R} \quad (3.153)$$

с R неизвестными: $N + M + 1$ параметрами оптимального управления $u^0(y, \varphi)$ и величиной минимакса $I_{NM}^0(\Delta^0)$. Эта система фиксирует достижение предельно допустимых отклонений $\pm I^0$ в R точках. Для определения дополнительных неизвестных – координат внутренних, отличных от границ заданной области Ω точек минимума или максимума поверхности $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$, – используются соотношения – условия существования экстремумов в этих точках по соответствующему временному

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, y_{\text{ex}i}^0, \varphi_{\text{ex}j}^0, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_{\text{ex}i}^0, \varphi_{\text{ex}j}^0) \right) = 0 \quad (3.154)$$

или пространственному аргументу

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\theta(x^*, y_{\text{ex}i}^0, \varphi_{\text{ex}j}^0, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_{\text{ex}i}^0, \varphi_{\text{ex}j}^0) \right) = 0. \quad (3.155)$$

Для каждого конкретного случая, заданного значениями N и M , проблема сводится к выбору соответствующей системы (3.153) – (3.155) и вычислению ее корней. При этом, на первых этапах вычислительной процедуры могут использоваться аналогии с одномерными ситуациями, позволяющими конкретизировать расположение точек альтернанса и соответствующую расчетную систему уравнений. Например, результаты решения одномерных задач [57; 159] показывают, что первыми претендентами на роль точек альтернанса являются точки на границах рассматриваемой пространственно-временной области. В двумерном случае, для демонстрируемого ниже примера, простейший случай $N = M = 0$, соответствующий постоянному управлению $u(y, \varphi) = \tilde{\Delta}_0$, приводит к очевидному варианту формы разности $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$ с двумя точками экстремума на сечениях $y_1^0 = 1$ и $y_2^0 = 0$ в моменты времени $\varphi_1^0 = \varphi^*$ и $\varphi_2^0 = \varphi_{\text{ex}}^0$ рис. 3.34). При этом в точках $z_1^0 = (y_1^0, \varphi_1^0)$ и $z_2^0 = (y_2^0, \varphi_2^0)$ достигаются соответственно максимальное и минимальное значения температурной невязки, что согласуется с законом знакопеременования предельных отклонений [142].

При увеличении значений N или M в расчетной конфигурации $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$ появляются дополнительные точки с предельно допустимыми отклонениями $\pm I^0$. По-прежнему, варианты $y^0 = 1$ или $y^0 = 0$ в том числе, соответствующие расположению в «угловых» точках $(y^0 = 1, \varphi^0 = \varphi^*)$ или $(y^0 = 0, \varphi^0 = \varphi^*)$, остаются приоритетными, но при этом предельно допустимые отклонения достигаются также во внутренних точках $0 < y^0 < 1$, число которых возрастает с увеличением порядков N и M . Ситуация усложняется тем, что для двумерной модели температурного поля в общем случае не выполняется правило знакопереживания предельных температурных отклонений, которое существенно ограничивает число вариантов конфигурации $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$.

Таким образом, число претендентов на роль точек z^0 может оказаться большим их минимально необходимого количества, равного R , и заранее выявить конкретный, зависящий от исходных данных, вариант расположения точек альтернанса из всех возможных, уже не удастся. В этом случае возможно применить специальным образом организованную вычислительную процедуру, подобную [49; 142], основанную на решении ряда задач оптимизации для возрастающих с достаточно малым шагом значений очередного $N + 1$ -го или $M + 1$ -го параметра относительно решенной на предыдущем шаге задачи, заданной N и M параметрами.

Пусть, на очередном этапе найдено решение $\Delta^0 = (\tilde{\Delta}_0^0, \tilde{\Delta}_1^{y^0}, \dots, \tilde{\Delta}_{N^*}^{y^0}, \tilde{\Delta}_1^{\varphi^0}, \dots, \tilde{\Delta}_{M^*}^{\varphi^0})$ минимаксной задачи (3.151) в классе полиномиальных функций при $N = N^*$, $M = M^*$. Конфигурация $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$ характеризуется наличием $N^* + M^* + 2$ точек альтернанса. Пусть, на следующем этапе увеличивается порядок аппроксимирующей функции $u^{(2)}(\varphi)$, т.е. $N = N^*$, $M = M^* + 1$, и искомым вектор параметров имеет вид $\Delta^0 = (\tilde{\Delta}_0^0, \tilde{\Delta}_1^{y^0}, \dots, \tilde{\Delta}_{N^*}^{y^0}, \tilde{\Delta}_1^{\varphi^0}, \dots, \tilde{\Delta}_{M^*}^{\varphi^0}, \tilde{\Delta}_{M^*+1}^{\varphi^0})$. Решается задача оптимизации, заданная системой расчетных уравнений (3.153) – (3.155), с конфигурацией температурной невязки, соответствующей предыдущему шагу в силу непрерывной зависимости расчетных температур от своих аргументов, для ряда увеличивающихся с достаточно малым шагом значений $\tilde{\Delta}_{M^*+1}^{\varphi^0}$ до тех пор, пока абсолютное значение невязки в какой-либо из вновь появляющихся точек экстремумов не сравняется с её значениями в других точках z^0 , и не станет равным $I_{N^*(M^*+1)}^0(\Delta^0)$. Такая ситуация соответствует наличию в конфигурации $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$ $N^* + M^* + 3$ точек альтернанса. Аналогич-

но можно поступить при увеличении степени N полинома (3.148). Начальные приближения для решения задачи на очередном шаге могут основываться на результатах решения расчетной системы на предыдущем шаге.

3.6.3. Пример решения обратной двумерной задачи теплопроводности

Решение прямой задачи теплопроводности производилось на основе двумерной модели, найденной в результате последовательного применения двух конечных интегральных преобразований [160] по пространственным аргументам x и y с ядрами, равными собственным функциям $K_1(\mu_m x) = \cos \mu_m x$ и $K_2(\eta_n y) = \cos \eta_n y$, где $\mu_m^2 = \pi^2 m^2$, $m = 0, 1, 2, \dots$ и $\eta_n^2 = \pi^2 n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ — собственные числа, полученные на основе решения уравнений $\sin \mu = 0$ и $\sin \eta = 0$ соответственно. Расчетное температурное поле задается в виде двумерного бесконечного ряда относительно коэффициентов (временных мод) $\bar{\theta}(\mu_m, \eta_n, \varphi)$ разложения $\theta(x, y, \varphi)$ по $K_1(\mu_m x)$ и $K_2(\eta_n y)$ [160]

$$\begin{aligned} \theta(x, y, \varphi) = & \int_0^{\varphi} q_{00}(\tau) d\tau + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\mu_m x) \int_0^{\varphi} q_{m0}(\tau) e^{-\mu_m^2(\varphi-\tau)} d\tau + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\eta_n y) \int_0^{\varphi} q_{0n}(\tau) e^{-\eta_n^2(\varphi-\tau)} d\tau + \\ & + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\mu_m x) \cdot \cos(\eta_n y) \int_0^{\varphi} q_{mn}(\tau) e^{-(\mu_m^2 + \eta_n^2)(\varphi-\tau)} d\tau, \quad (3.156) \end{aligned}$$

где

$$q_{mn}(\varphi) = q_n(\varphi) \cos \pi m, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.157)$$

— изображение функции $q(y, \varphi)$,

$$q_n(\varphi) = \int_0^1 q(y, \varphi) \cos(\pi n y) dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.158)$$

Искомая функция $q^*(y, \varphi)$, согласно (3.143), представлена в виде

$$q^*(y, \varphi) = \sin(\omega \pi y) (e^{\beta \varphi} - 1). \quad (3.159)$$

Соотношения (3.156) – (3.158) с учетом (3.159) приводят к выражению для температурного поля при $\omega \neq 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \theta(x, y, \varphi) = & \frac{1 - \cos \pi\omega}{\pi\omega} \cdot \frac{e^{\beta\varphi} - \beta\varphi - 1}{\beta} + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos \pi ny \cdot F_2(\omega, n) \cdot \Psi_1(\varphi, 0, n) + \\ & + \frac{2}{\pi\omega} (1 - \cos \pi\omega) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cos \pi mx \cdot F_1(\varphi, m, 0) + \\ & + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m \cos \pi mx \cdot \cos \pi ny \cdot F_2(\omega, n) F_1(\varphi, m, n), \quad (3.160) \end{aligned}$$

где

$$F_1(\varphi, m, n) = \frac{e^{\beta\varphi} - e^{-\pi^2(m^2+n^2)\varphi}}{\beta + \pi^2(m^2 + n^2)} - \frac{1 - e^{-\pi^2(m^2+n^2)\varphi}}{\pi^2(m^2 + n^2)}; \quad (3.161)$$

$$F_2(\omega, n) = \frac{\omega}{\pi} \cdot \frac{1 - (-1)^n \cos \pi\omega}{\omega^2} - n^2. \quad (3.162)$$

На основе выражения (3.160) в результате проведения вычислительного эксперимента на интервале $\varphi \in [0, \varphi^*]$ в точках на линии $x = x^*$; $y \in [0, 1]$ были получены двумерные температурные распределения $\theta(x^*, y, \varphi) = \theta^*(y, \varphi)$, используемые как входная информация при решении обратной задачи.

Серия ОЗТ была решена для случая возрастающих значений N и M в классе $N = \overline{0, 3}$; $M = \overline{0, 3}$. В общем случае, при $N = M = 3$ искомое управление имеет вид

$$u(y, \varphi) = \tilde{\Delta}_0 \left(1 + \tilde{\Delta}_1^{(y)} y + \tilde{\Delta}_2^{(y)} y^2 + \tilde{\Delta}_3^{(y)} y^3 \right) \cdot \left(1 + \tilde{\Delta}_1^{(\varphi)} \varphi + \tilde{\Delta}_2^{(\varphi)} \varphi^2 + \tilde{\Delta}_3^{(\varphi)} \varphi^3 \right) \quad (3.163)$$

и определяется вектором параметров $\Delta = \left(\tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1^{(y)}, \tilde{\Delta}_2^{(y)}, \tilde{\Delta}_3^{(y)}, \tilde{\Delta}_1^{(\varphi)}, \tilde{\Delta}_2^{(\varphi)}, \tilde{\Delta}_3^{(\varphi)} \right)$. Ситуации $N < 3$ или $M < 3$ можно рассматривать как «частные случаи» управления (3.163) при равных нулю соответствующих коэффициентах $\tilde{\Delta}_i^{(y)} = 0, i = \overline{N+1, 3}$ или $\tilde{\Delta}_j^{(\varphi)} = 0, j = \overline{M+1, 3}$.

Параметризованная форма расчетного температурного поля имеет вид

$$\begin{aligned} \theta(x, y, \varphi) = & \tilde{\Delta}_0 \left(1 + \frac{\tilde{\Delta}_1^{(y)}}{2} + \frac{\tilde{\Delta}_2^{(y)}}{3} + \frac{\tilde{\Delta}_3^{(y)}}{4} \right) \cdot \left(\varphi + \frac{\tilde{\Delta}_1^{(\varphi)}}{2} \varphi^2 + \frac{\tilde{\Delta}_2^{(\varphi)}}{3} \varphi^3 + \frac{\tilde{\Delta}_3^{(\varphi)}}{4} \varphi^4 \right) + \\ & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \cos(\pi mx) \tilde{\Delta}_0 \left(1 + \frac{\tilde{\Delta}_1^{(y)}}{2} + \frac{\tilde{\Delta}_2^{(y)}}{3} + \frac{\tilde{\Delta}_3^{(y)}}{4} \right) F_3(\varphi, m, 0) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n y) F_4(\omega, n) F_3(\varphi, 0, n) + \\
& + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^m \cos(\pi m x) \cdot \cos(\pi n y) F_4(\omega, n) F_3(\varphi, m, n), \quad (3.164)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_3(\varphi, m, n) = & \frac{1}{(\pi^2(m^2 + n^2))^2} \left[\pi^2(m^2 + n^2) \left(1 - e^{-\pi^2(m^2+n^2)\varphi} \right) + \right. \\
& + \tilde{\Delta}_1^{(\varphi)} \left(\pi^2(m^2 + n^2)\varphi - 1 + e^{-\pi^2(m^2+n^2)\varphi} \right) + \\
& + \tilde{\Delta}_2^{(\varphi)} \left(\pi^2(m^2 + n^2)\varphi^2 - 2\varphi + \frac{2}{\pi^2(m^2 + n^2)} \left(1 - e^{-\pi^2(m^2+n^2)\varphi} \right) \right) + \\
& \left. + \tilde{\Delta}_3^{(\varphi)} \left(\pi^2(m^2 + n^2)\varphi^3 - 3\varphi^2 + \frac{6}{\pi^2(m^2 + n^2)} \left(\varphi - \frac{1 - e^{-\pi^2(m^2+n^2)\varphi}}{\pi^2(m^2 + n^2)} \right) \right) \right]; \quad (3.165)
\end{aligned}$$

$$F_4(\omega, n) = \frac{\tilde{\Delta}_0}{\pi^2 n^2} \left(\tilde{\Delta}_1^{(y)} ((-1)^n - 1) + \left(2\tilde{\Delta}_2^{(y)} + 3\tilde{\Delta}_3^{(y)} \right) (-1)^n - \frac{6\tilde{\Delta}_3^{(y)}}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1) \right). \quad (3.166)$$

Некоторые результаты решения соответствующих ОЗТ при $N = \overline{0, 3}$; $M = \overline{0, 3}$ приведены в табл. 3.13 и на рис. 3.34–3.41.

Как видно из представленных результатов, увеличение значений N и M приводит к уменьшению погрешности аппроксимации температурного поля, которая стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$ и $M \rightarrow \infty$.

Таблица 3.13. Точность решения задачи в зависимости от значений N и M

N	M	Погрешность аппроксимации температурного распределения $I^0(\Delta), \%$	Погрешность аппроксимации искомой характеристики $\max_{y, \varphi} u(y, \varphi, \Delta^0) - q^*(y, \varphi) , \%$
0	0	27,83	74,94
0	1	16,52	68,87
1	1	3,96	15,74
1	2	1,72	15,94
2	2	0,43	4,39
2	3	0,16	2,44
3	3	0,031	0,32

В подавляющем большинстве практических ситуаций на первых этапах вычислительной процедуры при малых значениях N и M величина $I^0(\Delta^0)$ и соответствующее значение ошибки $\max_{y, \varphi} |u(y, \varphi, \Delta^0) - q^*(y, \varphi)|$ идентификации управляющего воздействия значительно превышают допустимую погрешность решения задачи. Эти этапы выполняются для того, чтобы получить решение, которое может служить начальным приближением на последующем шаге.

Приведем системы расчетных соотношений вида (3.153)–(3.155), соответствующие полученным результатам в классе управлений $N = \overline{0, 3}$, $M = \overline{0, 3}$.

1. В классе $N = M = 0$ постоянных управлений $u(y, \varphi) = \tilde{\Delta}_0$ конфигурация $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$ характеризуется двумя точками $z_j^0 = (y_j^0, \varphi_j^0)$, $j = 1, 2$ с предельно допустимыми, противоположными по знаку, отклонениями $I_{00}^0(\Delta^0)$ (рис. 3.34), и задача (3.151) сводится к решению относительно единственного параметра $\tilde{\Delta}_0$ управления, величины I_{00}^0 и неизвестной координаты φ_1^0 системы трех уравнений (система конкретизирована для рассматриваемого случая)

$$\begin{aligned} \theta(x^*, 1, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi^*) &= I_{00}^0; \\ \theta(x^*, 0, \varphi_1, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(0, \varphi_1) &= -I_{00}^0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, 0, \varphi_1, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(0, \varphi_1) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.167)$$

Далее, с увеличением значений N и M , в общем случае может возникать несколько вариантов конфигурации $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$ отвечающих системе (3.152).

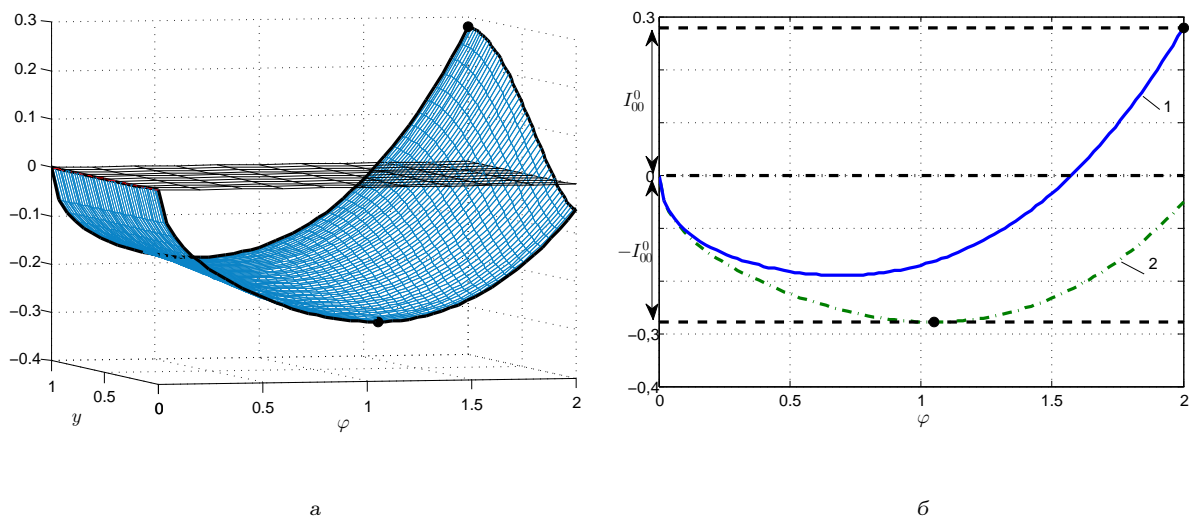


Рис. 3.34. Конфигурация погрешности аппроксимации температурного поля $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$, $y \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (а) и кривые 1 – при $y_1^0 = 1$; 2 – при $y_2^0 = 0$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (б) при $N = M = 0$

2. При $N = 0; M = 1$ неизвестными являются два параметра искомого управления $u^0(y, \varphi) = \tilde{\Delta}_0 \left(1 + \tilde{\Delta}_1^{(\varphi)} \varphi\right)$ и величина $I_{01}^0(\Delta^0)$, следовательно, разность $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$ содержит $R = 3$ точки $z_j^0 = (y_j^0, \varphi_j^0), j = \overline{1, 3}$ с предельно допустимыми отклонениями $I_{01}^0(\Delta^0)$, и система расчетных уравнений, соответствующая варианту рис. 3.35, имеет вид

$$\begin{aligned} \theta(x^*, 1, \varphi_1, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi_1) &= I_{01}^0; \\ \theta(x^*, 1, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi^*) &= I_{01}^0; \\ \theta(x^*, 0, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(0, \varphi^*) &= -I_{01}^0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, 1, \varphi_1, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi_1) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.168)$$

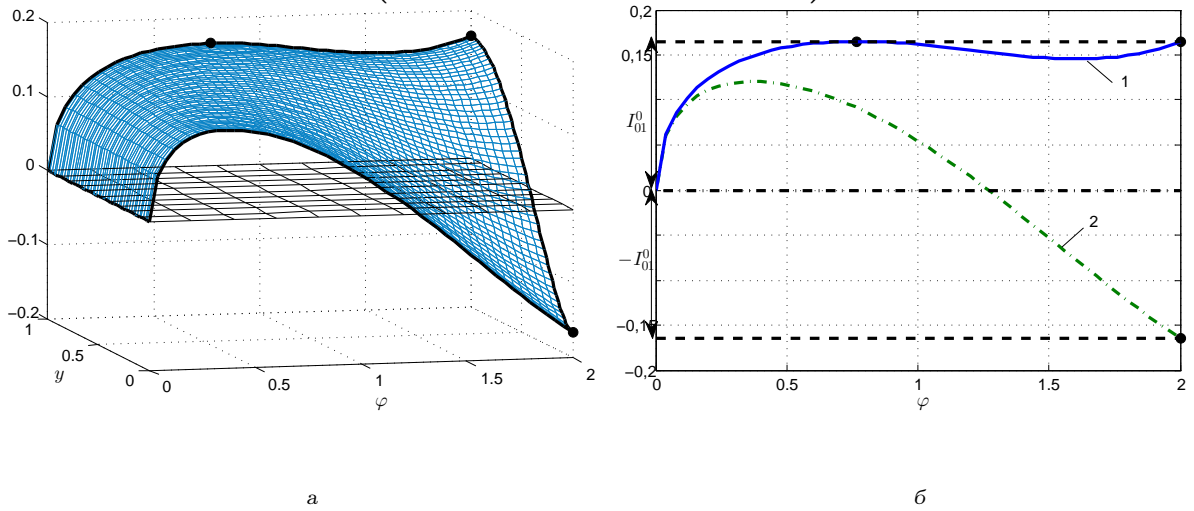


Рис. 3.35. Конфигурация погрешности аппроксимации температурного поля $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$, $y \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (а) и кривые 1 – при $y_1^0 = 1$; 2 – при $y_2^0 = 0$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (б) при $N = 0, M = 1$

3. Управление $u^0(y, \varphi) = \tilde{\Delta}_0 \left(1 + \tilde{\Delta}_1^{(y)} y\right) \cdot \left(1 + \tilde{\Delta}_1^{(\varphi)} \varphi\right)$ при значениях $N = 1; M = 1$, содержит три искомых параметра и величину $I_{11}^0(\Delta^0)$, тем самым конфигурация $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$ характеризуется $R = 4$ точками $z_j^0 = (y_j^0, \varphi_j^0), j = \overline{1, 3}$, в связи с чем, система расчетных уравнений, соответствующая конкретному варианту (рис. 3.36), записывается следующим образом

$$\begin{aligned} \theta(x^*, 1, \varphi_q, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi_q) &= (-1)^{q+1} I_{11}^0, \quad q = 1, 2; \\ \theta(x^*, 0, \varphi_3, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(0, \varphi_3) &= -I_{11}^0; \\ \theta(x^*, y_1, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_1, \varphi^*) &= I_{11}^0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, 1, \varphi_q, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi_q) \right) &= 0, \quad q = 1, 2; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, 0, \varphi_3, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(0, \varphi_3) \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta(x^*, y_1, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_1, \varphi^*) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.169)$$

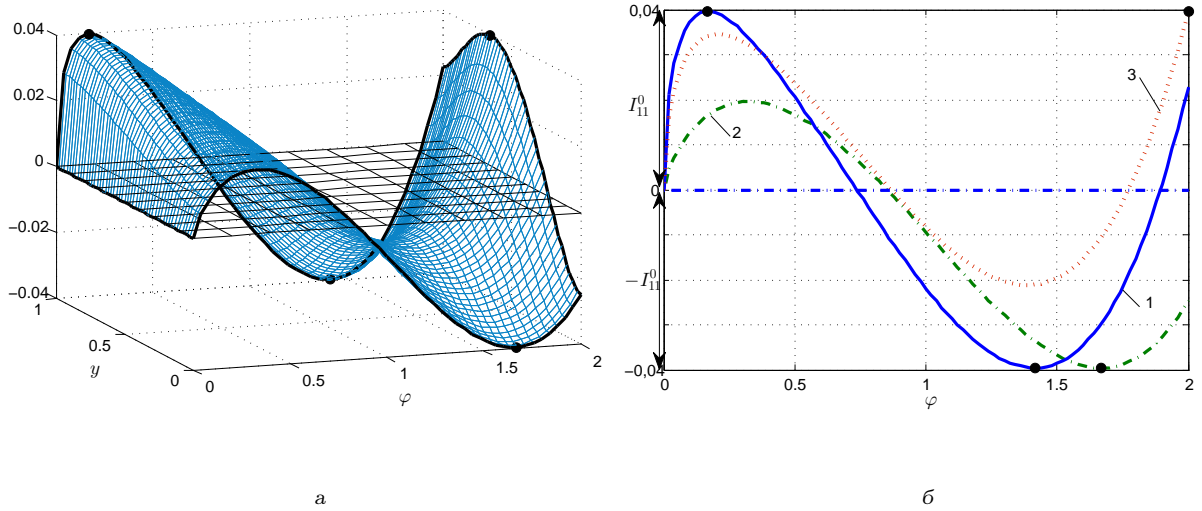


Рис. 3.36. Конфигурация погрешности аппроксимации температурного поля $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$, $y \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (а) и кривые 1 – при $y_1^0 = 1$; 2 – при $y_2^0 = 0$; 3 – при $y_3^0 = y_1$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (б) при $N = M = 1$

4. Случай $N = 1$; $M = 2$ соответствует управлению вида $u^0(y, \varphi) = \tilde{\Delta}_0 \left(1 + \tilde{\Delta}_1^{(y)} y\right) \cdot \left(1 + \tilde{\Delta}_1^{(\varphi)} \varphi + \tilde{\Delta}_2^{(\varphi)} \varphi^2\right)$, заданному вектором $\Delta = \left(\tilde{\Delta}_0, \tilde{\Delta}_1^{(y)}, \tilde{\Delta}_1^{(\varphi)}, \tilde{\Delta}_2^{(\varphi)}\right)$, содержащим четыре параметра, в соответствии с чем $R = 5$.

Расчетная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
 \theta(x^*, 1, \varphi_1, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi_1) &= -I_{12}^0; \\
 \theta(x^*, 1, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi^*) &= -I_{12}^0; \\
 \theta(x^*, 0, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(0, \varphi^*) &= -I_{12}^0; \\
 \theta(x^*, y_1, \varphi_2, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_1, \varphi_2) &= I_{12}^0; \\
 \theta(x^*, y_2, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_2, \varphi^*) &= I_{12}^0; \\
 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, 1, \varphi_1, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi_1) \right) &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, y_1, \varphi_2, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_1, \varphi_2) \right) &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta(x^*, y_1, \varphi_2, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_1, \varphi_2) \right) &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta(x^*, y_2, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_2, \varphi^*) \right) &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.170}$$

соответствующая пространственная конфигурация температурной невязки представлена на рисунке 3.37.

5. Для рассматриваемого примера (3.159), (3.160), (3.164) при $N = M = 2$ система расчетных уравнений, соответствующая конфигурации, представлен-

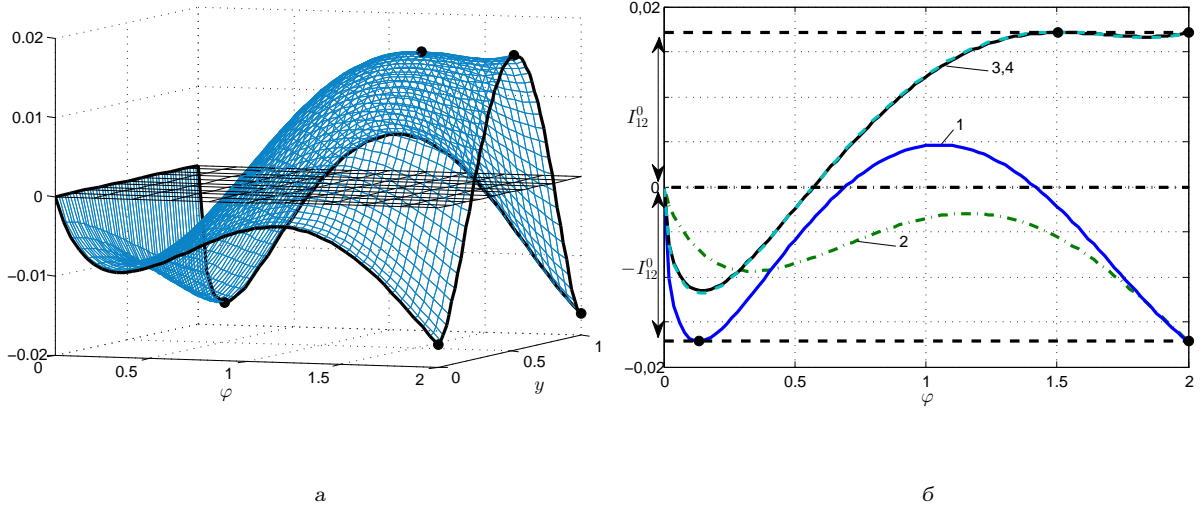


Рис. 3.37. Конфигурация погрешности аппроксимации температурного поля $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$, $y \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (а) и кривые 1 – при $y_1^0 = 1$; 2 – при $y_2^0 = 0$; 3 – при $y_3^0 = y_1$, 4 – при $y_4^0 = y_2$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (б) при $N = 1, M = 2$

ной на рис. 3.38, имеет вид

$$\begin{aligned}
 \theta(x^*, 1, \varphi_q, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi_q) &= (-1)^q I_{22}^0, \quad q = \overline{1, 3}; \\
 \theta(x^*, 0, \varphi_4, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(0, \varphi_4) &= I_{22}^0; \\
 \theta(x^*, 0, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(0, \varphi^*) &= I_{22}^0; \\
 \theta(x^*, y_1, \varphi_5, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_1, \varphi_5) &= -I_{22}^0; \\
 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, 1, \varphi_q, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi_q) \right) &= 0, \quad q = \overline{1, 3}; \\
 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, 0, \varphi_4, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(0, \varphi_4) \right) &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta(x^*, y_1, \varphi_5, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_1, \varphi_5) \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.171}$$

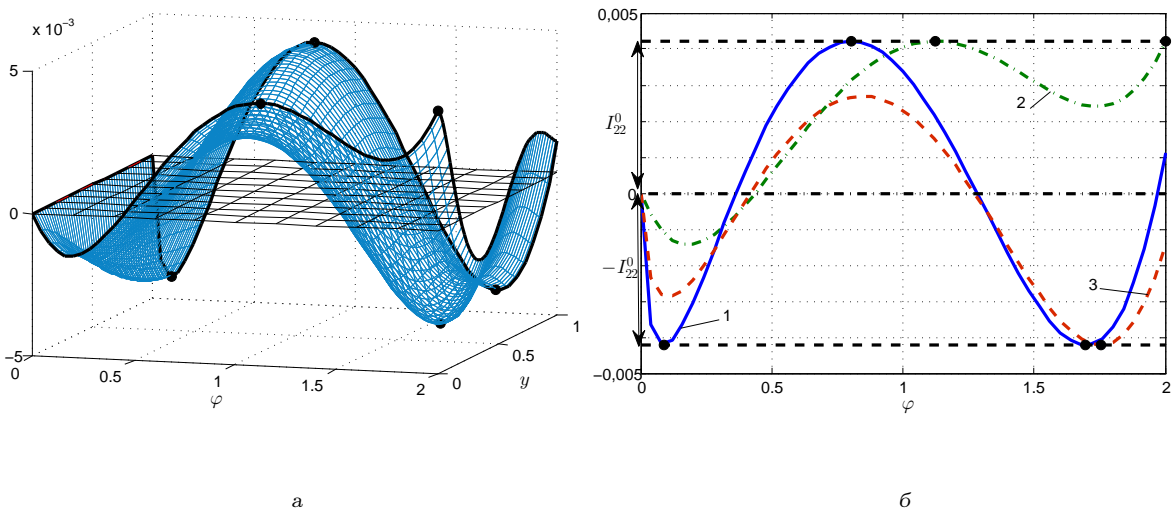


Рис. 3.38. Конфигурация погрешности аппроксимации температурного поля $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$, $y \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (а) и кривые 1 – при $y_1^0 = 1$; 2 – при $y_2^0 = 0$; 3 – при $y_3^0 = y_1$, 4 – при $y_4^0 = y_2$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (б) при $N = 2, M = 2$

6. Поиск управляющего воздействия $u^0(y, \varphi) = \tilde{\Delta}_0 \left(1 + \tilde{\Delta}_1^{(y)} y + \tilde{\Delta}_2^{(y)} y \right) \times \left(1 + \tilde{\Delta}_1^{(\varphi)} \varphi + \tilde{\Delta}_2^{(\varphi)} \varphi^2 + \tilde{\Delta}_3^{(\varphi)} \varphi^3 \right)$ в классе $N = 2, M = 3$ соответствует наличию семи точек с предельно допустимыми отклонениями $I_{23}^0(\Delta^0)$, что приводит к конфигурации температурного отклонения, представленной на рис. 3.39, и к системе уравнений

$$\begin{aligned}
 \theta(x^*, 1, \varphi_q, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi_q) &= (-1)^{q+1} I_{23}^0, \quad q = 1, 2; \\
 \theta(x^*, 0, \varphi_3, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(0, \varphi_3) &= I_{23}^0; \\
 \theta(x^*, 0, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(0, \varphi^*) &= I_{23}^0; \\
 \theta(x^*, y_1, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_1, \varphi^*) &= -I_{23}^0; \\
 \theta(x^*, y_2, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_2, \varphi^*) &= I_{23}^0; \\
 \theta(x^*, y_3, \varphi_4, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_3, \varphi_4) &= I_{23}^0; \\
 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, 1, \varphi_q, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi_q) \right) &= 0, \quad q = 1, 2; \\
 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, 0, \varphi_3, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(0, \varphi_3) \right) &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, y_3, \varphi_4, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_3, \varphi_4) \right) &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta(x^*, y_3, \varphi_4, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_3, \varphi_4) \right) &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta(x^*, y_1, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_1, \varphi^*) \right) &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left(\theta(x^*, y_2, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_2, \varphi^*) \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.172}$$

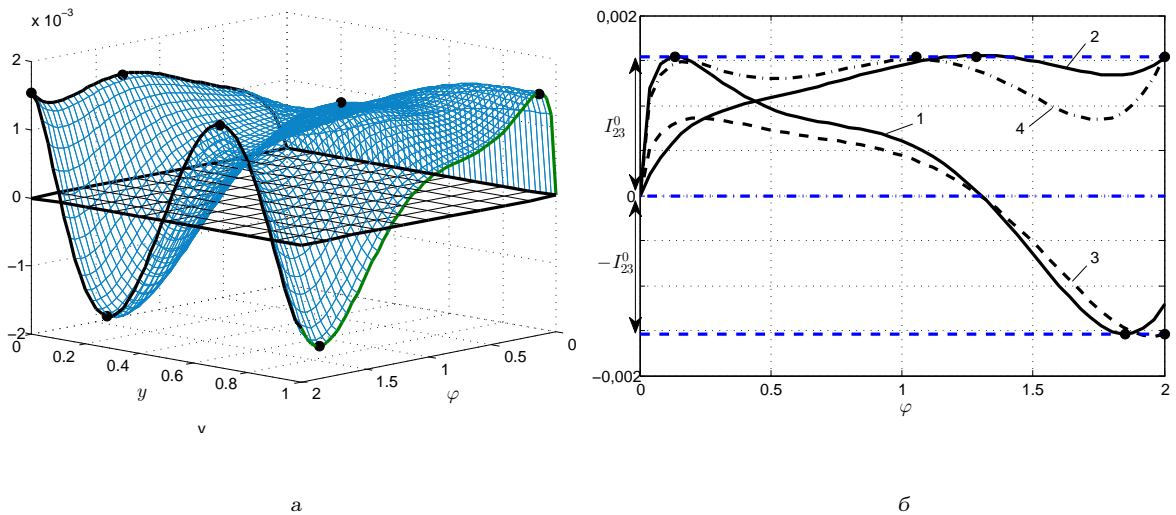


Рис. 3.39. Конфигурация погрешности аппроксимации температурного поля $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$, $y \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (а) и кривые 1 – при $y_1^0 = 1$; 2 – при $y_2^0 = 0$; 3 – при $y_3^0 = y_1$, 4 – при $y_4^0 = y_2$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (б) при $N = 2, M = 3$

7. При $N = M = 3$ количество сечений y_k , на которых достигаются предельно допустимые отклонения, опять увеличивается, что ведет к возрастанию числа возможных вариантов конфигурации $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$. Результирующая система уравнений, обеспечивающая решение задачи (3.151), соответствует варианту, представленному на рис. 3.40, и имеет вид

$$\begin{aligned}
&\theta(x^*, 1, \varphi_q, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi_q) = I_3^0, \quad q = 1, 2; \\
&\theta(x^*, 1, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi^*) = I_{33}^0; \\
&\theta(x^*, y_1, \varphi_3, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_1, \varphi_3) = I_{33}^0; \\
&\theta(x^*, y_2, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_2, \varphi^*) = I_{33}^0; \\
&\theta(x^*, y_3, \varphi_4, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_3, \varphi_4) = -I_{33}^0; \\
&\theta(x^*, y_4, \varphi_5, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_4, \varphi_5) = -I_{33}^0; \\
&\theta(x^*, y_5, \varphi_6, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_5, \varphi_6) = -I_{33}^0; \\
&\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, 1, \varphi_q, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(1, \varphi_q) \right) = 0, \quad q = 1, 2; \\
&\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, y_1, \varphi_3, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_1, \varphi_3) \right) = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial y} \left(\theta(x^*, y_1, \varphi_3, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_1, \varphi_3) \right) = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, y_3, \varphi_4, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_3, \varphi_4) \right) = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial y} \left(\theta(x^*, y_3, \varphi_4, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_3, \varphi_4) \right) = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, y_4, \varphi_5, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_4, \varphi_5) \right) = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial y} \left(\theta(x^*, y_4, \varphi_5, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_4, \varphi_5) \right) = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\theta(x^*, y_5, \varphi_6, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_5, \varphi_6) \right) = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial y} \left(\theta(x^*, y_5, \varphi_6, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_5, \varphi_6) \right) = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial y} \left(\theta(x^*, y_2, \varphi^*, \tilde{\Delta}^0) - \theta^*(y_2, \varphi^*) \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.173}$$

Погрешность $\max_{y, \varphi} |u(y, \varphi, \Delta^0) - q^*(y, \varphi)|$ приближения идентифицируемой функции в общем случае убывает с ростом N и M , но их взаимосвязь имеет немонотонный характер. При практической реализации поочередное увеличение значений N и M заканчивается при выполнении на очередном l -ом шаге неравенства $I_l^0(\Delta) \leq \delta_1$ или $|I_l^0(\Delta) - I_{l-1}^0(\Delta)| \leq \delta_2$, где δ_1 и δ_2 задаются априори. Опыт решения конкретных задач показывает, что в большинстве ситуаций при $\delta_1 \leq 1\%$ обеспечивается погрешность идентификации $u(y, \varphi)$ до 10%, а при $\delta_1 \leq 0.1\%$ – в пределах одного процента. Максимальные отклонения наблюдаются в «угловых» точках – в последний момент времени ($y^0 = 1, \varphi^0 = \varphi^*$)

или $(y^0 = 0, \varphi^0 = \varphi^*)$, или в начале интервала идентификации $(y^0 = 1, \varphi^0 = 0)$. Варианты пространственного распределения ошибки аппроксимации искомой плотности теплового потока, соответствующие вариантам $N = 2, M = 2$ и $N = 3, M = 3$, и обеспечивающие погрешность в 4.39% и 0.32% соответственно, представлены на рисунке 3.41.

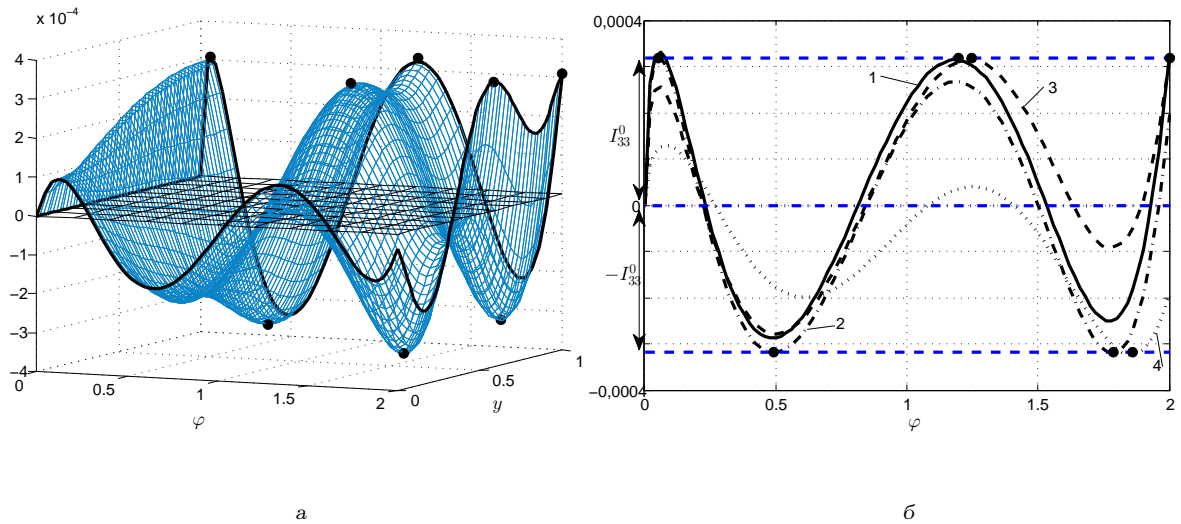


Рис. 3.40. Конфигурация погрешности аппроксимации температурного поля $\theta(x^*, y, \varphi, \Delta^0) - \theta^*(y, \varphi)$, $y \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (а) и кривые 1 – при $y_1^0 = 1$; 2 – при $y_2^0 = y1$; 3 – при $y_3^0 = y2$, 4 – при $y_4^0 = y3$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$ (б) при $N = 3, M = 3$

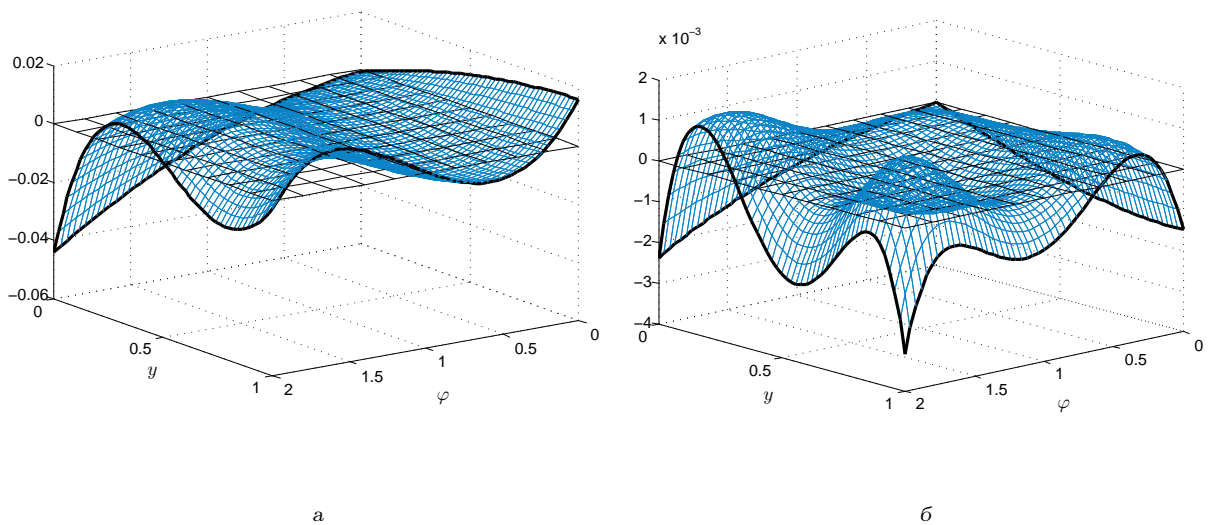


Рис. 3.41. Погрешность аппроксимации идентифицируемого воздействия $u(y, \varphi, \Delta^0) - q^*(y, \varphi)$, $y \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, \varphi^*]$: (а) при $N = M = 2$; (б) при $N = 3, M = 3$

3.7. Выводы по главе 3

1. Разработана совокупность методов минимаксной оптимизации для решения линейных одномерных внутренних, граничных и ретроспективных обратных задач теплопроводности по идентификации функции внутренних сосредоточенных или пространственно-распределенных воздействий, сосредоточенных граничных управлений и пространственно распределенного начального состояния на компактном множестве кусочно-параболических функций.
2. Разработан метод минимаксной оптимизации для решения нелинейных коэффициентных обратных задач теплопроводности по восстановлению зависящих от температуры теплофизических характеристик объекта на компактном множестве полиномиальных функций.
3. Выявлены специфические особенности предметной области при решении каждого типа задач, позволяющие установить конфигурацию температурной невязки, на основе чего с помощью альтернансного метода возможно однозначным образом составить систему расчетных соотношений.
4. Проведен анализ зависимости точности решения ОЗТ от числа учитываемых параметров параметрического представления оптимального управляющего воздействия, а также от основных факторов: пространственной координаты точки регистрации экспериментальных данных и длительности интервала идентификации.
5. Разработан метод минимаксной оптимизации для решения двумерной граничной обратной задачи теплопроводности, распространяющий результаты решения одномерных задач на двумерную область.
6. Приведены конкретные численные результаты решения широкого круга, охватывающего основные области теплофизических исследований, обратных задач теплопроводности: линейных и нелинейных; рассматриваемых на одномерных или двумерных пространственных областях; обеспечивающих идентификацию внутренних и граничных управлений, а также основные теплофизические характеристики. Результаты подтверждают полу-

ченые общие выводы о качественных базовых характеристиках решения рассматриваемого круга ОЗТ, а также о регулярном характере параметрической оптимизации, обеспечивающей сходимость к точному решению с ростом числа учитываемых параметров.

Глава 4

Метод модальной идентификации в обратных задачах теплопроводности

Существенный интерес при анализе процессов технологической теплофизики представляет более сложный класс обратных задач теплопроводности, позволяющих восстанавливать искомую пространственно-временную характеристику, рассматриваемую в качестве неизвестной функции временной и пространственной переменных. В данной главе предлагается специальный метод параметрической оптимизации по восстановлению пространственно-временных воздействий на примере идентификации внутреннего источника тепла в одномерной ОЗТ и определения граничного управляющего воздействия в двумерной обратной задаче теплопроводности.

Непосредственное применение метода минимаксной оптимизации в данном случае резко усложняется необходимостью рассмотрения двумерных (или более высокой размерности) параметризуемых задач чебышевских приближений с функцией максимума, имеющей достаточно сложную конфигурацию на множестве пространственно - временных переменных.

Идея предлагаемого метода базируется на модальном описании температурного поля и идентифицируемых воздействий в форме разложения в ряды одинаковой кратности по собственным функциям начально - краевой задачи. Представление экспериментальных зависимостей температуры в N точках её наблюдения в виде приближенных аналитических решений прямой задачи теплопроводности, описываемых в форме усеченного ряда, содержащего N первых его членов, приводит к замкнутой системе алгебраических уравнений. Полученные в результате решения этой системы N коэффициентов ряда, являющихся модальными переменными температурного поля, обеспечивают переход к соответствующим временным модам искомого воздействия, непосредственная связь между которыми устанавливается известными дифференциальными уравнениями модального описания процессов нестационарной теплопроводности.

Тем самым, идентифицируемые характеристики восстанавливаются по их модальным составляющим в форме, подобной приближенному описанию тем-

пературного поля, в виде суммы N членов ряда разложения по собственным функциям.

Основное содержание данной главы изложено в работах [54; 63; 80; 82].

Методы модальной идентификации, позволяющие восстанавливать искомые пространственно-временные характеристики, представлены в рамках общей совокупности методов параметрической оптимизации и также отражены на рис. 3.1.

4.1. Метод модальной идентификации внутреннего пространственно-временного управления

4.1.1. Постановка и решение задачи модальной идентификации внутреннего управления

Рассматривается модель нестационарного процесса теплопроводности с внутренним тепловыделением, заданная линейным одномерным неоднородным уравнением Фурье в относительных единицах при краевых условиях третьего рода:

$$\frac{\partial \theta(x, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 \theta(x, \varphi)}{\partial x^2} + F(x, \varphi); \quad 0 < x < 1; \quad 0 < \varphi \leq \varphi^*, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(1, \varphi)}{\partial x} + \text{Bi} \cdot \theta(1, \varphi) &= 0; & \frac{\partial \theta(0, \varphi)}{\partial x} &= 0; \\ \varphi \in [0, \varphi^*], \quad \theta(x, 0) &= 0, & x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

В такой постановке ОЗТ пространственно-временное управление $F(x, \varphi)$ по мощности внутреннего тепловыделения подлежит определению при известных прочих характеристиках.

Полагается, что функция состояния объекта $\theta(x, \varphi)$ оценивается с некоторой точностью с помощью конечного числа N наблюдающих устройств по области изменения пространственной координаты $x \in [0, 1]$. В результате считаются известными температурные зависимости $\theta_i^*(\varphi) = \theta(x_i^*, \varphi)$ в некоторых фиксированных точках $x_i^*, i = \overline{1, N}$.

Требуется восстановить пространственно-временное воздействие $F(x, \varphi)$, подчиненное условию

$$F(x, \varphi) \in V, \quad \varphi > 0, \quad x \in [0, 1] \quad (4.3)$$

принадлежности заданному классу функций V , минимизирующее отклонение от заданных зависимостей $\theta_i^*(\varphi)$ точного решения $\theta(x_i^*, \varphi)$ краевой задачи (4.1), (4.2), соответствующего искомым функции $F^0(x, \varphi)$.

Задача идентификации рассматривается как поиск управляющего воздействия $F(x, \varphi)$, при использовании которого результирующая пространственно распределенная функция $\theta(x, \varphi)$ аппроксимирует наилучшим в определенном смысле образом конечное число N экспериментальных температурных зависимостей $\theta_i^*(\varphi)$. При этом получение полной информации о состоянии бесконечномерного ОРП в принципе невозможно, и результат измерения совокупности N зависимостей температур $\theta^*(\varphi) = \{\theta_i^*(\varphi)\} = \|\theta_1^*(\varphi), \theta_2^*(\varphi), \dots, \theta_N^*(\varphi)\|^T$ всегда отличается от истинного значения $\theta(x, \varphi)$.

Для поиска $F(x, \varphi)$ представим функцию $\theta(x, \varphi)$ в виде ее разложения в бесконечный сходящийся в среднем [145] ряд по полной ортогональной системе собственных функций $\{\phi_n(\mu_n, x)\} = \{\cos(\mu_n x)\}$ краевой задачи (задачи Штурма-Лиувилля). Применение конечного интегрального преобразования [160]

$$\bar{\theta}(\mu_n, \varphi) = \int_0^1 \theta(x, \varphi) K(\mu_n, x) dx = \int_0^1 \theta(x, y, \varphi) \cos \pi n x dx \quad (4.4)$$

с ядром $K(\mu_n, x) = \cos(\mu_n x)$ приводит к представлению $\theta(x, \varphi)$ в форме ряда, каждый член которого представляет собой произведение двух функций одной переменной – времени или пространственной координаты соответственно

$$\theta(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi) \cos(\mu_n x). \quad (4.5)$$

При известных собственных числах μ_n^2 и собственных функциях $\cos(\mu_n x)$, определяемых лишь внутренней структурой объекта, температура $\theta(x, \varphi)$ однозначно определяется коэффициентами $\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)$ ряда Фурье (4.5) – модальными переменными [160; 168], для нахождения которых можно использовать экспериментальные значения $\theta_i^*(\varphi)$.

Для этого составляется система независимых алгебраических уравнений, аппроксимирующих экспериментальные температурные зависимости $\theta_i^*(\varphi)$ в контролируемых точках x_i^* , $i = \overline{1, N}$ в каждый момент времени $\varphi \in \{\varphi_j\}$, $j = \overline{1, K}$ регистрации экспериментальных данных, относительно неизвестных

временных мод $\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)$. Максимальное число мод $\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)$, которые могут быть учтены при приближенном описании $\theta(x_i^*, \varphi)$ в виде усеченного ряда, определяется количеством линейно независимых строк системы уравнений, и, соответственно, равно числу точек контроля N

$$\theta_i^*(\varphi) \approx \sum_{n=1}^N \bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi) \cos(\mu_n x_i^*), \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.6)$$

Ограничиваясь рассмотрением N числа составляющих ряда и пренебрегая погрешностями измерений, запишем систему (4.6) в матричном виде

$$\boldsymbol{\theta}^*(\varphi) = \boldsymbol{\Phi}(\mu, x^*) \times \bar{\boldsymbol{\theta}}(\varphi), \quad (4.7)$$

где строки матрицы

$$\boldsymbol{\Phi}(\mu, x^*) = \|\cos(\mu_n x_i^*)\| = \begin{vmatrix} \cos(\mu_1 x_1^*) & \cos(\mu_2 x_1^*) & \dots & \cos(\mu_N x_1^*) \\ \cos(\mu_1 x_2^*) & \cos(\mu_2 x_2^*) & \dots & \cos(\mu_N x_2^*) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\mu_1 x_N^*) & \cos(\mu_2 x_N^*) & \dots & \cos(\mu_N x_N^*) \end{vmatrix} \quad (4.8)$$

содержат значения всех $n = \overline{1, N}$ собственных функций объекта для каждой фиксированной точки x_i^* , а элементы ее столбцов рассчитаны для всех точек наблюдения $x_i^*, i = \overline{1, N}$ при зафиксированном номере n собственной функции; вектор-столбец $\bar{\boldsymbol{\theta}}(\varphi)$ содержит значения временных мод $\bar{\boldsymbol{\theta}}(\varphi) = \{\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)\} = \|\bar{\theta}_1(\mu_1, \varphi), \bar{\theta}_2(\mu_2, \varphi), \dots, \bar{\theta}_N(\mu_N, \varphi)\|^T$.

Определение значений любого конечного числа N временных мод $\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)$ по приближенной модели ОРП (4.7) возможно, если объект обладает свойством наблюдаемости, для чего достаточно, чтобы пространственные координаты точек наблюдения x_i^* не являлись нулями ни одной из собственных функций $\phi_n(\mu_n, x_i^*)$ краевой задачи (4.1), (4.2) [198]. На основе системы уравнений (4.7), преобразованной к виду

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}(\varphi) = \boldsymbol{\Phi}(\mu, x^*)^{-1} \times \boldsymbol{\theta}^*(\varphi), \quad (4.9)$$

стандартными численными методами рассчитываются значения N временных мод $\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)$ в каждый из фиксированных моментов времени φ_j .

Пространственно-временное управление $F(x, \varphi)$ также представляется в виде разложения в аналогичный (4.5) ряд по собственным функциям

$$F(x, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{f}_n(\mu_n, \varphi) \cos(\mu_n x), \quad (4.10)$$

и для поиска модальных переменных $\bar{f}_n(\mu_n, \varphi)$ в (4.10) используется модальное описание параболического объекта (4.1), (4.2) в виде системы независимых дифференциальных уравнений первого порядка относительно N учитываемых мод $\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)$ [145; 160]

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)}{d\varphi} &= -\mu_n^2 \bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi) + \bar{f}_n(\mu_n, \varphi), \quad n = \overline{1, N}; \\ \bar{\theta}_n(\mu_n, 0) &= \bar{\theta}_0(\mu_n) = 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

с автономными управлениями $\bar{f}_n(\mu_n, \varphi)$ по модам разложения $F(x, \varphi)$. Таким образом, система (4.11) предоставляет возможность построения N несвязанных друг с другом контуров восстановления отдельных мод распределенного управляющего воздействия

$$\bar{f}_n(\mu_n, \varphi) = \mu_n^2 \bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi) + \frac{d\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)}{d\varphi}, \quad n = \overline{1, N}. \quad (4.12)$$

При практической реализации в современных средствах моделирования динамических систем вычисление $\bar{f}_n(\mu_n, \varphi)$ может быть реализовано путем моделирования соотношения

$$\bar{f}_n(\mu_n, \varphi) \approx \mu_n^2 \left(\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi) + T_n \frac{d\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)}{d\varphi} \right), \quad n = \overline{1, N} \quad (4.13)$$

на основе следующей схемы (рис. 4.1) при $K_0 \gg 1$ и $T_n = \frac{1}{\mu_n^2}$, где $\tilde{\theta}_n(p)$ и $\tilde{f}_n(p)$ – преобразованные по Лапласу величины $\bar{\theta}_n(\mu_n, \varphi)$ и $\bar{f}_n(\mu_n, \varphi)$.

Искомое управление $F(x, \varphi)$ восстанавливается в форме ряда (4.10) при учете конечного числа N слагаемых.

Система идентификации пространственно распределенного воздействия в виде совокупности несвязанных контуров идентификации учитываемых мод управляемой величины по предварительно рассчитанным коэффициентам разложения экспериментальных температурных зависимостей в ряд по собственным функциям имеет следующий вид (рис. 4.2).

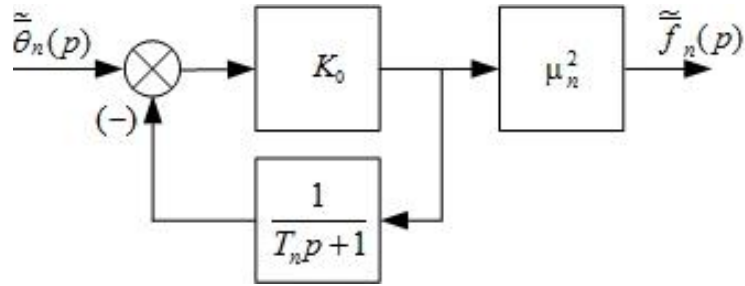


Рис. 4.1. Структурная схема восстановления модальных составляющих $\tilde{f}_n(p)$

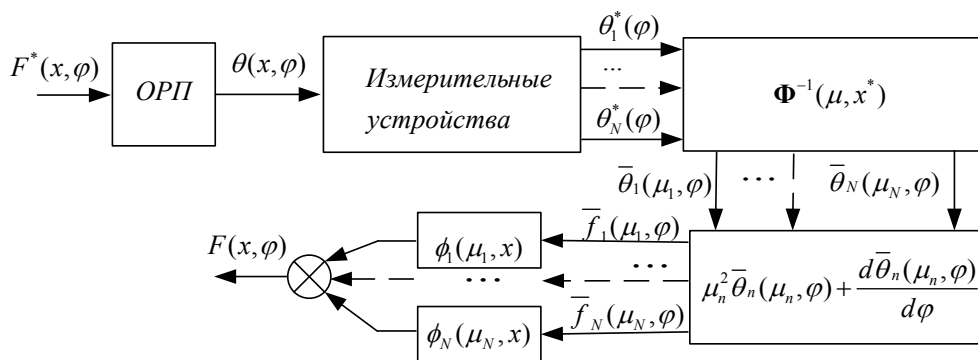


Рис. 4.2. Структура системы идентификации пространственно-временного управляющего воздействия параболического ОРП

4.1.2. Задача оптимального расположения контролируемых устройств

Число и координаты точек контроля температуры во многом определяют точность решения рассматриваемых обратных задач, и задача оптимального размещения измерительных устройств, минимизирующего погрешность восстановления $F(x, \varphi)$, имеет важное значение.

Рассматривается задача определения при заданном числе N наблюдающих устройств координат $\Delta = (x_i^*), i = \overline{1, N}$ их расположения таким образом, чтобы оцениваемое в конце интервала идентификации ($\varphi = \varphi^*$) в равномерной метрике отклонение аппроксимирующей зависимости $\theta_N(x, \varphi^*, \Delta)$, полученной по результатам измерений $\theta_i^*(\varphi) = \theta(x_i^*, \varphi), i = \overline{1, N}$, от требуемого состояния

$\theta^{**}(x, \varphi^*)$ по всей области изменения $x \in [0, 1]$ было минимально возможным

$$I_2(\Delta) = \max_{x \in [0,1]} |\theta_N(x, \varphi^*, \Delta) - \theta^{**}(x, \varphi^*)| \rightarrow \min_{\Delta}. \quad (4.14)$$

Здесь $\theta_N(x, \varphi^*, \Delta)$ определяется в форме суммы N членов ряда вида (4.5) с модальными переменными $\bar{\theta}_n(p)$, вычисляемыми согласно (4.9).

Функция $\theta^{**}(x, \varphi^*) \in [\theta(x, \varphi^*), \theta(x, \varphi^*, \Delta)]$ выражает желаемое температурное распределение во всей пространственной области $x \in [0, 1]$ в конце процесса идентификации ($\varphi = \varphi^*$).

В предположении, что на этапе планирования эксперимента существует возможность получения полной экспериментальной информации о $\theta(x, \varphi^*)$ (например, измерение температуры с помощью датчиков, число которых значительно превышает число N , и последующая аппроксимация полученных результатов непрерывной функцией), в качестве $\theta^{**}(x, \varphi^*)$ может рассматриваться точное значение $\theta(x, \varphi^*)$.

На практике чаще всего такая информация недоступна, и тогда в качестве $\theta^{**}(x, \varphi^*)$ может быть использовано точное решение $\theta(x, \varphi^*, \Delta)$ прямой задачи (4.1), (4.2) с внешним воздействием $F(x, \varphi^*, \Delta)$ вида (4.3), которое находится для каждого вектора Δ описываемым методом модальной идентификации.

Решение задачи (4.14) также основывается на свойствах оптимальных температурных распределений, обладающих при оптимальных значениях координат $\Delta^0 = [(x_1^0), (x_2^0), \dots, (x_N^0)]$ наилучшим равномерным приближением к требуемому состоянию $\theta^{**}(x, \varphi^*), x \in [0, 1]$ [142]. На их основании в отдельных точках $(x_j^{al}), j = \overline{1, R}$ на интервале $x \in [0, 1]$ достигаются предельные отклонения расчетной температуры $\theta_N(x_j^{al}, \varphi^*, \Delta^0)$ от заданной $\theta^{**}(x, \varphi^*)$, равные $\pm I_2(\Delta^0)$, и тем самым, устанавливается конфигурация погрешности $\theta_N(x, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^{**}(x, \varphi^*)$ аппроксимации желаемого температурного распределения $\theta^{**}(x, \varphi^*)$.

Решение задачи (4.14), соответствующее оптимальному вектору значений $\Delta_i^0, i = \overline{1, N}$, обладает свойствами чебышевского альтернанса, в соответствии с чем, при $\varphi = \varphi^*$ на интервале $x \in [0, 1]$ в точках (x_j^{al}) , число которых R на единицу превышает количество N искомым координат, достигаются знакопередающиеся максимальные по величине отклонения, равные $\pm (\theta_N(x_j^{al}, \varphi^*, \Delta^0) - \theta(x_j^{al}, \varphi^*))$ при использовании информации в виде $\theta(x, \varphi^*)$ или $\pm (\theta_N(x_j^{al}, \varphi^*, \Delta^0) - \theta(x_j^{al}, \varphi^*, \Delta^0))$ при использовании $\theta(x, \varphi^*, \Delta)$.

Данное свойство приводит к замкнутой системе $N + 1$ соотношений для предельных значений температурных невязок в этих точках относительно неизвестных — значений координат (x_j^{al}) точек альтернанса и величины предельного отклонения $I_2(\Delta^0)$. Система дополняется условиями существования экстремума

$$\frac{\partial}{\partial x} (\theta_N(x_{j_s}^{al}, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^{**}(x_{j_s}^{al}, \varphi^*))$$

во внутренних точках $x_{j_s}^{al} \in \{x_j^{al}\}$, $j = \overline{1, R}$ интервала $[0, 1] \ni x$ и принимает вид

$$\theta_N(x_j^{al}, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^{**}(x_j^{al}, \varphi^*) = \pm(-1)^{j+1} I_2(\Delta^0); \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\theta_N(x_{j_s}^{al}, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^{**}(x_{j_s}^{al}, \varphi^*)) = 0, \quad (4.16)$$

где $\theta^{**}(x_s^{al}, \varphi^*) = [\theta(x_j^{al}, \varphi^*), \theta(x_j^{al}, \varphi^*, \Delta^0)]$ соответствует $\theta(x, \varphi^*)$ или $\theta(x, \varphi^*, \Delta)$.

4.1.3. Пример решения обратной задачи теплопроводности

В качестве примера рассматривалась ОЗТ, в которой $\theta^*(\varphi)$ определяется по точному решению $\theta(x, \varphi)$ краевой задачи (4.1), (4.2) при пространственно-временном воздействии

$$F^*(x, \varphi) = \sin(\omega\pi\varphi) (e^{\beta x} - 1). \quad (4.17)$$

Выражение для $\theta(x, \varphi)$ получено на основе соотношений (4.1), (4.2), (2.71) с учетом функции Грина для рассматриваемого объекта в виде [134; 135; 145] (3.9), где μ_n — пронумерованные в порядке возрастания корни уравнения (2.24).

С учетом этого, выражение для температурного поля (при $\omega \neq 1, 2, \dots$) принимает вид

$$\begin{aligned} \theta(x, \varphi) = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos(\mu_n x) \times \\ & \times \frac{1}{\mu_n^4 + (\omega\pi)^2} \left(\mu_n^2 \sin(\omega\pi\varphi) - \omega\pi \cos(\omega\pi\varphi) + \omega\pi e^{-\mu_n^2 \varphi} \right) \times \\ & \times \left(\frac{1}{\beta^2 + \mu_n^2} (e^\beta (\beta \cos \mu_n + \mu_n \sin \mu_n) - \beta) - \frac{\sin \mu_n}{\mu_n} \right). \quad (4.18) \end{aligned}$$

Модельная температурная зависимость $\theta^*(\varphi)$ получена на основе (4.18) при $x = x^*$.

Результаты решения ОЗТ при $N = \overline{3-8}$ при следующих исходных данных $\varphi^* = 1.2; \omega = 0.25; \beta = 2.6; \text{Bi} = 0.4$ представлены в табл. 4.1 и на рис. 4.3–4.6.

Сначала в результате решения задачи планирования температурных измерений (4.14) в классе $N = \overline{3-8}$, где в качестве $\theta^{**}(x, \varphi^*)$ рассматривалось точное решение (4.18) для всех $x \in [0, 1]$, получены координаты точек контроля температуры:

$$x^0 = [0.185; 0.564; 0.8813] \text{ при } N = 3;$$

$$x^0 = [0.1556; 0.439; 0.703; 0.934] \text{ при } N = 4;$$

$$x^0 = [0.1115; 0.337; 0.562; 0.772; 0.951] \text{ при } N = 5;$$

$$x^0 = [0.099; 0.289; 0.476; 0.655; 0.818; 0.9543] \text{ при } N = 6;$$

$$x^0 = [0.072; 0.228; 0.389; 0.561; 0.728; 0.884; 0.949] \text{ при } N = 7;$$

$$x^0 = [0.0707; 0.217; 0.345; 0.495; 0.645; 0.750; 0.906; 0.9558] \text{ при } N = 8,$$

обеспечивающие минимальную ошибку равномерного приближения (4.3).

Погрешность аппроксимации температурного состояния $\theta_N(x, \varphi, \Delta^0) - \theta^{**}(x, \varphi^*)$ возрастает с течением времени и достигает максимального значения при $\varphi = \varphi^*$ (рис. 4.4), поэтому задача определения оптимального размещения устройств измерения температуры решается в конечный момент времени.

Данные, представленные в табл. 4.1, показывают уменьшение погрешности аппроксимации температурного состояния и идентифицируемого пространственно-временного воздействия $F(x, \varphi)$.

Погрешность $F(x, \varphi^*) - F^*(x, \varphi^*)$ приближения $F(x, \varphi)$ также увеличивается с течением времени (рис. 4.6), при этом максимальная ошибка $\max_{x, \varphi} |F(x, \varphi) - F^*(x, \varphi)|$, как правило, достигается на одной из границ пространственной области и вблизи неё; здесь — на границе $x = 1$ (рис. 4.5, 4.6). На остальном диапазоне изменения пространственной переменной ($x < 1$) погрешность существенно (в два–три раза) меньше максимальной.

Неучтенные системой идентификации моды $\bar{f}_n(\mu_n, \varphi)$, $n = \overline{N+1, \infty}$ управляющего воздействия дают некомпенсируемое отклонение полученного решения от истинного значения, определяя, тем самым, качество восстановления $F(x, \varphi)$.

Таблица 4.1. Погрешность $\varepsilon_\theta^0 = \max_{x,\varphi} |\theta_N(x, \varphi, \Delta^0) - \theta^{**}(x, \varphi^*)|$ приближения температуры и ошибка $\varepsilon_u^0 = \max_{x,\varphi} |F(x, \varphi) - F^*(x, \varphi)|$ аппроксимации граничного управления при $N = \overline{3, 8}$, $\varphi^* = 1.2$;

N	3	4	5	6	7	8
$\bar{\varepsilon}_\theta, \%$	0.3997	0.1443	0.0710	0.0488	0.0312	0.0276
$\bar{\varepsilon}_u, \%$	21.70	15.1540	11.8328	9.1138	7.7700	5.2925

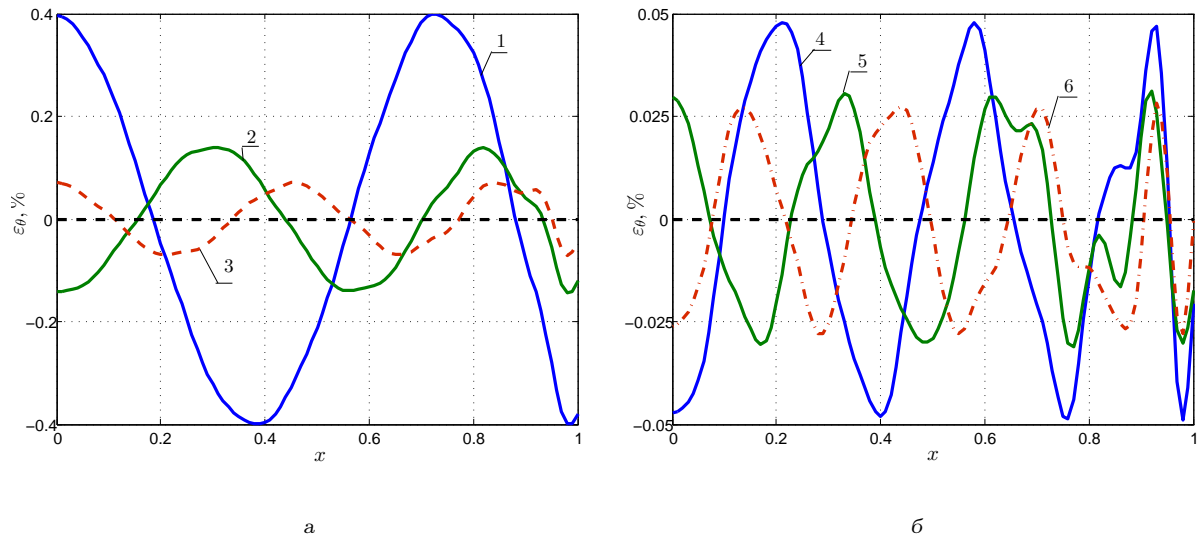


Рис. 4.3. Погрешность приближения температуры $\varepsilon_\theta(\varphi) = \frac{\theta_N(x, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^{**}(x, \varphi^*)}{\theta_{\max}^*} \cdot 100\%$: 1 – при $N = 3$; 2 – при $N = 4$; 3 – при $N = 5$; (а) и 4 – при $N = 6$; 5 – при $N = 7$; 6 – при $N = 8$; (б)

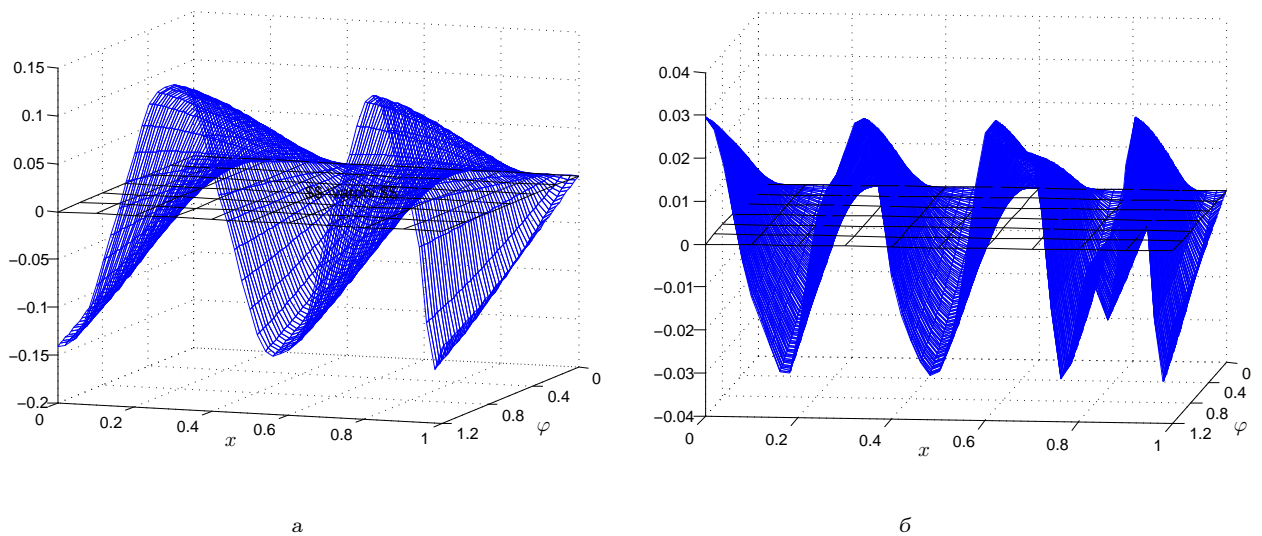


Рис. 4.4. Температурная невязка $\frac{\theta_N(x, \varphi, \Delta^0) - \theta^{**}(x, \varphi)}{\theta_{\max}^*} \cdot 100\%$ при $N = 4$ (а) и $N = 7$ (б)

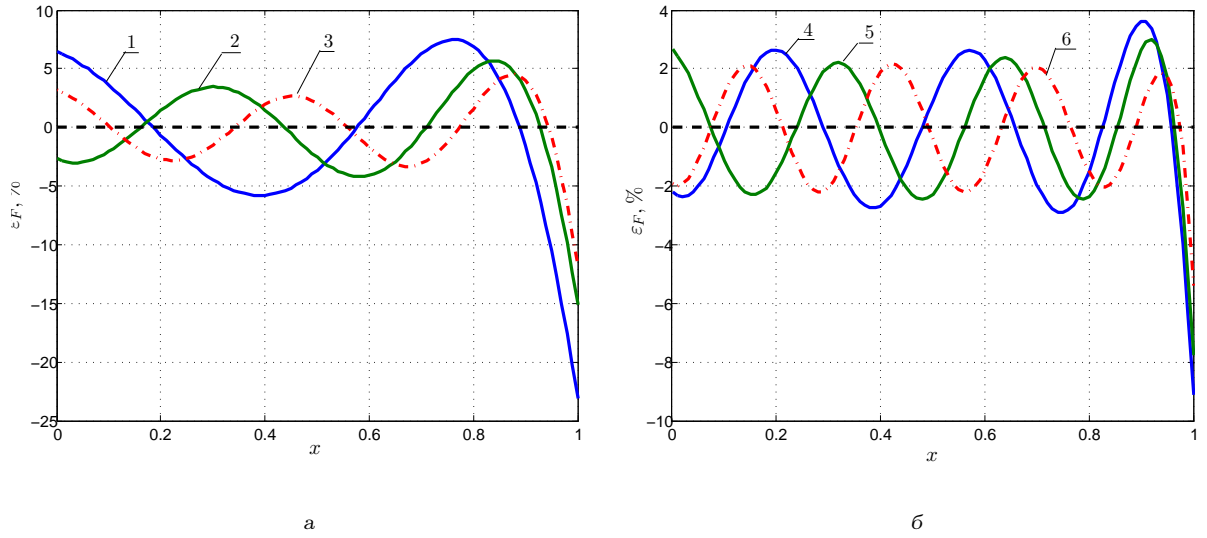


Рис. 4.5. Погрешность аппроксимации искомой характеристики $\frac{F(x, \varphi^*) - F^*(x, \varphi^*)}{F_{\max}^*} \cdot 100\%$: 1 – при $N = 3$; 2 – при $N = 4$; 3 – при $N = 5$; (а) и 4 – при $N = 6$; 5 – при $N = 7$; 6 – при $N = 8$; (б)

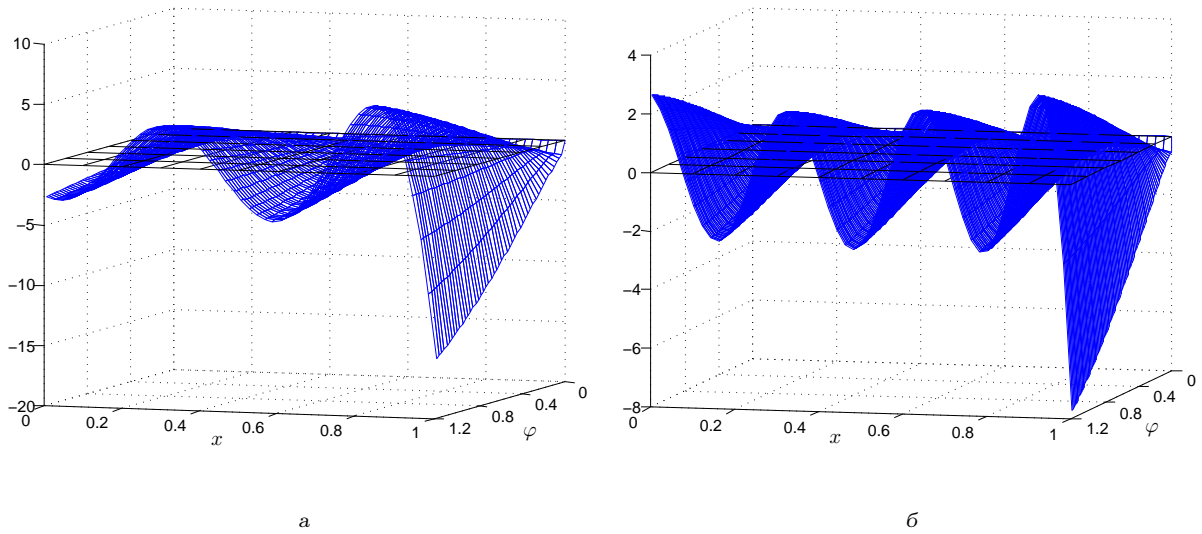


Рис. 4.6. Погрешность $\frac{F(x, \varphi) - F^*(x, \varphi)}{F_{\max}^*} \cdot 100\%$ аппроксимации граничного управления при $N = 4$ (а) и $N = 7$ (б)

4.2. Метод модальной идентификации граничного воздействия в двумерной обратной задаче теплопроводности

4.2.1. Постановка двумерной граничной обратной задачи теплопроводности

Рассматривается, подобно [21; 30; 194], граничная обратная задача нестационарной теплопроводности в двумерной области, заданной декартовыми координатами x и y , при одностороннем нагреве тела тепловым потоком $q(y, \varphi)$ и отсутствии теплообмена на ограничивающих плоскостях $x = 0$, $y = 0$ и $y = 1$. В этом случае базовая линейная математическая модель процесса описывается двумерным уравнением теплопроводности в относительных единицах для изменяющегося во времени φ температурного поля $\theta(x, y, \varphi)$ (3.139), (3.140), (3.141), (3.142).

В граничной ОЗТ функция $q(y, \varphi)$ неизвестна и подлежит определению на основе дополнительной информации о температуре, измеряемой на некотором доступном для контроля подмножестве области $(x, y) \in [0, 1]$ определения $\theta(x, y, \varphi)$. При постановке двумерных ОЗТ в качестве такого подмножества обычно рассматривается некоторая линия $x = x^* = \text{const}$, $0 \leq x^* \leq 1$, $y \in [0, 1]$ [21; 30; 194] или некоторое ограниченное число точек, расположенных во всей области $x, y \in [0, 1]$ [199].

В настоящей работе в качестве входной информации для решения ОЗТ используются экспериментальные температурные зависимости $\theta^*(x^*, y_i, \varphi)$, полученные на интервале идентификации $\varphi \in [0, \varphi^*]$ в ограниченном числе точек (x^*, y_i) , $i = \overline{1, R}$, $x = x^* = \text{const}$, $0 \leq x^* \leq 1$, по которым требуется восстановить неизвестное пространственно-временное граничное воздействие $q(y, \varphi)$.

4.2.2. Модальное представление объекта идентификации

Для решения двумерной ОЗТ по восстановлению граничного управления $q(y, \varphi)$ разработана модификация метода модальной идентификации, позволяющая представить искомое воздействие в виде разложения в усеченный ряд по собственным функциям краевой задачи [160]. Модальное описание объекта с

распределенными параметрами (ОРП) (3.139)–(3.142) основывается на применении к модели объекта (3.139)–(3.142) конечных интегральных преобразований [160]

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\mu_m, \eta_n, \varphi) &= \int_0^1 \int_0^1 \theta(x, y, \varphi) K(\mu_m, x) \cdot K^*(\eta_n, y) dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \theta(x, y, \varphi) \cos \pi m x \cdot \cos \pi n y dx dy \quad (4.19)\end{aligned}$$

по пространственным переменным с ядрами, равными собственным функциям $K(\mu_m, x) = \cos(\mu_m x)$ и $K^*(\eta_n, y) = \cos(\eta_n y)$ объекта по соответствующему аргументу x и y , где собственные числа $\mu_m^2 = \pi^2 m^2$, $m = 0, 1, 2, \dots$ и $\eta_n^2 = \pi^2 n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ являются корнями уравнений $\sin \mu = 0$, $\sin \eta = 0$ соответственно. Применение преобразования (4.19) к модели ОРП (3.139)–(3.142) позволяет перейти к описанию объекта в виде бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{\theta}(\mu_m, \eta_n, \varphi)}{d\varphi} = -(\mu_m^2 + \eta_n^2)\bar{\theta}(\mu_m, \eta_n, \varphi) + \bar{q}_n(\varphi) \cos(\mu_m), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.20)$$

относительно коэффициентов (временных мод) $\bar{\theta}(\mu_m, \eta_n, \varphi)$ разложения функции $\theta(x, y, \varphi)$ в двумерный сходящийся в среднем ряд по собственным функциям [160]:

$$\theta(x, y, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_m^2 C_n^2 \bar{\theta}(\mu_m, \eta_n, \varphi) \cos \mu_m x \cdot \cos \eta_n y, \quad (4.21)$$

$$\bar{\theta}(\mu_m, \eta_n, 0) = \bar{\theta}_0(\mu_m, \eta_n) = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.22)$$

В (4.20) временные моды

$$\bar{q}_n(\varphi) = \bar{q}(\eta_n, \varphi) = \int_0^1 q(y, \varphi) \cos(\pi n y) dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.23)$$

граничного управления $q(y, \varphi)$ являются коэффициентами его разложения в одномерный бесконечный ряд

$$q(y, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \bar{q}(\eta_n, \varphi) \cos \eta_n y. \quad (4.24)$$

Множители C_m^2 и C_n^2 , нормирующие собственные функции, определяются следующим образом

$$C_m^2 = \left(\int_0^1 \cos^2(\pi m x) dx \right)^{-1} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \geq 1; \end{cases} \quad (4.25)$$

$$C_n^2 = \left(\int_0^1 \cos^2(\pi n y) dy \right)^{-1} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n \geq 1. \end{cases} \quad (4.26)$$

4.2.3. Модальная идентификация граничного управления

Равенства (4.20) формально определяют искомые соотношения между модальными составляющими $\bar{q}_n(\varphi)$ и $\bar{\theta}(\mu_m, \eta_n, \varphi)$. Однако, при учете любого достаточно большого конечного числа членов рядов (4.21) и (4.24) для $m = \overline{0, M}; n = \overline{0, N}; M, N > 1$, обеспечивающего требуемую точность описания температурного поля, соответствующая «укороченная» система $(M + 1) \times (N + 1)$ уравнений (4.20) оказывается неразрешимой относительно меньшего числа $N + 1$ неизвестных $\bar{q}_n(\varphi)$, которые должны быть найдены на основе поведения $(M + 1) \times (N + 1)$ величин $\bar{\theta}(\mu_m, \eta_n, \varphi)$. Такая ситуация объясняется описанием $\theta(x, y, \varphi)$ и $q(y, \varphi)$ рядами (4.21) и (4.24) различной пространственной размерности.

Для устранения этого затруднения будем, подобно [200], использовать модальное описание объекта на основе его модели (3.139)–(3.142), записанной в изображениях Лапласа по переменной φ :

$$p\tilde{\theta}(x, y, p) = \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(x, y, p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}(x, y, p)}{\partial y^2}, \quad x, y \in (0, 1) \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(1, y, p)}{\partial x} = \tilde{q}(y, p), \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}(0, y, p)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}(x, 0, p)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\theta}(x, 1, p)}{\partial y} = 0, \quad (4.29)$$

где p — комплексная переменная преобразования Лапласа, $\tilde{\theta}(x, y, p)$, $\tilde{q}(y, p)$ — изображения функций $\theta(x, y, \varphi)$ и $q(y, \varphi)$.

Применение конечного интегрального преобразования по пространственному аргументу y граничного управляющего воздействия $\tilde{q}(y, p)$ к уравнениям

объекта (4.27), (4.29) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}_n}{dx^2} - A_n^2 \tilde{\theta}_n = 0, \quad A_n^2 = p + \eta_n^2; \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.30)$$

по переменной x относительно модальных составляющих

$$\tilde{\theta}_n(x, p) = \int_0^1 \tilde{\theta}(x, y, p) \cdot \cos \pi n y \, dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

разложения

$$\tilde{\theta}(x, y, p) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \tilde{\theta}_n(x, p) \cdot \cos \pi n y \quad (4.32)$$

в однократный ряд по ортогональной системе собственных функций $\cos \pi n y$.

Уравнения (4.30) дополняются граничными условиями

$$\frac{d \tilde{\theta}_n(0, p)}{dx} = 0, \quad \frac{d \tilde{\theta}_n(1, p)}{dx} = \tilde{q}_n(p). \quad (4.33)$$

Здесь $\tilde{q}_n(p)$ — модальные составляющие граничного воздействия, равные коэффициентам

$$\tilde{q}_n(p) = \int_0^1 \tilde{q}(y, p) \cdot \cos \pi n y \, dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.34)$$

разложения

$$\tilde{q}(y, p) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 \tilde{q}_n(p) \cdot \cos \pi n y \quad (4.35)$$

в аналогичный (4.32) ряд по собственным функциям $\cos \pi n y$.

Решение задачи (4.30), (4.33) на линии $x = x^*$ температурных измерений находится известными методами в виде

$$\tilde{\theta}_n(x^*, p) = H_n(x^*, p) \tilde{q}_n(p); \quad (4.36)$$

$$H_n(x, p) = \frac{\operatorname{ch}(A_n(p) \cdot x)}{A_n(p) \cdot \operatorname{sh}(A_n(p))}, \quad (4.37)$$

однозначным образом связывающим в операторной форме моды $\tilde{q}_n(p)$ и $\tilde{\theta}_n(x^*, p)$ разложений $\tilde{q}(y, p)$ и $\tilde{\theta}(x^*, y, p)$ в одномерные ряды (4.32), (4.35) по пространственной координате y при учете любого числа N составляющих в (4.32) и (4.35)

$$\tilde{q}_n(p) = H_n^{-1}(x^*, p) \tilde{\theta}_n(x^*, p), \quad n = \overline{0, N}. \quad (4.38)$$

Таким образом, предлагаемый метод решения условно-корректной задачи идентификации граничного управления, рассматриваемого на компактном множестве непрерывных вместе со своими первыми производными модальных переменных $\bar{\theta}_n(x^*, \varphi)$, реализуется в пространстве изображений по Лапласу и состоит в восстановлении искомой величины $\tilde{q}(y, p)$ в виде конечной взвешенной суммы

$$\tilde{q}(y, p) = \sum_{n=0}^N C_n^2 \tilde{q}_n(p) \cdot \cos \pi n y \quad (4.39)$$

мод $\tilde{q}_n(p)$, вычисляемых согласно (4.37), (4.38), по значениям модальных составляющих $\tilde{\theta}_n(x^*, p)$ температурного поля $\tilde{\theta}(x^*, y, p)$. Выражения $\tilde{\theta}_n(x^*, p)$ могут рассматриваться как преобразованные по Лапласу зависимости $\bar{\theta}_n(x^*, \varphi)$, значения которых должны быть найдены по экспериментальным данным путем решения относительно $\bar{\theta}_n(x^*, \varphi)$ замкнутой системы уравнений, образуемой оригиналами равенств (4.32), рассматриваемых в точках контроля $x = x^*$, $y = y_i$, $i = \overline{1, N+1}$ для укороченной суммы ряда

$$\theta^*(x^*, y_i, \varphi) = \sum_{n=0}^N C_n^2 \bar{\theta}_n(x^*, \varphi) \cdot \cos \pi n y_i, \quad i = \overline{1, N+1}. \quad (4.40)$$

Предварительно на основе преобразования Лапласа должен быть выполнен переход от температурных кривых $\theta^*(x^*, y_i, \varphi)$, зависящих от времени, к их изображениям $\tilde{\theta}^*(x^*, y_i, p)$. Переход к оригиналу $q(y, \varphi)$ производится применением обратного преобразования Лапласа к равенству (4.39) с учетом достаточно большого числа членов разложения гиперболических функций в (4.37) в ряды Тейлора по степеням их аргументов. При этом, как будет показано далее, при практическом решении задачи (4.38), как правило, переход от оригиналов к изображениям и обратно реализуется современными программными средствами моделирования динамических систем.

4.2.4. Планирование температурных измерений

Точность решения ОЗТ во многом определяется входной экспериментальной информацией, которая существенно зависит от расположения датчиков температуры, в связи с чем, эффективное решение двумерных обратных задач

возможно только при предварительно выполненном этапе оптимального планирования температурных измерений [23; 110]. В рамках предлагаемого подхода найдем оптимальную в определенном смысле совокупность значений $N + 1$ координат y_i , $i = \overline{1, N + 1}$ точек $\{(x^*, y_1), (x^*, y_2), \dots, (x^*, y_{N+1})\}$ контроля температуры при заданном числе N , определяемом априори выбранным числом членов усеченного ряда (4.39).

При вариациях набора (x^*, y_i) , $i = \overline{1, N + 1}$ точек контроля решение $\bar{\theta}_n$, $n = \overline{0, N}$ системы уравнений (4.40) определяется в форме соответствующей зависимости $\bar{\theta}_n(x^*, \varphi, \Delta)$ от вектора $\Delta = (y_i)$, $i = \overline{1, N + 1}$ значений искомых координат. В таком случае расчетное температурное поле представляется в форме оригинала укороченной суммы $N + 1$ членов ряда (4.32)

$$\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi, \Delta) \approx \sum_{n=0}^N C_n^2 \bar{\theta}_n(x^*, \varphi, \Delta) \cdot \cos \pi n y, \quad y \in [0, 1], \quad \varphi \in [0, \varphi^*]. \quad (4.41)$$

Согласно концепции минимаксной оптимизации, реализующей оценивание температурного отклонения в равномерной метрике [142], в качестве критерия оптимизации будем использовать минимизацию максимального значения температурной невязки во всей области определения аргументов

$$I_1(x^*, \Delta) = \max_{\substack{\varphi \in [0, \varphi^*] \\ y \in [0, 1]}} |\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi, \Delta) - \theta^{**}(x^*, y, \varphi)| \rightarrow \min_{(x^*, \Delta)}. \quad (4.42)$$

Учет очевидных соображений физического характера приводит к тому, что ошибка аппроксимации с течением времени увеличивается и достигает своего максимального значения в последний момент времени φ^* , в связи с чем, критерий (4.42) может быть сформулирован по отношению не ко всему интервалу идентификации $[0, \varphi^*] \ni \varphi$, а к моменту φ^*

$$I_2(x^*, \Delta) = \max_{y \in [0, 1]} |\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi^*, \Delta) - \theta^{**}(x^*, y, \varphi^*)| \rightarrow \min_{(x^*, \Delta)}. \quad (4.43)$$

Здесь, подобно (4.14), $\theta^{**}(x^*, y, \varphi^*) \in [\theta(x^*, y, \varphi^*), \theta(x^*, y, \varphi^*, \Delta)]$, $y \in [0, 1]$ выражает требуемое температурное распределение по всей области изменения координаты $y \in [0, 1]$, которое может быть определено следующим образом.

Если на этапе планирования температурных измерений существует возможность (аналогично пункту 4.1.2) получения полной информации о $\theta(x^*, y, \varphi^*)$,

$y \in [0, 1]$, то $\theta^{**}(x^*, y, \varphi^*) = \theta(x^*, y, \varphi^*)$. Если такой возможности нет, то за $\theta^{**}(x^*, y, \varphi^*)$ принимается точное решение $\theta(x^*, y, \varphi^*, \Delta)$ прямой задачи (3.139)–(3.142) с граничным управлением $q(y, \varphi) = q(y, \varphi, \Delta)$, которое находится для каждого Δ по описанной процедуре метода модальной идентификации.

Таким образом, минимаксная задача математического программирования (4.43) может быть решена относительно координат $(x^*, y_i), i = \overline{1, N+1}$ или, при фиксированном значении x^* , заданном, например, исходя из технологических требований, относительно $(y_i), i = \overline{1, N+1}$.

Для решения задачи (4.43) также используются известные качественные свойства оптимальных температурных распределений, обладающих при оптимальных значениях координат $(x^*, y_1^0), (x^*, y_2^0), \dots, (x^*, y_{N+1}^0)$ наилучшим равномерным приближением к требуемому состоянию $\theta^{**}(x^*, y, \varphi^*)$ [142]. В результате, в отдельных точках $(x^*, y_j^{al}), j = \overline{1, R}$ на интервале $y \in [0, 1]$ фиксируется достижение предельных отклонений расчетной температуры $\theta_{N+1}(x^*, y_j^{al}, \varphi^*, \Delta^0)$ от $\theta^{**}(x^*, y_j^{al}, \varphi^*)$, равных $\pm I_2(x^*, \Delta^0)$, и тем самым, устанавливается конфигурация погрешности $\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^{**}(x^*, y, \varphi^*)$ аппроксимации температурного распределения $\theta^{**}(x^*, y, \varphi^*)$.

Оптимальное решение $\Delta^0, i = \overline{1, N+1}$ задачи (4.43) для каждого фиксированного x^* , обладает свойствами чебышевского альтернанса, в соответствии с чем, при $\varphi = \varphi^*$ на интервале $y \in [0, 1]$ в точках (x^*, y_j^{al}) , число которых R на единицу превышает количество $N+1$ искомым координат, достигаются знакопеременные максимальные по величине отклонения, равные $\pm(\theta_{N+1}(x^*, y_j^{al}, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^{**}(x^*, y_j^{al}, \varphi^*))$, где $\theta^{**}(x^*, y_j^{al}, \varphi^*) = \theta(x^*, y_j^{al}, \varphi^*)$ при задании требуемого температурного состояния в виде $\theta(x^*, y, \varphi^*)$ или $\theta^{**}(x^*, y_j^{al}, \varphi^*) = \theta(x^*, y_j^{al}, \varphi^*, \Delta^0)$ при использовании $\theta(x^*, y, \varphi^*, \Delta)$.

Данное свойство приводит к замкнутой системе $N+2$ соотношений для предельных значений температурных невязок в этих точках относительно неизвестных — значений координат (y_j^{al}) точек альтернанса и величины предельного отклонения $I_2(x^*, \Delta^0)$. Условия существования экстремума

$$\frac{\partial}{\partial y}(\theta_{N+1}(x^*, y_s^{al}, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^{**}(x^*, y_j^{al}, \varphi^*))$$

во внутренних точках $y_{j_s}^{al} \in \{y_j^{al}\}, j = \overline{1, R}$ интервала $[0, 1] \ni y$ дополняют

систему, которая в результате принимает вид

$$\theta_{N+1}(x^*, y_j^{al}, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^{**}(x^*, y_j^{al}, \varphi^*) = \pm(-1)^{j+1} I_2; \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\theta_{N+1}(x^*, y_{j_s}^{al}, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^{**}(x^*, y_{j_s}^{al}, \varphi^*)) = 0. \quad (4.45)$$

Влияние координаты x^* на точность решения задачи может быть исследовано методом математического моделирования.

4.2.5. Пример решения обратной задачи теплопроводности

Для демонстрации возможностей представленного метода была решена серия ОЗТ по восстановлению пространственно-временного управления $q(y, \varphi)$ методом модальной идентификации с учетом от трех до десяти мод температурного поля. Модельное идентифицируемое воздействие $q^*(y, \varphi)$ в форме произведения двух функций одной переменной $q^*(y, \varphi) = q^{(1)}(y)q^{(2)}(\varphi)$ имело вид (3.159), с учетом которого было получено выражение, моделирующее наблюдаемое температурное поле [160]

$$\begin{aligned} \theta^*(x, y, \varphi) = & \int_0^\varphi \bar{q}_{00}(\tau) d\tau + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\mu_m x) \int_0^\varphi \bar{q}_{m0}(\tau) e^{-\mu_m^2(\varphi-\tau)} d\tau + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\eta_n y) \int_0^\varphi \bar{q}_{0n}(\tau) e^{-\eta_n^2(\varphi-\tau)} d\tau + \\ & + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\mu_m x) \cdot \cos(\eta_n y) \int_0^\varphi \bar{q}_{mn}(\tau) e^{-(\mu_m^2 + \eta_n^2)(\varphi-\tau)} d\tau, \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\bar{q}_{mn}(\varphi) = \bar{q}_n(\varphi) \cos \pi m, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.47)$$

где $\bar{q}_n(\varphi)$ определяются согласно (4.23) с подстановкой $q(y, \varphi)$ в форме (3.159). При $\omega \neq 1, 2, \dots$ выражение (4.46) принимает вид (3.160), (3.161), (3.162).

На основе полученных выражений была решена серия ОЗТ для ряда возрастающих значений N .

Предварительно для каждого конкретного значения N решалась задача планирования температурных измерений (4.43) при определении $\theta^{**}(x^*, y, \varphi^*)$ на основе точного решения $\theta(x^*, y, \varphi^*)$ (4.46) задачи (3.139)–(3.142) при $q(y, \varphi)$, заданном в форме (3.159).

При этом координата x^* полагалась заданной, и определению подлежали координаты (y_i^0) , $i = \overline{1, N+1}$, значения которых были найдены в результате численного решения системы альтернативных соотношений (4.44).

Далее были решены прямые задачи теплопроводности, моделирующие на интервале идентификации $\varphi \in [0, \varphi^*]$ экспериментальные температурные зависимости $\theta^*(x^*, y_i, \varphi)$, $i = \overline{1, N+1}$ в точках с найденными координатами (x^*, y_i^0) , $i = \overline{1, N+1}$.

Равенства (4.40) позволяют записать для всей совокупности экспериментальных зависимостей систему N алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{\theta}^* = \boldsymbol{\Phi} \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}}, \quad (4.48)$$

где $\boldsymbol{\theta}^* = [\theta^*(x^*, y_1, \varphi), \theta^*(x^*, y_2, \varphi), \dots, \theta^*(x^*, y_{N+1}, \varphi)]^T$ — вектор-столбец температурных зависимостей, полученных во всех точках контроля на всем интервале идентификации, матрица

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} C_0^2 & C_1^2 \cdot \cos \pi 1 y_1 & \dots & C_{N-1}^2 \cdot \cos \pi (N-1) y_1 \\ C_0^2 & C_1^2 \cdot \cos \pi 1 y_2 & & C_{N-1}^2 \cdot \cos \pi (N-1) y_2 \\ \dots & \dots & & \dots \\ C_0^2 & C_1^2 \cdot \cos \pi 1 y_N & & C_{N-1}^2 \cdot \cos \pi (N-1) y_N \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

составлена из значений собственных функций в точках контроля с учетом нормирующих коэффициентов, а $\bar{\boldsymbol{\theta}} = [\bar{\theta}_0(x^*, \varphi), \bar{\theta}_1(x^*, \varphi), \dots, \bar{\theta}_{N-1}(x^*, \varphi)]^T$ — вектор-столбец модальных составляющих температур $\theta(x^*, y_i, \varphi)$.

Таким образом, на основе (4.48) при известном векторе $\boldsymbol{\theta}^*$ могут быть определены $N+1$ модальные составляющие $\bar{\theta}_n(x^*, \varphi)$

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} \cdot \boldsymbol{\theta}^*. \quad (4.50)$$

Далее, с использованием полученных значений $\bar{\theta}_n(x^*, \varphi)$ решается в пространстве изображений Лапласа задача (4.38) восстановления модальных составляющих $\tilde{q}_n(p)$ граничного управления. Непосредственное вычисление $\tilde{q}_n(p)$ на основе выражения (4.38), содержащего оператор $H_n^{-1}(x^*, p)$, обратный непрерывному, привело бы к нарушению условия устойчивости решения, в связи с чем, для реализации выражения (4.38) используется структура, представленная на рис. 4.7, где K — достаточно большое число.

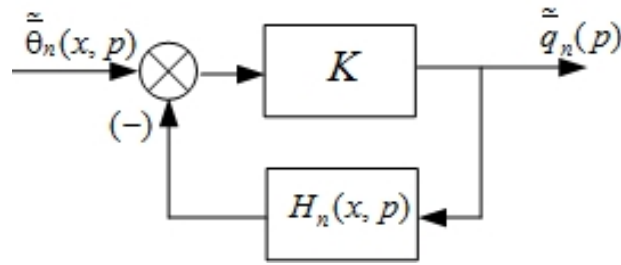


Рис. 4.7. Структурная схема восстановления модальных составляющих $\tilde{q}_n(p)$

Для идентификации значений всех модальных составляющих $\tilde{q}_n(p)$, $n = \overline{0, N}$, реализуется совокупность $N + 1$ независимых контуров, согласно структуре рис. 4.7. Числитель и знаменатель передаточной функции $H_n(x, p)$ (4.37), содержащие функции гиперболического синуса и косинуса, при моделировании могут быть приближенно выражены в виде разложения в усеченные ряды по степеням p :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\sqrt{p + \pi^2 n^2} \cdot x) &= 1 + \frac{(p + \pi^2 n^2)x^2}{2!} + \frac{(p + \pi^2 n^2)^2 x^4}{4!} + \dots; \\ \operatorname{sh} \sqrt{p + \pi^2 n^2} &= \sqrt{p + \pi^2 n^2} + \frac{(\sqrt{p + \pi^2 n^2})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{p + \pi^2 n^2})^5}{5!} + \dots, \\ \sqrt{p + \pi^2 n^2} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{p + \pi^2 n^2} &= (p + \pi^2 n^2) + \frac{(p + \pi^2 n^2)^2}{3!} + \frac{(p + \pi^2 n^2)^3}{5!} + \dots. \end{aligned} \quad (4.51)$$

После нахождения составляющих $\tilde{q}_n(p)$ граничное воздействие $\tilde{q}(y, p)$ восстанавливается в виде ряда (4.35) с конечным числом слагаемых, оригинал которого, полученный в результате обратного преобразования Лапласа, соответствует искомой функции $q(y, \varphi)$. При практической реализации структуры (рис. 4.7) в среде моделирования динамических систем Simulink MATLAB[®] операции прямого и обратного преобразований Лапласа производятся средствами Simulink[®] путем численного моделирования.

Некоторые результаты решения ОЗТ методом модальной идентификации представлены в табл. 4.2 и на рис. 4.9–4.12. Представленные результаты соответствуют данным $\varphi^* = 2$, $x^* = 0.96$ и следующим оптимальным значениям y_i^0 вектора $y^0 = (y_i^0)$, $i = \overline{1, N + 1}$ координат y_i точек контролируемых температур:

$$y^0 = [0.11; 0.42; 0.80] \text{ при } N = 2;$$

$$y^0 = [0.08; 0.30; 0.57; 0.85] \text{ при } N = 3;$$

$$y^0 = [0.06; 0.23; 0.43; 0.66; 0.88] \text{ при } N = 4;$$

$$y^0 = [0.05; 0.19; 0.35; 0.53; 0.71; 0.91] \text{ при } N = 5;$$

$$y^0 = [0.04; 0.14; 0.26; 0.39; 0.52; 0.66; 0.80; 0.93] \text{ при } N = 7;$$

$$y^0 = [0.03; 0.11; 0.20; 0.30; 0.40; 0.51; 0.62; 0.73; 0.84; 0.95] \text{ при } N = 9.$$

Таблица 4.2. Погрешность $\varepsilon_\theta = \max_y |\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi^*) - \theta^{**}(x^*, y, \varphi^*)|$ приближения температуры и ошибка $\varepsilon_u = \max_y |q(y, \varphi^*) - \tilde{q}(y, \varphi^*)|$ аппроксимации граничного управления при $N = \overline{2, 9}$, $\varphi^* = 2$, $x^* = 0.96$;

N	2	3	4	5	7	9
$\varepsilon_\theta, \%$	0.4074	0.1649	0.0801	0.0437	0.0161	0.0070
$\varepsilon_u, \%$	11.6157	8.1751	7.0439	6.3704	5.8392	5.6640

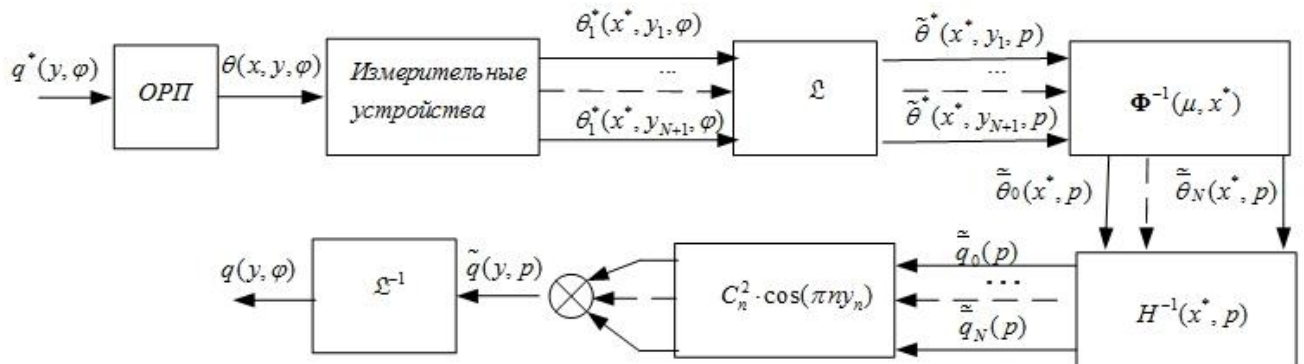


Рис. 4.8. Структура системы идентификации пространственно-временного управляющего воздействия в двумерной граничной ОЗТ: \mathcal{L} и \mathcal{L}^{-1} – операции прямого и обратного преобразований Лапласа;

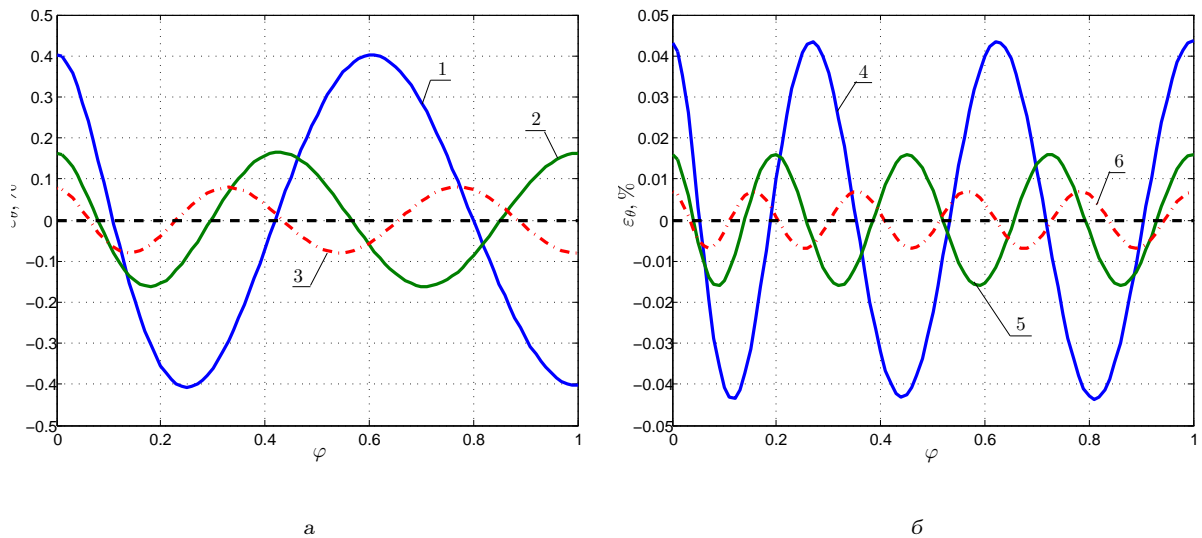


Рис. 4.9. Температурная невязка $\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi^*) - \theta^{**}(x^*, y, \varphi^*)$, полученная в результате решения задачи планирования эксперимента : 1 – при $N = 2$; 2 – при $N = 3$; 3 – при $N = 4$; (а) и 4 – при $N = 5$; 5 – при $N = 7$; 6 – при $N = 9$; (б)

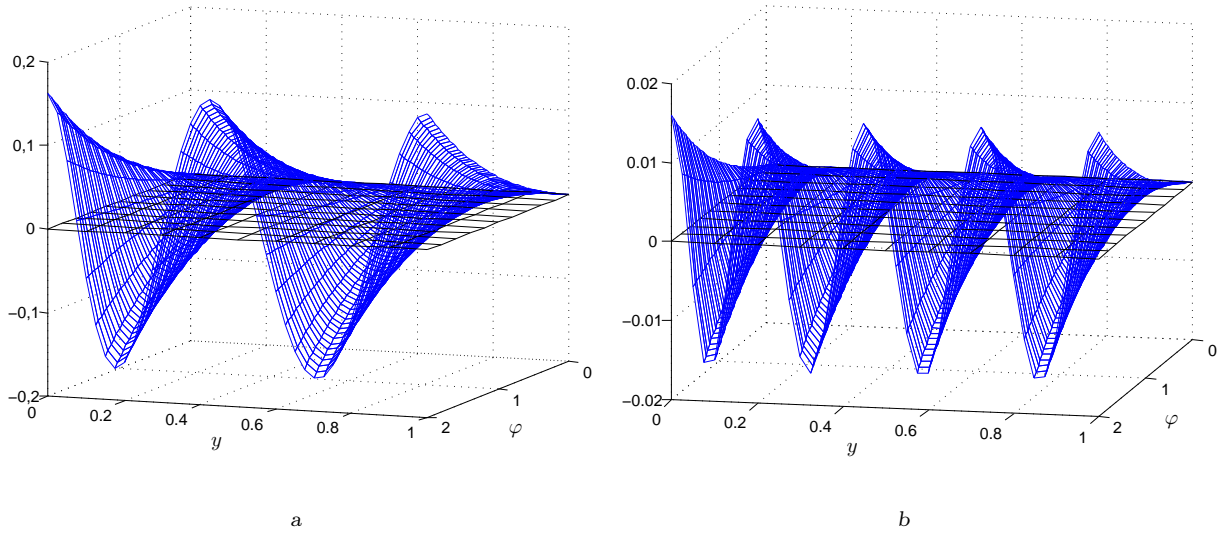


Рис. 4.10. Температурная невязка $\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^{**}(x^*, y, \varphi^*)$ при $N = 3$ (а) и $N = 7$ (б)

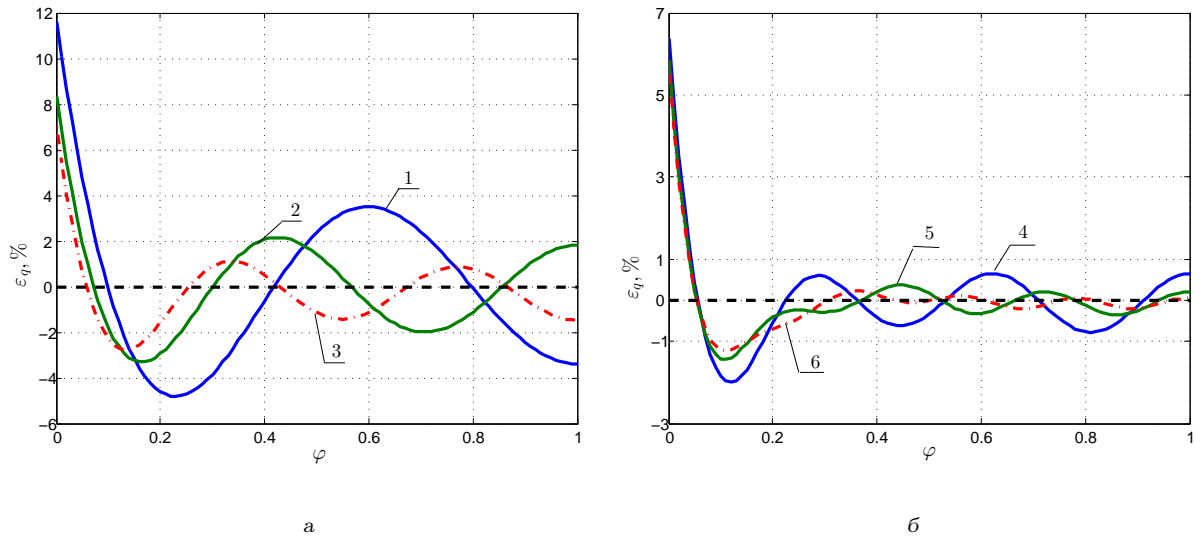


Рис. 4.11. Погрешность $q(y, \varphi^*) - q^*(y, \varphi^*)$ аппроксимации граничного управления : 1 – при $N = 2$; 2 – при $N = 3$; 3 – при $N = 4$; (а) и 4 – при $N = 5$; 5 – при $N = 7$; 6 – при $N = 9$; (б)

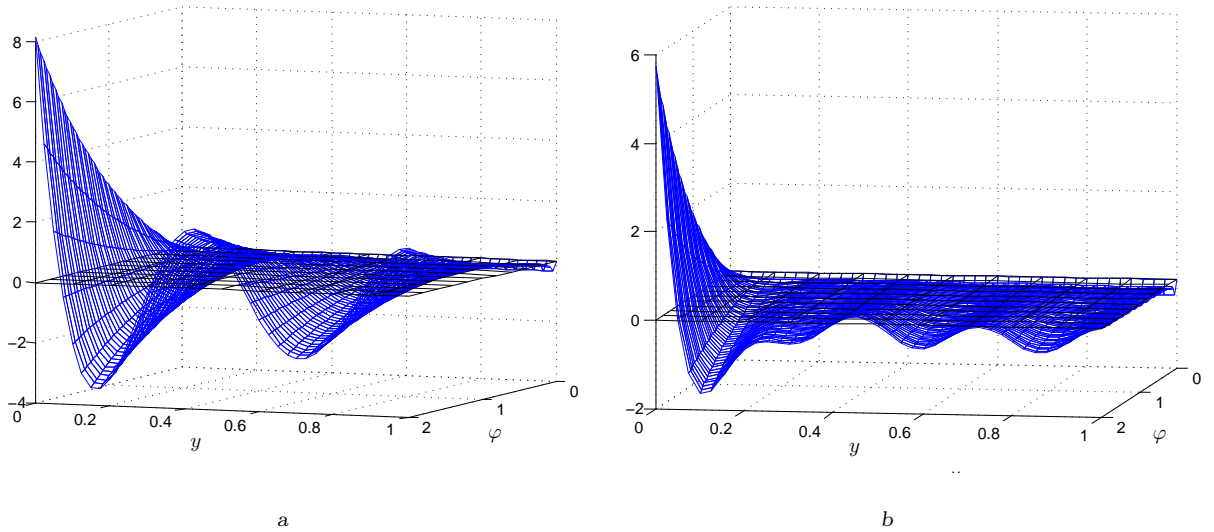


Рис. 4.12. Погрешность $q(y, \varphi) - q^*(y, \varphi)$ аппроксимации граничного управления (а) при $N = 3$ (а) и $N = 7$ (б)

Погрешность приближения температуры $\theta_{N+1}(x^*, y, \varphi^*, \Delta^0) - \theta^{**}(x^*, y, \varphi^*)$ монотонно уменьшается с увеличением числа N , определяющего количество учитываемых мод. Увеличение N также приводит к уменьшению ошибки аппроксимации искомого граничного воздействия $q(y, \varphi) - q^*(y, \varphi)$, максимальное значение которой достигается здесь на внутренней границе $y = 0$ допустимой области изменения пространственной переменной y .

При решении задачи в двумерной пространственной области на точность получаемых результатов также существенное влияние оказывает значение координаты x^* линии измерения температуры $\theta^*(x^*, y_j, \varphi)$, которое может быть исследовано методом математического эксперимента.

Полученные результаты для случая $N = 3$ (рис. 4.13 (а), 4.14) показывают, что погрешность аппроксимации температуры ε_θ в исследуемой области $x \in [0.65, 1]$ монотонно уменьшается при перемещении координаты от границы $x^* = 1$ вглубь тела.

При этом поведение ошибки ε_u аппроксимации граничного теплового потока имеет существенно немонотонный характер (рис. 4.13 (б), 4.15), что связано с гармонической структурой собственных функций по переменной x , что вызывает смещение разности $q(y, \varphi^*) - q^*(y, \varphi^*)$ то в одну, то в другую сторону, амплитуда колебаний которого увеличивается с перемещением x^* к центру пространственной области.

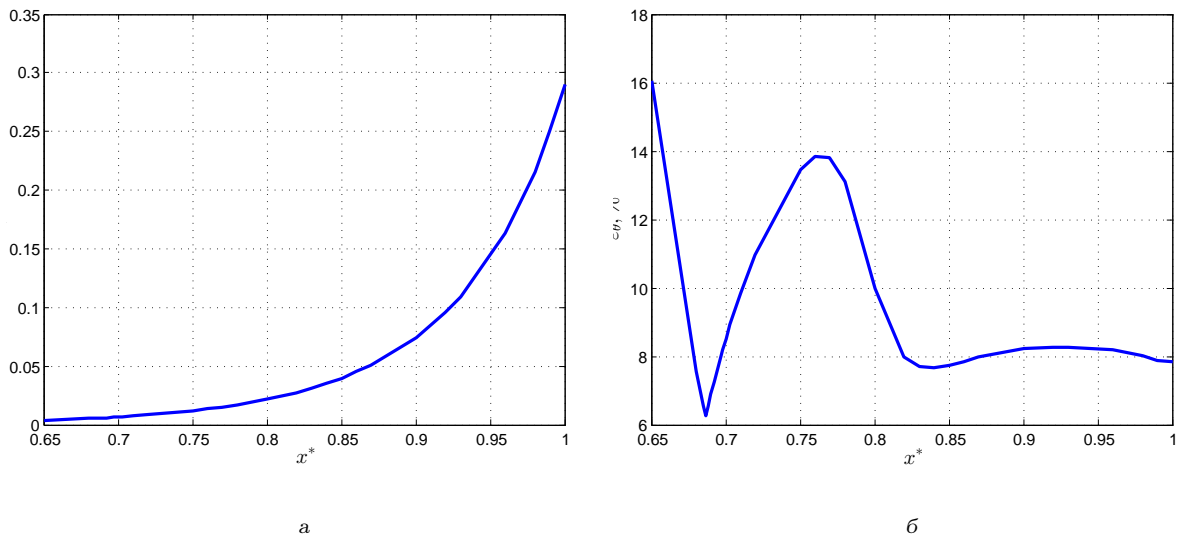


Рис. 4.13. Зависимость погрешности $\varepsilon_\theta = \theta_4(x^*, y, \varphi^*) - \theta^{**}(x^*, y, \varphi^*)$ (а) и $\varepsilon_u = q(y, \varphi^*) - q^*(y, \varphi^*)$ (б) от координаты x^*

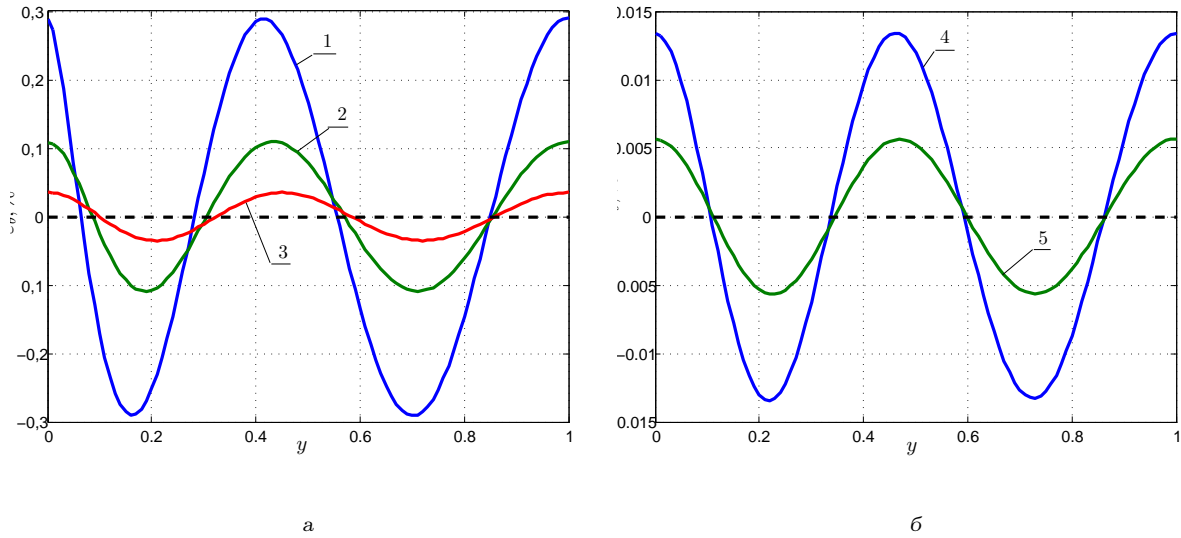


Рис. 4.14. Погрешность аппроксимации температуры $\theta_4(x^*, y, \varphi^*) - \theta^{**}(x^*, y, \varphi^*)$: 1 – при $x^* = 1$; 2 – при $x^* = 0.93$; 3 – при $x^* = 0.84$; (а) и 4 – при $x^* = 0.76$; 5 – при $x^* = 0.688$; (б)

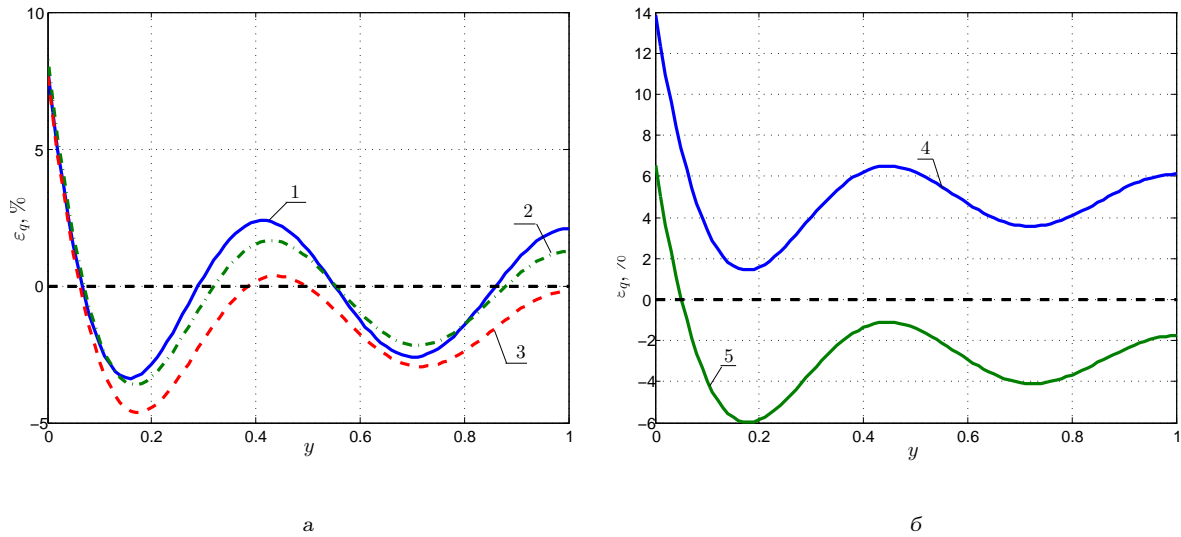


Рис. 4.15. Погрешность приближения искомого управления $\varepsilon_u = q(y, \varphi^*) - q^*(y, \varphi^*)$: 1 – при $x^* = 1$; 2 – при $x^* = 0.93$; 3 – при $x^* = 0.84$; (а) и 4 – при $x^* = 0.76$; 5 – при $x^* = 0.688$; (б)

В связи с этим, целесообразно располагать измерительные устройства в некоторой области вблизи границы $x \approx [0.9, 1]$, где такое смещение незначительно.

4.3. Выводы по главе 4

1. Разработан метод модальной идентификации на компактном множестве непрерывных вместе со своими первыми производными функций, позволяющий во внутренней одномерной и граничной двумерной обратных зада-

чах теплопроводности восстановить соответственно внутреннее и граничное воздействия, зависящие от времени и пространственной координаты, на основе аналитической идентификации их модальных составляющих.

2. Решены задачи планирования температурных измерений, обеспечивающие на линии контроля в фиксированный (конечный) момент интервала идентификации минимизацию ошибки аппроксимации экспериментального температурного поля его модельным представлением в равномерной метрике оценивания температурных невязок.
3. Проведен анализ зависимости точности решения ОЗТ от количества учитываемых членов разложения температурного поля и управляющих воздействий в ряды по собственным функциям исследуемой краевой задачи.
4. Разработана структура системы идентификации пространственно-временных внутреннего и граничного воздействий в виде совокупности несвязанных контуров идентификации учитываемых мод управляемой величины по экспериментальным температурным зависимостям.

Метод параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности с неточным измерением контролируемых температур

Изложение данной главы соответствует работам [59; 73].

5.1. Метод параметрической оптимизации в граничной обратной задаче теплопроводности с предварительным сглаживанием результатов температурных измерений

Одним из подходов к решению ОЗТ в условиях действия случайных возмущений является предварительное сглаживание входной информации. Определяющее значение имеет выбор алгоритма, обеспечивающего при сглаживании погрешностей измерений сохранение характерных особенностей процесса теплопроводности [21; 26]. Результаты, полученные в [21], показывают, что в качестве сглаживающих алгоритмов, позволяющих получить достаточно точные решения, могут использоваться подходы, основанные на методе регуляризации Тихонова с учетом второй производной в регуляризаторе [201] или методе сглаживающих кубических сплайнов [202–204].

При постановке граничной ОЗТ (3.69), (3.2), (3.70), рассматриваемой в качестве типичного примера, требуется восстановить плотность теплового потока $q(\varphi)$ на основе дополнительных данных $\theta_\delta^*(\varphi)$, полученных в результате наблюдений за поведением объекта в точке $x^* \in [0, 1]$ в условиях влияния возмущающих факторов. В типовой ситуации действия аддитивной помехи $\delta(\varphi)$ экспериментально полученная температурная зависимость $\theta_\delta^*(\varphi)$ может быть представлена в виде суммы

$$\theta_\delta^*(\varphi) = \theta^*(\varphi) + \delta(\varphi) \quad (5.1)$$

невозмущенного решения $\theta^*(\varphi)$ прямой задачи (3.69), (3.2), (3.70) при заданной входной характеристике $q(\varphi) = q^*(\varphi)$ и возмущающего воздействия $\delta(\varphi)$.

Рассмотрим решение граничной обратной задачи теплопроводности в случае действия случайного возмущения

$$\delta(\varphi) = \delta_0 \cdot \text{rand}, \quad (5.2)$$

моделируемого согласно гауссовскому распределению с нулевым математическим ожиданием и дисперсией δ_0^2 (функция `rand` является генератором случайных чисел, распределенных по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией).

Для решения ОЗТ на основе представленного в главе 3 метода минимаксной оптимизации производится предварительное сглаживание входной информации $\theta_\delta^*(\varphi)$, и тогда в соответствующей задаче оптимального управления требуется восстановить величину тепловых потерь $q^0(\varphi)$, минимизирующую невязку между сглаженной экспериментальной информацией и точным решением $\theta(x^*, \varphi)$ краевой задачи (3.69), (3.2), (3.70), соответствующим $q^0(\varphi)$.

Рассмотрим решение задачи при фильтрации случайных возмущений с использованием сглаживающих кубических сплайнов [202–204].

Пусть экспериментальная информация представляет собой массив значений температуры $\theta_\delta^*(\varphi_i)$, $i = \overline{1, M}$, полученных на интервале идентификации $[0, \varphi^*] \ni \varphi$ в равноотстоящие моменты времени $\{\varphi_i\}$, $i = \overline{1, M}$ с шагом дискретизации $h_1 = \varphi_i - \varphi_{i-1}$, $i = \overline{2, M}$.

На основе данных $\theta_\delta^*(\varphi_j)$, полученных в моменты времени φ_j , $j = \overline{1, K}$, $K \ll M$ с интервалом дискретизации $h_2 = r \cdot h_1$, $r > 1$ и используемых в качестве узлов сплайна, строились кубические сплайны $S(\varphi) = S(\theta_\delta^*(\varphi_j))$, $j = \overline{1, K}$. Каждый узел φ_j совпадает с какой-нибудь точкой φ_i , причем $\varphi_1 = 0$ (при $i = j = 1$) и $\varphi_M = \varphi_K = \varphi^*$.

На каждом из отрезков $[\varphi_j, \varphi_{j+1}]$, $j = \overline{1, K-1}$ сплайн $S(\varphi)$ является кубическим многочленом, определяется четырьмя коэффициентами и может быть представлен в виде

$$S(\varphi) = d_{0j} + d_{1j}(\varphi - \varphi_j) + d_{2j}(\varphi - \varphi_j)^2 + d_{3j}(\varphi - \varphi_j)^3. \quad (5.3)$$

Целевой функционал

$$I(S) = b \sum_{j=1}^K (\theta_{\delta}^*(\varphi_j) - S(\varphi_j))^2 + (1 - b) \int_0^{\varphi^*} (S''(\varphi))^2 d\varphi \quad (5.4)$$

обеспечивает компромисс между интерполяционными свойствами сплайна, задающими отклонение между сплайном и экспериментальными данными (первое слагаемое в функционале) и сглаживающими свойствами, позволяющими минимизировать кривизну сплайна за счет выбора второго слагаемого. Соотношение между $\sum_{j=1}^K (\theta_{\delta}^*(\varphi_j) - S(\varphi_j))^2$ и $\int_0^{\varphi^*} (S''(\varphi))^2 d\varphi$ реализуется соответствующим выбором сглаживающего параметра $b \in [0, 1]$. Значение $b = 1$ соответствует интерполяционному кубическому сплайну, а $b = 0$ – уравнению линейной регрессии.

Расчет коэффициентов сплайна d_{mj} , $m = \overline{0, 3}$, $j = \overline{1, K - 1}$, основанный на условии минимума целевого функционала (5.4) и условиях сопряжения звеньев сплайна (формулы для которых приведены, например, в [203]), реализуется современными программными средствами. Используем для расчета коэффициентов условие непрерывности сплайна вместе с его первой и второй производными во внутренних точках φ_j , $j = \overline{2, K - 1}$ и дополнительные соотношения, полученные из краевых условий $S''(0) = S''(\varphi^*) = 0$. В таком случае, основная задача при расчете коэффициентов d_{sj} переносится на надлежащий выбор параметра b , позволяющего в определенной степени управлять свойствами сглаживающих сплайнов, значение которого должно соотноситься с погрешностью δ измерений $\theta_{\delta}^*(\varphi)$

$$|S(\varphi) - \theta_{\delta}^*(\varphi)| \leq \delta.$$

После построения аппроксимирующего сплайна $S(\varphi)$ решение граничной ОЗТ на основе метода параметрической оптимизации сводится к решению задачи математического программирования

$$I_0(\Delta) = \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} |\theta(x^*, \varphi, \Delta) - S(\varphi)| \rightarrow \min_{\Delta \in G_{N+2}}, \quad (5.5)$$

минимизирующей максимальное отклонение между расчетными значениями $\theta(x^*, \varphi, \Delta)$, найденными на основе (3.74), (3.77), (3.78) при задании $q(\varphi)$ в виде кусочно-параболической функции (2.68) и соответствующими значениями сплайна (5.3).

Расчетная замкнутая система уравнений для определения оптимальных значений Δ^0 при заданном числе N принимает вид

$$\theta(x^*, \varphi_j^0, \Delta^0) - S(\varphi_j^0) = (-1)^{j+1} \beta I_0^{(N)}, \quad j = \overline{1, N+3}; \quad \beta = \pm 1; \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta(x^*, \varphi_{j_s}^0, \Delta^0) - S(\varphi_{j_s}^0)) = 0, \quad (5.7)$$

где теперь, в общем случае, из-за влияния помехи, искажающей форму $\theta(x^*, \varphi, \Delta) - S(\varphi)$ на всем интервале идентификации, возможен любой из вариантов $s = \overline{1, N+2}$; $s = \overline{2, N+2}$; $s = \overline{1, N+3}$ или $s = \overline{2, N+3}$.

С использованием предварительного сглаживания возмущенных исходных данных θ_δ^* на основе минимаксной оптимизации была решена граничная задача по восстановлению плотности теплового потока $q(\varphi)$ в классе непрерывных и непрерывно-дифференцируемых на интервале $[0, \varphi^*]$ функций при параметрическом представлении искомой характеристики в виде кусочно-параболической зависимости с числом $N = 3$ интервалов постоянства $q''(\varphi)$.

В модельном примере заданное воздействие $q^*(\varphi)$ имело экспоненциальный характер изменения во времени $q^*(\varphi) = 1 - e^{-\beta\varphi}$. Решение задачи осуществлялось с учетом полученного параметрического представления температурного поля (3.74), (3.77), (3.78) и его производной (3.81)–(3.83) при рассчитанной на основе (5.2) экспериментальной кривой (5.1), где $\theta^*(\varphi)$ вычислялось соответственно (3.80) при $x = x^*$ и использовании сглаживающих кубических сплайнов (5.3).

Результаты восстановления граничного воздействия при исходных данных $\beta = 3.2, \varphi^* = 1, x^* = 0.9$ и уровне погрешности $\delta_0 \in [0, 3] \%$ представлены в табл. 5.1 на рис. 5.1, 5.2.

Точность решения ОЗТ зависит от уровня возмущающего воздействия и интенсивности сглаживающих свойств соответствующего алгоритма. С увели-

Таблица 5.1. Точность решения задачи ($N = 3$) на основе предварительного сглаживания случайных возмущений $\delta(\varphi)$

$\delta_0, \%$	0%	0.2%	0.5%	1%	2%	3%
b	1	0.99998	0.99996	0.99991	0.99985	0.99967
$\max_{\varphi} S(\varphi) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0) , \%$	0.2950	0.3072	0.2967	0.2784	0.0.2720	0.2686
$\max_{\varphi} q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0) , \%$	3.7217	3.6459	4.0376	4.7720	5.9602	7.1875

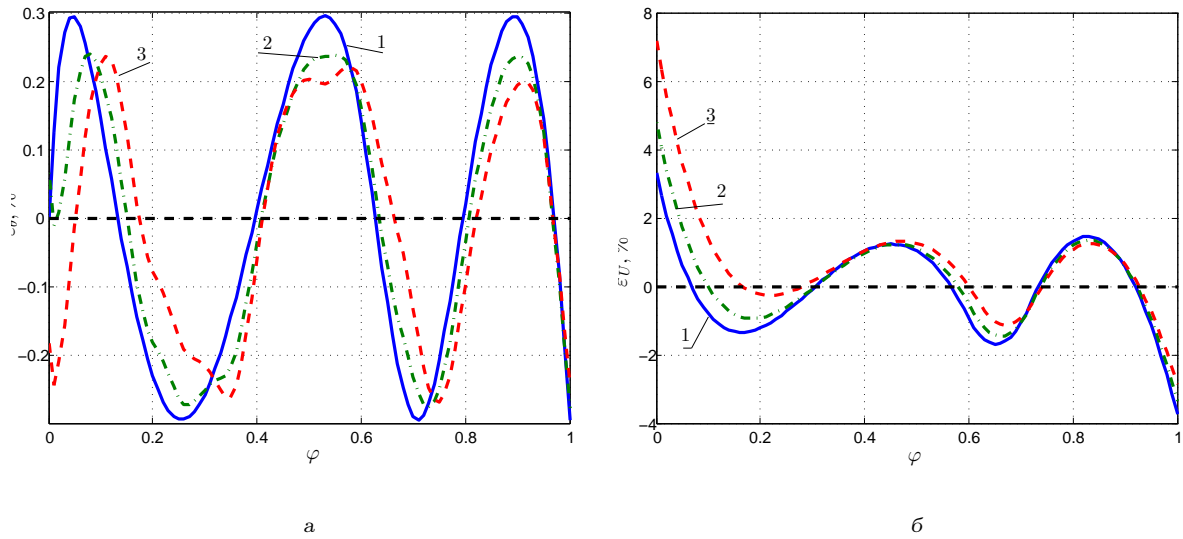


Рис. 5.1. Ошибки аппроксимации температуры $S(\varphi) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$ (а) и идентифицируемой плотности теплового потока $q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)$ (б) 1 - при $\delta = 0$; 2 - при $\delta = 1\%$; 3 - при $\delta = 3\%$;

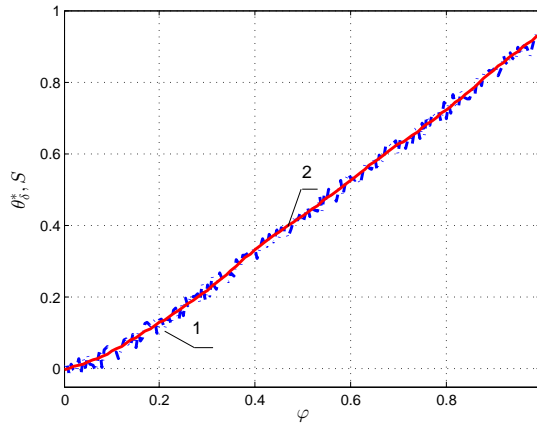


Рис. 5.2. Зашумленная температурная кривая $\theta_\delta^*(\varphi) - 1$ и сглаживающий кубический сплайн - 2 при $\delta = 3\%$

чением интенсивности возмущения форма кривой $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - S(\varphi)$ искажается, поэтому для сохранения возможности распознавания точек экстремума $\varphi_{j_s}^0$ приходится уменьшать параметр b , задающий интерполяционные свойства, тем самым увеличивая сглаживание. Это приводит к уменьшению погрешности $\max_{\varphi} |\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - S(\varphi)|$, и в общем случае сопровождается ростом ошибки $\max_{\varphi} |q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)|$.

Излишнее уменьшение параметра b может приводить к потере качественных свойств процесса, к пропуску экстремумов в конфигурации разности $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - S(\varphi)$ и к невозможности нахождения значения искомого параметра Δ^0 .

5.2. Метод параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности с учетом интервальных неопределенностей возмущений

5.2.1. Постановка задачи в условиях неполноты исходной информации

Далее рассмотрим применение метода параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности в условиях интервальных неопределенностей возмущений, для чего по-прежнему формулируется экстремальная постановка ОЗТ.

По экспериментальной температурной зависимости $\theta_\delta^*(\varphi) = \theta_\delta^*(\varphi, \delta)$, полученной в некоторой фиксированной точке $x^* \in [0, 1]$ при учете возмущения $\delta(\varphi)$, требуется восстановить искомое управление $u^0(\varphi)$, подчиненное ограничению (2.7) и минимизирующее невязку между приближенно заданным распределением $\theta_\delta^*(\varphi, \delta)$ и точным решением задачи $\theta(x^*, \varphi, u)$, соответствующим искомой функции $u^0(\varphi)$

$$I_1 = \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} |\theta_\delta^*(\varphi, \delta) - \theta(x^*, \varphi, u)| \rightarrow \min_{u \in V}. \quad (5.8)$$

Данные $\theta_\delta^*(\varphi)$, полученные с учетом влияния возмущений, характеризуются неполнотой исходной информации, что может рассматриваться как интервальные неопределенности, при которых объем априорных сведений о неточно заданной характеристике ограничивается сведениями о границах интервала ее возможного изменения. При решении ОЗТ (5.8) интервальные неопределенности могут быть сформулированы как по отношению к амплитуде возмущающего воздействия $\delta(\varphi)$, так и по отношению к самой экспериментально полученной температурной зависимости $\theta_\delta^*(\varphi, \delta)$.

В такой постановке задачи полагается, что влияние помехи в любой момент времени однозначно определяется величиной $\delta(\varphi)$, о которой известно то, что она может принимать любое значение в заданных пределах

$$\delta_{\min} \leq \delta(\varphi) \leq \delta_{\max}, \quad (5.9)$$

где $\delta_{\min} \leq 0$, $\delta_{\max} \geq 0$.

Интервальные неопределенности вида (5.9) приводят к тому, что экспериментальная зависимость $\theta_\delta^*(\varphi, \delta)$ в любой момент времени может иметь отклонение в диапазоне $[\theta_{\min}^*, \theta_{\max}^*]$ от невозмущенного состояния $\theta^*(\varphi)$, соответствующего значению $\delta = 0$. Здесь

$$\theta_{\min}^*(\varphi) = \theta^*(\varphi) + \delta_{\min}; \quad \theta_{\max}^*(\varphi) = \theta^*(\varphi) + \delta_{\max}. \quad (5.10)$$

В случае отсутствия информации о значениях δ_{\min} и δ_{\max} интервальные неопределенности могут быть изначально заданы по отношению к экспериментальным значениям температуры в каждый момент времени φ

$$\theta_{\min}^*(\varphi) \leq \theta_\delta^*(\varphi, \delta) \leq \theta_{\max}^*(\varphi). \quad (5.11)$$

При такой постановке задачи, в ситуации, когда точная информация о значении $\theta^*(\varphi)$ или о величине уровня помех $\delta(\varphi)$ в измеряемом сигнале неизвестна, полагается, что $\delta(\varphi)$ может принимать любое из значений на заданном диапазоне изменения (5.9), или что вместо одной возмущенной приближенно заданной температурной кривой $\theta_\delta^*(\varphi, \delta)$ может рассматриваться любая зависимость, удовлетворяющая условиям (5.11).

В этом случае задача может быть сформулирована по отношению не к одному процессу теплопроводности с неопределенностями вида (5.9) или (5.11), а относительно множества тепловых процессов с полной информацией о значениях экспериментальной температуры $\theta_\delta^*(\varphi, \delta)$ в каждый момент времени, удовлетворяющих всем возможным вариантам в условиях (5.11), или о значениях $\delta(\varphi)$, соответствующих всем возможным реализациям возмущающего воздействия, согласно (5.9). Т.е. каждой из бесконечного множества возможных экспериментальных зависимостей $\theta_\delta^*(\varphi, \delta)$ или допустимых значений $\delta(\varphi)$ соответствует процесс нестационарной теплопроводности, описываемый известной математической моделью (3.69), (3.2), (3.70) в условиях (5.1) с точным значением $\theta_\delta^*(\varphi, \delta)$ или значением $\delta(\varphi)$. Тем самым, процесс (3.69), (3.2), (3.70) в условиях (5.1), (5.9) или (5.11) заменяется совокупностью бесконечного числа подобных процессов с полной информацией об экспериментальной температуре или о величине возмущения. В этом случае интервальные неопределенности (5.9) и (5.11) соответствуют бесконечной совокупности измеряемых температурных распределений $\theta_\delta^*(\varphi, \delta)$ на интервале идентификации, зависящих в каждый момент времени от величины δ .

При подобном подходе решение ОЗТ может рассматриваться как поиск оптимального управляющего воздействия $u^0(\varphi)$ для всей совокупности процессов теплопроводности. Требование соблюдения предельно допустимого отклонения расчетного температурного состояния $\theta(x^*, \varphi, u^0)$ от возможных значений экспериментальной температуры $\theta_\delta^*(\varphi, \delta)$ должно быть выполнено для всех допустимых значений $\delta \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}]$ на всем интервале идентификации $\varphi \in [0, \varphi^*]$

$$I_2 = \max_{\delta} \left| \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} |\theta_\delta^*(\varphi, \delta) - \theta(x^*, \varphi, u)| \right| \rightarrow \min_{u \in V}; \quad \delta \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}]. \quad (5.12)$$

В этом случае постановка задачи оптимального управления в условиях интервальной неопределенности вида (5.9) или (5.11) формулируется следующим образом.

Для объекта (3.69), (3.2), (3.70) в условиях (5.1), (5.9) или (5.11) необходимо найти подчиненное ограничению (2.7) управляющее воздействие $u(\varphi) = q(\varphi)$, обеспечивающее на заданном временном интервале выполнение минимаксного соотношения (5.12).

Решение задачи (5.12) также может быть основано на предложенном в главе 3 подходе и сведено к задаче минимаксной оптимизации относительно ошибки равномерного приближения модельной температуры к экспериментальным данным.

В условиях интервальной неопределенности применение принципа максимума Понтрягина к задаче (5.12) позволяет получить алгоритм оптимального управления всей совокупностью объектов оптимизации в виде кусочно-параболической функции времени, той же структуры, как и при наличии полной информации об объекте [49]. Оптимальное управляющее воздействие $u^0(\varphi)$ по-прежнему определяется числом N и значениями вектора параметров Δ^0 .

В этом случае, температурное поле также является функцией параметров Δ , что позволяет осуществить точную редукцию некорректной постановки исходной ОЗТ к задаче математического программирования относительно вектора Δ , но задача оптимизации формулируется не по отношению к одной реализации $\theta_\delta^*(\varphi)$ экспериментальных данных, а по отношению к совокупности таких реализаций $\theta_\delta^*(\varphi, \delta) = \theta^*(\varphi) + \delta(\varphi)$, где $\delta(\varphi)$, согласно (5.9), может принимать

любые значения из допустимого диапазона :

$$I_0(\Delta) = \max_{\delta} \left| \max_{\varphi \in [0, \varphi^*]} |\theta_{\delta}^*(\varphi, \delta) - \theta(x^*, \varphi, \Delta)| \right| \rightarrow \min_{\Delta}; \delta(\varphi) \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}]. \quad (5.13)$$

Задача (5.13) эквивалентна (5.8) на расширенном множестве аргументов (φ, δ) вместо отрезка $[0, \varphi^*] \ni \varphi$ в (5.8).

Оптимальное управление $u^0(\varphi)$, являющееся решением минимаксной задачи (5.13), обеспечивает минимально возможную погрешность $I_0(\Delta^0)$ аппроксимации $\theta_{\delta}^*(\varphi, \delta)$ в "наихудшем" случае по величине $\delta(\varphi)$. При этом получаемая точность $I_0(\Delta^0)$ решения ОЗТ будет совпадать с минимально возможной погрешностью для наиболее неблагоприятной реализации, характеризующейся максимальным отклонением от $\theta^*(\varphi)$ или максимальным по абсолютной величине уровнем возмущения $\delta_0 = \max(|\delta_{\max}|, |\delta_{\min}|)$. В то же время, эта погрешность $I_0(\Delta^0)$ заведомо превышает минимально возможное значение для остальных допустимых реализаций $\theta_{\delta}^*(\varphi, \delta)$ и значений $\delta(\varphi)$. Такая потеря по величине критерия оптимальности (5.13) по сравнению с ситуацией, когда экспериментальная зависимость или уровень помехи известны точно, является неизбежной компенсацией за гарантированное качество процесса идентификации в условиях интервальной неопределенности. Тем самым, оптимальное управление $u^0(\varphi)$ реализует стратегию гарантированного результата.

5.2.2. Методика решения минимаксной задачи с интервальными неопределенностями

На основе постановки задачи математического программирования (5.13) сформируем вектор $\mathbf{v} = (\varphi, \delta)$, представляющий совокупность всех фиксированных значений $\varphi \in [0, \varphi^*]$ и $\delta \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}]$, соответствующий всем возможным реализациям $\theta_{\delta}^*(\varphi, \delta)$, и запишем задачу (5.13) в следующем виде

$$I_0(\Delta) = \max_{\mathbf{v}} |\theta_{\delta}^*(\mathbf{v}) - \theta(x^*, \varphi, \Delta)| \rightarrow \min_{\Delta}. \quad (5.14)$$

Здесь разность $\theta_{\delta}^*(\mathbf{v}) - \theta(x^*, \varphi, \Delta)$ для каждого значения вектора Δ представляет собой всю совокупность распределений температурных невязок по времени для всех возможных реализаций возмущающего воздействия $\delta(\varphi)$.

Задача (5.14) предусматривает возможность отыскания максимума абсолютного температурного отклонения на множестве допустимых значений мо-

ментов времени и величины погрешности. Свойства чебышевского альтернанса, фиксирующие в точках φ_q^0 достижение знакопередающихся максимальных по абсолютной величине отклонений, формулируются относительно ошибки $\pm I_0(\Delta^0)$ приближения $\theta_\delta^*(\mathbf{v}) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$ температурного поля [56; 57; 142; 159].

Свойства оптимальных температурных распределений $\theta_\delta^*(\mathbf{v}) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$ относятся здесь ко всей их совокупности, на основании чего соответствующие точки \mathbf{v}_k могут содержать комбинации величин $(\varphi_k^0, \delta_k^0)$ с разными значениями неопределенных факторов. Т.е. температурные максимумы и минимумы могут достигаться на решениях задачи (5.14) в разных точках координатной оси для разных значений величины погрешности δ .

Решение проблемы отыскания значений δ_k^0 для каждой точки φ_k^0 и распознавания конфигурации $\theta_\delta^*(\mathbf{v}) - \theta(x^*, \varphi, \Delta)$ на множестве значений \mathbf{v} для последующего формирования расчетных систем уравнений производится на основе альтернансного метода [142].

Согласно общим свойствам [142], на заданной области определения \mathbf{v} существуют точки $\mathbf{v}_k^0 = (\varphi_k^0, \delta_k^0)$, $k = \overline{1, R}$ с предельно допустимыми отклонениями $\pm I_0(\Delta^0)$ расчетной температуры $\theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$ от экспериментально измеренной. Для любого фиксированного значения δ форма кривой $\theta_\delta^*(\mathbf{v}) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$ совпадает с аналогичной в задаче с полным объемом информации, определяется числом N и может быть точно задана на основе альтернансных свойств. Для учета интервальных неопределенностей остается распознать соответствующие реализации $\theta_\delta^*(\varphi, \delta_k)$ или соответствующие значения δ_k^0 , при которых достигаются температурные минимумы и максимумы в точках φ_k^0 .

На основе соображений физического характера очевидно, что значения $\delta = \delta_{\min}$ и $\delta = \delta_{\max}$ выделяют соответственно «нижнюю» и «верхнюю» температурные кривые, между которыми располагаются температурные невязки для всех других значений δ .

При общем управляющем воздействии для всей совокупности процессов положительные предельные температурные отклонения (максимумы температурной невязки) достигаются на предельной реализации $\theta_{\max}^* = \theta_\delta^*(\varphi, \delta_{\max})$, ограничивающей все множество траекторий «сверху» и соответствующей максимальному уровню возмущения $\delta = \delta_{\max}$. Отрицательные предельные откло-

нения (минимумы погрешности аппроксимации) достигаются в этих условиях на нижней траектории $\theta^*_{\min} = \theta^*_\delta(\varphi, \delta_{\min})$ при величине погрешности $\delta = \delta_{\min}$.

В итоге, расчетная система уравнений принимает вид

$$\begin{aligned}\theta^*_{\max}(\bar{\varphi}_i) - \theta(x^*, \bar{\varphi}_i, \Delta^0) &= I_0; \\ \theta^*_{\min}(\tilde{\varphi}_j) - \theta(x^*, \tilde{\varphi}_j, \Delta^0) &= -I_0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta^*_{\max}(\bar{\varphi}_i) - \theta(x^*, \bar{\varphi}_i, \Delta^0)) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta^*_{\min}(\tilde{\varphi}_j) - \theta(x^*, \tilde{\varphi}_j, \Delta^0)) &= 0.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Температурные кривые $\theta^*_{\min}(\varphi)$ и $\theta^*_{\max}(\varphi)$, соответствующие «нижней» и «верхней» реализациям, могут быть получены в результате применения алгоритмов статистической обработки данных, зависящих от вида возмущающего воздействия, или на основе априорной информации о δ_{\min} и δ_{\max} .

Здесь моменты $\bar{\varphi}_i$ и $\tilde{\varphi}_j$ образуют множество всех точек альтернанса $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_R\}$, а индексы i и j принимают соответственно значения $1, 3, \dots, N + 2$ или $2, 4, \dots, N + 3$ в случае, если N является нечетным числом, либо $1, 3, \dots, N + 3$ или $2, 4, \dots, N + 2$ в случае, если N – четное число.

Решение системы расчетных соотношений (5.15) при заданном числе N относительно вектора параметров Δ^0 позволяет получить аппроксимацию идентифицируемой функции плотности теплового потока $q(\varphi) = u(\varphi)$ в форме кусочно-параболической зависимости.

5.2.3. Вычислительные примеры и результаты решения

Решение сформулированной граничной ОЗТ в условиях интервальной неопределенности было реализовано в классе кусочно-параболических функций при $N = 3$ при типовых модельных «возмущениях», получаемых с помощью генератора псевдослучайных чисел.

Пример 1. Случайные погрешности в измерениях температур.

Влияние случайных погрешностей на экспериментальную зависимость рассматривалось на примере нормального закона распределения плотности вероятностей при использовании правила «трех сигм» в виде

$$\theta^*_\delta(\varphi) = \theta^*(\varphi) + \frac{\delta_0}{3}\omega_1(\varphi),\tag{5.16}$$

где ω_1 — случайная величина, распределенная по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием $M[\omega_1] = 0$ и единичной дисперсией $\sigma^2 = 1$,

δ_0 — амплитуда (уровень) шума; а также на примере равномерного закона распределения плотности вероятностей

$$\theta_\delta^*(\varphi) = \theta^*(\varphi) + \delta_0 \omega_2(\varphi), \quad (5.17)$$

где ω_2 — случайная величина, распределенная по равномерному закону на сегменте $[-1, 1]$.

Для зашумленной температурной кривой в качестве границ диапазона размещения всех реализаций с допустимым уровнем δ могут использоваться нижняя $L(\theta_\delta^*(\varphi))$ и верхняя $H(\theta_\delta^*(\varphi))$ огибающие, построенные на основе преобразования Гильберта [205] при использовании, в случае необходимости, предварительного сглаживания экспериментальных данных. При таком подходе максимумы температурной невязки лежат на верхней огибающей при $\delta = \delta_{\max} = \delta_0$, а минимумы — на нижней при $\delta = \delta_{\min} = -\delta_0$.

Система альтернансных соотношений при учете случайных погрешностей измерений примет вид

$$\begin{aligned} H(\theta_\delta^*(\bar{\varphi}_i)) - \theta(x^*, \bar{\varphi}_i, \Delta^0) &= I_0; \\ L(\theta_\delta^*(\tilde{\varphi}_j)) - \theta(x^*, \tilde{\varphi}_j, \Delta^0) &= -I_0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (H(\theta_\delta^*(\bar{\varphi}_i)) - \theta(x^*, \bar{\varphi}_i, \Delta^0)) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (L(\theta_\delta^*(\tilde{\varphi}_j)) - \theta(x^*, \tilde{\varphi}_j, \Delta^0)) &= 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$i = 1, 3, 5; j = 2, 4, 6$ или $i = 2, 4, 6; j = 1, 3, 5$.

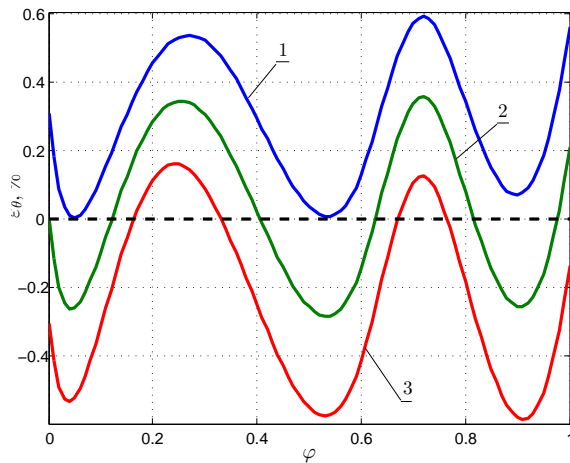
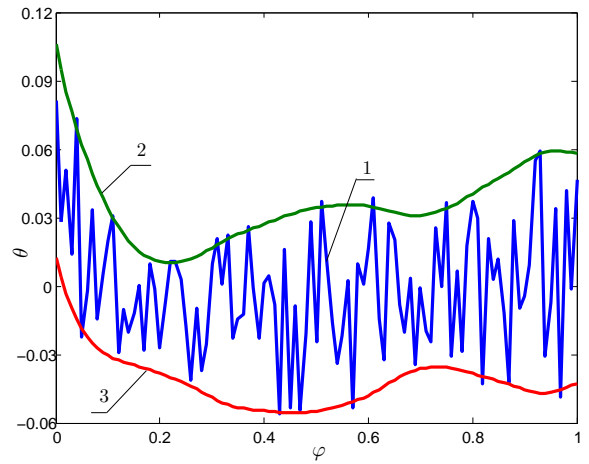
Некоторые результаты решения граничной ОЗТ с учетом в измерениях интервальных неопределенностей случайных погрешностей, распределенных по нормальному закону, представлены в табл. 5.2 и на рис. 5.3–5.8.

На рис. 5.3 представлены результаты построения верхней и нижней огибающих, ограничивающих всю совокупность возможных реализаций экспериментальных температурных распределений при нормальном законе распределения помехи, $\delta = 3\%$. Здесь из графиков $\theta_\delta^*(\varphi)$, $H(\theta_\delta^*(\varphi))$ и $L(\theta_\delta^*(\varphi))$ вычтена детерминированная составляющая (линейный тренд) $\Upsilon(\varphi) = c_0 + c_1\varphi$.

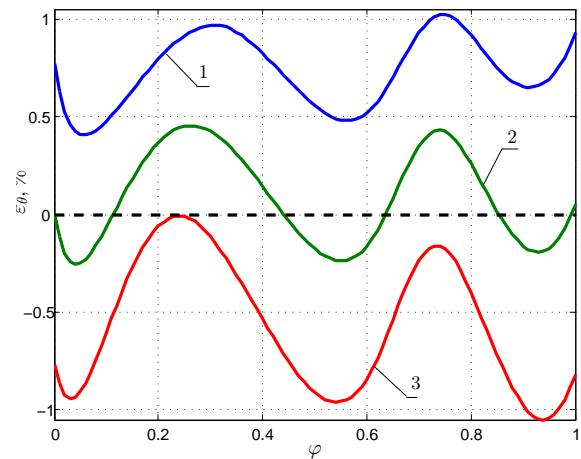
Таблица 5.2. Точность решения задачи ($N = 3$) при нормальном законе распределения помехи $\delta(\varphi)$ и уровне погрешности $\delta_0 \in [0, 3]\%$

$\delta_0, \%$	0%	0.2%	0.5%	1%	2%	3%
$\max_{\mathbf{v}} \theta_{\delta}^*(\mathbf{v}) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0) , \%$	0.2950	0.5897	1.0501	1.8268	3.5260	5.3241
$\max_{\mathbf{v}} q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0) , \%$	3.7217	3.2785	3.0325	3.2332	4.2631	4.4483

Рис. 5.3. Результаты статистической обработки данных: 1 – зашумленная температурная кривая $\theta_{\delta}^*(\varphi) - \Upsilon(\varphi)$, 2 – $H(\theta_{\delta}^*(\varphi)) - \Upsilon(\varphi)$, 3 – $L(\theta_{\delta}^*(\varphi)) - \Upsilon(\varphi)$ при $\delta = 3\%$



а



б

Рис. 5.4. Ошибка приближения температурного поля при нормальном законе распределения помехи $\delta = 0.2\%$ (а) и $\delta = 0.5\%$ (б) 1 – $H(\theta_{\delta}^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$; 2 – $\theta^*(\varphi) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$; 3 – $L(\theta_{\delta}^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$;

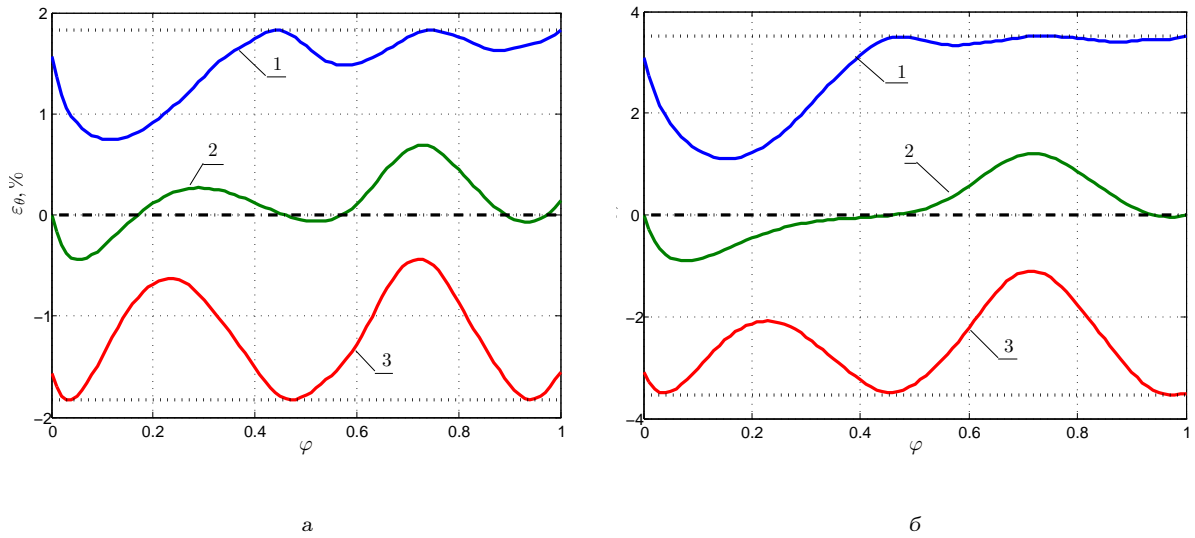


Рис. 5.5. Ошибка приближения температурного поля при нормальном законе распределения помехи $\delta = 1\%$ (а) и $\delta = 2\%$ (б) 1 – $H(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$; 2 – $\theta^*(\varphi) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$; 3 – $L(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$;

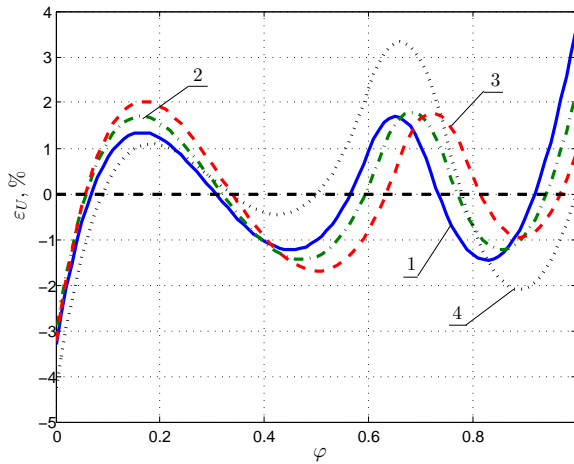


Рис. 5.6. Погрешность восстановления искомой характеристики $q^*(\varphi) = u(\varphi, \Delta^0)$: 1 – при $\delta = 0\%$, 2 – при $\delta = 0.5\%$, 3 – при $\delta = 1\%$, 4 – при $\delta = 2\%$

Точность решения ОЗТ при использовании возмущенных данных существенно зависит от уровня помехи, а также от алгоритмов статистической обработки данных, предусматривающих процедуры фильтрации или сглаживания. При невысоком уровне помехи $\delta_0 = 0.2 - 0.5\%$ (на примере нормального закона распределения) конфигурация $H(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$ и $L(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$ позволяет однозначным образом найти решение задачи (рис. 5.4). С увеличением уровня возмущающего воздействия для поддержания гладкого характера огибающих алгоритм их построения приходится дополнять процедурой сглаживания. Это может приводить к искажению формы огибающих, к недостаточному или избыточному числу экстремумов $H(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$ или

$L(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$. В таком случае задача может или не иметь решения, или количество систем уравнений (5.18), составленных для разных моментов $\bar{\varphi}_i$ и $\tilde{\varphi}_j$, и имеющих, соответственно, разные решения Δ^0 может быть больше одной (рис. 5.7). В такой ситуации, при возможности проводить исследования на модельных примерах, нужно рассмотреть все возможные варианты системы (5.18), найти решение каждой из этих систем, и решением задачи математического программирования (5.14) будет решение задачи с минимальным значением критерия $I_0(\Delta)$.

При отсутствии такой возможности рекомендуется найти все возможные варианты $\{u(\varphi, \Delta^0)\}$, соответствующие различным значениям вектора параметров Δ^0 и окончательный вариант, рассматриваемый как решение задачи (5.14), получить в результате усреднения множества допустимых решений $\{u(\varphi, \Delta^0)\}$ (рис. 5.8).

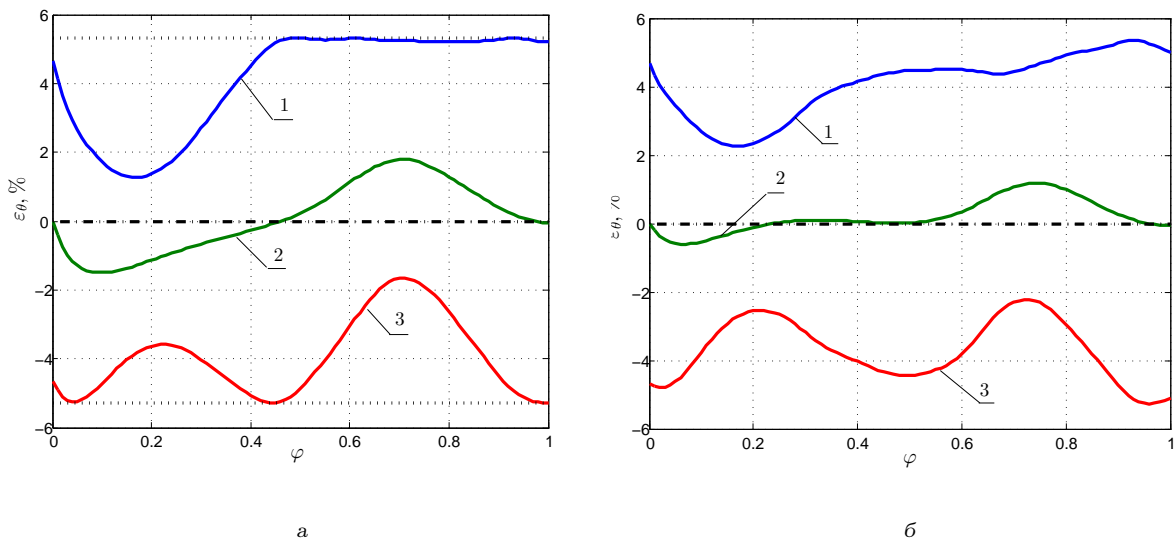
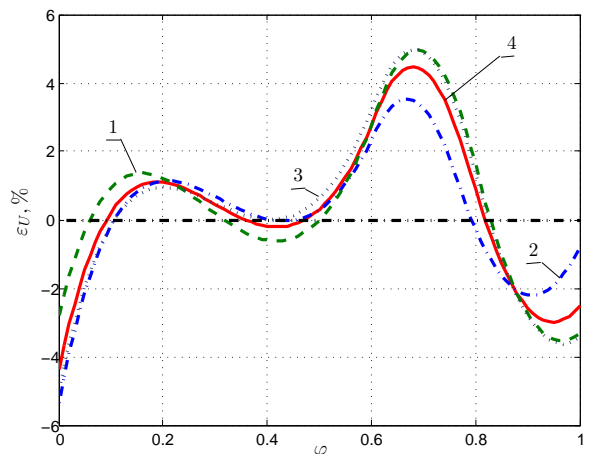


Рис. 5.7. Конфигурация температурной невязки, определенная на основе различных решений Δ_1^0 и Δ_2^0 при $\delta = 3\%$: $\Delta^0 = \Delta_1^0$ (а) и $\Delta^0 = \Delta_2^0$ (б) 1 – $H(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$; 2 – $\theta^*(\varphi) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$; 3 – $L(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$;

Рис. 5.8. Погрешность восстановления искомой характеристики $q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)$ при $\delta = 3\%$: 1, 2, 3 – решения, соответствующие различным значениям вектора Δ_1^0, Δ_2^0 и Δ_3^0 ; 4 – результат усреднения



Приведенные модельные примеры показывают, что увеличение уровня возмущения приводит к монотонному быстрому и существенному росту ошибки аппроксимации температурного поля

$$I_0 = \max |H(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)| = \max |L(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)|.$$

При этом зависимость погрешности $\max |q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)|$ аппроксимации искомой плотности теплового потока от величины δ_0 в общем случае не является монотонной. Наоборот, иногда может возникнуть ситуация, при которой увеличение вариантов решения СЗМП (5.14), что имеет место при возрастании уровня погрешности, позволяет выбрать из них (при возможности) вариант, реализующий аппроксимацию $q^*(\varphi)$ с меньшей ошибкой, что невозможно осуществить при решении той же задачи с меньшей амплитудой δ_0 , характеризующейся однозначной формой кривых $H(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$ и $L(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$. При увеличении δ_0 происходит искажение формы указанных кривых; в различных точках $\bar{\varphi}_i$ или $\tilde{\varphi}_j$ (при разных значениях i или j) совпадение значений

$$H(\theta_\delta^*(\bar{\varphi}_i)) - \theta(x^*, \bar{\varphi}_i, \Delta^0) = L(\theta_\delta^*(\tilde{\varphi}_j)) - \theta(x^*, \tilde{\varphi}_j, \Delta^0)$$

осуществляется с погрешностью, что следует учитывать при практическом решении систем расчетных уравнений (5.18). Также правило чередования моментов $\bar{\varphi}_i$ и $\tilde{\varphi}_j$ с увеличением δ_0 может нарушаться. Последующее увеличение амплитуды погрешности ведет к существенному искажению формы кривых $H(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$ и $L(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$.

В общем случае, увеличение числа вариантов возможных систем (5.18), сопровождающееся указанными сложностями в опозновании конфигурации $H(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$ и $L(\theta_\delta^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$, может служить признаком достижения ограничений диапазона применимости разработанного метода.

Данные, полученные при решении граничной ОЗТ при действии случайного возмущения, характеризуемого равномерной плотностью распределения помехи, приведены в табл. 5.3 и на рис. 5.9–5.11 и показывают аналогичные результаты.

Таблица 5.3. Точность решения задачи при равномерном законе распределения помехи ($N = 3$) и уровне погрешности $\delta_0 \in [0, 3], \%$

$\delta_0, \%$	0%	0.2%	0.5%	1%	2%	3%
$\max_{\mathbf{v}} \theta_{\delta}^*(\mathbf{v}) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0) , \%$	0.2950	0.4460	0.6758	1.0710	1.8922	2.7070
$\max_{\mathbf{v}} q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0) , \%$	3.7217	3.9479	4.2778	4.8624	6.2517	6.9421

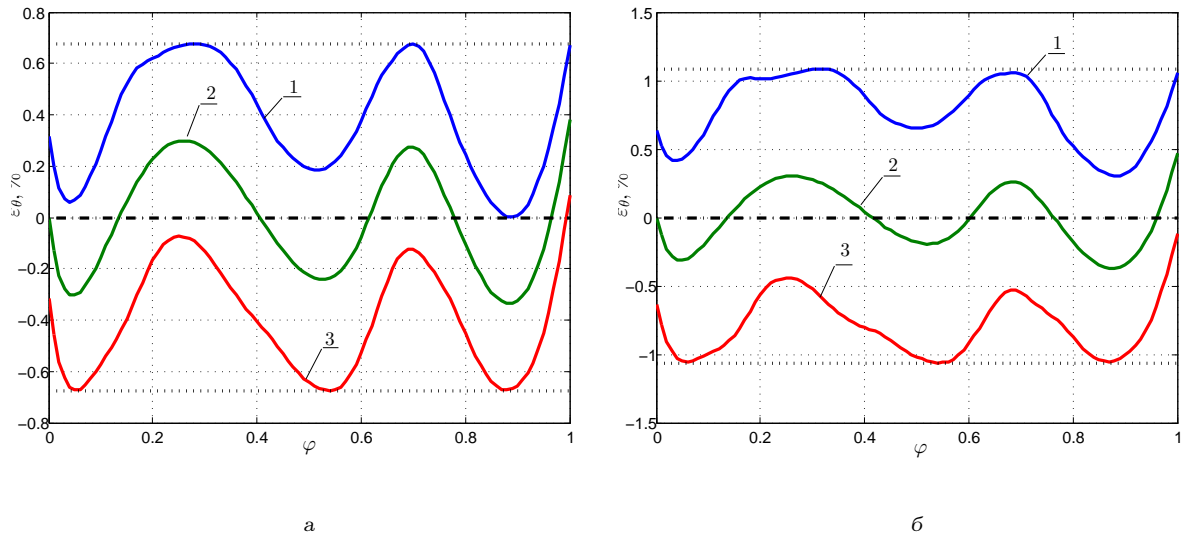


Рис. 5.9. Ошибка приближения температурного поля при равномерном законе распределения помехи $\delta = 0.5\%$ (а) и $\delta = 1\%$ (б) 1 – $H(\theta_{\delta}^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$; 2 – $\theta^*(\varphi) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$; 3 – $L(\theta_{\delta}^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$;

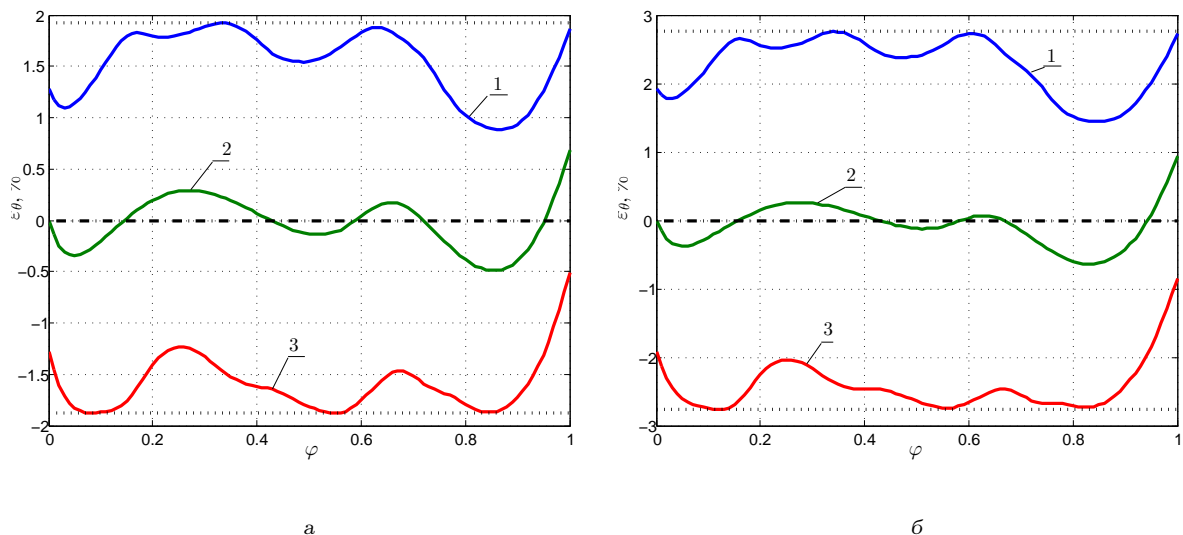
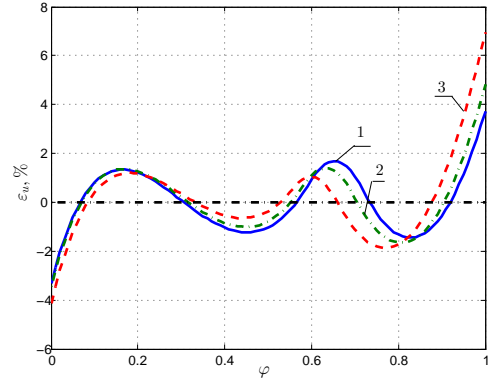


Рис. 5.10. Ошибка приближения температурного поля при равномерном законе распределения помехи $\delta = 2\%$ (а) и $\delta = 3\%$ (б) 1 – $H(\theta_{\delta}^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$; 2 – $\theta^*(\varphi) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$; 3 – $L(\theta_{\delta}^*(\varphi)) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0)$;

Рис. 5.11. Погрешность восстановления иско-
мой характеристики $q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)$ при равно-
мерном законе распределения помехи: 1 – при
 $\delta = 0\%$, 2 – при $\delta = 1\%$, 3 – при $\delta = 3\%$



Пример 2. Систематическая погрешность в измерениях температур.

В случае действия постоянной систематической погрешности (смещения значений температуры), — в модельной экспериментальной зависимости (5.1) полагается $\delta(\varphi) = \delta_0 = \text{const}$, $\delta_0 \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}]$.

В этих условиях реализация, ограничивающая всю совокупность траекторий «сверху», соответствует разности $\theta_\delta^*(\varphi) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \delta_{\min}$, на этой кривой будут располагаться максимумы температурной невязки. Минимумы невязки достигаются на нижней траектории $\theta_\delta^*(\varphi) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0) - \delta_{\max}$.

Система расчетных соотношений (5.15) при учете систематической погрешности, заданной в условиях $\delta \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}]$, примет вид

$$\begin{aligned}
 \theta_\delta^*(\bar{\varphi}_i) - \theta(x^*, \bar{\varphi}_i, \Delta^0) - \delta_{\min} &= I_0; \\
 \theta_\delta^*(\tilde{\varphi}_j) - \theta(x^*, \tilde{\varphi}_j, \Delta^0) - \delta_{\max} &= -I_0; \\
 \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta_\delta^*(\bar{\varphi}_i) - \theta(x^*, \bar{\varphi}_i, \Delta^0) - \delta_{\min}) &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta_\delta^*(\tilde{\varphi}_j) - \theta(x^*, \tilde{\varphi}_j, \Delta^0) - \delta_{\max}) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

В частном случае $\delta \in [0, \delta_0]$ система уравнений (5.19) примет вид

$$\begin{aligned}
 \theta_\delta^*(\bar{\varphi}_i) - \theta(x^*, \bar{\varphi}_i, \Delta^0) &= I_0; \\
 \theta_\delta^*(\tilde{\varphi}_j) - \theta(x^*, \tilde{\varphi}_j, \Delta^0) - \delta_0 &= -I_0; \\
 \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta_\delta^*(\bar{\varphi}_i) - \theta(x^*, \bar{\varphi}_i, \Delta^0)) &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta_\delta^*(\tilde{\varphi}_j) - \theta(x^*, \tilde{\varphi}_j, \Delta^0) - \delta_0) &= 0,
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

а при $\delta \in [-\delta_0, 0]$ приходим к системе

$$\begin{aligned} \theta_\delta^*(\bar{\varphi}_i) - \theta(x^*, \bar{\varphi}_i, \Delta^0) + \delta_0 &= I_0; \\ \theta_\delta^*(\tilde{\varphi}_j) - \theta(x^*, \tilde{\varphi}_j, \Delta^0) &= -I_0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta_\delta^*(\bar{\varphi}_i) - \theta(x^*, \bar{\varphi}_i, \Delta^0) + \delta_0) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (\theta_\delta^*(\tilde{\varphi}_j) - \theta(x^*, \tilde{\varphi}_j, \Delta^0)) &= 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Результаты решения ОЗТ для случая $\delta \in [0, \delta_0]$ представлены в табл. 5.4 и на рис. 5.13, а для случая $\delta \in [0, -\delta_0]$ – в табл. 5.5 и на рис. 5.12 и 5.14.

Таблица 5.4. Точность решения задачи при систематической погрешности $\delta_0 \in [0, 2]$ %, $N = 3$

$\delta_0, \%$	0%	0.11%	0.2%	0.5%	1%	2%
$\max_{\mathbf{v}} \theta_\delta^*(\mathbf{v}) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0) , \%$	0.2950	0.2328	0.3824	0.5175	0.7891	1.3563
$\max_{\mathbf{v}} q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0) , \%$	3.7217	3.6367	3.9039	4.7453	6.2113	9.0306

Таблица 5.5. Точность решения задачи при систематической погрешности $\delta_0 \in [0, -2]$ %, $N = 3$

$\delta_0, \%$	0%	-0.2%	-0.5%	-1%	-2%
$\max_{\mathbf{v}} \theta_\delta^*(\mathbf{v}) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0) , \%$	0.2950	0.4103	0.5909	1.0077	2.0108
$\max_{\mathbf{v}} q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0) , \%$	3.7217	3.8926	4.2175	5.9221	10.9757

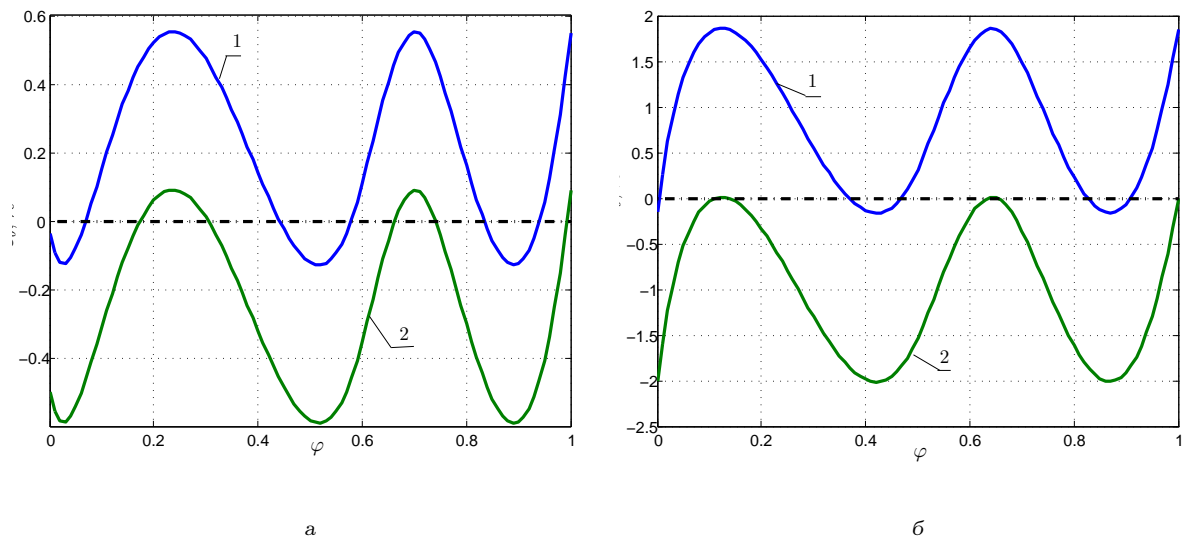


Рис. 5.12. Ошибка приближения температурного поля при систематической погрешности $\delta = -0.5\%$ (а) и $\delta = -2\%$ (б) 1 – $\theta_\delta^*(\bar{\varphi}) - \theta(x^*, \bar{\varphi}, \Delta^0) - \delta_{\min}$; 2 – $\theta_\delta^*(\tilde{\varphi}) - \theta(x^*, \tilde{\varphi}, \Delta^0) - \delta_{\max}$

Рис. 5.13. Погрешность восстановления иско-
мой характеристики $q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)$ при си-
стематической погрешности : 1 – при $\delta_0 = 0\%$,
2 – при $\delta_0 = 0.5\%$, 3 – при $\delta_0 = 1\%$, 4 – при
 $\delta_0 = 2\%$

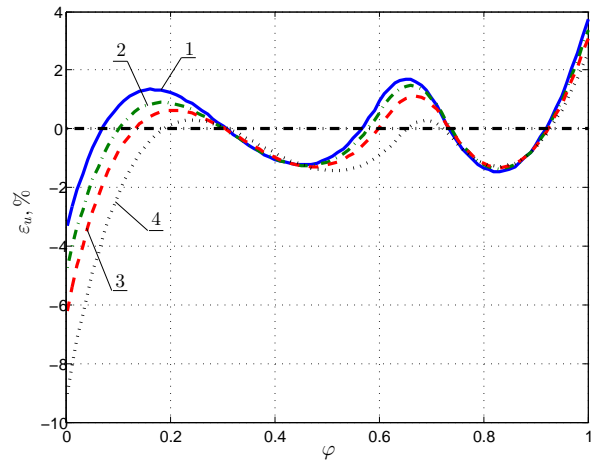
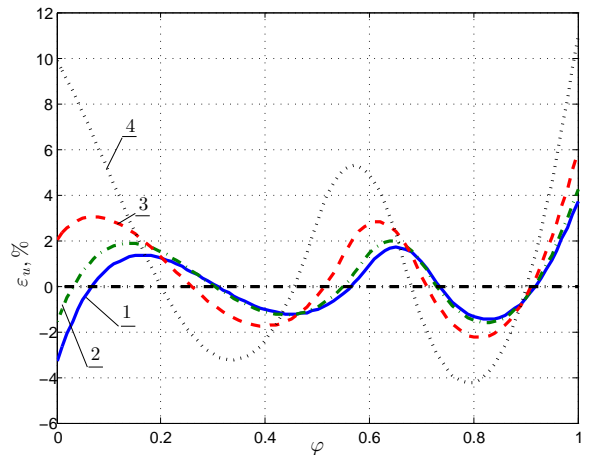


Рис. 5.14. Погрешность восстановления иско-
мой характеристики $q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)$ при си-
стематической погрешности : 1 – при $\delta = 0\%$,
2 – при $\delta = -0.5\%$, 3 – при $\delta = -1\%$, 4 – при
 $\delta = -2\%$



Погрешность аппроксимации идентифицируемого воздействия существенно зависит от вида и от уровня возмущения. При действии систематической погрешности, как правило, с увеличением ее амплитуды ошибка аппроксимации температурного поля возрастает, при этом при небольшой интенсивности возмущения возможно нарушение этой тенденции, например, в рассматриваемом примере на небольшом начальном участке при $\delta \in [0, 0.11\%]$ (табл. 5.4).

Погрешность восстановления искомой плотности теплового потока, как правило, достигаемая на границах интервала идентификации, определяется конфигурацией кривой $q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)$. Увеличение δ_0 приводит к искажению формы $q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)$, зависящей от многих факторов в каждой конкретной задаче. Например, в рассматриваемом примере при $\delta_0 \in [0, 2]\%$ происходит постепенное смещение кривой $q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)$, что приводит к следующим результатам. При $\delta_0 = 0$ максимальная погрешность аппроксимации наблюдается на границе $x = 1$, при увеличении δ_0 конфигурация изменяется таким образом, что погрешность на границе $x = 1$ уменьшается, а ошибка в точке $x = 0$, наоборот, возрастает. При некотором значении δ_0 (в данной конкретной задаче

при $\delta_0 = 0.11\%$) достигается равенство отклонений на обеих границах, которое составляет 3.6367% , что соответствует минимальной погрешности восстановления искомого управления. Погрешность аппроксимации температуры при этом составляет 0.2328% . Далее, ошибка достигается на границе $x = 0$ и возрастает с увеличением δ_0 (рис. 5.13).

При $\delta_0 \in [0, -2]\%$ расположение $q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)$ смещается в другую сторону, что приводит при $\delta_0 = -2\%$ к искажению ее формы и дальнейшему быстрому росту ошибки (рис. 5.14).

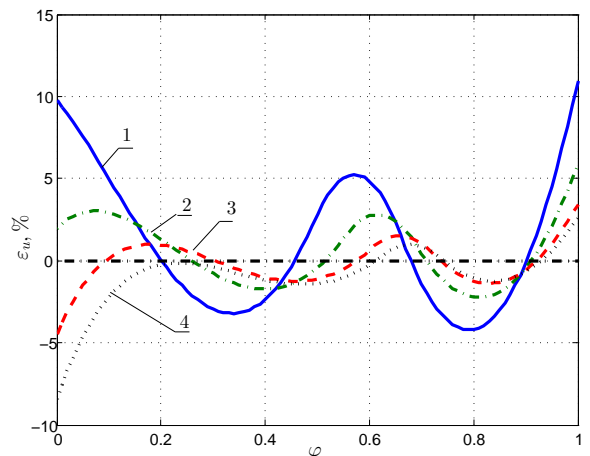
Результаты решения ОЗТ для общего случая $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$ на основе системы расчетных уравнений (5.19) представлены в табл. 5.6 и на рис. 5.15. Решение задачи в рассматриваемом случае также осуществляется по общей схеме, при этом погрешность аппроксимации температуры и искомой функции $q(\varphi)$ возрастает примерно пропорционально.

Рост уровня возмущения вызывает изменение формы кривой $q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)$. При этом, при $\delta > 0$ происходит постепенное изменение конфигурации $q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)$, что влечет постепенное увеличение погрешности аппроксимации. При $\delta < 0$ (при $\delta = -1\%$) наблюдается существенное искажение формы $q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)$, характерной для случая $N = 3$, что приводит к резкому росту погрешности идентификации.

Таблица 5.6. Точность решения задачи при действии систематической погрешности $\delta_0 \in [-1, 1]\%$, ($N = 3$)

$\delta_0, \%$	-1%	-0.5%	-0.2%	0%	0.2%	0.5%	1%
$\max_{\mathbf{v}} \theta_{\delta}^*(\mathbf{v}) - \theta(x^*, \varphi, \Delta^0) , \%$	1.9284	0.9641	0.5136	0.2950	0.4561	0.7068	1.1401
$\max_{\mathbf{v}} q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0) , \%$	10.9355	5.9057	4.0994	3.7217	4.4742	6.0565	8.4277

Рис. 5.15. Погрешность восстановления искомой характеристики $q^*(\varphi) - u(\varphi, \Delta^0)$ при систематической погрешности: 1 – при $\delta = -1\%$, 2 – при $\delta = -0.5\%$, 3 – при $\delta = 0.2\%$, 4 – при $\delta = 1\%$



Тем самым, априорная информация о помехе позволяет повысить точность решения обратной задачи в условиях действия возмущения. На практике распространены ситуации, когда значение абсолютной погрешности аппаратуры, осуществляющей измерение величин $\theta_{\delta}^*(\varphi)$, известно, и использование этой информации при составлении систем расчетных уравнений (5.18) или (5.19) позволяет уменьшить неопределенность и получить решение задачи, обладающее равномерной ошибкой аппроксимации.

5.3. Выводы по главе 5

1. Сформулирована экстремальная постановка граничной обратной задачи теплопроводности в условиях действующих возмущений в случае использования предварительного сглаживания экспериментальной информации. Показана процедура редукции ОЗТ в экстремальной постановке к задаче математического программирования, сформулированной относительно температурной невязки между построенным сглаживающим сплайном и расчетным значением температурного состояния. Построены устойчивые алгоритмы решения граничной ОЗТ в случае использования предварительного сглаживания.
2. Сформулирована экстремальная постановка граничной ОЗТ при учете интервальных неопределенностей возмущений. Проведена процедура редукции сформулированной ОЗТ к СЗМП, рассматриваемой относительно совокупности тепловых процессов, удовлетворяющих всем возможным реализациям возмущающего воздействия.
Построены устойчивые алгоритмы решения граничных ОЗТ при учете интервальных неопределенностей возмущений.
3. Методом вычислительного эксперимента исследованы точностные характеристики разработанного метода минимаксной оптимизации при решении граничной ОЗТ в условиях действия возмущений. Показано, что разработанный метод позволяет строить эффективные алгоритмы для решения ОЗТ при действии типовых возмущающих воздействий с уровнем 0–3%.

Примеры технических приложений методов параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности

В данной главе приведены актуальные прикладные обратные задачи технологической теплофизики, решение которых произведено с помощью разработанных и представленных в диссертации методов параметрической оптимизации. Основное содержание данной главы изложено в работах [56; 74; 77; 78].

6.1. Восстановление потока тепловых потерь в процессе индукционного нагрева металла

Нахождение необходимых температурных режимов при реализации технологических процессов нагрева и охлаждения металлических изделий требуют знания нестационарных тепловых нагрузок. Так, при реализации технологий индукционного нагрева металлических заготовок при обработке давлением, необходимо определить величину тепловых потерь с поверхности нагреваемого тела [206].

Рассмотрим задачу аналитической идентификации тепловых потерь на границе одномерной пространственной области тела цилиндрической формы с радиусом L в процессе индукционного нагрева.

Температурное поле $T(x, t)$ в соответствии с базовой ММ (2.1) при $\Gamma = 1$, где теперь и далее, вместо относительного времени φ рассматривается его абсолютное значение t , удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right) + \frac{1}{c\gamma} F(x, t); \quad 0 < x < L; \quad 0 < t \leq t^* \quad (6.1)$$

с краевыми условиями

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad x \in [0, L]; \quad (6.2)$$

$$\lambda \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = q(t); \quad \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0; \quad t \in [0, t^*]. \quad (6.3)$$

ММ в виде уравнений (6.1)–(6.3) в случае адекватно выполненной линеаризации, предусматривающей усреднение значений ТФХ и электромагнитных параметров, в большом числе практических случаев является наиболее универсальной формой для моделирования широкого круга процессов индукционного нагрева (например, процессов ИН парамагнитных материалов) [49].

Процесс индукционного нагрева характеризуется сложным нелинейным характером теплообмена, в результате которого суммарный тепловой поток $q(t)$ с поверхности заготовки при граничных условиях (6.3) содержит радиационную и конвективную составляющие

$$q(t) = \epsilon\sigma(T^4(L, t) - T_c^4(t)) + \alpha(T(L, t) - T_c(t)), \quad (6.4)$$

где ϵ — степень черноты материала (коэффициент теплового излучения облучаемого тела), σ — постоянная Стефана-Больцмана.

Решение актуальной проблемы идентификации суммарного граничного теплового потока может быть основано на решении обратных задач теплопроводности с использованием экспериментальных данных о температуре в некоторой фиксированной точке по объему заготовки. Данное приложение иллюстрирует эффективность метода идентификации $q(t)$ на базе решения граничной ОЗТ с помощью разработанного метода минимаксной оптимизации.

Рассматривается следующая постановка ОЗТ.

Температурное поле измеряется в определенной фиксированной точке контроля $x^* \in [0, L]$ в дискретные моменты времени $t_k \in [0, t^*]$, $k = 1, 2, \dots, K$, в результате чего может быть получена температурная зависимость $T^*(t_k)$. При решении ОЗТ необходимо восстановить функцию суммарных тепловых потерь $q(t)$ при известных остальных параметрах и характеристиках.

Изменяющийся во времени тепловой поток рассматривается как искомое сосредоточенное управляющее воздействие, подчиненное ограничению (2.7) принадлежности подходящему множеству функций.

Формулируется экстремальная постановка ОЗТ, в которой на основе заданной температурной зависимости $T^*(t_k)$ требуется восстановить искомое граничное сосредоточенное воздействие $q^0(t)$, минимизирующее невязку между заданной температурой $T^*(t_k)$ и точным решением $T(x^*, t_k)$ краевой задачи (6.1)–(6.3), соответствующим искомой функции $q^0(t)$. Оценивание невязки $T^*(t_k)$ —

$T(x^*, t_k)$ производится в равномерной метрике в дискретные моменты времени $t_k \in [0, t^*], k = 1, 2, \dots, K$, что приводит к соответствующей задаче оптимального управления. Для объекта (6.1)–(6.3) необходимо найти оптимальное управляющее воздействие $q^0(t)$, подчиненное ограничению (2.7), обеспечивающее выполнение минимаксного соотношения

$$I(q) = \max_{t_k \in [0, t^*]} |T(x^*, t_k) - T^*(t_k)| \rightarrow \min_{q \in V} \quad (6.5)$$

на заданном интервале идентификации $t_k \in [0, t^*]$.

На основе соотношений (2.17), (2.19) производится сужение исходного множества V искомых решений до класса физически реализуемых на интервале идентификации функций, рассматриваемых далее в качестве нового управления $w(t)$ по второй производной $q''(t)$.

Для решения полученной задачи используется модальное представление объекта (6.1)–(6.3) в виде бесконечной системы независимых друг от друга обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_m}{dt} &= -\mu_m^2 \bar{T}_m(t) + \frac{1}{c\gamma} \bar{F}_m(\mu_m, t) + \frac{\sqrt{2a}}{\lambda} q(t), \\ \bar{T}_m(0) &= \bar{T}_0(\mu_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.6)$$

для коэффициентов $\bar{T}_m(t) = \bar{T}_m(\mu_m, t)$ разложения температурного поля $T(x, t)$ в ряд

$$T(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{T}_m(\mu_m, t) \phi_m(\mu_m, x) \quad (6.7)$$

по собственным функциям

$$\phi_m(\mu_m, x) = \frac{\sqrt{2a}}{L J_0(\eta_m)} J_0\left(\eta_m \frac{x}{L}\right), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (6.8)$$

тепловой задачи, образующим полный набор ортонормированных базисных функций [146].

Здесь собственные числа

$$\mu_m^2 = \frac{a\eta_m^2}{L^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

соответствуют решениям η трансцендентного уравнения $J_1(\eta) = 0$, где $J_0(\cdot)$ и $J_1(\cdot)$ — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно. В уравнении (6.6) $\bar{F}_m(\mu_m, t)$ и $\bar{T}_0(\mu_m)$ — коэффициенты разложения в

ряд по $\phi_m(\mu_m, x)$ функции внутренних теплоисточников $F(x, t)$ и начального температурного состояния $T_0(x)$ соответственно [135; 145].

Выражение для $T(x, t)$ получено на основе (2.71) как реакция на $F(x, t)$, $q(t)$ и $T_0(x)$ в следующем виде

$$\begin{aligned}
T(x, t) = & \frac{2}{L^2} \frac{1}{c\gamma} \int_0^t \int_0^L F(\xi, \tau) \xi d\xi d\tau + \frac{2}{L} \frac{1}{c\gamma} \int_0^t q(\tau) d\tau + \frac{2}{L^2} \int_0^L T_0(\xi) \xi d\xi + \\
& + \frac{2}{L^2} \frac{1}{c\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\eta_m \frac{x}{L}\right)}{J_0^2(\eta_m)} \int_0^t \int_0^L F(\xi, \tau) \xi J_0\left(\eta_m \frac{\xi}{L}\right) e^{-\frac{\eta_m^2 a}{L^2}(t-\tau)} d\xi d\tau + \\
& + \frac{2}{L} \frac{1}{c\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\eta_m \frac{x}{L}\right)}{J_0(\eta_m)} \int_0^t q(\tau) e^{-\frac{\eta_m^2 a}{L^2}(t-\tau)} d\tau + \\
& + \frac{2}{L^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\eta_m \frac{x}{L}\right)}{J_0^2(\eta_m)} e^{-\frac{\eta_m^2 a}{L^2} t} \int_0^L T_0(\xi) J_0\left(\eta_m \frac{\xi}{L}\right) \xi d\xi. \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Полученное выражение позволяет сформулировать для ОРП (2.19), (6.6), (6.9), подобно (3.72), следующую задачу оптимального управления

$$I(w(t)) = \max_{t_k \in [0, t^*]} |T(x^*, t_k) - T^*(t_k)| \rightarrow \min_{w(t)}. \quad (6.10)$$

Решение задачи (6.10) производится в соответствии с представленным в разделе 3.3 разработанным методом, что позволяет получить параметризованную форму искомой плотности теплового потока $q^0(t) = u^0(t)$ и температурного поля в виде соотношений (2.68) и (3.74) соответственно, на основании чего исходная некорректная задача сводится к задаче параметрической оптимизации

$$I_0(\Delta) = \max_{t_k \in [0, t^*]} |T(x^*, t_k, \Delta) - T^*(t_k)| \rightarrow \min_{\Delta} \quad (6.11)$$

относительно вектора параметров $\Delta \in D_{N+2}$, где $T(x^*, t_k, \Delta)$ получено на основе (6.9).

Для поиска решения задачи Δ с помощью альтернансного метода составляется замкнутая система соотношений

$$T(x^*, t_j^0, \Delta^0) - T^*(t_j^0) = \beta(-1)^{j+1} I_0(\Delta^0); \quad j = \overline{1, R} \quad \beta = \pm 1;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (T(x^*, t_{j_s}^0, \Delta^0) - T^*(t_{j_s}^0)) = 0; \quad t_{j_s}^0 \in \{t_j^0\}, \quad s = \overline{1, R_1}, \quad R_1 \leq R, \quad (6.12)$$

где $R = N + 3$.

При практическом решении задачи в случае использования численной модели дискретного времени от системы (6.12) удобнее перейти к задаче минимизации целевого функционала (3.138).

Обратная задача теплопроводности по идентификации функции граничных тепловых потерь в процессе индукционного нагрева одномерного цилиндрического тела из титана была решена в классе кусочно-параболических функций при $N = \overline{1, 3}$. Функция внутренних теплоисточников $F(x, t)$ была задана в стандартной форме для цилиндрической заготовки бесконечной длины [49]

$$F(x, t) = \frac{P_a(t)}{L} \Psi(x); \quad \Psi(x) = \frac{\text{ber}'^2(\zeta \frac{x}{L}) + \text{bei}'^2(\zeta \frac{x}{L})}{\text{ber} \zeta \text{ber}' \zeta + \text{bei} \zeta \text{bei}' \zeta} \zeta. \quad (6.13)$$

Здесь $P_a(t)$ — активная мощность, поглощаемая единицей поверхности нагреваемого тела; $\text{ber}(\cdot)$, $\text{bei}(\cdot)$, $\text{ber}'(\cdot)$, $\text{bei}'(\cdot)$ — функции Кельвина и их первые производные [207]; параметр ζ , зависящий от глубины проникновения тока в металл σ_Ω , определяется как

$$\zeta = L\sqrt{2}/\sigma_\Omega; \quad \sigma_\Omega = \sqrt{2/(\mu_a \omega_\Omega \gamma_a)},$$

где μ_a, γ_a — магнитная проницаемость и электрическая проводимость металла соответственно; $\omega_\Omega = 2\pi f_\Omega$, где f_Ω — частота питающего индуктор тока.

Задача была решена при следующих исходных данных.

Рассматривалось цилиндрическое тело с радиусом $L = 0.27$ м и усредненными теплофизическими характеристиками материала $\lambda = 15.1$ Вт/(м · °С), $c = 0.532$ кДж/(кг · °С), $\gamma = 4540.6$ кг/м³ [191].

Температура окружающей среды $T_c(t)$ и начальное температурное распределение $T_0(x)$ полагалось равномерным и равным 20 °С.

Вначале на основе численной модели с помощью метода конечных элементов была решена прямая задача теплопроводности (6.1)–(6.3) при задании теплового потока с поверхности тела в виде (6.4) при $\alpha = 36.3$ Вт/(м² · °С), $\epsilon = 0.19$, электромагнитных свойствах титана и частоте питающего индуктор

тока $f_3 = 50$ Гц, соответствующих значению параметра $\zeta = 4$, в результате чего получена температурная зависимость $T^*(t_k)$.

Мощность тепловыделения полагалась соответствующей распространенной для индукционного нагрева технологии постоянства напряжения на индукторе и принималась равной $P_a = 106000$ Вт/м².

Процесс теплопроводности рассчитывался в дискретные моменты времени $t_k \in [0, 5000]$ с, $k = \overline{1, 501}$ с временным шагом в 10 с, пространственная область была разделена на 30 интервалов с шагом $L = 0.09$ м.

Затем решение прямой задачи в точке $x^* = 0.252$ м, соответствующей 28-му узлу, было использовано в качестве модели измерения для решения обратной задачи теплопроводности. Ошибки дискретизации математической модели при численном решении прямой задачи теплопроводности рассматривались в качестве погрешностей измерения.

Полученные результаты, представленные на рис. 6.1, 6.2, показывают достаточную для инженерных расчетов точность в классе рассматриваемых функций при $N = \overline{1, 3}$.

Относительная ошибка вычисления теплового потока составляет 3.91%, 3.34% и 2.7% для $N = \overline{1, 3}$, что соответствует 1392, 1189 и 962, Вт/м² при изменении в процессе индукционного нагрева теплового потока с поверхности тела от нуля до $3.56 \cdot 10^4$ Вт/м².

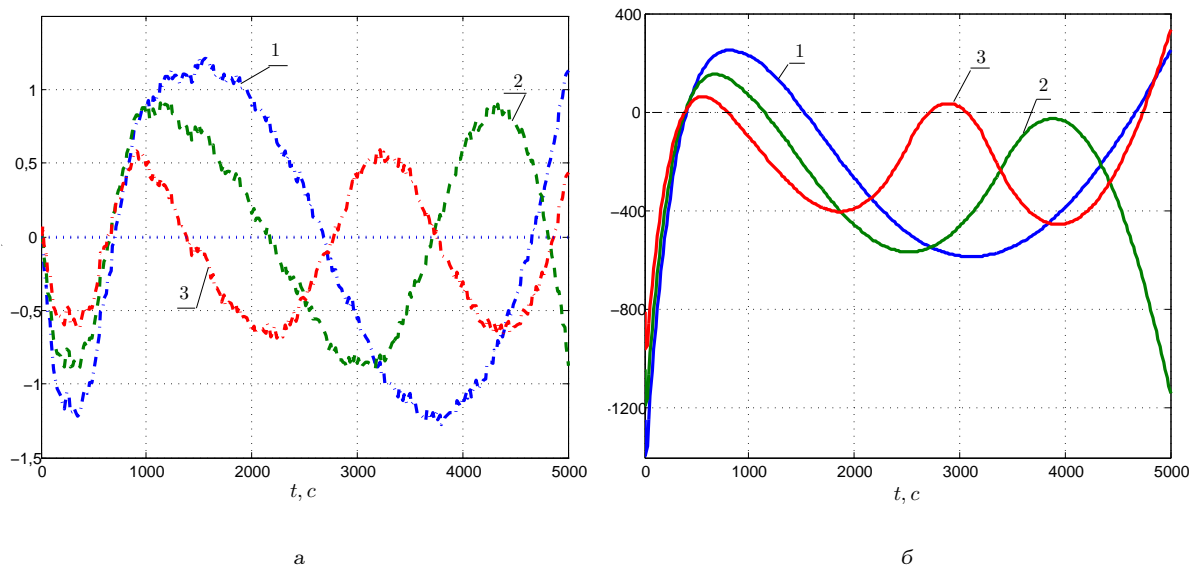


Рис. 6.1. Погрешность аппроксимации температурного поля $T(x^*, t, \Delta^0) - T^*(t)$ (а) и ошибка восстановления теплового потока $q^0(t) - q^*(t)$ (б): 1 – при $N = 1$; 2 – при $N = 2$; 3 – при $N = 3$

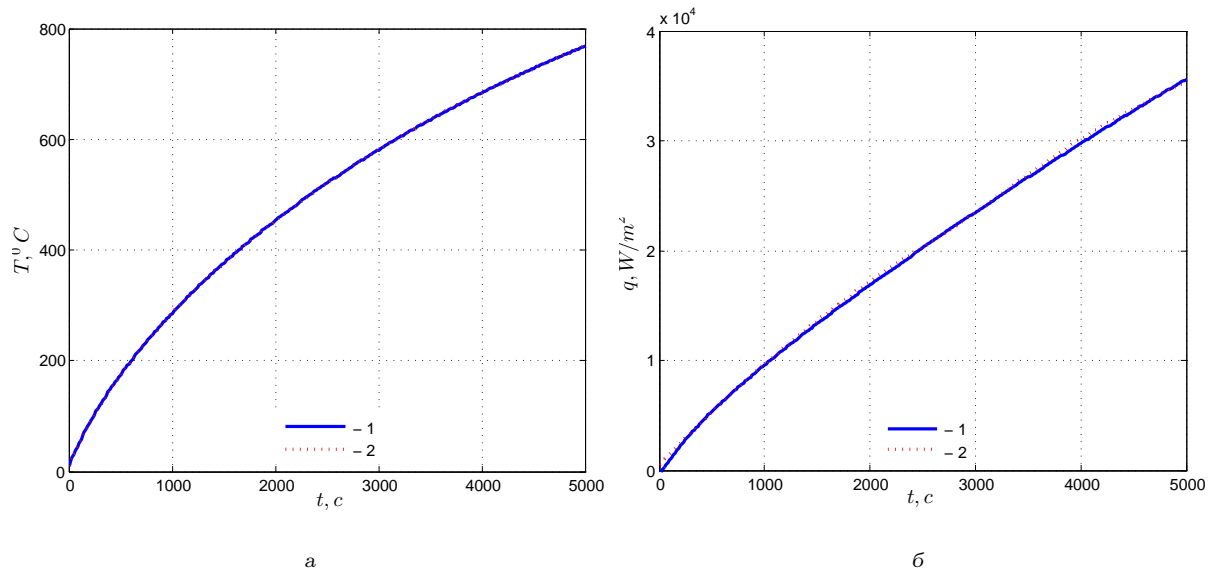


Рис. 6.2. Сравнение измеренных и рассчитанных значений температуры (а): 1 – $T^*(t)$; 2 – $T(x^*, t, \Delta^0)$; и теплового потока (б): 1 – $q^*(t)$; 2 – $q^0(t)$

При этом ошибка вычисления температурного поля в точке измерения составляет 0.168%, 0.123% и 0.086% для $N = \overline{1, 3}$, что соответствует 1.25, 0.91 и 0.64°C при изменении температуры в точке контроля в процессе нагрева с 20°C до 762°C .

6.2. Определение постоянной мощности тепловыделения в процессе индукционного нагрева

При модернизации существующих и проектировании новых индукционных установок актуальное значение имеют обратные задачи индукционного нагрева, предусматривающие определение закона изменения удельной мощности внутреннего тепловыделения по заданной информации о температурном состоянии нагреваемого изделия [26; 27].

Базовые технологии процессов индукционного нагрева изделий из парамагнитных материалов реализуются в условиях постоянства частоты питающего тока, что определяет неизменный характер распределения источников тепла по объему заготовки. В этом случае при постоянном напряжении на индукторе в течение всего процесса нагрева в первом приближении обеспечивается постоянство однозначно связанной с ним мощности тепловыделения $P_a(t) = P_a = \text{const}$, величина которой существенно зависит от электрического и термического коэф-

фициентов полезного действия установки и от других факторов. Идентификация постоянного значения P_a при известных геометрических, теплофизических характеристиках объекта и краевых условиях может быть осуществлена путем решения обратной задачи теплопроводности по результатам температурных измерений на интервале идентификации $t \in [0, t^*]$ в фиксированной точке на поверхности $x^* = L$ или внутри $x^* \in [0, L)$ заготовки [26; 27].

Рассматривается базовая математическая модель температурного поля в процессе индукционного нагрева тела цилиндрической формы (6.1)–(6.3) при стандартном виде функции мощности внутреннего тепловыделения (6.13) и заданном уровне тепловых потерь в (6.3).

Формулируется задача определения по экспериментальным температурным данным $T^*(t)$ суммарной удельной мощности тепловых источников P_a при известном законе $\Psi(x)$ их пространственного распределения.

Рассматривается задача поиска значения P_a в результате решения линейной внутренней ОЗТ при ограничении множества исходных управляющих воздействий $P(t)$ до класса постоянных функций $P_a(t) = P_a = \text{const}$.

Задача параметрической оптимизации формулируется относительно единственного параметра $P_a^0 \leq P_{\max}$, $t \in [0, t^*]$ искомого управления

$$I(P_a) = \max_{t \in [0, t^*]} |T(x^*, t, P_a) - T^*(t)| \rightarrow \min_{P_a}, \quad (6.14)$$

где $T(x^*, t, P_a)$ является решением краевой задачи (6.1)–(6.3).

На основе альтернансных свойств составляется замкнутая система уравнений

$$\begin{aligned} T(x^*, t_j^0, P_a^0) - T^*(t_j^0) &= \beta(-1)^j I_0(P_a^0), \quad j = 1, 2; \beta = \pm 1; \\ \frac{\partial}{\partial t} (T(x^*, t_1^0, P_a^0) - T^*(t_1^0)) &= 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Решение системы уравнений (6.15) позволяет получить значение P_a^0 , аппроксимирующее искомую величину P^* при минимальном значении ошибки равномерного приближения расчетного температурного состояния $T(x^*, t, P_a^0)$ к заданному $T^*(t)$, и момент t_1^0 , в который достигается эта ошибка.

Ниже представлены результаты решения задачи определения постоянного значения удельной мощности внутреннего тепловыделения в процессе индукционного нагрева титановой цилиндрической (с радиусом $R = 0.27$ м), заготовки бесконечной длины.

Сначала численными методами с использованием конечно-элементной аппроксимации нелинейного неоднородного уравнения теплопроводности

$$c(T)\gamma(T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) + \frac{1}{x}\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + F(x,t); \quad 0 < x < L; \quad 0 < t \leq t^* \quad (6.16)$$

с краевыми условиями (6.2), (6.3) при заданном значении мощности $P^* = 106000 \text{ Вт/м}^2$ и следующих исходных данных была решена прямая задача теплопроводности.

Теплофизические характеристики материала соответствуют свойствам титана на диапазоне изменения температур $[20, 350]^\circ\text{C}$: $\lambda(T) = 13.4 + 0.0058T \text{ Вт/(м} \cdot ^\circ\text{C)}$; $(T) = c(T)\gamma(T) = 2.276 \cdot 10^6 + 493.1T \text{ Дж/(м}^3 \cdot ^\circ\text{C)}$. Начальное температурное распределение принималось равномерным $T_0(x) = T_0 = 20^\circ\text{C}$. Граничный тепловой поток на интервале идентификации принимался равным $q(T) = 1.9 \cdot 10^4(1 - e^{-7.5 \cdot 10^{-4}t}) \text{ Вт/м}^2$. Электромагнитные характеристики материала и постоянное значение частоты питающего тока были заданы значением $\zeta = 4$ в (6.13). Рассматривался временной интервал $t \in [0, 1000]$ с с шагом 1 с, шаг по пространственной координате принимался равным $h = 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

Затем решение прямой задачи (6.16), (6.2), (6.3) в точке $x^* = 0.9L = 0.243 \text{ м}$ принималось за результат измерения температуры $T^*(t)$ и решалась линейная обратная задача (6.1)–(6.3) при усредненных теплофизических характеристиках $\lambda(T) = \lambda = 16.05 \text{ Вт/(м} \cdot ^\circ\text{C)}$, $C = c\gamma = 2.56 \cdot 10^6 \text{ Дж/(м}^3 \cdot ^\circ\text{C)}$.

Решение задачи с такими данными позволяет получить значение мощности $P_a^0 = 108989 \text{ Вт/м}^2$, ошибка восстановления которой составляет 2.82%, что является вполне удовлетворительной точностью.

Некоторые полученные результаты решения линейной ОЗТ представлены на рис. 6.3.

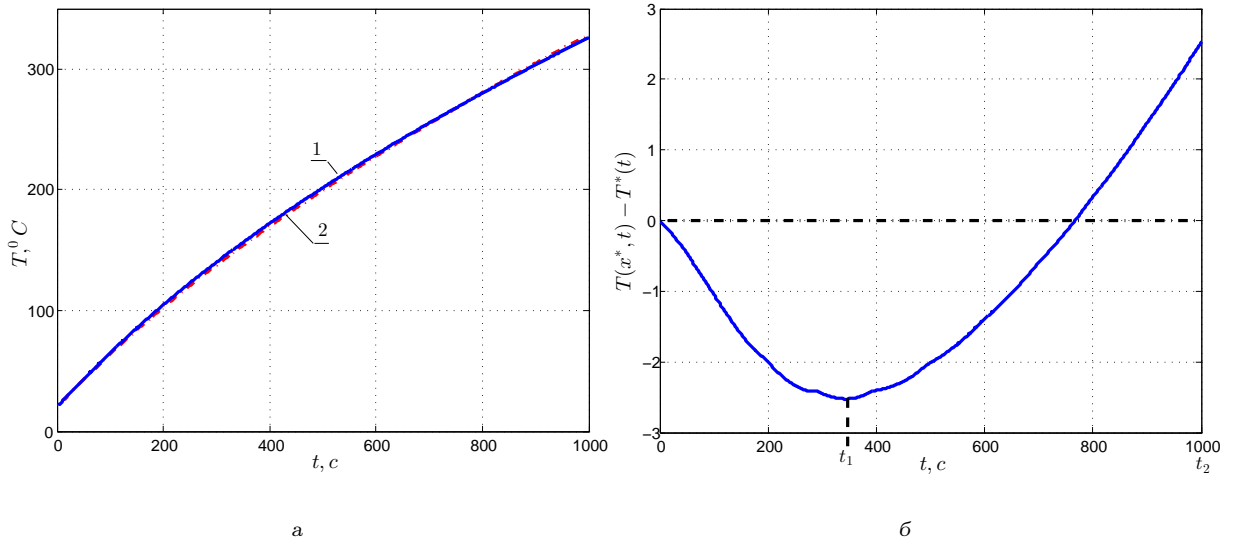


Рис. 6.3. Сравнение заданной и рассчитанной температурных зависимостей (а): 1 – $T^*(t)$; 2 – $T(x^*, t, P^0)$; и ошибка приближения температурного поля (б): $T(x^*, t) - T^*(t)$;

6.3. Определение граничных условий теплообмена на поверхности барабана котла

Обеспечение надежной работы оборудования теплоэнергетических станций, в частности, паровых котлов высокого давления, требует поддержания бездефектного состояния поверхностей теплообмена, для чего необходим контроль целого ряда технологических параметров, важное место среди которых занимает конвективный коэффициент теплоотдачи, являющийся комплексной величиной и зависящий от большого числа теплофизических и геометрических факторов, а также от конкретных условий процесса теплообмена.

Определение локальных значений коэффициентов теплоотдачи по результатам измерений температурных полей также может производиться с помощью решения обратных задач теплопроводности [77; 208].

В данном приложении решена задача определения среднего значения коэффициента теплоотдачи и температуры на недоступной для измерения внутренней поверхности барабана котла по экспериментальным данным о температуре на внешней поверхности барабана и температуре пароводяной смеси в барабане, полученным в процессе сброса давления при аварийном останове парового котла.

Принимается допущение о постоянстве теплофизических свойств объекта

и среды и отсутствии теплообмена на внешней поверхности барабана вследствие ее теплоизоляции. Температурное поле в стенке барабана описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}; \quad 0 < x < L; \quad 0 < t \leq t^* \quad (6.17)$$

с краевыми условиями

$$T(x, 0) = T_0, \quad x \in [0, L]; \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0; \quad \lambda \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} + \alpha(T(L, t) - T_c(t)) = 0. \quad (6.19)$$

Здесь L — толщина стенки барабана котла; α — коэффициент теплоотдачи от стенки барабана к пароводяной смеси; $T_c(t)$ — температура рабочей среды в барабане.

При решении ОЗТ используются экспериментальные данные о температуре наружной поверхности барабана $T^*(t)$ и температуре среды $T_c(t)$, полученные в процессе сброса давления при аварийном останове котла БКЗ-420-140 НГМ при следующих исходных данных $L = 0.112\text{м}$, $\lambda = 48 \text{Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{С})$, $T_0 = 339^\circ\text{С}$, $a = 11.2 \cdot 10^{-6} \text{м}^2/\text{с}$.

Формулируется экстремальная постановка граничной ОЗТ, в которой по известной температуре внешней поверхности барабана $T^*(t)$ требуется определить значение α^0 , минимизирующее невязку между $T^*(t)$ и точным решением $T(L, t)$ краевой задачи (6.17)–(6.19), соответствующим искомому α^0 . Решение задачи осуществляется в классе постоянных на интервале идентификации функций.

В соответствии с этим осуществляется переход к СЗМП, реализующей поиск управляющего воздействия $\alpha^0 = \text{const}$, обеспечивающего на заданном интервале $[0, t^*]$ выполнение соотношения

$$I(\alpha) = \max_{t \in [0, t^*]} |T(L, t, \alpha) - T^*(t)| \rightarrow \min_{\alpha}. \quad (6.20)$$

Выражение для температурного поля объекта имеет вид бесконечного ряда [145]

$$T(x, t, \alpha) = \frac{1}{L} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\mu_m \cos(\mu_m \frac{x}{L})}{\mu_m + \sin \mu_m \cos \mu_m} \cdot \left(\frac{\alpha}{c\gamma} \cos \mu_m \int_0^t T_c(\tau) e^{-\frac{\mu_m^2 a}{L^2}(t-\tau)} d\tau \right)$$

$$+e^{-\frac{\mu_m^2 a}{L^2} t} \int_0^L T_0(\xi) \cos\left(\mu_m \frac{\xi}{L}\right) d\xi, \quad (6.21)$$

где значения μ_m находятся как корни уравнения (2.24).

Задача (6.20) является однопараметрическим случаем общей СЗМП вида (2.75) при $\Delta = \Delta_1 = \alpha$.

На основании альтернансных свойств составляется система двух соотношений для предельных разностей температур, которая дополняется условием существования экстремума во внутренней точке

$$\begin{aligned} T(L, t_j^0, \alpha) - T^*(t_j^0) &= \beta(-1)^{j+1} I_0(\alpha); \quad j = 1, 2, \beta = \pm 1; \\ \frac{\partial}{\partial t} (T(L, t_j^0, \alpha) - T^*(t_j^0)) &= 0. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Для решения задачи экспериментальные данные о температуре жидкости в барабане $T_c(t)$ были аппроксимированы экспоненциальной зависимостью вида $T_c(t) = ke^{-bt} + T_1$, где T_1 — минимальная температура рабочей среды на рассматриваемом интервале, а экспериментальная температура на внешней поверхности $T^*(t)$ — полиномом четвертого порядка.

Решение системы уравнений (6.22) позволяет определить среднее значение коэффициента теплоотдачи на внутренней поверхности стенки барабана котла, равное $\alpha^0 = 474 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C})$, при использовании которого ошибка между модельной и экспериментальной температурой составляет 0.18 °C или 0.88% .

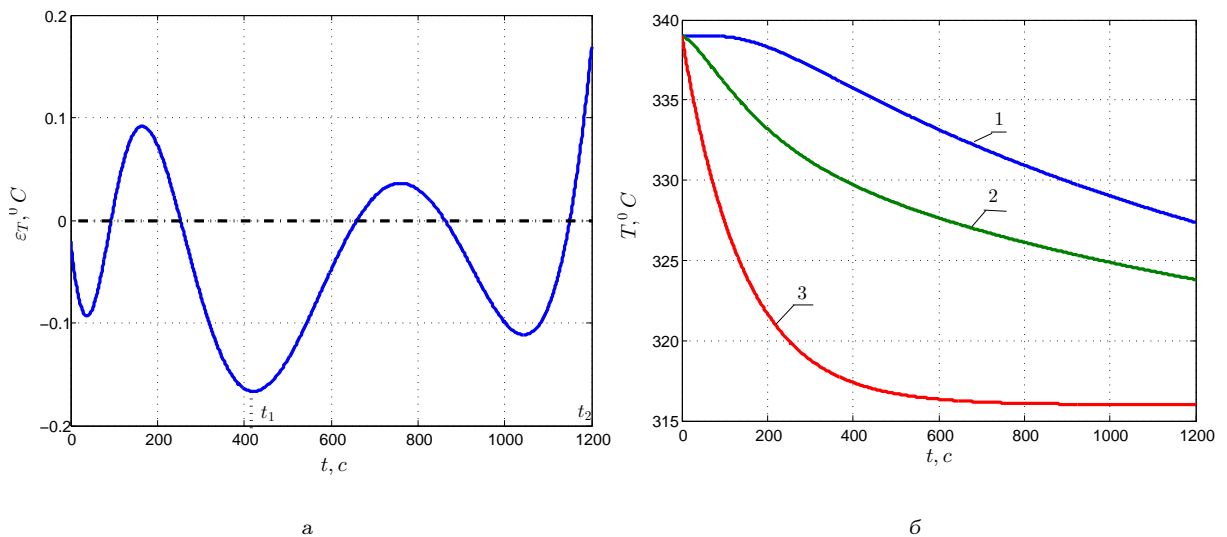


Рис. 6.4. Ошибка приближения температурного поля $T(R, t, \alpha) - T^*(t)$ (а) и результирующие температурные зависимости (б): 1 — $T(R, t, \alpha)$; 2 — $T(0, t, \alpha)$; 3 — $T_c(t)$

6.4. Идентификация теплофизических характеристик, зависящих от пространственной координаты, в задачах несвязанной термоупругости

Как правило, математические модели, используемые при исследовании проблем механики деформируемого твердого тела, учитывают свойства неоднородной среды, что выражается зависимостью физических характеристик от пространственной координаты [158; 209].

Рассмотрим применение метода минимаксной оптимизации для определения переменного по пространственной координате x коэффициента теплопроводности $\lambda(x)$ в случае использования одномерной модели несвязанной термоупругости, позволяющей последовательно решать задачи для механических и температурных полей.

Математическая модель температурного поля задана уравнением

$$c\gamma \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq t^0 \quad (6.23)$$

с соответствующими краевыми условиями

$$T(0, t) = 0, \quad T(L, t) = T_c, \quad T(x, 0) = 0, \quad (6.24)$$

где удельная теплоемкость c и плотность материала γ считаются постоянными $c\gamma = \text{const}$.

Задана дополнительная информация о температурном поле $T^*(t) = T(x^*, t)$, полученная в некоторой фиксированной точке термометрирования x^* .

Решение ОЗТ предусматривает поиск идентифицируемой характеристики $\lambda(x)$ в классе полиномиальных функций

$$\lambda(x) = \sum_{n=0}^N \Delta_n x^n \quad (6.25)$$

на основе численного моделирования задачи теплопроводности (6.23), (6.24) при $x \in (0 : \Delta x : L)$; $t \in (0 : \Delta t : t^0]$.

Представление $\lambda(x)$ в виде (6.25) соответствует заданию идентифицируемой характеристики в параметризованной форме, где полиномиальные коэффициенты при заданном числе N образуют искомый вектор параметров $\Delta =$

$(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N)$. Температурное поле $T(x, t) = T(x, t, \lambda) = T(x, t, \Delta)$ при заданных значениях N и Δ также является функцией указанного вектора параметров. Полученное параметрическое представление идентифицируемой характеристики $\lambda(x, \Delta)$ и температурного состояния $T(x, t, \Delta)$ позволяет перейти от исходной некорректной постановки ОЗТ к задаче параметрической оптимизации (6.11), сформулированной относительно вектора параметров $\Delta \in D_{N+1}$.

Использование альтернансных свойств оптимальных решений позволяет определить конфигурацию погрешности $T(x^*, t, \Delta^0) - T^*(t)$ аппроксимации заданного температурного распределения на интервале $t = [0, t^*]$, и тем самым, составить замкнутую систему уравнений для предельных отклонений $T(x^*, t, \Delta^0) - T^*(t)$ в точках альтернанса относительно всех неизвестных в виде (6.12) при $R = N + 2$.

Применение численной модели температурного поля $T(x^*, t, \Delta)$ обуславливает переход от системы расчетных уравнений (6.12) к эквивалентной задаче минимизации в пространстве параметров $\Delta_i^0, i = \overline{1, N+1}$ целевой функции (3.138).

Поиск экстремума $I_1(\Delta^0)$ с использованием численных методов позволяет определить искомый вектор параметров Δ^0 , и тем самым, обеспечивает решение задачи параметрической оптимизации. Априорные сведения о характере $\lambda(x)$ позволяют целенаправленно выбирать начальные приближения для компонент вектора Δ .

Численное решение ОЗТ в классе (6.25) было проведено при использовании в качестве экспериментальной температурной зависимости $T^*(t)$ результатов решения прямой задачи теплопроводности (6.23), (6.24) в виде

$$T(x, t) = T_c \left\{ \frac{e^{bx} - 1}{e^{bL} - 1} - \pi \cdot e^{0.5b(x-L)} \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_m) J_1(\mu_m \cdot e^{0.5bL})}{J_1^2(\mu_m) - J_1^2(\mu_m \cdot e^{0.5bL})} \times \right. \\ \left. \times [J_1(\mu_m \cdot e^{0.5bx}) Y_1(\mu_m) - J_1(\mu_m) Y_1(\mu_m \cdot e^{0.5bx})] \cdot e^{-\frac{k_0 b^2}{2c\rho} \mu_m^2 t} \right\} \quad (6.26)$$

при задании коэффициента теплопроводности в виде экспоненциальной функции [152]

$$\lambda(x) = \lambda^*(x) = k_0 e^{-bx}, b > 0. \quad (6.27)$$

Здесь μ_m — корни характеристического уравнения

$$\frac{J_1(\mu \cdot e^{0.5bL})}{J_1(\mu)} = \frac{Y_1(\mu \cdot e^{0.5bL})}{Y_1(\mu)}, \quad (6.28)$$

где J_1 и Y_1 — функции Бесселя соответственно первого и второго рода первого порядка.

Результаты численного решения задачи в классе полиномиальных функций при $N = 3$ при относительных значениях $L = 1$, $T_c = 1$, $c\rho = 1$, $k_0 = 0.25$, $b = 3.7$ на интервале идентификации $[0, t^*]$, $t^* = 3$ в точке $x^* = 0.93$, представлены на рис. 6.5, 6.6.

Погрешность восстановления температурного поля составляет 2.66%, а пространственно распределенного коэффициента теплопроводности — 2.59%.

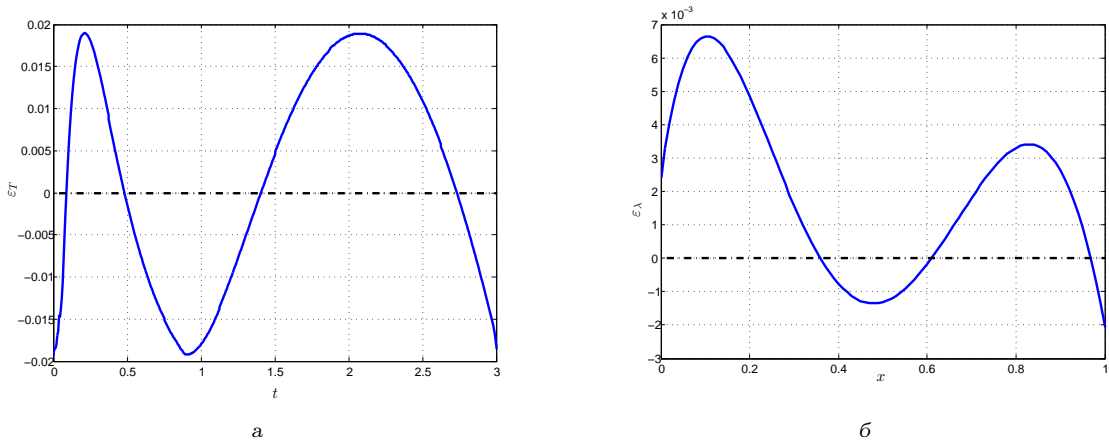
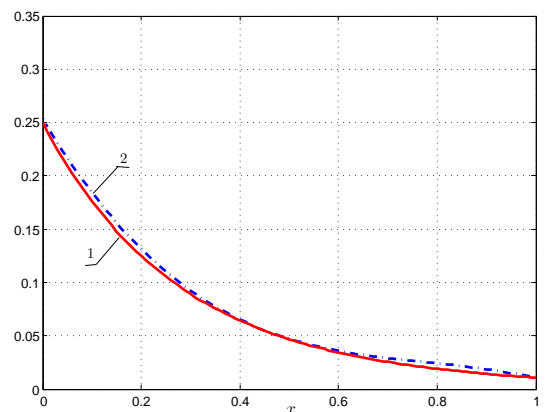


Рис. 6.5. Погрешность аппроксимации температурного поля $T(x^*, t, \Delta^0) - T^*(t)$ (а) и ошибка восстановления коэффициента теплопроводности $\lambda^0(x) - \lambda^*(x)$ (б)

Рис. 6.6. Результат идентификации зависимости $\lambda^*(x)$: 1 — точное значение и 2 — восстановленное значение коэффициента теплоотдачи



6.5. Выводы по главе 6

В данной главе приведены примеры актуальных технических приложений разработанных методов параметрической оптимизации в обратных задачах теплопроводности.

1. На основе численного моделирования решена задача аналитической идентификации суммарной функции тепловых потерь, содержащей радиационную и конвективную составляющие, на границе одномерного тела канонической формы в процессе индукционного нагрева металла.
2. Решена задача определения постоянного значения удельной мощности внутреннего тепловыделения, соответствующего постоянному значению напряжения на индукторе в процессе индукционного нагрева изделий из парамагнитных материалов, реализующегося в условиях постоянства частоты питающего тока, задающего неизменный характер распределения источников тепла по объему заготовки.
3. Получено решение обратной задачи теплопроводности по определению коэффициента теплоотдачи на внутренней поверхности барабана котла по экспериментальным данным о температуре наружной поверхности барабана.
4. Решена коэффициентная обратная задача определения переменного по пространственной координате коэффициента теплопроводности при использовании одномерной модели несвязанной термоупругости.
5. Для всех рассмотренных технических приложений подтверждены основные свойства и качественные характеристики предлагаемых методов параметрической оптимизации, сохраняющиеся при решении соответствующих задач технологической теплофизики.

Заключение

В диссертации достигнута поставленная цель разработки новых конструктивных алгоритмически точных методов решения обратных задач технологической теплофизики без применения численных регуляризирующих алгоритмов.

В работе получены новые научно-обоснованные технические решения в виде:

новых эффективных алгоритмически точных методов последовательной параметрической оптимизации, осуществляющих поиск физически реализуемых решений обратных задач теплопроводности на компактных множествах специальной формы;

построения на базе разработанных методов вычислительных алгоритмов для решения широкого круга прикладных задач идентификации процессов нестационарной теплопроводности, сформулированных для линейных и нелинейных аналитических и численных моделей, рассматриваемых на одномерных и двумерных пространственных областях по идентификации сосредоточенных, пространственно-распределенных и пространственно-временных внешних и внутренних воздействий, а также теплофизических характеристик.

Выполненные в диссертационной работе научные исследования представлены следующими новыми результатами:

1. Разработана новая концепция решения обратных задач теплопроводности, распространенная на широкий класс базовых обратных задач технологической теплофизики, которая позволяет осуществить аналитическую идентификацию процессов нестационарной теплопроводности. Концепция основана на использовании методов теории оптимального управления системами с распределенными параметрами.
2. Разработаны методы минимаксной параметрической оптимизации, основанные на сужении множества возможных решений исходя из требований их физической реализуемости до компактного множества кусочно-параболических или полиномиальных функций.

В рамках выбранной структуры искомым решениям их приведение к параметрической форме обеспечивается применением математического аппа-

рата теории оптимального управления СРП, на основании чего исходная обратная задача теплопроводности сводится к задаче параметрической оптимизации при использовании равномерной метрики оценивания температурной невязки.

3. Разработан метод модальной идентификации пространственно-временных внутренних и граничных воздействий, реализующий поиск решений на компактном множестве непрерывных вместе со своими первыми производными временных мод, основанный на модальном представлении температурного поля и искомым воздействиям в виде разложения в ряды по собственным функциям исследуемой краевой задачи.
4. Проведен системный анализ характеристик решения ОЗТ в зависимости от числа учитываемых параметров параметрического представления искомым воздействиям, а также от основных факторов задачи идентификации процесса нестационарной теплопроводности. Подтверждены системные выводы о о регулярном характере параметрической оптимизации, обеспечивающей сходимость к точному решению с ростом числа учитываемых параметров и о качественных базовых характеристиках решения ОЗТ.
5. Разработаны методы параметрической оптимизации для решения обратных задач теплопроводности в условиях действия возмущений.
6. Разработан комплекс алгоритмов, инженерных методик расчёта, реализующих предлагаемые методы параметрической оптимизации применительно к широкому спектру актуальных обратных задач теплопроводности.
7. Разработанные методы использованы применительно к актуальным задачам идентификации искомым характеристик процессов технологической теплофизики.

Список литературы

1. *Тихонов А. Н.* Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. — 1943. — Т. 39, № 5. — С. 195—198.
2. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962.
3. *Иванов В. К.* О линейных некорректных задачах // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 145, № 2. — С. 270—272.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М. : Наука, 1986.
5. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / А. Н. Тихонов [и др.]. — М. : Наука. Физматлит, 1983.
6. *Тихонов А. Н., Кальнер В. Д., Гласко В. Б.* Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. — М. : Машиностроение, 1990.
7. *Лаврентьев М. М.* Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. — Новосибирск : ГУ, 1973.
8. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. — М. : Наука, 1980.
9. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и её приложения. — М. : Наука, 1978.
10. *Бухгейм А. Л.* Введение в теорию обратных задач. — Новосибирск : Наука, 1988.
11. *Васильев Ф. П.* Методы решения экстремальных задач. — М. : Наука. Физматлит, 1981.
12. *Гласко В. Б.* Обратные задачи математической физики. — М. : Изд-во МГУ, 1984.
13. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. — М. : Изд-во МГУ, 1994.

14. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск : Сибирское научное издательство, 2009.
15. *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. — М. : Наука, 1987.
16. *Федотов А. М.* Некорректные задачи со случайными ошибками в данных. — Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1990.
17. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М. : Мир, 1972.
18. *Cullum J.* Numerical Differentiation and Regularization // SIAM J. Numer. Anal. — 1971. — Т. 8, № 2. — С. 254—265.
19. *Miller K.* Three-circle theorems in Partial Differential Equations and Applications to Improperly Posed Problems // Arch. Rat. Mech. Anal. — 1964. — Т. 16. — С. 126—154.
20. *Алифанов О. М.* Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. — М. : Машиностроение, 1979.
21. *Алифанов О. М.* Обратные задачи теплообмена. — М. : Машиностроение, 1988.
22. *Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Градиентный метод нахождения гладких решений граничных обратных задач теплопроводности // Инженерно-физический журнал. — 1980. — Т. 39, № 2. — С. 259—263.
23. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. — М. : Наука. Физматлит, 1988.
24. *Алифанов О. М., Ненарокомов А. В.* Трехмерная граничная обратная задача теплопроводности // ТВТ. — 1999. — Т. 37, № 2. — С. 231—238.
25. *Коздоба Л. А., Круковский П. Г.* Методы решения обратных задач теплотеноса. — Киев : Наук. думка, 1982.
26. *Мацевитый Ю. М.* Обратные задачи теплопроводности. Методология. — Киев : Наук. думка, 2002.

27. *Мацевитый Ю. М., Мултановский А. В.* Идентификация в задачах теплопроводности. — Киев : Наук. думка, 1982.
28. *Симбирский Д. Ф.* Решение обратной задачи теплопроводности с применением оптимальной фильтрации // ТВТ. — 1976. — Т. 14, № 5. — С. 1040—1047.
29. Решение обратной задачи теплопроводности для пластины с источниками / Н. В. Шумаков [и др.] // ТВТ. — 1971. — Т. 9, № 2. — С. 366—372.
30. *Reinhardt H.-J.* A numerical method for the solution of two-dimensional inverse heat conduction problems // Int. J. Numer. Methods Eng. — 1991. — Т. 32, № 2. — С. 363—383.
31. *Бек Д., Блакуэлл Б., Сент-Клэр мл. Ч.* Некорректные обратные задачи теплопроводности. — М. : Мир, 1989.
32. *Murio D. A.* The mollification method and the numerical solution of the inverse heat conduction problem by finite differences // Comp. Math. Applic. — 1989. — Т. 17, № 10. — С. 1385—1396.
33. *Гончарский А. В., Степанов В. В.* Численные методы решения некорректно поставленных задач на компактных множествах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 1980. — № 3. — С. 12—18.
34. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 151, № 3. — С. 501—504.
35. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. — 1963. — Т. 153, № 1. — С. 49—52.
36. *Алифанов О. М.* О методах решения некорректных обратных задач // Инженерно-физический журнал. — 1983. — Т. 45, № 5. — С. 742—752.
37. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. — М. : Наука. Физматлит, 1988.
38. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М. : Наука. Физматлит, 1965.

39. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1975.
40. *Бутковский А. Г., Пустыльников Л. М.* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1980.
41. *Дегтярев Г. Л., Сиразетдинов Т. К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. — М. : Машиностроение, 1986.
42. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М. : Наука, 1978.
43. *Егоров А. И.* Основы теории управления. — М. : Физматлит, 2004.
44. *Егоров Ю. В.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами // В кн.: Математика на службе инженера. Основы теории оптимального управления. — М., 1973. — С. 187—199.
45. *Коваль В. А.* Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. — Саратов : Изд-во СГТУ, 1997.
46. *Коваль В. А.* Спектральный метод анализа и синтеза распределенных систем. — Саратов : Изд-во СГТУ, 2010.
47. *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. — М. : Наука, 1975.
48. *Першин И. М.* Анализ и синтез систем с распределенными параметрами. — Пятигорск : Рекламно-информ. агентство на КМВ, 2007.
49. *Рапопорт Э. Я.* Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. — М. : Metallurgy, 1993.
50. *Рапопорт Э. Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. — М. : Высш. шк., 2009.
51. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1977.
52. *Коваль В. А., Торгашева О. Ю.* Синтез дискретных регуляторов пониженной размерности для распределенной следящей системы // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 10. — С. 72—85.

53. *Diligenskaya A. N.* Solution of the retrospective inverse heat conduction problem with parametric optimization // High Temperature. — 2018. — Т. 56, № 3. — С. 382—388.
54. *Рапопорт Э. Я., Диллигенская А. Н.* Модальная идентификация граничного воздействия в двумерной обратной задаче теплопроводности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2018. — Т. 22, № 2. — С. 380—394.
55. *Diligenskaya A. N., Rapoport E. Y.* Method of minimax optimization in the coefficient inverse heat-conduction problem // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2016. — Т. 89, № 4. — С. 1008—1013.
56. *Diligenskaya A.* Estimation of the heat flux density during the induction heating process based on the parametric optimization // Int. J. of Microstructure and Materials Properties. — 2016. — Т. 11, № 1/2. — С. 5—17.
57. *Diligenskaya A. N., Rapoport E. Y.* Analytical methods of parametric optimization in inverse heat-conduction problems with internal heat release // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. — 2014. — Т. 87, № 5. — С. 1126—1134.
58. *Диллигенская А. Н.* Решение граничных обратных задач теплопроводности на основе методов оптимизации // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. — 2016. — 3 (191). — С. 46—50.
59. *Диллигенская А. Н.* Метод параметрической оптимизации в граничной обратной задаче теплопроводности с фильтрацией возмущений // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2015. — 3 (47). — С. 17—24.
60. *Диллигенская А. Н.* Альтернативный метод оптимизации в коэффициентной обратной задаче теплопроводности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2014. — 4 (44). — С. 144—148.
61. *Диллигенская А. Н.* Решение линейной коэффициентной обратной задачи теплопроводности на основе альтернативного метода оптимизации // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2013. — 3 (39). — С. 198—202.

62. Дилигенская А. Н., Рапопорт Э. Я. Оптимальный выбор пространственных координат точек контроля при неполном измерении состояния объекта с распределенными параметрами в процессе идентификации управляющих воздействий // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2013. — 2 (38). — С. 12—17.
63. Дилигенская А. Н. Аналитическая идентификация пространственно-временного управления в обратных задачах теплопроводности на основе модального представления // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2012. — № 4. — С. 31—38.
64. Дилигенская А. Н., Рапопорт Э. Я. Идентификация пространственного распределения внутренних источников тепла в обратных задачах теплопроводности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2011. — 4 (32). — С. 157—164.
65. Дилигенская А. Н. Аппроксимация сплайнами второго и третьего порядка функции внутреннего тепловыделения при решении обратных задач теплопроводности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2011. — 3 (31). — С. 193—200.
66. Дилигенская А. Н. Решение граничных обратных задач теплопроводности на основе параметрической оптимизации // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2011. — 2 (30). — С. 179—185.
67. Дилигенская А. Н. Математическое моделирование и анализ процессов управления производственными системами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2010. — 3 (28). — С. 14—18.
68. Дилигенская А. Н., Щетинин В. Г. Синтез структуры системы обогрева помещений в условиях неполноты измерений // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2009. — 3 (25). — С. 206—214.
69. Дилигенская А. Н., Щетинин В. Г. Устойчивость, управляемость и наблюдаемость систем обогрева помещений в условиях неполноты измерений // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2009. — 2 (24). — С. 12—16.

70. Простые бинарные модели для оперативной оценки качества нефти / В. Г. Кузнецов [и др.] // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2005. — № 33. — С. 47—50.
71. *Диллигенская А. Н.* Оптимальное по расходу энергии управление процессом индукционного нагрева в условиях неопределенности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 1998. — № 5. — С. 184—186.
72. *Diligenskaya A. N.* Method of Parametric Optimization in Problems of Identification of Boundary Conditions of Convective Heat Transfer in Processes of Non-Stationary Heat Conduction // 2018 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon). — IEEE Xplore : Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2018. — С. 1—4.
73. *Диллигенская А. Н.* Параметрическая оптимизация в обратных задачах теплопроводности в условиях интервальной неопределенности возмущений // Труды XX Междун. Конф. «Проблемы управления и моделирования в сложных системах». — Самара : Общество с ограниченной ответственностью "Офорт", 2018. — С. 112—118.
74. *Диллигенская А. Н.* Идентификация теплофизических характеристик в задачах несвязанной термоупругости на основе параметрической оптимизации // В сборнике: Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела. — Самара, 2017. — С. 210—213.
75. *Диллигенская А. Н.* Специальные методы параметрической оптимизации в обратных задачах нестационарной теплопроводности // В сб.: Математические методы в технике и технологиях – ММТТ: сб. трудов XXIX Междунар. науч. конф. — Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т им. Гагарина Ю.А., 2016. — С. 308—314.
76. *Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э., Диллигенская А. Н.* Конструктивные методы оптимизации управляемых систем с распределенными параметрами // XVIII междун. конф. «Проблемы управления и моделирования в сложных системах»: сб. тр. конф. — Самара : ИПУСС РАН, СамГТУ, 2016. — С. 317—324.

77. *Ваулина М. С., Дилигенская А. Н.* Определение граничных условий теплообмена на поверхности барабана котла // В сб.: Математические методы в технике и технологиях – ММТТ: сб. трудов ХХІХ Междунар. науч. конф. — Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т им. Гагарина Ю.А., 2016. — С. 207—210.
78. *Дилигенская А. Н., Мандра А. Г.* Определение мощности тепловыделения в процессе индукционного нагрева на основе решения линейной обратной задачи теплопроводности // Электротехника. Электротехнология. Энергетика. Сборник научных трудов VII Международной научной конференции молодых ученых. — 2015. — С. 47—50.
79. *Diligenskaya A., Mandra A.* Determination of Internal Heat Power during the Induction Heating Based on Solution of Linear Inverse Heat Conduction Problem // Applied Mechanics and Materials. — 2015. — Т. 792. — С. 635—639.
80. *Diligenskaya A., Mandra A.* Determination of Space and Time Dependent Function of Internal Heat Source in Heat Conductivity Equation // Applied Mechanics and Materials. — 2015. — Т. 698. — С. 668—673.
81. *Дилигенская А. Н.* Современные методы оптимизации в обратных задачах теплопроводности // XVI Междун. Конф. «Проблемы управления и моделирования в сложных системах»: Сб. Науч. Тр. — Самара : ИПУСС, СНЦ РАН, 2014. — С. 61—67.
82. *Дилигенская А. Н., Мандра А. Г.* Восстановление пространственно-временной функции внутреннего тепловыделения в обратной задаче теплопроводности // Научные труды I международной научной конференции молодых ученых «Электротехника. Энергетика. Машиностроение (ЭЭМ – 2014)». — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. — С. 79—82.
83. *Ермолова Л. П., Дилигенская А. Н.* Асимптотическое управление процессом нагрева термически тонких тел в условиях действующих возмущений // Междун. науч.-практич. конф. «Техника и технологии: Пути инновационного развития»: сб. науч. тр. — Курск:РИО Юго-Западн. гос. ун-та, 2011. — С. 68—70.

84. *Диллигенская А. Н.* Синтез и анализ энергоэффективных систем управления на основе наблюдателей состояния // XII Междун. Конф. «Проблемы управления и моделирования в сложных системах»: Сб. Науч. Тр. — Самара, 2010. — С. 165—170.
85. *Диллигенская А. Н., Щетинин В. Г.* Энергоэффективный подход к регулированию теплообеспечением сооружений // Междун. науч.-технич. конф. «Информационные, измерительные и управляющие системы (ИИУС-2010)»: сб. науч. тр. — Самара : РИО Самарск. гос. техн. ун-та, 2010. — С. 10—13.
86. *Диллигенская А. Н., Щетинин В. Г.* Управление технологическими процессами в условиях неполной информации // Междун. науч. конф. «Проблемы управления, передачи и обработки информации (АТМ-ТКИ-50)»: сб. науч. тр. — Саратов : Саратов. гос. техн. ун-т, 2009. — С. 62, 63.
87. *Диллигенская А. Н.* Энергосберегающие режимы управления нагревом // XI межвуз. конф. «Математическое моделирование и краевые задачи». — Самара : Часть 2: сб. науч. тр./ Инж. акад. РФ, Самарск. гос. техн. ун-т., 2001. — С. 42, 43.
88. *Диллигенская А. Н.* Энергосберегающее управление нелинейными объектами индукционного нагрева // Междун. науч.-техн. конф. «Качество, безопасность и энергосбережение»: сб. науч. тр. — Самара : РИО Самарск. гос. тех. ун-та, 1998. — С. 21—23.
89. *Диллигенская А. Н.* Оптимальное по энергопотреблению управление в «транспортной» задаче индукционного нагрева металла // «Математическое моделирование и краевые задачи»: Труды седьмой межвуз. конф. — Самара : Инж. акад. РФ, Самарск. гос. тех. ун-т., РИО Самарск. гос. тех. ун-та, 1997. — С. 36—42.
90. *Диллигенская А. Н.* Решение оптимальной по энергопотреблению задачи индукционного нагрева при учете технологических ограничений // Межвуз. науч.-практич. семинар-выставка «Автоматизация технологических процессов и производств. Точность, качество и надежность конструкций и технических систем»: сб. науч. тр. — Самара : РИО Самарск. гос. тех. ун-та, 1997. — С. 42—44.

91. *Диллигенская А. Н., Мажурина Н. А.* Алгоритмы оптимального по энергопотреблению управления процессом индукционного нагрева // «Приборы, системы, информатика»: Межвуз. сб. науч. тр. — Самара : РИО Самарск. гос. тех. ун-та, 1997. — С. 30—35.
92. *Рапопорт Э. Я., Диллигенская А. Н.* Оптимальное по энергосбережению управление процессами технологического нагрева // Междун. науч.-технич. конф. «Актуальные вопросы энергосбережения и сертификации»: сб. науч. тр. — Самара : РИО Самарск. гос. техн. ун-та, 1997. — С. 50, 51.
93. *Диллигенская А. Н.* Оптимизация процесса индукционного нагрева металла по энергопотреблению // «Математическое моделирование и краевые задачи»: Труды шестой межвуз. конф. — Самара : Инж. акад. РФ, Самарск. гос. техн. ун-т. — РИО Самарск. гос. техн. ун-та, 1996. — С. 141.
94. *Диллигенская А. Н.* Определение пространственно-временной функции мощности внутреннего тепловыделения в обратной задаче теплопроводности на основе модального описания // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018663199 от 23.10.2018 г. — 2018.
95. *Диллигенская А. Н.* Идентификация объектов управления [Текст]: учеб. пособие. — Самара : Самар. гос. техн. ун-т, 2017.
96. *Диллигенская А. Н.* Управление в пространстве состояний линейными динамическими системами [Текст]: учеб. пособие. — Самара : РИО Самарск. гос. техн. ун-та, 2013.
97. *Hadamard J.* Sur les problemes aux derivees partielles et leur signification physique // Bull. Univ. Princeton. — 1902. — № 13. — С. 49—52.
98. *Hadamard J.* Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques. — Paris : Hermann, 1932.
99. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. — Москва : Наука, 1978.
100. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. — М. : Мир, 1969.

101. *Музыльёв Н. В.* Теоремы единственности для некоторых обратных задач теплопроводности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1980. — Т. 20, № 2. — С. 388—400.
102. *Kozdoba L. A.* Basis of the terminology and algorithm for the solution of inverse heat-transfer problems // Journal of Engineering Physics. — 1984. — Т. 45, № 5. — С. 1322—1331.
103. *Темкин А. Г.* Обратные методы теплопроводности. — М. : Энергия, 1973.
104. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 1989.
105. *Бакушинский А. Б., Гончарский А. В.* Итеративные методы решения некорректных задач. — М. : Наука. Физматлит, 1989.
106. *Морозов В. А.* Линейные и нелинейные некорректные задачи // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1973. — Т. 11. — С. 129—178.
107. *Лисковец О. А.* Теория и методы решения некорректных задач // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1982. — Т. 20. — С. 116—178.
108. *Алифанов О. М., Румянцев С. В.* Об устойчивости итерационных методов решения линейных некорректных задач // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 248, № 6. — С. 1289—1291.
109. *Просунцов П. В., Резник С. В.* Математическая модель коэффициентной обратной задачи радиационно-кондуктивного теплообмена в полупрозрачной рассеивающей среде // Известия Сибирского отделения Академии наук СССР. Серия технических наук. — 1986. — 10—2 (421). — 3—9.
110. *Prosuntsov P. V.* Parametric identification of thermophysical properties of highly porous partially transparent materials based on the solution of a two-dimensional problem of radiative-conductive heat transfer // Heat Transfer Research. — 2005. — Т. 36, № 6. — С. 481—499.
111. Параметрическая и функциональная идентификация тепловых процессов / Ю. М. Мацевитый [и др.] // Пробл. машиностроения. — 2011. — Т. 14, № 3. — С. 40—47.

112. *Гольцов А. С., Симбирский Д. Ф., Кудряшов С. В.* Динамический метод измерения тепловых потоков батарейными тепломерами с применением фильтра Калмана // ИФЖ. — 1977. — Т. 33, № 6. — С. 1070—1077.
113. *Иванов В. К.* О регуляризации линейных операторных уравнений первого рода // Изв. вузов. Матем. — 1967. — № 10. — С. 50—55.
114. *Иванов В. К.* Некорректные задачи в топологических пространствах // Сиб. матем. журн. — 1969. — Т. 10, № 5. — С. 1065—1074.
115. *Данфорд Н., Шварц Д. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М. : Изд-во иностр. лит., 1962.
116. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : Наука. Физматлит, 1976.
117. *Лаврентьев М. М.* Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 127, № 1. — С. 31—33.
118. *Иванов В. К.* О некорректно поставленных задачах // Матем. сб. — 1963. — Т. 61, № 2. — С. 211—223.
119. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М. : Наука, 1977.
120. *Гончарский А. В., Ягола А. Г.* О равномерном приближении монотонного решения некорректных задач // Докл. АН СССР. — 1969. — Т. 184, № 4. — С. 771—773.
121. О некоторых алгоритмах отыскания приближенного решения некорректных задач на множестве монотонных функций / А. В. Гончарский [и др.] // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1972. — Т. 12, № 2. — С. 283—297.
122. *Гончарский А. В., Степанов В. В.* Алгоритмы приближенного решения некорректно поставленных задач на некоторых компактных множествах // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 245, № 6. — С. 1296—1299.
123. *Танана В. П., Булатова М. Г.* Об оптимальных по порядку методах приближения кусочно-непрерывного решения одной обратной задачи // Известия вузов. Математика. — 2007. — 3 (538). — С. 65—72.

124. *Чжан Е., Лукьяненко Д. В., Ягола А. Г.* Применение принципа Лагранжа для решения линейных некорректно поставленных обратных задач с использованием априорной информации о решении // Вычислительные методы и программирование. — 2013. — Т. 14, № 1. — С. 468—482.
125. Recovering aerosol particle size distribution function on the set of bounded piecewise-convex functions / Y. F. Wang [и др.] // Inverse Problems in Science and Engineering. — 2013. — Т. 21, № 2. — С. 339—354.
126. *Калинников Л. Д., Шумаков Н. В.* Обратная задача теплопроводности для пластины // ТВТ. — 1971. — Т. 9, № 4. — С. 812—816.
127. *Жук В. И., Голосов А. С.* Инженерные методы определения тепловых граничных условий по данным температурных измерений // ИФЖ. — 1975. — Т. 29, № 1. — С. 45—50.
128. *Иванов В. К.* О приближенном решении операторных уравнений первого рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1966. — Т. 6, № 6. — С. 1089—1094.
129. *Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Об одном регуляризирующем алгоритме для некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1972. — Т. 12, № 6. — С. 1592—1594.
130. *Морозов В. А.* О принципе оптимальности невязки при приближенном решении уравнений с нелинейными операторами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1974. — Т. 14, № 4. — С. 819—827.
131. *Бакушинский А. Б.* Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1967. — Т. 7, № 3. — С. 672—677.
132. *Бакушинский А. Б.* Избранные вопросы приближенного решения некорректных задач. — М. : Изд-во МГУ, 1968.
133. *Бутковский А. Г., Малый С. А., Андреев Ю. Н.* Оптимальное управление нагревом металла. — М. : Metallurgy, 1972.

134. *Бутковский А. Г.* Структурная теория распределенных систем. — М. : Наука. Физматлит, 1977.
135. *Бутковский А. Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами. — М. : Наука. Физматлит, 1979.
136. *Бутковский А. Г., Малый С. А., Андреев Ю. Н.* Управление нагревом металла. — М. : Metallurgy, 1981.
137. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами // В кн.: Машиностроение. Энциклопедия. Т.1.4, Автоматическое управление. Теория. — М., 2000. — С. 642—674.
138. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. — М. : Наука, 1983.
139. *Егоров Ю. В.* Необходимые условия оптимальности управления в банаховых пространствах // Матем. сб. — 1964. — Т. 64 (106), № 1. — С. 79—101.
140. *Панасюк В. И., Ковалевский В. Б., Политыко Э. Д.* Оптимальное управление в технических системах. — Минск : Наука и техника, 1990.
141. *Фельдбаум А. А., Бутковский А. Г.* Методы теории автоматического управления. — М. : Наука. Физматлит, 1971.
142. *Рапопорт Э. Я.* Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. — М. : Наука, 2000.
143. *Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э.* Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. — М. : Наука, 2012.
144. *Чебышев П. Л.* Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций. — 1955.
145. *Рапопорт Э. Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами. — М. : Высш. шк., 2003.
146. *Рей У.* Методы управления технологическими процессами. — М. : Мир, 1983.

147. *Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э.* Алгоритмически точный метод параметрической оптимизации в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // *Автометрия*. — 2009. — Т. 45, № 5. — С. 103—112.
148. Design concepts of induction mass heating technology based on multiple-criteria optimization / Y. E. Pleshivtseva [и др.] // *Intern. Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*. — 2017. — Т. 36, № 2. — С. 386—400.
149. *Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э.* Метод параметрической оптимизации программных управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // «Пром-Инжиниринг»: труды II международной научно-технической конференции. — Челябинск : Издательский центр ЮУрГУ, 2016. — С. 200—204.
150. *Плешивцева Ю. Э., Афиногентов А. А.* Альтернативный метод структурно-параметрического синтеза каскадных систем автоматического управления // *Автометрия*. — 2015. — Т. 51, № 5. — С. 17—26.
151. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. — М. : Высш. шк., 2001.
152. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. — М. : Высш. шк., 1967.
153. *Костиков А. О.* Математическое моделирование и параметрическая идентификация тепловых процессов с учётом априорной информации об источниках генерации теплоты // *Проблемы общей энергетики*. — 2014. — 3 (38). — С. 15—21.
154. К решению нестационарных нелинейных граничных обратных задач теплопроводности / Ю. М. Мацевитый [и др.] // *Пробл. машиностроения*. — 2017. — Т. 20, № 4. — С. 15—23.
155. *Гусейнов Ш.* Исследование одной двумерной ретроспективной обратной задачи теплопроводности // *Transport and Telecommunication*. — 2004. — Т. 5, № 2. — С. 70—78.

156. *Еремеева М. С.* Сравнение итерационных методов решения обратной ретроспективной задачи теплопроводности // Вестник СВФУ. — 2015. — Т. 12, № 1. — С. 15—24.
157. *Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Васильев В. И.* Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности // Матем. моделирование. — 1997. — Т. 9, № 5. — С. 119—127.
158. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. — М. : Физматлит, 2007.
159. *Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э.* Специальные методы оптимизации в обратных задачах теплопроводности // Изв. РАН. Энергетика. — 2002. — № 5. — С. 144—155.
160. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. — М. : Высшая школа, 1970.
161. *Первозанский А. А.* Курс теории автоматического управления. — М. : Наука. Физматлит, 1986.
162. *Цирлин А. М., Балакирев В. С., Дудников Е. Г.* Вариационные методы оптимизации управляемых объектов. — М. : Энергия, 1976.
163. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. — М. : Высш. шк., 2003.
164. *Моисеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем. — М. : Наука, 1975.
165. *Ким Д. П.* Теория автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. — 2004.
166. *Иванов В. А., Фалдин Н. В.* Теория оптимальных систем автоматического управления. — М. : Наука, 1981.
167. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М. : Наука. Физматлит, 1981.
168. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М. : Изд-во МГУ, 1999.
169. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. — М. : Наука, 1964.

170. *Даугавет В. А.* Альтернансные свойства решений нелинейных минимаксных задач с нелинейными ограничениями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1976. — Т. 16, № 3. — С. 784—788.
171. *Даугавет В. А., Малоземов В. Н.* Альтернансные свойства решений нелинейных минимаксных задач с невыпуклыми ограничениями // Докл. АН СССР. — 1975. — Т. 225, № 2. — С. 253—255.
172. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т.1. — М. : Наука. Физматлит, 1962.
173. *Бернштейн С. Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Ч. 1. — М.-Л. : ОНТИ НКТП СССР. Гл. ред. общетехн. лит., 1937.
174. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. — М. : Наука. Физматлит, 1976.
175. *Коллатц Л., Крабс В.* Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. — М. : Наука. Физматлит, 1978.
176. *Ортега Д., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М. : Мир, 1975.
177. Вопросы теории и элементы программного обеспечения минимаксных задач / под ред. В. Ф. Демьянова, В. Н. Малоземова. — Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.
178. *Малоземов В. Н.* О выравнивании максимумов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1976. — Т. 16, № 3. — С. 781—784.
179. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* К теории нелинейных минимаксных задач // УМН. — 1971. — Т. 26, № 3. — С. 53—104.
180. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Приближение функций для технических приложений. — Киев : Наук. думка, 1980.
181. *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. — Киев : Наук. думка, 1979.
182. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. — М. : Наука, 1972.

183. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация. — М. : Наука. Физматлит, 1981.
184. *Полак Э., Мейни Д. К., Стиллер Д. М.* Применение методов полубесконечной оптимизации для синтеза систем автоматического управления: Обзор // ТИИЭР. — 1984. — Т. 72, № 12. — С. 132—153.
185. *Бейко И. В., Бублик Б. Н., Зинько П. Н.* Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. — Киев : Вища школа, 1983.
186. *Михалевич В. С., Гупал А. М., Норкин В. И.* Методы невыпуклой оптимизации. — М. : Наука, 1987.
187. *Немков В. С., Демидович В. Б.* Теория и расчет устройств индукционного нагрева. — Л. : Энергоатомиздат, 1988.
188. Установки индукционного нагрева / под ред. А. Е. Слухоцкого [и др.]. — Л. : Энергоиздат, 1981.
189. *Козлов И. А., Чугунов В. А.* Решение обратных задач для нелинейного уравнения параболического типа // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. — 2012. — № 2. — С. 138—143.
190. *Зайнуллов А. Р.* Обратная задача для двумерного уравнения теплопроводности по отысканию начального распределения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2015. — Т. 19, № 4. — С. 667—679.
191. *Столочич Н. Н., Миницкая Н.* Температурные зависимости теплофизических свойств некоторых металлов. — Минск : Наука и техника, 1975.
192. *Fujita H.* The exact pattern of a concentration dependent diffusion in a semi-infinite medium, part 1 // Textile Res. J. — 1952. — № 22. — С. 757—760.
193. *Казанцев Е. И.* Промышленные печи. Справочное руководство для расчетов и проектирования. — М. : Металлургия, 1975.
194. *Кузин А. Я.* Регуляризованное численное решение нелинейной двумерной обратной задачи теплопроводности // ПМТФ. — 1995. — № 1. — С. 106—112.

195. *Алифанов О. М., Керов Н. В.* Определение параметров внешнего теплового нагружения из решения двухмерной обратной задачи теплопроводности // ИФЖ. — 1981. — Т. 41, № 4. — С. 581—586.
196. *Guerrier B., Benard C.* Two-dimensional linear transient inverse heat conduction problem - Boundary condition identification // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. — 1993. — Т. 7, № 3. — С. 472—478.
197. *Рапопорт Э. Я.* Точный метод в задачах оптимизации нестационарных процессов теплопроводности // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. — 1978. — № 4. — С. 137—145.
198. *Рапопорт Э. Я.* Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. — М. : Высш. шк., 2005.
199. *Ozisik M. N., Orlande H. R. B.* Inverse Heat Transfer: fundamentals and applications. — New York : Taylor, Francis, 2000.
200. *Рапопорт Э. Я.* Программная управляемость линейных многомерных систем с распределенными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2015. — № 2. — С. 22—39.
201. Алгоритмы диагностики тепловых нагрузок летательных аппаратов / под ред. В. П. Мишина. — М. : Машиностроение, 1983.
202. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. — М. : Наука, 1976.
203. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. — М. : Наука. Физматлит, 1980.
204. *Воскобойников Ю. Е., Преображенский Н. Г., Седельников А. И.* Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике. — Новосибирск : Наука, 1984.
205. *Бендат Д., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. — М. : Мир, 1989.
206. *Luo J., Shin A. J.* Inverse heat transfer solution of the heat flux due to induction heating // J. Manuf. Sci. Eng. — 2004. — Т. 127, № 3. — С. 555—563.

207. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. — М. : Наука, 1964.
208. Расчет коэффициентов теплоотдачи и температуры на внутренней поверхности барабана после сброса давления в процессе аварийного останова котла БКЗ-420-140 НГМ / В. А. Кудинов [и др.] // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Техн. науки. — 2000. — № 9. — С. 109—114.
209. *Нестеров С. А.* Проблемы идентификации неоднородных свойств термоупругой среды // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2011. — № 4—4. — С. 1657—1659.

Приложение А

АКТ

об использовании материалов диссертационной работы Дилигенской А.Н. на тему «Методы идентификации, анализ и синтез алгоритмов последовательной параметрической оптимизации в обратных задачах технологической теплофизики» при создании комплексного тренажера оператора основного оборудования ТЭЦ

Материалы диссертационной работы Дилигенской А.Н. «Методы идентификации, анализ и синтез алгоритмов последовательной параметрической оптимизации в обратных задачах технологической теплофизики», представленной на соискание ученой степени доктора технических наук использованы при создании компьютерного тренажера с динамическими компьютерными мнемосхемами основного технологического оборудования Стерлитамакской ТЭЦ и Новостерлитамакской ТЭЦ, филиалов ООО «Башкирская генерирующая компания».

На основе предложенных в диссертационной работе методов параметрической оптимизации проведена идентификация динамических моделей температурных полей потоков теплоносителя, топки котла, металла барабана котла и пароперегревателя парового котла Е-420/140ГМ (ТГМ-84). Выполнена идентификация динамических моделей подогревателей высокого давления, низкого давления турбоагрегата ПТ-60-130/13 ЛМЗ, температурных полей металла цилиндров высокого и низкого давлений турбоагрегата.

Заместитель генерального
директора – Директор по
производству ООО «ГК ИНФОПРО»



И.В. Соловей

Приложение Б

**Арконик Россия**

Акционерное общество
«Арконик СМЗ»
(АО «Арконик СМЗ»)

ул. Алма-Атинская, 29, корп.33/34
г. Самара 443051 Россия

Info.smz@arconic.com

Тел.: 8 846 278 34 12

Факс: 8 846 278 34 14

№ 800 / 204

«21» 12 2018

СПРАВКА

об использовании результатов, полученных в диссертации Дилигенской А.Н.

«Методы идентификации, анализ и синтез алгоритмов последовательной параметрической оптимизации в обратных задачах технологической теплофизики»

Материалы диссертационной работы Дилигенской А.Н. «Методы идентификации, анализ и синтез алгоритмов последовательной параметрической оптимизации в обратных задачах технологической теплофизики», представленной на соискание ученой степени доктора технических наук, использованы в практике технологического проектирования организации при определении и уточнении температурно-временных параметров и режимов нагрева при производстве и термической обработке полуфабрикатов из алюминиевых сплавов, граничных тепловых потоков, функции распределения мощности внутренних источников тепла, теплофизических параметров и характеристик моделей температурного поля в процессе индукционного нагрева изделий перед последующими операциями пластической деформации, для анализа существующих технологий и синтеза алгоритмов управления процессами индукционного нагрева.

Предложенные Дилигенской А.Н. расчетные методики способствуют обеспечению нормируемых параметров нагрева заготовок перед обработкой давлением, повышению производительности нагревательного оборудования и точности достижения требуемых температурных состояний полуфабрикатов.

Директор по качеству и технологии

АО «Арконик СМЗ»


А.В. Павленко



Приложение В

ООО «Специальное Конструкторско-Технологическое Бюро «Пластик»
446025, РФ, Самарская обл.,
г. Сызрань, Саратовское шоссе, 4

УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель генерального директора – Генеральный конструктор по спец. изделиям
В.Е. Биткин
«25» марта 2018 г.



АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы Дилигенской А.Н. на тему «Методы идентификации, анализ и синтез алгоритмов последовательной параметрической оптимизации в обратных задачах технологической теплофизики» в опытно-конструкторскую работу, выполненную ООО «Специальное Конструкторско-Технологическое Бюро «Пластик», г. Сызрань

Научно-техническая комиссия в составе заместителя Генерального конструктора по научной работе Жидковой О.Г., начальника отдела проектных разработок и опытно-конструкторских работ Денисова А.В., заместителя начальника отдела Бородавина А.В., руководителя проектов по направлению Родионова А.В. составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы:

- численный метод определения теплофизических параметров моделей нестационарной теплопроводности внедрен в расчетную практику при составлении паспортных характеристик по параметрам теплопроводности и термоупругости полимерных и композиционных материалов различного технического назначения;

- предлагаемые алгоритмы идентификации граничных воздействий в обратных задачах технологической теплофизики внедрены в практику проектных разработок и опытно-конструкторских работ организации;

- результаты исследования влияния координат точек термометрирования на точность идентификации теплофизических параметров и граничных воздействий используются при планировании экспериментальных исследований процессов теплопроводности и термоупругости.

Члены комиссии:

Заместитель Генерального конструктора по научной работе

 О.Г. Жидкова

Начальник отдела проектных разработок и опытно-конструкторских работ

 А. В. Денисов

Заместитель начальника отдела

 А. В. Бородавин

Руководитель проектов по направлению

 А. В. Родионов

Приложение Г

(СПРАВКА)

О возможности применения результатов диссертационной работы Дилигенской А.Н. «Методы идентификации, анализ и синтез алгоритмов последовательной параметрической оптимизации в обратных задачах технологической теплофизики»

Материалы диссертационной работы Дилигенской А.Н. «Методы идентификации, анализ и синтез алгоритмов последовательной параметрической оптимизации в обратных задачах технологической теплофизики», представленной на соискание ученой степени доктора технических наук могут быть использованы как для оптимизации работы генерирующего и теплосетевого оборудования так и при формировании программы реконструкции и технического перевооружения Филиала «Самарский» ПАО «Т Плюс».

Предложенные в диссертационной работе методы параметрической оптимизации могут быть применены при проведении идентификации оборудования тепловых электрических станций (энергетических и пиковых водогрейных котлов, редукционно-охладительных установок и др.), при расчете параметров теплоотдачи (на поверхностях теплообмена), идентификации граничных воздействий, анализе температурного состояния поверхностей теплообмена, а также при определении значений теплофизических характеристик материалов. Что может быть успешно применено для моделирования работы генерирующего оборудования с целью оптимизации его загрузки.

Кроме того, данные методы предполагается использовать при построении моделей тепловых сетей Филиала «Самарский» ПАО «Т Плюс», предназначенных для расчета тепловых и гидравлических режимов работы с целью выработки оптимальных режимов работы, снижения затрат и повышения надежности их работы

Заместитель директора
Филиала «Самарский» ПАО «Т Плюс»
по экономике и финансам

Д.А. Смородинов

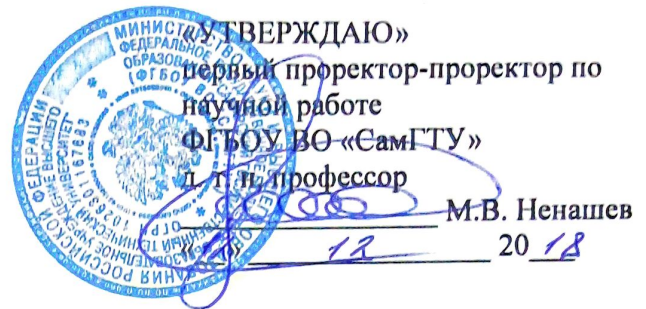
9.10.2018



Начальник управления
тарифной политики
Филиала «Самарский» ПАО «Т Плюс»

Ф.А. Гаврилов

Приложение Д



АКТ

об использовании результатов диссертационной работы Дилигенской А.Н. «Методы идентификации, анализ и синтез алгоритмов последовательной параметрической оптимизации в обратных задачах технологической теплофизики», представленной на соискание ученой степени доктора технических наук, в учебном процессе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет»

Комиссия в составе директора института автоматизации и информационных технологий Н.Г. Губанова, д.т.н., заведующего кафедрой «Автоматика и управление в технических системах» В.Н. Митрошина, д.т.н., профессора кафедры «Автоматика и управление в технических системах» Г.Н. Рогачева составила настоящий акт о том, что в учебный процесс ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» внедрены результаты диссертационной работы Дилигенской А.Н. «Методы идентификации, анализ и синтез алгоритмов последовательной параметрической оптимизации в обратных задачах технологической теплофизики».

Использованы следующие результаты:

Методики параметрической идентификации широкого круга моделей технологических объектов с распределенными параметрами использованы при выполнении выпускных квалификационных и курсовых работ, а также при изучении учебных дисциплин: «Теория автоматического управления», «Управление системами с распределенными параметрами», «Идентификация и диагностика объектов и систем управления» при подготовке бакалавров по направлению 27.03.04 «Управление в технических системах», 27.03.03 «Системный анализ и управление» и магистров по направлению 27.04.04 «Управление в технических системах».

Директор института автоматизации
и информационных технологий

Н.Г. Губанов

Заведующий кафедрой «Автоматика
и управление в технических системах»

В.Н. Митрошин

Профессор кафедры «Автоматика
и управление в технических системах»

Г.Н. Рогачев

Приложение Е

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018663199

**Определение пространственно-временной функции
мощности внутреннего тепловыделения в обратной задаче
теплопроводности на основе модального описания**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Самарский
государственный технический университет» (RU)*

Автор: *Дилигенская Анна Николаевна (RU)*

Заявка № **2018660818**

Дата поступления **08 октября 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **23 октября 2018 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

