

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

ИЛЬИНА Наталья Андреевна

**ДВУХКАНАЛЬНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ
УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ С
РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В УСЛОВИЯХ
РАВНОМЕРНОЙ ОЦЕНКИ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ**

Специальность 2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка
информации, статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Рапопорт Эдгар Яковлевич

Самара – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
Глава 1. Проблема многоканального управления в системах с распределенными параметрами	17
1.1 Математические модели объектов с распределенными параметрами (ОРП) с векторными управляющими воздействиями	19
1.1.1 Базовые уравнения одномерных ОРП	21
1.1.2 Базовые уравнения взаимосвязанных ОРП	26
1.1.3 Многоканальное управление в технических системах с распределенными параметрами	28
1.2 Постановка задачи многоканальной оптимизации объектов с распределенными параметрами	34
1.3 Общая схема решения задачи многоканальной оптимизации	37
1.4 Альтернативный метод решения задачи полубесконечной оптимизации	39
1.5 Качественные особенности задач многоканальной оптимизации ОРП	40
1.6 Выводы по первой главе	42
Глава 2. Оптимальное по быстродействию двухканальное управление объектами с распределенными параметрами в условиях равномерной оценки целевых множеств	43
2.1 Постановка задачи оптимального по быстродействию двухканального управления ОРП	44
2.2 Технология решения задачи полубесконечной оптимизации альтернативным методом	47
2.3 Двухканальное оптимальное по быстродействию управление ОРП с двухинтервальными управляющими воздействиями	49
2.4 Оптимальное по быстродействию двухканальное граничное управление ОРП	55
2.5 Оптимальное по быстродействию двухканальное внутреннее управление ОРП	61
2.6 Задача оптимального быстродействия с двухканальным комбинированным воздействием по управлению и возмущению	66

2.7 Оптимальное по быстродействию двухканальное управление нелинейным ОРП.....	71
2.8 Выводы по второй главе	74
Глава 3. Оптимальное по быстродействию двухканальное управление ОРП с учетом дополнительных ограничений на управляемые величины и управляющие воздействия.....	77
3.1 Оптимальное по быстродействию двухканальное управление ОРП с учетом фазовых ограничений на максимальное значение управляемой величины	77
3.2 Оптимальное по быстродействию двухканальное управление ОРП с учетом ограничений на скорость изменения управляющих воздействий	85
3.3 Выводы по третьей главе.....	95
Глава 4. Оптимальное по быстродействию двухканальное управление двумя взаимосвязанными ОРП с идеальным контактом взаимодействующих сред.....	97
4.1 Математическая модель двух взаимосвязанных ОРП с идеальным контактом взаимодействующих сред.....	98
4.2 Решение начально-краевой задачи, моделирующей поведение двух взаимосвязанных ОРП	100
4.3 Редукция к задаче полубесконечной оптимизации и ее решение альтернативным методом.....	107
4.4 Выводы по четвертой главе.....	114
Глава 5. Синтез систем оптимального по быстродействию двухканального управления ОРП.....	115
5.1 Метод синтеза оптимальных регуляторов для ОРП с линейными обратными связями по неполному измерению состояния объекта при двухканальном управлении.....	115
5.2 Синтез оптимальной по быстродействию системы двухканального управления процессом индукционного нагрева	122
5.3 Выводы по пятой главе.....	132
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	133
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	136

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Разработка конструктивных методов решения задач оптимального управления (ЗОУ) по переводу бесконечномерных объектов в заданное конечное состояние с минимальным значением выбранного функционала качества до настоящего времени остается одной из основных проблем в теории систем с распределенными параметрами (СРП), базовые положения которой созданы, начиная с основополагающих работ А.Г. Бутковского, и получили дальнейшее развитие в целом ряде известных исследований отечественных и зарубежных ученых (А.Г. Бутковский [1-3], Г.Л. Дегтярев [4], А.И. Егоров [5-6], Ю.В. Егоров [7-8], В.А. Коваль [9], Ж.-Л. Лионс [10], К.А. Лурье [11], И.М. Першин [12], В.И. Плотников [13], Л.М. Пустыльников [13], Ю.Э. Плешивцева [15], Э.Я. Рапопорт [16-18], Т.К. Сиразетдинов [19], А.В. Фурсиков [20], Ф.Л. Черноусько [21-22] и другие).

Конструктивный подход к этой проблеме состоит в переходе к заведомо разрешимой с реализуемыми результатами задаче управления при заданном в бесконечномерном фазовом пространстве СРП целевом множестве, которое отвечает достижимым значениям всегда существующих в прикладных задачах допусков на отклонения от требуемого эталона, оцениваемых в равномерной метрике на множестве пространственных аргументов управляемой величины применительно к ситуациям, представляющим наибольший интерес в технических приложениях [18].

Как правило, такие ЗОУ СРП до настоящего времени рассматривались применительно к типовым постановкам с одной пространственно-распределенной управляемой величиной и внутренним или граничным управляющим воздействием только по одному из возможных каналов управления [3, 16, 18].

В то же время, целый ряд актуальных для технических приложений, в частности, для широкого круга технологических процессов нагрева металла

перед обработкой давлением [23-26] ЗОУ СРП формулируется в условиях одновременного воздействия на объект по различным каналам управления с целью существенного повышения эффективности управляемых процессов по базовым технико-экономическим показателям [27]. Сказанное относится, в частности, к распространенным в технических системах ситуациям с использованием векторных управляющих воздействий, например, в виде совокупности различных внутренних и (или) граничных управлений при скалярном характере управляемой величины.

Во многих случаях постановка подобных задач многоканального управления диктуется самими используемыми способами конструктивного исполнения промышленного объекта и методами организации технологического процесса [1, 17, 18, 23, 24, 28-30].

Самостоятельный класс задач многоканального управления, представляющих большой самостоятельный интерес, возникает для взаимосвязанных распределенных объектов (ОРП) с различными управляющими воздействиями для каждого из них, специфической особенностью которых являются условия сопряжения физически неоднородных сред на их контактирующих поверхностях [23, 25-27]. Подобные ОРП являются во многих приложениях элементами многослойных структур и конструкций, нашедших широкое применение, например, в области технологической теплофизики [26, 31-35].

В связи с возможностью существенного повышения качественных показателей процессов функционирования ОРП при векторных управляющих воздействиях возрастает значимость малоисследованной проблемы разработки конструктивных методов решения задачи оптимизации многоканального управления в системах с распределенными параметрами по выбранному критерию качества в условиях равномерной оценки целевых множеств. Подобные задачи значительно усложняются по сравнению с их скалярным вариантом целым рядом особенностей принципиального характера, существенно зависящих от базовых закономерностей предметной области и требующих на

этом основании разработки и обосновании специальной технологии построения вычислительных алгоритмов применительно к конкретному классу исследуемых процессов.

Диссертация посвящена разработке и исследованию задач равномерной оптимизации СРП с векторными граничными и внутренними управляющими воздействиями применительно к типичной для приложений актуальной проблеме двухканальной оптимизации по базовому критерию быстродействия нестационарных процессов теплопроводности, в рамках моделей которых описывается, в частности, целый класс широко распространенных в промышленности технологических процессов нагрева металлических полуфабрикатов перед обработкой давлением.

Целью диссертационной работы является оптимизация по критерию быстродействия процессов двухканального управления техническими объектами с распределенными параметрами путем разработки, обоснования и исследования алгоритмически точных методов определения искомых управляющих воздействий в условиях равномерной оценки целевых множеств конечных состояний управляемой СРП применительно к широкому классу задач нагрева металлических полуфабрикатов перед обработкой давлением.

Основные задачи диссертационного исследования

Для достижения поставленной цели решаются следующие основные задачи:

1. Разработка и обоснование методики решения задачи оптимального по быстродействию двухканального программного управления объектом с распределенными параметрами в условиях равномерной оценки целевых множеств его конечного состояния применительно к предметной области процессов нестационарной теплопроводности с различными комбинациями граничных и внутренних управляющих и возмущающих воздействий.

2. Разработка и обоснование методики решения задачи оптимального по быстродействию двухканального программного управления объектом с распределенными параметрами с учетом дополнительных ограничений на

максимально допустимый уровень управляемой величины и инерционность граничных управляющих воздействий.

3. Разработка и обоснование методики решения задачи оптимального по быстродействию двухканального управления двумя взаимосвязанными объектами нестационарной теплопроводности с идеальным тепловым контактом на границе сопряжения взаимодействующих сред в условиях максимально допустимой точности равномерного приближения к требуемому конечному пространственному распределению температур.

4. Разработка и обоснование методики синтеза оптимальных по быстродействию систем двухканального управления нестационарными процессами теплопроводности.

Методы исследования

Для решения поставленных в диссертационной работе задач использовались методы теории оптимального управления объектами и системами с распределенными параметрами, методы теории теплопроводности, аппарат конечных интегральных преобразований, методы численного и компьютерного моделирования.

Научная новизна

В диссертационной работе получены следующие основные результаты, обладающие научной новизной:

1. Методика решения задачи двухканального оптимального по быстродействию программного управления процессом нестационарной теплопроводности, которая позволяет обеспечить требуемую точность равномерного приближения результирующего пространственного распределения температур к требуемому состоянию за меньшее время по сравнению с известными алгоритмами за счет векторного характера управляющих воздействий.

2. Алгоритмы решения задачи двухканального оптимального по быстродействию программного управления нестационарными процессами теплопроводности, учитывающие, в отличие от известных, технологические

ограничения на максимально допустимую температуру и инерционности каждого из граничных управляющих воздействий.

3. Методика решения задачи двухканального оптимального по быстродействию программного управления двумя взаимосвязанными процессами нестационарной теплопроводности с идеальным тепловым контактом на границе взаимодействующих сред, которая гарантирует, в отличие от известных, перевод каждого из объектов за минимально возможное время в заданное конечное состояние с максимально достижимой точностью равномерного приближения в условиях дополнительных ограничений на одинаковую продолжительность процесса управления для каждого из управляющих воздействий.

4. Методика синтеза оптимального по быстродействию двухканального программного управления процессами нестационарной теплопроводности с неполным измерением состояния, обеспечивающая, в отличие от известных, автоматическую отработку каждого из программных управляющих воздействий путем построения двухконтурной релейной системы автоматического регулирования с независимыми друг от друга двумя функциями переключения.

Положения, выносимые на защиту

1. Методика и вычислительная технология решения задачи двухканального оптимального по быстродействию управления процессом нестационарной теплопроводности в условиях равномерной оценки целевого множества конечных состояний температурного поля.

2. Алгоритмы оптимального по быстродействию двухканального управления процессом нестационарной теплопроводности, учитывающие дополнительные ограничения на максимальную температуру и инерционность граничных управляющих воздействий.

3. Методика и вычислительная технология решения задачи двухканального оптимального по быстродействию управления двумя взаимосвязанными объектами нестационарной теплопроводности с идеальным тепловым контактом на границе взаимодействующих сред в условиях заданной в равномерной

метрике точности приближения конечного состояния каждого из объектов к требуемому пространственному распределению температур.

4. Методика синтеза оптимальной по быстродействию системы двухканального управления нестационарным процессом теплопроводности с неполным измерением состояния управляемой величины.

Практическая значимость работы

Разработанные в диссертации алгоритмы и способы построения вычислительных процедур могут быть распространены на широкий круг актуальных задач многоканального управления объектами технологической теплофизики, являющимися базовыми элементами ответственных производственных комплексов в технических системах различного назначения. Предлагаемые подходы могут быть использованы в задачах многоканального управления объектами с распределенными параметрами за рамками рассмотренных в диссертации процессов нестационарной теплопроводности с привлечением основных физических закономерностей соответствующей предметной области.

Степень достоверности результатов

Достоверность и обоснованность полученных в диссертационной работе научных результатов и выводов обеспечивается корректным использованием применяемого математического аппарата, методов теории управления системами с распределенными параметрами, теории теплопроводности и численного моделирования.

Реализация результатов исследований

Полученные в работе теоретические положения и практические результаты были использованы:

- при выполнении совместного научного исследования СамГТУ и Института Электротехнологий Университета им. Лейбница (г. Ганновер, Германия) по теме: «Two-channel time-optimal control of the induction heating of thick-wall pipes» в рамках стипендиальной программы Леонарда Эйлера Германской службы академических обменов DAAD (2019 г.).

- при выполнении НИР по проекту Российского научного фонда «Методы аналитического конструирования оптимальных регуляторов в системах с распределенными параметрами при равномерных оценках целевых множеств» (№22-29-00180, 2022 – 2023 гг.).

- при разработке и проектировании систем автоматического регулирования нагревательными установками в технологических комплексах перед обработкой давлением в ЗАО «ТМ-Сервис».

- в учебном процессе при подготовке магистров по направлению 27.04.04 «Управление в технических системах» в ФГБОУ ВО «СамГТУ».

Апробация результатов работы

Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на международных и всероссийских конференциях: II Всероссийской научной конференции с международным участием «Информационные технологии в моделировании и управлении: подходы, методы, решения» (2019 г., Тольятти), XXI Международной конференции «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (2019 г., Самара), Международной научно-технической конференции «Пром-Инжиниринг» (2022 г., Сочи).

Публикации

Основные результаты по теме диссертации опубликованы в 10 научных работах, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 3 – в изданиях, индексируемых зарубежными базами Scopus и Web of Science, 2 – в трудах конференций.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 5 глав и заключения, изложенных на 146 страницах машинописного текста, содержит 50 рисунков, 8 таблиц, список литературы из 91 наименования и 2 приложения.

Краткое содержание работы

В **первой главе** приведен анализ проблемы перевода ОРП в заданное целевое множество с минимальной величиной выбранного функционала качества. Отмечено, что в большинстве случаев в технических приложениях

подобные задачи оптимального управления ОРП рассматривались применительно к типовым постановкам со скалярной пространственно-распределенной управляемой величиной и внутренним или граничным управляющим воздействием только по одному из возможных каналов управления.

Рассмотрен широкий круг актуальных для приложений задач многоканального управления объектами с распределенными параметрами, которые формулируются в условиях одновременного воздействия на объект по различным каналам управления с целью существенного повышения эффективности оптимизируемых процессов по базовым технико-экономическим показателям. Приведены примеры промышленного применения двухканального управления объектами с распределенными параметрами для широкого круга технологических процессов нагрева металла под обработку давлением.

Применительно к рассматриваемому кругу управляемых процессов в технических системах определены базовые проблемно-ориентированные на последующее решение задач оптимального многоканального управления математические модели одного и группы взаимосвязанных ОРП с векторными управляющими воздействиями, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа с соответствующими начальными и граничными условиями.

В качестве основной модели для дальнейших исследований рассматриваются линейные пространственно-одномерные уравнения нестационарной теплопроводности с постоянными значениями теплофизических параметров.

Приведена в общем виде постановка задачи многоканального оптимального управления одним или группой взаимосвязанных ОРП в условиях равномерной оценки целевых множеств и общая схема ее решения, структура которого находится с помощью аппарата принципа максимума Понтрягина с последующей параметризацией управляющих воздействий известными способами. В результате осуществляется точная редукция рассматриваемой ЗОУ

ОРП к специальной задаче математического программирования (ЗМП) на экстремум заданной целевой функции искомых параметров с бесконечным числом ограничений, обеспечивающих принадлежность конечного состояния ОРП заданному целевому множеству. Показано, что решение такой ЗМП может быть получено по схеме конструктивного альтернансного метода параметрической оптимизации с учетом существенных особенностей, связанных с векторным характером управляющих воздействий.

Во второй главе приводятся постановка и методы решения частной задачи оптимального по быстродействию двухканального программного управления ОРП, конкретизируемые к предметной области оптимизации нестационарных процессов теплопроводности в условиях заданной точности равномерного приближения к требуемому конечному пространственному распределению температурного поля.

Предложена конструктивная технология решения альтернансным методом сформулированных задач полубесконечной оптимизации, к которым сводится рассматриваемая задача быстродействия. Соответствующие вычислительные алгоритмы усложняются по сравнению с одноканальным управлением увеличенной размерностью вектора искомых параметров, зависимостью от выбираемого их набора минимаксных отклонений от требуемого конечного состояния ОРП, неоднозначными правилами выбора числа интервалов постоянства управляющих воздействий, заранее неизвестным изменением конфигурации конечного пространственного распределения управляемой величины и дополнительными ограничениями на одинаковую продолжительность управляемого процесса для каждого из управляющих воздействий, которые сужают возможности их свободного варьирования независимо друг от друга. В этих условиях задача быстродействия сведена к двум параметрическим задачам полубесконечной оптимизации для двух возможных вариантов искомого набора параметров двухканального управления с последующим отбором лучшего из них по достигаемой величине критерия оптимальности.

Для типичного частного случая двухинтервального характера обоих управляющих воздействий в условиях равномерного пространственного распределения начального и желаемого конечного состояния управляемой величины на основании известных свойств результирующих температурных полей оптимальных по быстродействию процессов нестационарной теплопроводности с одноканальным сосредоточенным управлением определена форма кривой оптимального конечного пространственного распределения температуры при двухканальном управлении и получены расчетные системы уравнений альтернансного метода, решение которых позволяет определить все искомые параметры оптимального процесса.

Приводятся иллюстрируемые конкретными примерами решения ряда задач оптимального по быстродействию векторного управления нестационарными процессами теплопроводности с граничными и внутренними управляющими воздействиями, в том числе, задачи управления процессом нагрева неограниченной пластины с двухканальным граничным управляющим воздействием по тепловому потоку на обеих ее поверхностях; управления процессом индукционного нагрева с двухканальным внутренним управляющим воздействием по мощности внутренних электромагнитных источников тепла; управления нагревом неограниченной пластины с управляющим воздействием по тепловому потоку на одной ее поверхности и тепловыми потерями на другой границе по закону конвективного теплообмена в окружающую среду с заданным характером изменения во времени ее температуры.

Полученные результаты распространены на задачу оптимального по быстродействию двухканального граничного управления нелинейным процессом нестационарной теплопроводности с использованием его цифровой модели, созданной в специализированном конечно-элементном программном пакете COMSOL Multiphysics, на базе которой реализована итерационная процедура поиска решений систем уравнений альтернансного метода.

В третьей главе предложенные методики решения ЗОУ ОРП распространяются на задачи оптимального по быстродействию двухканального

управления процессами нестационарной теплопроводности с учетом дополнительных технологических ограничений на управляемые величины и управляющие воздействия.

Получено решение задачи оптимального по быстродействию двухканального управления процессом индукционного нагрева металлической пластины перед последующей обработкой давлением с учетом фазового ограничения на максимально допустимую температуру на всем его протяжении. Структура программного двухинтервального управления дополняется на первом интервале по одному из каналов управляющего воздействия участком его изменения по экспоненциальному закону, обеспечивающему в первом приближении стабилизацию максимальной температуры на заданном предельно допустимом уровне. В условиях заранее устанавливаемых предложенным способом параметрах участка движения по ограничению по общей схеме развиваемого в диссертации подхода выполнена процедура параметризации двухканального управления усложненной структуры, произведена редукция к задачам полубесконечной оптимизации, найдены конкретные формы параметрической зависимости конечных температурных состояний от искомым параметров управляющих воздействий и на основании известных закономерностей предметной области получены расчетные системы уравнений альтернативного метода, решение которых относительно искомым параметров оптимального процесса завершает решение рассматриваемой задачи с фазовым ограничением.

Решена задача оптимального по быстродействию управления нагревом металлической пластины в печи с внешним теплообменом при двух управляющих воздействиях по тепловому потоку на ее поверхностях, скорости изменения которых ограничиваются тепловой инерционностью динамических процессов в рабочем пространстве печи. Путем дополнения структуры объекта динамическими звеньями внешнего теплообмена задача сведена к определению действующих на их входах оптимальных управляющих воздействий по расходу энергоносителя, реализуемых уже с любой требуемой динамикой их изменения.

Релейный характер таких управлений опять обеспечивает редукцию к задачам полубесконечной оптимизации с видоизмененными параметрическими зависимостями результирующих температурных распределений. Последующий переход к расчетным системам уравнений альтернативного метода осуществлен путем предварительной идентификации формы кривой пространственного распределения температуры в конце оптимального процесса, которая установлена на основании физических закономерностей поведения нестационарных температурных полей при одноканальном управлении в условиях непрерывного изменения теплового потока на выходах инерционных звеньев внешнего теплообмена.

В четвертой главе предложен конструктивный метод решения задачи двухканального оптимального по быстродействию граничного управления двумя физически неоднородными взаимосвязанными ОРП, описываемыми линейными уравнениями теплопроводности применительно к наиболее употребительным в приложениях оценкам целевых множеств конечных состояний обоих объектов в равномерной метрике. Значительная специфика рассматриваемой задачи управления взаимосвязанными ОРП проявляется при учете условий их сопряжения в форме идеального теплового контакта взаимодействующих сред на контактной поверхности. Разработанная технология решения начально-краевой задачи, моделирующей рассматриваемый объект управления, использует метод описания исследуемых температурных полей в форме их разложения в равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций.

Процедура решения исследуемой задачи быстродействия проведена по модифицированной схеме альтернативного метода, которая отличается от варианта двухканального управления объектами возможностью обеспечить максимальную точность нагрева только для одного из объектов в условиях предельно достижимой ее величины для второго объекта и характеризуется усложненной конфигурацией пространственного распределения результирующих температурных состояний.

В пятой главе решается задача синтеза системы оптимального по быстродействию двухканального управления объектом с распределенными параметрами с линейными обратными связями по неполному измерению управляемой величины в отдельных точках ее пространственного распределения с коэффициентами обратных связей, определяемыми по результатам расчета в режиме реального времени оптимальных программных управлений для каждого из управляющих воздействий в зависимости от начального состояния объекта. В итоге задача сводится к построению двухконтурной релейной системы автоматического регулирования с двумя известными функциями переключения, рассчитываемыми по измеряемому значению управляемой величины в начале процесса управления.

Построена оптимальная по быстродействию система двухканального управления процессом индукционного нагрева с двухинтервальными управляющими воздействиями по мощности внутреннего тепловыделения, формируемыми по сигналам обратной связи по температуре в двух точках по объему нагреваемого тела.

Применительно к типичному случаю равномерного распределения начальной температуры с достаточно узким диапазоном ее возможных вариаций в такой системе реализуется субоптимальное по быстродействию двухканальное управление температурным полем при постоянных коэффициентах обратной связи, заранее рассчитываемых по усредненному значению начального температурного состояния. На фазовой плоскости контролируемых температур выполнен анализ характеристик субоптимального процесса управления при отличии начальной температуры от ее расчетной величины.

Выполнено компьютерное моделирование с использованием программного пакета MATLAB оптимального по быстродействию процесса двухканального управления индукционным нагревом металлической пластины в предложенной структуре замкнутой системы с неполным измерением температурного поля.

ГЛАВА 1. ПРОБЛЕМА МНОГОКАНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Материал главы излагается в соответствии с публикациями соискателя [59 – 61].

Широкий круг наиболее сложных и ответственных задач управления техническими объектами характеризуется пространственно-временной зависимостью управляемых величин и управляющих воздействий, без учета которой нельзя обеспечить требуемую степень адекватности создаваемых моделей исследуемых явлений, и вследствие этого должен рассматриваться в рамках теории систем с распределенными параметрами (СРП), базовые положения которой созданы, начиная с основополагающих работ А.Г. Бутковского [1-3], и получили дальнейшее развитие в целом ряде известных исследований отечественных и зарубежных ученых [1-18]. Тем не менее, применительно к целому ряду актуальных прикладных задач управления техническими системами с распределенными параметрами, отличающихся специфическими особенностями принципиального характера, которые не учитываются известными теоретическими результатами [1-18], требуется разработка специальных конструктивных, приемлемых в инженерной практике методов их решения.

Одной из основных проблем в теории СРП до настоящего времени остается разработка конструктивных методов решения задач оптимального управления (ЗОУ) по переводу бесконечномерных объектов в заданное целевое множество с минимальным значением выбранного функционала качества [3, 18]. В классической двухточечной формулировке ЗОУ типичные в прикладных задачах требования к конечному пространственно-распределенному состоянию СРП, как правило, либо невыполнимы вследствие неуправляемости объекта относительно этих состояний из-за несогласованности с граничными условиями модели СРП, либо выполняются в классе технически нереализуемых управляющих воздействий [27]. В подобной ситуации конструктивный подход к ЗОУ СРП состоит в переходе к заведомо разрешимой с реализуемыми

результатами задачи управления при заданном в бесконечномерном фазовом пространстве СРП целевом множестве, которое отвечает достижимым значениям всегда существующих в прикладных задачах допусков на отклонения от заданного в двухточечной схеме эталона, оцениваемых в равномерной метрике на множестве пространственных аргументов управляемой величины применительно к ситуациям, представляющим наибольший интерес в технических приложениях.

Широкий круг подобных ЗОУ СРП с заданной точностью равномерного приближения к требуемому конечному состоянию объекта может быть решен путем параметризации управляющих воздействий, последующей редукции ЗОУ к специальной задаче математического программирования – задаче полубесконечной оптимизации и ее решения конструктивным альтернативным методом [27, 36-40]. Как правило, в технических приложениях такие ЗОУ СРП рассматривались применительно к типовым постановкам с одной пространственно-распределенной управляемой величиной и внутренним и (или) граничным управляющим воздействием только по одному из возможных каналов управления [3, 16, 18].

В то же время, целый ряд актуальных для приложений и представляющих теоретический интерес задач многоканального оптимального управления системами с распределенными параметрами формулируется в условиях одновременного воздействия на объект по различным каналам управления с целью существенного повышения эффективности оптимизируемых процессов по базовым технико-экономическим показателям. Сказанное относится, в частности, к распространенным в технических системах ситуациям с использованием векторных управляющих воздействий, например, в виде совокупности различных внутренних и (или) граничных управлений при скалярном характере управляемой величины в отличие от многомерных сосредоточенных систем с совпадающими, как правило, размерностями векторов входных воздействий и выходных переменных. Во многих случаях постановка подобных задач многоканального управления диктуется самими используемыми

способами конструктивного исполнения промышленного объекта и методами организации технологического процесса [1, 17, 18, 23, 24, 28-30].

Самостоятельный класс многоканальных ЗОУ СРП, представляющих большой самостоятельный интерес, возникает для взаимосвязанных объектов с различными управляющими воздействиями для каждого из них, специфической особенностью которых являются условия сопряжения физически неоднородных сред на их контактирующих поверхностях [23, 25-27]. Подобные СРП являются во многих приложениях элементами многослойных структур и конструкций, нашедших широкое применение, например, в области технологической теплофизики [26, 31-35].

В данной главе описываются используемые далее типовые математические модели одного и группы взаимосвязанных объектов с распределенными параметрами в форме, стандартной для дальнейшего применения аналитических условий оптимальности многоканальных управляющих воздействий; приводятся примеры, иллюстрирующие применение векторного управления СРП в актуальных задачах технологической теплофизики; формулируется задача многоканальной оптимизации (ЗМО) управляемой системы с распределенными параметрами и приводится общая схема альтернативного метода ее решения.

1.1 Математические модели объектов с распределенными параметрами (ОРП) с векторными управляющими воздействиями

Математическая модель ОРП описывает функцию состояния управляемого объекта в терминах дифференциальных уравнений в частных производных, которые являются известной математической формой записи фундаментальных законов сохранения энергии и вещества в элементарном объеме.

В настоящее время большое число актуальных практических задач управления различными физическими процессами из области теплопроводности, гидродинамики, акустики, электродинамики, диффузии и

других областей науки и техники решается на основе математического аппарата теории управления ОРП.

Для широкого круга ОРП его функция состояния $Q(x, y, z, t)$ описывается в зависимости от пространственных координат x, y, z и времени t уравнением:

$$L(Q(x, y, z, t)) = f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in D, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

L - оператор (в общем случае нелинейный), являющийся известной функцией Q, x, y, z, t и частных производных от Q по ее аргументам; D - пространственная область, в пределах которой изменяются пространственные координаты, $f(x, y, z, t)$ - внешнее воздействие (управляющее, возмущающее или их комбинация).

Для однозначного описания объекта управления в соответствии с принципиальными особенностями ОРП уравнение (1.1) необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

Начальное условие задает значение управляемой величины $Q(x, y, z, t_0)$ в области в момент времени $t = t_0 = 0$:

$$Q(x, y, z, 0) = F(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D, \quad t = t_0 = 0, \quad (1.2)$$

где $F(x, y, z)$ - заданная функция пространственных координат.

Граничные условия определяют характер взаимодействия $Q(x, y, z, t)$ с окружающей средой на границе ∂D области D :

$$\Gamma(Q(x, y, z, t)) = g(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \partial D, \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

где Γ - заданный оператор, формулируемый из условий энергетического или материального баланса на ∂D ; $g(x, y, z, t)$ - внешнее воздействие на границе объекта (либо управляющее, либо возмущающее, либо их комбинация).

Уравнение (1.1) с условиями (1.2) и (1.3) описывают пространственно-временное поведение $Q(x, y, z, t)$ применительно к широкому кругу технических объектов управления.

В инженерной практике, как правило, рассматриваются предельно упрощенные уравнения моделей ОРП, сохраняющие только основные

качественные особенности реальных объектов. Такие уравнения поддаются аналитическому решению; становится возможным провести качественный анализ явлений, описываемых ими, и в то же время они с приемлемой точностью, часто достаточной для инженерных приложений, описывают процессы управления. Кроме того, использование таких приближенных моделей позволяет получить объем информации об исследуемом объекте, позволяющий использовать эти результаты как начальное приближение при последующем решении уже численными методами уточненных моделей более высокого уровня сложности.

На этом основании управляемые функции состояния в задачах управления ОРП описываются в первом приближении хорошо изученными линейными уравнениями математической физики вида (1.1)-(1.3), моделирующими основные физические явления, чаще всего применительно к одномерным моделям, учитывающим пространственную распределенность $Q(x,t)$ только по одной пространственной координате в условиях возможности пренебрежения изменениями Q по другим координатным осям.

1.1.1 Базовые уравнения одномерных ОРП

Ограничимся далее рассмотрением типичных моделей широкого круга управляемых процессов нагрева металла под обработку давлением [1, 16, 25, 41], описываемых линейными одномерными уравнениями в частных производных параболического типа с постоянными во времени коэффициентами:

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = C(x) \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + B_1(x) Q(x,t) + f(x,t, u_v(x,t)), \quad (1.4)$$

$$x \in [x_0, x_1], t \geq 0$$

с начальными

$$Q(x,0) = Q_0(x), \quad (1.5)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned}\alpha_0 Q(x_0, t) + \beta_0 \frac{\partial Q(x_0, t)}{\partial x} &= g_0(u_0(t), t), \quad t > 0; \\ \alpha_1 Q(x_1, t) + \beta_1 \frac{\partial Q(x_1, t)}{\partial x} &= g_1(u_1(t), t), \quad t > 0.\end{aligned}\tag{1.6}$$

В частности, к виду (1.4)-(1.6) приводится фундаментальное уравнение теплопроводности и диффузии в декартовых и цилиндрических координатах и конвективного теплопереноса в подвижных средах [16, 25, 41].

В (1.4)-(1.6) $C(x), B(x), B_1(x)$ - заданные достаточно гладкие функции; $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ - известные неотрицательные постоянные коэффициенты; $Q_0(x)$ - заданная функция пространственной координаты. В частных случаях при $\alpha_k > 0$, $\beta_k = 0$; $\alpha_k = 0$, $\beta_k > 0$; $\alpha_k > 0$, $\beta_k > 0$, где $k = 0, 1$, получаем согласно (1.6), классические граничные условия, соответственно первого, второго и третьего рода [25, 42]. В качестве управляющих воздействий (УВ) фигурируют внутреннее пространственно-временное управление $u_v(x, t)$, включаемое непосредственно в уравнение объекта (1.4) и реализуемое за счет внутренних источников энергии или вещества и граничные сосредоточенные управляющие воздействия $u_0(t), u_1(t)$, действующие на геометрических границах области определения $Q(x)$. Совокупность $(u_v(x, t), u_0(t), u_1(t))$ можно рассматривать в качестве векторного УВ ОРП в задачах многоканального управления объектов (1.4)-(1.6) со скалярным выходом $Q(x)$ (рис.1.1).

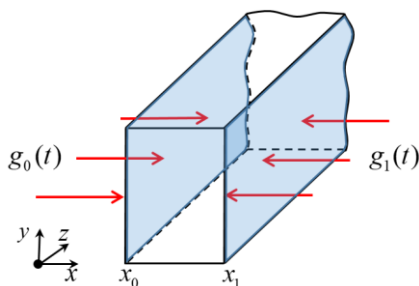


Рисунок 1.1 Объект управления с граничным многоканальным управлением

Функциональные зависимости $f(\cdot)$ в (1.4) и $g_0(\cdot), g_1(\cdot)$ в (1.6) определяют возможность учета наряду с u_v, u_0, u_1 внешних возмущений по соответствующим каналам воздействия на объект управления.

В первом приближении $u_v(x, t)$ во многих случаях с удовлетворительной точностью заведомо может быть представлено в форме взвешенной суммы реализуемых стандартными инженерными средствами координатных функций $W_i(x)$ с весовыми коэффициентами, в роли которых выступают искомые сосредоточенные внутренние управляющие воздействия $u_{vi}(t)$, $i = \overline{1, s}$, в задаче многоканального управления ОРП (рис.1.2):

$$u_v(x, t) \cong \sum_{i=1}^s W_i(x) u_{vi}(t). \quad (1.7)$$

В частном варианте:

$$u_v(x, t) = W(x)u(t),$$

с известным сосредоточенным управлением $u(t)$ в роли неизменного во времени пространственного управления выступает искомая функция $W(x)$, фигурирующая в качестве проектного решения объекта на стадии разработки его конструктивных элементов [16, 43].

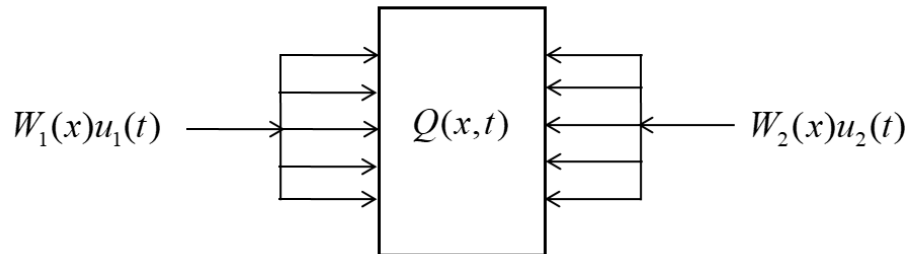


Рисунок 1.2 Иллюстрация двухканального распределенного управления

Применение к начально-краевой задаче (1.4)-(1.6) конечного интегрального преобразования (КИП) по пространственной переменной [16, 42, 44, 45] приводит к эквивалентному (1.4)-(1.6) описанию ОРП бесконечной системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка для временных мод $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ разложения $Q(x, t)$ в сходящийся в среднем ряд по ортонормированной с весом $r(x)$ системе собственных функций $\varphi_n(\mu_n, x)$, определяемых вместе с собственными числами μ_n^2 известными способами [16]:

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(\mu_n, t) \varphi_n(\mu_n, x); \quad (1.8)$$

$$\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n, t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + \bar{f}_n(\mu_n, t) + R(\mu_n, t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

$$\bar{Q}_n(\mu_n, 0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_n).$$

Здесь

$$R(\mu_n, t) = R_1(\mu_n, t) - R_0(\mu_n, t);$$

$$R_i(\mu_n, t) = \frac{g_i(u_i(t), t)}{\beta_i} C(x_i) r(x_i) \varphi_n(\mu_n, x_i); \quad i = 0, 1; \text{ если } \beta_i > 0; \quad (1.10)$$

$$R_i(\mu_n, t) = -\frac{g_i(u_i(t), t)}{\alpha_i} C(x_i) r(x_i) \frac{d\varphi_n(\mu_n, x_i)}{dx}; \quad i = 0, 1; \text{ если } \alpha_i > 0,$$

$\bar{f}_n(\mu_n, t)$, $\bar{Q}^{(0)}(\mu_n)$ - изображения по методу КИП функций $f(\cdot)$ в (1.4) и $Q_0(x)$ в (1.5) и функция

$$r(x) = \frac{1}{C(x)} \exp \left[\int \frac{B(x)}{C(x)} dx \right]. \quad (1.11)$$

Интегрирование каждого из уравнений системы (1.9) независимо от других с последующей подстановкой результатов в (1.8) позволяет получить решение краевой задачи (1.4)-(1.6) в форме явной аналитической зависимости от внешних воздействий $f(\cdot)$, $g_0(\cdot)$, $g_1(\cdot)$ в (1.4), (1.6).

Далее в последующих главах диссертации без потери общности основных получаемых результатов в целях большей простоты и наглядности предлагаемых схем анализа рассматривается в качестве базовой модели объектов с распределенными параметрами линейное уравнение нестационарной теплопроводности математической физики, получаемое при $C(x) = a = \text{const}$,

$$B(x) = B_1(x) = 0, \quad f(x, t, u_v(x, t)) = \frac{1}{c\gamma} u_v(x, t) \text{ в (1.4):}$$

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{c\gamma} u_v(x, t), \quad x \in [0, x_1], \quad t \in [0, t_{\text{кон}}], \quad (1.12)$$

с начальными и граничными условиями вида (1.5), (1.6) при $g_0(u_0(t), t) = u_0(t)$; $g_1(u_1(t), t) = u_1(t)$:

$$Q(x, 0) = Q_0(x), \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned}\alpha_0 Q(0,t) + \lambda \frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} &= u_0(t); \\ \alpha_1 Q(x_1,t) + \lambda \frac{\partial Q(x_1,t)}{\partial x} &= u_1(t).\end{aligned}\tag{1.14}$$

Здесь $Q(x,t)$ - температурное поле тела, подвергаемого тепловой обработке, которое выступает в роли функции состояния исследуемого ОРП; a, c, γ, λ - теплофизические постоянные обрабатываемого материала, соответственно, коэффициент температуропроводности, удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности; α_0, α_1 - коэффициент теплопередачи на границах $x=0$ и $x=x_1$.

Модель ОРП вида (1.12)-(1.14) широко используется в инженерной практике для описания в первом приближении, сохраняющим основные качественные характеристики объекта, целого ряда управляемых теплофизических процессов [16, 46]. При этом решение задачи (1.11)-(1.13) представляется по-прежнему в форме ряда (1.8), а ее эквивалентное представление системой уравнений относительно модальных переменных \bar{Q}_n

упрощается по сравнению с (1.9) при $r(x) = \frac{1}{a}$ для $B(x) = 0$ и принимает

следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{Q}_n(\mu_n, t)}{dt} &= -\mu_n^2 \bar{Q}_n(\mu_n, t) + \frac{1}{c\gamma} \bar{u}_{Vn}(t) + d_{1n} u_1(t) - d_{0n} u_0(t), \\ \bar{Q}_n(\mu_n, 0) &= \bar{Q}^{(0)}(\mu_n), \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}\tag{1.15}$$

где \bar{u}_{Vn} - модальные составляющие внутреннего управления $u_V(x,t)$, по которым $u_V(x,t)$ восстанавливается в форме ряда, аналогичного (1.8):

$$u_V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_{Vn}(t) \varphi_n(\mu_n, x),\tag{1.16}$$

и коэффициенты d_{1n}, d_{0n} определяются согласно (1.10):

$$d_{1n} = \frac{1}{\lambda} \varphi_n(\mu_n, x_1); \quad d_{0n} = \frac{1}{\lambda} \varphi_n(\mu_n, 0).\tag{1.17}$$

1.1.2 Базовые уравнения взаимосвязанных ОРП

Отдельный самостоятельный класс задач векторного управления возникает для $\sigma > 1$ взаимосвязанных ОРП с различными управляющими воздействиями для каждого из объектов, описываемых уравнениями вида (1.4)-(1.6), которые дополняются операторами, учитывающими эффекты реализации взаимных связей [23, 27, 31, 32, 47] (рис.1.3):

$$\frac{\partial Q_m(x_m, t)}{\partial t} = C_m(x_m) \frac{\partial^2 Q_m(x_m, t)}{\partial x_m^2} + B_m(x_m) \frac{\partial Q_m(x_m, t)}{\partial x_m} + B_{1m}(x_m) Q_m(x_m, t) + f_m(x_m, t, u_{vm}(x_m, t)) + L_{\Sigma m}, \quad m = \overline{1, \sigma}, \quad \sigma > 1 \quad (1.18)$$

$$x_m \in [x_{0m}, x_{1m}], \quad t \geq 0$$

$$Q_m(x_m, 0) = Q_{0m}(x_m), \quad (1.19)$$

$$\alpha_{0m} Q_{0m}(x_{0m}, t) + \beta_{0m} \frac{\partial Q_m(x_{0m}, t)}{\partial x_m} = g_{0m}(u_{0m}(t), t) + L_{\Sigma 0}^{(m)}; \quad (1.20)$$

$$\alpha_{1m} Q_{1m}(x_{1m}, t) + \beta_{1m} \frac{\partial Q_m(x_{1m}, t)}{\partial x_m} = g_{1m}(u_{1m}(t), t) + L_{\Sigma 1}^{(m)}. \quad (1.21)$$

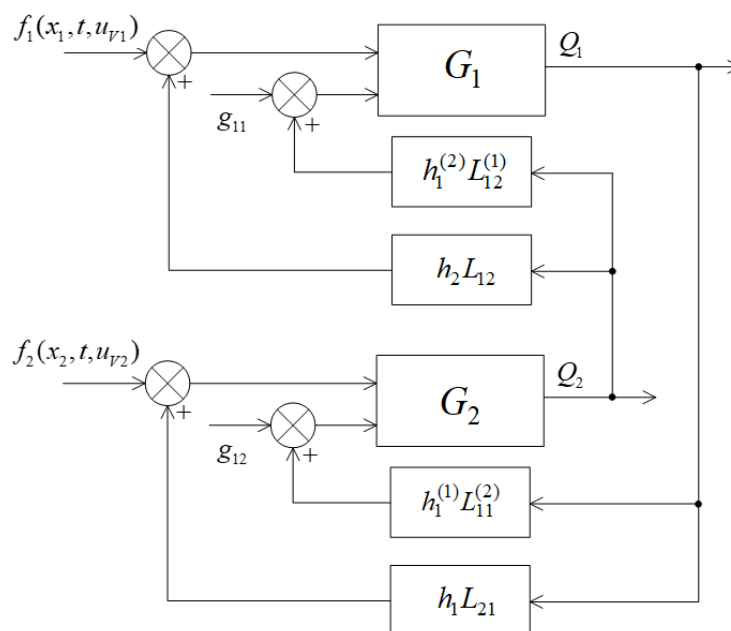


Рисунок 1.3 Структурная схема системы взаимосвязанных ОРП ($\sigma = 2$)

Здесь $Q_m(x_m, t)$ - управляемая функция состояния; $u_{vm}(x_m, t), u_{0m}(t), u_{1m}(t)$ - внутренние распределенные и граничные сосредоточенные управления для m -го объекта и

$$L_{\Sigma m} = \sum_{k=1}^{\sigma} h_k L_{mk} (Q_k, x_m); \quad L_{\Sigma j}^{(m)} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\sigma} h_j^{(k)} L_{jk}^{(m)} (Q_k, x_{jm}), \quad j = 0, 1; \quad (1.22)$$

$$h_k, h_j^{(k)} = \text{const} \geq 0,$$

где операторы $L_{mk}, L_{jk}^{(m)}$ учитывают зависимости Q_m от остальных управляемых величин в форме реакций «сопрягающих» распределенных блоков на входные воздействия по $Q_k, k = \overline{1, \sigma}$, взвешенные суммы которых с коэффициентами $h_k, h_j^{(m)}$ выступают в роли аддитивных дополнений к внутренним или граничным управлениям [2, 31, 32]:

$$L_{mk} (Q_k (y, \tau), x_m) = \int_0^t \int_{x_{0m}}^{x_{1m}} G_{mk} (x_m, y, t - \tau) Q_k (y, \tau) dy d\tau; \quad (1.23)$$

$$L_{jk}^{(m)} (Q_k (y, \tau), x_{jm}) = \int_0^t \int_{x_{0m}}^{x_{1m}} G_{jk}^{(m)} (x_{jm}, y, t - \tau) Q_k (y, \tau) dy d\tau, \quad (1.24)$$

и $G_{mk}, G_{jk}^{(m)}$ - функции Грина каждого из таких блоков с входным воздействием Q_k [16].

В характерных частных случаях, в том числе, применительно к базовым моделям уравнений теплопроводности вида (1.12)-(1.14) для каждого из взаимосвязанных ОРП операторы $L_{\Sigma m}, L_{\Sigma j}^{(m)}, j = 0, 1$, в (1.18), (1.20), (1.21) учитывают условия сопряжения контактирующих сред, например, в форме граничных условий 4-го рода на поверхности их идеального теплового контакта [25, 41].

Применение к каждого из уравнений (1.18) для всех $m = \overline{1, \sigma}$ конечного интегрального преобразования по пространственной переменной x_m приводит, подобно (1.8)-(1.11) в типичных условиях $\beta_{0m}, \beta_{1m} > 0$ [16, 25, 44] к описанию СРП (1.18)-(1.24) бесконечной системой дифференциальных уравнений для временных мод $\bar{Q}_{mn}(t)$ разложения $Q_m(x_m, t)$ в сходящийся в среднем ряд по ортонормированной с весом $r_m(x_m)$ системе собственных функций $\varphi_{mn}(\mu_{mn}, x_m)$, где μ_{mn}^2 - соответствующие собственные числа:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}_{mn}(\mu_{mn}, t)}{dt} = & -\mu_{mn}^2 \bar{Q}_{mn}(\mu_{mn}, t) + \bar{f}_{mn}(\mu_{mn}, t) + \bar{L}_{\Sigma mn}(\mu_{mn}, Q_{\Sigma}^{(m)}, t) + \\ & + C_m(x_{1m}) r_m(x_{1m}) \varphi_{mn}(x_{1m}) \left(\frac{g_{1m}(u_{1m}(t), t)}{\beta_{1m}} + L_{\Sigma 1}^{(m)}(Q_{\Sigma}^{(m)}, t) \right) - \\ & - C_m(x_{0m}) r_m(x_{0m}) \varphi_{mn}(x_{0m}) \left(\frac{g_{0m}(u_{0m}(t), t)}{\beta_{0m}} + L_{\Sigma 0}^{(m)}(Q_{\Sigma}^{(m)}, t) \right); \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\bar{Q}_{mn}(0) = \bar{Q}^{(0)}(\mu_{mn}), \quad m = \overline{1, \sigma}; \quad n = 1, 2, \dots$$

$$Q_m(x_m, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{mn}(t) \varphi_{mn}(\mu_{mn}, x_m). \quad (1.26)$$

Здесь $\bar{f}_{mn}(\mu_{mn}, t)$, $\bar{L}_{\Sigma mn}(\mu_{mn}, Q_{\Sigma}^{(m)}, t)$, $\bar{Q}^{(0)}(\mu_{mn})$ - моды разложения в ряды по собственным функциям $\varphi_{mn}(\mu_{mn}, x_m)$, $n = 1, 2, \dots$, вида (1.26) функций f_m в (1.18), операторов $L_{\Sigma m}$ и начальных состояний $Q_0(x_m)$ в (1.19); $r_m(x_m)$ - весовые функции конечных интегральных преобразований и $Q_{\Sigma}^{(m)} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_{m-1}, Q_{m+1}, \dots, Q_{\sigma})$.

Аналогично (1.8)-(1.11) интегрирование уравнение (1.25) с подстановкой результатов в (1.26) определяет в явной форме представление управляемых функций состояния $Q_m(x_m, t)$ в виде их разложения в ряды по собственным функциям краевой задачи (1.18)-(1.24) вида (1.26).

1.1.3 Многоканальное управление в технических системах с распределенными параметрами

Приведем наиболее распространенные примеры промышленного применения многоканального управления одним или группой взаимосвязанных ОРП в технологической теплофизике.

1. Двухсторонний нагрев слябов в многозонной печи методического действия с граничными управляющими воздействиями $u_0(t), u_1(t)$ в первом приближении описывается линейным уравнением теплопроводности (1.12)-(1.14) и является типичным представителем двухканального управления ОРП

(рис.1.4) [29, 30]. Тепловой поток $u_0(t)$ верхней сварочной зоны и тепловой поток $u_1(t)$ нижней сварочной зоны направлены на различные поверхности заготовки, под действием которых металлический сляб нагревается до требуемой температуры.

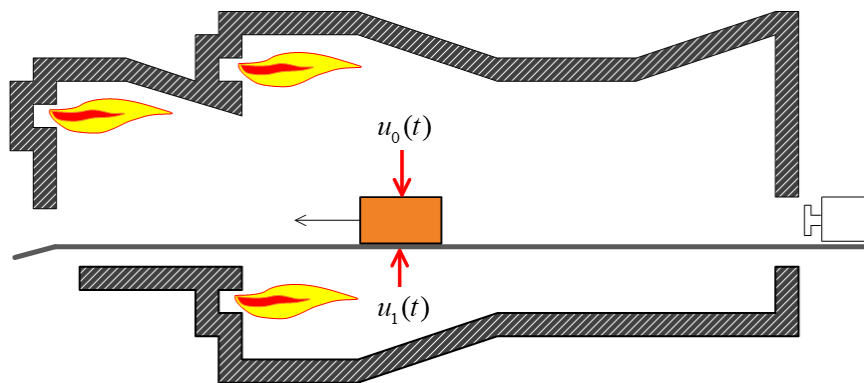


Рисунок 1.4 Пример двухстороннего нагрева в методической печи

2. Другим примером двухканального воздействия на тепловые объекты являются прямо- и противоточные процессы, моделируемые управлениями (1.12)-(1.14) с управлением по граничным условиям. Например, в двухзонной камере пластинчатого рекуператора температурное поле разделяющей стенки определяется воздействием температур зон на ее поверхности (рис.1.5) [23].

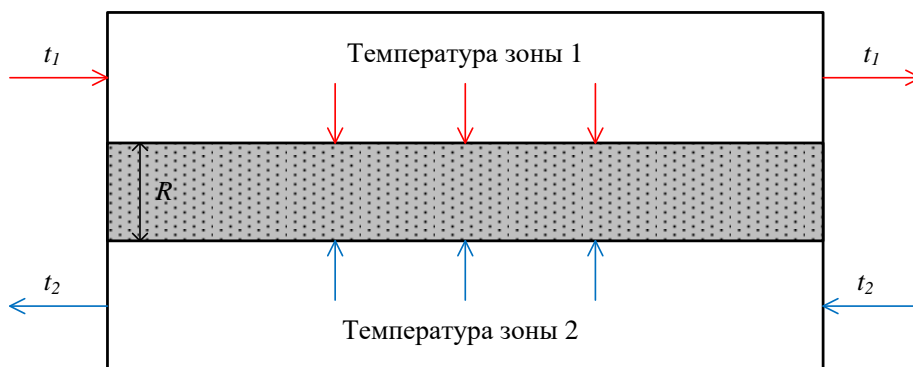


Рисунок 1.5 Схема взаимодействия двух тепловых потоков внутри рекуператора, разделенных стенкой

Теплообмен в рекуператоре осуществляется за счет одновременного охлаждения и нагрева разделяющей пластины с разных сторон при действии граничных условий третьего рода.

3. Нагрев, осуществляемый в многосекционном индукционном нагревателе, где внутреннее пространственно-временное управление $u_{Vi}(t)$ определяется согласно (1.7) с ограничением на кусочно-постоянный в первом приближении

характер его пространственного распределения $W_i(x)$, $i = \overline{1, s}$, также можно отнести к примеру применения на практике многоканального управления (рис.1.6) [17, 24].

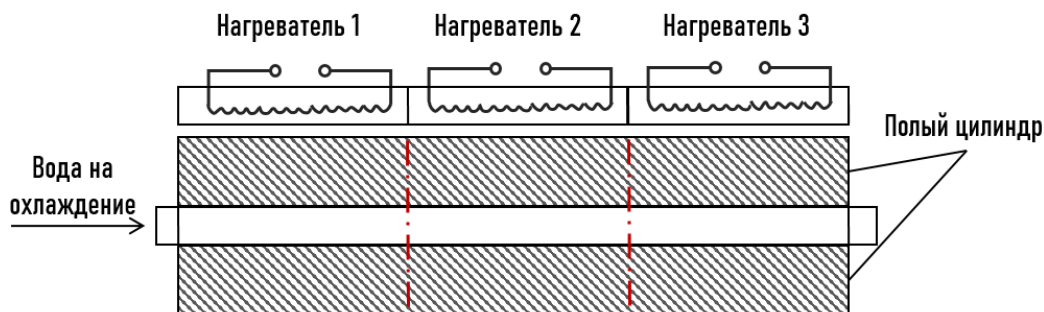


Рисунок 1.6 Многосекционный индукционный нагреватель

4. Зачастую векторное управление может иметь физически неоднородный характер воздействия. Например, если принять в граничных условиях (1.13), (1.14) для одной из границ коэффициенты $\alpha_0 = 0$, а для другой - $\alpha_1 > 0$, то возникает случай комбинированного внешнего воздействия по граничным условиям второго и третьего рода, когда на одной из границ действует внешний тепловой поток, рассматриваемый в качестве управления, а на другой учитываются тепловые потери по закону конвективного теплообмена с окружающей средой, рассматриваемые в качестве внешнего возмущения. Такая ситуация встречается, например, при управлении транспортировкой жидких сред (нефть, вода, газ и др.) в открытых трубопроводах [30].

5. Известно, что в процессе индукционного нагрева при повышенной частоте практически вся электромагнитная мощность сосредоточена в пределах поверхностного слоя нагреваемого изделия малой толщины [28], который принято называть глубиной проникновения тока в металл. При индукционном нагреве толстостенной трубы с помощью внешнего и внутреннего индукторов ее температурное поле можно рассматривать в качестве объекта с двухканальным управлением по величине внутреннего тепловыделения. Геометрия подобного варианта нагрева с внешним и внутренним индуктором показана на рисунке 1.7.

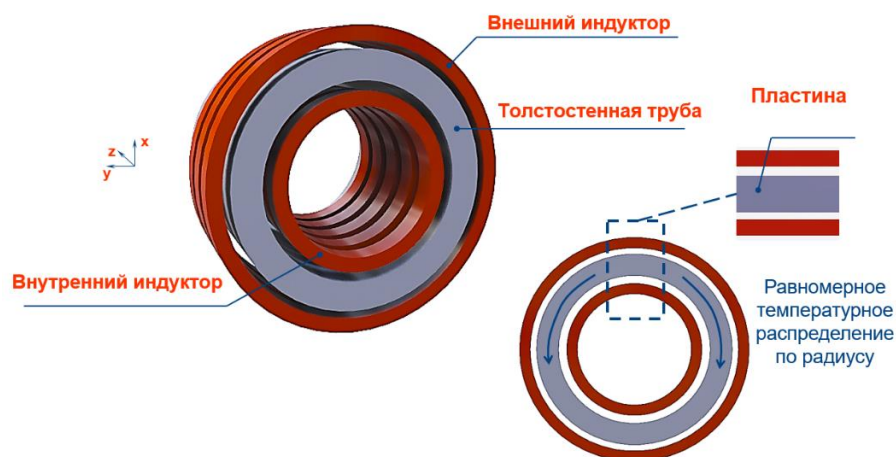


Рисунок 1.7 Обогреваемая толстостенная труба, рассматриваемая как объект двухканального управления

Если в предположении равномерного распределения температуры по окружности трубы достаточно большого диаметра будет учитываться неравномерность распределения температуры только по ее радиусу, то уместно в первом приближении использовать математическую модель, описывающую процесс индукционного нагрева пластины, толщина которой равна толщине трубы (рис.1.7).

6. В качестве другого примера можно привести ступенчатый характер управления в технологическом комплексе «индукционный нагрев-прессование» с разными управляющими воздействиями на разных временных интервалах, сменяющих друг друга во времени. Такой комплекс представляет собой совокупность процессов тепловой обработки заготовок на всех стадиях технологического цикла, включая нагрев в индукторе, передачу нагретой заготовки к прессу и процесс прессования. При таком построении процесса температурные поля слитков на стадии нагрева и последующей обработки будут подвергаться различным, физически неоднородным воздействиям: на первой стадии нагрев осуществляется с управлением по мощности $u(t)$ индуктора, на второй стадии - прессование с управлением по скорости прессования $V_{\text{п}}(t)$ (рис.1.8) [28].

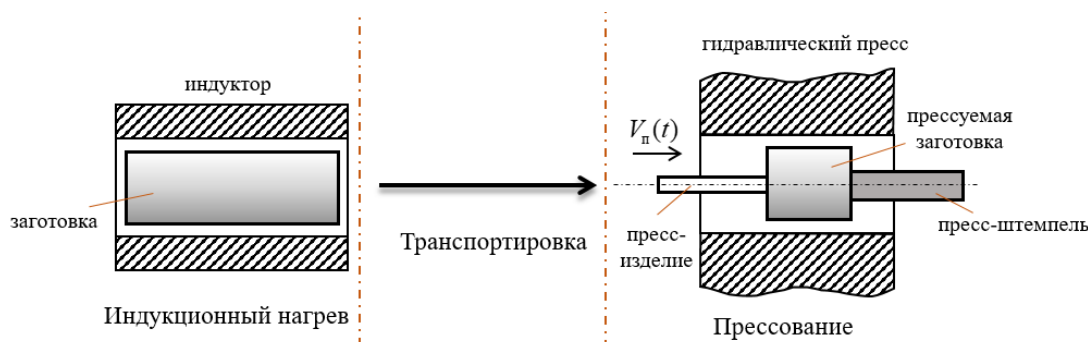


Рисунок 1.8 Технологический комплекс «индукционный нагрев-прессование»

7. Двухканальная оптимизации процессов управления индукционного нагрева с целью качественного расширения возможностей индукционных установок может быть связана с одновременным воздействием на режим нагрева мощности индуктора $P(t)$ и частоты питающего тока $\omega(t)$. В первом приближении можно считать, как это часто делается в инженерной практике, что источники тепла распределены равномерно в поверхностном слое нагреваемого тела, равном глубине проникновения тока δ в металл, то управление сводится к изменению мощности индуктора $P(t)$ во времени. На рис. 1.9,а показано, что для одного канала управления $P(t)$ изменяется некоторым образом в пределах δ при постоянной частоте $\omega(t) = \omega = \text{const}$. По второму каналу управления при $P(t) = P = \text{const}$ меняется частота $\omega(t)$, опосредованно влияющая на изменение глубины проникновения δ , как показано на рис. 1.9,б.

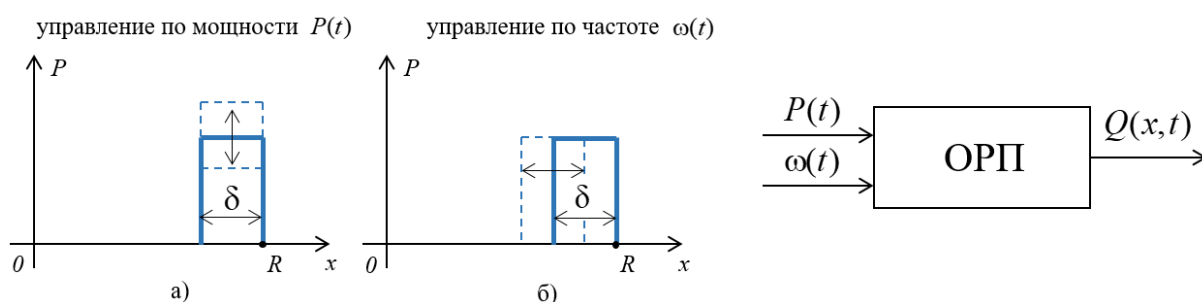


Рисунок 1.9 Иллюстрация двухканального управления при индукционном нагреве с управлением по мощности нагрева и частоте питающего тока

Специфическая особенность подобного построения двухканального управления заключается в том, что температурное поле изменяется под действием управляющих величин разного физического смысла: по мощности тепловыделения $P(t)$ и по частоте питающего тока $\omega(t)$ [28].

Задачи многоканального управления взаимосвязанными ОРП широко распространены в металлургической промышленности [1, 17, 18, 28-30].

8. Применительно к тепловым объектам структуры, подобные рис.1.3, возникают при моделировании процесса нагрева в многозонных методических печах с учетом теплового контакта нагреваемого сляба и глассажных труб, по которым движутся заготовки [1] (рис.1.10). На поверхность сляба действует тепловой поток верхней сварочной зоны, на свободную поверхность глассажных труб оказывает влияние тепловой поток нижней сварочной зоны, а операторы взаимодействия $L_{\Sigma 0}^{(m)}, L_{\Sigma 1}^{(m)}$ в (1.20),(1.21) учитывают условия идеального теплового контакта взаимодействующих сред.

9. Подобная постановка может быть характерна для любого «многослойного» объекта в металлургии, состоящего из компонентов с различными теплофизическими свойствами: металл с окалиной, жидкая сталь и «шлак», многослойная облицовка для теплоизолирующей кладки печей [31, 32, 48].

10. Самостоятельный интерес представляют задачи управления температурными режимами внутренних помещений различного назначения, при моделировании которых наружные стены зданий рассматриваются в виде многослойной конструкции с идеальным контактом ее компонентов, на которую с одной из сторон оказывают влияния различные внешние температурные возмущения, а на другую – регулируемая температура внутреннего помещения.

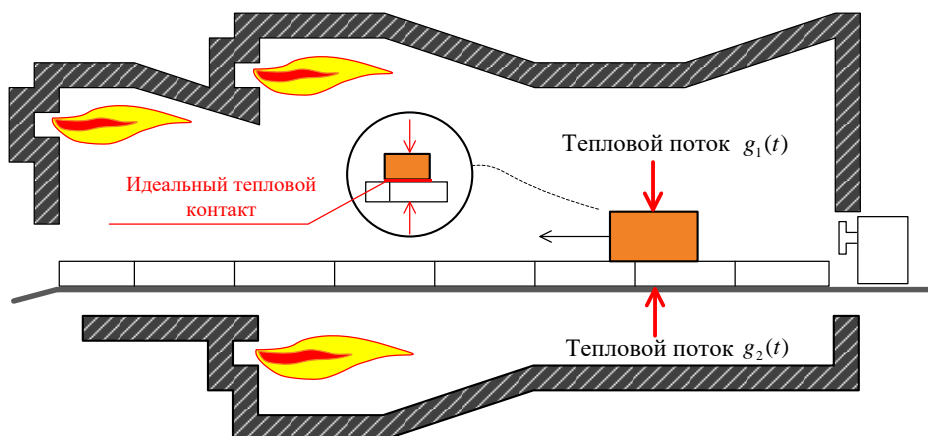


Рисунок 1.10 Иллюстрация граничных условий 4-го рода в методической печи

Приведенные примеры иллюстрируют лишь самые простые и наиболее очевидные варианты возможного применения многоканального управления ОРП в области теплообменных процессов, которые, тем не менее, охватывают широкий круг задач управления. Классические задачи управления процессами нестационарной теплопроводности металлов в большинстве своем рассматриваются применительно к распространенной схеме симметричного нагрева с разных поверхностей объекта. Такой вариант нагрева с одноканальным управлением без учета всех сложностей реальных процессов уместен далеко не всегда, а слишком грубые упрощения или неполный учет всех особенностей процесса может привести к некорректным моделям, которые в свою очередь не могут обеспечить требуемую точность моделирования.

1.2 Постановка задачи многоканальной оптимизации объектов с распределенными параметрами

Достаточно общая содержательная постановка задачи многоканальной оптимизации (ЗМО) сводится к требованию определить с помощью допустимых управляющих воздействий такой закон изменения во времени оптимального управления, который обеспечивает допустимый по заданным ограничениям перевод объекта из заданного начального состояния в требуемое конечное с экстремальным значением выбранного качественного показателя.

Для строгой постановки задачи оптимального многоканального управления ОРП необходимо иметь математическую модель объекта управления, которая может быть представлена в форме уравнений (1.4)-(1.6),(1.18)-(1.24) или в виде (1.8)-(1.11),(1.25)-(1.26) модального описания ОРП; формализовать требования к желаемому состоянию объекта в момент окончания процесса управления; выбрать критерий оптимальности, экстремальная величина которого будет ассоциироваться с понятием наилучшего из возможных показателей качества оптимизируемого процесса, и задать ограничения на управляющие воздействия

и поведение управляемого выхода ОРП, характеризующие допустимость процесса перехода из начального в конечное состояние.

В реальных условиях неуправляемости ОРП относительно типичных для приложений требуемых состояний объекта в конечный момент времени $t = t_{\text{кон}}$ в исходной двухточечной схеме [18-20] наибольший интерес в прикладных задачах представляет оценка допустимого множества таких состояний в форме ошибки ε равномерного приближения пространственного распределения управляемой величины к номинальной точке на множестве ее пространственных аргументов, которая исключает локальные отклонения ошибок приближения за допустимые пределы [18].

В соответствии с вышесказанным применительно к общей модели (1.18)-(1.24) взаимосвязанных ОРП требуется обеспечить за нефиксируемое заранее время $t_{\text{кон}}$ приближение $Q_m(x_m, t_{\text{кон}})$ к заданным пространственным распределениям $Q_m^*(x_m)$ для всех $m = \overline{1, \sigma}$ с оцениваемой в равномерной метрике допустимой точностью ε_m согласно следующим соотношениям:

$$\max_{x_m \in [x_{0m}, x_{1m}]} |Q_m(x_m, t_{\text{кон}}) - Q_m^*(x_m)| \leq \varepsilon_m, \quad m = \overline{1, \sigma}. \quad (1.27)$$

Выбор критерия оптимальности целиком определяется смысловым содержанием задачи и играет определяющую роль при поиске алгоритма оптимального программного управления. Пусть качество процесса управления объектом (1.18)-(1.24) в общем случае характеризуется интегральным функционалом достаточно общего вида:

$$I = \int_0^{t_{\text{кон}}} \sum_{m=1}^{\sigma} \int_{x_{0m}}^{x_{1m}} P_{0m}(Q_m(x_m, t), u_{vm}(x_m, t)) dx_m dt + \\ + \int_0^{t_{\text{кон}}} \left\{ \sum_{m=1}^{\sigma} [P_{1m}(u_{0m}(t), u_{1m}(t)) + P_{2m}(Q_m(x_{mc}, t))] \right\} dt \rightarrow \min_{u_{0m}, u_{1m}, u_{vm}, t_{\text{кон}}} \quad (1.28)$$

где P_{0m}, P_{1m}, P_{2m} - заданные достаточно гладкие функции своих аргументов, и $x_{mc} \in [x_{0m}, x_{1m}]$ - заданные фиксированные значения пространственных координат.

Ограничимся далее представлением $u_{vm}(x_m, t)$ в (1.18) в форме вида (1.7)

$$u_{v_m}(x_m, t) = \sum_{i=1}^{s_m} W_{im}(x_m) u_{vim}(t), \quad i = \overline{1, s_m}; \quad m = \overline{1, \sigma}, \quad (1.29)$$

с искомыми внутренними сосредоточенными управляющими воздействиями $u_{vim}(t)$.

Допустимые значения сосредоточенных управлений в (1.18), (1.20), (1.21), (1.29) должны удовлетворять всегда возникающим на практике ограничениям:

$$\begin{aligned} u_{0m \min} \leq u_{0m}(t) \leq u_{0m \max}; \quad u_{1m \min} \leq u_{1m}(t) \leq u_{1m \max}; \\ u_{vim \min} \leq u_{vim}(t) \leq u_{vim \max}; \quad i = \overline{1, s_m}; \quad m = \overline{1, \sigma} \end{aligned} \quad (1.30)$$

с заданными предельно допустимыми величинами их возможных значений.

При переходе к модальному описанию объекта (1.25), (1.26), требования (1.27) к конечному состоянию объекта записываются в силу разложения (1.26) в следующей форме:

$$\max_{x_m \in [x_{0m}, x_{1m}]} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{mn}(t_{\text{кон}}) \varphi_{mn}(\mu_{mn}, x_m) - Q_m^*(x_m) \right| \leq \varepsilon_m, \quad m = \overline{1, \sigma}. \quad (1.31)$$

После подстановки (1.26) в (1.28) критерий оптимальности (1.28) представляется в виде:

$$I = \int_0^{t_{\text{кон}}^*} f_0(\bar{Q}, U, t) dt \rightarrow \min_{U, t_{\text{кон}}^*}, \quad (1.32)$$

с соответствующей подынтегральной функцией f_0 переменных $\bar{Q} = (\bar{Q}_{mn}(t))$, $m = \overline{1, \sigma}$; $n = 1, 2, \dots$ и векторного сосредоточенного управления

$$U(t) = (u_{0m}(t); u_{1m}(t); u_{v_m}(t) = (u_{vim}(t) : i = \overline{1, s_m}, m = \overline{1, \sigma})). \quad (1.33)$$

От выбора подынтегральной функции f_0 в (1.32) зависит содержательный смысл показателя качества, который, в частности, может соответствовать базовым показателям производительности управляемого процесса, его качества и энергоёмкости.

В итоге рассматриваемая задача многоканальной оптимизации применительно к представлению СРП системой уравнений (1.25) сводится к

отысканию оптимального программного алгоритма многоканального управления $U^*(t)$ и $t_{\text{кон}}^*$, обеспечивающих выполнение требований (1.31) при минимальном значении функционала качества (1.32) в условиях ограничений (1.30).

При $\sigma = 1$ все соотношения (1.27)-(1.31) относятся к задаче многоканального управления ОРП.

1.3 Общая схема решения задачи многоканальной оптимизации

На бесконечномерную задачу оптимального управления (1.25)-(1.32) распространяется принцип максимума Понтрягина [8, 49].

Базовые условия достижения максимума функции Понтрягина на оптимальном управлении $U^*(t)$ вместе с информацией о закономерностях оптимизируемых процессов в конкретной предметной области в целом ряде прикладных задач вполне определяют характер программных управляющих воздействий на участках их непрерывного изменения в форме явных зависимостей от управляемых и сопряженных переменных. Возможные варианты компоновки оптимальных программ из этих участков реализуются с конечным числом разрывов в точках их «сшивания» часто выступающих в роли параметрического описания $U^*(t)$ [27].

Указанным путем, подобно задачам со скалярным управляющим воздействием может быть получено параметрическое представление каждой l -й компоненты искомого управляющего воздействия $U^*(t)$ с точностью до вектора $\Delta_l^{(m)} = (\Delta_{lq}^{(m)}), m = \overline{1, \sigma}$ определенным образом упорядоченной последовательности конечного числа N_{lm} параметров $\Delta_{lq}^{(m)}, q = \overline{1, N_{lm}}$, характеризующих управляющие воздействия оптимальной структуры [27]. Здесь $l = \overline{1, l_m}$ и $l_m \in \{1, s_m + 2\}$ - число используемых составляющих $U^*(t)$ в конкретной задаче многоканальной оптимизации.

Всюду далее исключается для простоты и большей наглядности без потери общности основных результатов, случай одновременного воздействия внутренних и граничных управлений, полагая при $\sigma = 1$, согласно (1.29),(1.33)

$$U^*(t) = u_{v_1}^*(t) = (u_{vi_1}^*(t)), \quad i = \overline{1, s_1}; \quad l_m = l_1 = s_1 > 1, \quad (1.34)$$

или

$$U^*(t) = (u_{01}^*(t), u_{11}^*(t)), \quad l_m = l_1 = 2, \quad (1.35)$$

и для $\sigma > 1$

$$U^*(t) = (u_{vim}^*(t)), \quad s_m = 1; \quad l_m = 1, \quad m = \overline{1, \sigma}, \quad (1.36)$$

или

$$U^*(t) = (u_{jm}^*(t)), \quad l_m = 1, \quad j \in \{0, 1\}. \quad (1.37)$$

Здесь в (1.37) выбирается только одно из двух значений $j = 0$ или $j = 1$ для каждого $m = \overline{1, \sigma}$.

Интегрирование уравнений (1.25) с параметризованным управлением $U^*(\Delta_l^{(m)}, t)$, $l = \overline{1, l_m}$; $m = \overline{1, \sigma}$ позволяет определить конечное состояние объекта $Q_m(x_m, t_{\text{кон}})$ в (1.31), согласно (1.26), и значение критерия оптимальности (1.32) в форме явных зависимостей соответственно $Q_m(x_m, \Delta^\Sigma)$, $m = \overline{1, \sigma}$ и $I_1(\Delta^\Sigma)$ от своих аргументов, где

$$\Delta^\Sigma = (\Delta_l^{(m)}), \quad l = \overline{1, l_m}; \quad m = \overline{1, \sigma}. \quad (1.38)$$

В результате осуществляется редукция исходной ЗМУ (1.25),(1.30)-(1.32) к задаче полубесконечной оптимизации (ЗПО) [27, 40, 51]:

$$I_1(\Delta^\Sigma) \rightarrow \min_{\Delta^\Sigma}; \quad (1.39)$$

$$\max_{x_m \in [x_{0m}, x_{1m}]} |Q_m(x_m, \Delta^\Sigma) - Q_m^*(x_m)| \leq \varepsilon_m, \quad m = \overline{1, \sigma} \quad (1.40)$$

на экстремум функции (1.39) конечного числа

$$N = \sum_{m=1}^{\sigma} \sum_{l=1}^{l_m} N_{lm} \quad (1.41)$$

переменных $\Delta_{lq}^{(m)}$, $l = \overline{1, l_m}$; $q = \overline{1, N_{lm}}$ с бесконечным числом ограничений для каждого $m = \overline{1, \sigma}$, диктуемых требованиями (1.27) для всех $x_m \in [x_{0m}, x_{1m}]$ и заменяемых одним ограничением на функцию максимума (1.40).

Типичным примером является классическая задача оптимального быстродействия, в которой принцип максимума устанавливает кусочно-постоянную («релейную») форму искомого управления, попеременно принимающего только свои предельно допустимые значения u_{\max} и u_{\min} и заведомо определяемого таким образом с точностью до числа N и длительностей Δ_i , $i = \overline{1, N}$ интервалов его постоянства в обычных условиях возможности выбора из физических соображений значения $u^* \in \{u_{\max}, u_{\min}\}$ на начальной стадии оптимального процесса [18] (рис.1.11).

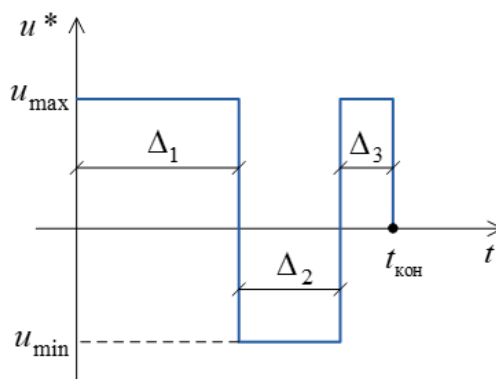


Рисунок 1.11 Иллюстрация релейного характера сосредоточенного оптимального управления

1.4 Альтернансный метод решения задачи полубесконечной оптимизации

Решение ЗПО (1.39)-(1.40) может быть получено альтернансным методом, являющимся развитием теории нелинейных чебышёвских приближений применительно к задачам полубесконечной оптимизации [36, 38, 50, 51, 53-57].

Метод базируется на специальных альтернансных свойствах искомого оптимальных решений Δ_*^Σ в совокупности с использованием базовых физических закономерностей оптимизируемых процессов в конкретной предметной области. Согласно этим свойствам, при выполнении некоторых

малостеснительных, обычно выполняющихся в прикладных задачах допущений, строгие равенства в (1.40) достигаются при $\Delta^\Sigma = \Delta_*^\Sigma$ в некоторых точках пространственной области определения управляемых величин. Суммарное число таких точек, называемых точками альтернанса [36-38, 50], оказывается равным числу всех искомым параметров оптимального процесса, включая N неизвестных значений N_{lm} в (1.41), и порождает тем самым замкнутую относительно этих неизвестных систему соотношений. При этом размерность N вектора Δ_*^Σ в (1.39)-(1.41) определяется по установленной совокупности правил в зависимости от ε_m в (1.40), а при наличии диктуемой закономерностями предметной области дополнительной информации о форме кривых $Q_m(x_m, \Delta_*^\Sigma), m = \overline{1, \sigma}$ пространственного распределения управляемых величин на отрезках $[x_{0m}, x_{1m}] \ni x_m$ при оптимальном управлении обеспечивается редукция данной системы равенств к системе трансцендентных уравнений, решение которой стандартными численными методами исчерпывает решение исходной задачи оптимизации [18, 36, 37, 43, 52].

Описанная базовая схема использования альтернансного метода решения ЗОУ ОРП широко апробирована на целом ряде задач одноканального управления объектами технологической теплофизики.

В последующих главах более подробно рассматривается технология и техника применения альтернансного метода применительно к центральной задаче оптимального быстрогодействия при многоканальном управлении одним или группой взаимосвязанных ОРП с различными типами управляющих воздействий.

1.5 Качественные особенности задач многоканальной оптимизации ОРП

В качественном смысле ЗМО ОРП обладает рядом принципиальных особенностей, которые необходимо учитывать при поиске оптимальных значений параметров искомым управляющих воздействий.

Очевидно, что увеличение каналов управления приводит к увеличению размерности вектора оптимизируемых параметров и связанным с этим изменением базовых правил выбора оптимального числа его компонентов, а конструктивные алгоритмы реализации вычислительных процедур альтернансного метода усложняются с учетом специфического ограничения на одинаковую длительность процесса управления для каждого из них. При этом для типичного случая двухканального управления одно из управляющих воздействий может рассматриваться в условиях свободного варьирования всех характеризующих его параметров, включая $t_{\text{кон}}$, а для другого значение $t_{\text{кон}}$ должно быть исключено из числа искомых величин. Таким образом, имеет место многовариантность возможных решений, и возникает необходимость проводить процедуру поиска оптимального решения для каждой из допустимых комбинаций составляющих искомого вектора неизвестных параметров с последующим выбором из них лучшего варианта по достигаемой величине критерия оптимизации.

Наличие различных каналов управления приводит вследствие возрастания размерности вектора Δ_*^Σ к соответствующему увеличению числа точек альтернанса и, как следствие, к усложнению альтернансных свойств Δ_*^Σ и неоднозначности формы кривых $Q_m(x_m, \Delta_*^\Sigma)$.

Указанные возможности приводят к существенным отличиям технологии применения альтернансного метода по сравнению с задачей одноканального управления и требуют дополнительных исследований по разработке вычислительных алгоритмов его использования в базовых задачах многоканальной оптимизации ОРП.

Настоящая работа посвящена разработке конструктивных методов решения задач векторного управления одним или группой взаимосвязанных ОРП применительно к центральному критерию оптимального быстродействия.

1.6 Выводы по первой главе

1. Широкий круг актуальных для приложений задач многоканального оптимального управления объектами с распределенными параметрами формулируется в условиях одновременного воздействия на объект по различным каналам управления с целью существенного повышения эффективности оптимизируемых процессов по базовым технико-экономическим показателям.

2. Применительно к достаточно широкому кругу управляемых процессов в технических системах определены базовые математические модели одного и группы взаимосвязанных ОРП с векторными управляющими воздействиями, проблемно-ориентированные на последующее решение задач оптимального многоканального управления.

3. Приведена постановка задачи многоканальной оптимизации одного и группы взаимосвязанных ОРП в условиях равномерной оценки целевых множеств и общая схема ее решения, базирующаяся на процедуре редукции к специальной форме задачи полубесконечной оптимизации, на которую распространяется альтернансный метод отыскания ее решения с учетом существенных особенностей, связанных с векторным характером оптимизируемых управляющих воздействий.

4. Решение задачи векторного управления ОРП усложняется по сравнению со скалярным вариантом увеличенной размерностью вектора оптимизируемых параметров управляющих воздействий, дополнительным ограничением на одинаковую длительность управляемого процесса для каждого из них и технологическими затруднениями использования известных схем применения альтернансного метода для нахождения искомым экстремалей за счет существенного видоизменения их альтернансных свойств.

ГЛАВА 2. ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ДВУХКАНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОБЪЕКТАМИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В УСЛОВИЯХ РАВНОМЕРНОЙ ОЦЕНКИ ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ

Материал главы излагается в соответствии с публикациями соискателя [59 - 61, 67].

В данной главе приводятся решения ряда задач векторного управления одним ОРП в сформулированной в главе 1 постановке применительно к центральному критерию быстродействия

$$I = \int_0^{t_{\text{кон}}} dt = t_{\text{кон}} \rightarrow \min_{U, t_{\text{кон}}}, \quad (2.1)$$

являющемуся частным вариантом (1.32) при $f_0(\cdot) = 1$, для наиболее употребительного в инженерной практике варианта двухканальной оптимизации по граничным и внутренним сосредоточенным управляющим воздействиям вида $U(t)$ в (1.33) в условиях заданной точности равномерного приближения конечного состояния управляемой величины к требуемому, согласно соотношению (1.27) при $\sigma = 1$.

Алгоритмы оптимального управления по критерию быстродействия, отвечающие базовому условию достижения максимальной производительности управляемого процесса, во многих случаях оказываются оптимальными и по другим наиболее значимым показателям – качеству продукции, оцениваемому по достижимой в равномерной метрике точности нагрева, и энергопотреблению, определяемому расходом энергии на процесс управления [28].

В качестве конкретной линейной модели объекта управления всюду далее рассматривается без потери общности получаемых далее основных результатов процесс нагрева неограниченной пластины, температурное поле которой $Q(x, t)$ описывается начально-краевой задачей (1.12)-(1.14), широко используемой в инженерной практике для описания в первом приближении целого ряда

процессов технологической теплофизики [1, 16, 23]. Ее эквивалентное представление описывается бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений (1.15)-(1.17) относительно модальных составляющих $\bar{Q}_n(\mu_n, t)$ разложения $Q(x, t)$ в сходящийся в среднем ряд по собственным функциям $\varphi_n(\mu_n, x)$.

2.1 Постановка задачи оптимального по быстродействию двухканального управления ОРП

Базовая задача оптимального по быстродействию векторного управления одним ОРП, описываемым уравнением теплопроводности (1.12)-(1.14), сводится применительно к его модальному представлению (1.15) к определению векторного сосредоточенного управления $U^*(t)$ вида (1.34) или (1.35) и длительности $t_{\text{кон}}^*$ оптимального процесса, обеспечивающих в соответствии с (1.31) требуемую точность равномерного приближения конечного состояния $Q(x, t_{\text{кон}}^*)$ управляемой величины к ее заданному пространственному распределению $Q^*(x)$:

$$\max_{x \in [0, x_1]} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_n(t_{\text{кон}}^*) \varphi_n(\mu_n, x) - Q^*(x) \right| \leq \varepsilon \quad (2.2)$$

за минимальное время $t_{\text{кон}}^*$ в условиях действующих ограничений (1.30).

Принцип максимума Понтрягина устанавливает в этой задаче кусочно-постоянную («релейную») форму искомого управления $U^*(t)$ [3, 18, 36, 51-52], попеременно принимающего только свои предельно допустимые значения $u_{\text{max}} \in \{u_{01\text{max}}; u_{11\text{max}}; u_{V1\text{max}}, V = \overline{1, s_1}\}$ и $u_{\text{min}} \in \{u_{01\text{min}}; u_{11\text{min}}; u_{V1\text{min}}, V = \overline{1, s_1}\}$ в (1.30) и заведомо определяемого в форме его параметрического представления вида (1.38) при $m = 1$ с точностью до числа N и длительностей $\Delta_{lq}^{(1)}$, $l = \overline{1, l_1}$, $q = \overline{1, N_{l1}}$ интервалов постоянства каждой l -й составляющей с $N_{l1} - 1$ переключениями:

$$N = \sum_{l=1}^2 N_{l1}. \quad (2.3)$$

Здесь на первом интервале $U^*(t) = u_{\max}$ в рассматриваемой задаче нагрева пластины.

Ограничимся всюду далее типичным для приложений случаем двухканального граничного или внутреннего сосредоточенного управления ОРП, согласно (1.34),(1.35), где следует принять $l_1 = s_1 = 2$.

Каждая из искомых составляющих оптимального управления однозначно характеризуется фигурирующими в роли параметров $\Delta_{lq}^{(1)}$ и подлежащими определению значениями $t_{lq}^{(1)}$, $l = 1, 2$; $q = \overline{1, N_{l1}}$; $t_{l(q+1)}^{(1)} > t_{lq}^{(1)}$ моментов ее переключения с одного предельного уровня на другой и одинаковыми априори неизвестными конечными моментами $t_{lN_{l1}}^{(1)}$:

$$t_{lN_{l1}}^{(1)} = t_{\text{кон}}^* \text{ для всех } l = \overline{1, l_1}, \quad (2.4)$$

совпадающими с минимизируемой, согласно (2.1), длительностью процесса управления.

В итоге рассматриваемая двухканальная задача быстрогодействия сводится к ЗПО вида (1.39),(1.40):

$$I(\Delta^\Sigma) = t_{\text{кон}}^* \rightarrow \min_{\Delta^\Sigma}; \quad (2.5)$$

$$\max_{x \in [0, x_1]} |Q(x, \Delta^\Sigma) - Q^*(x)| \leq \varepsilon, \quad (2.6)$$

где

$$\Delta^\Sigma = (t_{1q}^{(1)}, q = \overline{1, N_{11}}; t_{2q}^{(1)}, q = \overline{1, N_{21}}). \quad (2.7)$$

Здесь N_{11}, N_{21} в (2.7) – числа параметров, с точностью до которых определяются составляющие $t_{1q}^{(1)}$ и $t_{2q}^{(1)}$ векторного управления. В силу ограничения (2.4), сводимого к равенству $t_{1N_{11}}^{(1)} = t_{1N_{21}}^{(1)} = t_{\text{кон}}^*$, число неизвестных компонент Δ^Σ равно $N_{11} + N_{21} - 1$ в (2.7). При этом одно из управляющих воздействий может рассматриваться условиях свободного выбора всех характеризующих его

параметров, включая $t_{\text{кон}}^*$, а для другого значение $t_{\text{кон}}^*$ должно быть исключено из числа искомых величин, уменьшая его на единицу. Оставляя, применительно к этим вариантам, в составе Δ^Σ только свободно варьируемые переменные, будем иметь вместо (2.7):

$$\Delta^\Sigma = \Delta_1^\Sigma = \left(t_{1q}^{(1)}, q = \overline{1, N_{11}}; t_{2q}^{(1)}, q = \overline{1, N_{21} - 1} \right); \quad (2.8)$$

$$\Delta^\Sigma = \Delta_2^\Sigma = \left(t_{1q}^{(1)}, q = \overline{1, N_{11} - 1}; t_{2q}^{(1)}, q = \overline{1, N_{21}} \right). \quad (2.9)$$

В соответствии с (2.8),(2.9) требуется рассмотреть два возможных варианта, принимая за искомую величину $t_{\text{кон}}^*$ величину $t_{1N_{11}}^{(1)}$ или $t_{1N_{21}}^{(1)}$ в (2.8),(2.9), с последующей оценкой получаемых результатов по достигаемой величине минимизируемого критерия оптимальности. При переходе от моментов переключения $t_{lq}^{(1)}, l = 1, 2$ в (2.7) непосредственно к длительностям интервалов постоянства $\Delta_{lq}^{(1)}, l = 1, 2; q = \overline{1, N_l}$ получаем, согласно (2.8),(2.9), два варианта задач полубесконечной оптимизации вида (2.5),(2.6):

$$\begin{aligned} I(\Delta_1^\Sigma) &= \sum_{q=1}^{N_{11}} \Delta_{1q}^{(1)} \rightarrow \min_{\Delta_1^\Sigma}; \\ \max_{x \in [0, x_1]} |Q(x, \Delta_1^\Sigma) - Q^*(x)| &\leq \varepsilon; \\ \Delta_1^\Sigma &= \left(\Delta_{1q}^{(1)}, q = \overline{1, N_{11}}; \Delta_{2q}^{(1)}, q = \overline{1, N_{21} - 1} \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} I(\Delta_2^\Sigma) &= \sum_{q=1}^{N_{21}} \Delta_{2q}^{(1)} \rightarrow \min_{\Delta_2^\Sigma}; \\ \max_{x \in [0, x_1]} |Q(x, \Delta_2^\Sigma) - Q^*(x)| &\leq \varepsilon; \\ \Delta_2^\Sigma &= \left(\Delta_{1q}^{(1)}, q = \overline{1, N_{11} - 1}; \Delta_{2q}^{(1)}, q = \overline{1, N_{21}} \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2 Технология решения задачи полубесконечной оптимизации альтернансным методом

Подобно задачам параметрической оптимизации с одним управляющим воздействием [36, 39, 40], минимально достижимые в классе параметризованных управлений $U^*(\Delta_p^\Sigma, t)$ со свободно варьируемыми в условиях (2.4) параметрами Δ_p^Σ значения $\varepsilon_{p \min}^{(N_{11}, N_{21})}$ ошибок равномерного приближения $Q(x, \Delta_p^\Sigma)$ к $Q^*(x)$ в (2.5)-(2.9):

$$\varepsilon_{p \min}^{(N_{11}, N_{21})} = \min_{\Delta_p^\Sigma} \left\{ \max_{x \in [0, x_1]} |Q(x, \Delta_p^\Sigma) - Q^*(x)| \right\}, \quad p = 1, 2. \quad (2.12)$$

монотонно убывают с возрастанием размерности $N_{11} + N_{21} - 1$ вектора Δ_p^Σ [18, 36, 37, 58]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p \min}^{(1,1)} > \varepsilon_{p \min}^{(2,2)} > \dots > \varepsilon_{p \min}^{(\xi-1, \xi-1)} > \max \left(\varepsilon_{p \min}^{(\xi-1, \xi)}, \varepsilon_{p \min}^{(\xi, \xi-1)} \right) \geq \min \left(\varepsilon_{p \min}^{(\xi-1, \xi)}, \varepsilon_{p \min}^{(\xi, \xi-1)} \right) > \\ > \varepsilon_{p \min}^{(\xi, \xi)} > \dots > \varepsilon_{p \min}^{(\rho, \rho)} = \varepsilon_{p \inf} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь точная нижняя грань $\varepsilon_{p \inf}$ в (2.15) оказывается равной минимаксу $\varepsilon_{p \min}^{(\rho, \rho)}$, где $\rho = \infty$ при $\varepsilon_{p \inf} = 0$ и $\rho < \infty$ при $\varepsilon_{p \inf} > 0$ соответственно для управляемых и неуправляемых относительно $Q^*(x)$ объектов [36, 38].

Аналогично задаче с одноканальным управлением [36, 38-40] числа N_{11}^*, N_{21}^* , соответствующие решению Δ_*^Σ ЗПО (2.5)-(2.7), определяются по месту в цепочке неравенств (2.13) заданных в (2.6) величин ε для каждого из вариантов в (2.8),(2.9) при $p = 1$ или $p = 2$ [36, 38]:

$$N_{11}^* = N_{21}^* = w, \text{ если } \varepsilon_{p \min}^{(w, w)} \leq \varepsilon < \min \left(\varepsilon_{p \min}^{(w-1, w)}, \varepsilon_{p \min}^{(w, w-1)} \right); \quad (2.14)$$

$$N_{11}^* = w, N_{21}^* = w-1, \text{ если } \varepsilon_{p \min}^{(w, w-1)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{p \min}^{(w-1, w)} \text{ или } \varepsilon_{p \min}^{(w-1, w)} < \varepsilon_{p \min}^{(w, w-1)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{p \min}^{(w-1, w-1)}; \quad (2.15)$$

$$N_{11}^* = w-1, N_{21}^* = w, \text{ если } \varepsilon_{p \min}^{(w-1, w)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{p \min}^{(w, w-1)} \text{ или } \varepsilon_{p \min}^{(w, w-1)} < \varepsilon_{p \min}^{(w-1, w)} \leq \varepsilon < \varepsilon_{p \min}^{(w-1, w-1)}. \quad (2.16)$$

Решения задач Δ_*^Σ (2.5)-(2.9) могут быть найдены альтернансным методом [18, 36-40]. Метод базируется на специальных альтернансных свойствах Δ_*^Σ , согласно которым при некоторых малостеснительных для прикладных задач допущениях в конце оптимального процесса достигаются строгие равенства в (2.6) в некоторых R точках $x_j^0 \in [0, x_1], j = \overline{1, R}$ пространственной области определения управляемой величины:

$$\left| Q(x_j^0, \Delta_*^\Sigma) - Q^*(x_j^0) \right| = \varepsilon, \quad j = \overline{1, R}. \quad (2.17)$$

Здесь $\Delta_*^\Sigma = \Delta_{1*}^\Sigma$ или $\Delta_*^\Sigma = \Delta_{2*}^\Sigma$, согласно (2.8),(2.9), где $N_{11} = N_{11}^*, N_{21} = N_{21}^*$ в соответствии с соотношениями (2.14)-(2.16). Суммарное число R таких точек оказывается равным числу всех искомых параметров оптимального процесса, включая вектор Δ_*^Σ и заранее неизвестные значения минимаксов $\varepsilon_{p \min}$ в (2.14)-(2.16), если с ними должны совпадать по исходным требованиям значения ε в (2.17).

Применительно к основному варианту (2.14) с одинаковым числом переключений двухканального управления сказанное означает, что в условиях ограничения (2.4)

$$R = \begin{cases} N^* - 1, & \text{если } \varepsilon > \varepsilon_{p \min}^{(N_{11}^*, N_{21}^*)}; \\ N^*, & \text{если } \varepsilon = \varepsilon_{p \min}^{(N_{11}^*, N_{21}^*)}, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$p = 1 \text{ или } p = 2,$$

где согласно (2.3) $N^* = N_{11}^* + N_{21}^*$.

Равенства (2.17) в соответствии с (2.18) образуют замкнутую относительно всех неизвестных систему соотношений для значений управляемой величины в конце оптимального процесса. При наличии дополнительной информации из предметной области о форме кривой конечного пространственного распределения $Q(x, \Delta_*^\Sigma) - Q^*(x)$, $x \in [0, x_1]$, позволяющей идентифицировать координаты x_j^0 и знаки $Q(x_j^0, \Delta_*^\Sigma) - Q^*(x_j^0)$, равенства (2.17), дополненные

условиями существования экстремума функции $Q(x, \Delta_*^\Sigma) - Q^*(x)$ в точках $x_{jg}^0 \in \text{int}[0, x_1]$, $g = \overline{1, R_1}$, $R_1 < R$, $x_{jg}^0 \in \{x_j^0\}$, переводятся в систему уравнений:

$$\begin{aligned} Q(x_j^0, \Delta_*^\Sigma) - Q^*(x_j^0) &= \pm \varepsilon, \quad j = \overline{1, R}; \\ \frac{\partial}{\partial x} [Q(x_j^0, \Delta_*^\Sigma) - Q^*(x_{jg}^0)] &= 0, \quad g = \overline{1, R_1}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

с однозначно определяемым знаком ε в каждой точке x_j^0 , которая разрешается в условиях (2.18) известными численными методами относительно Δ_*^Σ , а также $\varepsilon_{p \min}^{(N_{11}^*, N_{21}^*)}$, если $\varepsilon = \varepsilon_{p \min}^{(N_{11}^*, N_{21}^*)}$, завершая тем самым решение ЗПО (2.5)-(2.9). Аналогичным образом решаются ЗПО (2.10),(2.11), формулируемые относительно искомым длительностей интервалов постоянства $U^*(t)$.

2.3 Двухканальное оптимальное по быстродействию управление ОРП с двухинтервальными управляющими воздействиями

При типичных для технических систем требованиях реализации оптимальных по быстродействию управлений возможно более простой формы в большинстве случаев в прикладных задачах ограничиваются вариантом двухинтервальных управляющих воздействий (режим «включить-выключить») с выбором $N_{11}^* = N_{21}^* = 2$ в (2.8),(2.9),(2.14) (рис.2.1), в классе которых достижимая максимальная точность нагрева $\varepsilon_{p \min}^{(2,2)}$ в (2.13),(2.14), как правило, удовлетворяет технологическим инструкциям [18]. При этом задачи (2.10),(2.11), в форме которых проводится последующий анализ, упрощаются и принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} I(\Delta_1^\Sigma) &= \Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)} \rightarrow \min_{\Delta_1^\Sigma}; \\ \max_{x \in [0, x_1]} |Q(x, \Delta_1^\Sigma) - Q^*(x)| &\leq \varepsilon; \\ \Delta_1^\Sigma &= (\Delta_{11}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}, \Delta_{22}^{(1)}), \end{aligned} \quad (2.20)$$

или

$$\begin{aligned}
I(\Delta_2^\Sigma) &= \Delta_{21}^{(1)} + \Delta_{22}^{(1)} \rightarrow \min_{\Delta_2^\Sigma}; \\
\max_{x \in [0, x_1]} |Q(x, \Delta_2^\Sigma) - Q^*(x)| &\leq \varepsilon; \\
\Delta_2^\Sigma &= (\Delta_{21}^{(1)}, \Delta_{22}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Здесь $\Delta_{11}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}$ и $\Delta_{21}^{(1)}, \Delta_{22}^{(1)}$ – длительности первого и второго интервалов постоянства соответственного первого и второго управляющего воздействия при управлении одним ($m = 1$) объектом (рис.2.1).

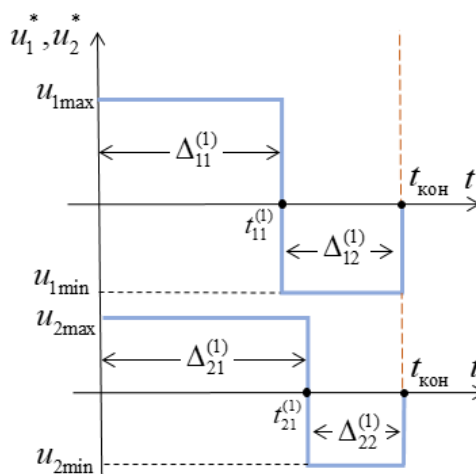


Рисунок 2.1 Оптимальные по быстродействию двухинтервальные сосредоточенные управления

Каждая из этих задач при ее решении альтернативным методом сводится к системам уравнений (2.19), где $\Delta_*^\Sigma = \Delta_{1*}^\Sigma$ или $\Delta_*^\Sigma = \Delta_{2*}^\Sigma$ определяется, согласно (2.10),(2.11),(2.20),(2.21) при $N_{11}^* = N_{21}^* = 2$, и в соответствии с (2.18):

$$R = \begin{cases} 3, & \text{если } \varepsilon > \varepsilon_{p \min}^{(N_{11}^*, N_{21}^*)}; \\ 4, & \text{если } \varepsilon = \varepsilon_{p \min}^{(N_{11}^*, N_{21}^*)}. \end{cases} \tag{2.22}$$

Конкретный вид системы уравнений (2.19) в задачах (2.20),(2.21) полностью определяется формой кривой $Q(x, \Delta_*^\Sigma) - Q^*(x)$, которая в свою очередь устанавливается закономерностями поведения результирующих температурных полей $Q(x, \Delta_*^{(2)}) - Q^*(x)$ в оптимальном процессе нагрева пластины при одноканальном управляющем воздействии релейной формы в наиболее характерном для приложений случае $Q^*(x) = Q^* = \text{const}$, $x \in [0, x_1]$ и

$Q_0(x) = Q_0 = \text{const}$ в (1.13). Здесь $\Delta_*^{(2)}$ – вектор оптимальных длительностей интервалов постоянства единственного управляющего воздействия. Всюду далее последние допущения считаются выполненными, и для простоты без потери общности основных результатов принимается $Q_0 = 0$.

Во-первых, максимально допустимые отклонения $Q(x, \Delta_*^{(2)}) - Q^*(x)$ температуры заданной величины в конце оптимального процесса достигаются с разными знаками для каждой пары подряд расположенных точек x_j^0 на отрезке $[0, x_1] \ni x$:

$$0 \leq x_1^0 < x_2^0 < \dots < x_R^0 \leq x_1, \quad (2.23)$$

образующих чебышевский альтернанс [36-38, 50, 53], и следовательно, система уравнений альтернансного метода существенно уточняется при одноканальном управлении правилом знакопеременования этих отклонений в точках (2.23):

$$\begin{aligned} Q(x_j^0, \Delta_*^{(2)}) - Q^*(x) &= \psi(-1)^j \varepsilon, \quad j = \overline{1, R}; \quad \psi = \pm 1; \\ \frac{\partial Q(x_{jg}^0, \Delta_*^{(2)})}{\partial x} &= 0, \quad g = \overline{1, R_1}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Во-вторых, при $Q_0 = \text{const}$ форма кривых $Q(x_j^0, \Delta_*^{(2)})$ в полной мере характеризуется максимально возможным числом M_{\max} точек ее экстремума при одноканальном управлении нагревом на одной из поверхностей пластины, в число которых включается точка на другой поверхности в типичных условиях ее теплоизоляции [36] при $\frac{\partial Q(0, t)}{\partial x} = 0$ или $\frac{\partial Q(x_1, t)}{\partial x} = 0$, которые здесь считаются выполненными.

Как показано в [36], M_{\max} однозначно определяется в указанных условиях числом N интервалов постоянства единственного управляющего воздействия релейной формы. При этом

$$M_{\max} = N, \quad (2.25)$$

в случае граничного управления на одной из поверхностей пластины, и

$$M_{\max} = \begin{cases} N + 1, & \text{при нечетном } N; \\ N, & \text{при четном } N, \end{cases} \quad (2.26)$$

при внутреннем сосредоточенном управлении по мощности тепловыделения, если закон его пространственного распределения удовлетворяет некоторым малостеснительным для прикладных задач допущениям, которые заведомо выполняются, в частности, применительно к процессам индукционного нагрева с электромагнитными источниками тепла [43].

Соотношения (2.25),(2.26) полностью определяют единственный вариант системы уравнений вида (2.24), где число R точек x_j^0 равно числу искомых параметров оптимального процесса, в случае одноканального управления нагревом пластины с одной из ее поверхностей при включении в число точек x_j^0 максимально возможного числа M_{\max} точек экстремума [18, 36].

В наиболее характерном случае двухинтервального одноканального управления с максимальной точностью $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ равномерного приближения конечного распределения температур $Q(x, \Delta_*^{(2)})$ к $Q^*(x)$ при $N = 2$ в (2.25), (2.26) и трех точках чебышевского альтернанса ($R = 3$) [18, 36, 43], эта система принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} Q(0, \Delta_*^{(2)}) - Q^* &= -\varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ Q(x_2^0, \Delta_*^{(2)}) - Q^* &= \varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ Q(x_1, \Delta_*^{(2)}) - Q^* &= -\varepsilon_{\min}^{(2)}; \\ \frac{\partial Q(x_2^0, \Delta_*^{(2)})}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Соответствующие формы кривых $Q(x, \Delta_*^{(2)})$ в условиях $Q^* = \text{const}$, $Q(x, 0) = 0$ иллюстрируются на рис.2.2.

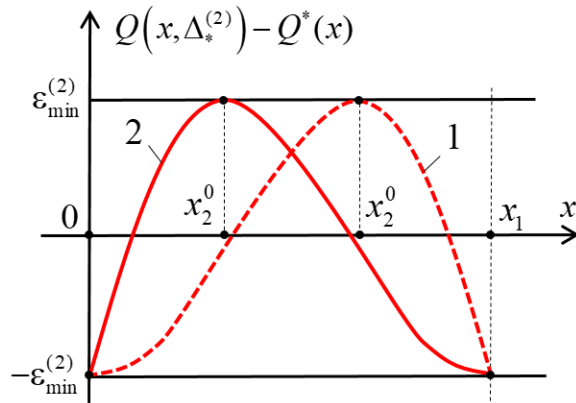


Рисунок 2.2 Результирующие температурные распределения при одноканальном оптимальном по быстродействию управлении
(1 – нагрев с поверхности $x = x_1$; 2 – нагрев с поверхности $x = 0$)

Конечное состояние оптимального процесса при двухканальном управлении можно рассматривать для линейных моделей ОРП как суперпозицию эффектов воздействия по каждому из управляющих каналов с известной, согласно (2.27) и рис.2.2, конфигурацией температурного поля. В условиях (2.22) суммирование кривых 1 и 2 на рис.2.2 приводит применительно к представляющему наибольший интерес в приложениях случаю $\varepsilon = \varepsilon_{p\min}^{(2,2)}$ при $R = 4$ к единственно возможному варианту пространственного распределения $Q(x, \Delta_*^\Sigma)$ и, соответственно, системы уравнений (2.24) (рис.2.3, а):

$$\begin{aligned}
 Q(x_1^0, \Delta_{1*}^\Sigma) - Q^* &= -\varepsilon_{1\min}^{(2,2)}; \\
 Q(x_2^0, \Delta_{1*}^\Sigma) - Q^* &= \varepsilon_{1\min}^{(2,2)}; \\
 Q(x_3^0, \Delta_{1*}^\Sigma) - Q^* &= -\varepsilon_{1\min}^{(2,2)}; \quad 0 = x_1^0 < x_2^0 < x_3^0 < x_4^0 < x_1; \\
 Q(x_4^0, \Delta_{1*}^\Sigma) - Q^* &= \varepsilon_{1\min}^{(2,2)}; \\
 \frac{\partial Q(x_j^0, \Delta_{1*}^\Sigma)}{\partial x} &= 0, \quad j = 2, 3, 4;
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

для задачи (2.20) со свободно варьируемыми параметрами Δ_1^Σ управления, действующего на границе $x = 0$, и

$$\begin{aligned}
Q(x_1^0, \Delta_{2*}^\Sigma) - Q^* &= \varepsilon_{2\min}^{(2,2)}; \\
Q(x_2^0, \Delta_{2*}^\Sigma) - Q^* &= -\varepsilon_{2\min}^{(2,2)}; \\
Q(x_3^0, \Delta_{2*}^\Sigma) - Q^* &= \varepsilon_{2\min}^{(2,2)}; \quad 0 < x_1^0 < x_2^0 < x_3^0 < x_4^0 = x_1; \\
Q(x_4^0, \Delta_{2*}^\Sigma) - Q^* &= -\varepsilon_{2\min}^{(2,2)}; \\
\frac{\partial Q(x_j^0, \Delta_{2*}^\Sigma)}{\partial x} &= 0, \quad j = 1, 2, 3;
\end{aligned} \tag{2.29}$$

для задачи (2.21) со свободно варьируемыми параметрами Δ_2^Σ управления, действующего на границе $x = x_1$ (рис.2.3, б) [58-61].

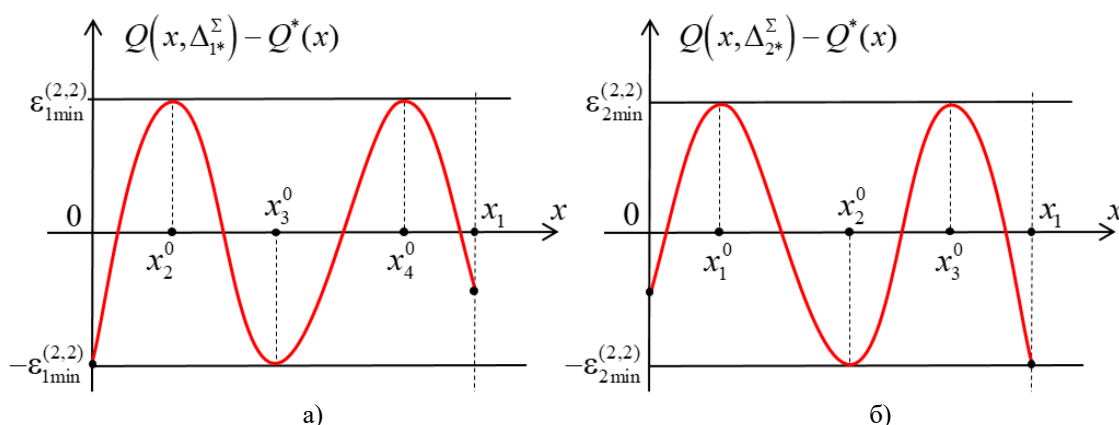


Рисунок 2.3 Формы кривой результирующего температурного распределения при $\varepsilon = \varepsilon_{p\min}^{(2,2)}$ для двухканального управления

В системах уравнений (2.28),(2.29) температурное поле $Q(x, \Delta_*^\Sigma)$ описывается в форме ряда (1.8) при $t = t_{\text{кон}}$, где $\bar{Q}_n(\mu_n, t_{\text{кон}}^*) = \bar{Q}_n(\mu_n, \Delta_*^\Sigma)$ находится интегрированием системы уравнений (1.15) при двухинтервальном управлении $U^*(t)$. Аналогичным образом устанавливаются системы уравнений и конфигурация результирующего температурного состояния при $\varepsilon > \varepsilon_{p\min}^{(2,2)}$ в (2.20),(2.21).

Дальнейшие исследования в основном проводятся применительно к задачам (2.20),(2.21) при $\varepsilon = \varepsilon_{p\min}^{(2,2)}$, редуцируемым к решению систем уравнений соответственно (2.28),(2.29).

2.4 Оптимальное по быстродействию двухканальное граничное управление ОРП

В настоящем разделе диссертации рассматривается задача двухканального оптимального по быстродействию граничного управления процессом нестационарной теплопроводности, описываемым начально-краевой задачей (1.12)-(1.14) при $u_v(x,t)=0$, $Q_0(x)=0$ с сосредоточенными управляющими воздействиями $u_0(t)$ и $u_1(t)$ по тепловому потоку на обеих поверхностях пластины $x=0$ и $x=x_1$, стесняемыми ограничениями вида (1.30) для частного случая граничных условий 2-го рода при $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ в (1.14):

$$-\lambda \frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} = u_0(t); \lambda \frac{\partial Q(x_1,t)}{\partial x} = u_1(t), \quad t > 0. \quad (2.30)$$

Значения $u_{0\min}$, $u_{1\min}$ в (1.30) могут быть реализованы с учетом тепловых потерь на границах пластины. Граничные условия вида (2.31), пренебрегающие зависимостью теплового потока на поверхностях пластины от их температуры, описывают, например, в первом приближении процессы нагрева до сравнительно низких температур в высокотемпературных печах с теплопередачей, преимущественно осуществляемой излучением от внешней среды по закону Стефана-Больцмана или при приближенном моделировании электромагнитных источников тепла в процессе индукционного нагрева поверхностным тепловыделением [3, 16, 30, 41, 43]. Для простоты без потери общности основных результатов здесь рассматривается частный вариант равномерного распределения равной нулю начальной температуры в (1.13).

Выражение, описывающее зависимость температурного поля от внешних воздействий по граничным условиям (2.30), находится путем решения краевой задачи (1.12)-(1.13),(2.30), приводимой к ее модальному представлению (1.15), с использованием метода конечных интегральных преобразований [16, 44] и определяется, согласно (1.8), в виде разложения $Q(x,t)$ в бесконечный ряд по собственным функциям $\varphi_n(\mu_n, x)$ [16]:

$$\varphi_n(\mu_n, x) = \frac{1}{E_n} \cos\left(\pi n \frac{x}{x_1}\right); \mu_n = \frac{\sqrt{a}}{x_1} \pi n, n = 0, 1, 2, \dots; E_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{x_1}{a}}, & n = 0; \\ \sqrt{\frac{x_1}{2a}}, & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.31)$$

$$Q(x, t) = \frac{1}{x_1 c \gamma_0} \int_0^t (u_0(\tau) + u_1(\tau)) d\tau + \frac{2}{x_1 c \gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\pi n \frac{x}{x_1}\right) \cdot \int_0^t (u_0(\tau) + (-1)^n u_1(\tau)) \cdot e^{-\mu_n^2(t-\tau)} d\tau. \quad (2.32)$$

Исследуемая задача быстрогодействия при двухинтервальных управлениях $u_0(t)$ и $u_1(t)$ релейной формы сводится к виду (2.22), (2.21), где $Q(x, \Delta^\Sigma) = Q(x, t_{\text{кон}})$ описывается выражением (2.32) для $t = t_{\text{кон}}$ с подстановкой управляющих воздействий в Δ^Σ – параметризованный форме:

$$u_0(t) = \begin{cases} u_{0\max}, & 0 \leq t < \Delta_{11}^{(1)}; \\ u_{0\min}, & \Delta_{11}^{(1)} < t \leq \Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)}; \end{cases} \quad u_1(t) = \begin{cases} u_{1\max}, & 0 \leq t < \Delta_{21}^{(1)}; \\ u_{1\min}, & \Delta_{21}^{(1)} < t \leq \Delta_{21}^{(1)} + \Delta_{22}^{(1)}. \end{cases} \quad (2.33)$$

В результате зависимости $Q(x, \Delta^\Sigma)$ от своих аргументов могут быть представлены в форме взвешенной суммы реакций $\Lambda_0(x, t)$ и $\Lambda_1(x, t)$ управляемой величины соответственно на ступенчатые управления $u_0(t) \equiv 1$ при $u_1(t) \equiv 0$ и $u_0(t) \equiv 0$ при $u_1(t) \equiv 1$:

$$Q(x, \Delta_1^\Sigma) = u_{0\max} \Lambda_0(x, \Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)}) + (u_{0\min} - u_{0\max}) \Lambda_0(x, \Delta_{12}^{(1)}) + u_{1\max} \Lambda_1(x, \Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)}) + (u_{1\min} - u_{1\max}) \Lambda_1(x, \Delta_{22}^{(1)}); \quad (2.34)$$

$$Q(x, \Delta_2^\Sigma) = u_{1\max} \Lambda_1(x, \Delta_{21}^{(1)} + \Delta_{22}^{(1)}) + (u_{1\min} - u_{1\max}) \Lambda_1(x, \Delta_{22}^{(1)}) + u_{0\max} \Lambda_0(x, \Delta_{21}^{(1)} + \Delta_{22}^{(1)}) + (u_{0\min} - u_{0\max}) \Lambda_0(x, \Delta_{12}^{(1)}). \quad (2.35)$$

Здесь переходные функции $\Lambda_0(x, t)$ и $\Lambda_1(x, t)$ определяются следующими выражениями в форме рядов улучшенной сходимости [16, 25, 41]:

$$\Lambda_0(x, t) = \frac{x_1}{\lambda} \left[\frac{at}{x_1^2} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x_1 - x}{x_1} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n (x_1 - x)}{x_1}\right) \cdot e^{-\mu_n^2 t} \right]; \quad (2.36)$$

$$\Lambda_1(x, t) = \frac{x_1}{\lambda} \left[\frac{at}{x_1^2} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{x}{x_1} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos\left(\frac{\pi n x}{x_1}\right) \cdot e^{-\mu_n^2 t} \right].$$

В итоге задача сводится для типичного случая $\varepsilon = \varepsilon_{p\min}^{(2,2)}$, $p = 1, 2$ к решению систем уравнений (2.28) и (2.29) относительно семи неизвестных $\Delta_{11}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}, \Delta_{22}^{(1)}, \varepsilon_{1\min}^{(2,2)}, x_2^0, x_3^0, x_4^0$ в (2.28) и $\Delta_{21}^{(1)}, \Delta_{22}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}, \varepsilon_{2\min}^{(2,2)}, x_1^0, x_2^0, x_3^0$ в (2.29) известными численными методами при определении $Q(x, \Delta^\Sigma)$ в форме (2.34), (2.35) с последующим выбором оптимального варианта по меньшей величине времени нагрева, равного сумме свободно варьируемых длительностей интервалов постоянства управлений $u_0(t)$ и $u_1(t)$.

Некоторые результаты, полученные применительно к исходным данным, указанным в таблице 2.1, при решении систем уравнений (2.28), (2.29) с помощью программной среды MATLAB [62-65] численными методами [66], приведены в таблице 2.2 и на рис.2.4–2.6. Решение систем уравнений производилось с учетом первых 100 членов бесконечных рядов в (2.36).

Решение системы уравнений (2.29) следует считать оптимальным как по критерию быстродействия, так и по предельно достижимой точности нагрева.

Таблица 2.1 – Исходные данные

Обозначение	Параметр	Значение	Единица измерения
-	Материал	сталь	-
x_1	Толщина пластины	0.2	м
Q_0	Начальная температура	0	°С
Q^*	Требуемая конечная температура	560	°С
λ	Коэффициент теплопроводности	34	Вт/м ² · °С
a	Коэффициент температуропроводности	$15 \cdot 10^{-6}$	м ² / с
α	Коэффициент теплоотдачи	26	Вт/м ² · °С
Q_{Π}	Максимальная температура печи	1600	°С
$u_{0\max}$	Максимальная величина управления $u_0(t)$	$\alpha \cdot Q_{\Pi}$	кВт/м ²
$u_{0\min}$	Минимальная величина управления $u_0(t)$	$-u_{0\max} / 2$	кВт/м ²
$u_{1\max}$	Максимальная величина управления $u_1(t)$	$u_{0\max} / 2$	кВт/м ²
$u_{1\min}$	Минимальная величина управления $u_1(t)$	$-u_{1\max} / 2$	кВт/м ²

Таблица 2.2 – Расчетные результаты

Двухканальное управление				Одноканальное управление			
решение системы (2.28)		решение системы (2.29)		при управлении $u_0(t)$		при управлении $u_1(t)$	
$\Delta_{11}^{(1)}$, сек	3174	$\Delta_{21}^{(1)}$, сек	3126	$\Delta_{11}^{(1)}$, сек	6633	$\Delta_{21}^{(1)}$, сек	6267
$\Delta_{12}^{(1)}$, сек	320	$\Delta_{22}^{(1)}$, сек	271	$\Delta_{12}^{(1)}$, сек	240	$\Delta_{22}^{(1)}$, сек	240
$\Delta_{22}^{(1)}$, сек	163	$\Delta_{12}^{(1)}$, сек	206	-	-	-	-
$\varepsilon_{1\min}^{(2,2)}$, °C	4,9	$\varepsilon_{2\min}^{(2,2)}$, °C	4,8	$\varepsilon_{1\min}^{(2,2)}$, °C	8,6	$\varepsilon_{2\min}^{(2,2)}$, °C	9
x_2^0 , м	0,03	x_1^0 , м	0,03	x_2^0 , м	0,065	x_2^0 , м	0,13
x_3^0 , м	0,01	x_2^0 , м	0,098	-	-	-	-
x_4^0 , м	0,17	x_3^0 , м	0,16	-	-	-	-

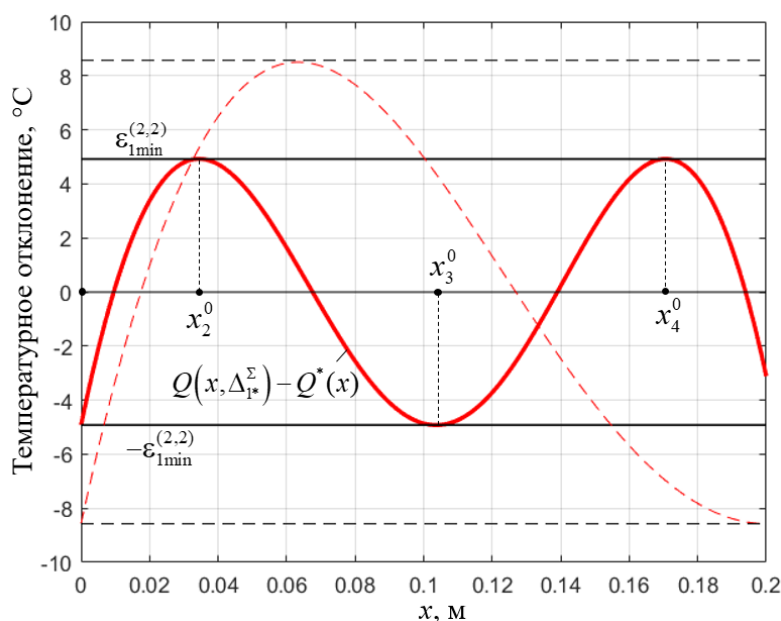


Рисунок 2.4 Кривая распределения результирующей температуры, полученная при решении системы уравнений (2.29); пунктирная кривая – при одноканальном управлении

Аналогичным образом может быть решена задача граничного управления с граничными условиями 3-го рода в условиях $\alpha_0 \neq 0, \alpha_1 \neq 0$ в (1.14) с использованием вместо (2.32) известных решений начально-краевой задачи (1.12)-(1.14).

Как показывает сравнительный анализ полученных выше результатов и результатов решения аналогичной ЗОУ ОРП при одном управлении $u_0(t)$ или $u_1(t)$ [61], двухканальный характер управления обладает серьезными преимуществами: общая длительность оптимального процесса снижается на 48%, а предельно достижимая точность нагрева в классе двухинтервальных управляющих воздействий увеличивается на 46%.

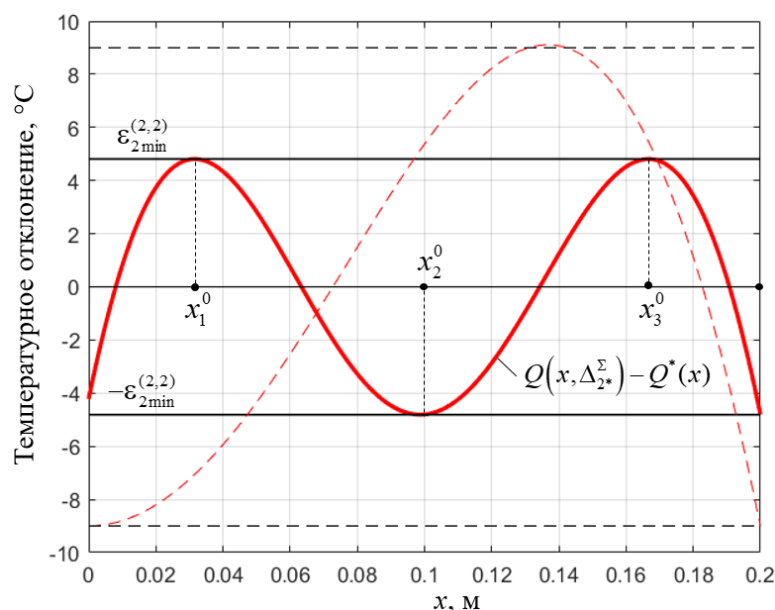


Рисунок 2.5 Кривая распределения результирующей температуры, полученная при решении системы уравнений (2.29); пунктирная кривая – при одноканальном управлении

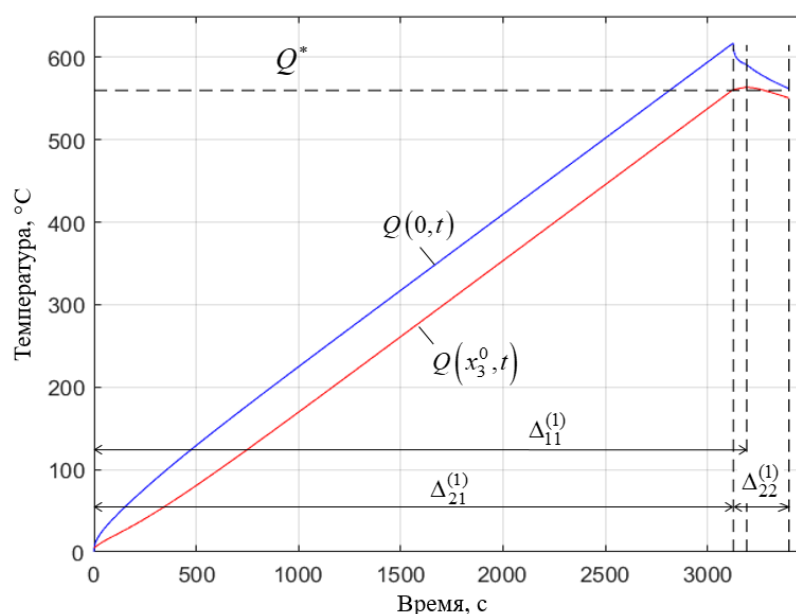


Рисунок 2.6 Изменение управляемой величины на всем протяжении оптимального по быстродействию процесса управления

Для найденного оптимального по быстродействию решения системы (2.29) рассмотрим случай, когда заданная точность $\varepsilon: \varepsilon_{2\min}^{(2,2)} < \varepsilon < \varepsilon_{2\min}^{(1,1)}$ оказывается меньше предельно достижимой величины $\varepsilon_{2\min}^{(2,2)}$. Для этого варианта оптимальное управление также имеет два интервала постоянства ($N = 2$ в (2.25),(2.26)), но теперь уже при $R = 3$ точках чебышевского альтернанса согласно (2.22) со следующей расчетной системой уравнений вместо (2.29):

$$\begin{aligned} Q(x_2^0, \Delta_{2*}^\Sigma) - Q^* &= \varepsilon; \\ Q(x_3^0, \Delta_{2*}^\Sigma) - Q^* &= -\varepsilon; \quad 0 < x_2^0 < x_3^0 < x_4^0 < x_1; \\ Q(x_4^0, \Delta_{2*}^\Sigma) - Q^* &= \varepsilon; \\ \frac{\partial Q(x_j^0, \Delta_{2*}^\Sigma)}{\partial x} &= 0, \quad j = 2, 3, 4; \end{aligned} \quad (2.37)$$

Здесь $Q(x, \Delta_{2*}^\Sigma)$ так же определяется выражением (2.35), и система уравнений (2.37) решается относительно шести неизвестных $\Delta_{21}^{(1)}, \Delta_{22}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}, x_2^0, x_3^0, x_4^0$ при теперь уже заведомо заданной величине ε , превышающей найденное при решении системы (2.29) значение $\varepsilon_{2\min}^{(2,2)}$.

На рис.2.7 показано температурное распределение в конце оптимального процесса, полученное при решении системы уравнений (2.37) при $\varepsilon = 8^\circ\text{C}$ ($\Delta_{21}^{(1)} = 3100$ сек, $\Delta_{22}^{(1)} = 179$ сек, $\Delta_{12}^{(1)} = 341$ сек, $x_2^0 = 0,03$ м, $x_3^0 = 0,1$ м, $x_4^0 = 0,17$ м) для исходных данных, указанных в таблице 2.1.

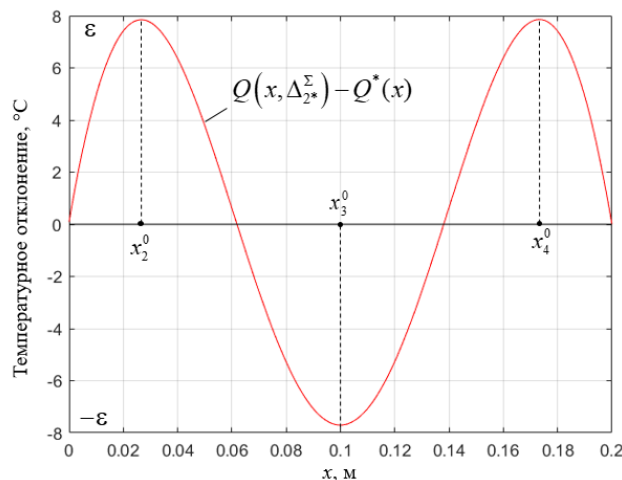


Рисунок 2.7 Кривая результирующего температурного распределения при $\varepsilon > \varepsilon_{1\min}^{(2,2)}$

2.5 Оптимальное по быстрдействию двухканальное внутреннее управление ОРП

В данном случае в качестве объекта управления рассматривается технологический процесс индукционного нагрева металлической заготовки с двумя сосредоточенными управляющими воздействиями $u_{V_1}(t)$ и $u_{V_2}(t)$ по мощности внутреннего тепловыделения на обеих поверхностях нагреваемой неограниченной пластины.

В условиях принятого пренебрежения неравномерностью распределения температуры по длине и ширине заготовки температурное поле пластины $Q(x,t)$ описывается линейным пространственно-одномерным неоднородным уравнением теплопроводности (1.12) при $u_V(x,t) = W_1(x)u_{V_1}(t) + W_2(x)u_{V_2}(t)$, согласно (1.7):

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Q(x,t)}{\partial x^2} + W_1(x)u_{V_1}(t) + W_2(x)u_{V_2}(t), \quad x \in [0, x_1], \quad t \geq 0, \quad (2.38)$$

с заданными начальными (1.13) при $Q(x,0) = 0$ и граничными условиями 3-го рода вида (1.6), соответствующими конвективному характеру теплообмена с окружающей средой по закону Ньютона на границах пластины для частного случая при $\alpha_0 = \alpha_1, \alpha_1 = \alpha_2; \beta_0 = \beta_1 = \lambda; g_0(u_0(t), t) = g_1(u_1(t), t) = Q_{cp}(t)$:

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} &= Q_{cp}(t) - \alpha_1 Q(0,t); \\ \lambda \frac{\partial Q(x_1,t)}{\partial x} &= Q_{cp}(t) - \alpha_2 Q(x_1,t), \end{aligned} \quad (2.39)$$

где $Q_{cp}(t)$ – температура окружающей среды, которая принимается равной $Q_0(x) = 0$. В (2.39) $u_{V_1}(t), u_{V_2}(t)$ рассматриваются в качестве искомым сосредоточенных управляющих воздействий по мощности внутреннего тепловыделения с ограничением вида (1.30):

$$0 \leq u_{V_1}(t) \leq u_{V_1\max}; \quad 0 \leq u_{V_2}(t) \leq u_{V_2\max}, \quad (2.40)$$

а известные функции пространственного распределения внутренних электромагнитных источников тепла $W_1(x), W_2(x)$ при индукционном нагреве пластины определяются соотношениями [43]:

$$W_1(\xi, x) = \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{2}\xi \frac{x}{x_1}\right) - \cos\left(\sqrt{2}\xi \frac{x}{x_1}\right)}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{2}\xi\right) - \sin\left(\sqrt{2}\xi\right)} \sqrt{2}\xi; \quad W_2(\xi, x) = W_1(\xi, x_1 - x), \quad (2.41)$$

где ξ – характерный параметр, определяемый соотношением:

$$\xi = \frac{x_1 \sqrt{2}}{\delta}, \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \omega \sigma}}.$$

Здесь δ – глубина проникновения тока в металл, ω – частота питающего тока, σ – электропроводность нагреваемого материала, μ – абсолютная магнитная проницаемость.

Аналогично (2.31), (2.32), температурное поле $Q(x, t)$ находится методом конечных интегральных преобразований в форме его разложения в сходящийся в среднем ряд по собственным функциям $\varphi_n(\mu_n, x)$ задачи (2.38), (2.39):

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\eta_n, x) \left[\int_0^{x_1} \int_0^t \left(W_1(\xi) \varphi(\eta_n, \xi) \frac{1}{a} u_{v_1}(\tau) + W_2(\xi) \varphi(\eta_n, \xi) \frac{1}{a} u_{v_2}(\tau) \right) \times \right. \\ \left. \times \exp\left(-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (t - \tau)\right) d\xi d\tau \right], \quad (2.42)$$

где собственные функции $\varphi_n(\mu_n, x)$, собственные числа μ_n^2 , нормирующие множители $\frac{1}{E_n}$ и числа η_n определяются следующими соотношениями [16]:

$$\varphi_n(\mu_n, x) = \frac{\lambda}{E_n} \cdot \left[\cos\left(\eta_n \frac{x}{x_1}\right) + \frac{Bi_1}{\eta_n} \sin\left(\eta_n \frac{x}{x_1}\right) \right]; \quad \operatorname{tg} \eta_n = \frac{Bi_1 + Bi_2}{\eta_n - \frac{Bi_1 \cdot Bi_2}{\eta_n}}; \quad \mu_n = \frac{\sqrt{a}}{x_1} \eta_n;$$

$$E_n^2 = \frac{\lambda^2 x_1}{2a \eta_n} \left[\left(1 + \frac{Bi_1^2}{\eta_n^2}\right) \eta_n + \left(1 - \frac{Bi_1^2}{\eta_n^2}\right) \sin \eta_n \cos \eta_n + 2 \frac{Bi_1}{\eta_n} \sin^2 \eta_n \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Здесь $Bi_i = \frac{\alpha_i x_1}{\lambda}, i = 1, 2$ – безразмерный критерий Био [43].

В данном случае задача быстрогодействия при двухинтервальных управлениях $u_{V1}(t)$ и $u_{V2}(t)$ релейной формы опять сводится к виду (2.20),(2.21), где теперь $Q(x, \Delta^\Sigma) = Q(x, t_{\text{кон}})$ описывается выражением (2.42) с подстановкой управляющих воздействий в Δ^Σ - параметризованный форме, подобно (2.33):

$$u_{V1}(t) = \begin{cases} u_{V1\max}, & 0 \leq t < \Delta_{11}^{(1)}; \\ 0, & \Delta_{11}^{(1)} < t \leq \Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)}; \end{cases} \quad u_{V2}(t) = \begin{cases} u_{V2\max}, & 0 \leq t < \Delta_{21}^{(1)}; \\ 0, & \Delta_{21}^{(1)} < t \leq \Delta_{21}^{(1)} + \Delta_{22}^{(1)}. \end{cases} \quad (2.43)$$

На всем протяжении оптимального процесса управления производится, согласно (2.43), скачкообразное (релейное) переключение управляющих воздействий с максимального значения, соответствующего нагреву заготовки с максимальной интенсивностью, когда каждый из индукторов включается на полную мощность, на полное отключение индукторов от сети. После подстановки релейных управлений вида (2.43) в (2.42) и вычисления интегралов при $t = t_{\text{кон}}$ получим параметризованное представление конечного температурного состояния в (2.20),(2.21):

$$Q(x, \Delta_1^\Sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda x_1^2}{a E_n \eta_n^2} \left(\cos\left(\eta_n \frac{x}{x_1}\right) + \frac{B i_1}{\eta_n} \sin\left(\eta_n \frac{x}{x_1}\right) \right) \times \\ \times \left[W_{1n} u_{V1\max} \begin{pmatrix} e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} \Delta_{12}^{(1)}} & -e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (\Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)})} \end{pmatrix} + W_{2n} u_{V2\max} \begin{pmatrix} e^{-\eta_n^2 \frac{a}{R^2} \Delta_{22}^{(1)}} & -e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (\Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)})} \end{pmatrix} \right], \quad (2.44)$$

$$Q(x, \Delta_2^\Sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda x_1^2}{a E_n \eta_n^2} \left(\cos\left(\eta_n \frac{x}{x_1}\right) + \frac{B i_1}{\eta_n} \sin\left(\eta_n \frac{x}{x_1}\right) \right) \times \\ \times \left[W_{1n} u_{V1\max} \begin{pmatrix} e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} \Delta_{12}^{(1)}} & -e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (\Delta_{21}^{(1)} + \Delta_{22}^{(1)})} \end{pmatrix} + W_{2n} u_{V2\max} \begin{pmatrix} e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} \Delta_{22}^{(1)}} & -e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (\Delta_{21}^{(1)} + \Delta_{22}^{(1)})} \end{pmatrix} \right]. \quad (2.45)$$

Здесь W_{1n}, W_{2n} - моды разложения функций $W_1(x), W_2(x)$ (2.41) в ряд по собственным функциям $\Phi_n(\mu_n, x)$.

В итоге задача опять сводится при $\varepsilon = \varepsilon_{p\min}^{(2,2)}, p = 1, 2$ к решению систем уравнений (2.28) и (2.29) относительно семи неизвестных

$\Delta_{11}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}, \Delta_{22}^{(1)}, \varepsilon_{1\min}^{(2,2)}, x_2^0, x_3^0, x_4^0$ в (2.28) и $\Delta_{21}^{(1)}, \Delta_{22}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}, \varepsilon_{2\min}^{(2,2)}, x_1^0, x_2^0, x_3^0$ в (2.29) теперь уже при определении $Q(x, \Delta^z)$ в форме (2.44), (2.45). Оптимальным считается то из полученных решений, при котором оказывается меньшим длительность процесса управления.

По исходным данным, представленным в таблице 2.3, были получены решения систем уравнений (2.28) и (2.29), соответственно: $\Delta_{11}^{(1)} = 1580$ сек, $\Delta_{12}^{(1)} = 264$ сек, $\Delta_{22}^{(1)} = 414$ сек, $\varepsilon_{1\min}^{(2,2)} = 10,2$ °C, $x_2^0 = 0,03$ м, $x_3^0 = 0,1$ м, $x_4^0 = 0,17$ м и $\Delta_{21}^{(1)} = 1431$ сек, $\Delta_{22}^{(1)} = 536$ сек, $\Delta_{12}^{(1)} = 408$ сек, $\varepsilon_{2\min}^{(2,2)} = 9,5$ °C, $x_1^0 = 0,03$ м, $x_2^0 = 0,1$ м, $x_3^0 = 0,17$ м. Соответствующие кривые температурного отклонения от заданной величины представлены на рис.2.8.

Решение систем уравнений производилось с учетом первых 30 членов бесконечных рядов в выражениях (2.44), (2.45).

Таблица 2.3 – Исходные данные для расчета

Обозначение	Параметр	Значение	Единица измерения
-	Материал	титан	-
x_1	Толщина пластины	0.2	м
Q_0	Начальная температура	0	°C
Q^*	Требуемая конечная температура	960	°C
λ	Коэффициент теплопроводности	14	Вт/(м · °C)
a	Коэффициент температуропроводности	$4,34 \cdot 10^{-6}$	м ² / с
Bi_1	Критерий Био	0,2143	-
Bi_2	Критерий Био	0,1429	-
ξ	Параметр индукционного нагрева	4	-
$u_{V1\max}$	Максимальная величина поверхностной мощности нагрева по первому каналу управления	106	кВт/м ²
$u_{V2\max}$	Максимальная величина поверхностной мощности нагрева по второму каналу управления	180	кВт/м ²

Как следует из приведенных данных, решение системы (2.28) является оптимальным по быстродействию. Именно для этого варианта решения на рис.2.9 а) приведен график изменения управляемой величины и управляющих

воздействий на всем протяжении оптимального по быстродействию процесса управления. Как показывает сравнительный анализ (пунктирные линии на рис.2.8 и кривые на рис.2.9 а и рис.2.9 б) длительность оптимального процесса при двухканальном управлении по сравнению с одноканальным $u_{V1}(t)$ уменьшается на 65 %, а точность нагрева увеличивается на 50 %.

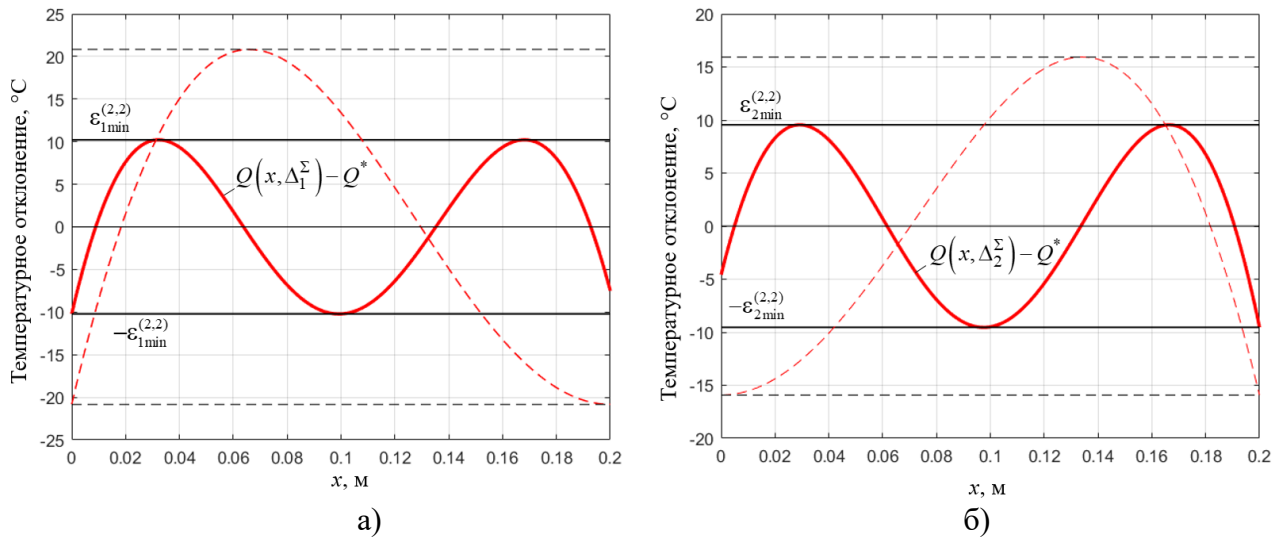


Рисунок 2.8 Кривые температурного распределения при $\varepsilon = \varepsilon_{p \min}^{(2,2)}$, полученные при поиске двух интервалов: а) – для управления $u_{V1}(t)$, б) – управления $u_{V2}(t)$; пунктирные кривые – одноканальное управление

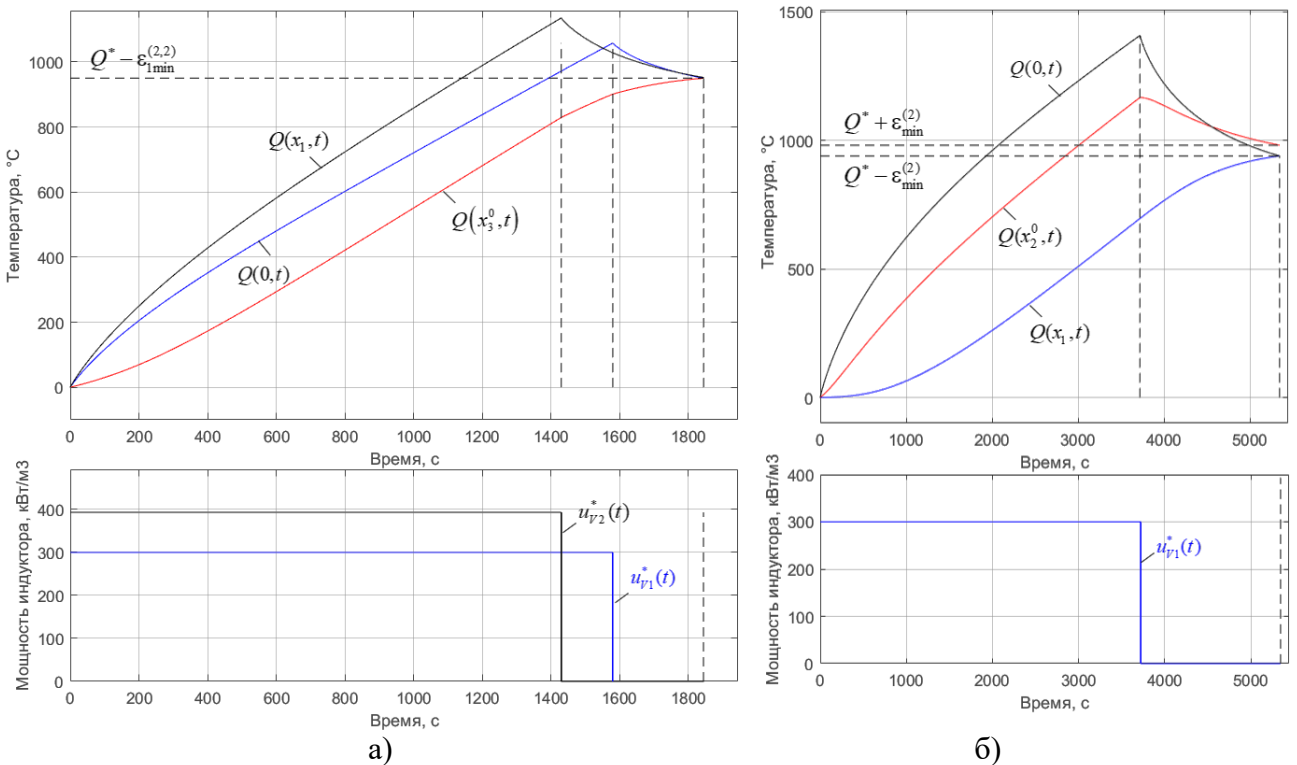


Рисунок 2.9 Изменение управляемой величины и управляющих воздействий на всем протяжении оптимального по быстродействию процесса управления при: а) – двухканальном управлении; б) – одноканальном управлении

2.6 Задача оптимального быстродействия с двухканальным комбинированным воздействием по управлению и возмущению

Подобно разделу 2.4 рассмотрим задачу быстродействия для ОРП, описываемого уравнением нестационарной теплопроводности (1.12) при $u_V(x,t) = 0$ и $Q_0(x) = 0$ в (1.13) с единственным (в отличие от 2.30) граничным управлением $u_0(t)$, стесняемым ограничением (1.30), и тепловыми потерями на границе $x = x_1$ по закону конвективного теплообмена с коэффициентом теплопередачи α в окружающую среду с заданной температурой $Q_{cp}(t)$ (рис.2.10), формирующими в совокупности комбинированное двухканальное воздействие по управлению и возмущению вместо двухканального управления в (2.30). При этом граничные условия принимают вместо (2.30) следующий вид:

$$-\lambda \frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} = u_0(t); \quad \alpha Q(x_1,t) + \lambda \frac{\partial Q(x_1,t)}{\partial x} = \alpha Q_{cp}(t). \quad (2.46)$$

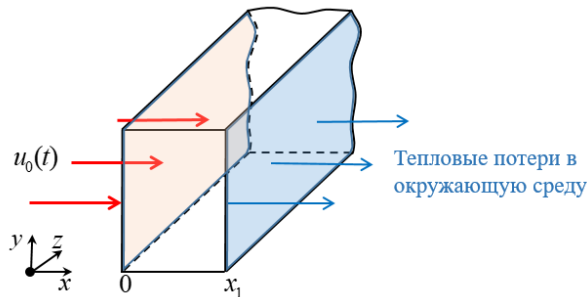


Рисунок 2.10 Иллюстрация граничных условий

Выражение для $Q(x,t)$ в форме (1.8) находится при комбинированном воздействии $u_0(t)$ и $Q_{cp}(t)$ по алгоритму метода конечных интегральных преобразований [16, 44, 45] в виде сходящегося в среднем ряда по ортонормированной системе собственных функций $\varphi_n(\mu_n, x) = \cos(\eta_n, x)$ [16, 67]:

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{\lambda \cdot x_1} \cdot \frac{2\eta_n}{\eta_n + \sin \eta_n \cos \eta_n} \cos\left(\eta_n \frac{x}{x_1}\right) \times \int_0^t [u_0(\tau) + \alpha Q_{cp}(\tau)] \exp\left(-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (t - \tau)\right) d\tau, \quad (2.47)$$

где собственные числа μ_n^2 , нормирующие собственные функции множители $1/E_n$ и числа η_n определяются соотношениями:

$$\eta_n \cdot \operatorname{tg} \eta_n - Bi = 0; Bi = \frac{\alpha \cdot x_1}{\lambda}; \mu_n = \frac{\sqrt{a}}{x_1} \eta_n; E_n = \sqrt{\frac{a}{x_1} \cdot \frac{2\eta_n}{\eta_n + \sin \eta_n \cos \eta_n}}, n = 1, 2, \dots$$

Принцип максимума Понтрягина по-прежнему устанавливает при любом заданном поведении $Q_{\text{cp}}(t)$ релейный характер двухинтервального оптимального по быстродействию управления $u_0(t)$, параметризуемого подобно (2.33):

$$u_0(t) = \begin{cases} u_{0\max}, & 0 \leq t < \Delta_1; \\ u_{0\min}, & \Delta_1 < t \leq \Delta_1 + \Delta_2, \end{cases} \quad (2.48)$$

где Δ_1, Δ_2 - длительности интервалов постоянства $u_0(t)$. После подстановки $u_0(t)$ в форму (2.48) в (2.47), получим следующее параметризованное представление температурного состояния $Q(x, \Delta_*^{(2)})$ в конце оптимального процесса, где $\Delta_*^{(2)} = (\Delta_1^*, \Delta_2^*)$ - вектор оптимальных значений Δ_1, Δ_2 :

$$Q(x, \Delta_*^{(2)}) = \frac{x_1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\eta_n^2} \cdot \frac{2\eta_n}{\eta_n + \sin \eta_n \cos \eta_n} \cdot \cos\left(\eta_n \frac{x}{x_1}\right) \times \left\{ \left[u_{0\max} \left(\exp\left(-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} \Delta_2^*\right) - \exp\left(-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (\Delta_1^* + \Delta_2^*)\right) \right) + u_{0\min} \left(1 - \exp\left(-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} \Delta_2^*\right) \right) \right] + \int_0^{\Delta_1^* + \Delta_2^*} \alpha Q_{\text{cp}}(\tau) \exp\left(-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (t - \tau)\right) d\tau \right\}. \quad (2.49)$$

В характерных для приложений условиях достаточно малых отклонений $Q_{\text{cp}}(t)$ от ее среднего значения, равного начальной температуре $Q_0(t) = \text{const}$ на промежутке $[0, t_{\text{кон}}] \ni t$, рассматриваемая задача быстродействия с управлением на одной поверхности пластины при учете тепловых потерь на другой поверхности сводится к решению системы уравнений (2.27) для одноканального управления с подстановкой $Q(x, \Delta_*^{(2)})$ в виде (2.49) [28] с формой кривой 2 на рис.2.2.

В более общем случае функция $Q_{cp}(t)$ может повлиять на конфигурацию пространственного распределения $Q(x, \Delta_*^{(2)})$, и требуется дополнительный анализ для ее идентификации с соответствующими изменениями расчетной системы уравнений.

Система (2.27) четырех уравнений решается относительно четырех неизвестных Δ_1^* , Δ_2^* , $\varepsilon_{\min}^{(2)}$, x_2^0 стандартными численными методами, реализованными в программной среде MATLAB [62-65]. Результаты проведенных расчетов при $Q_0 = Q_{cp}(t) = \text{const} = 0$ для исходных данных, указанных в таблице 2.4: $\Delta_1^* = 7966$ с, $\Delta_2^* = 553$ с, $\varepsilon_{\min}^{(2)} = 12,9$ °С, $x_2^0 = 0,09$ м. Соответствующие кривые температурного отклонения от заданной величины и изменения управляемой величины во времени представлены на рис.2.11 и рис.2.12.

Решение систем уравнений производилось с учетом первых 100 членов бесконечного ряда в (2.49).

Таблица 2.4 – Исходные данные

Обозначение	Параметр	Значение	Единица измерения
-	Материал	сталь	-
x_1	Толщина пластины	0.2	м
Q_0	Начальная температура	0	°С
Q^*	Требуемая конечная температура	560	°С
λ	Коэффициент теплопроводности	34	Вт/м ² · °С
a	Коэффициент температуропроводности	$15 \cdot 10^{-6}$	м ² / с
α	Коэффициент теплоотдачи	26	Вт/м ² · °С
Q_{II}	Максимальная температура печи	1600	°С
$u_{0\max}$	Максимальная величина управления $u_0(t)$	$\alpha \cdot Q_{II}$	кВт/м ²
$u_{0\min}$	Минимальная величина управления $u_0(t)$	$-u_{0\max} / 2$	кВт/м ²

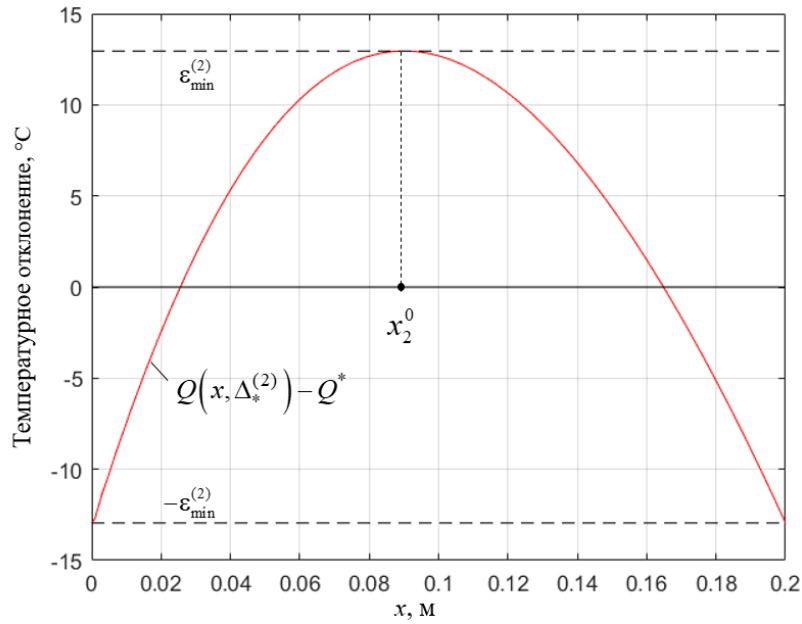


Рисунок 2.11 Кривая результирующего температурного распределения при $\varepsilon = \varepsilon_{\min}^{(2)}$, полученная при решении системы (2.27)

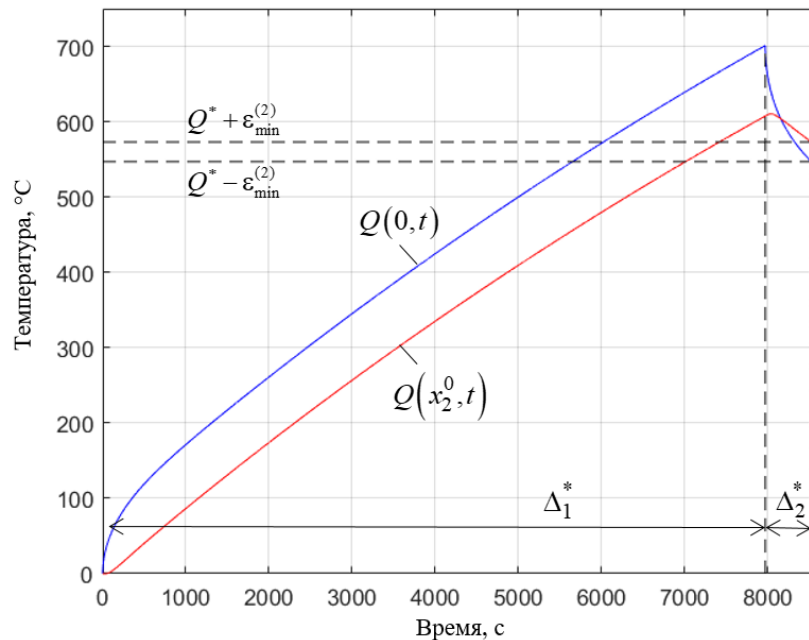


Рисунок 2.12 Изменение управляемой величины на всем протяжении оптимального по быстродействию процесса управления

В случае заданной точности $\varepsilon : \varepsilon_{\min}^{(2)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(1)}$, меньшей предельно достижимой величины $\varepsilon_{\min}^{(2)}$, оптимальное управление опять имеет два интервала постоянства для $N = 2$ в (2.25), (2.26), но теперь уже при двух точках чебышевского альтернанса ($R = 2$): $x_1^0 = 0$; $0 < x_2^0 < x_1$ с расчетной системой уравнений.

$$\begin{aligned}
 Q(0, \Delta_1^*, \Delta_2^*) - Q^* &= -\varepsilon; \\
 Q(x_2^0, \Delta_1^*, \Delta_2^*) - Q^* &= \varepsilon; \\
 \frac{\partial Q(x_2^0, \Delta_1^*, \Delta_2^*)}{\partial x} &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.50}$$

вместо (2.27) при соблюдении прежних допущений в поведении $Q_{cp}(t)$ [36]. Здесь $Q(x, \Delta_*^{(2)})$ по-прежнему определяется в виде (2.49), и система уравнений (2.50) решается относительно трех неизвестных $\Delta_1^*, \Delta_2^*, x_2^0$ при теперь уже заведомо заданной величине $\varepsilon > \varepsilon_{\min}^{(2)}$, где $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ считается известной путем предварительного решения системы уравнений (2.27).

На рис.2.13 показано температурное распределение в конце оптимального процесса, полученное при решении системы уравнений (2.50) при $\varepsilon = 15^\circ\text{C}$ ($\Delta_1^* = 8243$ сек, $\Delta_2^* = 732$ сек, $x_2^0 = 0,1$ м) для исходных данных, указанных в таблице 2.4.

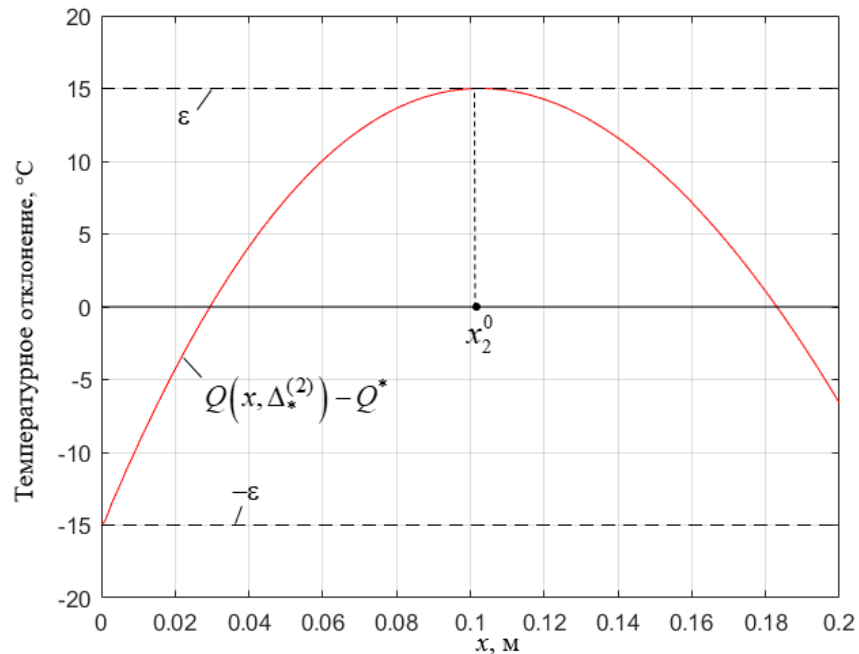


Рисунок 2.13 Кривая результирующего температурного распределения при $\varepsilon > \varepsilon_{\min}^{(2)}$

2.7 Оптимальное по быстродействию двухканальное управление нелинейным ОРП

Полученные в предыдущих разделах работы результаты распространяются здесь на задачи оптимального по быстродействию двухканального граничного управления нелинейной моделью ОРП, описываемого вместе с (1.12) нелинейным однородным уравнением теплопроводности

$$c(Q)\gamma(Q)\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(Q) \operatorname{grad} Q(x,t)), \quad x \in [0, x_1], t > 0, \quad (2.51)$$

учитывающим температурные зависимости теплофизических параметров, с подобными (1.13),(2.30) краевыми условиями:

$$\begin{aligned} Q(x, 0) &= Q_0(x) = \operatorname{const}; \\ -\lambda(Q)\frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} &= u_0(t), \quad t > 0; \\ \lambda(Q)\frac{\partial Q(x_1,t)}{\partial x} &= u_1(t), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Граничные управляющие воздействия $u_0(t), u_1(t)$ по-прежнему стесняются ограничениями (1.30).

Применение аппарата принципа максимума Понтрягина для определения структуры оптимального по быстродействию управления объектом (2.51),(2.52) становится затруднительным ввиду аналитически неразрешимой нелинейной системы уравнений для сопряженных переменных. В [43, 68] показано без применения аналитических условий оптимальности, что для широкого круга нелинейных моделей ОРП сохраняется аналогичная линейным моделям релейная структура управляющих воздействий, и задача быстродействия опять сводится к виду (2.20),(2.21) при двухинтервальном характере релейных управлений $u_0(t)$ и $u_1(t)$ вида (2.33).

При сохранении аналогичной линейным моделям ОРП формы кривых пространственного распределения температурного поля $Q(x, \Delta_*^{(2)})$ задачи (2.20),(2.21) опять приводятся к решению систем уравнений (2.28),(2.29)

относительно всех неизвестных параметров оптимального процесса. Последующий анализ получаемых таким образом результатов подтверждает правомерность предположений о сохранении подобной линейным моделям конфигурации результирующего температурного поля.

Основным отличием от линейной задачи быстрогодействия является необходимость использования в отсутствие аналитических выражений численных решений исходных нелинейных уравнений ОРП и реализации итерационной процедуры поиска корней систем уравнений (2.28),(2.29), что в свою очередь требует многократного обращения к цифровой модели объектов и приводит к увеличению объема вычислений.

В этих целях в данной работе была разработана численная модель процесса нестационарной теплопроводности, созданная в специализированном конечно-элементном программном пакете COMSOL Multiphysics [70-72], разработанном компанией COMSOL. Данное программное обеспечение предоставляет возможность моделировать широкий круг физических процессов, которые описываются дифференциальными уравнениями в частных производных в интеграции с математическим пакетом прикладных программ Matlab и Simulink [70]. Поиск решения систем уравнений (2.28),(2.29) на этой модели сводятся к итерационной процедуре определения искомым параметров оптимального процесса с последующим выбором из этих решений с наименьшей продолжительностью нагрева.

Исходные данные, использованные для построения цифровой модели процесса нагрева стальной пластины под действием двух тепловых потоков, представлены в таблице 2.5.

Для рассматриваемой модели и указанных в таблице 2.5 исходных номинальных данных в результате расчета оптимального программного управления получены следующие значения параметров, соответствующие системе (2.28): $\Delta_{11}^{(1)} = 1260$ сек., $\Delta_{12}^{(1)} = 390$ сек., $\Delta_{22}^{(1)} = 140$ сек., $\varepsilon_{1\min}^{(2,2)} = 41,3$ °C, $x_2^0 = 0,04$ м, $x_3^0 = 0,125$ м, $x_4^0 = 0,19$ м.

Таблица 2.5 – Исходные данные для цифровой модели

Обозначение	Параметр	Значение	Единица измерения
-	Материал	сталь	-
x_1	Толщина пластины	0.2	м
Q_0	Начальная температура	273,15	К
Q^*	Требуемая конечная температура	1065,15	К
$c(Q)$	Удельная теплоемкость	$277.6 + 0.97 \cdot Q - 0.0015 \cdot Q^2 + 1.2 \cdot 10^{-6} \cdot Q^3$	Дж / (м ² · К)
$\gamma(Q)$	Удельная плотность	$7910.9 - 0.1 \cdot Q - 3.5 \cdot 10^{-4} \cdot Q^2 + 1.47 \cdot 10^{-7} \cdot Q^3$	кг/м ³
$\lambda(Q)$	Удельная теплопроводность	$106.6 - 0.17 \cdot Q + 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot Q^2 - 2.49 \cdot 10^{-7} \cdot Q^3 + 9.7 \cdot 10^{-11} \cdot Q^4$	Вт/м ² · К
$u_{0\max}$	Максимальная величина $u_0(t)$	416	кВт/м ²
$u_{0\min}$	Минимальная величина $u_0(t)$	$-u_{1\max} / 3$	кВт/м ²
$u_{1\max}$	Максимальная величина $u_1(t)$	208	кВт/м ²
$u_{1\min}$	Минимальная величина $u_1(t)$	$-u_{1\max} / 10$	кВт/м ²

Вид конечного температурного распределения по толщине нагреваемой заготовки показан на рис.2.14, а поведение температурного поля в процессе нагрева иллюстрируется на рис.2.15.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что предложенная методика решения двухканального оптимального быстродействию управления распространяется также на сложные нелинейные модели с учетом особенностей реальных объектов. В частности, возможности редукции задачи управления нелинейным ОРП к системам уравнений (2.28),(2.29) с последующим их решением на цифровой модели объекта распространяются и на задачи с внутренним управлением по мощности электромагнитных источников тепла при индукционном нагреве [43].

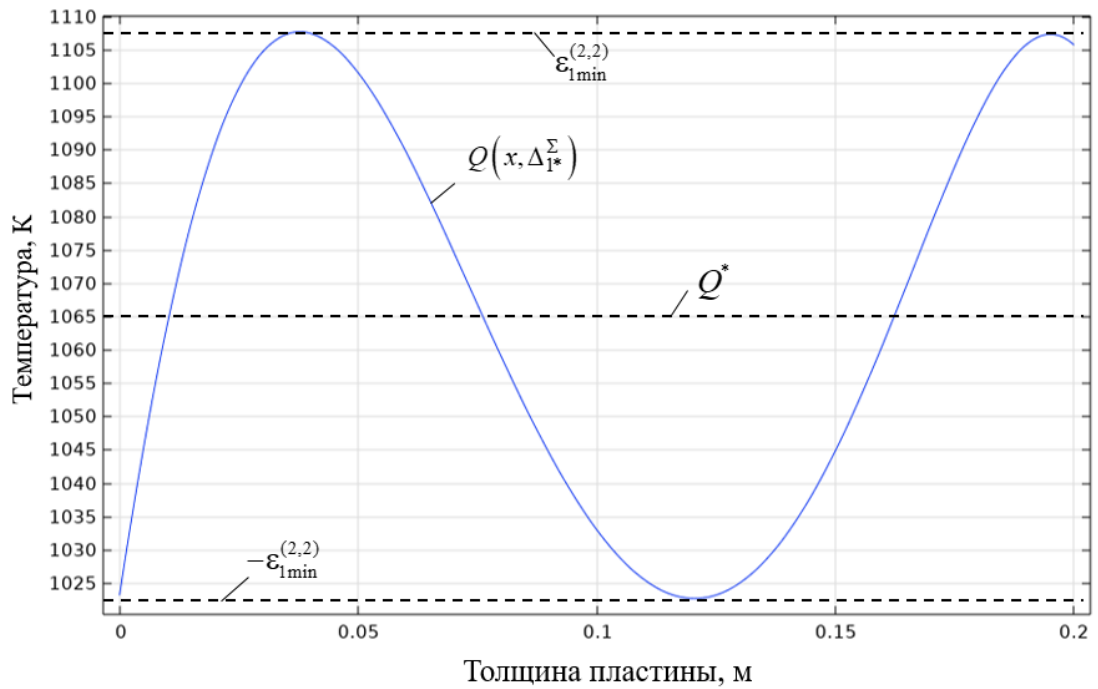


Рисунок 2.14 Конечное температурное распределение по толщине пластины

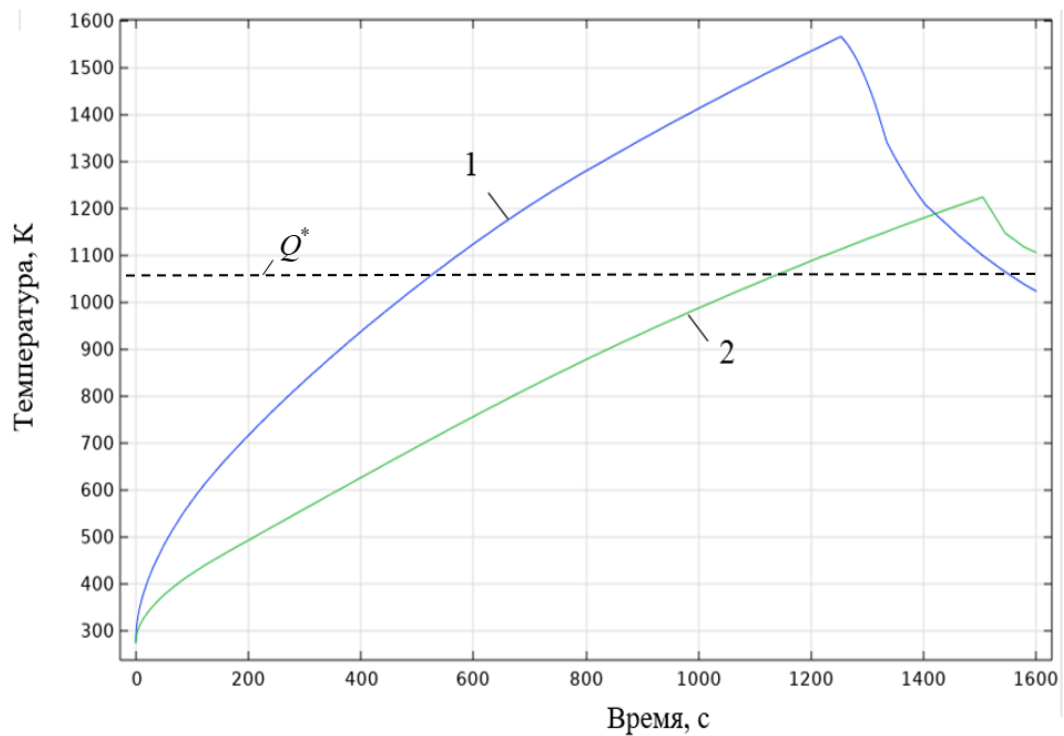


Рисунок 2.15 Температурное поле в оптимальном процессе:
кривая 1 – для точки $x=0$, кривая 2 – для точки $x=x_1$

2.8 Выводы по второй главе

1. Приведена строгая постановка задачи оптимального по быстродействию двухканального управления процессом нестационарной теплопроводности в условиях равномерной оценки целевых множеств с

учетом дополнительных ограничений на одинаковую продолжительность управляемого процесса для каждого из управляющих воздействий, сужающих возможности их свободного варьирования независимо друг от друга. В этих условиях задача быстрогодействия сведена к двум параметрическим задачам полубесконечной оптимизации для двух возможных вариантов искомого набора параметров векторного управления с последующим отбором лучшего из них по достигаемой величине критерия оптимальности.

2. Предложена технология решения сформулированных задач полубесконечной оптимизации альтернативным методом, усложняемая по сравнению с одноканальным управлением увеличенной размерностью вектора искомых параметров, зависимостью от выбираемого их набора минимаксных отклонений от требуемого конечного состояния ОРП, неоднозначными правилами выбора числа интервалов постоянства управляющих воздействий и заранее неизвестным изменением конфигурации конечного пространственного распределения управляемой величины.
3. Для типичного частного случая двухинтервального характера обоих управляющих воздействий в условиях равномерного пространственного распределения начального и желаемого конечного состояния управляемой величины на основании известных свойств результирующих температурных полей оптимальных по быстроддействию процессов нестационарной теплопроводности с одноканальным сосредоточенным управлением определена конфигурация оптимального конечного пространственного распределения температуры при двухканальном управлении и получены расчетные системы уравнений альтернативного метода, решение которых позволяет определить все искомые параметры оптимального процесса.
4. Решена задача оптимального по быстроддействию управления процессом нагрева неограниченной пластины с двухканальным граничным

управляющим воздействием по тепловому потоку на обеих ее поверхностях.

5. Решена задача оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева с двухканальным внутренним управляющим воздействием по мощности внутренних электромагнитных источников тепла.
6. Решена задача оптимального по быстродействию управления нагревом неограниченной пластины с двухканальным комбинированным воздействием по управляющему воздействию и возмущению при граничном управлении по тепловому потоку на одной поверхности пластины с тепловыми потерями на другой границе по закону конвективного теплообмена в окружающую среду с заданным законом изменения во времени ее температуры.
7. Полученные результаты распространены на задачу оптимального по быстродействию двухканального граничного управления нелинейным процессом нестационарной теплопроводности с использованием его цифровой модели, созданной в специализированном конечно-элементном программном пакете COMSOL Multiphysics, на базе которой реализована итерационная процедура поиска решений систем уравнений альтернансного метода.

ГЛАВА 3. ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ДВУХКАНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОРП С УЧЕТОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЯЕМЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И УПРАВЛЯЮЩИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

В данной главе приводятся решения задач векторного управления процессами нестационарной теплопроводности с учетом фазовых ограничений на максимальную температуру в оптимальном по быстродействию процессе и ограничений на допустимую скорость изменения управляющих воздействий. Материал главы излагается в соответствии с публикациями соискателя [78, 89].

3.1 Оптимальное по быстродействию двухканальное управление ОРП с учетом фазовых ограничений на максимальное значение управляемой величины

Рассмотрим в качестве объекта управления с распределенными параметрами процесс индукционного нагрева с двумя сосредоточенными управляющими воздействиями $u_{V1}(t)$ и $u_{V2}(t)$ по стесняемой ограничениями (2.40) мощности внутреннего тепловыделения на обеих поверхностях нагреваемой пластины, который описывается краевой задачей (2.38)-(2.40) при $Q(x,0) = 0$, $Q_{cp}(t) = 0$. Наряду с (2.40) будем учитывать дополнительное фазовое ограничение на максимально допустимую величину температуры в процессе нагрева, согласно условию

$$Q_{\max}(t) = \max_{x \in [0, x_1]} Q(x, t) \leq Q_{\text{доп}}, \quad t \in [0, t_{\text{кон}}], \quad (3.1)$$

с заданным, согласно типовым технологическим требованиям, пределом $Q_{\text{доп}}$, предотвращающим оплавление поверхностных слоев нагреваемой заготовки и недопустимые изменения ее структурных свойств [1, 3, 18, 28, 46, 68, 69].

Задача оптимального по быстродействию управления исследуемым объектом сводится теперь к определению оптимальных программных

управлений $u_{V_1}^*(t)$ и $u_{V_2}^*(t)$ и длительности $t_{\text{кон}}^*$ процесса нагрева, обеспечивающих заданную в равномерной метрике точность приближения к требуемому конечному состоянию $Q^*(x)$, согласно условию (2.2) за минимальное время $t_{\text{кон}}^*$ в условиях ограничений (2.40) и (3.1).

Если в результате предварительного решения задачи быстродействия с учетом только ограничения (2.40) на управляющие воздействия (раздел 2.5) поведение температурного поля в оптимальном процессе заведомо удовлетворяет условию (3.1), то тогда необходимость в подобной постановки не возникает в связи с «автоматическим» выполнением соотношения (3.1), и весь последующий анализ относится к часто встречающейся на практике ситуации [43], при которой неравенство (3.1) нарушается, если его не рассматривать в качестве дополнительного ограничения, наряду с (2.40), в исходной формулировке задачи.

Необходимость учета фазового ограничения (3.1) существенно усложняет решение задачи быстродействия.

Стандартная процедура принципа максимума Понтрягина, используемая применительно к модальному представлению объекта вида (1.15), приводит к выводу, что искомые управления $u_{V_1}^*(t)$ и $u_{V_2}^*(t)$ в каждый момент времени либо достигают одного из своих предельно допустимых значений в (2.40), либо определяются из условий поддержания максимальной температуры на уровне $Q_{\text{доп}}$ в (3.1) [43]. В итоге, подобно разделу 2.3, в характерном для технических приложений случае с простейшей реализацией оптимальных режимов индукционного нагрева можно ограничиться выбором двухинтервальных управляющих воздействий, на первом из которых производится нагрев с максимально допустимой по условиям (2.40), (3.1) интенсивностью, а на втором производится выравнивание температур при $u_{V_i}^*(t) = 0, i = 1, 2$ [46, 49]. Здесь, в отличие от управляющих воздействий вида (2.43), первый интервал состоит из двух участков, на первом из которых $u_{V_i}^*(t) = u_{V_{i\text{max}}}, i = 1, 2, t \in [0, t_Q]$ в условиях

$Q_{\max} < Q_{\text{доп}}$, $t \in [0, t_Q]$, а на втором, начиная с момента t_Q достижения равенства $Q_{\max}(t_Q) = Q_{\text{доп}}$, организуется с помощью управления $u_Q(t) \in [0, u_{Vi\max}]$ «движение по ограничению» (3.1) со стабилизацией $Q_{\max}(t)$ на уровне $Q_{\text{доп}}$: $Q_{\max}(t) = Q_{\text{доп}}$, $t \in [t_Q, \Delta_1]$, вплоть до момента Δ_1 перехода ко второму интервалу [28, 43, 74] (рис.3.1):

$$u_{Vi}^*(t) = \begin{cases} u_{Vi\max}, & t \in (0, t_{Qi}); \\ u_{Qi}(t), & t \in [t_{Qi}, \Delta_{i1}^{(1)}]; \\ u_{Vi\min} = 0, & t \in (\Delta_{i1}^{(1)}, \Delta_{i1}^{(1)} + \Delta_{i2}^{(1)}); \end{cases} \quad i \in \{1, 2\}. \quad (3.2)$$

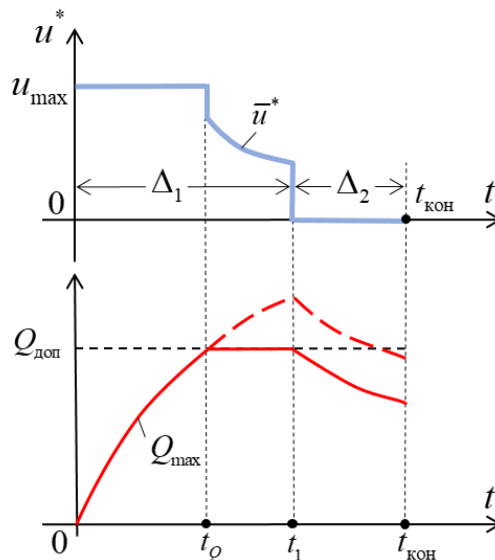


Рисунок 3.1 Форма кривой $Q_{\max}(t)$ в оптимальном по быстродействию процессе нагрева с учетом фазовых ограничений

Здесь в (3.2) моменты t_{Qi} выхода на ограничение (3.1) определяются из условия достижения равенства:

$$Q_{\max}(t_{Qi}) = \max_{x \in [0, x_1]} Q(x, t_{Qi}) = Q_{\text{доп}}, \quad (3.3)$$

а управления $u_{Qi}(t)$ находятся в форме решения относительно u_{Qi} интегрального уравнения [28, 43]:

$$\max_{x \in [0, x_1]} Q(x, u_{Qi}(t)) = Q_{\text{доп}}, \quad t \in [t_{Qi}, \Delta_{i1}^{(1)}], \quad (3.4)$$

где $Q(x, u_{Qi}(t))$ определяется на интервале $t \in [t_{Qi}, \Delta_{i1}^{(1)}]$ при управлении $u_{Qi}(t)$ интегральным соотношением вида (2.42) [43].

При заведомо известных t_{Q_i} и $u_{Q_i}(t)$ искомые управляющие воздействия $u_{V_i}^*(t)$ опять оказываются заданными в параметризованном виде с точностью до длительностей $\Delta_{i1}^{(1)}, \Delta_{i2}^{(1)}$ интервалов их изменения, подобно задачам без учета фазовых ограничений.

Заметим, что оптимальным по быстродействию, как правило, оказывается режим нагрева с наличием участка движения по ограничению (3.1) в (3.2) только для одного из двух каналов управления, и требуется в процессе решения рассматриваемой задачи произвести отбор одного из двух вариантов по наименьшей длительности оптимального процесса. Таким образом, для каждого из этих вариантов задача сводится опять к виду (2.20), (2.21).

Как показывают полученные далее результаты, форма кривых результирующего распределение температурного поля $Q(x, \Delta_{i*}^{\Sigma})$ не изменяется по сравнению с рис.2.3 при учете ограничения (3.1). На этом основании осуществляется последующая редукция к системам уравнений (2.28), (2.29) с той лишь принципиальной разницей по сравнению с задачей без учета условия (3.1), что под $\Delta_{i1}^{(1)}$ в (2.20), (2.21) теперь понимается суммарная длительность участков нагрева с максимальной по условиям (2.39), (3.1) интенсивностью, согласно (3.2), и вследствие этого выражения для $Q(x, \Delta_{i*}^{\Sigma})$ в (2.28), (2.29) отличаются от приведенных в (2.44), (2.45) за счет усложнения формы управляющих воздействий в (3.2).

Далее рассмотрим вариант с учетом участка движения по ограничению только для управления $u_{V_2}^*(t)$, оставляя $u_{V_1}^*(t)$ по-прежнему в релейной форме (2.43). Именно этот вариант оказывается оптимальным по быстродействию, как показывают последующие расчеты. Для определения конкретных выражений для результирующих температурных распределений $Q(x, \Delta_{i*}^{\Sigma})$ необходимо сначала вычислить t_{Q_2} и найти $u_{Q_2}(t)$ в (3.2).

Предварительное решение задачи быстрогодействия с учетом только одного ограничения (2.40) на управляющие воздействия непосредственно определяет момент t_Q выхода температурного максимума на предельно допустимый уровень $Q_{\text{доп}}$ по его поведению в оптимальном процессе.

Как показано в [28, 43, 74, 75], управляющее воздействие $u_Q(t)$ на участке движения по ограничению в задаче одноканального управления при граничных условиях третьего рода с заданным значением критерия Bi тепловых потерь на одной из поверхностей пластины и тепловой изоляции другой поверхности в первом приближении определяется простым экспоненциальным законом изменения во времени следующего вида:

$$u_Q(t) = a_Q + b_Q e^{-\beta_Q(t-t_Q)}, \quad (3.5)$$

где

$$a_Q = \frac{L_1 \eta_2^2 + L_2 \eta_1^2}{K_1 \eta_2^2 + K_2 \eta_1^2}; \quad b_Q = \frac{(\eta_2^2 - \eta_1^2)(K_1 L_2 - K_2 L_1)}{(K_1 + K_2)(K_1 \eta_2^2 + K_2 \eta_1^2)}; \quad \beta_Q = \frac{K_1 \eta_2^2 + K_2 \eta_1^2}{K_1 + K_2};$$

$$L_n = \theta_n A_n \eta_n^2 - \frac{u_{V1\max}}{u_{V2\max}}; \quad \theta_n = \int_0^{x_1} Q \left(\frac{x}{x_1} t_Q \right) \cos \left(\frac{x}{x_1} \eta_n \right) dx; \quad (3.6)$$

$$A_n = \frac{2\eta_n^2 \cos(\eta_n x_1)}{(\eta_n^2 + Bi^2 + Bi) \sin^2(\eta_n)}; \quad K_n = A_n \cdot W_n, \quad n = 1, 2.$$

Как показывают последующие расчеты, алгоритм (3.5),(3.6) с удовлетворительной точностью обеспечивает выполнение равенства (3.4) в рассматриваемой краевой задаче (2.38)-(2.41) с двухканальным управлением.

Именно в выражении (3.6) для коэффициента L_n заключена особенность корректировки оптимального режима нагрева при двухканальном управлении по сравнению с выражением, представленным в [43], за счет участка движения по ограничению только в программном управлении $u_{V2}^*(t)$.

Подставляя $u_{V1}^*(t)$ и $u_{V2}^*(t)$, соответственно в виде (2.43),(3.2) в выражение (2.42) для результирующего температурного поля при $t = t_{\text{кон}}$, получим теперь в

расчетных системах уравнений (2.28),(2.29) следующие выражения для конечного температурного состояния вместо (2.44),(2.45) при управлении $u_{Q2}(t)$ вида (3.5),(3.6):

$$\begin{aligned}
 Q(x, \Delta_1^\Sigma) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda x_1^2}{a E_n \eta_n^2} \left(\cos \left(\eta_n \frac{x}{x_1} \right) + \frac{Bi}{\eta_n} \sin \left(\eta_n \frac{x}{x_1} \right) \right) \times \\
 & \times \left[W_{1n} u_{V1\max} \left(e^{-\eta_n^2 \Delta_{12}^{(1)}} - e^{-\eta_n^2 (\Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)})} \right) + W_{2n} \left(u_{V2\max} \left(-1 + e^{\eta_n^2 t_{Q2}} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + a_Q \left(e^{\eta_n^2 (\Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)} - \Delta_{22}^{(1)})} - e^{\eta_n^2 t_{Q2}} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{b_Q \eta_n^2}{\eta_n^2 - \beta_Q} \left(e^{\eta_n^2 (\Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)} - \Delta_{22}^{(1)}) - \beta_Q (\Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)} - \Delta_{22}^{(1)} - t_Q)} - e^{\eta_n^2 t_Q} \right) \right) \right] e^{-\eta_n^2 (\Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)})}. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q(x, \Delta_2^\Sigma) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda x_1^2}{a E_n \eta_n^2} \left(\cos \left(\eta_n \frac{x}{x_1} \right) + \frac{Bi}{\eta_n} \sin \left(\eta_n \frac{x}{x_1} \right) \right) \times \\
 & \times \left[W_{1n} u_{V1\max} \left(e^{-\eta_n^2 \Delta_{22}^{(1)}} - e^{-\eta_n^2 (\Delta_{21}^{(1)} + \Delta_{22}^{(1)})} \right) + W_{2n} \left(u_{V2\max} \left(-1 + e^{\eta_n^2 t_{Q2}} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + a_Q \left(e^{\eta_n^2 \Delta_{21}^{(1)}} - e^{\eta_n^2 t_{Q2}} \right) + \frac{b_Q \eta_n^2}{\eta_n^2 - \beta_Q} \left(e^{\eta_n^2 \Delta_{21}^{(1)} - \beta_Q (\Delta_{21}^{(1)} - t_Q)} - e^{\eta_n^2 t_Q} \right) \right) \right] e^{-\eta_n^2 (\Delta_{21}^{(1)} + \Delta_{22}^{(1)})}. \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

Теперь рассматриваемая задача быстродействия сводится к решению систем уравнений (2.39),(2.40) относительно всех искомым параметров оптимального процесса с подстановкой $Q(x, \Delta_*^\Sigma)$ в форме (3.7),(3.8).

При исходных данных, приведенных в таблице 2.3, получены следующие результаты для оптимального по быстродействию процесса индукционного нагрева с ограничением на максимальную температуру при $Q_{\text{доп}} = 1400 \text{ } ^\circ\text{C}$, которому отвечает решение системы (2.29): $\Delta_{21}^{(1)} = 1275 \text{ сек}$, $\Delta_{22}^{(1)} = 621 \text{ сек}$, $\Delta_{12}^{(1)} = 336 \text{ сек}$, $\varepsilon_{\min}^{(2)} = 13,76 \text{ } ^\circ\text{C}$. Температурное распределение в конце оптимального процесса представлено на рис.3.2.

Поведение управляющих воздействий и температурного поля на протяжении оптимального процесса показано на рис.3.3, где наглядно виден участок, на котором происходит скачкообразное уменьшение мощности

индуктора с максимального значения $u_{V2\max}$ с целью удержания максимальной температуры на уровне $Q_{\text{доп}}$, начиная с момента t_{Q2} , когда она впервые достигает допустимого предела при $Q_{\text{max}} = Q_{\text{доп}}$. Здесь, подобно задаче одноканального управления [75], можно считать с малой погрешностью, что максимальная температура достигается на границе $x = x_1$.

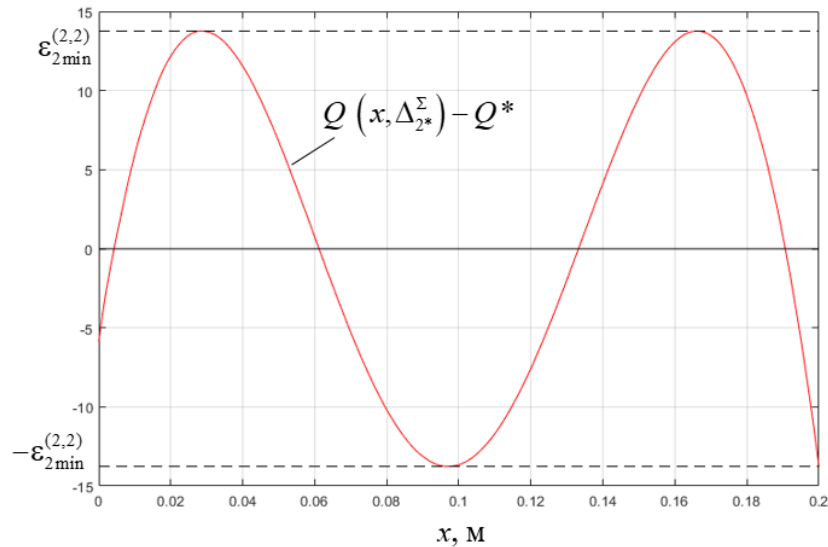


Рисунок 3.2 Кривая результирующего температурного распределения при $\varepsilon = \varepsilon_{2\min}^{(2,2)}$, полученная при расчетах с учетом фазового ограничения на температурный максимум

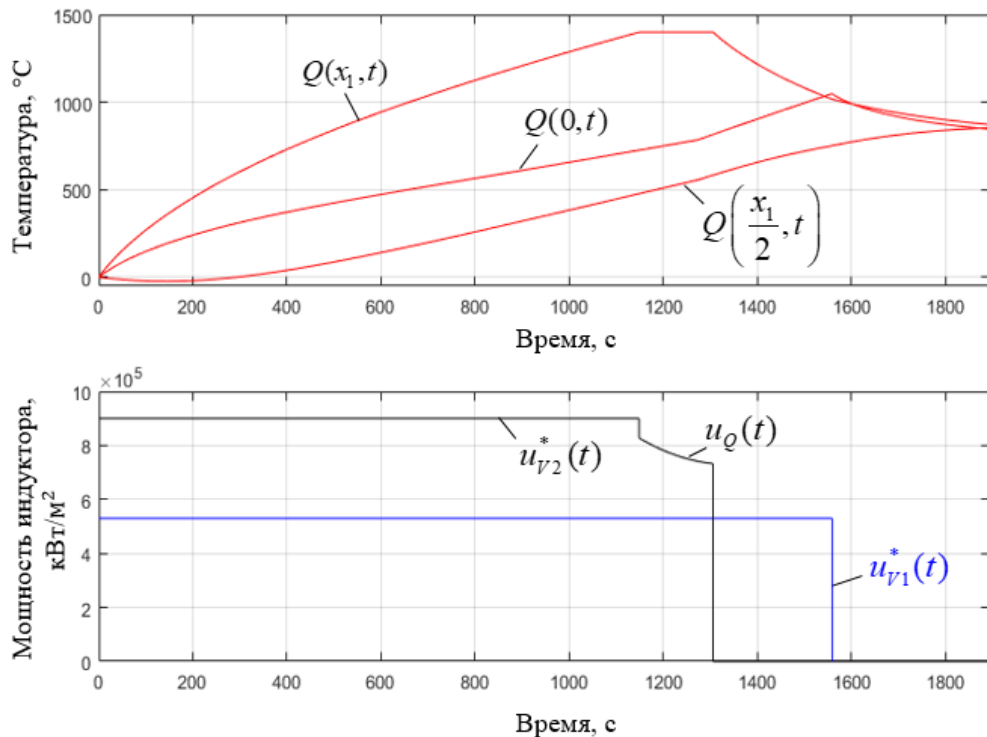


Рисунок 3.3 Изменение управляемой величины и управляющих воздействий на протяжении оптимального процесса с учетом фазового ограничения

Рассмотрим вариант с участком движения по ограничению для управления $u_{V1}(t)$ на интервале интенсивного нагрева неограниченной пластины. Решение задачи быстрогодействия производится аналогично описанной методике с взаимной заменой формы управлений $u_{V1}^*(t)$ и $u_{V2}^*(t)$ в выражениях (3.7),(3.8) и их максимальных значений в выражении для L_n в (3.6), где следует принять:

$$L_n = \theta_n A_n \eta_n^2 - \frac{u_{V2\max}}{u_{V1\max}}. \quad (3.9)$$

Полученные результаты оптимального по быстрдействию процесса индукционного нагрева с ограничением на максимальную температуру при коррекции управления $u_{V1\max}$: $\Delta_{11}^{(1)} = 1681$ сек, $\Delta_{12}^{(1)} = 318$ сек, $\Delta_{22}^{(1)} = 642$ сек, $\varepsilon_{\min}^{(2)} = 13,35$ °C, представлены на рис.3.4, рис.3.5.

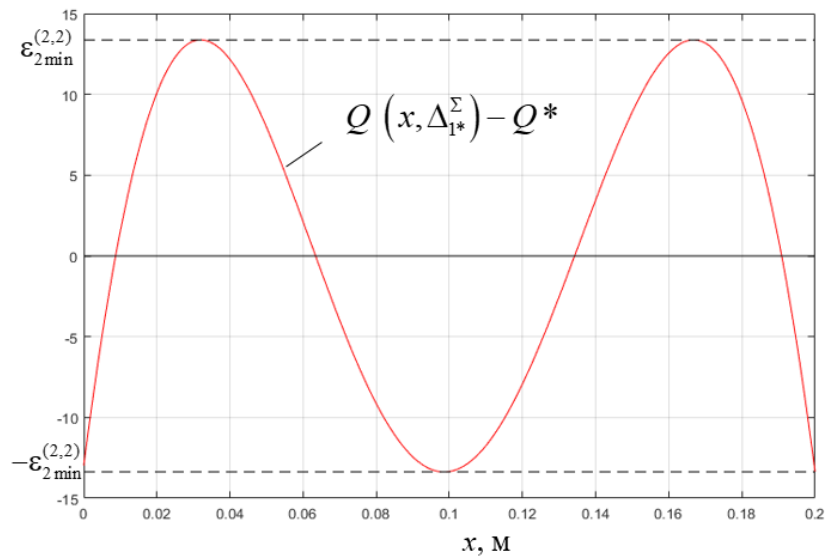


Рисунок 3.4 Температурное распределение в конце оптимального процесса с учетом фазового ограничения при $\varepsilon = \varepsilon_{2\min}^{(2,2)}$

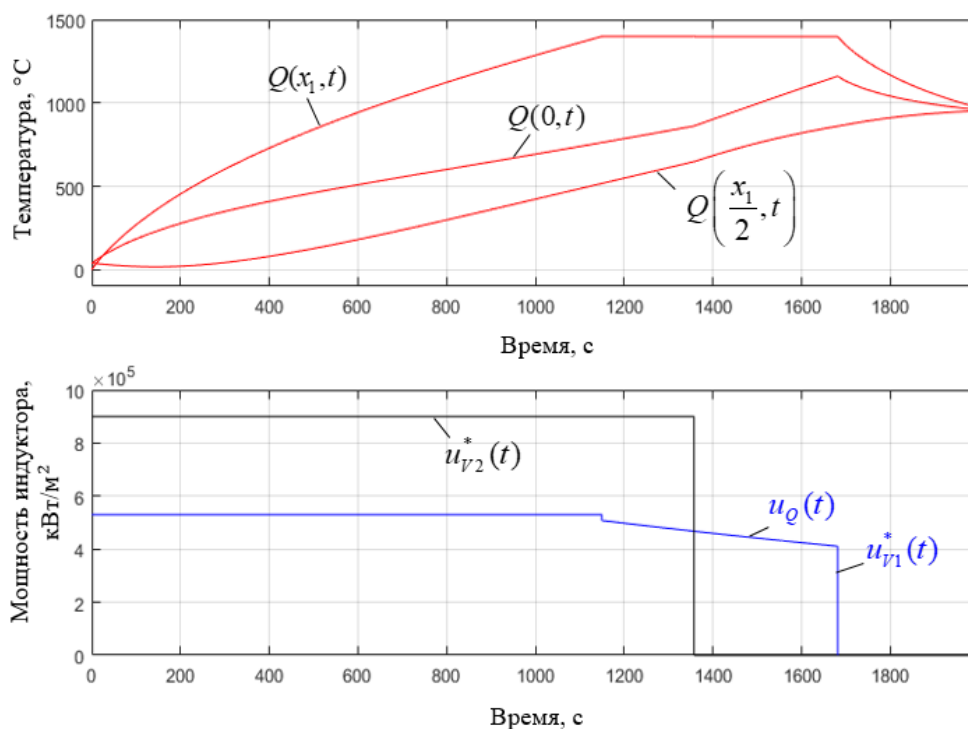


Рисунок 3.5 Изменение управляемой величины и управляющих воздействий на протяжении оптимального процесса

Из двух полученных вариантов решения ЗОУ первый является предпочтительным в силу меньшего времени процесса нагрева.

Таким образом, методика расчета оптимального процесса нагрева с учетом технологического ограничения на поведение температурного поля на протяжении всего процесса реализуется в 2 этапа: на первом этапе необходимо решить задачу быстродействия без учета фазового ограничения и по найденному алгоритму управления построить зависимость $Q(x, \Delta_*^2)$, по которой проверяется выполнение условия (3.1). Если оно не выполняется, то алгоритм оптимального по быстродействию управления корректируется указанным в настоящем разделе методом.

3.2 Оптимальное по быстродействию двухканальное управление ОРП с учетом ограничений на скорость изменения управляющих воздействий

Найденные в предыдущих разделах оптимальные по быстродействию управляющие воздействия релейной формы с мгновенным переключением с

максимального на минимально допустимое значение не учитывают возможных ограничений на скорость их изменения во времени. Если применительно к задачам оптимизации процессов нестационарной теплопроводности при индукционном нагреве с внутренним управлением по мощности тепловыделения (раздел 2.5) такой алгоритм с большой точностью реализуется путем отключения индуктора от источника питания ввиду пренебрежимо малой инерционности электромагнитного поля, то при граничном управлении по тепловому потоку (раздел 2.4) в печах с внешним теплообменом скорость его изменения во времени существенно ограничивается тепловой инерционностью динамических процессов в рабочем пространстве печи [1, 23, 30].

В такой ситуации требуется дополнить структуру объекта при двухканальном управлении динамическими звеньями внешнего теплообмена (ЗВТ), входами которых являются принимаемые за реализуемые управляющие воздействия расходы энергоносителя $g_0(t)$ и $g_1(t)$ (расход газа в пламенных печах или расход электроэнергии в электрических печах сопротивления), допускающие практически любую скорость их изменения во времени, а на выходе ЗВТ формируются в соответствии с их тепловой инерцией тепловые потоки $u_0(t)$ и $u_1(t)$ на нагреваемое тело, фигурирующие в граничных условиях рассматриваемой начально-краевой задачи (рис.3.6, рис.3.7).

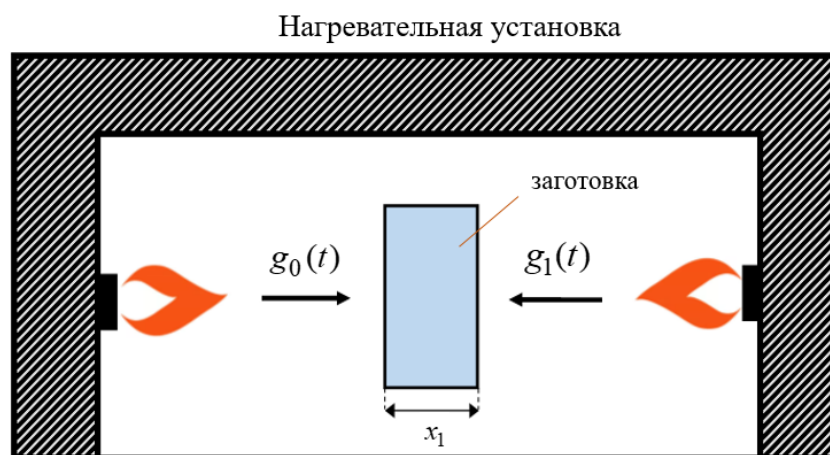


Рисунок 3.6 Иллюстрация объекта управления

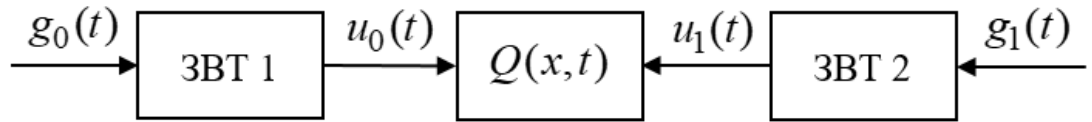


Рисунок 3.7 Структура объекта управления с учетом звена внешнего теплообмена

Математическое моделирование динамики процесса внешнего теплообмена в ЗВТ, описываемых сложным взаимодействием температурных полей кладки печи, ее рабочего пространства и поверхности нагреваемого тела, представляет собой самостоятельную проблему, решение которой выходит за рамки настоящей работы. В первом приближении здесь можно ограничиться приближенным описанием модели ЗВТ в типичной форме линейных звеньев первого порядка:

$$T \frac{du_i(t)}{dt} + u_i(t) = k g_i(t) - g_{0i}, \quad i = 0, 1. \quad (3.10)$$

с заданными (одинаковыми по обоим каналам управления) значениями постоянной времени T , коэффициента передачи k и тепловых потерь g_{0i} , которые находятся в каждой конкретной задаче экспериментальными методами [76, 77]. Здесь предполагается, что конструкция нагревательной установки с внешним теплообменом позволяет реализовать двухканальное управление по расходу энергоносителя.

Рассматриваемый объект управления описывается в таком случае совокупностью уравнений (1.15) модального представления ОРП и уравнения (3.10) динамики связей искомого управления $g_i(t)$ с граничными воздействиями $u_i(t)$ в (2.30).

Применение принципа максимума Понтрягина к расширенной системе уравнений (1.15), (3.10) опять приводит в условиях подобных (1.30) ограничений:

$$g_{0\min} \leq g_0(t) \leq g_{0\max}; \quad g_{1\min} \leq g_1(t) \leq g_{1\max}, \quad (3.11)$$

к релейной форме оптимальных по быстродействию управлений вида (2.33) теперь уже для $g_i^*(t)$:

$$g_0^*(t) = \begin{cases} g_{0\max}, & 0 \leq t < \Delta_{11}^{(1)}; \\ g_{0\min}, & \Delta_{11}^{(1)} < t < \Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)}; \end{cases} \quad g_1^*(t) = \begin{cases} g_{1\max}, & 0 \leq t < \Delta_{21}^{(1)}; \\ g_{1\min}, & \Delta_{21}^{(1)} < t < \Delta_{21}^{(1)} + \Delta_{22}^{(1)}. \end{cases} \quad (3.12)$$

При этом $u_i^*(t)$ в отличие от (2.33) находятся в форме ограниченных по скорости изменения во времени решений уравнений (3.10) при $g_i(t) = g_i^*(t)$, согласно (3.12). В таком случае задача двухканального оптимального по быстродействию управления снова сводится при двухинтервальных управляющих воздействиях к виду (2.20), (2.21).

Основная особенность, возникающая при дальнейшем переходе к системам уравнений альтернансного метода, заключается здесь в изменении формы кривой $Q(x, \Delta_*^\Sigma)$ по сравнению со случаем отсутствия ЗВТ. Остановимся сначала на варианте с одним управляющим воздействием $g^*(t)$ на одной из поверхностей пластины. На втором интервале управления, где $g^*(t) = 0$, здесь некоторое время продолжается процесс нагрева тепловым потоком $u^*(t)$ на поверхности пластины, спадающим со скоростью, определяемой постоянной времени T в (3.10). При достаточно малых тепловых потерях длительность этого интервала обычно оказывается недостаточной для снижения $u^*(t)$ до нуля. В такой ситуации переход ко второму интервалу не сопровождается изменением знака температурного градиента на границе нагреваемого тела, как это имеет место в задаче без учета ЗВТ, и число M точек экстремума на кривой $Q(x, \Delta_*^{(2)})$ уже не совпадает с M_{\max} в (2.25). При $N = 2$ здесь $M = 1$: единственной точкой экстремума оказывается вторая теплоизолированная поверхность (как и в задаче одноканального управления в разделе 2.3) и в роли точек альтернанса могут фигурировать только две точки $x_1^0 = 0$ и $x_2^0 = x_1$ на обеих поверхностях пластины при $R = 2$ [36] с переходом к однозначно определяемой расчетной системе двух уравнений альтернансного метода (вместо (2.27)) относительно двух неизвестных $\Delta_*^{(2)} = (\Delta_1^{(2)}, \Delta_1^{(2)})$

$$\begin{aligned} Q(0, \Delta_*^{(2)}) - Q^* &= -\varepsilon; \\ Q(x_1, \Delta_*^{(2)}) - Q^* &= \varepsilon; \end{aligned} \quad (3.13)$$

при нагреве с поверхности $x = x_1$, или

$$\begin{aligned} Q(0, \Delta_*^{(2)}) - Q^* &= \varepsilon; \\ Q(x_1, \Delta_*^{(2)}) - Q^* &= -\varepsilon; \end{aligned} \quad (3.14)$$

при нагреве с поверхности $x = 0$.

Соответствующие формы кривых $Q(x, \Delta_*^{(2)})$ при $Q(x, 0) = 0$; $Q^*(x) = Q^* = \text{const}$ представлены на рис.3.8.

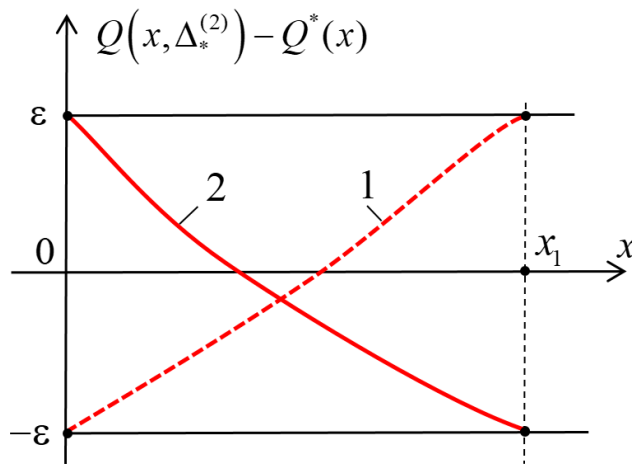


Рисунок 3.8 Результирующие температурные распределения при одноканальном управлении при дополнении структуры объекта звеном внешнего теплообмена:

1 – нагрев с поверхности $x = x_1$, 2 – нагрев с поверхности $x = 0$

В рассматриваемых типичных для нагревательных агрегатов условиях малых тепловых потерь g_0 и значительной инерционности звена внешнего теплообмена системы уравнений (3.13),(3.14) должны быть решены при удовлетворяющей неравенствам $\varepsilon_{\min}^{(2)} < \varepsilon < \varepsilon_{\min}^{(1)}$ заданной точности нагрева ε , которая обычно удовлетворяет типичным технологическим требованиям. Здесь предельно достижимой точности нагрева $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ при двухинтервальном управлении всегда соответствуют достаточно большая, как правило, недопустимая в условиях реального производства длительность второго интервала, сопровождающаяся сменой знака температурного градиента на управляемой

поверхности с переходом к форме кривой $Q(x, \Delta_*^{(2)})$, показанной на рис.2.2, и к системе уравнений (2.27).

Теперь в условиях (2.22) суммирование кривых 1 и 2 на рис.3.8 по принципу суперпозиции эффектов одноканального управления (рис.3.9) позволяет осуществить аналогично (2.28),(2.29) редукцию задач полубесконечной оптимизации (2.20),(2.21) к следующим системам четырех уравнений альтернансного метода, разрешаемым при заданной точности нагрева $\varepsilon > \varepsilon_{\min}^{(2)}$ относительно трех компонент вектора Δ_{p*}^{Σ} в (2.20),(2.21) и координаты x_2^0 :

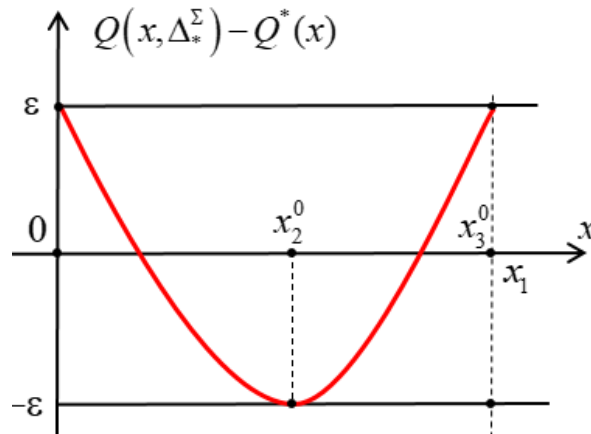


Рисунок 3.9 Форма кривой результирующего температурного распределения в задаче двухканального оптимального по быстрдействию управления с учетом ЗВТ

$$\begin{aligned}
 Q(0, \Delta_{p*}^{\Sigma}) - Q^* &= \varepsilon; \\
 Q(x_2^0, \Delta_{p*}^{\Sigma}) - Q^* &= -\varepsilon; \\
 Q(x_1, \Delta_{p*}^{\Sigma}) - Q^* &= \varepsilon; \\
 \frac{\partial Q(x_2^0, \Delta_{p*}^{\Sigma})}{\partial x} &= 0, \quad p = 1, 2,
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

с последующим выбором варианта ($p = 1$ или $p = 2$), отвечающего минимальной длительности процесса управления.

Параметрическое представление результирующего температурного состояния $Q(x, \Delta_{p*}^{\Sigma})$ определяется интегральным соотношением (2.31),(2.32) с подстановкой граничных воздействий $u_0(t)$ и $u_1(t)$ в форме решений уравнений

(3.10) при оптимальных управляющих воздействиях $g_0^*(t)$ и $g_1^*(t)$ вида (3.12) в $\Delta_{p^*}^\Sigma$ -параметризованной форме согласно (2.20),(2.21) [78]:

$$\begin{aligned}
Q(x, \Delta_1^\Sigma) = & k \frac{x_1}{\lambda} \left[g_{0\max} \left(\tilde{\Delta}_{11}^{(1)} - \tau \left(e^{-\frac{\tilde{\Delta}_{12}^{(1)}}{\tau}} - e^{-\frac{\tilde{\Delta}_{11}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{12}^{(1)}}{\tau}} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{-\pi^2 n^2 (\tilde{\Delta}_{11}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{12}^{(1)})} \cos \left(\frac{\pi n x}{x_1} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left[\frac{1}{\pi^2 n^2} \left(e^{\pi^2 n^2 \tilde{\Delta}_{11}^{(1)}} - 1 \right) - \frac{1}{\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau}} \left[e^{\tilde{\Delta}_{11}^{(1)} \left(\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau} \right)} - 1 + \left(e^{\tilde{\Delta}_{11}^{(1)} \left(\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau} \right)} - e^{\left(\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau} \right) (\tilde{\Delta}_{11}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{12}^{(1)})} \right) \left(e^{\frac{\tilde{\Delta}_{11}^{(1)}}{\tau}} - 1 \right) \right] \right] \right] + \\
& + g_{1\max} \left(\tilde{\Delta}_{21}^{(1)} - \tau \left(e^{-\frac{\tilde{\Delta}_{22}^{(1)}}{\tau}} - e^{-\frac{\tilde{\Delta}_{11}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{22}^{(1)}}{\tau}} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{-\pi^2 n^2 (\tilde{\Delta}_{11}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{12}^{(1)})} \cos \left(\frac{\pi n (x_1 - x)}{x_1} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left[\frac{1}{\pi^2 n^2} \left(e^{\pi^2 n^2 (\tilde{\Delta}_{11}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{12}^{(1)} - \tilde{\Delta}_{21}^{(1)})} - 1 \right) - \frac{1}{\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau}} \left[e^{\left(\tilde{\Delta}_{11}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{12}^{(1)} - \tilde{\Delta}_{21}^{(1)} \right) \left(\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau} \right)} - 1 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(e^{\left(\tilde{\Delta}_{11}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{12}^{(1)} - \tilde{\Delta}_{21}^{(1)} \right) \left(\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau} \right)} - e^{\left(\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau} \right) (\tilde{\Delta}_{11}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{12}^{(1)})} \right) \left(e^{\frac{(\tilde{\Delta}_{11}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{12}^{(1)} - \tilde{\Delta}_{21}^{(1)})}{\tau}} - 1 \right) \right] \right] \right] \right], \quad (3.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(x, \Delta_2^\Sigma) = & k \frac{x_1}{\lambda} \left[g_{0\max} \left(\tilde{\Delta}_{11}^{(1)} - \tau \left(e^{-\frac{\tilde{\Delta}_{12}^{(1)}}{\tau}} - e^{-\frac{\tilde{\Delta}_{21}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{22}^{(1)}}{\tau}} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{-\pi^2 n^2 (\tilde{\Delta}_{21}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{22}^{(1)})} \cos \left(\frac{\pi n x}{x_1} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left[\frac{1}{\pi^2 n^2} \left(e^{\pi^2 n^2 (\tilde{\Delta}_{21}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{22}^{(1)} - \tilde{\Delta}_{12}^{(1)})} - 1 \right) - \frac{1}{\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau}} \left[e^{\left(\tilde{\Delta}_{21}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{22}^{(1)} - \tilde{\Delta}_{12}^{(1)} \right) \left(\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau} \right)} - 1 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(e^{\left(\tilde{\Delta}_{21}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{22}^{(1)} - \tilde{\Delta}_{12}^{(1)} \right) \left(\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau} \right)} - e^{\left(\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau} \right) (\tilde{\Delta}_{21}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{22}^{(1)})} \right) \left(e^{\frac{(\tilde{\Delta}_{21}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{22}^{(1)} - \tilde{\Delta}_{12}^{(1)})}{\tau}} - 1 \right) \right] \right] \right] + \\
& + g_{1\max} \left(\tilde{\Delta}_{21}^{(1)} - \tau \left(e^{-\frac{\tilde{\Delta}_{22}^{(1)}}{\tau}} - e^{-\frac{\tilde{\Delta}_{21}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{22}^{(1)}}{\tau}} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{-\pi^2 n^2 (\tilde{\Delta}_{21}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{22}^{(1)})} \cos \left(\frac{\pi n (x_1 - x)}{x_1} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left[\frac{1}{\pi^2 n^2} \left(e^{\pi^2 n^2 \tilde{\Delta}_{21}^{(1)}} - 1 \right) - \frac{1}{\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau}} \left[e^{\tilde{\Delta}_{21}^{(1)} \left(\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau} \right)} - 1 + \left(e^{\tilde{\Delta}_{21}^{(1)} \left(\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau} \right)} - e^{\left(\pi^2 n^2 - \frac{1}{\tau} \right) (\tilde{\Delta}_{21}^{(1)} + \tilde{\Delta}_{22}^{(1)})} \right) \left(e^{\frac{\tilde{\Delta}_{21}^{(1)}}{\tau}} - 1 \right) \right] \right] \right] \right], \quad (3.17)
\end{aligned}$$

где $\tau = aT / x_1^2$, $\tilde{\Delta}_{ij}^{(1)} = a\Delta_{ij}^{(1)} / x_1^2$, $i, j = 1, 2$.

Некоторые результаты расчета оптимального по быстродействию двухканального управления нагревом пластины с учетом динамики звеньев

внешнего теплообмена для исходных данных, приведенных в таблице 3.1, указаны в таблице 3.2 и на рис.3.10, рис.3.11.

Таблица 3.1 – Исходные данные

Обозначение	Параметр	Значение	Единица измерения
-	Материал	титан	-
R	Толщина пластины	0.2	м
Q_0	Начальная температура	0	$^{\circ}\text{C}$
Q^*	Требуемая конечная температура	715	$^{\circ}\text{C}$
ε	Допустимое температурное отклонение в конце оптимального процесса нагрева	15	$^{\circ}\text{C}$
λ	Коэффициент теплопроводности	14	$\text{Вт/м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$
a	Коэффициент температуропроводности	$4.34 \cdot 10^{-6}$	$\text{м}^2 / \text{с}$
k	Коэффициент передачи	1	-
T	Постоянная времени	100	с
$u_{0\max}$	Максимальная величина управления $u_0(t)$	416	кВт/м^2
$u_{1\max}$	Максимальная величина управления $u_1(t)$	208	кВт/м^2

Расчеты проводились численным методом с помощью пакета Optimization Toolbox программы MATLAB [62-65] (с учетом первых 30 членов бесконечного ряда в выражениях (3.16),(3.17)).

Таблица 3.2 – Расчетные результаты

Решение системы (3.15) при $p = 1$		Решение системы (3.15) при $p = 2$	
$\Delta_{11}^{(1)}$, сек	1717	$\Delta_{21}^{(1)}$, сек	1217
$\Delta_{12}^{(1)}$, сек	615	$\Delta_{22}^{(1)}$, сек	1112
$\Delta_{22}^{(1)}$, сек	1127	$\Delta_{12}^{(1)}$, сек	600
x_2^0 , м	0,11	x_2^0 , м	0,085

На рис.3.10 и рис.3.11 показаны результирующие распределения температуры по толщине пластины в конце оптимального процесса и поведение температурного поля на всем его протяжении при свободном выборе параметров $\Delta_{11}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}$ управления $g_0(t)$ ($\Delta_*^{\Sigma} = \Delta_{1*}^{\Sigma}$).

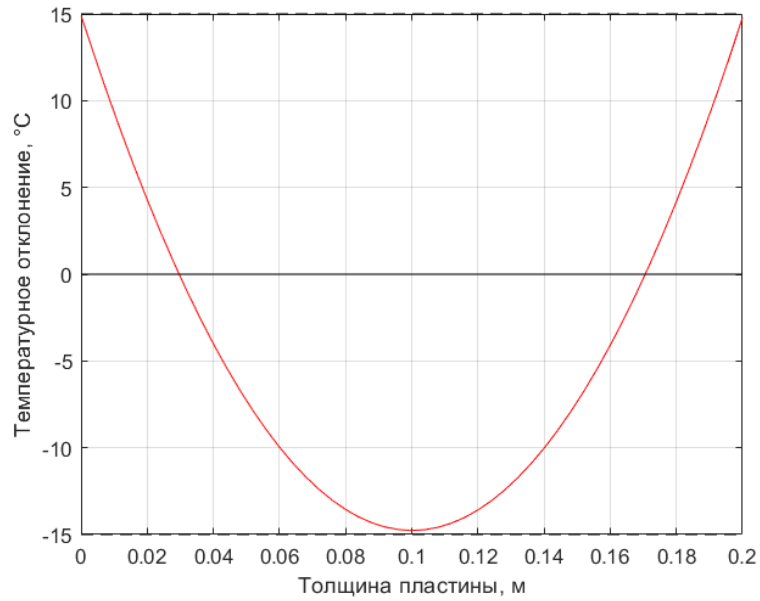


Рисунок 3.10 Кривая результирующего температурного распределения при $\varepsilon > \varepsilon_{p \min}^{(2,2)}$

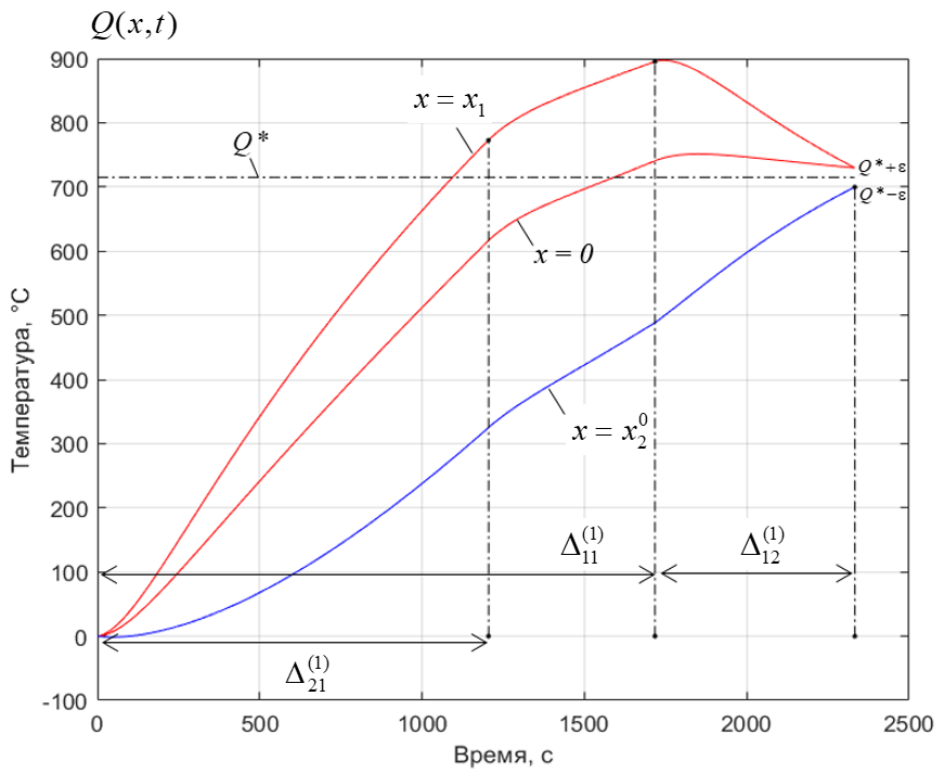


Рисунок 3.11 Изменение температурного поля на протяжении оптимального процесса управления

На рис.3.11 можно заметить, что в начале второго интервала управления по каналу $g_0(t)$, на котором происходит его отключение энергоснабжения, еще некоторое время (приблизительно 100 секунд) продолжается рост температуры в заданных условиях инерционности управляющих воздействий. Для сравнения заметим, что в §2.4 подобным методом решалась задача двухканального

оптимального по быстродействию управления процессом нагрева аналогичной по теплофизическим и конструктивным параметрам заготовки, и можно убедиться (рис.2.12), что без учета инерционности звена внешнего теплообмена второй интервал управления сопровождается резким снижением температуры.

В конце оптимального процесса, согласно рис.3.10, максимально допустимое превышение температуры над Q^* фиксируется на поверхностях пластины, а минимально допустимая температура – в точке, координата которой была найдена при решении системы уравнений (3.16).

Полученные результаты решения системы (3.17), для которой свободно варьируемыми параметрами являются длительности интервалов Δ_{21}, Δ_{22} управления $g_1(t)$, иллюстрируются графиками на 3.12 и рис.3.13. На рис.3.12 изображена кривая температурного отклонения от желаемого температурного состояния в конце оптимального процесса, а рис.3.13 иллюстрирует поведение температурного поля в оптимальном процессе.

Сравнивая расчетные результаты обоих вариантов выбора свободно варьируемых параметров двухканального управления, можно сделать вывод, что оптимальный по быстродействию процесс нагрева достигается в случае решения системы (3.15) при $p = 2$.

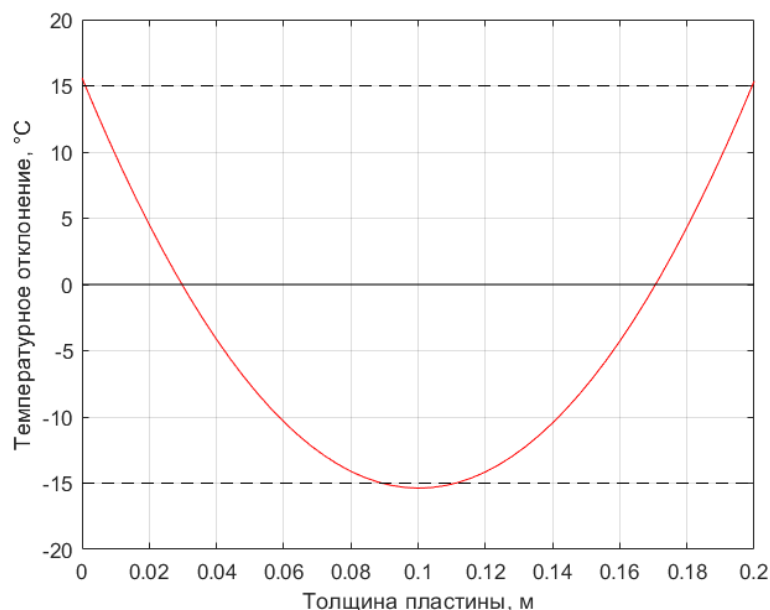


Рисунок 3.12 Кривая температурного распределения в конце оптимального процесса

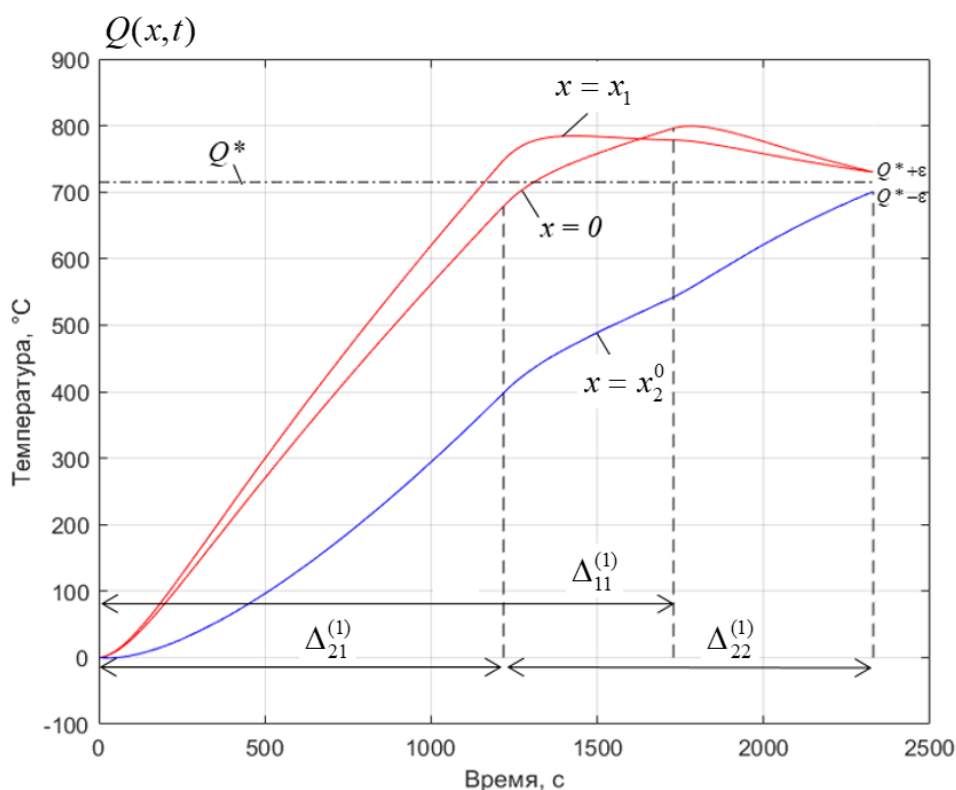


Рисунок 3.13 Изменение температурного поля во времени для второго варианта выбора искомых параметров

3.3 Выводы по третьей главе

В данной главе предложены методы распространения описанной ранее методики решения ЗОУ ОРП на задачи оптимального по быстродействию двухканального управления процессами нестационарной теплопроводности с учетом дополнительных технологических ограничений на управляемые величины и управляющие воздействия.

1. Решена задача оптимального по быстродействию двухканального управления процессом индукционного нагрева металлической пластины перед последующей обработкой давлением с учетом фазового ограничения на максимально допустимую температуру на всем его протяжении. Структура программного двухинтервального управления дополняется на первом интервале по одному из каналов управляющего воздействия в такой задаче участком его изменения по экспоненциальному закону, обеспечивающему в первом приближении стабилизацию максимальной температуры на заданном предельно допустимом уровне. В условиях заранее устанавливаемых предложенным

способом параметрах участка движения по ограничению по общей схеме развиваемого в диссертации подхода выполнена процедура параметризации двухканального управления усложненной структуры, произведена редукция к задачам полубесконечной оптимизации, найдены конкретные формы параметрической зависимости конечных температурных состояний и на основании известных закономерностей предметной области получены расчетные системы уравнений альтернативного метода, решение которых относительно искомых параметров оптимального процесса завершает решение рассматриваемой задачи с фазовым ограничением.

2. Решена задача оптимального по быстродействию управления нагревом металлической пластины в печи с внешним теплообменом при двух управляющих воздействиях по тепловому потоку на ее поверхностях, скорости изменения которых ограничиваются тепловой инерционностью динамических процессов в рабочем пространстве печи. Путем дополнения структуры объекта динамическими звеньями внешнего теплообмена задача сведена к определению действующих на их входах оптимальных управляющих воздействий по расходу энергоносителя, реализуемых уже с любой требуемой динамикой их изменения. Релейный характер таких управлений опять обеспечивает редукцию к задачам полубесконечной оптимизации с видоизмененными параметрическими зависимостями результирующих температурных распределений. Последующий переход к расчетным системам уравнений альтернативного метода осуществлен путем предварительной идентификации формы кривой пространственного распределения температуры в конце оптимального процесса, которая установлена на основании физических закономерностей поведения нестационарных температурных полей в условиях непрерывного изменения теплового потока на выходах инерционных звеньев внешнего теплообмена.

ГЛАВА 4. ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ДВУХКАНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВУМЯ ВЗАИМОСВЯЗАННЫМИ ОРП С ИДЕАЛЬНЫМ КОНТАКТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СРЕД

Материал главы излагается в соответствии с публикациями соискателя [80, 90, 91].

В предыдущих главах задачи двухканального оптимального быстродействия рассматривались преимущественно модели автономного объекта с распределенными параметрами в области технологической теплофизики без учета взаимного влияния других компонентов производственных комплексов. Однако в инженерной практике подобными объектами широкий круг задач управления не исчерпывается. Самостоятельный класс ЗОУ ОРП подобного типа возникает для взаимосвязанных ОРП с различными управляющими воздействиями для каждого из объектов, специфической особенностью которых являются условия сопряжения физически неоднородных сред на их контактирующих поверхностях [23, 25-27].

Общая технология решения задач векторного управления линейными моделями взаимосвязанных СРП предложена в [27, 58]. В настоящей главе рассматривается представляющая самостоятельный интерес типичная для приложений задача оптимального по базовому критерию быстродействия двухканального граничного управления температурными полями физически неоднородной СРП, образуемой при идеальном тепловом контакте двух соприкасающихся своими поверхностями тел с различными физическими свойствами и являющейся базовым элементом взаимосвязанных распределенных систем различного уровня сложности в инженерных приложениях [26, 31-35].

4.1 Математическая модель двух взаимосвязанных ОРП с идеальным контактом взаимодействующих сред

В качестве объекта управления рассматривается процесс нагрева двух физически неоднородных взаимосвязанных через граничные условия пластин (рис.4.1), который применительно к общей модели (1.18)-(1.24) взаимосвязанных ОРП при $\sigma = 2$, $C_m(x_m) = a_m = \text{const}$, $B_m(x_m) = B_{1m}(x_m) = 0$, $f_m(x_m, t, u_{vm}(x_m, t)) = 0$, $m = \overline{1, \sigma}$ в (1.18) в первом приближении описывается следующими линейными одномерными уравнениями теплопроводности вида (1.12) [25]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_1(x_1, t)}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 Q_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} + L_{11}(Q_1, x_1), \quad x_1 \in [x_{01}, x_{11}], \\ \frac{\partial Q_2(x_2, t)}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 Q_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} + L_{22}(Q_2, x_2), \quad x_2 \in [0, x_{01}], \end{aligned} \quad (4.1)$$

с начальными условиями, подобно (1.19):

$$Q_1(x_1, 0) = Q_{10}(x_1); \quad Q_2(x_2, 0) = Q_{20}(x_2); \quad (4.2)$$

граничными условиями в точках $x_1 = x_{11}$, $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial Q_1(x_{11}, t)}{\partial x_1} + \alpha Q_1(x_{11}, t) &= u_1(t); \\ \lambda_2 \frac{\partial Q_2(0, t)}{\partial x_2} &= u_2(t), \end{aligned} \quad (4.3)$$

и условиями сопряжения в точке $x_1 = x_2 = x_{01}$, соответствующими граничным условиям 4 рода:

$$\begin{aligned} Q_2(x_{01}, t) &= Q_1(x_{01}, t); \\ \lambda_1 \frac{\partial Q_1(x_{01}, t)}{\partial x_1} &= \lambda_2 \frac{\partial Q_2(x_{01}, t)}{\partial x_2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

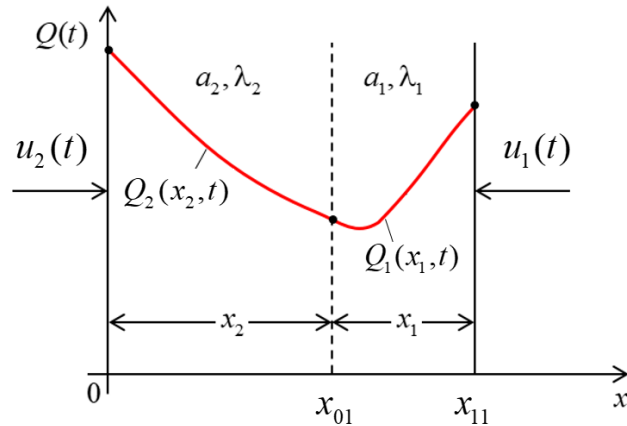


Рисунок 4.1 К описанию температурного поля физически неоднородной системы с идеальным контактом взаимодействующих сред

В качестве управляющих воздействий рассматриваются граничные сосредоточенные управляющие воздействиями $u_1(t), u_2(t)$, действующие на обеих свободных поверхностях каждой из сопряженных пластин $x_1 = x_{01}$ и $x_2 = 0$, стесняемые ограничениями вида (1.30) с заданными предельно допустимыми величинами их возможных значений:

$$\begin{aligned} u_{1\min} &\leq u_1(t) \leq u_{1\max}; \\ u_{2\min} &\leq u_2(t) \leq u_{2\max}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Начально-краевая задача (4.1)-(4.4) является частным случаем математической модели (1.18)-(1.21) системы взаимосвязанных ОРП при некоторых значениях L_{11}, L_{22} в (4.1) с представлением условий сопряжения (4.4) в качестве граничных условий вида (1.20), (1.21) в точке $x_1 = x_2 = x_{01}$ с операторами взаимосвязи $L_{02}^{(1)}, L_{11}^{(2)}$ в (1.22), выбираемыми в форме правых частей равенств (4.4) [27].

Как и прежде, базовая задача оптимального быстрогодействия сводится к определению векторного сосредоточенного управления $U^*(t)$ вида (1.36) или (1.37) и длительности $t_{\text{кон}}^*$ оптимального процесса, обеспечивающих в соответствии с (1.31) требуемую точность равномерного приближения конечных температурных распределений $Q_1(x_1, t_{\text{кон}}^*), Q_2(x_2, t_{\text{кон}}^*)$ по толщине каждой из пластин к заданным температурным состояниям, соответственно, $Q_1^*(x_1) > Q_{10}(x_1), Q_2^*(x_2) > Q_{20}(x_2)$, согласно соотношениям:

$$\begin{aligned} \max_{x_1 \in [x_{01}, x_{11}]} |Q_1(x_1, t_{\text{кон}}^*) - Q_1^*(x_1)| &\leq \varepsilon_1; \\ \max_{x_2 \in [0, x_{01}]} |Q_2(x_2, t_{\text{кон}}^*) - Q_2^*(x_2)| &\leq \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Известные методы получения решений начально-краевой задачи (4.1)-(4.5) [16, 25, 34, 41] приводят на достаточно широком множестве возможных вариантов описания операторов L_{11}, L_{22} в (4.1) к представлению температурных полей $Q_1(x_1, t)$ и $Q_2(x_2, t)$ каждого из объектов в сложной форме, содержащей ряды, неравномерно сходящиеся на граничных поверхностях контактирующих сред, которая не позволяет, в частности, непосредственно проверить выполнение условий сопряжения (4.5). Эти решения фиксируют только однородные условия на границах $x_1 = x_{11}$, $x_2 = 0$ и на контактной поверхности $x_1 = x_2 = x_{01}$ в силу известных свойств собственных функций задачи (4.1)-(4.5) [16, 25, 58]. При неоднородном характере граничных условий (4.3) оказывается необходимым преобразование данных решений к виду, содержащему ряды с улучшенной сходимостью [25].

В следующем разделе применительно к частному варианту выбора L_{11}, L_{22} предлагается базирующийся на полученных в [33] результатах способ подобного достаточно простого описания температурных полей в задаче (4.1)-(4.5) в форме, содержащей известные решения уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями.

4.2 Решение начально-краевой задачи, моделирующей поведение двух взаимосвязанных ОРП

Используя известные выражения для стандартизирующей функции начально-краевой задачи (4.1)-(4.5), приведем уравнения модели объекта к виду с однородными граничными условиями в (4.3) и дополнительными функциями внутреннего тепловыделения, компенсирующими эффект влияния на

температурные поля $Q_1(x_1, t)$, $Q_2(x_2, t)$ управляющих воздействий $u_1(t), u_2(t) \neq 0$ [16]:

$$\frac{\partial Q_1(x_1, t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 Q_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} + \frac{a_1}{\lambda_1} \delta(x_1 - x_{11}) u_1(t) + L_{11}(Q_1, x_1), \quad x_1 \in [x_{01}, x_{11}], \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial Q_2(x_2, t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 Q_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} + \frac{a_2}{\lambda_2} \delta(x_2 - 0) u_2(t) + L_{22}(Q_2, x_2), \quad x_2 \in [0, x_{01}], \quad (4.8)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial Q_1(x_{11}, t)}{\partial x_1} + \alpha Q_1(x_{11}, t) = 0; \quad (4.9)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial Q_2(0, t)}{\partial x_2} = 0, \quad (4.10)$$

с начальными условиями (4.2) и условиями сопряжения (4.4).

Здесь $\delta(x_1 - x_{11})$ и $\delta(x_2 - 0)$ - пространственные δ -функции, сосредоточенные в точках $x_1 = x_{11}$ и $x_2 = 0$ соответственно. Найдем сначала решения задачи (4.2), (4.7)-(4.10) с заменой условий сопряжения (4.4) на независимые друг от друга граничные условия для $Q_1(x_1, t)$ и $Q_2(x_2, t)$ на контактной границе $x_1 = x_2 = x_{01}$:

$$\lambda_1 \frac{\partial Q_1(x_{01}, t)}{\partial x_1} = q_1(t); \quad (4.11)$$

$$Q_2(x_{01}, t) = Q_2^{(1)}(t), \quad (4.12)$$

где $q_1(t)$, $Q_2^{(1)}(t)$ - произвольные непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции времени, которые считаются известными.

Появляющаяся при этом возможность независимого раздельного решения задач для $Q_1(x_1, t)$ и $Q_2(x_2, t)$ в условиях (4.11) и (4.12) кардинально упрощает решение исходной задачи (4.1)-(4.3), если на втором этапе можно так подобрать $q_1(t)$ и $Q_2^{(1)}(t)$, чтобы удовлетворялись условия сопряжения (4.4).

Как показано в [33], можно получить решения задач (4.7)-(4.12) с начальными условиями (4.2) в достаточно простой форме, содержащей известные решения уравнений теплопроводности с однородными граничными

условиями при определенном выборе операторов L_{11} и L_{22} в (4.7),(4.8). В частности, $Q_1(x_1, t)$ представляется в виде:

$$Q_1(x_1, t) = \hat{Q}_1(x_1, t) + Q_1^{(1)}(t)Q_1^{(2)}(x_1), \quad (4.13)$$

где $\hat{Q}_1(x_1, t)$ - решение уравнения (4.7) с начальными условиями:

$$\hat{Q}_1(x_1, 0) = Q_{10}(x_1) - Q_1^{(1)}(0)Q_1^{(2)}(x_1), \quad (4.14)$$

и однородными граничными условиями в (4.9),(4.11):

$$\lambda_1 \frac{\partial \hat{Q}_1(x_{11}, t)}{\partial x_1} + \alpha \hat{Q}_1(x_{11}, t) = 0, \quad (4.15)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial \hat{Q}_1(x_{01}, t)}{\partial x_1} = 0, \quad (4.16)$$

а $Q_1^{(1)}(t)$ и $Q_1^{(2)}(x_1)$ в (4.13) находятся следующим образом [33]:

$$Q_1^{(1)}(t) = q_1(t); \quad Q_1^{(2)}(x_1) = \frac{1}{\lambda_1} \left[(x_1 - x_{01}) - \frac{\nu}{x_{11} - x_{01}} (x_1 - x_{01})^2 \right]; \quad (4.17)$$

$$\nu = \frac{\eta}{\eta + \lambda_1}; \quad \eta = \lambda_1 \left[1 + \frac{\alpha(x_{11} - x_{01})}{\lambda_1} \right].$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что температурное поле в форме (4.13)-(4.17) удовлетворяет уравнению (4.7) и краевым условиям в (4.2),(4.11), если оператор $L_{11}(Q_1, x_1)$ в (4.13) определяется в следующем виде:

$$L_{11}(Q_1, x_1) = Q_1^{(2)}(x_1) \frac{dq_1}{dt} + \frac{2a_1}{\lambda_1} \frac{\nu}{x_1 - x_{01}} q_1(t).$$

Заметим, что решение задачи (4.7),(4.14)-(4.16) представляется в форме равномерно сходящегося ряда [25], и значения $Q_1(x_{01}, t)$, $\partial Q_1(x_{01}, t) / \partial x_1$ в (4.4) можно непосредственно вычислить в точке сопряжения $x_1 = x_{01}$.

Аналогичным образом при $L_{22}(Q_2, x_2) = \frac{dQ_2^{(1)}}{dt}$ определяется решение задачи (4.8),(4.10),(4.12) для $Q_2(x_2, t)$ [33]:

$$Q_2(x_2, t) = \hat{Q}_2(x_2, t) + Q_2^{(1)}(t), \quad (4.18)$$

где $\hat{Q}_2(x_2, t)$ - решение уравнения (4.8) с начальными:

$$\hat{Q}_2(x_2, 0) = Q_{20}(x_2) - Q_2^{(1)}(0), \quad (4.19)$$

и однородными граничными условиями в (4.10), (4.12):

$$\lambda_2 \frac{\partial \hat{Q}_2(0, t)}{\partial x_2} = 0, \quad (4.20)$$

$$\hat{Q}_2(x_{01}, t) = 0. \quad (4.21)$$

Здесь, подобно $\hat{Q}_1(x_1, t)$, $\hat{Q}_2(x_2, t)$ находится в виде равномерно сходящегося ряда в условиях (4.20), (4.21). Явная форма выражений для $\hat{Q}_1(x_1, t)$ и $\hat{Q}_2(x_2, t)$ находится стандартным способом по известной схеме метода конечных интегральных преобразований в форме разложения в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $\varphi_1(\mu_{1n}, x_1)$ и $\varphi_2(\mu_{2n}, x_2)$ краевой задачи соответственно для $\hat{Q}_1(x_1, t)$ и $\hat{Q}_2(x_2, t)$, где μ_{1n}^2, μ_{2n}^2 - собственные числа [16]:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1(x_1, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1(\mu_{1n}, x_1) \left(\frac{1}{a_1} \int_0^t \int_{x_{01}}^{x_{11}} f_{1n}(\xi, \tau, u_1(\xi, \tau)) \varphi_1(\mu_{1n}, \xi) \times \right. \\ & \left. \times \exp\left(-\eta_n^2 \frac{a_1}{(x_{11} - x_{01})^2} (t - \tau)\right) d\xi d\tau + \int_{x_{01}}^{x_{11}} \hat{Q}_1(\xi, 0) \exp\left(-\eta_n^2 \frac{a_1}{(x_{11} - x_{01})^2} t\right) d\xi \right); \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_2(x_2, t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_2(\mu_{2n}, x_2) \left(\frac{1}{a_2} \int_0^t \int_0^{x_{01}} f_{2n}(\xi, \tau, u_2(\xi, \tau)) \varphi_2(\mu_{2n}, \xi) \times \right. \\ & \left. \times \exp\left(-\frac{a_2(2n-1)^2}{4x_{01}^2} \pi^2 (t - \tau)\right) d\xi d\tau + \int_0^{x_{01}} \hat{Q}_2(\xi, 0) \exp\left(-\frac{a_2(2n-1)^2}{4x_{01}^2} \pi^2 t\right) d\xi \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Здесь

$$f_{1n}(\xi, \tau, u_1(\xi, \tau)) = \frac{a_1}{\lambda_1} \delta(\xi - x_{11}) u_1(\tau); \quad (4.24)$$

$$f_{2n}(\xi, \tau, u_2(\xi, \tau)) = \frac{a_2}{\lambda_2} \delta(\xi - 0) u_2(\tau);$$

$$\varphi_1(\mu_{1n}, x_1) = \sqrt{\frac{a_1}{x_{11} - x_{01}} \cdot \frac{2\eta_n}{\eta_n + \sin \eta_n \cos \eta_n}} \cos\left(\eta_n \frac{x_1 - x_{01}}{x_{11} - x_{01}}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.25)$$

$$\varphi_2(\mu_{2n}, x_1) = \sqrt{\frac{2a_2}{x_{01}}} \cos\left((2n-1)\frac{\pi x_2}{2x_{01}}\right), \quad n=1,2,\dots, \quad (4.26)$$

и собственные числа μ_{1n}^2, μ_{2n}^2 определяются соотношениями:

$$\mu_{1n}^2 = \frac{a_1}{(x_{11} - x_{01})^2} \eta_n^2, \quad \mu_{2n}^2 = \frac{a_2}{x_{01}^2} \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad (4.27)$$

где η_n - корни уравнения $\eta_n \cdot \operatorname{tg} \eta_n = \frac{\alpha(x_{11} - x_{01})}{\lambda_1}$.

Аналогично задаче двухканального управления одним ОРП принцип максимума Понтрягина устанавливает для модального описания взаимосвязанных объектов вида (1.25),(1.26) релейную форму каждого из оптимальных управляющих воздействий, принимающих подобную (2.33) форму применительно к рассматриваемому далее типичному двухинтервальному режиму нагрева и определяемых, таким образом, с точностью до выбора длительностей двух интервалов их постоянства [18, 36].

В данном случае задача быстродействия при $N_{11}^* = N_{21}^* = 2$ в (2.8),(2.9),(2.14) (рис.2.1) двухинтервальных управлениях $u_1(t)$ и $u_2(t)$ релейной формы подобно (2.33):

$$u_1(t) = \begin{cases} u_{1\max}, & 0 \leq t < \Delta_{11}^{(1)}; \\ u_{1\min}, & \Delta_{11}^{(1)} < t \leq \Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)}; \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} u_{2\max}, & 0 \leq t < \Delta_{11}^{(2)}; \\ u_{2\min}, & \Delta_{11}^{(2)} < t \leq \Delta_{11}^{(2)} + \Delta_{12}^{(2)}. \end{cases} \quad (4.28)$$

Здесь уже, в отличие от (2.20),(2.21),(2.33), $\Delta_{11}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}$ и $\Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}$ – длительности первого и второго интервалов постоянства первого (в данном случае только одного) управляющего воздействия соответственно для первого ($m=1$) и второго ($m=2$) из системы двух взаимосвязанных объектов (4.1) (рис.4.2).

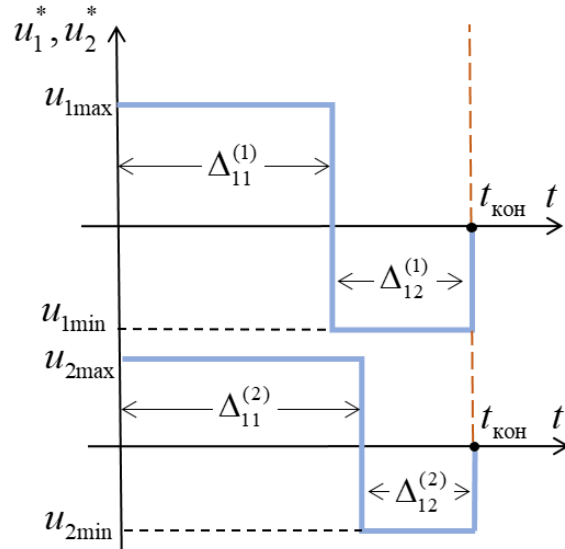


Рисунок 4.2 Оптимальные по быстродействию двухинтервальные сосредоточенные управления

В результате подстановки двухинтервальных параметризованных управлений (4.28) в (4.22) и (4.23) и вычисления интегралов при $t = t_{\text{кон}}$ зависимости $\hat{Q}_m(x_m, \Delta^\Sigma)$, $m = 1, 2$ могут быть представлены в форме явных функций от своих аргументов:

$$\hat{Q}_1(x_1, \Delta_{11}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\eta_n \frac{x_1 - x_{01}}{x_{11} - x_{01}}\right) \left[\frac{\cos(\eta_n)}{\omega_n \lambda_1 E_{1n}^2} \left(u_{1\max} \left(e^{-\omega_n \Delta_{12}^{(1)}} - e^{-\omega_n (\Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)})} \right) + u_{1\min} \left(1 - e^{-\omega_n \Delta_{12}^{(1)}} \right) \right) \right] + \exp(-\omega_n (\Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)})) \int_{x_{01}}^{x_{11}} \hat{Q}_1(\xi, 0) d\xi, \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{E_{1n}^2} = \frac{2a_1 \eta_n}{(x_{11} - x_{01})(\eta_n + \sin \eta_n \cos \eta_n)}; \quad \omega_n = \eta_n^2 \frac{a_1}{(x_{11} - x_{01})^2};$$

$$\hat{Q}_2(x_2, \Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_2}{\lambda_2 x_{01} \mu_{2n}^2} \cos\left((2n-1) \frac{\pi x_2}{2x_{01}}\right) \left[u_{2\max} \left(e^{-\mu_{2n}^2 \Delta_{12}^{(2)}} - e^{-\mu_{2n}^2 (\Delta_{11}^{(2)} + \Delta_{12}^{(2)})} \right) + u_{2\min} \left(1 - e^{-\mu_{2n}^2 \Delta_{12}^{(2)}} \right) \right] + \exp(-\mu_{2n}^2 (\Delta_{11}^{(2)} + \Delta_{12}^{(2)})) \int_0^{x_{01}} \hat{Q}_2(\xi, 0) d\xi. \quad (4.30)$$

Приравнивая правые части граничных условий (4.4) и (4.11),(4.12), используя выражения (4.13),(4.18) и учитывая, что $Q_1^{(2)}(x_{01}) = \hat{Q}_1(x_{01}, t) = 0$, согласно (4.17),(4.21), приходим к выводу, что условия сопряжения (4.4) выполняются, если выбрать $q_1(t)$ и $Q_2^{(1)}(t)$ в (4.11), (4.12) следующим образом:

$$q_1(t) = \lambda_2 \frac{\partial \hat{Q}_2(x_{01}, t)}{\partial x_2}; \quad Q_2^{(1)}(t) = \hat{Q}_1(x_{01}, t). \quad (4.31)$$

В итоге получаем в явной форме зависимости (4.13),(4.17) для конечного температурного состояния при $t = t_{\text{кон}}$ с учетом известных выражений (4.29),(4.30) и соотношений (4.31):

$$\begin{aligned} Q_1(x_1, t_{\text{кон}}) &= Q_1(x_1, \Delta_{11}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}, \Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}) = \\ &= \hat{Q}_1(x_1, \Delta_{11}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}) + \lambda_2 \frac{\partial \hat{Q}_2(x_{01}, \Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)})}{\partial x_2} Q_1^{(2)}(x_1); \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$Q_2(x_2, t_{\text{кон}}) = Q_2(x_2, \Delta_{11}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}, \Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}) = \hat{Q}_2(x_2, \Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}) + \hat{Q}_1(x_{01}, \Delta_{11}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}). \quad (4.33)$$

Примем далее в (4.2) для простоты без потери общности основных результатов:

$$Q_{10}(x_1) = Q_{20}(x_2) = 0. \quad (4.34)$$

Тогда $\hat{Q}_1(x_1, 0)$ определяется, согласно (4.14), где на основании соотношений (4.17),(4.21) можно принять в условиях (4.34), что

$$Q_1^{(1)}(0) = q_1(0) = \lambda_2 \frac{\partial \hat{Q}_2(x_{01}, 0)}{\partial x_2} = 0. \quad (4.35)$$

в начальный момент процесса управления с равномерным начальным распределением температур при управляющих воздействиях u_1, u_2 , сосредоточенных на границах $x_1 = x_{11}, x_2 = 0$, удаленных от точки сопряжения $x_1 = x_2 = x_{01}$. В итоге, в соответствии с (4.14),(4.34),(4.35) будем иметь:

$$\hat{Q}_1(x_1, 0) = Q_{10}(x_1) = 0. \quad (4.36)$$

Подобным образом, $\hat{Q}_2(x_2, 0)$ определяется на основании (4.18),(4.34), где в силу соотношений (4.31),(4.36) $Q_2^{(1)}(0) = \hat{Q}_1(x_{01}, 0) = 0$:

$$\hat{Q}_2(x_2, 0) = Q_{20}(x_2) = 0. \quad (4.37)$$

Таким образом, в условиях (4.34) следует рассматривать выражения (4.22),(4.23) и (4.29),(4.30) с нулевыми начальными состояниями для \hat{Q}_1 и \hat{Q}_2 .

При $L_{11} = L_{22} = 0$ в (4.1),(4.2) решение начально-краевой задачи (4.1)-(4.4) может быть получено аналогичным путем разделения независимых граничных

условий в точке x_{01} для каждого из взаимодействующих объектов, подобно (4.11),(4.12), с последующим их определением из условий сопряжения (4.4). Техника вычислений и форма представления результирующих температурных полей, требующая доработки рядов с целью улучшения их сходимости, при этом существенно усложняется по сравнению с выражениями (4.32),(4.33).

4.3 Редукция к задаче полубесконечной оптимизации и ее решение альтернативным методом

Аналогично задачам управления одним ОРП при известной параметризованной форме (4.28) управляющих воздействий и конечных температурных состояний (4.32),(4.33) осуществляется в условиях (4.6) и (2.4) точная редукция исходной задачи двухканального двухинтервального управления к специальной задаче полубесконечной оптимизации относительно искомым значений Δ^Σ вида (2.20),(2.21):

$$I(\Delta^\Sigma) = t_{\text{кон}} = \Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)} = \Delta_{11}^{(2)} + \Delta_{12}^{(2)} \rightarrow \min_{\Delta^\Sigma}, \quad (4.38)$$

$$\max_{x_1 \in [x_{01}, x_{11}]} |Q_1(x_1, \Delta^\Sigma) - Q_1^*(x_1)| \leq \varepsilon_1, \quad (4.39)$$

$$\max_{x_2 \in [0, x_{01}]} |Q_2(x_2, \Delta^\Sigma) - Q_2^*(x_2)| \leq \varepsilon_2, \quad (4.40)$$

согласно которой необходимо минимизировать одинаковую для обоих управлений сумму длительностей двух интервалов их постоянства, равную продолжительности оптимального процесса управления, при ограничениях (4.39),(4.40), диктуемых требованиями (4.6) для всех $x_1 \in [x_{01}, x_{11}], x_2 \in [0, x_{01}]$.

Здесь подобно (2.20),(2.21) $\Delta^\Sigma = \Delta_1^\Sigma = (\Delta_{11}^{(1)}, \Delta_{12}^{(1)}, \Delta_{12}^{(2)})$ или $\Delta^\Sigma = \Delta_2^\Sigma = (\Delta_{11}^{(2)}, \Delta_{12}^{(2)}, \Delta_{12}^{(1)})$ в зависимости от выбора в качестве активного управления $u_1(t)$ или $u_2(t)$ соответственно, и $Q_1(x_1, \Delta^\Sigma), Q_2(x_2, \Delta^\Sigma)$ находятся в

форме (4.32)-(4.37) при $\Delta_{11}^{(2)} = \Delta_{11}^{(1)} + \Delta_{12}^{(1)} - \Delta_{12}^{(2)}$, если $\Delta^\Sigma = \Delta_1^\Sigma$, или при $\Delta_{11}^{(1)} = \Delta_{11}^{(2)} + \Delta_{12}^{(2)} - \Delta_{12}^{(1)}$, если $\Delta^\Sigma = \Delta_2^\Sigma$.

Подобно задаче быстродействия для двухканального управления автономным объектом, минимально достижимые в классе параметризуемых управляющих воздействий $U(\Delta_l^{(m)}, t)$ ошибки равномерного приближения $Q_1(x_1, t_{\text{кон}}), Q_2(x_2, t_{\text{кон}})$ к заданным состояниям $Q_1^*(x_1), Q_2^*(x_2)$ образуют для каждого из взаимосвязанных ОРП убывающий с возрастанием размерности искомого вектора параметров ряд неравенств вида (2.13), по месту в котором величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ устанавливаются аналогично (2.14)-(2.16) правила выбора числа его компонент в рассматриваемой конкретной ситуации [27, 58].

Согласно этим результатам, структура искомых оптимальных по быстродействию управлений действительно приобретает двухинтервальную форму (4.28), если заданные значения ε_1 и ε_2 в (4.39),(4.40) удовлетворяют соотношениям

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_{11\min}^{(2,2)}, \varepsilon_2 \geq \varepsilon_{21\min}^{(2,2)} \text{ при } \Delta^\Sigma = \Delta_1^\Sigma \text{ или } \varepsilon_1 \geq \varepsilon_{12\min}^{(2,2)}, \varepsilon_2 \geq \varepsilon_{22\min}^{(2,2)} \text{ при } \Delta^\Sigma = \Delta_2^\Sigma,$$

где $\varepsilon_{mp\min}^{(2,2)}$ – минимально достижимая в классе двухинтервальных управляющих воздействий $u_1(\Delta_p^\Sigma, t), u_2(\Delta_p^\Sigma, t)$ ошибка равномерного приближения для каждого из объектов ($m = 1, 2$):

$$\varepsilon_{mp\min}^{(2,2)} = \min_{\Delta_p^\Sigma} \left\{ \max_{x_m} |Q_m(x_m, \Delta_p^\Sigma) - Q_m^*(x_m)| \right\}, \quad m, p = 1, 2. \quad (4.41)$$

Таким образом, исходная задача быстродействия сводится к задаче полубесконечной оптимизации (4.38)-(4.40) только в том случае, когда величины ε_1 и ε_2 удовлетворяют указанным условиям, которые всюду далее считаются выполненными.

Решение ЗПО (4.38)-(4.40) может быть получено по общей схеме альтернативного метода, который в рассматриваемом случае взаимосвязанных ОРП будет гарантировать в условиях (2.4) возможность выполнения только

одного из ограничений (4.39) или (4.40) для допустимых значений $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_{11\min}^{(2,2)}$ или $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_{22\min}^{(2,2)}$ за счет выбора в качестве вектора свободно варьируемых параметров активного управления, соответственно Δ_1^Σ или Δ_2^Σ . При этом возможности выбора параметров другого управления стесняются условием (2.4) и достигаемая точность ε_2^* или ε_1^* равномерного приближения соответственно $Q_2(x_2, \Delta_{1*}^\Sigma)$ к $Q_2^*(x_2)$ или $Q_1(x_1, \Delta_{2*}^\Sigma)$ к $Q_1^*(x_1)$ вместо заданных в (4.39),(4.40) величин ε_2 или ε_1 остается априори неизвестной.

Подобно (2.17),(2.18), заданные достижимые значения ε_1 при $\Delta^\Sigma = \Delta_1^\Sigma$ или ε_2 при $\Delta^\Sigma = \Delta_2^\Sigma$ (то есть строгие равенства в (4.39),(4.40)) достигаются в конце оптимального процесса в некоторых точках $x_{1j}^0 \in [x_{01}, x_{11}]$, $j = \overline{1, \Psi_1}$; $x_{2j}^0 \in [0, x_{01}]$, $j = \overline{1, \Psi_2}$ отрезков $[x_{01}, x_{11}] \ni x_1$, $[0, x_{01}] \ni x_2$. Суммарное число $\Psi_\Sigma = \Psi_1 + \Psi_2$ таких точек оказывается равным, согласно альтернансным свойствам искомых решений, числу всех искомых параметров, включая $\Delta_{1*}^\Sigma, \varepsilon_2^*$ или $\Delta_{2*}^\Sigma, \varepsilon_1^*$ и заведомо нефиксируемые величины минимаксов соответственно $\varepsilon_{11\min}^{(2,2)}$ или $\varepsilon_{22\min}^{(2,2)}$, если с ними должны совпадать по исходным требованиям значения ε_1 или ε_2 в (4.39),(4.40).

Указанные равенства порождают замкнутую относительно всех неизвестных систему соотношений для результирующих значений функции состояния объекта управления при заданных достижимых величинах ε_1 и ε_2 в (4.39),(4.40):

$$\begin{aligned} |Q_1(x_{1j}^0, \Delta_{1*}^\Sigma) - Q^*(x_{1j}^0)| &= \varepsilon_1, \quad j = \overline{1, \Psi_1}; \\ |Q_2(x_{2j}^0, \Delta_{1*}^\Sigma) - Q^*(x_{2j}^0)| &= \varepsilon_2^*, \quad j = \overline{1, \Psi_2}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

если $\Delta^\Sigma = \Delta_1^\Sigma$, или

$$\begin{aligned} |Q_1(x_{1j}^0, \Delta_{2*}^\Sigma) - Q^*(x_{1j}^0)| &= \varepsilon_1^*, \quad j = \overline{1, \Psi_1}; \\ |Q_2(x_{2j}^0, \Delta_{2*}^\Sigma) - Q^*(x_{2j}^0)| &= \varepsilon_2, \quad j = \overline{1, \Psi_2}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

если $\Delta^\Sigma = \Delta_2^\Sigma$.

При этом в силу альтернативных свойств свободно варьируемых управлений здесь $\Psi_1 = \Psi_2 = 2$ при $\varepsilon_1 > \varepsilon_{11\min}^{(2,2)}$ или $\Psi_1 = 3, \Psi_2 = 2$ при $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11\min}^{(2,2)}$ в (4.42), либо $\Psi_1 = \Psi_2 = 2$ при $\varepsilon_2 > \varepsilon_{22\min}^{(2,2)}$ или $\Psi_1 = 2, \Psi_2 = 3$ при $\varepsilon_2 = \varepsilon_{22\min}^{(2,2)}$ в (4.43), и следовательно:

$$\Psi_\Sigma = \Psi_1 + \Psi_2 = \begin{cases} 4, & \text{если } \varepsilon_m > \varepsilon_{mp\min}^{(2,2)}; \\ 5, & \text{если } \varepsilon_m = \varepsilon_{mp\min}^{(2,2)}, \end{cases} \quad (4.44)$$

$m, p = 1$ или $m, p = 2$.

При наличии диктуемой закономерностями предметной области дополнительной информации о характере зависимостей $Q_m(x_m, \Delta_{p*}^\Sigma) - Q_m^*(x_m)$, $m = 1, 2$, от пространственных аргументов, которые позволяют идентифицировать значения x_{mj}^0 и знаки предельно допустимых отклонений $Q_m(x_{mj}^0, \Delta_{p*}^\Sigma) - Q_m^*(x_{mj}^0)$ в этих точках, обеспечивается редукция равенств (4.42), (4.43), составляемых для абсолютных величин указанных отклонений, к замкнутым системам уравнений следующего вида относительно самих разностей:

$$Q_m(x_{mj}^0, \Delta_{p*}^\Sigma) - Q_m^*(x_{mj}^0) = \pm \varepsilon, \quad m = 1, 2, \quad (4.45)$$

где каждой точке x_{mj}^0 в (4.42), (4.43) однозначным образом соответствует свой знак ε , под которым понимается соответствующие значения ε_1 и ε_2^* в (4.42) или ε_1^* и ε_2 в (4.43).

Равенства (4.45) характеризуют максимальные отклонения $Q_m(x_{mj}^0, \Delta_{p*}^\Sigma) - Q_m^*(x_{mj}^0)$ на всем отрезке изменения x_m , и, следовательно, внутренние точки x_{mj}^0 этих отрезков, принадлежащие множеству значений x_{mj}^0 в

(44),(45), являются точками максимума или минимума (в зависимости от знака правой части в (4.45)) рассматриваемой разности, в которых выполняются необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial}{\partial x_m} [Q_m(\tilde{x}_{mj}^0, \Delta_{p^*}^\Sigma) - Q_m^*(\tilde{x}_{mj}^0)] = 0, \quad m = 1, 2; \quad j = \overline{1, \Psi_3}; \quad \Psi_3 \leq \Psi_\Sigma, \quad p \in \{1, 2\}. \quad (4.46)$$

Совместным решением системы трансцендентных уравнений (4.45),(4.46) относительно всех искомым неизвестных, включая x_{mj}^0 , известными численными методами завершается предлагаемая процедура определения параметрических характеристик искомым граничных управляющих воздействий для выбранного варианта активного управления. Оптимальным считается такой из этих вариантов, при котором достигается минимальная длительность оптимального процесса.

Физические закономерности поведения нестационарных температурных полей в оптимальном процессе управления объектом (4.1)-(4.5) и альтернативные свойства $\Delta_{p^*}^\Sigma$, характеризуемые соотношением (4.44), определяют форму описываемых выражениями (4.32), (4.33) кривых $Q_1(x_1, \Delta_{p^*}^\Sigma)$, $Q_2(x_2, \Delta_{p^*}^\Sigma)$ результирующего распределения температур по пространственной координате для любого из вариантов (4.42),(4.43), что позволяет заведомо идентифицировать в (4.42)-(4.44) координаты всех точек x_{1j}^0, x_{2j}^0 и знаки ε в (4.45).

Поскольку взаимосвязи между температурными полями двух объектов (4.1)-(4.4) осуществляются только за счет условий (4.4) их сопряжения, изменяющих величину теплового потока на контактной границе $x_1 = x_2 = x_{01}$, по сравнению со случаем отсутствия такого контакта, то конфигурация результирующего температурного состояния в рассматриваемой задаче быстрогодействия сохраняется для каждого из объектов аналогичной известному случаю их одноканального управления [36, 43].

В частности, применительно к варианту (4.43) для типового случая $Q_1^*(x_1) = Q_1^* = \text{const}$, $Q_2^*(x_2) = Q_2^* = \text{const}$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_{11\min}^{(2,2)}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{22\min}^{(2,2)}$ подобный анализ

приводит к однозначно устанавливаемой форме зависимостей $Q_1(x_1, \Delta_{2*}^\Sigma)$ и $Q_2(x_2, \Delta_{2*}^\Sigma)$ от пространственных аргументов x_1, x_2 , показанной на рис.4.3.

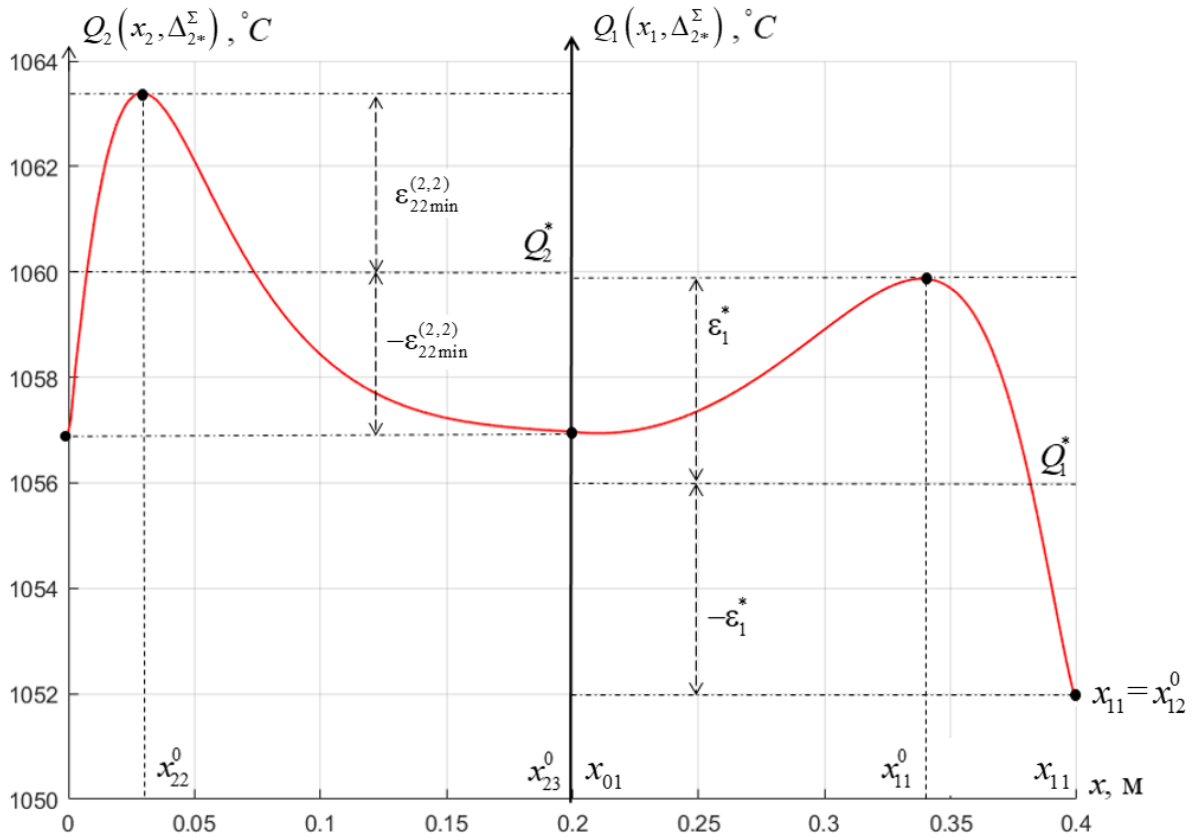


Рисунок 4.3 Температурное распределение системы взаимосвязанных ОРП в конце процесса оптимального управления

Непосредственно по виду кривых на рис.4.3 конструируется в пяти точках $x_{11}^0 = \tilde{x}_{11}^0 \in (x_{01}, x_{11})$, $x_{12}^0 = x_{11}$, $x_{21}^0 = 0$, $x_{22}^0 = \tilde{x}_{22}^0 \in (0, x_{01})$, $x_{23}^0 = x_{01}$. система семи уравнений (4.45), (4.46):

$$\begin{aligned}
 Q_1(x_{11}^0, \Delta_{2*}^\Sigma) - Q_1^* &= \varepsilon_1^*; \\
 Q_1(x_{11}, \Delta_{2*}^\Sigma) - Q_1^* &= -\varepsilon_1^*; \\
 Q_2(0, \Delta_{2*}^\Sigma) - Q_2^* &= -\varepsilon_{22\min}^{(2,2)}; \\
 Q_2(x_{22}^0, \Delta_{2*}^\Sigma) - Q_2^* &= \varepsilon_{22\min}^{(2,2)}; \\
 Q_2(x_{01}, \Delta_{2*}^\Sigma) - Q_2^* &= -\varepsilon_{22\min}^{(2,2)}; \\
 \frac{\partial Q_1(x_{11}^0, \Delta_{2*}^\Sigma)}{\partial x_1} &= \frac{\partial Q_2(x_{22}^0, \Delta_{2*}^\Sigma)}{\partial x_2} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

относительно семи неизвестных $\Delta_{2*}^\Sigma = (\Delta_{11*}^{(2)}, \Delta_{21*}^{(2)}, \Delta_{12*}^{(1)})$, $\varepsilon_{22\min}^{(2,2)}$, ε_1^* , \tilde{x}_{11}^0 , \tilde{x}_{22}^0 .

Аналогичным образом опознается в соответствии с (4.44) форма кривых $Q_1(x_1, \Delta_{1*}^\Sigma)$ и $Q_2(x_2, \Delta_{1*}^\Sigma)$ и приводится система уравнений (4.45), (4.46) к виду, подобному (4.47), для варианта (4.42).

Кривые результирующего распределения температур при нагреве двух стальных пластин, представленные на рис.4.3, получены по результатам численного решения системы уравнений (4.47)

($\Delta_{11*}^{(2)} = 155$ с, $\Delta_{12*}^{(2)} = 136$ с, $\Delta_{12*}^{(1)} = 18$ с, $\varepsilon_{22\min}^{(2,2)} = 3.2$ °C, $\varepsilon_1^* = 4$ °C) для заданных

значений $\varepsilon_1 = 3$ °C, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{22\min}^{(2,2)}$, $u_{1\max} = u_{2\max} = 30 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}$, $u_{1\min} = -0.3u_{1\max}$,

$$u_{2\min} = -0.7u_{2\max}, a_1 = 15.4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, a_2 = 14.6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}, \lambda_1 = 34 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{°C}}; \lambda_2 = 32 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{°C}}$$

, $\alpha = 4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{°C}}$, $Q_1^* = 1056$ °C, $Q_2^* = 1060$ °C, $x_{01} = 0.2$ м, $x_{11} = 0.4$ м, при которых это

решение оказывается оптимальным по быстродействию.

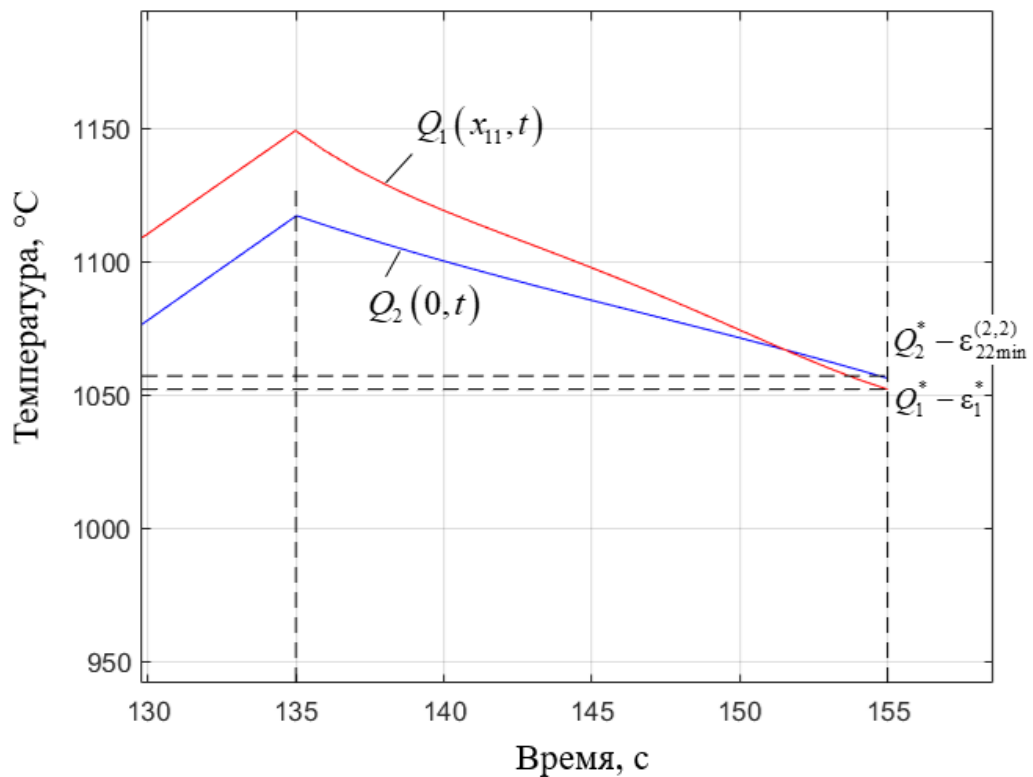


Рисунок 4.4 Изменение управляемых величин каждой на всем протяжении оптимального по быстродействию процесса управления

4.4 Выводы по четвертой главе

1. Разработан конструктивный метод решения задачи двухканального оптимального по быстродействию граничного управления двумя физически неоднородными СРП, описываемыми линейными уравнениями теплопроводности параболического типа в условиях идеального теплового контакта взаимодействующих сред применительно к наиболее употребительным в приложениях оценкам целевых множеств конечных состояний объекта в равномерной метрике.

2. Значительная специфика рассматриваемой задачи управления взаимосвязанных СРП проявляется при учете условий сопряжения взаимодействующих физически неоднородных сред на контактной поверхности. Разработанная технология решения начально-краевой задачи, моделирующей рассматриваемый объект управления, использует специальный метод описания исследуемых температурных полей в форме, содержащей равномерно сходящиеся ряды.

3. Исследуемая задача быстродействия решается по модифицированной схеме альтернативного метода, которая отличается от варианта двухканального управления одним объектом возможностью обеспечить заданную точность нагрева только для одного из объектов в условиях предельно достижимой ее величины для второго объекта и характеризуется усложненной конфигурацией пространственного распределения результирующих температурных состояний.

ГЛАВА 5. СИНТЕЗ СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ДВУХКАНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОРП

Данная глава посвящена решению задачи синтеза системы оптимального по быстродействию двухканального управления линейной моделью объекта с распределенными параметрами. Материал главы излагается в соответствии с публикацией соискателя [86].

5.1 Метод синтеза оптимальных регуляторов для ОРП с линейными обратными связями по неполному измерению состояния объекта при двухканальном управлении

В главе 2 были получены решения ряда задач оптимального по быстродействию двухканального программного управления ОРП, описываемыми уравнениями (1.12)-(1.17) нестационарной теплопроводности с граничными и внутренними сосредоточенными управляющими воздействиями в условиях (1.27) заданной точности ε равномерного приближения к требуемому конечному состоянию.

В результате были определены все искомые параметры оптимального процесса, необходимые для его реализации по найденной программе изменения управляющих воздействий во времени.

Если в системе управления в реальном масштабе времени может быть получена достоверная информация о поведении управляемой величины, то дальнейшая проблема сводится к задаче построения замкнутой системы оптимального управления с обратными связями, обеспечивающей перевод объекта управления в требуемое конечное состояние с заданной точностью за минимальное время [81 - 83].

В пренебрежении инерционностью и погрешностями результатов всегда неполного наблюдения за текущим состоянием объекта рассмотрим далее соответствующую задачу синтеза оптимальной по быстродействию системы

управления ОРП (1.12)-(1.17) при двухканальном управлении, реализующей автоматическую обработку найденного программного управления.

При определении искомого двухканального управляющего воздействия $U^*(t)$ вида (1.34),(1.35) с точностью до вектора $\Delta^\Sigma = (\Delta_{lq}^{(1)}, l=1,2; q=\overline{1,N_{11}})$ длительностей $\Delta_{1q}^{(1)}, \Delta_{2q}^{(1)}$ интервалов постоянства в (1.38) соответственно первого и второго управления $u_1^*(t)$ и $u_2^*(t)$ релейной формы всё бесконечномерное фазовое пространство модальных переменных $\bar{Q} = (\bar{Q}_n(t)), n=1,2,\dots$ в (1.15) делится на два полупространства для каждого из них, в пределах которых поведение управляемой величины $Q(x,t)$ отвечает максимально или минимально допустимым значениям $u_{1\max}$ или $u_{1\min}$ для $i=1,2$ в соответствии с ограничениями (1.30). На границах, разделяющих эти полупространства и называемых гиперповерхностями переключения, происходит переход значений $U^*(t)$ с одного из предельно допустимых значений в (1.30) на другое.

Именно наличие двух гиперповерхностей переключения является в данном случае основной особенностью задачи синтеза по сравнению с одноканальным управлением. Если уравнения гиперповерхностей переключения в пространстве модальных переменных \bar{Q}_n

$$h_i^*(\bar{Q}) = 0, i = 1, 2,$$

определены с помощью известных функций $h_i^*(\bar{Q})$, называемых функциями переключения, то их знак в каждой точке $\bar{Q}(t)$ идентифицирует принадлежность этой точки соответствующим полупространствам, и следовательно, однозначно фиксирует в соответствующий момент времени значение оптимального управления. Тогда соответствующий алгоритм:

$$u_i^*(\bar{Q}) = \frac{u_{i\max} + u_{i\min}}{2} \pm \frac{u_{i\max} - u_{i\min}}{2} \text{sign}(h_i^*(\bar{Q})), i = 1, 2, \quad (5.1)$$

определяет процедуру синтеза замкнутой системы оптимального быстрогодействия при полном измерении состояния объекта с обратными связями по всем координатам вектора \bar{Q} .

Попытка синтеза замкнутой системы, функционирующей по такому закону, приводит к практически невыполнимой задаче определения уравнения гиперповерхности переключения и последующего моделирования функций $h_i^*(\bar{Q})$ при нереальном требовании контроля по всем компонентам бесконечномерного вектора \bar{Q} [18, 84]. Переход к реализуемой структуре замкнутой системы с обратными связями по неполному измерению состояния $Q(\tilde{x}_j, t) = Q_j(t)$, $j = \overline{1, k}$ в некоторых k -отдельных точках $\tilde{x}_j \in [0, x_1]$ может быть выполнен путем выбора других, отличных от $h_i^*(\bar{Q})$, функций переключения $h_i(\bar{Q})$, $i = \overline{1, 2}$ для каждого из управляющих воздействий $u_i^*(t)$, $i = 1, 2$, которые формируются только по измеряемым величинам $Q_j(t)$ и для которых выполняются условия

$$\text{sign } h_i^*(\bar{Q}(t)) = \text{sign } h_i(\bar{Q}(t)), \quad i = 1, 2; \quad t \in [0, t_{\text{кон}}^*] \quad (5.2)$$

на всем протяжении оптимального процесса с переходом через нуль $h_i(\bar{Q}(t))$ в те же самые (и только в эти) моменты времени, что и $h_i^*(\bar{Q})$ [18]. При выполнении данных требований закон обратной связи

$$u_i^*(\bar{Q}) = \frac{u_{i\max} + u_{i\min}}{2} \pm \frac{u_{i\max} - u_{i\min}}{2} \text{sign}(h_i(\bar{Q})), \quad i = 1, 2 \quad (5.3)$$

повторяет алгоритм управления (5.1) при принципиальном упрощении функций переключения.

Можно показать, что указанным условиям удовлетворяет выбор $h_i(Q)$ в форме линейной комбинации k сигналов обратных связей по измеряемым величинам $Q_j(t)$, $j = \overline{1, k}$ с коэффициентами передачи ρ_{ij} , зависящими от начального состояния объекта [18]:

$$h_i(\bar{Q}) = h_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_k) = \sum_{j=1}^k \rho_{ij} [Q(\tilde{x}_j, t_{\text{кон}}^*) - Q_j(t)], \quad i = 1, 2; \quad j = \overline{1, k}. \quad (5.4)$$

Если теперь применительно к типичному варианту одинакового числа $N_{11}^* = N_{21}^* = N_0^*$ интервалов постоянства обоих оптимальных управляющих воздействий принять число k точек контроля управляемой величины в (5.4) равным числу N_0^* для заданного ε в (2.20), (2.21), т.е. положить:

$$h_i(\bar{Q}) = h_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_{N_0^*}) = \sum_{j=1}^{N_0^*} \rho_{ij} [Q(\tilde{x}_j, t_{\text{кон}}^*) - Q_j(t)], \quad i = 1, 2; \quad j = \overline{1, N_0^*}, \quad (5.5)$$

то условия равенства нулю $h_i(\bar{Q})$ в требуемые моменты времени $\tilde{t}_{im}, m = \overline{1, N_0^* - 1}, i = 1, 2$, переключения оптимальных программ $u_i^*(t)$, являющиеся одновременно нулями функции $h^*(\bar{Q})$ в (5.1), выполняются для каждого из заданных начальных состояний $Q(x, 0)$ в том случае (рис.5.1),

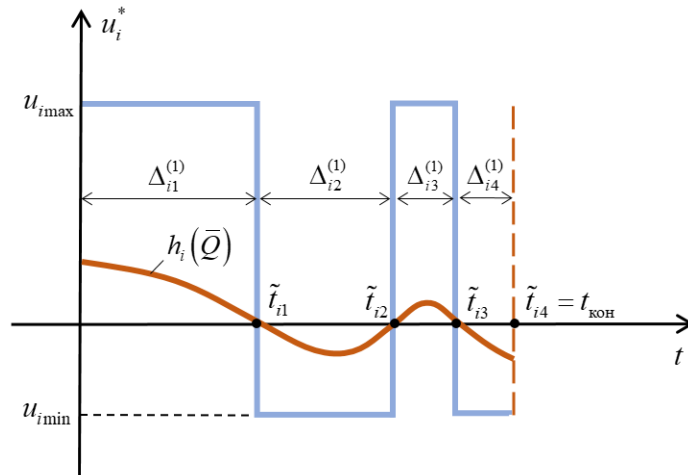


Рисунок 5.1 Требования к функции переключения $h_i(\bar{Q})$ ($N_0^* = 4$)

когда коэффициенты передачи $\rho_{ij}, j = \overline{1, N_0^*}$, опосредованно зависящие от начального состояния объекта $Q(x, 0)$ через значения $Q_j(\tilde{t}_{im})$, являются нетривиальными решениями однородной системы $N_0^* - 1$ линейных уравнений с N_0^* неизвестными:

$$\sum_{j=1}^{N_0^*} \rho_{ij} [Q(\tilde{x}_j, t_{\text{кон}}^*) - Q_j(\tilde{t}_{im})] = 0, \quad i = 1, 2; \quad m = \overline{1, N_0^* - 1}. \quad (5.6)$$

Поскольку ранг этой системы не превышает $N_0^* - 1$, такое решение всегда существует, причем в конечный момент времени $t = \tilde{t}_{iN_0^*} = t_{\text{кон}}^*$ равенство (5.6) по определению (5.5) удовлетворяется автоматически.

Значения $\tilde{t}_{im}, t_{\text{кон}}^*$ могут быть найдены по результатам расчета оптимального по быстродействию программного управления $u_i^*(t)$ альтернансным методом по схеме, описанной в главе 2. При известных $\tilde{t}_{im}, t_{\text{кон}}^*$ значения $Q(\tilde{x}_j, \tilde{t}_{im})$ и $Q(\tilde{x}_j, t_{\text{кон}}^*)$ определяются по решениям уравнений объекта, отвечающим $u_i^*(t)$. По полученным данным искомые коэффициенты ρ_{ij} вычисляются как корни системы уравнений (5.6) отдельно для $i=1$ и $i=2$ с заданными элементами $[Q(\tilde{x}_j, t_{\text{кон}}^*) - Q_j(\tilde{t}_{im})]$ её матрицы.

По крайней мере, одну из свободных неизвестных в (5.6) можно положить равной любому заранее фиксируемому числу, отличному от нуля.

Как правило, можно считать, что функции переключения $h_i(\bar{Q})$ в (5.5) обладают чебышевскими свойствами [36], в силу которых они не могут иметь более $N_0^* - 1$ нулей на всем протяжении оптимального процесса управления, что приводит в условиях (5.6) к выполнению равенства (5.2) и следовательно обеспечивает переход к решению задачи синтеза по алгоритму (5.3), (5.5):

$$u_i^*(Q_1, Q_2, \dots, Q_{N_0^*}) = \frac{u_{i\max} + u_{i\min}}{2} \pm \frac{u_{i\max} - u_{i\min}}{2} \text{sign} \sum_{j=1}^{N_0^*} \rho_{ij}(Q_0) (Q(\tilde{x}_j, t_{\text{кон}}^*) - Q_j(t)), \quad (5.7)$$

$$i = 1, 2.$$

Конкретный выбор N_0^* точек контроля \tilde{x}_j может быть выполнен, исходя из соотношений простоты реализации неполного измерения состояния, качественных характеристик измерительных устройств и т.д.. Предпочтительным во многих случаях оказывается выбор точек \tilde{x}_j из числа точек альтернанса с максимально допустимыми отклонениями конечных значений результирующего температурного распределения от требуемого состояния [18].

Поскольку значения \tilde{t}_{im} в (5.6) зависят от начальных распределений $Q(x,0)$, то и коэффициенты обратной связи ρ_{ij} в (5.6),(5.7) изменяются вместе с $Q(x,0)$.

Если применительно к конкретным условиям функционирования оптимальных процессов в технических системах возможные изменения $Q(x,0)$ невелики, то можно построить субоптимальную систему управления с постоянными значениями $\rho_{ij} = \text{const}$, рассчитанными для наиболее характерного начального состояния объекта. Такая наиболее просто реализуемая система управления обеспечивает отработку оптимальной программы изменения управляющих воздействий во времени с некоторым приближением при отклонении $Q(x,0)$ от расчетной величины, последующий анализ которого определяет возможности использования подобной упрощенной системы в условиях заданных требований к соответствующим погрешностям.

Если для рассматриваемого объекта известен некоторый набор существенно различающихся, но мало варьируемых возможных начальных состояний, то построение субоптимальной по быстродействию САУ ОРП можно выполнить по алгоритму (5.7) с перестраиваемым в зависимости от заведомо фиксируемого варианта $Q(x,0)$ набором заранее рассчитываемых коэффициентов обратной связи.

В наиболее ответственных случаях, когда пренебрежение вариациями $Q(x,0)$ оказывается недопустимым из условий требуемой точности отработки программного управления, следует дополнить структуру замкнутой системы вычислительным устройством, осуществляющим с требуемым быстродействием предварительный расчет оптимальных программ $u_1^*(t), u_2^*(t)$ и значений ρ_{ij} описанным ранее способом по заранее нефиксируемому начальному состоянию, автоматический контроль которого может осуществляться, в частности, по наблюдаемым сигналам используемых датчиков обратной связи в точках \tilde{x}_j .

В итоге синтез оптимального по быстродействию управления по алгоритму (5.7) сводится к построению релейной системы автоматического регулирования

с линейными обратными связями по значениям управляемой величины $Q(\tilde{x}_j, t)$ в некоторых точках $\tilde{x}_j, j = \overline{1, N_0^*}$ пространственной области ее распределения, число которых должно быть равно числу интервалов постоянства обоих управляющих воздействий релейной формы (рис.5.2).

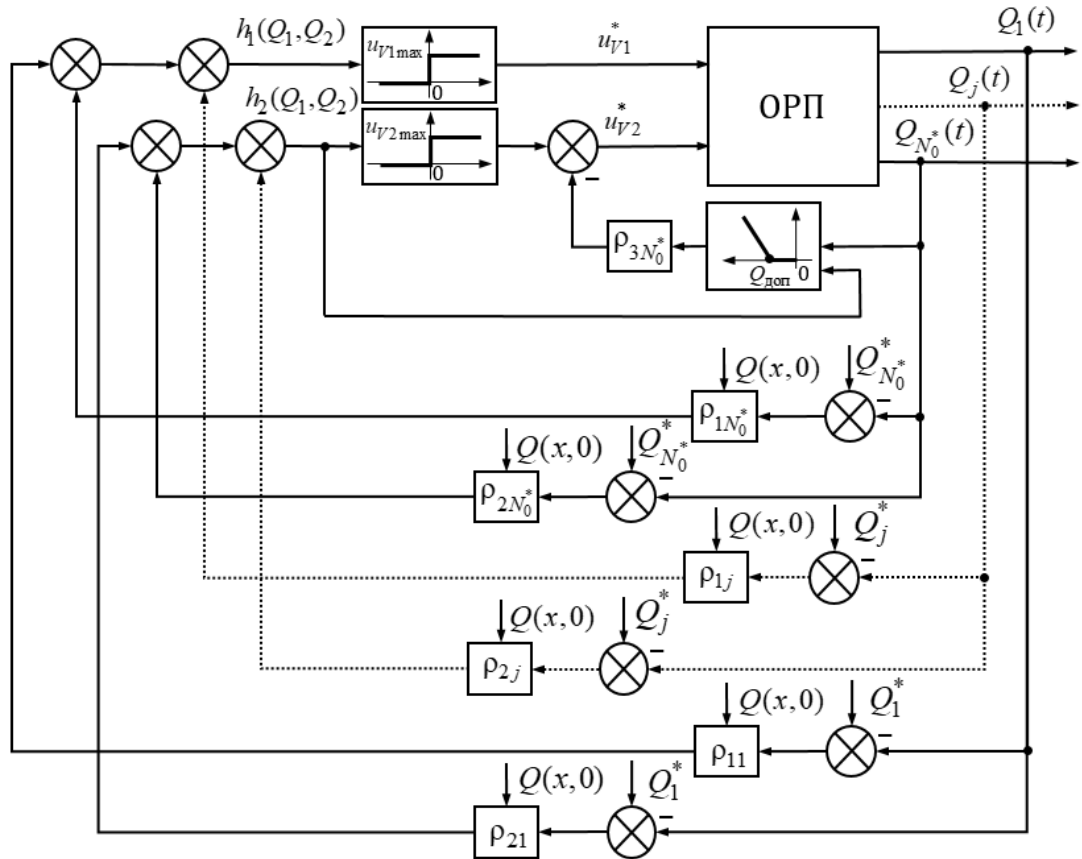


Рисунок 5.2 Структурная схема оптимальной по быстродействию системы двухканального управления ОРП

Здесь считается, что релейные элементы учитывают характеристики регулирующих органов на входе объекта.

Коэффициенты обратной связи ρ_{ij} остаются постоянными на всем протяжении каждого оптимального процесса, а их изменения от одного процесса к другому осуществляются указанными выше способами в зависимости от конкретных требований к точности обработки программного управления.

Окончание оптимального по быстродействию процесса управления фиксируется равенством нулю функций переключения $h_i(\bar{Q})$ в (5.5) при $t = t_{\text{кон}}^*$.

Если в оптимальном процессе нарушается фазовое ограничение на $\max_x Q(x,t)$ (раздел 3.1 в главе 3), то его учет обеспечивается дополнением структуры замкнутой системы (рис.5.2) задержанной обратной связью по ограничиваемой величине, с помощью которой осуществляется ее стабилизация на предельно допустимом уровне, реализующая участок движения по ограничению [18, 75].

Функции переключения по-прежнему определяются в виде (5.5), но уже с другими коэффициентами обратной связи ρ_{ij} , которые находятся описанным выше способом для измененных значений \tilde{t}_{im} по программным управлениям, найденным альтернативным методом с учетом фазового ограничения (раздел 3.1 главы 3).

5.2 Синтез оптимальной по быстродействию системы двухканального управления процессом индукционного нагрева

Рассмотрим в качестве конкретного примера [86], представляющего самостоятельный интерес, оптимальный по быстродействию процесс индукционного нагрева металлической заготовки с двумя сосредоточенными управляющими воздействиями $u_{v1}(t)$ и $u_{v2}(t)$ по стесняемой ограничениями (2.40) мощности внутреннего тепловыделения на обеих поверхностях нагреваемой неограниченной пластины, описываемый краевой задачей третьего рода (2.38)-(2.41) с равномерно распределенным начальным состоянием $Q(x,0) = Q_0 = \text{const}$ при $Q_{cp}(t) = Q_0$ (раздел 2.3).

В типичном случае двухинтервальных управлений $u_{v1}^*(t)$ и $u_{v2}^*(t)$ вида (2.43) (рис.2.1) функции переключения (5.5) при $N_0^* = 2$ должны быть сформированы по сигналам обратных связей по температурам $Q(\tilde{x}_1, t) = Q_1(t)$, $Q(\tilde{x}_2, t) = Q_2(t)$ в двух точках \tilde{x}_1 и \tilde{x}_2 по толщине пластины:

$$\begin{aligned} h_1(Q_1, Q_2) &= \rho_{11} \left(Q(\tilde{x}_1, t_{\text{кон}}^*) - Q_1(t) \right) + \rho_{12} \left(Q(\tilde{x}_2, t_{\text{кон}}^*) - Q_2(t) \right); \\ h_2(Q_1, Q_2) &= \rho_{21} \left(Q(\tilde{x}_1, t_{\text{кон}}^*) - Q_1(t) \right) + \rho_{22} \left(Q(\tilde{x}_2, t_{\text{кон}}^*) - Q_2(t) \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

При заданной точности нагрева $\varepsilon = \varepsilon_{1\text{min}}^{(2,2)}$ удобно выбрать \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 на множестве точек альтернанса $\{x_j^0\}$ в системе уравнений (2.28), например $\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_2 = x_3^0$ (рис.2.3,а), где результирующие значения температур $Q(\tilde{x}_1, t_{\text{кон}}^*) = Q(0, t_{\text{кон}}^*) = Q(0, \Delta_{1*}^\Sigma)$ и $Q(\tilde{x}_2, t_{\text{кон}}^*) = Q(x_3^0, t_{\text{кон}}^*) = Q(x_3^0, \Delta_{1*}^\Sigma)$ в конце оптимального процесса должны быть равны минимально допустимым величинам $Q^* - \varepsilon_{1\text{min}}^{(2,2)}$, как это следует из (2.28), независимо от начальной температуры Q_0 применительно к рассматриваемому случаю $\varepsilon = \varepsilon_{1\text{min}}^{(2,2)}$.

Тогда, выбирая в качестве свободной неизвестной в (5.6) величину ρ_{i1} и принимая $\rho_{11} = \rho_{21} = 1$, будем иметь вместо систем уравнений (5.6) по одному уравнению относительно $\rho_{i2}, i=1,2$, и функции переключения (5.8) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} h_1(Q_1, Q_2) &= Q^* - \varepsilon_{1\text{min}}^{(2,2)} - Q(0, t) + \rho_{12} \left(Q^* - \varepsilon_{1\text{min}}^{(2,2)} - Q(x_3^0, t) \right), \\ h_2(Q_1, Q_2) &= Q^* - \varepsilon_{1\text{min}}^{(2,2)} - Q(0, t) + \rho_{22} \left(Q^* - \varepsilon_{1\text{min}}^{(2,2)} - Q(x_3^0, t) \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

В соответствии с (5.3),(5.9),(2.40) получаем теперь следующий алгоритм оптимального двухканального управления для каждого из управляющих воздействий:

$$\begin{aligned} u_{V1}^*(\bar{Q}) &= \frac{u_{V1\text{max}}}{2} \left[1 + \text{sign} \left(Q^* - \varepsilon_{1\text{min}}^{(2,2)} - Q(0, t) + \rho_{12} \left(Q^* - \varepsilon_{1\text{min}}^{(2,2)} - Q(x_3^0, t) \right) \right) \right]; \\ u_{V2}^*(\bar{Q}) &= \frac{u_{V2\text{max}}}{2} \left[1 + \text{sign} \left(Q^* - \varepsilon_{1\text{min}}^{(2,2)} - Q(0, t) + \rho_{22} \left(Q^* - \varepsilon_{1\text{min}}^{(2,2)} - Q(x_3^0, t) \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (5.10)$$

реализуемый в замкнутой системе управления вида рис.5.2 в частном случае $N_0^* = 2$ (рис.5.3). Здесь однозначный выбор знака в (5.3),(5.7) определяется заведомо известными значениями $u_{Vi}^*(t) = u_{Vi\text{max}}(t)$ на первом интервале оптимального процесса в задаче нагрева до требуемой температуры $Q^* > Q_0$.

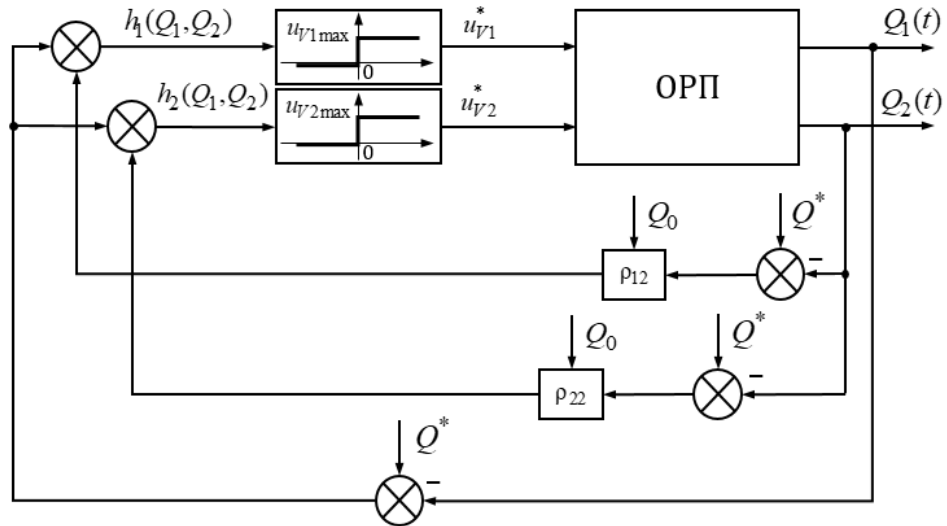


Рисунок 5.3 Структурная схема замкнутой системы оптимального по быстрдействию двухканального управления процессом индукционного нагрева при $\varepsilon = \varepsilon_{1\min}^{(2,2)}$

Равенства (5.6) для единственного в данном случае момента $\tilde{t}_{i1}(Q_0), i = 1, 2$ переключения $u_{Vi}^*(t)$ с первого ($u_{Vi}^* = u_{Vi\max}(t)$) на второй ($u_{Vi}^* = 0$) интервал управления, зависящего от начальной температуры Q_0 , приводят при функциях переключения (5.10) к следующей простой формуле для вычисления коэффициентов обратной связи ρ_{i2} в функции от Q_0 :

$$\rho_{i2}(Q_0) = \frac{Q(0, \tilde{t}_{i1}(Q_0)) - Q^* + \varepsilon_{1\min}^{(2,2)}(Q_0)}{Q^* - \varepsilon_{1\min}^{(2,2)}(Q_0) - Q(x_3^0, \tilde{t}_{i1}(Q_0))}, \quad i = 1, 2. \quad (5.11)$$

Здесь значения \tilde{t}_{i1} и $\varepsilon_{1\min}^{(2,2)}$ определяются в зависимости от Q_0 при расчете программного управления альтернансным методом. Вместо точек $\tilde{x}_1 = 0, \tilde{x}_2 = x_3^0$ могут быть выбраны, исходя из практических возможностей неполного контроля состояния объекта, любые другие точки на отрезке $[0, x_1] \in x$, для которых значения $Q(\tilde{x}_j, \tilde{t}_{i1}); j, i = 1, 2$ опять находятся по результатам построения программного управления.

На плоскости температур $Q(\tilde{x}_1, t) = Q_1(t), Q(\tilde{x}_2, t) = Q_2(t)$ указанный переход ко второму интервалу управления происходит на линиях переключения, задаваемых в параметрической форме зависимостями $Q_1(Q_0, \tilde{t}_{i1}(Q_0)),$

$Q_2(Q_0, \tilde{t}_{i1}(Q_0))$, $i=1,2$ величин Q_1 и Q_2 от параметра Q_0 в моменты \tilde{t}_{i1} окончания первых интервалов постоянства управлений u_{V1}^* и u_{V2}^* от параметра Q_0 (рис.5.4).

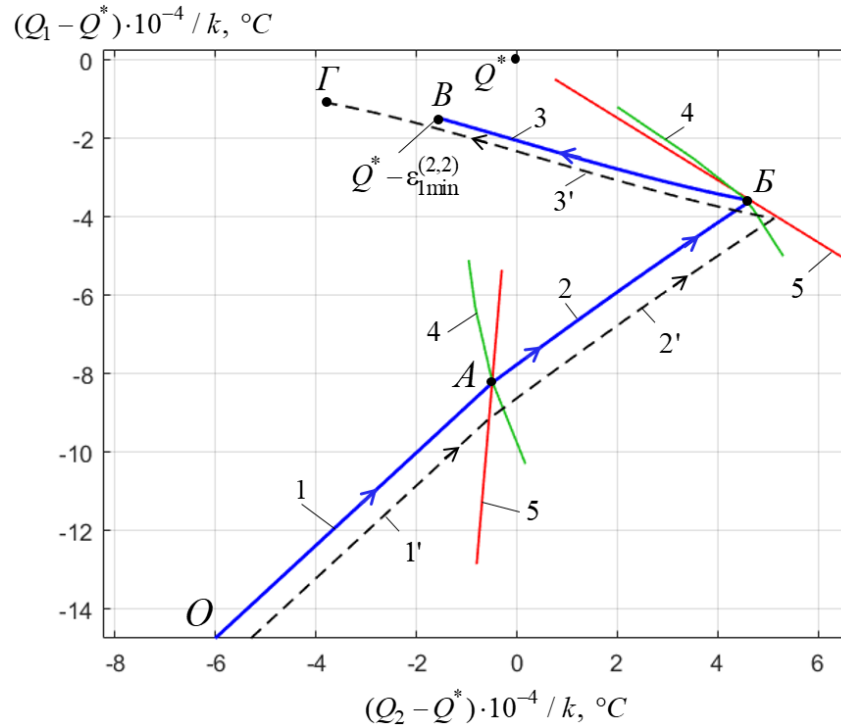


Рисунок 5.4 Линии переключения и фазовые траектории в системе оптимального по быстродействию управления: 1,2,3 – фазовые траектории на первом и втором интервалах для $Q_0^* = 20^\circ C$; 1',2',3' – фазовые траектории на первом и втором интервалах для $Q_0 = 80^\circ C$ в условиях (5.14); 4 – линии переключения соответственно (5.12),(5.13); 5 – прямые переключения (5.15)

Указанные зависимости определяются в явной форме путем вычисления интегралов по времени при $t = \tilde{t}_{i1}(Q_0), i=1,2$ в общем выражении (2.42) для температурного поля после подстановки управляющих воздействий вида (2.43). В результате будем иметь в условиях неравенства $\tilde{t}_{11} > \tilde{t}_{21}$, следующих из расчета программного управления (см. далее рис.5.7):

$$\begin{aligned}
 Q_1(Q_0, \tilde{t}_{11}(Q_0)) = & Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda x_1^2}{a E_n \eta_n^2} \times \left[W_{1n} u_{V1 \max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} \Delta_{11}^{(1)}(Q_0)} \right) + \right. \\
 & \left. + W_{2n} u_{V2 \max} \left(e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (\Delta_{11}^{(1)}(Q_0) - \Delta_{21}^{(1)}(Q_0))} - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} \Delta_{11}^{(1)}(Q_0)} \right) \right]; \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

$$Q_2(Q_0, \tilde{t}_{11}(Q_0)) = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda x_1^2}{a E_n \eta_n^2} \left(\cos \left(\eta_n \frac{x_3^0}{x_1} \right) + \frac{B i_1}{\eta_n} \sin \left(\eta_n \frac{x_3^0}{x_1} \right) \right) \times \\ \times \left[W_{1n} u_{V1 \max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} \Delta_{11}^{(1)}(Q_0)} \right) + W_{2n} u_{V2 \max} \left(e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (\Delta_{11}^{(1)}(Q_0) - \Delta_{21}^{(1)}(Q_0))} - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} \Delta_{11}^{(1)}(Q_0)} \right) \right]$$

для первой линии переключения $u_{V1}^*(t)$ и

$$Q_1(Q_0, \tilde{t}_{21}(Q_0)) = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda x_1^2}{a E_n \eta_n^2} \times \left[W_{1n} u_{V1 \max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} \Delta_{21}^{(1)}(Q_0)} \right) + W_{2n} u_{V2 \max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} \Delta_{21}^{(1)}(Q_0)} \right) \right]; \\ Q_2(Q_0, \tilde{t}_{21}(Q_0)) = Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda x_1^2}{a E_n \eta_n^2} \left(\cos \left(\eta_n \frac{x_3^0}{x_1} \right) + \frac{B i_1}{\eta_n} \sin \left(\eta_n \frac{x_3^0}{x_1} \right) \right) \times \\ \times \left[W_{1n} u_{V1 \max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} \Delta_{21}^{(1)}(Q_0)} \right) + W_{2n} u_{V2 \max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} \Delta_{21}^{(1)}(Q_0)} \right) \right] \quad (5.13)$$

для второй линии переключения $u_{V2}^*(t)$.

При равномерном распределении начальной температуры по толщине пластины все возможные величины Q_0 лежат на прямой $Q_1 = Q_2$, и все значения $\Delta_{11}^{(1)}, \Delta_{21}^{(1)}$ находятся в зависимости от Q_0 при расчете программного управления. Расчет коэффициентов обратной связи по формуле (5.11) обеспечивает переключение оптимальных управлений u_{V1}^* и u_{V2}^* на линиях (5.12) и (5.13), реализуя тем самым оптимальный по быстродействию процесс нагрева для любой начальной температуры.

Если можно ограничиться выбором некоторой заранее фиксируемой величины $Q_0 = Q_0^*$ в (5.11), то субоптимальный по быстродействию процесс нагрева в условиях малых вариаций Q_0^* реализуется по алгоритму (5.10) с постоянными коэффициентами обратной связи ρ_{i2}^* и ρ_{22}^* , вычисляемыми для Q_0^* согласно (5.11):

$$\rho_{i2}^* = \frac{Q(0, \tilde{t}_{i1}) - Q^* + \varepsilon_{1 \min}^{(2,2)}}{Q^* - \varepsilon_{1 \min}^{(2,2)} - Q(x_3^0, \tilde{t}_{i1})}, \quad i = 1, 2. \quad (5.14)$$

При этом, как следует из равенства нулю функций переключения (5.9), линии переключения (5.12) и (5.13) заменяются прямыми соответственно:

$$\begin{aligned} (Q^* - \varepsilon_{1\min}^{(2,2)})(1 + \rho_{12}^*) - Q_1 - \rho_{12}^* Q_2 &= 0; \\ (Q^* - \varepsilon_{1\min}^{(2,2)})(1 + \rho_{22}^*) - Q_1 - \rho_{22}^* Q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Для указанных в таблице 5.1 исходных номинальных данных, отвечающих процессу индукционного нагрева пластины из титанового сплава толщиной 0.2 м перед последующей операцией горячего прессования, найдены путем решения системы уравнений (2.28) значения параметров оптимального процесса и коэффициентов обратной связи в (5.10) для фиксированного значения $Q_0 = 20^\circ\text{C}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{11}^{(1)} &= 1607 \text{ сек}, \Delta_{12}^{(1)} = 130 \text{ сек}, \Delta_{22}^{(1)} = 262 \text{ сек}, \\ \varepsilon_{1\min}^{(2,2)} &= 19^\circ\text{C}, x_2^0 = 0,04 \text{ м}, x_3^0 = 0,1 \text{ м}, x_4^0 = 0,17 \text{ м}, \\ \rho_{12} &= 1,26, \rho_{22} = -0,07, \end{aligned}$$

и отвечающие этим результатам пространственные температурные распределения (рис.5.5).

Таблица 5.1 – Исходные данные для расчета

Обозначение	Параметр	Значение	Единица измерения
-	Материал	титан	-
x_1	Толщина пластины	0.2	м
Q_0	Начальная температура	20	$^\circ\text{C}$
Q^*	Требуемая конечная температура	960	$^\circ\text{C}$
λ	Коэффициент теплопроводности	14	Вт/(м · $^\circ\text{C}$)
a	Коэффициент температуропроводности	$4,34 \cdot 10^{-6}$	м ² / с
Bi_1	Критерий Био	0,43	-
Bi_2	Критерий Био	0,57	-
ξ	Параметр индукционного нагрева	4	-
$u_{V1\max}$	Максимальная величина поверхностной мощности нагрева по первому каналу управления	300	кВт/м ²
$u_{V2\max}$	Максимальная величина поверхностной мощности нагрева по второму каналу управления	393	кВт/м ²

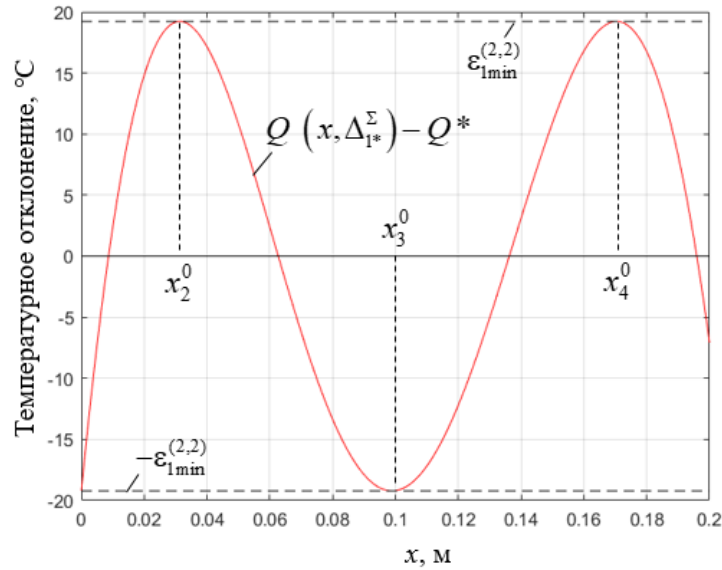


Рисунок 5.5 Кривая конечного температурного распределения при $\varepsilon = \varepsilon_{1\min}^{(2,2)}$

Моделирование замкнутой системы проводилось в среде программирования MATLAB/Simulink [86-88]. При моделировании теплового объекта (2.38)-(2.41) с граничными условиями третьего рода использовались методы конечномерного приближения [16], позволяющие представить объект в виде параллельного соединения достаточно большого числа $\tilde{N} = 30$ типовых апериодических звеньев (рис.5.6) с коэффициентами усиления $F_{1n}^*(x), F_{2n}^*(x)$ и постоянными времени T_n^* , которые предварительно вычисляются по следующим выражениям:

$$k = \frac{\lambda x_1^2}{a}; T_n^* = \frac{x_1^2}{a \eta_n^2}; n = \overline{1, \tilde{N}}$$

$$F_{1n}^*(x) = \frac{1}{E_n \eta_n^2} W_{1n} \left[\cos \left(\eta_n \frac{x}{x_1} \right) + \frac{Bi_1}{\eta_n} \sin \left(\eta_n \frac{x}{x_1} \right) \right];$$

$$F_{2n}^*(x) = \frac{1}{E_n \eta_n^2} W_{2n} \left[\cos \left(\eta_n \frac{x}{x_1} \right) + \frac{Bi_1}{\eta_n} \sin \left(\eta_n \frac{x}{x_1} \right) \right].$$
(5.16)

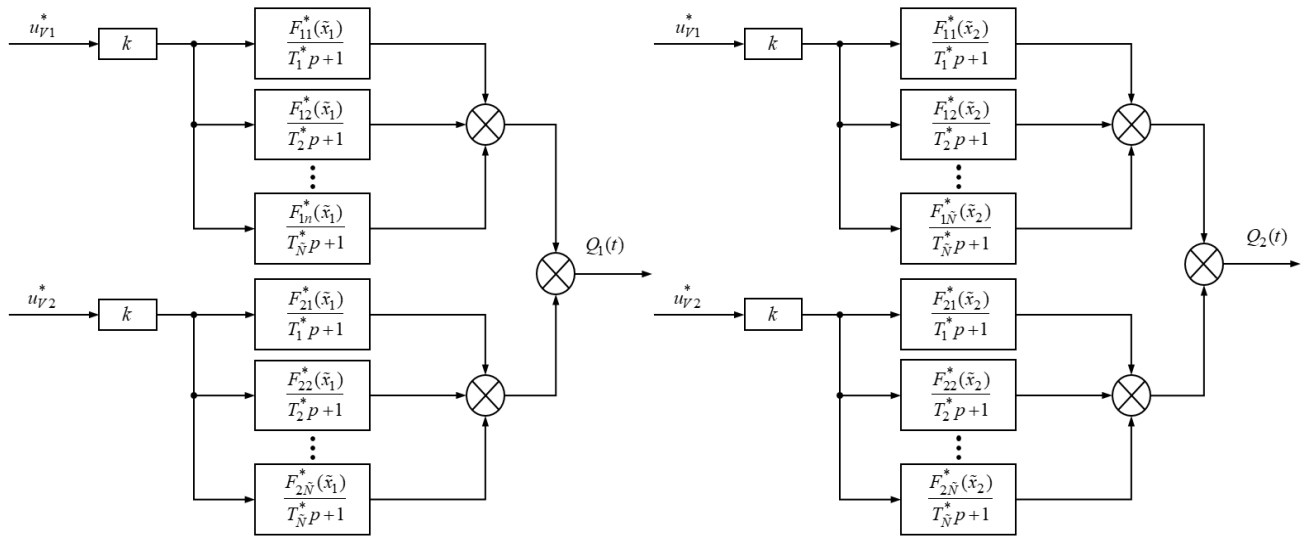
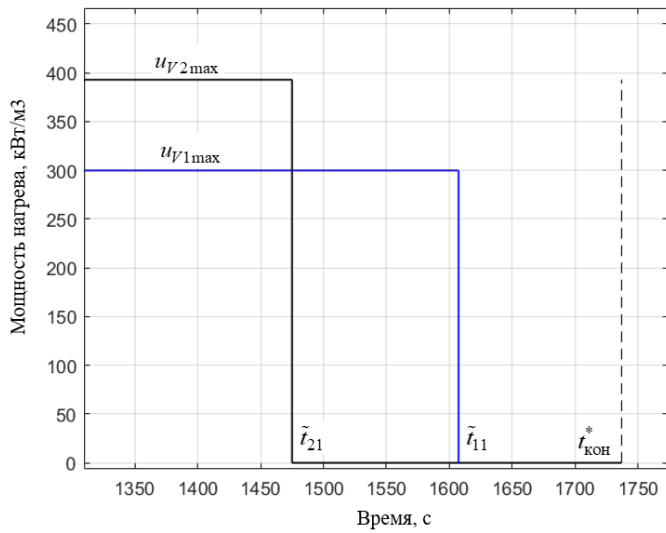
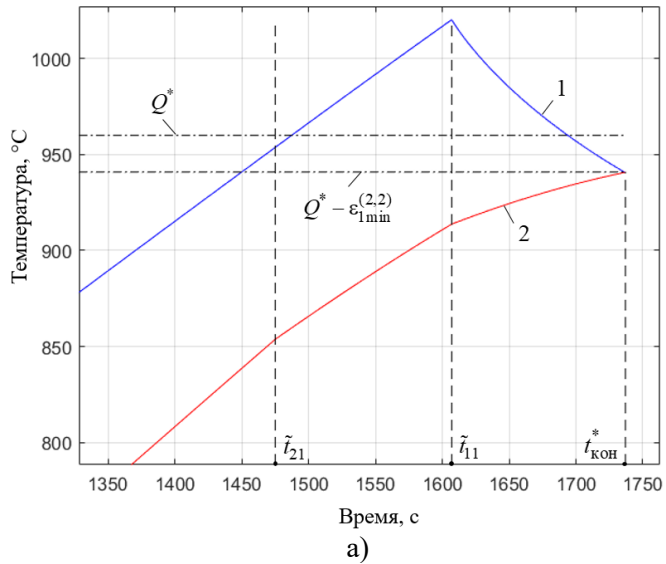


Рисунок 5.6 Структура объекта управления в виде параллельного соединения \tilde{N} аperiodических звеньев



б)

Рисунок 5.7 Оптимальный по быстродействию процесс управления нагревом пластины в замкнутой системе: а – температурное поле (1 – $Q_1(t)$, 2 – $Q_2(t)$), б – оптимальное управление.

На рис.5.7 приведены некоторые результаты компьютерного моделирования процесса управления индукционным нагревом в замкнутой системе оптимального быстрогодействия, построенной по схеме рис.5.3, с алгоритмами управления вида (5.10) для вышеуказанных значений параметров объекта при постоянных значениях ρ_{12}^*, ρ_{22}^* коэффициентов обратной связи.

На рис.5.4 показаны линии переключения (5.12),(5.13) а так же прямые (5.15) и фазовые траектории системы для принятого значения $Q_0 = Q_0^*$ в условиях (5.14). Переключения управляющего воздействия в системе управления происходят при этом в точках А, Б пересечения линий (5.12),(5.13) с прямыми (5.15) (на фазовой траектория 1,2,3), а окончание процесса управления фиксируется по моменту достижения равенства $Q_1 = Q_2$.

Уравнения фазовых траекторий определяются параметрическими зависимостями от текущего момента времени после подстановки управлений $u_{V1}^*(t)$ и $u_{V2}^*(t)$ в форму (2.43) в общее выражение (2.42) для температурного поля.

Для фазовой траектории ОАБВ на рис.5.4 они принимают следующий вид:

На участке ОА до переключения u_{V2}^* на второй интервал управления для $t \in [0, \Delta_{21}^{(1)}]$:

$$\begin{aligned}
 Q_1(t) &= Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda x_1^2}{a E_n \eta_n^2} \times \left[W_{1n} u_{V1\max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} t} \right) + W_{2n} u_{V2\max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} t} \right) \right]; \\
 Q_2(t) &= Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda x_1^2}{a E_n \eta_n^2} \left(\cos \left(\eta_n \frac{x_3^0}{x_1} \right) + \frac{B i_1}{\eta_n} \sin \left(\eta_n \frac{x_3^0}{x_1} \right) \right) \times \\
 &\quad \times \left[W_{1n} u_{V1\max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} t} \right) + W_{2n} u_{V2\max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} t} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

На участке АБ до переключения u_{V1}^* на второй интервал управления для $t \in [\Delta_{21}^{(1)}, \Delta_{11}^{(1)}]$:

$$\begin{aligned}
Q_1(t) &= Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda x_1^2}{a E_n \eta_n^2} \times \left[W_{1n} u_{V1\max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} t} \right) + W_{2n} u_{V2\max} \left(e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (t - \Delta_{21}^{(1)})} - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} t} \right) \right]; \\
Q_2(t) &= Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda x_1^2}{a E_n \eta_n^2} \left(\cos \left(\eta_n \frac{x_3^0}{x_1} \right) + \frac{Bi_1}{\eta_n} \sin \left(\eta_n \frac{x_3^0}{x_1} \right) \right) \times \\
&\times \left[W_{1n} u_{V1\max} \left(1 - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} t} \right) + W_{2n} u_{V2\max} \left(e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (t - \Delta_{21}^{(1)})} - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} t} \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.18}$$

На участке БВ до переключения u_{V1}^* на второй интервал управления для $t \in [\Delta_{11}^{(1)}, t_{\text{кон}}^*]$:

$$\begin{aligned}
Q_1(t) &= Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda x_1^2}{a E_n \eta_n^2} \times \left[W_{1n} u_{V1\max} \left(e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (t - \Delta_{11}^{(1)})} - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} t} \right) + \right. \\
&\quad \left. + W_{2n} u_{V2\max} \left(e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (t - \Delta_{21}^{(1)})} - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} t} \right) \right]; \\
Q_2(t) &= Q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda x_1^2}{a E_n \eta_n^2} \left(\cos \left(\eta_n \frac{x_3^0}{x_1} \right) + \frac{Bi_1}{\eta_n} \sin \left(\eta_n \frac{x_3^0}{x_1} \right) \right) \times \\
&\times \left[W_{1n} u_{V1\max} \left(e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (t - \Delta_{11}^{(1)})} - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} t} \right) + W_{2n} u_{V2\max} \left(e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} (t - \Delta_{21}^{(1)})} - e^{-\eta_n^2 \frac{a}{x_1^2} t} \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Процесс в замкнутой системе управления с алгоритмом обратной связи (5.10) в условиях (5.14), построенной по схеме рис.5.4, остается строго оптимальным по быстродействию с переключением управляющего воздействия на второй интервал в точках пересечения линий (5.12),(5.13) с прямыми (5.15) только при равенстве начальной температуры Q_0 ее расчетному значению Q_0^* , для которого находятся коэффициенты ρ_{11}^*, ρ_{22}^* в (5.14). При отклонениях Q_0 от этого значения, принятого в исходных данных для рассматриваемой задачи, конечное температурное распределение будет отличаться от температурного состояния при оптимальном режиме нагрева. В частности, на рис.5.5 представлены фазовые траектории процесса нагрева при начальной температуре $Q_0 = 80$, при которой траектории 1',2' не попадают в точки пересечения линий (5.12),(5.13) с прямыми (5.15), и переключение происходит на этих прямых. При

$Q_0 = 80$ конечное температурное состояние выбранных точек $\tilde{x}_1 = 0$, $\tilde{x}_2 = x_3^0$ вместо $Q(\tilde{x}_1, t_{\text{кон}}) = Q(\tilde{x}_2, t_{\text{кон}}) = Q^* - \varepsilon_{1\text{min}}^{(2,2)}$, согласно рис.5.5, имеет некоторое отклонение (на рис.5.4. конец фазовой траектории находится в точке Γ , а не B) и составляет $Q(\tilde{x}_1, t_{\text{кон}}) = Q^* - \varepsilon_{1\text{min}}^{(2,2)} - 28 \text{ }^\circ\text{C}$ и $Q(\tilde{x}_2, t_{\text{кон}}) = Q^* - \varepsilon_{1\text{min}}^{(2,2)} + 5 \text{ }^\circ\text{C}$ соответственно.

Предлагаемый метод синтеза замкнутых систем оптимального быстрогодействия может быть распространен на более сложные пространственно-многомерные, а также нелинейные модели ОРП при вычислении коэффициентов ρ_{ij} по результатам численного моделирования процессов оптимального программного управления.

5.3 Выводы по пятой главе

1. Решена задача синтеза системы оптимального по быстродействию двухканального управления объектом с распределенными параметрами с линейными обратными связями по неполному измерению состояния системы. Предлагаемый способ синтеза оптимальных регуляторов базируется на результатах расчёта оптимальных программных управлений для каждого из управляющих воздействий.

2. Построена оптимальная по быстродействию система двухканального управления процессом индукционного нагрева с двухинтервальными управляющими воздействиями по мощности внутреннего тепловыделения, формируемыми по сигналам обратной связи по температуре в двух точках области пространственного распределения управляемой функции состояния объекта.

3. Выполнено компьютерное моделирование оптимального по быстродействию процесса двухканального управления индукционным нагревом металлической пластины в замкнутой системе с неполным измерением состояния объекта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Приведена постановка задачи многоканальной оптимизации одного и группы взаимосвязанных ОРП в условиях равномерной оценки целевых множеств и общая схема ее решения, базирующаяся на процедуре редукции к специальной форме задачи полубесконечной оптимизации, на которую распространяется альтернансный метод отыскания ее решения с учетом существенных особенностей, связанных с векторным характером оптимизируемых управляющих воздействий. Показано, что решение задачи векторного управления ОРП усложняется по сравнению со скалярным вариантом увеличенной размерностью вектора оптимизируемых параметров управляющих воздействий, дополнительным ограничением на одинаковую длительность управляемого процесса для каждого из них и технологическими затруднениями использования известных схем применения альтернансного метода для нахождения искомым экстремалей за счет существенного видоизменения их альтернансных свойств.

2. На основе общей постановки задачи многоканальной оптимизации процессом управления ОРП разработана методика и вычислительная технология решения задачи оптимального по быстродействию двухканального управления нестационарным процессом теплопроводности для типичного случая двухинтервального характера обоих управляющих воздействий с заданной точностью равномерного приближения конечного состояния объекта к требуемому пространственному температурному распределению в условиях дополнительных ограничений на одинаковую продолжительность управляемого процесса для каждого из каналов управления. В этих условиях задача быстродействия сведена к двум параметрическим задачам полубесконечной оптимизации для двух возможных вариантов искомого набора параметров векторного управления с последующим отбором лучшего из них по достигаемой величине критерия оптимальности.

3. Приведены решения задач двухканального оптимального по быстродействию управления процессом нагрева неограниченной пластины при различных комбинациях граничных и внутренних управляющих и возмущающих воздействий. Полученные результаты распространены на задачу оптимального по быстродействию двухканального граничного управления нелинейным процессом нестационарной теплопроводности с использованием его цифровой модели, созданной в специализированном конечно-элементном программном пакете COMSOL Multiphysics, на базе которой реализована итерационная процедура поиска решений систем уравнений альтернансного метода.

4. Разработана конструктивная методика решения задач двухканального оптимального по быстродействию управления нестационарным процессом теплопроводности с учетом дополнительных технологических ограничений на поведение управляемой величины и инерционность управляющих воздействий.

5. Разработана конструктивная методика решения задачи двухканального оптимального по быстродействию граничного управления двумя взаимосвязанными физически неоднородными СРП, описываемыми линейными уравнениями теплопроводности параболического типа в условиях идеального теплового контакта взаимодействующих сред применительно к наиболее употребительным в приложениях оценкам целевых множеств конечных состояний каждого из объектов в равномерной метрике. Технология решения использует специальную методику описания исследуемых температурных полей в форме, содержащей равномерно сходящиеся ряды. Исследуемая задача быстродействия решается по модифицированной схеме альтернансного метода, которая отличается от варианта двухканального управления автономным ОРП возможностью обеспечить заданную точность нагрева только для одного из объектов в условиях предельно достижимой ее величины для второго объекта и характеризуется усложненной конфигурацией пространственного распределения результирующих температурных состояний.

6. Решена задача синтеза системы оптимального по быстродействию двухканального управления объектом с распределенными параметрами с линейными обратными связями по неполному измерению состояния системы. Предлагаемый способ синтеза оптимальных регуляторов базируется на результатах расчёта оптимальных программных управлений для каждого из управляющих воздействий. Построена оптимальная по быстродействию система двухканального управления процессом индукционного нагрева по мощности внутреннего тепловыделения с сигналами обратной связи по температуре в двух точках области пространственного распределения управляемой функции состояния объекта в каждом из двух автономных контуров автоматического регулирования двухинтервальных управляющих воздействий. Выполнено компьютерное моделирование в программном пакете MATLAB оптимального по быстродействию процесса двухканального управления индукционным нагревом металлической пластины в замкнутой системе с неполным измерением состояния объекта.

Дальнейшим возможным направлением продолжения диссертационной работы является развитие полученных результатов применительно к моделям управляемых процессов с интервальными неопределенностями их параметрических характеристик, распространение предлагаемых методик на задачи управления с пространственно-многомерными моделями нестационарных процессов теплопроводности и исследование алгоритмов многоканального оптимального управления ОРП по другим целевым функциям, включая, в частности, типовые линейно-квадратичные задачи оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 588 с.
2. Бутковский А.Г. Структурная теория распределённых систем. – М.: Наука, 1977. – 480 с.
3. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределёнными параметрами / А.Г. Бутковский. – М.: Наука, 1965. – 474 с.
4. Дегтярев Г. Л., Сиразетдинов Т. К. Синтез оптимального управления в системах с распределенными параметрами при неполном измерении состояния // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1983. № 2. С. 123–136.
5. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
6. Егоров А. И., Знаменская Л. Н. Введение в теорию управления системами с распределенными параметрами. СПб.: Лань, 2017. – 292 с.
7. Егоров Ю. В. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами // В кн.: Математика на службе инженера. – М.: Знание, 1973. С. 187–199.
8. Егоров Ю. В. Необходимые условия оптимальности в банаховом пространстве // Математический сборник (новая серия), 1964. Т. 64 (106). № 1. с. 79–101.
9. Коваль В. А. Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. Саратов: Саратовский гос. техн. ун-т, 1997. – 192 с.
10. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
11. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. – М.: Наука, 1975. – 480 с.

12. Малков А. В., Першин И. М. Системы с распределенными параметрами. Анализ и синтез. М.: Научный мир, 2012. – 476 с.
13. Плотников В. И. Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида // Изв. АН СССР, 1972. Т. 36. № 3. С. 652–679.
14. Дидук Г.А., Золотов О.И., Пустыльников Л.М. Специальные разделы теории автоматического регулирования и управления (Теория систем с распределенными параметрами). С предисловием А.Г. Бутковского. – СПб.: СЗТУ, 2000. – 172 с.
15. Плешивцева Ю. Э. Точная редукция к конечномерным моделям в одном классе задач оптимального управления системами с распределенными параметрами // Мехатроника, автоматизация и управление, 2008. № 7 (88). С. 9–13.
16. Рапопорт Э. Я. Структурное моделирование объектов и систем с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2003. – 299 с.
17. Рапопорт Э. Я. Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2005. – 292 с.
18. Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. – М.: Высшая школа, 2009. – 677 с.
19. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1977. – 480 с.
20. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. – 350 с.
21. Черноусько Ф. Л. Ограниченное управление в системах с распределенными параметрами // Прикладная математика и механика, 1992. Т. 56. № 2. С. 810–826.
22. Черноусько Ф.Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А. Методы управления нелинейными механическими системами. – М.: Физматлит, 2006. – 328 с.
23. Маковский В.А. Динамика металлургических объектов с распределенными параметрами. М.: Металлургия, 1971. – 384 с.

24. Рей У. Методы управления технологическими процессами. –М.: Мир, 1983. –368 с.
25. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.
26. Гусев Е.Л. Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: ВО «Наука», 1993. – 262 с.
27. Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э. Методы полубесконечной оптимизации в прикладных задачах управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 2021. – 286 с.
28. Рапопорт Э.Я. Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. М.: Metallurgia, 1993. – 279 с.
29. Круашвили З.Е. Автоматизированный нагрев стали. – М.: Metallurgia, 1973. – 328 с.
30. Гольдфарб Э.М. Теплотехника металлургических процессов. – М.: Metallurgia, 1967. – 439 с.
31. Бегимов И., Бутковский А.Г., Рожанский В.Л. Структурное представление физически неоднородных систем // Автоматика и телемеханика, 1982. №9. С. 25-35.
32. Бегимов И., Бутковский А.Г., Рожанский В.Л. Структурное представление двумерных неоднородных систем с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика, 1984. №5. С. 5-16.
33. Рапопорт Э.Я. Программная управляемость взаимосвязанных неоднородных систем с распределенными параметрами // Изв. РАН. Теория и системы управления, 2017. №4. С.11-24.
34. Шашков А.Г. Системно-структурный анализ процесса теплообмена и его применение. М.: Энергоатомиздат, 1983. – 280 с.
35. Бакулин В. Г., Гусев Е. Л., Марков В. Г. Методы оптимального проектирования и расчета композиционных конструкций. Т. 1. М.: Физматлит, 2008. 256 с.

36. Рапопорт Э.Я. Альтернансный метод в прикладных задачах оптимизации. – М.: Наука, 2000. – 336 с.
37. Рапопорт Э. Я. Альтернансные свойства оптимальных решений и вычислительные алгоритмы в задачах полубесконечной оптимизации управляемых систем // Изв. РАН. Теория и системы управления, 1996. № 4. С. 84–95.
38. Рапопорт Э. Я. Альтернансный метод в задачах полубесконечной оптимизации // Нелинейная теория управления и ее приложения: динамика, управление, оптимизация / под ред. В. М. Матросова, С. Н. Васильева, А. И. Москаленко. М.: Физматлит, 2003. С. 164–200.
39. Рапопорт Э.Я., Плешивцева Ю.Э. Алгоритмически точный метод параметрической оптимизации в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // Автоматизация, 2009. Т.45. №5. с.103–112.
40. Плешивцева Ю.Э. Последовательная параметризация управляющих воздействий и полубесконечная оптимизация алгоритмов управления технологическими объектами с распределенными параметрами: дис. д-ра техн. наук / Ю. Э. Плешивцева. – Самара, 2009. – 416 с.
41. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
42. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Наука, 1970. – 707с.
43. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. М.: Наука, 2012. 309 с.
44. Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М. Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1986. – 303с.
45. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
46. Бутковский А. Г., Малый С. А., Андреев Ю. Н. Оптимальное управление нагревом металла. М.: Metallurgy, 1981. 271 с.

47. Демиденко Н. Д. Управляемые распределенные системы. Новосибирск: Наука, 1999, 393 с.
48. Акимов И.А. Математическое моделирование теплофизических процессов в многослойных конструкциях с фазовыми переходами: дис. д-ра техн. наук / А. И. Акимов. – Санкт-Петербург, 2007.
49. Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 384 с.
50. Рапопорт Э.Я. Чебышевские приближения в задачах параметрической оптимизации управляемых процессов I-III // *АиТ*. 1992, № 2, с.60-67; №3, с.59-64; №4, с. 49-56.
51. Плешивцева Ю.Э., Рапопорт Э.Я. Метод последовательной параметризации управляющих воздействий в краевых задачах оптимального управления системами с распределенными параметрами // *Известия РАН. ТИСУ*. 2009. №3. С.22-23.
52. Rapoport E., Pleshivtseva Yu. *Optimal Control of Induction Heating Processes*. London, New York : CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2007.
53. Коллатц Л., Крабс В. *Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения*. М.: Наука, 1978. 272 с.
54. *Lecture notes in Economics and Mathematical Systems*. Vol. 215. *Semi-infinite Programming and Application* / A.V. Fiacco and K.O. Kostanek. New York: Springer – Verlag, 1983.
55. Pleshivtseva Yu. E. *Modeling and Optimization of Metal Induction Heating Before Hot Forming and Heat Treatment* // *Proceedings of the 28th ASM Heat Treating Society Conference*. USA: Detroit, 2015. P. 670–675.
56. Pleshivtseva Yu., Rapoport E., Afnogentov A., Shemyakin Yu., Nacke B., Nikanorov A. *Application of Optimal Control Theory for Optimization of Metal Hot Forming Lines with Induction Pre-Heating* // *International Symposium on Heating by Electromagnetic Sources (HES – 10)*. Padua, 2010. P. 557–564.

57. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. Optimal Control of Induction Heating of Metals Prior to Warm and Hot Forming // ASM Handbook. V. 4C. Induction Heating and Heat Treatment. USA: ASM International, 2014. P. 366–401.
58. Рапопорт Э. Я. Метод параметрической оптимизации в задачах многоканального управления системами с распределенными параметрами / Изв. РАН. Теория и системы управления, 2019. № 4. С. 47–61.
59. Ильина Н.А., Рапопорт Э.Я. Двухканальное оптимальное по быстродействию управление процессом нестационарной теплопроводности // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки, 2018. №1(57). – С. 7-18.
60. N. Ilina «Parametric Optimization of Nonstationary Heat Conductivity Processes with Two Control Actions». XXI International Conference Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP), Samara, Russia, 2019, pp. 271-276.
61. Ильина Н.А. Параметрическая оптимизация процессов нестационарной теплопроводности с двумя управляющими воздействиями // Проблемы управления и моделирования в сложных системах. Труды XXI Международной конференции (3-6 сентября 2019 г. Самара). Т.1 – Самара. ООО «Офорт», 2019 – С.136-141.
62. MATLAB Documentation [Электронный ресурс]. URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/> (дата обращения 05.05.2020).
63. Дьяконов В.П. MATLAB. Полный самоучитель. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.
64. Потемкин В. Г. Введение в Matlab [Электронный ресурс]. – М.: Softline Co, 2001. – Режим доступа: <http://matlab.exponenta.ru/ml/book1/index.php> (accessed March 02, 2019).
65. MATLAB.Exponenta [Электронный ресурс]: Optimization Toolbox 2.2 Руководство пользователя / авт. А.Г. Трифонов. – Электрон. и текстовые данные. – Режим доступа: http://matlab.exponenta.ru/optimiz/book_1/ (accessed March 02, 2019).

66. Численные методы: учеб. и практикум для академ. бакалавриата / под ред. У. Г. Пирумова .- 5-е изд., перераб. и доп..- М.: Юрайт, 2017.- 421 с.
67. Ильина Н.А., Рапопорт Э.Я. Оптимальное по быстродействию управление нестационарным процессом теплопроводности с комбинированными внешними воздействиями по граничным условиям // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки, 2019. №2(62). – С. 36-51.
68. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю. Э. Оптимальное управление нелинейными объектами технологической теплофизики // Автометрия, 2012. Т. 48. № 5. С. 3–13.
69. Попов А.В., Дьяконов А.И. Оптимальное по быстродействию управление процессом периодического индукционного нагрева с учетом ограничения на максимальную температуру // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки: Научный журнал. – Самара: СамГТУ, 2015, №3(47). – С. 56-68.
70. COMSOL Multiphysics [Электронный ресурс]. URL: <https://www.comsol.ru/> (дата обращения 06.05.2020).
71. Метод конечных элементов: Пер. с фр. / Под. Ред. Н.Н. Яненко, - М.: Мир, 1976. – 95 с.
72. Система автоматизированных расчетов Comsol [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Е. Н. Буркова, А. Н. Кондрашов, К. А. Рыбкин; Перм. гос. нац. исслед. ун-т. – Электрон. дан. – Пермь, 2019. – 9,88 Мб; 133 с.
73. Вигак В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. Киев: Наукова думка, 1979. 360 с.
74. Плешивцева Ю. Э., Рапопорт Э. Я. Параметрическая оптимизация систем с распределенными параметрами в задачах с комбинированными ограничениями на конечные состояния объекта управления // Изв. РАН. Теория и системы управления, 2018. № 5. С. 54–69.
75. Левин И.С. Синтез оптимальных по быстродействию систем управления с распределенными параметрами в условиях интервальной неопределенности

характеристик объекта: Автореф. дис... канд. техн. наук – Самара, 2017 – 20 с.

76. Рапопорт Э.Я., Смирнова Л.Н. К задаче оптимального управления нагревом металла в печах с внешним теплообменом – М.: Изв.вуз. Черная металлургия, 1984.
77. Данилушкин А.И., Рапопорт Э.Я., Смирнова Л.Н. Математическое регулирование и оптимизация процесса нагрева массивных тел в газовых печах. –Л. : Автоматическое управление и автоматизация технологических процессов, 1975. С. 58–63.
78. Ильина Н.А., Рапопорт Э.Я. Двухканальное оптимальное по быстродействию управление нестационарным процессом теплопроводности с учетом инерционности граничных управляющих воздействий // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки, 2020. Т.28, №4. – С. 19-31.
79. Рапопорт Э. Я., Плешивцева Ю.Э. Оптимальное по расходу энергии управление в системах с распределенными параметрами // Автометрия, 2021. Т. 57. №4. С. 17-28.
80. Рапопорт Э.Я., Ильина Н.А. Оптимальное по быстродействию двухканальное управление взаимосвязанными объектами с распределёнными параметрами // Автометрия, 2022. Т. 58. № 4. С. 1–13.
81. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2007.
82. Яковлев В.Б. Теория автоматического управления: Учебник для вузов / Яковлев В.Б., С.Е. Душин, Н.С. Зотов, Д.Х. Имаев, Н.Н. Кузьмин. - Москва: Высшая школа, 2003.
83. Пупков К.А., Фалдин Н.В., Егупов Н.Д. Методы синтеза оптимальных систем автоматического управления. – М.: МГТУ, 2000.
84. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Наука, 1966.

85. Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г. Методы теории автоматического управления. – М.: Наука, 1971.
86. Ильина Н. А. Синтез оптимальной по быстродействию системы двухканального управления процессом индукционного нагрева неограниченной пластины // Вестн. Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Технические науки. 2021. 70, № 2. С. 47–60.
87. Рогачев Г.Н. Программные средства анализа и синтеза систем управления: Конспект лекций. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2016.
88. Черных И. В. Simulink: Инструмент моделирования динамических систем [Электронный ресурс]. – М.: Softline Co, 2001. – Режим доступа: <http://matlab.exponenta.ru/simulink/book1/index.php>, свободный. – Загл. С экрана.
89. Н.А.Ильина Двухканальное оптимальное по быстродействию управление процессом индукционного нагрева с учетом фазового ограничения на максимальную температуру // Вестник СамГТУ. Серия Технические науки: Научный журнал. – Самара: СамГТУ, 2020, Т.28, №2(66). – С. 41-58.
90. E. Y. Rapoport, N.A. Ilina Parametric Time-Optimization of Two-Channel Control of Related Objects with Distributed Parameters // 2022 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM), 2022, pp. 588-593.
91. E. Y. Rapoport, N.A. Ilina Time-Optimal Two-Channel Control of Interrelated Objects with Distributed Parameters // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, 2022, Vol. 58, No. 4, pp. 391-401.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Справка об использовании результатов кандидатской диссертации



Закрытое акционерное общество «ТМ-Сервис»
Россия, 443124, Самара, 6 просека, д.157
Тел./факс: (846) 240-16-41
E-mail: tms@tms-samara.ru

ИНН/КПП 6315375452/631901001
р/с 40702810854020002446
Поволжский Банк ПАО «Сбербанк»
г. Самара, БИК 043601607
к/с 3010181020000000607



Исх. № 3001/02-23 от 30 января 2023 г.

Для предоставления по месту требования

СПРАВКА
об использовании результатов,
полученных в кандидатской диссертации Н.А. Ильиной
«Двухканальное оптимальное по быстродействию управление
техническими объектами с распределенными параметрами в условиях равномерной
оценки целевых множеств»

Основные выводы и рекомендации, полученные в диссертации Ильиной Натальи Андреевны «Двухканальное оптимальное по быстродействию управление техническими объектами с распределенными параметрами в условиях равномерной оценки целевых множеств», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, использовались при разработке и проектировании систем автоматического регулирования нагревательными установками в технологических комплексах обработки давлением, что способствовало повышению производительности нагревательных агрегатов и точности достижения требуемых температурных кондиций.

Директор ЗАО «ТМ-Сервис»



А.П. Булохов

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Акт об использовании в учебном процессе ФГБОУ ВО СамГТУ



Утверждаю:
 Проректор по учебной работе
 ФГБОУ ВО «СамГТУ»
 профессор
 Юсупова О.В.
 _____ 2023 г.

АКТ

научно-технической комиссии о внедрении результатов диссертационной работы

Ильиной Натальи Андреевны

«Двухканальное оптимальное по быстродействию управление техническими объектами с распределенными параметрами в условиях равномерной оценки целевых множеств».

Комиссия в составе к.т.н., зав. кафедрой АУТС Колпащикова С.А., к.т.н., зам. зав. кафедрой АУТС Мандры А.Г. и д.т.н., профессора Рогачева Г.Н. составила настоящий акт о том, что результаты, полученные в рамках диссертационной работы Ильиной Н.А., внедрены в учебный процесс на кафедре «Автоматика и управление в технических системах» Самарского государственного технического университета при подготовке магистров по направлению 27.04.04 «Управление в технических системах».

Результаты научных исследований, полученных Ильиной Н.А., использованы при чтении лекционного курса и проведении занятий по дисциплине «Управление системами с распределенными параметрами».

Реализация полученных автором результатов исследований позволила повысить эффективность и качество учебного процесса.

Заведующий кафедрой «Автоматика
и управление в технических системах»,
к.т.н., доцент



подпись

С. А. Колпащиков

Зам. зав. кафедрой «Автоматика
и управление в технических системах»,
к.т.н., доцент



подпись

А. Г. Мандра

Д.т.н., профессор кафедры АУТС



подпись

Г. Н. Рогачев