

На правах рукописи

04.2.01 1 58184 -

Черноглазов Дмитрий Григорьевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ РОБАСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

Специальность 05.13.01 – «Системный анализ,
управление и обработка информации»
(промышленность)

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата технических наук



Научный руководитель:

доктор физико-математических
наук Зеленков Г.А.

Москва – 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Глава 1. Методы исследования устойчивости линейных систем управления, их анализ и обобщение для исследования неустойчивости.....	13
1.1 Исследование устойчивости и неустойчивости непрерывных линейных систем управления.....	13
1.2 Исследование устойчивости и неустойчивости дискретных линейных систем управления.....	17
1.3 Исследование локализации спектров матриц для исследования устойчивости и неустойчивости линейных систем управления.....	20
1.4 Описание неопределенности в линейных системах управления.....	33
Глава 2. Аналитические и графические методы исследования робастной устойчивости и неустойчивости интервальных линейных систем управления.....	45
2.1 Аналитические критерии исследования робастного поведения интервальных полиномов.....	45
2.2 Графические критерии исследования робастного поведения интервальных полиномов.....	55
2.3 Критерий робастного поведения интервальных полиномов с двумя размахами неопределенности.....	70
2.4 Дискретные интервальные полиномы.....	80
Глава 3. Методы исследования робастной устойчивости и неустойчивости неинтервальных линейных систем управления.....	85
3.1 Критерии существования выпуклых множеств устойчивых и неустойчивых полиномов.....	85
3.2 Критерии робастного поведения семейств полиномов с неинтервальным описанием неопределенности.....	93
3.3 Исследование робастного поведения семейств полиномов методом допустимых линейных преобразований.....	100
3.4 Робастная k -стабилизация для объектов, описанных одномерными передаточными функциями.....	110

3.5 Вероятностный подход к исследованию робастного поведения семейств полиномов.....	113
--	-----

Глава 4. Анализ методов исследования робастной устойчивости и неустойчивости семейств матриц линейных систем управления.....	120
---	------------

4.1 Вспомогательные сведения, постановка проблемы и обсуждение.....	121
4.2 Робастное поведение семейств матриц с k -диагональным преобладанием.....	125
4.3 Робастное поведение семейств матриц с неопределенностью, заданной матричными нормами.....	129
4.4 Условия существования выпуклых областей робастной устойчивости в пространстве коэффициентов нестационарных линейных систем управления.....	134

Литература.....	143
------------------------	------------

Приложение.....	149
------------------------	------------

Введение

В промышленно развитых странах, развитие современных средств производства и транспорта, в первую очередь, характеризуется созданием всё более сложных технических систем и технологических процессов. При эксплуатации этих технических систем и технологических процессов, в связи с увеличением числа составляющих их элементов и усложнением взаимосвязи между ними, естественным образом, на практике, увеличивается интенсивность отказов, что приводит к увеличению числа крупных технических и техногенных катастроф. В последнее время это практически подтверждается увеличением числа различных аварий и катастроф в развитых странах (отказы на АЭС, массовое отключение электричества, аварии на транспорте и т.д.). В связи с этим возникает задача обеспечения безопасности динамики функционирования технических систем и технологических процессов зависящих от многих параметров и характеризующихся нелинейными связями.

Одной из важнейших проблем современного производства, является развитие фундаментальных научных исследований в области обеспечения безопасности функционирования сложных технических систем и технологических процессов. В первую очередь, это касается использования, в качестве объекта исследования, адекватных динамических моделей и создания математических методов исследования их безопасности.

Одним из важнейших факторов математической модели динамической системы напрямую связанных с безопасностью эксплуатации реальных технических систем является устойчивость.

Проблемы устойчивости рассматривались в механике еще в древности. Принципы отбора устойчивых положений равновесия пытались установить Аристотель и Архимед в III и II столетиях до н. э. Однако первые достаточно общие результаты удалось сформулировать только в XVII и XVIII столетиях: критерий Торричелли (1644 г.) устойчивости равновесия системы тел, находящихся под действием сил тяжести; достаточные условия Лагранжа (1788 г.) устойчивости положения равновесия консервативных систем.

Начиная с середины позапрошлого столетия теорию устойчивости начали успешно применять для решения проблем безопасности эксплуатации технических систем. Главным объектом исследования в XIX веке были автоматические регуляторы производственных процессов, такие как регулятор Уатта для паровой машины. В связи с ростом мощности и

только. В практических задачах, связанных с конструированием и моделированием процессов управления в технике, экономике, биологии и других сферах робастная устойчивость является одним из ключевых факторов гарантирующих применимость моделей и надежность работы спроектированных систем. Фактически результаты, полученные в теории робастной устойчивости, позволяют обеспечивать динамическую безопасность управляемых систем на этапе их конструирования и эксплуатации.

Исследования робастной неустойчивости позволяют дать дополнительную информацию о поведении робастно устойчивых систем, особенно, что важно, в пограничных режимах. Исследование робастно неустойчивых режимов формирует теоретическую базу для формирования быстродействующих и экономичных регуляторов, которые позволяют быстро и с минимальными энергетическими и временными затратами изменять параметры системы. Результаты исследований дают эффективные решения нерешенных инженерных задач. Вопросами робастной неустойчивости с 2002 года занимаются Н. В. Зубов и его ученики.

Диссертационная работа посвящена развитию наиболее конструктивных аналитических методов и алгоритмов анализа робастной устойчивости и неустойчивости систем управления по первому приближению в пространстве коэффициентов их характеристических полиномов. Причем исследование проведено и получены новые результаты для полиномов с аффинной неопределенностью в коэффициентах, где не было существенного продвижения вплоть до 2002 года. Исследование проводится с единых позиций – анализа робастного поведения интервальных полиномов, при этом робастная устойчивость этих семейств рассматривается как частный случай робастной неустойчивости. Рассмотрены также вопросы робастной устойчивости и неустойчивости матриц систем управления. Уделено внимания вопросам сверхустойчивости матриц систем управления, стабилизации систем управления. Рассмотрены вопросы применения вероятностного подхода к исследованию робастной устойчивости и неустойчивости.

Промышленные объекты управления имеют соответствующие математические модели, описывающие их статические и динамические характеристики. Теория автоматического управления, изучающая процессы автоматического управления объектами разной природы применяется для выявления свойств систем автоматического управления при помощи математических средств и разрабатываются рекомендации по их проектированию.

Рассмотрим различные формы задания линейных управляемых систем и нелинейных систем по первому приближению. А также переход к исследованию их устойчивости и неустойчивости с помощью характеристических полиномов в этих формах.

Задание в пространстве состояний.

Линейная стационарная непрерывная управляемая система в пространстве состояний описывается векторным линейным обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\dot{x} = Ax + Bu + D_1 w, \quad y = Cx + D_2 w,$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор называемый состоянием системы, $u(t) \in R^m$ – управление, $y(t) \in R^l$ – выход системы, $w(t) \in R^p$ – входные сигналы (внешние возмущения) или задающие воздействия. Матрицы A, B, C, D_1, D_2 .

$\begin{matrix} n \times n & n \times m & l \times n & n \times p & l \times p \end{matrix}$

Аналогичные дискретные системы описываются разностными уравнениями:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + D_1 w_{k-1}, \quad y_k = Cx_k + D_2 w_k,$$

где k играет роль времени, и может обозначать номер итерации в итерационном процессе или время, в процессах связанных с цифровым управлением. Характеристический полином матрицы A имеет вид $f(s) = \det(sE - A)$, где E – единичная матрица.

В непрерывном одномерном случае (широко применяемом на практике) система может быть записана в виде:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = r_m u^{(m)} + \dots + r_1\dot{u} + r_0u, n \geq m.$$

В этом случае характеристический полином имеет вид:

$$f(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0.$$

Далее будем понимать под интервальной системой управления систему первого приближения, характеристический полином которой будет иметь интервальные ограничения на коэффициенты.

Задание с помощью передаточных функций.

Многомерная система может быть описана с помощью передаточных функций:

$$H_{uy}(s) = C(sE - A)^{-1}B,$$

$$H_{uw}(s) = C(sE - A)^{-1}D_1 + D_2,$$

где матричная функция $H_{uy}(s)$ комплексной переменной s называется передаточной функцией от управления u к выходу y , а аналогичная функция $H_{uw}(s)$ называется передаточной функцией от возмущения w к выходу y . Элементами матриц $H(s)$ являются дробно-рациональные функции, имеющие общий знаменатель $f(s) = \det(sE - A)$ – характеристический полином матрицы A .

В рассмотренных случаях исследование устойчивости и неустойчивости системы можно свести к исследованию устойчивости и неустойчивости полинома $f(s)$.

В первой главе рассмотрены методы исследования устойчивости линейных систем управления, сделан их анализ и обобщение для исследования неустойчивости. Рассмотрен ряд теорем, дающих необходимые и достаточные условия принадлежности рассматриваемых систем определенному классу неустойчивости, причем аналогичные критерии для устойчивых систем, непосредственно следуют из приведенных теорем (критерии Михайлова, Найквиста и т.д.).

В п. 1.1. рассматриваются аналитические (метод понижения порядка Н.В. Зубова) и графические критерии (обобщения критериев Найквиста и Михайлова) принадлежности полиномов непрерывных систем классам (n, k) –эквивалентности.

В п. 1.2. рассматриваются аналитические (например метод Шура-Кона) и графические критерии (аналог метода Михайлова) принадлежности полиномов дискретных систем классам (n, k) –эквивалентности.

П. 1.3. посвящен исследованию локализации и оценки спектров линейных операторов для исследования устойчивости и неустойчивости матриц линейных систем управления (теоремы Ляпунова, Таусски, Бендиксона-Гирша, Рорбаха-Фреше). Приведены методики анализа k -диагональных матриц.

В п. 1.4. рассмотрены различные описания неопределенности для систем управления. Предложены варианты геометрии неопределенности в комплексном случае. Рассмотрены варианты неопределенности как для систем управления с полиномиальной, так и с матричной структурами.

Во второй главе рассматриваются аналитические критерии робастного поведения интервальных полиномов. Используется единый подход к системному анализу робастной устойчивости и неустойчивости динамических систем по первому линейному приближению. Рассматриваемые критерии и методы исследования робастной неустойчивости включают, как частный случай, известные результаты, полученные в

теории робастной устойчивости для интервальных полиномов, такие как теорема Харитонова.

В п. 2.1, 2.4 приведены аналитические критерии робастной неустойчивости семейств непрерывных и дискретных полиномов с интервальными ограничениями на коэффициенты, т.е. принадлежности этих семейств классам (n, k) — эквивалентности полиномов для вещественного и комплексного случаев, полученных в последние годы. Проведен их анализ.

В п. 2.2. – 2.3. предложены обобщения графических критериев исследования робастной устойчивости и неустойчивости интервальных полиномов с вещественными и комплексными коэффициентами, позволяющее снять все ограничения на коэффициенты, присутствовавшие ранее. Причем при $k = 0$ эти критерии переходят в соответствующие графические критерии устойчивости интервальных семейств полиномов. Предложены графические критерии робастного поведения интервального семейства полиномов с вещественными и комплексными коэффициентами с двумя размахами неопределенности.

В третьей главе проведен анализ методов исследования робастного поведения интервальных линейных систем управления.

В п. 3.1. предложены критерии существования выпуклых множеств неустойчивых полиномов в пространстве коэффициентов характеристического полинома системы первого приближения принадлежащих однородным классам неустойчивости. Эти критерии позволяют свести исследование бесконечномерной задачи к конечномерной, т.е. путем проверки конечного числа условий, налагаемых на полиномы, образующие это семейство, установить свойства всего этого семейства полиномов.

В п. 3.2. рассмотрены критерии робастного поведения семейств полиномов с неинтервальным описанием неопределенности. Системы с неинтервальным описанием неопределенности можно исследовать с помощью аналитических и графических критериев и вероятностного подхода, как в непрерывном, так и в дискретном случаях.

В п. 3.3. рассмотрена техника применения допустимых линейных преобразований для исследования робастного поведения семейств полиномов.

В п. 3.4. рассмотрены вопросы робастной k -стабилизации для объектов, описанных одномерными передаточными функциями. k -стабилизации позволяет переводить систему из одного класса устойчивости или неустойчивости в другой.

В п. 3.5. рассмотрен вероятностный подход к исследованию робастного поведения семейств полиномов. Рассмотрено применение метода Монте-Карло и аппроксимации доверительным эллипсом.

Четвертая глава посвящена анализу методов исследования робастной устойчивости и неустойчивости семейств матриц линейных систем управления.

В п. 4.1. приведены вспомогательные сведения и постановка проблемы.

В п. 4.2 даются формулы k -радиуса робастного поведения для непрерывных и дискретных систем, матрицы которых имеют k -диагональное преобладание.

В п. 4.3 удалось обобщить методику исследования робастного поведения семейств матриц с неопределенностью, задаваемой с помощью матричных норм для исследования принадлежности семейств матриц классам (n, k) -эквивалентности.

В п. 4.4 приведены достаточные условия существования устойчивых выпуклых множеств в пространстве параметров нестационарной системы первого приближения, что является одной из задач робастной устойчивости матриц.

В заключении диссертации приведены основные научные результаты, полученные в работе, показана их новизна и практическая значимость.

В приложении приведены математические модели систем управления, к которым могут быть применены результаты, полученные в работе; алгоритмы и программы, позволяющие применить теоретические положения; результаты численных экспериментов; а также динамическая визуализация иллюстрирующая работу теорем.

На защиту выносятся:

1. Анализ классических и новых методов исследования робастной устойчивости и неустойчивости интервальных систем управления с помощью общего подхода к исследованию робастных характеристик таких систем.
2. Обобщение методов исследования робастной устойчивости неинтервальных систем управления на неустойчивость.
3. Исследование новых геометрических свойств допустимых линейных преобразований коэффициентов интервальных систем управления с сохранением инварианта принадлежности одному классу неустойчивости.
4. Обобщение методов исследования робастной устойчивости и неустойчивости матричных семейств для отдельных классов таких семейств (сверхустойчивые матрицы, k -диагональные матрицы).
5. Алгоритмы, программы и приемы визуализации для применения современных подходов для исследования робастного поведения (устойчивости или неустойчивости) систем управления в инженерной практике.

Глава 1. Методы исследования устойчивости линейных систем управления, их анализ и обобщение для исследования неустойчивости.

1.1. Исследование устойчивости и неустойчивости непрерывных линейных систем управления

Согласно определению [26] полином степени n с вещественными или комплексными коэффициентами, не имеющий нулевых и чисто мнимых корней

$$\varphi(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n, a_0 \neq 0, a_n \neq 0,$$

принадлежит классу (n, k) -эквивалентности, если k его корней, с учетом их кратности, лежат в правой полуплоскости.

При $k = 0$ полином $\varphi(s)$ называют устойчивым полиномом. Если все корни полинома $\varphi(s)$ находятся вне круга единичного радиуса с центром в нуле, то его называют устойчивым по Шуру.

Как оказалось, хорошо известные коэффициентные критерии типа Рауса – Гурвица, Льенара-Шипара, Джюри и им подобные [82, 78, 24, 11], использующие характеристические полиномы матрицы A для анализа ее на устойчивость, не удастся применить для анализа полинома на принадлежность классам (n, k) -эквивалентности при $k = \overline{1, n-1}$. Это объясняется тем, что нет коэффициентных критериев для подсчета числа k .

Метод локализации собственных чисел матрицы В.И. Зубова [11, 74, 88], хотя и не требует построения характеристического полинома, решает частную задачу – выяснение местоположения всех чисел спектра в заданной области. Поэтому использовать его для подсчета чисел спектра с реальными частями разных знаков не удастся. Сам метод является эффективным и в комбинации с другими оценками спектров дает хорошие результаты. В [88] показана методика его применения для некоторых областей.

Фактически, если не считать критерия Михайлова для вещественного и комплексного случаев, удобного лишь для небольших порядков, то остается метод Рауса понижения порядка полинома, модифицированный Н.В. Зубовым [11]. Его можно использовать для проверки неустойчивости с вычислением индекса k – числа корней справа от мнимой оси. Более того, метод понижения порядка в этом варианте дает полную качественную картину распределения корней полинома на плоскости.

Теорема 1.1 [26, 106] Для того, чтобы полином

$$\varphi(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n, \quad a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0,$$

с комплексными коэффициентами, не имеющий нулевых и чисто мнимых корней, принадлежал классу (n, k) -эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы его годограф $\varphi(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ проходил, не пересекая точку ноль комплексной плоскости, ровно $n-2k$ полуоборотов в положительном направлении (против часовой стрелки) то есть

$$\Delta \arg \varphi(j\omega) = \pi(n-2k) \quad (0.1)$$

$$-\infty < \omega < +\infty$$

При $k=0$, получим, как частный случай, критерий Михайлова для устойчивых комплексных полиномов, а при $\omega \geq 0$ – для вещественных полиномов и

$$\Delta \arg \varphi(j\omega) = \frac{\pi}{2}(n-2k). \quad (0.2)$$

$$0 \leq \omega < +\infty$$

В частности, если многочлен $\varphi(s)$ с действительными коэффициентами имеет Π корней – в левой полуплоскости, $\text{Re } s < 0$, Π корней в правой полуплоскости, $\text{Re } s > 0$ и M корней на мнимой оси $\text{Re } s = 0$, то справедлива формула,

$$\Delta \arg \varphi(j\omega) = \frac{\pi}{2}(\Pi - \Pi) = \frac{\pi}{2}(n - 2\Pi - M). \quad (0.3)$$

$$0 \leq \omega < +\infty$$

Аналогичную формулу можно вывести для $\varphi(s)$ с комплексными коэффициентами и для дискретного случая.

Доказательство можно найти в литературе по теории управления. Далее, в таких случаях пояснение делать не будем, считая, что при необходимости недостающие доказательства или их фрагменты можно найти или сделать по аналогии. Результаты полученные соискателем или при его участии доказаны в работе или дается ссылка на публикации, где это сделано.

Приведем без доказательства два утверждения в этой связи.

Теорема 1.2 [64] (обобщенный критерий Найквиста). Пусть $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ взаимно простые полиномы степени m и n ($m \leq n$) соответственно с комплексными коэффициентами и полином $\varphi_2(s)$ имеет l , ($l \leq n$) корней с положительной вещественной частью и не имеет нулевых и чисто мнимых корней. Полином

$P(s) = \varphi_1(s) + \varphi_2(s)$ принадлежит классу (n, k) -эквивалентности тогда и только

тогда, когда годограф $R(j\omega)$ функции $R(s) = \frac{\varphi_1(s)}{\varphi_2(s)}$ не проходит через точку -1 и

делает вокруг нее ровно $l - k$ оборотов против часовой стрелки при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Частотный критерий Найквиста, проверки устойчивости замкнутой системы управления единичной обратной связью, является частным случаем этой теоремы для полиномов с вещественными коэффициентами при $k = 0$, $0 \leq \omega < +\infty$ и l полуоборотов и проверки неустойчивости при $k = \overline{1, n-1}$ и $l - k$ полуоборотов.

Легко доказать следующее утверждение.

Теорема 1.3 [26] Если полиномы с вещественными или комплексными коэффициентами $\varphi_1(s)$ и $\varphi_2(s)$ принадлежат классу (n, k) -эквивалентности, то для принадлежности этому классу линейного политопа $\alpha\varphi_1(s) + (1 - \alpha)\varphi_2(s)$, $\alpha \in [0, 1]$ необходимо и достаточно, чтобы годограф $R(j\omega)$ не пересекал отрицательную вещественную полуось. Очевидно что, при $k = 0$ получим известный критерий устойчивости линейного политопа.

Другие способы для исследования локализации спектра матриц как вещественных, так и комплексных, не решают задачу принадлежности данного полинома (n, k) -классу эквивалентности, не считая частных случаев для специальных матриц и методов классической теории устойчивости для $k = 0$.

Одним из немногих аналитических методов, позволяющих дать качественную картину расположения корней полинома в простейших случаях даёт метод Рауса понижения порядка (МПП). Однако всех особых случаев он не охватывает. МПП, разработанный Н.В. Зубовым в [11], который является обобщением метода Рауса, заключается в преобразовании многочлена $n + 1$ -го порядка $F(z)$ в многочлен $f(z)$ степени n , с помощью операции

$$f(z) = \frac{1}{\alpha^2 z^2} ((\alpha z - 1)F(z) + F(-z)),$$

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n+1} z^{n+1}, \alpha \neq 0, \alpha = 2a_1 / a_0$$

Причём при $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) число корней у многочлена $f(z)$ лежащих в левой (правой) полуплоскости по сравнению с числом аналогичных корней у многочлена $F(z)$ уменьшается на единицу, а их кососимметричные корни совпадают. В случае, когда величина $\alpha = 0$ к многочлену $F(z)$ применяется операция сдвига, приводящая его к такому виду $f(z)$, что уже можно применять МПП и устанавливается, как меняется расположение и число его корней относительно мнимой оси по сравнению с исходным многочленом.

Операция сдвига применяется к многочленам $F(z)$ степени n , не имеющим нулевых корней, к которым МПП не применим

$$F(z) = a_0 + a_2 z^2 + \dots + a_{2p+1} z^{2p+1} + \dots + a_n z^n,$$

где $a_3 = \dots = a_{p-1} = 0, a_{2p+1} \neq 0, p \geq 1$.

Если эти многочлены представить в виде

$$F(z) = g(z) + z^{2p} h(z),$$

$$g(z) = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots, h(z) = a_{2p+1} z + a_{2p+3} z^3 + a_{2p+5} z^5 + \dots,$$

То операция сдвига имеет вид

$$f(z) = g(z) + (-1)^p h(z).$$

Таким образом, применение МПП вместе с ОС позволяет построить многочлен, содержащий только кососимметричные корни исходного многочлена и вычислить локализацию остальных корней исходного многочлена относительно мнимой оси.

В [11], на основе метода понижения порядка, предлагается алгоритм вычисления числа чисто мнимых корней у характеристического многочлена. Решение этой задачи позволяет исследовать достаточно тонкий вопрос о простой устойчивости линейной системы, т.е. тот случай, когда характеристический многочлен имеет, кроме корней лежащих в левой полуплоскости, чисто мнимые, но не кратные корни. Там же предложен метод отделения корней у многочленов, имеющих только кососимметричные корни, с помощью метода квадрирования корней Н.И. Лобачевского и МПП, приведено описание общей методики исследования качественной картины распределения корней произвольного многочлена на комплексной плоскости и алгоритмы позволяющие всё это сделать всего за cn^2 арифметических операций, что, по-видимому, улучшить нельзя.

С помощью МПШ Н.В. Зубова удобно и быстро можно генерировать как устойчивые полиномы, так и неустойчивые из заданного класса (n, k) -эквивалентности. Для тестирования методов исследования устойчивости и неустойчивости матриц и полиномов надо помнить, что с ростом порядка найти матрицу или полином с заданной качественной картиной расположения спектра на плоскости с помощью датчика случайных чисел практически не удаётся уже при порядках чуть больше пяти-шести. Спектры таких матриц асимптотически с ростом порядка локализуются в круге определенного радиуса, зависящего от интервала выбора случайных чисел, а числа спектра распределяются слева и справа от мнимой оси практически пополам.

1.2. Исследование устойчивости и неустойчивости дискретных линейных систем управления

Задан полином с вещественными коэффициентами

$$F(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n, a_0 > 0$$

Нас интересует когда он является устойчивым по Шуру, т.е. когда его корни находятся вне единичного круга. По аналогии с критерием Михайлова и из принципа аргумента можно заключить, что полином шуровский тогда и только тогда, когда годограф $F(e^{j\omega})$, $0 \leq \omega \leq 2\pi$, не охватывает начала координат и годограф $F(e^{j\omega})$ охватывает начало координат k раз, если k – число неустойчивых корней $F(s)$.

При использовании графических критериев соглашение относительно корней устойчивого полинома удобно, т.к. никакого труда не составляет определить по графику, охватывает ли кривая начало координат, а посчитать число оборотов вокруг нуля бывает сложно или невозможно. При других подходах бывает проще проверить принадлежность корней внутренности единичного круга с центром в нуле. Для этого можно воспользоваться следующим соображением. При изменении порядка коэффициентов полинома на обратный $a_m \rightarrow a_{n-m}$, $m = 0, \dots, n$, его корни переходят во взаимно обратные.

Аналог алгоритма Рауса для дискретного случая (называемый дискретным критерием Рауса-Шура) дает простой алгоритм проверки устойчивости дискретных полиномов. Имеются и другие критерии устойчивости (Шура, Джюри). Однако они не

пригодны для подсчета числа собственных чисел вне и внутри единичного круга без изменения алгоритма метода понижения порядка Рауса-Шура для этих целей.

Как известно, дискретный полином $F(s)$, удовлетворяющий условию

$$\sum_{i=1}^n |a_i| < |a_0|$$

является дискретно устойчивым. В таких случаях эти полиномы называют дискретно сверхустойчивыми. Однако нет никаких условий на коэффициенты полинома, чтобы можно было установить число его корней вне и внутри единичного круга.

Известно [78], что любой устойчивый по Шуру полином $F(s)$ степени n с $F(0) = 1$ может быть получен с помощью рекуррентной процедуры

$$F_0(s) = 1, F_{k+1}(s) = F_k(s) + t_k s^{k+1} F_k(s^{-1}), |t_k| \leq 1, k = 0, \dots, n-1.$$

Числа t_k иногда называют параметрами Фама-Медичи. Для генерирования дискретно неустойчивых полиномов с заданным числом неустойчивых корней этот подход не пригоден. Заметим, что для непрерывных неустойчивых полиномов это можно сделать [65].

Исследование на устойчивость решения $f^*(n)$ неоднородного линейного разностного уравнения

$$f(n+m) + a_1 f(n+m-1) + \dots + a_n f(n) = g(n) \quad (1.4)$$

с помощью замены $\varphi(n) = f(n) - f^*(n)$ сводится к исследованию устойчивости нулевого (тривиального) решения однородного уравнения

$$\varphi(n+m) + a_1 \varphi(n+m-1) + \dots + a_n \varphi(n) = 0. \quad (1.5)$$

Как известно, достаточно ограничиться исследованием локализации корней полиномов разностных уравнений, т.е.

$$F(s) = s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_n, F(s) = 0. \quad (1.6)$$

Действительно, исследование на устойчивость нулевого решения $\varphi(n) \equiv 0$ уравнения (1.5) сводится к известным правилам:

1. Если все корни характеристического уравнения (1.6) по модулю меньше единицы, то решение $\varphi(n) \equiv 0$ уравнения (1.5) асимптотически устойчиво.

2. Если хотя бы один корень характеристического уравнения по модулю больше единицы, то решение $\varphi(n) \equiv 0$ неустойчиво.

3. Если характеристическое уравнение имеет простые корни с модулями, равными по единице, а остальные корни, если они есть, по модулю меньше единицы, то решение $\varphi(n) \equiv 0$ устойчиво, но не асимптотически.

4. Если характеристическое уравнение имеет хотя бы один кратный корень с модулем, равным единице, то решение $\varphi(n) \equiv 0$ неустойчиво.

Указанные правила сводят вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (1.5) к выяснению того, каковы модули корней характеристического уравнения (1.6). Здесь можно использовать ту же теорию, что и для дискретных полиномов. По аналогии с дискретными полиномами дробно-линейное отображение сводит вопрос о расположении корней преобразованного полинома (1.6) в левой и правой полуплоскости, а это можно решить с помощью критерия Рауса-Гурвица, критерия Михайлова или метода понижения порядка, также как для характеристических полиномов матриц непрерывных систем. Как и выше видим, что только критерий Михайлова может указать число неустойчивых корней полинома (1.6).

Для систем линейных разностных уравнений (дискретные системы)

$$X(k+1) = A(k)X(k),$$

как известно, для асимптотической устойчивости при постоянной матрице A необходимо и достаточно, чтобы собственные числа матрицы A были по модулю меньше единицы. В этом случае матрицу A называют устойчивой по Шуру. Следующая формула [78] дает спектральный радиус

$$\rho(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|A^m\|^{\frac{1}{m}}. \quad (1.7)$$

Теорема (Критерий Шура-Кона). Пусть полином

$$\varphi(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n, \quad \varphi^*(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 -$$

возвратный к нему. Корни полинома $\varphi(s)$ будут по модулю меньше единицы тогда и только тогда, когда будут положительны все главные миноры матрицы M , полученной следующим образом:

$$\frac{\varphi^*(x)\varphi^*(y) - \varphi(x)\varphi(y)}{1 - xy} = (1, x, \dots, x^{n-1})M \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ \vdots \\ y^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Из критерия Шура-Кона следует, что матрица M должна быть положительно определенной, что эквивалентно выполнению критерия Сильвестра о знакоопределенности квадратичных (или эрмитовых) форм. Поэтому невозможно использовать критерий Шура-Кона и ему подобные для исследования неустойчивости матрицы A с подсчетом числа k собственных чисел, находящихся вне единичного круга. Матрицу M можно получить, не решая уравнение (1.8). Это сделано аналитически и программно в [64].

Таким образом, обе теоремы решают только задачу исследования на устойчивость или неустойчивость матрицы разностной системы без разделения на отдельные случаи по числу k собственных чисел матрицы, находящихся вне единичного круга с центром в нуле ($k = 0$ дает устойчивость матрицы системы, а $k = \overline{1, n}$ – неустойчивость) при условии, что нет собственных чисел на самой окружности.

Очевидно, делая дробно-линейную замену, можно свести эти вопросы для полиномов к непрерывному случаю как и для матриц дискретных систем.

1.3. Исследование локализации и оценки спектров матриц для исследования устойчивости и неустойчивости линейных систем управления

Здесь рассматриваются матричные методы исследования устойчивости систем первого приближения, которые не используют коэффициенты характеристического полинома для определения положения его корней или прямого вычисления собственных чисел матрицы системы. Как и выше, будем искать методы, которые можно обобщить для исследования неустойчивости линейных систем дифференциальных уравнений.

Известно, что для систем большого порядка построение характеристического уравнения требует для прямого развёртывания определителя характеристической матрицы огромного числа операций (порядка $n!$), время исполнения которых на современной вычислительной технике слишком велико для прикладных задач. Даже при использовании специальных подходов вычисления коэффициентов характеристического полинома

требуется не приемлемое число операций (порядка n^3) для систем из нескольких десятков или сотен тысяч уравнений, которые появились в инженерной и вычислительной практике.

Более того, для сложных многокомпонентных систем большого порядка само построение характеристического многочлена нуждается в ещё большем числе арифметических операций (порядка n^7). Ясно, что уже для небольших n для численного решения такой задачи нет перспектив.

Для дальнейшего будем называть квадратную матрицу устойчивой, если все её собственные числа локализованы в левой полуплоскости. Если специально не оговорено, то далее все матрицы вещественные и квадратные.

Число методов, не использующих коэффициенты характеристического полинома или вычисления самих собственных чисел для исследования устойчивости матриц не велико. Однако, одни решают частные случаи, а другие больше имеют теоретический интерес, а в вычислительной практике не удобные или не экономичные.

Общая теорема об устойчивых матрицах принадлежит Ляпунову [65].

Теорема (Ляпунов). Матрица $A \in C^{n \times n}$ устойчива тогда и только тогда, когда существует отрицательно определённая матрица H такая, что матрица $AH + HA^*$ положительно определена. Что эквивалентно разрешимости матричного уравнения

$$AH + HA^* = E, \quad (1.9)$$

которое называют уравнением Ляпунова.

Следующая теорема принадлежит О. Таусски [110].

Теорема (Таусски). Пусть $A \in C^{n \times n}$ предположим, что характеристические числа $a_i (i = 1, \dots, n)$ матрицы A таковы, что

$$\prod_{i,k=1}^n (a_i + \overline{a_k}) \neq 0. \quad (1.10)$$

Тогда существует единственная невырожденная эрмитова матрица H такая, что выполняется (1.9). Кроме того, H имеет столько положительных характеристических чисел, сколько характеристических чисел с положительными действительными частями имеет матрица A .

Методы решения этих уравнений основаны на приведении матрицы A к форме Шура [8]. Из формы Шура легко определяется спектр матрицы A , что частично

обесценивает метод, если нас интересует только исследование устойчивости и неустойчивости без вычислений собственных значений, т.е. только их число в левой и правой полуплоскостях. Таким образом, следуя теории надо найти решение H матричного уравнения (1.9) и проверить отрицательную определенность найденной матрицы. Если это уравнение не имеет решения то матрица A неустойчива. Тоже следует, если H не является отрицательно определенной. Однако, рассмотрение численных методов, решающих матричные уравнения, выходит за рамки данного исследования. Кроме того, вычисление матрицы H дает пример, когда численная реализация часто или невозможна, или не экономична. Хотя в данном случае сам характеристический полином не строится.

Таким образом, теоремы Ляпунова и Таусски позволяют получить информацию о количестве собственных чисел с отрицательными и положительными вещественными частями, но они требуют выполнения условия (1.10), которое не ясно как проверить без вычисления спектра матрицы A .

Методы решения матричных уравнений в связи с проблемой устойчивости освещены в [74] и выходят за рамки настоящих исследований.

Имеется, чуть ли не единственный, итерационный метод оценки границ локализации корней характеристического уравнения линейной стационарной системы, позволяющий установить, в частности, находятся ли все собственные числа матрицы системы в левой комплексной полуплоскости или нет. Причём анализ на устойчивость или неустойчивость матрицы (вещественной или комплексной) проводится за приемлемое время там, где другие подходы вообще не применимы. В [88] достаточно подробно изложен этот метод локализации спектров матриц В.И. Зубова, развитый его учениками.

Сущность метода состоит в следующем. Пусть матрица A системы первого приближения имеет собственные числа λ , лежащие в некоторой допустимой области G (под областью здесь и ниже понимаем замкнутое, односвязное множество) на плоскости комплексного переменного. С помощью дробно-линейного преобразования этой области в круг единичного радиуса с центром в нуле по матрице A строится специальная матрица B . После чего проверяется условие $B^k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, которое эквивалентно тому, что все числа $\lambda \in G$.

В инженерной практике обычно применяют дробно-линейные отображения в круг единичного радиуса следующие области: полуплоскость, круг, «усеченный» угол,

прямоугольник, пересечение кругов, полуполоса. Известно, что главное отличие использования метода В.И. Зубова для этих областей касается вычислительного аспекта: для одной группы областей (полуплоскость, прямоугольник, полуполоса, «усечённый» угол) требуется вычисление обратной матрицы, а для другой (круг, пересечение кругов) – нет.

Очевидно, выбор области для поиска локализации спектра матриц прямо следует: во-первых, из принципиальной возможности дробно-линейного отображения в круг этой области и, во-вторых, следует из инженерной практики.

При наличии кратных собственных чисел матрицы A , не имеющих элементарных делителей, т.е. наличии жордановых клеток у матрицы A размерности не менее двух, элементы последовательности B^k могут вначале расти, а затем стремиться к нулю. Тоже может случиться, если числа спектра находятся в области G , но близки к границам.

Отметим так же, что итерационную последовательность B^k можно заменить последовательностью B^{2^k} . Число арифметических операций этого метода порядка n^2 , что неизмеримо меньше, чем число таких операций для методов, для которых предварительно строится характеристический многочлен матрицы системы. Кроме того, метод одинаково хорошо работает с вещественными и комплексными матрицами.

Использовать этот метод для исследования матриц на неустойчивость можно, но использовать его для проверки принадлежности их характеристических многочленов классам (n, k) -эквивалентности не удаётся. Далее о таких матрицах будем говорить, что они принадлежат классу (n, k) -эквивалентности матриц. Это объясняется тем, что сходимость степеней B^k к нулевой матрице эквивалентно локализации всего спектра исходной матрицы в рассматриваемой области, а расходимость означает только наличие одного или нескольких собственных чисел на границе или вне области. Установить количество чисел спектра матрицы внутри и вне области описанным методом нельзя.

Имеет место красивая оценка, которую в общем случае получил Гирш [7, 14].

Теорема (Гирш). Для любого линейного оператора в унитарном пространстве с квадратной матрицей A его спектр по реальным и мнимым частям собственных чисел ограничен наибольшими и наименьшими значениями собственных чисел спектров его эрмитовых составляющих H_1 и H_2 , соответственно в аддитивном представлении:

$$A = H_1 + jH_2, H_1 = \frac{A + A^*}{2}, H_2 = \frac{A - A^*}{2j}, \quad (1.11)$$

$$\min_{1 \leq i \leq n} \nu_i \leq a \leq \max_{1 \leq i \leq n} \nu_i, \quad \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i \leq b \leq \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i \quad (1.12)$$

где $a + jb$ - собственное число матрицы A , ν_i, μ_i - собственные числа матриц H_1 и H_2 .

Если матрица A линейного оператора является вещественной, тогда справедливо разложение (1.13), т.е.

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2} = B + C, \quad (1.13)$$

где матрица B - симметрическая, C - кососимметрическая.

Причём спектр матрицы B лежит на вещественной оси, а спектр матрицы C находится на мнимой оси и симметричен относительно вещественной оси. Поэтому первое неравенство сохраняется, а второе упрощается, т.е.

$$|b| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|,$$

где α_i - собственные числа матрицы C .

Улучшить неравенства в указанной постановке нельзя.

Становится очевидным известное утверждение о том, что, если квадратичная форма с вещественной матрицей A (или, что тоже самое, с матрицей $B = \frac{A + A^T}{2}$) является

отрицательно (положительно) определённой, то спектр матрицы A локализован в левой (правой) комплексной полуплоскости. Более того, теперь понятно почему обратное не верно – это прямо следует из первого неравенства в (1.12).

К сожалению, без дополнительных условий установить существование связи между локализацией спектра матрицы A и спектра её эрмитовой составляющей H_1 или B в вещественном случае установить не удастся. Это следует из неравенств (1.12) для спектров этих матриц, рассмотренных выше. Точнее, нужно найти условия, чтобы устойчивость матрицы A и отрицательная определённость матриц H_1 или B были эквивалентными.

Приведём ещё одно неравенство, использующее для оценки спектра данной матрицы спектры других матриц, связанных с исходной. Выше было использовано представление произвольной квадратной матрицы в виде суммы эрмитовой и косоэрмитовой матриц в (1.11). Г. Вейль нашёл оценки, связывающие собственные значения матрицы A и собственные значения матрицы AA^* , т.е. сингулярные числа матрицы A .

Теорема (Вейль) [14, 67]. Пусть собственные значения λ_i матрицы $A \in C^{n \times n}$ и её сингулярные числа ρ_i занумерованы так, что

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|, \quad \rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_n \quad (1.14)$$

Тогда для любого m , $m \leq n$ справедливы неравенства:

$$\prod_{i=1}^m |\lambda_{n-i+1}| \leq \prod_{i=1}^m \rho_{n-i+1}, \quad (1.15)$$

$$\prod_{i=1}^m |\lambda_i| \geq \prod_{i=1}^m \rho_i. \quad (1.16)$$

Заметим, что при $m = 1$ получим неравенство, дающее область локализации (кольцо) спектра матрицы A , полученное ещё в 1928 г. Э.Т. Брауном [67]:

$$\rho_1 \leq |\lambda_i| \leq \rho_n, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.17)$$

Однако это неравенство удобно только для оценки всего спектра матрицы A . Отметим, что оценка Брауна-Вейля (1.17) грубее оценок Бендиксона-Гирша (1.13), т.к. сингулярный круг для матрицы A содержит спектры эрмитовой и косоэрмитовой матриц в разложении (1.12).

Зная сингулярный радиус матрицы A , можно указать область локализации спектра матрицы – круг с центром в нуле и радиусом совпадающим с сингулярным радиусом. Эту область можно далее уточнить с помощью метода В.И. Зубова и неравенств указанных выше. Более того, зная спектральный радиус $\rho(A)$, равный наибольшему по модулю собственному числу (существуют алгоритмы для его вычисления), получим оценку для спектра без его полного вычисления: $0 \leq |\lambda_i| \leq \rho(A)$.

Ниже перечислим все основные, известные неравенства для оценки спектрального радиуса с помощью элементов самой матрицы. Обозначим R_i и T_j суммы абсолютных величин элементов соответственно i -ой строки и j -ого столбца комплексной матрицы A , $R = \max_{1 \leq i \leq n} R_i$, $T = \max_{1 \leq j \leq n} T_j$, $\rho(A)$ - спектральный радиус матрицы A .

Следующие неравенства принадлежат Фробениусу, Брауну, Фарнеллу, Брауэру, Перрону, Паркеру [14, 19, 67, 95], записанные по мере их усиления (уточнения) этими авторами:

$$\begin{aligned} \rho(A) &\leq \min(R, T); \quad \rho(A) \geq \sqrt[n]{|\det A|}; \\ \rho(A) &\leq \frac{R+T}{2}; \quad \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{R_i + T_i}{2}; \\ \rho(A) &\leq \sqrt{RT}; \quad \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sqrt{R_i T_i}. \end{aligned} \quad (0.4)$$

Однако, эти неравенства весьма грубы и для построения областей локализации спектров матриц даже для небольших n непригодны. Тем не менее их можно использовать для первого приближения с последующим уточнением другими методами.

В рамках вопросов по качественной картине распределения собственных чисел матрицы на комплексной плоскости, в частности, по областям локализации спектров, более точные оценки дают неравенства, связанные с диагональными элементами. Как известно, лучшие оценки получены для матриц с диагональным преобладанием по строке или столбцу.

Следующие три результата получены Гершгориным и Брауэром [14, 67]:

1. Любое собственное число матрицы A лежит, по крайней мере, в одном из кругов (круги Гершгорина)

$$|z - a_{ii}| \leq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.19)$$

2. Если $\Omega(k)$ множество на комплексной плоскости, содержащее k - кругов Гершгорина матрицы A и не имеющее общих точек с остальными $(n - k)$ кругами, то в $\Omega(k)$ лежат ровно k характеристических чисел матрицы A с учётом кратностей.

3. Любое собственное число матрицы A лежит, по крайней мере, в одной из областей (овалы Кассини)

$$\left| z - a_{ii} \right| \left| z - a_{jj} \right| \leq \sum_{m \neq i} |a_{im}| \sum_{m \neq j} |a_{jm}|. \quad (1.20)$$

Необходимо упомянуть красивую оценку Фань Цзи, но более грубую, чем результаты Гершгорина.

4. Пусть матрица $A = (a_{ij})$ - комплексная, а $B = (b_{ij})$ - вещественная и неотрицательная матрицы порядка n и такие, что $|a_{ij}| \leq b_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

Тогда каждое характеристическое число матрицы A лежит, по крайней мере, в одном из n кругов

$$\left| z - a_{ii} \right| \leq \mu - b_{ii}, \quad (1.21)$$

где μ - максимальное характеристическое число матрицы B .

Для малых возмущений перечисленные неравенства этого пункта дают некоторую качественную картину, но получить здесь какие-то количественные оценки без дополнительных условий вряд ли удастся.

Второе утверждение является перспективным для исследования распределения чисел спектра матрицы по их количеству слева и справа от мнимой оси. Справедливо следующее утверждение, которое следует из теоремы Гершгорина.

Следствие. Пусть для k диагональных элементов матрицы A выполняются неравенства

$$a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad (1.22)$$

а для $n - k$ остальных диагональных элементов -

$$-a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad (1.23)$$

Тогда матрица A принадлежит классу (n, k) - эквивалентности.

Будем называть матрицы, удовлетворяющие неравенствам (1.22)-(1.23), k -диагональными по строке или матрицы с k -диагональным преобладанием по строке.

Утверждение обобщается на комплексные матрицы, если в (1.22)-(1.23) вместо диагональных элементов a_{ii} взять их реальные части.

Сформулируем известный результат.

Теорема 1.4 [67]. Пусть $A = (a_{ij})$ матрица из $R^{n \times n}$ и $a_{ij} \geq 0$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$, и существуют такие положительные числа $t_1, t_2, \dots, t_n$, что

$$\sum_{j=1}^n t_j a_{ij} < 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.24)$$

Тогда матрица A является устойчивой.

Рорбах обобщил эту теорему на комплексные матрицы, заменив неравенства (1.24) на

$$\sum_{j \neq i} t_j |a_{ij}| < -t_i \operatorname{Re} a_{ii}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.25)$$

Сформулируем теорему Рорбаха для вещественного случая.

Теорема (Рорбах) [67]. Пусть $A = (a_{ij})$, $A \in R^{n \times n}$ и существуют такие положительные числа $t_1, t_2, \dots, t_n$, что выполняются неравенства:

$$\sum_{j \neq i} t_j |a_{ij}| < -t_i a_{ii}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.26)$$

Тогда матрица A является устойчивой.

При таких же условиях для вещественной матрицы Фреше доказал, что все собственные числа лежат в круге с центром $-\delta = -\max_{1 \leq i \leq n} (-a_{ii})$ и радиусом δ , т.е.

$|\lambda + \delta| < \delta$, если λ - собственное число матрицы A .

Используя теорему Гершгорина нетрудно доказать утверждение.

Теорема 1.5 [26]. Пусть $A \in C^{n \times n}$ и k -диагональная по строке, точнее, выполняются неравенства для k её диагональных элементов:

$$\operatorname{Re} a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad (1.27)$$

а для $n - k$ её диагональных элементов –

$$-\operatorname{Re} a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad (1.28)$$

Тогда матрица A принадлежит классу (n, k) -эквивалентности.

При $k = 0$ получим частный случай теоремы Рорбаха об устойчивости для вещественного случая. Такие матрицы (при $k = 0$) называют сверхустойчивыми или матрицами Адамара [78]. Справедливо общее утверждение.

Теорема 1.6 [26]. Пусть $A \in C^{n \times n}$, $A = (a_{ij})$, существуют положительные числа $t_1, t_2, \dots, t_n$, что для элементов a_{ii} выполняются неравенства:

$$t_i \operatorname{Re} a_{ii} > \sum_{i \neq j} t_j |a_{ij}| \quad (1.29)$$

если $\operatorname{Re} a_{ii} > 0$; и неравенство:

$$-t_i \operatorname{Re} a_{ii} > \sum_{i \neq j} t_j |a_{ij}| \quad (1.30)$$

если $\operatorname{Re} a_{ii} < 0$.

Тогда собственные числа матрицы A могут находиться только внутри кругов с центрами в точках a_{ii} и радиусами $R_i = |\operatorname{Re} a_{ii}|$.

Однако установить принадлежность матрицы A какому-либо классу (n, k) -эквивалентности при этих условиях не удаётся. Можно только сказать, что таких кругов будет не больше числа, равного сумме геометрических кратностей собственных чисел матрицы A .

Заметим, что теорема Рорбаха является частным случаем этой теоремы, когда все $\operatorname{Re} a_{ii} < 0$.

Следующее утверждение является обобщением теоремы Фреше и следствием последнего утверждения.

Теорема 1.7 [26]. Пусть $A \in R^{n \times n}$ и существуют такие положительные числа $t_1, t_2, \dots, t_n$, что для всех диагональных элементов выполняются неравенства

$$t_i |a_{ii}| > \sum_{i \neq j} t_j |a_{ij}| \quad (1.31)$$

Кроме того, обозначим:

$$\delta_1 = \max a_{ii}, \quad a_{ii} > 0; \quad \delta_2 = \max(-a_{ii}), \quad a_{ii} < 0. \quad (1.32)$$

Тогда собственные числа матрицы A могут находиться только в двух кругах:

$$\text{либо в круге } |z - \delta_1| < \delta_1, \quad (1.33)$$

$$\text{либо в круге } |z + \delta_2| < \delta_2.$$

Теорема Фреше является частным случаем этой теоремы, если все $a_{ii} < 0$. Справедлив критерий неустойчивости.

Теорема 1.8 [26]. Пусть $A \in R^{n \times n}$ и не строго k -диагональная, т.е. для k элементов a_{ii} выполняются неравенства $a_{ii} \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$, а для $n - k$ остальных элементов выполняется неравенства $-a_{ii} \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$.

Тогда матрица A принадлежит классу (n, k) -эквивалентности тогда и только тогда, когда A – невырожденная матрица.

При $k = 0$ получим критерий устойчивости для вещественных матриц с нестрогим диагональным преобладанием.

Критерий не верен для комплексных матриц. Действительно, невырожденная матрица может быть неустойчивой при выполнении почти диагонального преобладания по строке, т.е. $|\operatorname{Re} a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$, если у неё имеются чисто мнимые собственные числа при отсутствии нулевого собственного числа.

Вернемся к разложению (1.11). Как известно из отрицательной определённости эрмитовой квадратичной формы с матрицей $H_1 = \frac{A + A^*}{2}$, где A вообще говоря комплексная квадратная матрица из разложения (1.12) следует устойчивость матрицы A . Обратное неверно, более того, даже для сверхустойчивой вещественной матрицы, т.е. матрицы с отрицательным диагональным преобладанием по строке, не следует отрицательная определённость её квадратичной формы. Нужны дополнительные условия.

Теорема 1.9 [14]. Если матрица A нормальная ($AA^* = A^*A$), то для того, чтобы она была устойчивой необходимо и достаточно, чтобы её эрмитова квадратичная форма была отрицательно определённой.

Это следует из представления матрицы A как суммы эрмитовой матрицы H_1 и косоэрмитовой jH_2 в разложении

$$A = \frac{A + A^*}{2} + \frac{A - A^*}{2} = H_1 + jH_2 \quad (1.34)$$

и того, что для нормальных матриц спектры матриц H_1 и H_2 совпадают с наборами реальных и мнимых частей спектра матрицы A (и обе являются эрмитовыми).

Определение 1.1. Назовем квадратную вещественную матрицу A симметрично сверхустойчивой, если она имеет отрицательное диагональное преобладание по строке и по колонке.

Теорема 1.10 [26]. Пусть вещественная матрица A симметрично сверхустойчива. Тогда для её устойчивости необходимо и достаточно, чтобы её квадратичная форма была отрицательно определённой.

Аналогичная теорема верна и для квадратных комплексных матриц с отрицательным диагональным преобладанием по реальной части по строке и колонке, т.е.

$$-\operatorname{Re} a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, -\operatorname{Re} a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ji}|. \quad (1.35)$$

Однако, принадлежность эрмитовой составляющей H_1 из (1.34) классу (n, k) -эквивалентности не даёт информации о принадлежности матрица A этому же классу. Исключением является случай, когда $k = 0$, т.е. H_1 - устойчивая эрмитова матрица, а её эрмитова квадратичная форма отрицательно определённая. Действительно, для $k = 1, \dots, n-1$ из неравенства Гирша для спектров матриц A, H_1 :

$$\min \lambda(H_1) \leq \operatorname{Re} \lambda(A) \leq \max \lambda(H_1) \quad (1.36)$$

нельзя ничего сказать о локализации спектра матрицы A из того, что k чисел спектра матрицы H_1 находятся справа от нуля на вещественной оси, а $n - k$ - слева от нуля.

Анализ показал, что методы исследования знакоопределённости квадратичной формы удобны только тогда, когда нужно определить крайние случаи: отрицательную или положительную определённость. Если же нужно найти индекс и сигнатуру квадратичной формы, то для больших n аналитические методы не эффективны, а численные методы требуют не менее $\frac{n^3}{3}$ арифметических операций для матриц квадратичной формы порядка n . Однако, даже если применить эффективный алгоритм типа МПП для определения принадлежности классу (n, k) -эквивалентности характеристического полинома её матрицы H_1 из (1.34), это, без дополнительных условий, ничего не даст для определения принадлежности классу (n, k) самой матрицы A . Исключением являются нормальные матрицы. Для нормальной матрицы A из класса (n, k) -эквивалентности эрмитова квадратичная форма с матрицей $A + A^*$ имеет положительный индекс равный k и отрицательный индекс равный $n - k$.

Определение 1.2. Назовём вещественную $n \times n$ матрицу A симметрично k -диагональной, если она имеет положительное k -диагональное преобладание по строке и по колонке. Точнее, для k элементов на главной диагонали выполняются неравенства:

$$a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ji}|;$$

а для остальных $n - k$ элементов выполняются неравенства:

$$-a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad -a_{ii} > \sum_{i \neq j} |a_{ji}|.$$

Опираясь на теорему Гершгорина и неравенство (1.36) получим следующий критерий.

Теорема 1.11 [26]. Если вещественная квадратная матрица A симметрично k -диагональная, то для её принадлежности классу (n, k) -эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы матрица её квадратичной формы была тоже из этого класса или, что то же самое, её квадратичная форма имела положительный индекс k и отрицательный индекс $n - k$.

Нетрудно сформулировать и доказать критерий аналогичный теореме 1.12 для комплексных матриц с k -диагональным преобладанием для реальных частей элементов главной диагонали, по строке и столбцу.

1.4 Описание неопределенности в линейных системах управления

1. Параметрическая неопределенность (стационарная неопределенность).

Когда модель управления описывает какой-либо объект или процесс (механический, экономический, биологический и т.д.), то почти всегда его параметры не известны точно: либо нужные характеристики получены не точно, либо они вообще неизвестны, либо они меняются с течением времени (объект, устройство, социально – экономическая система, биологическая популяция, химический процесс и т.п.) и(или) зависят от других факторов. В таких случаях говорят о параметрической неопределенности. Как следствие, линейная система меняется на семейство систем (неопределенная система)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(q)x + B(q)u + D_1(q)\omega, \\ y &= C(q)x + D_2(q)\omega.\end{aligned}\tag{1.37}$$

Где $x(t)$ — вектор состояния системы, $u(t)$ — вектор управления, $y(t)$ — вектор выходных сигналов системы, $\omega(t)$ — выходные сигналы или задающие воздействия (внешние возмущения). Матрицы A, B, C, D_1, D_2 зависят от вектора параметров $q \in Q, Q \subset R^m$. Размерности всех векторов и матриц системы (1.37) согласованы.

Определение 1.3. Множество Q называется допустимым множеством или множеством неопределенности.

Считаем, что система (1.37) является стационарной и известно, что параметры q не меняются со временем и находятся во множестве Q .

Подобным образом при описании системы управления с помощью передаточных функций ее элементы могут зависеть от параметров. Например, в одномерном случае передаточная функция объекта имеет вид

$$H(s, q) = A(s, q)/B(s, q), q \in Q,\tag{1.38}$$

где $A(s, q), B(s, q)$ — неопределенные полиномы, коэффициенты которых $a_i(q), b_i(q), i = \overline{0, n}$, зависят от вектора параметров $q \in Q$. В таких случаях $H(s, q)$ называют неопределенным объектом. Например, при последовательном соединении l простых звеньев с передаточными функциями $k_i/(1+T_i S)$, неопределенными

постоянными времени T_i и коэффициентами усиления $k_i, i = \overline{1, m}$ мы можем записать семейство передаточных функций

$$H(s, T, k) = \frac{k_1 \cdot \dots \cdot k_m}{(1 + T_1 s) \cdot \dots \cdot (1 + T_m s)}, \quad (1.39)$$

$$T = (T_1, \dots, T_m)^T \in Q_T, \quad k = (k_1, \dots, k_m)^T \in Q_k.$$

В (1.39) параметрами являются постоянные времени и коэффициенты усиления. Для удобства объединим векторы параметров T и k в один вектор $q = (T_1, \dots, T_m, k_1, \dots, k_m) \in R^{2m}$ и получим семейство передаточных функций в виде (1.38), что является общей моделью.

Ниже рассматриваются разные виды ограничений на неопределенные параметры, которые приводят к различным формам множества Q . Вообще говоря, множество Q может иметь произвольный вид или совпадать с R^m . Во многих задачах Q совпадает с параллелепипедом, где каждый из параметров (координаты вектора q) меняется в общем случае независимо в интервале (интервал неопределенности):

$$Q = \{q \in R^m : \underline{q}_i \leq q_i \leq \overline{q}_i\}. \quad (1.40)$$

Определение 1.4. Назовем вершинным или угловым элементом семейства (матрица, полином, передаточная функция) элемент, определяемый крайними допустимыми значениями параметров:

$$q_i = \underline{q}_i \text{ либо } q_i = \overline{q}_i, \quad i = \overline{1, m}$$

в случаях параллелепипеда Q в (1.40). Очевидно, имеются всего 2^m угловых элементов (число вершин m -мерного параллелепипеда Q).

Часто параметры являются зависимыми, т.е. имеют общие ограничения. Например, допустимое множество Q может быть эллипсоидом вида

$$Q = \{q \in R^m : q^T M^{-1} q \leq 1, M > 0\} \quad (1.41)$$

или

$$Q = \left\{ q \in R^m : \sum_{i=1}^m \frac{(q_i - q_i^0)^2}{\alpha_i^2} \leq 1 \right\}, \quad (1.42)$$

где M — положительно определенная матрица квадратичной формы, $q^0 = (q_1^0, \dots, q_m^0)^T$ — некоторое фиксированное значение вектора параметров q , соответствующее номинальной системе, α_i — масштабные множители. Ограничения в (1.41 – 1.42) называют эллиптическими.

Вообще говоря, Q рассматривают в какой-либо норме. Например, куб Q в бесконечной норме

$$\max_i |q_i| \leq 1, \\ Q = \{ q \in R^m : \|q\|_{\infty} \leq 1 \} \quad (1.43)$$

или шар Q во второй норме (Евклидова норма)

$$Q = \{ q \in R^m : \|q\|_2 \leq 1 \}. \quad (1.44)$$

Можно рассматривать гипотетически и комплексные параметры, если

$$q = (q_1, \dots, q_m)^T \in Q, Q \subset C^m.$$

Тогда для $q_i = \mu_i + j\nu_i$ можно задать параметры крайними значениями по реальной и мнимой частям, т.е.

$$Q = \{ q \in C^m : \underline{\mu}_i \leq \mu_i \leq \overline{\mu}_i, \underline{\nu}_i \leq \nu_i \leq \overline{\nu}_i \} \quad (1.45)$$

В этом случае можно считать область параметров Q либо из C^m , либо представить Q как множество векторов $(\mu_1, \nu_1, \dots, \mu_m, \nu_m)^T$ из R^{2m} .

Ограничения (1.45) являются интервальными, хотя параметры комплексные.

Круговые ограничения для $q \in C^m$ имеют вид:

$$Q = \{ q \in C^m : |q_i - q_i^0| \leq \alpha_i \}. \quad (1.46)$$

Ромбовидные ограничения в комплексной плоскости:

$$Q = \{q \in C^m : |\mu_i - \mu_i^0| + |\nu_i - \nu_i^0| \leq \alpha_i\} \quad (1.47)$$

или

$$Q = \left\{ q \in C^m : \frac{|\mu_i - \mu_i^0|}{\alpha_i} + \frac{|\nu_i - \nu_i^0|}{\beta_i} \leq 1, \alpha_i, \beta_i > 0 \right\} \quad (1.48)$$

Круговые ограничения в комплексной плоскости:

$$Q = \left\{ q \in C^m : |\mu_i - \mu_i^0|^2 + |\nu_i - \nu_i^0|^2 \leq \alpha_i \right\}, \quad (1.49)$$

или эллиптические:

$$Q = \left\{ q \in C^m : \frac{|\mu_i - \mu_i^0|^2}{\alpha^2} + \frac{|\nu_i - \nu_i^0|^2}{\beta^2} \leq 1 \right\} \quad (1.50)$$

В случае общих (взаимозависимых) ограничений параметров, когда $q \in C^m$ рассматривают по аналогии с вещественным случаем эллиптические ограничения:

$$Q = \left\{ q \in C^m : \sum_{i=1}^m \frac{|q_i - q_i^0|^2}{\alpha_i^2} \leq 1 \right\} \quad (1.51)$$

где можно считать q вектором из R^{2m} (см. выше).

Функциональная зависимость неопределенности от параметра q может быть любой природы.

2. Интервальная неопределенность (интервальные ограничения на коэффициенты полинома или на элементы матрицы).

Как известно, интервальный полином задается следующим образом:

$$\tilde{P}(z) = \left\{ P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n : \underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i, \underline{a}_n > 0, i = \overline{0, n} \right\}. \quad (1.52)$$

В (1.52) сами коэффициенты являются неопределенными параметрами, которые независимо принимают значения в своих интервалах неопределенности $[\underline{a}_i, \overline{a}_i]$. Условие

$\underline{a}_n > 0$ обеспечивает постоянство степени n полинома при всех $a_n, \underline{a}_n, \overline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n$.

Часто применяется более удобная (центрированная) форма записи интервального семейства полиномов:

$$\tilde{P}(z) = \{P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n : |a_i - a_i^0| \leq \gamma \alpha_i, i = \overline{0, n}\} \quad (1.53)$$

где a_i^0 — коэффициенты номинального полинома,

$P(z) = a_0^0 + a_1^0 z + \dots + a_n^0 z^n, \alpha_i \geq 0$ — масштабы изменения коэффициентов a_i ,

число $\gamma, \gamma > 0$, называют размахом неопределенности. В (1.53) концы интервалов из (1.52) имеют вид:

$$\underline{a}_i = a_i^0 - \gamma \alpha_i, \overline{a}_i = a_i^0 + \gamma \alpha_i, |\Delta a_i| \leq \gamma \alpha_i, i = \overline{0, n}. \quad (1.54)$$

Аналогично определяется интервальное семейство матриц:

$$A = (a_{ij}), \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \overline{a}_{ij}, i, j = \overline{1, n}. \quad (1.55)$$

запишем (1.55) в форме подобной (1.53), т.е.

$$A = A_0 + \Delta \quad (1.56)$$

Где $A = (a_{ij}), A_0 = (a_{ij}^0)$ — номинальная матрица, $\Delta = (\Delta_{ij})$,

$\Delta_{ij} = (a_{ij} - a_{ij}^0), |\Delta_{ij}| \leq \gamma \delta_{ij}, \sigma = (\delta_{ij})$ — матрица масштабов изменения элементов

a_{ij} матрицы A относительно центров a_{ij}^0 элементов номинальной матрицы A_0 ,

$\gamma (\gamma > 0)$ — размах неопределенности. Равенство (1.56) можно записать следующим

образом $A = A_0 + \gamma \sigma, \Delta = \gamma \sigma$ — называется матрицей возмущений.

Для интервального полинома с комплексными коэффициентами

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s) = \{F(s) = A_0 + A_1 s + \dots + A_n s^n : \\ A_i = \alpha_i + j b_i, \underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i, \underline{b}_i \leq b_i \leq \overline{b}_i, i = \overline{0, n}\} \end{aligned} \quad (1.57)$$

условие $\max(\underline{a}_n, \underline{b}_n, \overline{a}_n, \overline{b}_n) > 0$ не дает обратиться в ноль коэффициенту при старшей

степени s^n . Центрированная форма записи интервального семейства полиномов с комплексными коэффициентами принимает вид по аналогии с вещественным случаем

$$\begin{aligned}\tilde{F}(s) = \{F(s) = A_0 + A_1 s + \dots + A_n s^n : \\ A_i = \alpha_i + j b_i, \left| \alpha_i - \alpha_i^0 \right| \leq \gamma \alpha_i, \left| b_i - b_i^0 \right| \leq \gamma \beta_i, i = \overline{0, n}\} \quad (1.58)\end{aligned}$$

Определим интервальное семейство матриц с комплексными коэффициентами в виде:

$$A = (a_{ij} + j b_{ij}), \quad a_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}], \quad b_{ij} \in [\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}], \quad i, j = \overline{1, n} \quad (1.59)$$

Запишем матричное семейство в центрированной форме:

$$A = A_0 + \Delta, \quad A = (a_{ij} + j b_{ij}), \quad A_0 = (a_{ij}^0 + j b_{ij}^0), \quad (1.60)$$

$$\Delta = (\Delta_{ij}^1 + j \Delta_{ij}^2), \quad \left| \Delta_{ij}^1 \right| \leq \gamma \delta_{ij}^1, \quad \left| \Delta_{ij}^2 \right| \leq \gamma \delta_{ij}^2,$$

$$\Delta_{ij}^1 = a_{ij} - a_{ij}^0, \quad \Delta_{ij}^2 = b_{ij} - b_{ij}^0$$

Где A_0 - номинальная комплексная матрица; $\sigma_1 = (\delta_{ij}^1)$ и $\sigma_2 = (\delta_{ij}^2)$ - матрицы масштабов измерения реальных и мнимых частей элементов номинальной матрицы A_0 , γ - размах неопределенности.

3. Аффинная неопределенность (аффинные семейства полиномов и матриц). Однако чаще коэффициенты полинома или матрицы зависят от вектора параметров более сложным образом, чем в q интервальном семействе полиномов. Наиболее простая модель такой зависимости является аффинная неопределенность.

Аффинное семейство полиномов задается следующим образом:

$$\tilde{P}(z, Q) = \{P(z, Q) = P_0 + q_1 P_1(z) + \dots + q_m P_m(z), q \in Q\}, \quad (1.61)$$

где $P_i(z)$, $i = \overline{1, m}$, известные полиномы. Причем $P(z, 0) = P_0(z)$ так же, как и выше называют номинальным полиномом семейства. Очевидно, в этом случае коэффициенты $a_i(q)$ полинома $P(z, q)$ зависят аффинным образом от вектора параметров q :

$$a_i(q) = a_i^0 + \sum_{j=1}^m q_j a_i^j, \quad (1.62)$$

где a_i^j коэффициент $P_j(z)$ при z^i .

Подобным образом задается матричное аффинное семейство:

$$\tilde{A}(Q) = \{A(q) = A_0 + q_1 A_1 + \dots + q_m A_m, q \in Q\} \quad (1.63)$$

где $A_i, i = \overline{1, m}$ — фиксированные известные матрицы, A_0 — номинальная матрица.

В (1.63) используется линейная зависимость от неопределенных параметров.

Заметим, что аффинное семейство полиномов и матричное аффинное семейство может задаваться и для комплексного случая, т.е. когда коэффициенты полиномов $F_i(s)$, элементы матрицы A_i и даже сами параметры q_i , являются комплексными числами.

4. Неопределенности в коэффициентах неинтервальных семейств полиномов с вещественными коэффициентами

$$F(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n, a_i \in R, a_n \neq 0$$

могут быть эллиптическими, т.е.

$$\sum_{i=0}^n \frac{(a_i - a_i^0)^2}{a_i^2} \leq \gamma^2,$$

Семейство $F(s)$ в этом случае называют эллиптическим (при $\alpha_i \equiv 1$ получим сферическое семейство полиномов). Как и выше $\alpha_i > 0$ масштабные множители, γ — размах неопределенности, α_i^0 — коэффициенты номинального полинома $F_0(s)$. Если же некоторые $\alpha_i = 0$, то это означает, что $a_i = a_i^0$ и по этому коэффициенту нет возмущения, а эллипсоид коэффициентов, в общем случае находясь в R^{m+1} в этом случае имеет нулевую полуось с номером i и находится в пространстве меньшей размерности.

Можно использовать многогранник коэффициентов в R^{m+1} , т.е.

$$\sum_{i=0}^n \frac{|a_i - a_i^0|}{a_i^2} \leq \gamma,$$

5. Для семейства полиномов с неинтервальными комплексными коэффициентами неопределенности могут быть описаны по-разному. Пусть семейство полиномов записано в виде

$$F(s) = A_0 + A_1 s + \dots + A_n s^n, A_n \neq 0, A_i \in C, i = \overline{0, n}.$$

Тогда круговые описания на коэффициенты имеют вид:

$$|A_i - A_i^0| \leq \alpha_i \gamma, i = \overline{0, n};$$

Эллиптические ограничения в двух вариантах:

$$\sum_{i=0}^n \frac{|A_i - A_i^0|^2}{a_i^2} \leq \gamma^2, \text{ или } \sum_{i=0}^n \frac{(a_i - a_i^0)^2}{a_i^2} + \frac{(b_i - b_i^0)^2}{b_i^2} \leq \gamma^2;$$

ромбовидные ограничения можно записать так

$$|a_i - a_i^0| + |b_i - b_i^0| \leq \alpha_i \gamma, i = \overline{0, n};$$

многогранник коэффициентов в R^{2m+2} задается несколько сложнее

$$\sum_{i=0}^n \frac{|a_i - a_i^0|}{\alpha_i^2} + \frac{|b_i - b_i^0|}{\beta_i^2} \leq \gamma.$$

Практически все задания ограничений неопределенности коэффициентов для семейств полиномов можно перенести на элементы матриц. Однако многие из них мало изучены или не используются пока в инженерной практике, что не мешает исследователям рассматривать эти описания, как отдельные математические задачи, которые могут быть использованы в робастной теории.

6. В инженерной практике часто встречается мультилинейная зависимость.

Определение 15. Скалярная функция $a(q), q \in R^m$, называется мультилинейной, если она линейная по каждой координате вектора параметров $q \in R^m$ при фиксированных значениях остальных координат.

В качестве примера такой зависимости можно привести характеристический полином цепи простых звеньев $k_i / (1 + T_i z)$, замкнутой единичной обратной связью, т.е.

$$P(z, T, K) = (1 + T_1 z) \cdot \dots \cdot (1 + T_m z) + k_1 k_2 \cdot \dots \cdot k_m, \quad (1.64)$$

где T_i — постоянные времени, а k_i — коэффициенты усиления. Можно считать те и другие постоянными, как неопределенные параметры $(T_1, \dots, T_m, k_1, \dots, k_m) \in Q, Q \in R^{2m}$. Очевидно, характеристический полином интервальной матрицы (16) тоже является мультилинейной функцией переменных Δ_{ij} (Определитель матрицы всегда можно разложить по ряду, содержащему элемент Δ_{ij} матрицы возмущений Δ).

7. Выделим полиномиальную зависимость от параметров, которая встречается довольно часто в теории управления. Примером является характеристический полином аффинного матричного семейства:

$$P(z, q) = \det(A(q) - zE), \quad A(q) = A_0 + \sum_{j=1}^m q_j A_j, \quad q \in Q. \quad (1.65)$$

8. Если модель описывается в пространстве состояний, то используется тип матричной неопределенности, когда не физические (химические, биологические, экономические,...) параметры, а непосредственно сама матрица системы допускает неопределенность:

$$\dot{X} = AX, \quad A = A_0 + \Delta, \quad (1.66)$$

где A_0 — известная (номинальная) матрица, Δ — возмущение, подчиняющееся условию

$\|\Delta\| \leq \gamma$, $\|\Delta\|$ — выбранная норма матрицы, а γ — интервал допустимых возмущений.

Примером такого рода модели является структурированная матричная неопределенность. Пусть $K = K_0 + \Delta$ — матрица усиления с неопределенностью, $\|\Delta\| \leq \gamma$. Тогда соответствующая неопределенность в матрице замкнутой системы $A + BKC$ получит структурированную форму $B\Delta C$, а номинальная матрица замкнутой системы имеет вид $A + BK_0C$.

9. Частотная неопределенность одномерной системы управления. Если система управления описывается с помощью частотных характеристик, очевидно неопределенность надо описывать в этих же терминах. Пусть передаточная функция одномерной системы может иметь вид

$$H(z) = H_0(z) + \Delta H(z), \quad (1.67)$$

где частотная неопределенность $\Delta H(z)$ принадлежит какому-то семейству.

Определение 1.6. RH^∞ — пространство устойчивых реализуемых дробно — рациональных функций, т.е. функций вида $G(z) = A(z)/B(z)$, $A(z)$ — полином, $B(z)$ — Гурвицев полином и $\deg A(z) \leq \deg B(z)$. Если $M(z)$ матрица с элементами $m_{ij}(z)$, то запись $M(z) \in RH^\infty$ означает, что $m_{ij}(z) \in RH^\infty$ для всех i, j .

Часто считают, что $|\Delta H(i\omega)| \leq |W(i\omega)|$ для всех $\omega \in [0, \infty)$ для заданной передаточной функции $W(z)$, $W^{-1}(z) \in RH^\infty$, т.е. $\|W^{-1}\Delta H\|_\infty \leq 1$.

10. Для матричной передаточной функции имеется намного больше различных форм, которыми можно задавать неопределенность. В частности, передаточная функция может иметь вид

$$H(z) = H_0(z) + W_1(z)\Delta(z)W_2(z), \quad (1.68)$$

где $W_1(z), W_2(z) \in RH^\infty$ — постоянные заданные матричные функции, а $\Delta(z) \in RH^\infty, \|\Delta(z)\|_\infty \leq 1$ — аддитивная модель ошибок.

Мультипликативной моделью называют форму передаточной функции вида

$$H(z) = H_0(z)(E + W_1(z)\Delta(z)W_2(z)). \quad (1.69)$$

Имеются и другие формы, в которых задается неопределенность. Общий метод учета неопределенностей использует дробно – линейную форму. Пусть M — матрица с блочной формой:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

где матрицы M_{11}, M_{22} — квадратные, но, возможно, разных порядков.

Определение 1.7. Назовем нижним (верхним) дробно – линейным преобразованием матрицы:

$$\begin{aligned} F_l(M, \Delta_l) &= M_{11} + M_{12}\Delta_l(E - M_{22}\Delta_l)^{-1}M_{21}, \\ F_u(M, \Delta_u) &= M_{22} + M_{21}\Delta_u(E - M_{11}\Delta_u)^{-1}M_{12}, \end{aligned} \quad (1.70)$$

если обратные матрицы существуют.

Системы (модели), использующие преобразования F_l и F_u охватывают большое число методов учета неопределенностей Δ . Например, можно показать, что если A, B, C, D — матрицы подходящих размерностей и C^{-1} существует, то

$$(A + B\Delta)(C + D\Delta)^{-1} = F_l(M, \Delta), \quad M = \begin{pmatrix} AC^{-1} & B - AC^{-1}D \\ C^{-1} & -C^{-1}D \end{pmatrix} \quad (1.71)$$

Дробно-линейное описание неопределенности применяется в задачах $M-\Delta$ -конфигураций. Эта постановка является общей схемой анализа задач с неопределенностями, которая широко используется в новейших исследованиях. Идея в том, что система приводится к виду, изображенному на схеме

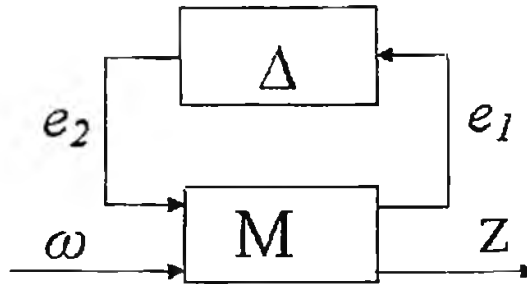


Схема $M-\Delta$ -конфигурация

где ω — внешние входы, z — выход $M = M(z)$ -матричная передаточная функция, отвечающая разного типа неопределенностям. Таким образом, неопределенность включается в цепь обратной связи. Точнее, система записывается следующим образом:

$$e_1 = M_{11}e_2 + M_{12}\omega, \quad e_2 = \Delta e_1, \quad z = M_{21}e_2 + M_{22}\omega. \quad (1.72)$$

Исключая e_1, e_2 , получим:

$$\begin{aligned} e_1 &= M_{11}\Delta e_1 + M_{12}\omega, \quad e_1 = (E - M_{11}\Delta)^{-1} M_{12}\omega, \\ z &= M_{21}\Delta e_1 + M_{22}\omega = (M_{21}\Delta(E - M_{11}\Delta)^{-1} M_{12} + M_{22})\omega. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Таким образом, $z = F_u(M, \Delta)\omega$.

Ясно, что в невозмущенной системе $\Delta = 0$, $F_u(M, \Delta) = M_{22}$, $M_{22}(z)$ — передаточная функция невозмущенной системы.

11. Нестационарная и нелинейная зависимость неопределенных параметров. В матричных моделях неопределенности, которые были рассмотрены в п. 2 – 7 считается, что в системе

$$\dot{X} = (A_0 + \Delta)X,$$

возмущение Δ — постоянная матрица. Довольно часто возмущения зависят от времени, что даст модель нестационарных возмущений $\Delta = \Delta(t)$. Причем, предполагается, что для всех t матрицы $\Delta(t)$ находятся в заданном семействе, например $\|\Delta(t)\| \leq \gamma$ для некоторой матричной нормы. В других случаях элементы $\Delta(t)$ принадлежат

интервальному семейству $\underline{\Delta}_{ij} \leq \Delta_{ij}(t) \leq \overline{\Delta}_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$. В некоторых случаях возмущения зависят и от состояния системы, т.е. нужно исследовать системы вида

$$\dot{X} = (A_0 + \Delta(t, X(t)))X. \quad (1.74)$$

В аффинных семействах: $\dot{X} = AX$, $A = A_0 + \sum_{i=1}^m q_i A_i$.

Существует много других вариантов вхождения нелинейных и нестационарных возмущений в робастных системах.

12. Вероятностный подход к проблеме робастности. Для описанных выше моделей неопределенности обычно применяют минимаксный подход, и ставится главный вопрос: Можно ли гарантировать нужное свойство системы для всех допустимых значений неопределенности?

Существует совершенно другой подход. Рассмотрим случай параметрической неопределенности. Пусть вектор параметров q выбирается из допустимого множества Q случайным образом, но в соответствии с заданным на Q вероятностным распределением. Тогда можно оценить вероятность того, что случайно выбранная система будет обладать нужным свойством. Если окажется, что эта вероятность близка к единице, то считают поведение системы практически удовлетворительным. Маловероятными событиями приходится пренебречь.

Конечно, такой подход далеко не безупречен. Однако, имеется несколько причин, по которым такой метод решения робастных задач может быть применен и востребован. Перечислим эти причины.

- 1) Точное решение проблем по робастности довольно часто сложно или вообще невозможно. Например, для задач робастной устойчивости интервальных матриц конструктивного решения до сих пор нет.
- 2) Детерминированный подход часто дает очень пессимистические оценки. Точнее, учитывая самые худшие и крайние ситуации, как следствие, занижается размах допустимых возмущений. Если же пренебречь событиями с вероятностью близкой к нулю, то диапазон неопределенности можно значительно увеличить.
- 3) Кроме того, неопределенные параметры практических задач часто имеют вероятностную природу по своей сути или по методу их оценки. Поэтому установление жестких границ интервалов для изменения неопределенных параметров вряд ли можно считать всегда правильными.

Глава 2 – Аналитические и графические методы исследования робастной устойчивости и неустойчивости линейных интервальных систем управления

2.1 Аналитические критерии исследования робастного поведения интервальных полиномов

2.1.1 Интервальные полиномы с вещественными коэффициентами

Теорема 2.1.[26] Пусть семейство полиномов с вещественными коэффициентами

$$F(s, q) = a_0(q) + a_1(q)s + \dots + a_n(q)s^n, \quad (2.1)$$

$$q \in Q, \quad Q \in R^m, \quad Q - \text{связно}, \quad a_n(q) \neq 0, \quad a_0(q) > 0$$

принадлежит классу (n, k) – эквивалентности для некоторого $q \in Q$. Тогда семейство $F(s, q)$ принадлежит классу (n, k) – эквивалентности тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$0 \notin S(\omega) = \{F(j\omega, q) : q \in Q, \omega \in [0, +\infty)\} \quad (2.2)$$

Эта теорема является обобщением известного принципа исключения нуля, справедливого для устойчивых семейств полиномов, на классы (n, k) – эквивалентности, так как класс эквивалентности при $k = 0$ совпадает с семейством устойчивых полиномов.

Заметим, что при изменении параметров $q \in Q$ наблюдается следующая картина поведения нулей полиномов семейства (2.1): устойчивые нули «слипаются» или «делятся» так, что их количество с учетом кратностей остается постоянным $n - k$ и все они локализованы в левой полуплоскости. Аналогично ведут себя неустойчивые нули при изменении q .

Одно доказательство этой теоремы основано на критерии Михайлова. Надо только при использовании подхода Михайлова иметь в виду, что годографы неустойчивых полиномов могут оказаться немонотонными функциями, а другое опирается на непрерывную зависимость нулей от параметров.

Определение 2.1. [34] Назовем, интервальный полином с вещественными коэффициентами

$$F(s) = \{f(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_ns^n, \underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i, i = \overline{1, n}\} \quad (2.3)$$

интервальным полиномом класса (n, k) -эквивалентности, если любой полином из этого семейства принадлежит классу (n, k) -эквивалентности. Для определенности будем считать, что $\underline{a}_0 > 0$, $\underline{a}_n \cdot \bar{a}_n > 0$.

Определение 2.2. Четыре полинома, коэффициенты, которых составлены из крайних значений их интервалов, называются угловыми полиномами $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, $\varphi_3(s)$, $\varphi_4(s)$ интервального полинома $F(s)$. Точнее:

$$\begin{aligned}\varphi_1(s) &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \dots, \\ \varphi_2(s) &= \bar{a}_0 + \underline{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \dots, \\ \varphi_3(s) &= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \underline{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \dots, \\ \varphi_4(s) &= \underline{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \underline{a}_3 s^3 + \dots.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Теорема 2.2. [34] Интервальный полином $F(s)$ принадлежит классу (n, k) -эквивалентности тогда и только тогда, когда:

1. Угловые полиномы (2.4) принадлежат классу (n, k) -эквивалентности.
2. Для всех положительных корней полиномов $\underline{g}(\omega)$, $\bar{g}(\omega)$, $\underline{h}(\omega)$, $\bar{h}(\omega)$ выполняются следующие условия:

если $\underline{g}(\omega) = 0$ или $\bar{g}(\omega) = 0$, то $\underline{h}(\omega)\bar{h}(\omega) > 0$;

если $\underline{h}(\omega) = 0$ или $\bar{h}(\omega) = 0$, то $\underline{g}(\omega)\bar{g}(\omega) > 0$,

где

$$\begin{aligned}\bar{g}(\omega) &= \bar{a}_0 - \underline{a}_2 \omega^2 + \bar{a}_4 \omega^4 - \dots, \\ \underline{g}(\omega) &= \underline{a}_0 - \bar{a}_2 \omega^2 + \underline{a}_4 \omega^4 - \dots, \\ \bar{h}(\omega) &= \bar{a}_1 \omega - \underline{a}_3 \omega^3 + \bar{a}_5 \omega^5 - \dots, \\ \underline{h}(\omega) &= \underline{a}_1 \omega - \bar{a}_3 \omega^3 + \underline{a}_5 \omega^5 - \dots.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Доказательство. Необходимость. Действительно, если все полиномы семейства принадлежат классу (n, k) -эквивалентности, то и угловые полиномы (2.4) тоже в этом классе – первое условие выполняется. Второе условие следует из того, что во-первых,

множество годографов $S(\omega)$ интервального семейства представляет собой прямоугольник вида:

$$\underline{g}(\omega) \leq g(\omega) \leq \bar{g}(\omega); \quad \underline{h}(\omega) \leq h(\omega) \leq \bar{h}(\omega);$$

во-вторых, т.к. все полиномы семейства (2.4) из класса (n, k) – эквивалентности, то их годографы не проходят через ноль. В частности, их ребра не содержат нуля ни при каких ω . Поэтому при пересечении какой-либо стороной $S(\omega)$ реальной или мнимой оси выполняются вторые условия.

Достаточность. Здесь уже нельзя прямо применять методику доказательства, использованную для устойчивых интервальных полиномов [94, 96]. Надо учитывать немонотонность движения при $k > 0$. Итак, пусть выполняются условия 1 и 2 теоремы. Первое условие обеспечивает отсутствие нуля на годографах угловых полиномов, т.к. вершина прямоугольника $S(\omega)$ не может совпасть с началом координат ни при каком ω . Второе условие гарантирует, что ни одна сторона $S(\omega)$ не пройдет через ноль ни при каком ω .

Кроме того, $S(0)$ является отрезком на вещественной оси, не содержащим нуля, т.к. $\underline{a}_0 > 0$. Таким образом, прямоугольник $S(\omega)$ не может пересечь начало координат. Последнее означает выполнение обобщения принципа исключения нуля (теорема 2.1) для семейств полиномов из класса (n, k) – эквивалентности. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что теорема 2.2 является обобщением теоремы Харитонова, которая является ее частным случаем при $k = 0$. Следует отметить, что в теореме Харитонова не нужно проверять второе условие теоремы 2.2, т.к. оно выполняется как следствие первого условия.

Отметим, что аналоги следствия теоремы Харитонова для неустойчивых интервальных семейств для порядков $n < 6$ не имеют места из-за немонотонного поведения $S(\omega)$.

Можно ослабить теорему 2.2, но получить утверждение, которое легче проверить.

Теорема 2.3. [26] Интервальный полином $F(s)$ принадлежит классу (n, k) – эквивалентности тогда и только тогда, когда все полиномы, соответствующие четырем

сторонам прямоугольника с вершинами из угловых полиномов принадлежат классу (n, k) -эквивалентности.

В теореме 2.3 проверку угловых полиномов на принадлежность классу (n, k) -эквивалентности можно сделать с помощью метода понижения порядка по методике Зубова Н.В. [11] или критерия Михайлова, а проверку реберных политопов, с помощью обобщения критерия Найквиста (теорема 1.3) для класса (n, k) -эквивалентности. Заметим, что для проверки второго условия теоремы 2.2 необходимо найти все корни полиномов $\underline{g}(\omega)$, $\overline{g}(\omega)$, $\underline{h}(\omega)$, $\overline{h}(\omega)$, что является отдельной и не всегда простой задачей для больших порядков.

Опираясь на теоремы 2.2-2.3 можно сформулировать критерий робастного поведения, т.е. устойчивости ($k = 0$) и неустойчивости ($k = \overline{1, n}$) интервальных полиномов в пространстве параметров.

Теорема 2.4. Пусть $\underline{a}_i \leq a_i(q) \leq \overline{a}_i$, $i = \overline{0, n}$, $\underline{a}_0 > 0$, $\underline{a}_n \overline{a}_n > 0$, $q \in Q$, $Q \in R^m$, Q – связно. Тогда для того, чтобы семейство полиномов

$$U(s, Q) = \{u(s, q) = a_0(q) + a_1(q)s + \dots + a_n(q)s^n; q \in Q\} \quad (2.1)$$

принадлежало классу (n, k) -эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1. Либо все четыре угловых полинома были из класса (n, k) -эквивалентности и для всех положительных корней полиномов $\underline{g}(\omega)$, $\overline{g}(\omega)$, $\underline{h}(\omega)$, $\overline{h}(\omega)$ выполнялись соотношения, если:

а) $\underline{g}(\omega) = 0$ или $\overline{g}(\omega) = 0$, то $\underline{h}(\omega)\overline{h}(\omega) > 0$;

б) $\underline{h}(\omega) = 0$ или $\overline{h}(\omega) = 0$, то $\underline{g}(\omega)\overline{g}(\omega) > 0$.

2. Либо все политопы соответствующие сторонам прямоугольника с вершинами из угловых полиномов принадлежали классу (n, k) -эквивалентности.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из теорем 2.1-2.3 приведенных выше.

2.1.2 Интервальные полиномы с комплексными коэффициентами

Пусть полином степени n комплексными коэффициентами

$$\varphi(s) = A_0 + A_1 s + \dots + A_n s^n \quad (2.6)$$

принадлежит классу (n, k) -эквивалентности. Очевидно, для таких полиномов $A_0 \neq 0$, $A_n \neq 0$. В частности, если $k = 0$, то полином (2.6) является устойчивым.

Имеет место обобщение принципа исключения нуля для семейств полиномов с комплексными коэффициентами.

Теорема 2.5. [26] Пусть семейство полиномов

$$\Phi(s, Q) = \{ \varphi(s, q) = A_0(q) + A_1(q)s + \dots + A_n(q)s^n \}, \quad (2.7)$$

$$q \in Q, \quad Q \in R^m, \quad Q - \text{связно}, \quad A_n(q) \neq 0$$

при некотором $q \in Q$ имеет полином $\varphi(s, q)$ из класса (n, k) -эквивалентности. Тогда семейство $\Phi(s, Q)$ полиномов целиком принадлежит классу (n, k) -эквивалентности тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$0 \notin S(\omega) = \{ \varphi(j\omega, q) : q \in Q \}, \quad \omega \in (-\infty, +\infty) \quad (2.8)$$

Доказательство аналогично рассуждениям для вещественного случая (см. теорему 2.1).

Требование в условии (2.8) рассматривать годографы полиномов семейства $\Phi(s, Q)$ на всей мнимой оси $(-\infty < \omega < +\infty)$, а не на полуоси $\omega \geq 0$, как обычно, для полиномов с вещественными коэффициентами, связано с отсутствием симметрии годографов в первом случае для $\omega \leq 0$ и $\omega \geq 0$. Последнее является следствием того, что корни полиномов с комплексными коэффициентами, вообще говоря, не имеют симметрии относительно вещественной оси. Это даст неудобную формулу для приращения аргумента годографа при $\omega \geq 0$:

$$\Delta \arg \varphi(j\omega, q) = \sum_{k=1}^n \arg s_k + \frac{\pi}{2}(n - 2k),$$

$0 \leq \omega \leq \infty$

где s_k – корни полинома $\varphi(s, q)$.

Условие (2.8) для полиномов с вещественными коэффициентами из класса (n, k) -эквивалентности означает, что семейство годографов полиномов $\Phi(s, Q)$ из (2.7) образует связное замкнутое множество $S(\omega)$, которое при $\omega \rightarrow +\infty$ "уходит" в

бесконечность, «поворачиваясь» вокруг нуля. Точнее, на комплексной плоскости замкнутое множество $S(\omega)$, «поворачиваясь» вокруг нуля (монотонно при $k = 0$ и немонотонно при $k > 0$), прижимается при $\omega \rightarrow +\infty$ к одной из осей и удаляется в бесконечность в направлении угла $\frac{\pi}{2}(n-2k)$. Симметричная картина будет наблюдаться при $\omega \rightarrow -\infty$ (ось симметрии совпадает с вещественной осью).

Для семейства полиномов $\Phi(s, Q)$ с комплексными коэффициентами при «движении» $S(\omega)$, $\omega \rightarrow \pm\infty$, «прижимается» к прямой, проходящей через точку ноль и точку $a_n j^n$. Причем приращение $\Delta\varphi$ аргумента всех годографов $\varphi(j\omega, q)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ равно $\pi(n-2k)$. В отличие от вещественного случая, годографы симметрии могут не иметь.

Действительно, из критерия Михайлова для того, чтобы полином

$$\varphi(s) = A_0 + A_1 s + \dots + A_n s^n, \quad A_n \neq 0, \quad A_0 \neq 0 \quad (2.9)$$

с комплексными коэффициентами, не имеющий нулевых и чисто мнимых корней принадлежал классу (n, k) -эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы его годограф $\varphi(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ проходил, не пересекая точку ноль комплексной плоскости, ровно $n-2k$ полуоборотов, против часовой стрелки, т.е.

$$\Delta_{-\infty < \omega < +\infty} \arg \varphi(j\omega) = \pi(n-2k) \quad (2.10)$$

Принцип исключения нуля принадлежности семейства полиномов из (2.7) классу (n, k) -эквивалентности (теорема 2.5) можно обобщить для комплексных множеств параметров Q и для нестационарных коэффициентов полиномов.

Теорема 2.6 [26]. Пусть семейство полиномов с комплексными коэффициентами

$$\Omega(s, Q, T) = \{W(s, q, t) = A_0(q, t) + A_1(q, t)s + \dots + A_n(q, t)s^n\},$$

$t \in T, T \in [0, \infty), q \in Q, Q \in C^m$, Q -связно, $A_n(q, t) \neq 0$ при некотором $t_0 \in [0, \infty)$ и некотором $q_0 \in Q$ имеет полином $W(s, q_0, t_0)$ из класса (n, k) -эквивалентности. Все полиномы семейства $\Omega(s, Q, T)$ принадлежат классу (n, k) -эквивалентности тогда и только тогда, когда

$$0 \in S(\omega) = \{W(j\omega, q, t) : t \in T, q \in Q\}, \omega \in (-\infty, \infty).$$

Фактически, точка (q, t) есть вектор $m+1$ -мерного пространства, где параметры $q_1, \dots, q_m$ являются первыми m комплексными координатами, а t это $m+1$ вещественная координата.

Однако, в некоторых случаях семейство $\Omega(s, Q, T)$ может быть «плохим», т.к., вообще говоря, хотя $A_0(q, t) \neq 0, A_n(q, t) \neq 0$, эти коэффициенты не отделены от нуля. Это теоретически может позволить корням произвольно близко «подходить» к мнимой оси, оставаясь в своих полуплоскостях. Чтобы избежать этого, надо требовать, чтобы множество Q было ограниченным замкнутым множеством, а $T = [t_1, t_2]$. Нужно также в условиях теоремы 2.6 потребовать отделения от нуля свободного члена и коэффициента при старшей степени s^n .

Определение 2.3. Семейство $\Phi(s)$ полиномов степени n с комплексными коэффициентами

$$\Phi(s) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(s) = A_0 + A_1 s + \dots + A_n s^n, \\ A_i = a_i + j b_i, a_i \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i], b_i \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i], \\ \max(\underline{a}_n \overline{a}_n, \underline{b}_n \overline{b}_n) > 0, i = \overline{0, n} \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

называется комплексным интервальным полиномом.

При $\underline{b}_i = \overline{b}_i = 0, i = \overline{0, n}$, семейство $\Phi(s)$ является интервальным полиномом с вещественными коэффициентами.

Отметим, что условие не дает обратиться в ноль старшему коэффициенту A_n в (2.11), а число полуоборотов в (2.10) может быть отрицательным числом.

Ниже будем считать, что интервальный полином $\Phi(s)$ принадлежит классу (n, k) -эквивалентности, если каждый полином $\varphi(s)$ из $\Phi(s)$ находится в этом классе.

Очевидно, если интервальный полином $\Phi(s)$ принадлежит классу (n, k) -эквивалентности, то для всех полиномов из $\Phi(s)$ необходимо $A_0 \neq 0$ и $A_n \neq 0$, или, что то же самое, выполняется условие: $\max(\underline{a}_0 \overline{a}_0, \underline{b}_0 \overline{b}_0) > 0$,

$$\max(\underline{a_n}, \overline{a_n}, \underline{b_n}, \overline{b_n}) > 0.$$

Рассмотрим годограф $\varphi(j\omega)$ полинома семейства $\Phi(s)$ из (2.11):

$$\varphi(j\omega) = g(\omega) + jh(\omega), \quad -\infty < \omega < +\infty,$$

$$g(\omega) = \operatorname{Re} \varphi(j\omega), \quad h(\omega) = \operatorname{Im} \varphi(j\omega),$$

$$\begin{cases} g(\omega) = a_0 - b_1\omega - a_2\omega^2 + b_3\omega^3 + a_4\omega^4 - b_5\omega^5 - a_6\omega^6 + \dots \\ h(\omega) = b_0 + a_1\omega - b_2\omega^2 - a_3\omega^3 + b_4\omega^4 + a_5\omega^5 - b_6\omega^6 + \dots \end{cases} \quad (2.12)$$

Нетрудно вычислить границы изменения всех годографов интервального полинома $\Phi(s)$ из (2.11) для $\omega \leq 0$ и $\omega \geq 0$.

Если $\omega \geq 0$, то:

$$\underline{g}_1(\omega) \leq g(\omega) \leq \overline{g}_1(\omega), \quad \underline{h}_1(\omega) \leq h(\omega) \leq \overline{h}_1(\omega); \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} \underline{g}_1(\omega) = \underline{a}_0 - \underline{b}_1\omega - \underline{a}_2\omega^2 + \underline{b}_3\omega^3 + \underline{a}_4\omega^4 - \underline{b}_5\omega^5 - \dots, \\ \overline{g}_1(\omega) = \overline{a}_0 - \overline{b}_1\omega - \overline{a}_2\omega^2 + \overline{b}_3\omega^3 + \overline{a}_4\omega^4 - \overline{b}_5\omega^5 - \dots; \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} \underline{h}_1(\omega) = \underline{b}_0 + \underline{a}_1\omega - \underline{b}_2\omega^2 - \underline{a}_3\omega^3 + \underline{b}_4\omega^4 + \underline{a}_5\omega^5 - \dots, \\ \overline{h}_1(\omega) = \overline{b}_0 + \overline{a}_1\omega - \overline{b}_2\omega^2 - \overline{a}_3\omega^3 + \overline{b}_4\omega^4 + \overline{a}_5\omega^5 - \dots \end{cases} \quad (2.14)$$

Если $\omega \leq 0$, то:

$$\underline{g}_2(\omega) \leq g(\omega) \leq \overline{g}_2(\omega), \quad \underline{h}_2(\omega) \leq h(\omega) \leq \overline{h}_2(\omega); \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} \underline{g}_2(\omega) = \underline{a}_0 - \underline{b}_1\omega - \underline{a}_2\omega^2 + \underline{b}_3\omega^3 + \underline{a}_4\omega^4 - \underline{b}_5\omega^5 - \dots, \\ \overline{g}_2(\omega) = \overline{a}_0 - \overline{b}_1\omega - \overline{a}_2\omega^2 + \overline{b}_3\omega^3 + \overline{a}_4\omega^4 - \overline{b}_5\omega^5 - \dots; \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} \underline{h}_2(\omega) = \underline{b}_0 + \underline{a}_1\omega - \underline{b}_2\omega^2 - \underline{a}_3\omega^3 + \underline{b}_4\omega^4 + \underline{a}_5\omega^5 - \dots, \\ \overline{h}_2(\omega) = \overline{b}_0 + \overline{a}_1\omega - \overline{b}_2\omega^2 - \overline{a}_3\omega^3 + \overline{b}_4\omega^4 + \overline{a}_5\omega^5 - \dots \end{cases} \quad (2.17)$$

Заметим, что при $\omega = 0$ неравенства (2.12) совпадут с неравенствами (2.15), а равенства (2.13)-(2.14) совпадут с (2.16)-(2.17). Кроме того, для интервального полинома с вещественными коэффициентами, т.е. для случая, когда $\underline{b}_i = \overline{b}_i = 0$, $i = \overline{0, n}$, первые оценки в (2.12) и в (2.15) совпадут, а второе неравенство в (2.15) будет зеркальным отражением второго из неравенств (2.12). Точнее для $\omega \leq 0$:

$$\underline{g}_1(\omega) \leq g(\omega) \leq \overline{g}_1(\omega); \overline{h}_1(\omega) \leq h(\omega) \leq \underline{h}_1(\omega). \quad (2.18)$$

Обозначим множество всех значений годографов семейства $\Phi(s)$ при $\omega \geq 0$ $S_1(\omega)$, а при $\omega \leq 0$ – $S_2(\omega)$ соответственно. Очевидно, что оба множества являются прямоугольниками со сторонами параллельными вещественной и мнимой осям комплексной плоскости.

Определение 2.4. Назовем угловыми полиномами восемь полиномов вида:

$$\begin{cases} \varphi_{11}(s) = \underline{g}_1(-js) + j\underline{h}_1(-js), & \varphi_{21}(s) = \overline{g}_1(-js) + j\underline{h}_1(-js), \\ \varphi_{22}(s) = \overline{g}_1(-js) + j\overline{h}_1(-js), & \varphi_{12}(s) = \underline{g}_1(-js) + j\overline{h}_1(-js); \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} \varphi_{33}(s) = \underline{g}_2(-js) + j\underline{h}_2(-js), & \varphi_{43}(s) = \overline{g}_2(-js) + j\underline{h}_2(-js), \\ \varphi_{34}(s) = \underline{g}_2(-js) + j\overline{h}_2(-js), & \varphi_{44}(s) = \overline{g}_2(-js) + j\overline{h}_2(-js). \end{cases} \quad (2.20)$$

Используя обобщенный принцип исключения нуля в S или критерий Михайлова и следствия из него для полиномов с комплексными коэффициентами легко показать, что справедлива теорема.

Теорема 2.7 [26]. Семейство полиномов $\Phi(s)$ из (2.11) принадлежит классу (n, k) -эквивалентности тогда и только тогда, когда выполняется два следующих условия.

1. Все восемь угловых полиномов находятся в классе (n, k) -эквивалентности.
2. При $\omega \geq 0, i = 1$ и при $\omega \leq 0, i = 2$ выполняется:

$$\text{если } \underline{g}_i(\omega) \cdot \overline{g}_i(\omega) = 0, \text{ то } \underline{h}_i(\omega) \cdot \overline{h}_i(\omega) > 0;$$

$$\text{если } \underline{h}_i(\omega) \cdot \overline{h}_i(\omega) = 0, \text{ то } \underline{g}_i(\omega) \cdot \overline{g}_i(\omega) > 0.$$

При $k = 0$ из теоремы 2.7 следует обобщение теоремы Харитонова об устойчивости интервального полинома с комплексными коэффициентами. Второе условие в этом случае проверять не требуется.

Так как условие 2 в теореме 2.7 обеспечивает отсутствие нуля в $S_1(\omega)$ при $\omega \geq 0$ и в $S_2(\omega)$ при $\omega \leq 0$, то первое условие в этом критерии можно ослабить и требовать принадлежность к классу (n, k) -эквивалентности только одного углового полинома любого из восьми (2.19)-(2.20), а для остальных семи достаточно потребовать отсутствия у

них нулевых и чисто мнимых корней. Более того, первое условие в теореме 2.7 можно заменить требованием принадлежности классу (n, k) -эквивалентности любого одного полинома из семейства $\Phi(s)$, а все восемь угловых полиномов не должны обращаться в ноль на мнимой оси.

Поведение годографов всех восьми угловых полиномов (2.26)-(2.27) можно видеть на рис. 2.1. Все значения годографов этих полиномов находятся в множестве $S(\omega)$ при $-\infty < \omega < +\infty$. Первые 4 годографа для угловых полиномов (2.26) при $\omega \geq 0$ являются по существу угловыми, т.е. находятся в вершинах прямоугольника $S_1(\omega)$. Однако при $\omega \leq 0$ эти годографы оставаясь в вершинах также ориентированного прямоугольника находятся уже внутри множества $S_2(\omega)$.

Аналогично для четырех годографов угловых полиномов (2.27) прослеживается такое же поведение: "движение" прямоугольника $S_2(\omega)$ во внутрь $S_1(\omega)$ при переходе от $\omega < 0$ к $\omega > 0$. Более подробно аналитически и графически сделано в [63].

Для интервальных полиномов с вещественными коэффициентами следует отметить, что при переходе прямоугольника годографов $S(\omega)$ через $\omega = 0$ ориентация его несколько отличается от комплексного случая. Точнее, годографы 4-х угловых полиномов остаются в вершинах прямоугольника $S(\omega)$ при $-\infty < \omega < \infty$. Однако, они меняются местами на боковых ребрах прямоугольника с верхнего положения на нижнее при переходе с $\omega > 0$ на $\omega < 0$ и наоборот при обратном переходе. Внутренних прямоугольников уже нет, а $S(\omega)$ вырождается в отрезок на вещественной оси.

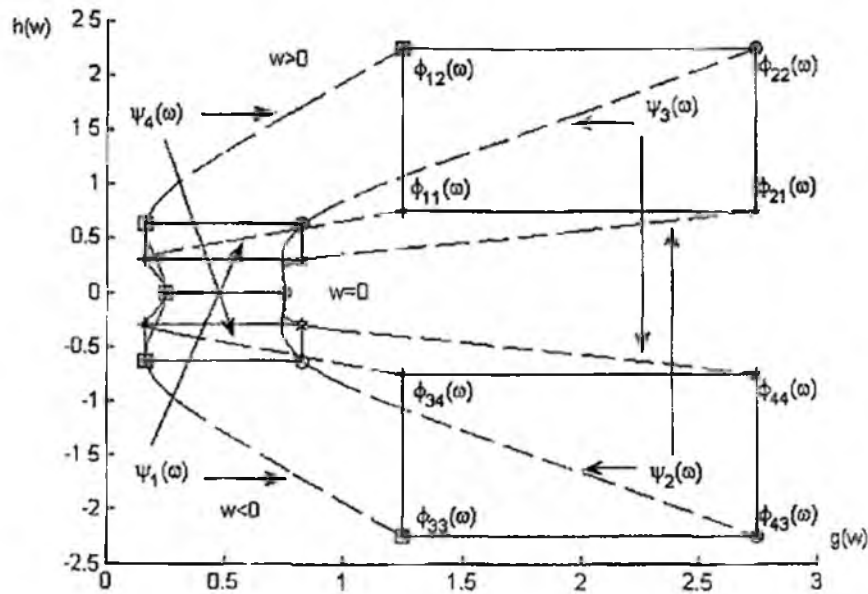


Рисунок 2.1 – Поведение вершинных годографов в окрестности нуля для вещественного интервального семейства.

Отметим, что симметрия $S(\omega)$ для вещественного случая при $\omega > 0$ и $\omega < 0$ для классов (n, k) -эквивалентности объясняет почему в этом случае, в частности, в т. Харитонова ($k = 0$) весь анализ проводится для $\omega \geq 0$ и четырех угловых полиномов.

2.2 Графические критерии исследования робастного поведения интервальных полиномов

2.2.1 Графические критерии робастной устойчивости интервальных полиномов с вещественными коэффициентами

Известная теорема Харитонова о робастной устойчивости полиномов с вещественными коэффициентами имеет свой графический аналог – критерий Ципкина-Поляка. Это позволяет проверять поведение лишь одного годографа, а не четырех. Кроме того, в этой постановке можно вычислить максимальный размах неопределенности, при которой сохраняется робастная устойчивость. Однако в этом графическом критерии сделаны ограничения на коэффициенты интервальных полиномов, которые ниже удастся снять.

Запишем интервальный полином с вещественными коэффициентами в форме:

$$F(s) = \{f(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n, \quad |a_i - a_i^0| \leq \gamma \alpha_i, \quad i = \overline{0, n}\} \quad (2.21)$$

и потребуем пока выполнения условий: $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_{n-1} > 0, \alpha_n > 0$

Рассмотрим функции: $f_0(j\omega) = g_0(\omega) + j\omega h_0(\omega)$ (номинальный годограф), где

$$\begin{aligned} g_0(\omega) &= a_0^0 - a_2^0 \omega^2 + a_4^0 \omega^4 - \dots, \\ h_0(\omega) &= a_1^0 - a_3^0 \omega^2 + a_5^0 \omega^4 - \dots, \end{aligned} \quad (2.22)$$

и введем обозначения

$$\begin{cases} R(\omega) = \alpha_0 + \alpha_2 \omega^2 + \alpha_4 \omega^4 + \dots, \\ T(\omega) = \alpha_1 + \alpha_3 \omega^2 + \alpha_5 \omega^4 + \dots \end{cases} \quad (2.23)$$

Рассмотрим годограф (назовем его нормированным номинальным годографом):

$$\begin{cases} Z_0(\omega) = x_0(\omega) + jy_0(\omega), & 0 \leq \omega < +\infty, \\ x_0(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)}, & y_0(\omega) = \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)}. \end{cases} \quad (2.24)$$

Годограф (2.24) часто называют годографом Ципкина - Поляка.

Можно рассматривать вместо функции $h_0(\omega)$ функцию $h_1(\omega) = \omega h_0(\omega)$, а вместо функции $T(\omega)$ функцию $T_1(\omega) = \omega T(\omega)$. Тогда функцию $\frac{h_1(\omega)}{T_1(\omega)}$ нужно

доопределить в точке $\omega = 0$ значением $\frac{h_0(0)}{T_0(0)}$, т.е. числом $\frac{a_1^0}{\alpha_1}$.

Если, все-таки, взять $\alpha_0 = 0$ или $\alpha_1 = 0$ (вырождение в точку первых двух интервалов для коэффициентов a_0, a_1), тогда годограф $Z_0(\omega)$ существует при $\omega > 0$ и «приходит» при изменении ω от 0 до $+\infty$ из бесконечно удаленной точки комплексной плоскости. Если же позволить обратиться в ноль коэффициенту α_{n-1} или α_n , то $Z_0(\omega)$ и «уходит» в ∞ .

Хотя при этом расчет может оказаться несколько нелепым, но поведение годографа в главном (совпадение квадрантов годографа из (2.22) и из (2.24)) не изменится.

Справедлив критерий, доказательство которого анализируется ниже с целью ослабления его условий и охвата всех интервальных полиномов без ограничений.

Теорема Ципкина-Поляка [78]. Для робастной устойчивости интервального полинома $F(s)$ при $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_{n-1} > 0$, $\alpha_n > 0$ необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\text{а) } a_0 > \gamma\alpha_0, a_n > \gamma\alpha_n; \quad (2.25)$$

б) годограф $Z_0(\omega)$ из (2.24) при изменении ω от 0 до $+\infty$ проходит последовательно через n квадрантов против часовой стрелки и не пересекает квадрата с вершинами $(\pm\gamma, \pm\gamma)$.

Покажем, что множество значений годографов интервального полинома (2.21) является прямоугольником:

$$S(\omega) = \{Z(\omega) = x(\omega) + jy(\omega) : \begin{aligned} |x - g_0(\omega)| &\leq \gamma R(\omega), \\ |y - \omega h_0(\omega)| &\leq \gamma \omega T(\omega) \end{aligned} \}. \quad (2.26)$$

Точнее,

$$\begin{aligned} g_0(\omega) - \gamma R(\omega) &\leq x \leq g_0(\omega) + \gamma R(\omega), \\ \omega h_0(\omega) - \gamma \omega T(\omega) &\leq y \leq \omega h_0(\omega) + \gamma \omega T(\omega). \end{aligned} \quad (2.27)$$

В стандартных обозначениях $x(\omega) = g(\omega)$, $y(\omega) = \omega h(\omega)$ и неравенства (2.26) можно записать следующим образом

$$|g(\omega) - g_0(\omega)| \leq \gamma R(\omega), \quad |\omega h(\omega) - \omega h_0(\omega)| \leq \gamma \omega T(\omega).$$

Чтобы доказать неравенства (2.27) сделаем ниже следующие преобразования:

$$\begin{aligned} g_0(\omega) - \gamma R(\omega) &= \\ &= (a_0^0 - a_2^0 \omega^2 + a_4^0 \omega^4 - \dots) - \gamma(\alpha_0 + \alpha_2 \omega^2 + \alpha_4 \omega^4 + \dots) = \\ &= (a_0^0 - \gamma\alpha_0) - (a_2^0 + \gamma\alpha_2) \omega^2 + (a_4^0 - \gamma\alpha_4) \omega^4 - \dots = \underline{g}(\omega). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Аналогично, получим:

$$\begin{aligned} g_0(\omega) + \gamma R(\omega) &= (a_0^0 + \gamma\alpha_0) - (a_2^0 - \gamma\alpha_2) \omega^2 + \\ &+ (a_4^0 + \gamma\alpha_4) \omega^4 - \dots = \overline{g}(\omega). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Из соотношений (2.28), (2.29) следует первое из неравенств (2.27):

$$\underline{g}(\omega) \leq x(\omega) \leq \overline{g}(\omega).$$

Для функции $y(\omega)$ подобным образом получим второе неравенство из (2.27), т.е.

$$\omega \underline{h}(\omega) \leq y(\omega) \leq \omega \overline{h}(\omega),$$

где
$$\begin{cases} \underline{h}(\omega) = (a_1^0 - \gamma\alpha_1) - (a_3^0 + \gamma\alpha_3)\omega^2 + (a_5^0 - \gamma\alpha_5)\omega^4 - \dots, \\ \overline{h}(\omega) = (a_1^0 + \gamma\alpha_1) - (a_3^0 - \gamma\alpha_3)\omega^2 + (a_5^0 + \gamma\alpha_5)\omega^4 - \dots \end{cases}$$

Таким образом, получим, что множество значений годографов семейства (2.21), является прямоугольником.

Заметим, что при $\omega = 0$ прямоугольник $S(\omega)$ вырождается в отрезок на вещественной оси:

$$a_0^0 - \gamma\alpha_0 \leq x(\omega) \leq a_0^0 + \gamma\alpha_0 \quad (2.30)$$

В случае если рассматривать годограф вида

$$Z_1(\omega) = g(\omega) + jh(\omega) = x(\omega) + jy(\omega)$$

то при $\omega = 0$ прямоугольник $S(\omega)$ не вырождается в отрезок на вещественной оси, а описывается неравенствами

$$\begin{cases} a_0^0 - \gamma\alpha_0 \leq x(\omega) \leq a_0^0 + \gamma\alpha_0, \\ a_1^0 - \gamma\alpha_1 \leq y(\omega) \leq a_1^0 + \gamma\alpha_1, \end{cases}$$

что является иногда более удобным (информативным), чем запись в виде неравенства (2.30).

Условие $0 \notin S(\omega)$ из принципа исключения нуля для (2.26) дает:

$$\begin{aligned} |g_0(\omega)| &> \gamma R(\omega), & |h_0(\omega)| &> \gamma T(\omega), \\ \left| \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)} \right| &> \gamma, & \left| \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)} \right| &> \gamma. \end{aligned}$$

Рассмотрим годограф (2.24) $Z_0(\omega) = x_0(\omega) + jy_0(\omega)$, где

$$x_0(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)}, y_0(\omega) = \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)}.$$

Тогда на комплексной плоскости неравенства $|x_0(\omega)| > \gamma$, $|y_0(\omega)| > \gamma$ означают, что когда кривая $Z_0(\omega)$ проходит вне квадрата с центром в начале координат и вершинами $(\pm\gamma, \pm\gamma)$, то $0 \notin S(\omega)$.

Далее, по критерию Михайлова полином $f_0(s)$ устойчив тогда и только тогда, когда годограф $f_0(j\omega)$ проходит через n квадрантов последовательно против часовой стрелки. Но годограф

$$f_0(j\omega) = g_0(\omega) + j\omega h_0(\omega)$$

находится в каком-либо квадранте тогда и только тогда, когда годограф

$$Z_0(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)} + j \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)}$$

находится в том же квадранте. Последнее утверждение означает, что полином $f_0(s)$ устойчив, если и только если нормированный номинальный годограф $Z_0(\omega)$ проходит последовательно через n квадрантов против часовой стрелки при изменении ω от 0 до $+\infty$.

Очевидно, условие (2.25) в теореме обеспечивает положительность коэффициентов a_0 и a_n всех полиномов интервального семейства (2.21) (все полиномы степени n и не имеют нулевого корня). Параллелепипед коэффициентов Q в (2.21), $Q \in R^{n+1}$ является связным множеством.

Таким образом, условия принципа исключения нуля выполняются, что и заканчивает само доказательство теоремы и его анализ. Ниже сделаем некоторые выводы и обобщения.

Определение 2.5. Если для всех размахов $\gamma > 0$ существует такой наибольший размах $\gamma = \gamma_{\max}$, что для всех $\gamma < \gamma_{\max}$ сохраняется робастная устойчивость интервального полинома, то $\gamma_{\max}$ называют радиусом устойчивости (робастной устойчивости) интервального полинома $F(s)$. Очевидно, здесь радиус устойчивости можно вычислять по формуле $\gamma_{\max} = \min\{\gamma^*, \gamma_0, \gamma_\infty\}$, где $2\gamma^*$ – размер наибольшего квадрата $\{|x| \leq \gamma^*, |y| \leq \gamma^*\}$ с центром в нуле, вписанного в годограф (2.24);

$$\gamma_0 = \max\left(\frac{a_0^0}{\alpha_0}, \frac{a_1^0}{\alpha_1}\right); \gamma_\infty = \max\left(\frac{a_{n-1}^0}{\alpha_{n-1}}, \frac{a_n^0}{\alpha_n}\right). \quad (2.26)$$

Причем нормированный номинальный годограф ограничен и, в отличие от номинального годографа, начинается внутри квадранта и заканчивается внутри квадранта – это облегчает расчеты и визуализацию.

Так как для устойчивого полинома по теореме Стодолы все коэффициенты положительны (точнее одного знака), то вычислять номинальный или нормированный номинальный годограф без этого условия нет смысла. Поэтому можно сразу потребовать, чтобы выполнялись неравенства $a_i^0 > \gamma \alpha_i$.

Последнее, в частности, повлечет, что все интервалы коэффициентов не содержат нуля. Если же числа $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_{n-1} > 0, \alpha_n > 0$, то это гарантирует, что нормированный годограф (2.24) является ограниченным.

Требование для интервального семейства (2.21), чтобы $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0$ существенно, т.к. иначе формула (2.24) при $\omega = 0$ не имеет смысла. Если же в этом случае взять $\omega > 0$ и рассматривать предельное положение $Z_0(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$, то нормированный годограф $Z_0(\omega)$ станет бесконечно удаляться, оставаясь в том же квадранте, что и $f_0(j\omega)$ при достижении малых $\omega, \omega > 0$. То же справедливо, если $\omega \rightarrow \infty$, но $\alpha_{n-1} > 0$ или $\alpha_n > 0$ не выполняется, т.е. $\alpha_{n-1} = 0$ или $\alpha_n = 0$.

Критерий можно обобщить на все особые случаи, когда в теореме одно или несколько чисел $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ обращается в ноль.

Последнее означает, что интервалы коэффициентов a_0, a_1, a_{n-1}, a_n вырождаются в точки $a_0^0, a_1^0, a_{n-1}^0, a_n^0$. В простейшем случае: все $a_i^0 > 0$, и некоторые $\alpha_i = 0$. Когда все $\alpha_i = 0$, то семейство полиномов (2.21) вырождается в один полином $f_0(s)$. Поэтому этот случай не рассматривается, т.к. этот полином исследуется обычными средствами (нет неопределенности в коэффициентах) см. главу 1 выше.

Таким образом, из обсуждения выше следует, что можно значительно ослабить условия графического критерия Ципкина - Поляка.

Сформулируем некоторые выводы:

1. Требование для коэффициентов $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_{n-1} > 0, \alpha_n > 0$ – для нормировки не существенно. Это условие гарантирует ограниченность нормированного годографа, что не является принципиальным.

2. При обращении всех четных $\alpha_i = 0$ и хотя бы один нечетный $\alpha_i > 0$ или при обращении всех нечетных $\alpha_i = 0$ и хотя бы один четный $\alpha_i > 0$ можно проверять только устойчивость 2-х оставшихся угловых полиномов, соответствующих концам отрезка $S(\omega)$ согласно теореме Харитоновна. В этих случаях нет полной нормировки, т.к. либо $R(\omega) = 0$, либо $T(\omega) = 0$. Точнее, $x_0 = g_0(\omega)$ в первом случае и $y_0 = \omega h_0(\omega)$ - во втором.

3. Во всех остальных случаях, когда хотя бы один четный α_i и хотя бы один нечетный α_i положителен, можно использовать годограф Ципкина-Поляка (2.24) для исследования на устойчивость интервального полинома. Причем этот годограф может быть как ограниченным, так и не ограниченным и может начинаться и заканчиваться как в конечных точках, так и в бесконечно удаленных точках.

Учитывая все вышесказанное, сформулируем обобщение графического критерия Ципкина-Поляка для теоремы Харитоновна с учетом анализа всех особых случаев. Потребуем для интервального полинома, чтобы он не вырождался в семейство, состоящее из одного полинома (т.е. хотя бы один $\alpha_i > 0$). Заметим, что, для простоты, и с оглядкой на теорему Стодолы можно было бы считать все $\alpha_i^0 > 0$, однако в общем случае это не требуется. Ниже будем считать $a_0^0 > 0$ и $a_n^0 > 0$.

Теорема 2.8 [26].

1. Пусть хотя бы один четный и хотя бы один нечетный интервалы коэффициентов не вырождаются в точку (т.е. имеются $\alpha_k > 0, \alpha_m > 0$, k - четное, m - нечетное, $k \leq n, m \leq n$). Тогда для робастной устойчивости интервального полинома $F(s)$ необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\text{а) } a_0^0 > \gamma \alpha_0, a_n^0 > \gamma \alpha_n;$$

б) годограф $Z_0(\omega)$ из (2.24) при изменении ω от 0 до $+\infty$ проходит последовательно через n квадрантов против часовой стрелки и не пересекает квадрата $(\pm\gamma, \pm\gamma)$.

2. Пусть все нечетные интервалы вырождаются в точки, т.е. нечетные $\alpha_i = 0$ и хотя бы один четный интервал не вырождается в точку, т.е. хотя бы один четный $\alpha_i > 0$. Тогда для робастной устойчивости интервального полинома $F(s)$ необходимо и достаточно выполнение 2-х условий:

а) $a_0^0 > \gamma \alpha_0, a_n^0 > \gamma \alpha_n$;

б) функция $Z(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)} + jh_0(\omega)$

при изменении ω от 0 до $+\infty$ проходит последовательно через n квадрантов против часовой стрелки и не пересекает отрезка $[-\gamma, \gamma]$ на вещественной оси.

3. Пусть все четные интервалы вырождаются в точки, т.е. четные $\alpha_i = 0$ и хотя бы один нечетный интервал не вырождается в точку, т.е. хотя бы один нечетный $\alpha_i > 0$. Тогда для робастной устойчивости интервального полинома $F(s)$ необходимо и достаточно выполнение условий:

а) $a_0^0 > \gamma \alpha_0, a_n^0 > \gamma \alpha_n$;

б) функция $Z(\omega) = g_0(\omega) + j \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)}$.

при изменении ω от 0 до $+\infty$ проходит последовательно n квадрантов против часовой стрелки и не пересекает отрезка $(-\gamma, \gamma)$ на мнимой оси.

Размах неопределенности γ и радиус устойчивости $\gamma_{\max}$ вычисляется также как и в критерии Ципкина - Поляка приведенном выше.

Точнее, $\gamma < \gamma_{\max}$, $\gamma_{\max} = \min\{\gamma^*, \gamma_0, \gamma_\infty\}$, где $2\gamma^*$ - размер наибольшего квадрата с центром в нуле вписанного в годограф $Z_0(\omega)$ из (2.24) (случай 1); $2\gamma^*$ - длина наибольшего отрезка с центром в нуле на вещественной оси (в случае 2) и на мнимой оси (в случае 3). Числа γ_0, γ_∞ определяются по формулам в первом случае:

$$\gamma_0 = \begin{cases} \max \left\{ \frac{a_0^0}{\alpha_0}, \frac{a_1^0}{\alpha_1} \right\}, & \alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0; \\ +\infty, & \alpha_0 \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

$$\gamma_\infty = \begin{cases} \max \left\{ \frac{a_{n-1}^0}{\alpha_{n-1}}, \frac{a_n^0}{\alpha_n} \right\}, & \alpha_{n-1} > 0, \alpha_n > 0; \\ +\infty, & \alpha_{n-1} \alpha_n = 0. \end{cases}$$

Во втором случае:

$$\gamma_0 = \begin{cases} \frac{a_0^0}{\alpha_0}, & \alpha_0 > 0; \\ +\infty, & \alpha_0 = 0. \end{cases}; \quad \gamma_\infty = \begin{cases} \begin{cases} n - \text{четное} \\ \frac{a_n^0}{\alpha_n}, & \alpha_n > 0; \\ +\infty, & \alpha_n = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} n - \text{нечетное} \\ \frac{a_{n-1}^0}{\alpha_{n-1}}, & \alpha_{n-1} > 0; \\ +\infty, & \alpha_{n-1} = 0. \end{cases} \end{cases}$$

В третьем случае:

$$\gamma_0 = \begin{cases} \frac{a_1^0}{\alpha_1}, & \alpha_1 > 0; \\ +\infty, & \alpha_1 = 0. \end{cases}; \quad \gamma_\infty = \begin{cases} \begin{cases} n - \text{четное} \\ \frac{a_{n-1}^0}{\alpha_{n-1}}, & \alpha_{n-1} > 0; \\ +\infty, & \alpha_{n-1} = 0. \end{cases} \\ \begin{cases} n - \text{нечетное} \\ \frac{a_n^0}{\alpha_n}, & \alpha_n > 0; \\ +\infty, & \alpha_n = 0. \end{cases} \end{cases}$$

2.2.2. Графические критерии робастной устойчивости интервальных полиномов с комплексными коэффициентами

Как известно теорема Харитонова обобщена на семейство интервальных полиномов с комплексными коэффициентами. В этой связи ниже приводится графический аналог этой теоремы для комплексного случая.

Рассмотрим интервальное семейство полиномов с комплексными коэффициентами $\Phi(s)$,

$$\Phi(s) = \left\{ \begin{array}{l} f(s) = A + A_0 s + \dots + A_n s^n, A_i = a_i + j b_i, |a_i - a_i^0| \leq \gamma \alpha_i, \\ |b_i - b_i^0| \leq \gamma \beta_i, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, i = \overline{0, n}, \sum_{i=0}^n (\alpha_i + \beta_i) > 0. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Условие $\sum_{i=0}^n (\alpha_i + \beta_i) > 0$ не дает интервальному семейству $\Phi(s)$ вырождаться в номинальный полином $f_0(s)$.

Рассмотрим номинальный годограф при $-\infty < \omega < +\infty$:

$$f_0(j\omega) = g_0(\omega) + j h_0(\omega) \quad (2.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g_0(\omega) = a_0^0 - b_1^0 \omega - a_2^0 \omega^2 + b_3^0 \omega^3 + a_4^0 \omega^4 - \dots, \\ h_0(\omega) = b_0^0 + a_1^0 \omega - b_2^0 \omega^2 - a_3^0 \omega^3 + b_4^0 \omega^4 + \dots \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Кроме того, для номинально годографа (2.28) введем нормировочные функции:

$$\left\{ \begin{array}{l} R(\omega) = \alpha_0 + \beta_1 |\omega| + \alpha_2 \omega^2 + \beta_3 |\omega|^3 + \alpha_4 \omega^4 + \dots, \\ T(\omega) = \beta_0 + \alpha_1 |\omega| + \beta_2 \omega^2 + \alpha_3 |\omega|^3 + \beta_4 \omega^4 + \dots \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Определение 2.6. Назовем при $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, \alpha_n > 0, \beta_n > 0$ функцию

$$Z_0(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)} + j \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)} = x_0(\omega) + j y_0(\omega) \quad (2.31)$$

определенную на всей вещественной оси, сложным нормированным номинальным годографом или кратко - сложным годографом.

Из определения 2.6 следует, что сложный годограф (2.31) является ограниченным при $-\infty < \omega < +\infty$ и функции $x_0(\omega)$ и $y_0(\omega)$ могут иметь скачок первой производной в точке $\omega = 0$.

Обращение коэффициента α_i или β_i в ноль означает, что прямоугольник, соответствующий коэффициенту A_i интервального полинома $\Phi(s)$ из (2.27) вырождается либо в отрезок, либо в точку.

Теорема 2.9 [26]. Для робастной устойчивости интервального полинома $\Phi(s)$ при $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, \alpha_n > 0, \beta_n > 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

$$1. \begin{cases} \max((a_0^0)^2 - (\gamma a_0)^2, (b_0^0)^2 - (\gamma \beta_0)^2) > 0, \\ \max((a_n^0)^2 - (\gamma a_n)^2, (b_n^0)^2 - (\gamma \beta_n)^2) > 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

2. Сложный годограф $Z_0(\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ проходил последовательно против часовой стрелки через $2n$ квадрантов и не пересекал квадрата с вершинами $(\pm\gamma, \pm\gamma)$.

Очевидно, условия (2.32) приведены, чтобы коэффициенты A_0, A_n всех полиномов семейства $\Phi(s)$ не обращались в ноль. Кроме того, в отличие от вещественного случая сложный годограф $Z_0(\omega)$, являясь ограниченным, может иметь значение $Z_0(0)$ в любом квадранте и знать его поведение при $0 < \omega < +\infty$ не достаточно.

Действительно, это было бы не удобно для подсчета числа оборотов годографов в обобщении критерия Михайлова для полиномов $f(s)$ с комплексными коэффициентами, для которых нет известной симметрии комплексных корней. Точнее,

$$\begin{cases} \Delta_{0 \leq \varphi < +\infty} \arg f(j\omega) = \sum_{k=1}^n \arg s_k + \frac{\pi}{2} n, \\ \Delta_{-\infty < \varphi < +\infty} \arg f(j\omega) = \pi n. \end{cases} \quad (2.33)$$

С помощью полученного критерия, построив сложный годограф $Z_0(\omega)$, можно проверить робастную устойчивость при заданном размахе неопределенности γ . Более того, можно найти наибольшее $\gamma = \gamma_{\max}$, для которого сохраняется робастная устойчивость при любом $\gamma < \gamma_{\max}$. Число $\gamma_{\max}$ – радиус устойчивости комплексного интервального полинома $\Phi(s)$. Так как в условиях теоремы для четного n сложный

годограф $Z_0(\omega)$ является замкнутой кривой, то $\gamma_{\max} = \gamma^*$, где $2\gamma^*$ – сторона наибольшего квадрата, вписанного в этот годограф с центром в нуле с вершинами $(\pm\gamma^*; \pm\gamma^*)$. В случае, когда n нечетно, то кривая сложного годографа $Z_0(\omega)$ разомкнутая и $Z(+\infty) = -Z(-\infty)$. Отсюда следует формула:

$$\gamma_{\max} = \min(\gamma^*, \gamma_{\infty}), \gamma_{\infty} = \max\left(\frac{|a_n^0|}{\alpha_n}, \frac{|b_n^0|}{\beta_n}\right). \quad (2.34)$$

В отличие от теоремы Харитонова для интервального семейства полиномов с комплексными коэффициентами, где нужно проверять на устойчивость, восемь угловых полиномов здесь достаточно проверить поведение одной функции сложного нормированного поминального годографа $Z_0(\omega)$. После чего можно определить радиус устойчивости (максимальный размах допустимой неопределенности в коэффициентах комплексного интервального полинома $\Phi(s)$).

Теорему 2.9 можно усилить, сняв условие не обращения ноль величин $\alpha_0, \beta_0, \alpha_n, \beta_n$. В этом случае сложный годограф может стать неограниченным в окрестности $\omega = 0$ и $\omega = \pm\infty$, что не мешает видеть тенденции поведения $Z_0(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \pm\infty$, и прекратить вычисления при достаточно малых или больших по модулю частотах ω . Например, $\gamma_{\max}$ вычисляется как половина стороны наибольшего квадрата с вершинами $(\pm\gamma; \pm\gamma)$, вписанного в годограф $Z_0(\omega)$, если $\alpha_0\beta_0 = 0$ и $\alpha_n\beta_n = 0$. В двух случаях, когда $\alpha_0\beta_0 = 0$ и $\alpha_n\beta_n \neq 0$, или $\alpha_0\beta_0 \neq 0$ и $\alpha_n\beta_n = 0$ максимальный размах неопределенности $\gamma_{\max}$ считается с учетом поведения годографа $Z_0(\omega)$ на концах. Точнее, в первом случае $Z_0(\omega)$ имеет бесконечный разрыв при $\omega = 0$, а γ_{∞} считается по формуле (2.45). Во втором случае $Z_0(\omega)$ является неограниченной функцией при $\omega = \pm\infty$ и $\gamma_{\max} = \gamma^*$, где γ^* определяется выше.

2.2.3 Графические критерии исследования робастной неустойчивости интервальных систем управления

В этой части параграфа приведены графические критерии принадлежности вещественных и комплексных интервальных полиномов классам (n, k) -эквивалентности. Выше были рассмотрены графический критерий устойчивости интервальных полиномов Ципкина – Поляка и его обобщения, что позволяет изучать устойчивость этих полиномов, как в вещественном, так в и комплексном случаях, без каких либо ограничений. В работе [26] по робастному поведению семейств полиномов рассмотренные выше графические критерии устойчивости этих полиномов являются частным случаем их робастного поведения как класса $(n, 0)$ – эквивалентности. В графическом аналоге теоремы Харитонова для (n, k) -классов эквивалентности стало возможным охватить все вещественные и комплексные интервальные полиномы без каких-либо ограничений на коэффициенты. Показано, что во всех критериях можно освободиться от ограничений на коэффициенты за счёт отказа от ограниченности специальных нормированных годографов.

Рассмотрим вещественный интервальный полином $F(s)$ из (2.21) и номинальный годограф: $f_0(j\omega) = g_0(\omega) + j\omega h_0(\omega)$ из (2.22).

Запишем нормированный номинальный годограф из (2.24) в стандартном виде:

$$Z_0(\omega) = x_0(\omega) + jy_0(\omega), \quad 0 \leq \omega < +\infty, \quad x_0(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)}, \quad y_0(\omega) = \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)},$$

где $R(\omega)$ и $T(\omega)$ нормировочные функции из (2.23).

Как и выше, γ – размах неопределённости, при котором сохраняется устойчивость или неустойчивость тестируемого семейства интервальных полиномов с вещественными коэффициентами.

Теорема 2.10 [33]. Для принадлежности интервального полинома $F(s)$ с вещественными коэффициентами классу (n, k) -эквивалентности при $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_{n-1} > 0, \alpha_n > 0$ необходимо и достаточно выполнение условий:

$$а) |a_0| > \gamma \alpha_0, |a_n| > \gamma \alpha_n;$$

б) годограф $Z_0(\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ проходит через $(n - 2k)$ квадратов против часовой стрелки и не пересекает квадрат с вершиной $(\pm\gamma, \pm\gamma)$.

Доказательство аналогично случаю робастной устойчивости ($k = 0$, критерий Ципкина-Поляка), но отличается тем, что надо учитывать немонотонность функции $Z_0(\omega)$. Причем k -радиус робастного поведения $\gamma_{\max}^k$ считается по формулам $\gamma_{\max}^k = \min \{ \gamma^*, \gamma_0, \gamma_{\infty} \}$ с учетом (2.26).

Справедлив критерий робастной неустойчивости ($k = \overline{1, n}$) и устойчивости ($k = 0$) для любого интервального полинома с вещественными коэффициентами без стандартных ограничений на коэффициенты в теореме 2.10.

Теорема 2.11 [42].

1. Пусть хотя бы один четный и хотя бы один нечетный интервалы коэффициентов не вырождаются в точку (т.е. имеются $\alpha_l > 0, \alpha_m > 0$, l – четное, m – нечетное, $l \leq n, m \leq n$). Тогда для принадлежности классу (n, k) – эквивалентности интервального полинома $F(s)$ необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\text{а) } |a_0^0| > \gamma \alpha_0, |a_n^0| > \gamma \alpha_n;$$

$$\text{б) годограф } Z_0(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{T(\omega)} + j \frac{h_0(\omega)}{R(\omega)} \text{ при изменении } \omega \text{ от } 0 \text{ до } +\infty$$

проходит через $n - 2k$ квадрантов против часовой стрелки и не пересекает квадрата $(\pm \gamma, \pm \gamma)$.

2. Пусть все нечетные интервалы вырождаются в точки, т.е. нечетные $\alpha_i = 0$ и хотя бы один четный интервал не вырождается в точку, т.е. хотя бы один четный $\alpha_i > 0$. Тогда для принадлежности классу (n, k) – эквивалентности интервального полинома $F(s)$ необходимо и достаточно выполнение 2-х условий:

$$\text{а) } |a_0^0| > \gamma \alpha_0, |a_n^0| > \gamma \alpha_n;$$

б) функция $Z(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)} + ih_0(\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ проходит

последовательно через $n - 2k$ квадрантов против часовой стрелки и не пересекает отрезка $[-\gamma, \gamma]$ на вещественной оси.

3. Пусть все четные интервалы вырождаются в точки, т.е. четные $\alpha_i = 0$ и хотя бы один нечетный интервал не вырождается в точку, т.е. хотя бы один нечетный $\alpha_i > 0$.

Тогда для принадлежности классу (n, k) -эквивалентности интервального полинома $F(s)$ необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\text{а) } |a_0^0| > \gamma \alpha_0, |a_n^0| > \gamma \alpha_n;$$

б) функция $Z(\omega) = g_0(\omega) + i \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)}$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ проходит

$n - 2k$ квадрантов против часовой стрелки и не пересекает отрезка $[-\gamma, \gamma]$ на мнимой оси.

Формулы для вычисления k - радиуса $\gamma_{\max}^k$ робастного поведения интервального полинома $F(s)$ те же, что и в теореме 2.8 для $k = 0$. Доказательство теоремы 2.10 не имеет принципиально новых отличий по сравнению с теоремой 2.8 и его можно опустить.

Графический критерий устойчивости Ципкина – Поляка и его усиление (теорема 2.8) для вещественных интервальных полиномов становятся частными случаями теоремы (2.10) и (2.11) при $k = 0$.

Имеет место графический критерий о принадлежности семейства полиномов с комплексными коэффициентами классам (n, k) - эквивалентности, который является обобщением теоремы 2.9 ($k = 0$).

Рассмотрим: семейство $\Phi(s)$ – интервальный полиномом с комплексными коэффициентами из (2.27); номинальный годограф $f_0(j\omega) = g_0(\omega) + jh_0(\omega)$ из (2.28)-(2.29); нормировочные функции $R(\omega)$ и $T(\omega)$ из (2.30) и сложный нормированный номинальный годограф $Z_0(\omega) = g_0(\omega) / R(\omega) + jh_0(\omega) / T(\omega)$.

Здесь, как и выше, γ – размах неопределённости интервального семейства полиномов с комплексными коэффициентами; α_i, β_i – масштабные множители.

Теорема 2.12 [26]. Для принадлежности классу (n, k) – эквивалентности комплексного интервального полинома $\Phi(s)$ при $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, \alpha_n > 0, \beta_n > 0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

1.
$$\begin{cases} \max((a_0^0)^2 - (\gamma a_0)^2, (b_0^0)^2 - (\gamma \beta_0)^2) > 0, \\ \max((a_n^0)^2 - (\gamma a_n)^2, (b_n^0)^2 - (\gamma \beta_n)^2) > 0 \end{cases}$$
2. Сложный годограф $Z_0(\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ проходит против часовой стрелки ровно $n - 2k$ полуоборотов и не пересекает квадрат с вершинами $(\pm\gamma; \pm\gamma)$.

Условие 1 теоремы необходимо, чтобы коэффициенты A_0, A_n всех полиномов семейства $\Phi(s)$ не обращались в ноль. Кроме того, в отличие от вещественного случая сложный годограф $Z(\omega)$, хотя и является ограниченным, но знать его поведение при $0 \leq \omega < +\infty$ не достаточно.

k - радиус робастного поведения $\gamma_{\max}^k$ вычисляется по формуле:

$$\gamma_{\max}^k = \min(\gamma^*, \gamma_\infty), \gamma_\infty = \max\left(\frac{|a_n^0|}{\alpha_n}, \frac{|b_n^0|}{\beta_n}\right), \quad (2.35)$$

$(\pm\gamma^*; \pm\gamma^*)$ - наибольший квадрат с центром в нуле, вписанный в этот годограф.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.10 и поэтому может быть опущено. Кроме того, можно снять ограничения $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, \alpha_n > 0, \beta_n > 0$ за счет ограниченности и непрерывности сложного годографа и распространить теорему на любые семейства интервальных полиномов с комплексными коэффициентами.

2.3 Критерий робастного поведения интервальных полиномов с двумя размахами неопределенности

Задача об определении робастной устойчивости семейства систем с интервальными ограничениями на коэффициенты характеристического полинома эффективно решается с помощью теоремы Харитонова, графического критерия Ципкина-Поляка и их усиления в п. 2.1-2.2. Более полную информацию об исследуемой системе дает приведенный в 2.2.3 подход. Он решает вопрос о робастной устойчивости и робастной неустойчивости интервального семейства полиномов в смысле принадлежности всех полиномов семейства классу (n, k) -эквивалентности.

Графические критерии в п. 2.2 дают возможность максимально расширить интервалы коэффициентов семейства полиномов, но пропорционально одному размаху неопределенности, т.е. числу $\gamma_{\max}$ или $\gamma_{\max}^k$, что ограничивает анализ робастного поведения интервальных полиномов.

Предложенный в [39, 63, 99] подход позволяет определить робастную устойчивость и неустойчивость интервальных полиномов, полученных при независимом пропорциональном изменении интервалов отдельных групп коэффициентов в вещественном случае (п. 2.3.1) и групп вещественных и мнимых частей коэффициентов в комплексном случае (п. 2.3.2). При этом размахи неопределенности могут быть как один, так и два.

2.3.1. Рассмотрим интервальный полином с вещественными коэффициентами и покажем, как использовать один или несколько размахов (параметров) неопределенности для анализа робастного поведения, меняя отдельные коэффициенты или группы коэффициентов. Доказательства для экономии места не приводятся.

Сначала применим этот подход с одним размахом. Сформулируем критерий, который позволит варьировать интервалы одних и не менять других коэффициентов. Как обычно, интервальный полином $F(s)$ степени n центрированный как в (2.21) и для ограниченности нормированного номинального годографа $Z_0(\omega)$ из (2.24) потребуем, чтобы $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_{n-1} > 0, \alpha_n > 0$.

Теорема 2.13 [63]. Пусть $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_{n-1} > 0, \alpha_n > 0$

$$|a_i - a_i^0| \leq \gamma \alpha_i, \gamma > 0, |a_l - a_l^0| \leq \alpha_l, m + k + r = n + 1, l = \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k;$$

$$i = \theta_1, \theta_2 \dots \theta_m \text{ (четные, включая 0), и } i = \eta_1, \eta_2 \dots \eta_r \text{ (нечетные);}$$

$$\begin{cases} R(\omega) = \sum_{i=\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m} \alpha_i \omega^i + \frac{1}{\gamma} \sum_{i \neq \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m} \alpha_i \omega^i, 0 \leq i \leq n, i - \text{четные или } 0; \\ T(\omega) = \sum_{i=\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r} \alpha_i \omega^{i-1} + \frac{1}{\gamma} \sum_{i \neq \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r} \alpha_i \omega^{i-1}, 0 \leq i \leq n, i - \text{нечетные} \end{cases} \quad (2.36)$$

Тогда для принадлежности интервального полинома $F(s)$ классу (n, k) -эквивалентности необходимо и достаточно выполнение условий:

а) $|a_0^0| > \alpha_0, |a_n^0| > \alpha_n$, если a_0^0, a_n^0 - середины фиксированных интервалов

$|a_0^0| > \gamma \alpha_0, |a_n^0| > \gamma \alpha_n$, если a_0^0, a_n^0 - середины изменяемых интервалов

б) годограф $Z_0(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)} + j \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)}$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ проходит

через $n - 2k$ квадрантов против часовой стрелки и не пересекает квадрата $(\pm \gamma; \pm \gamma)$.

Увеличивая размах γ , можно экспериментально найти максимально возможной длины интервалы, исследуемых коэффициентов, при которых сохраняется определенное робастное поведение интервального полинома (принадлежность одному классу (n, k) -эквивалентности). Так как нормировочные функции зависят от размаха γ , то формулы для нахождения $\gamma_{\max}$ нет. В теореме 2.13 как и других ниже в этой части главы при $k = 0$ получим утверждения для робастной устойчивости интервальных полиномов. Рассмотрим задачу влияния двух размахов на коэффициенты интервального полинома в простейшем случае.

Теорема 2.14 [63, 99]. Пусть $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_{n-1} > 0, \alpha_n > 0$;

$$|a_{2i} - a_{2i}^0| \leq \gamma \alpha_{2i}, 2i = 2, 4, \dots; 2i \leq n, \gamma > 0;$$

$$|a_{2m+1} - a_{2m+1}^0| \leq \mu \alpha_{2m+1}, 2m+1 = 1, 3, 5, \dots, 2m+1 \leq n, \mu > 0;$$

$$R(\omega) = \alpha_0 + \alpha_2 \omega^2 + \alpha_4 \omega^4 + \dots, T(\omega) = \alpha_1 + \alpha_3 \omega^2 + \alpha_5 \omega^4 + \dots \quad (2.37)$$

Тогда для принадлежности интервального полинома $F(s)$ классу (n, k) -эквивалентности необходимо и достаточно выполнение двух условий:

а) $|a_0^0| > \gamma\alpha_0, |a_n^0| > \gamma\alpha_n$, при n четном, и $|a_n^0| > \mu\alpha_n$ при n нечетном;

б) годограф $Z_0(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)} + j \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)}$ при изменении ω от 0 до $+\infty$

проходит через $n - 2k$ квадрантов против часовой стрелки и не пересекает прямоугольника $(\pm\gamma; \pm\mu)$.

Так как функции $R(\omega)$ и $T(\omega)$ не зависят от параметров γ и μ , то очевидно прямоугольник может быть любым с такими размерами, лишь бы он был вписан в годограф $Z_0(\omega)$. Причем, всегда можно указать при допустимом размахе γ максимально возможный размах μ и наоборот.

Рассмотрим влияние двух размахов на несколько коэффициентов или групп коэффициентов взятых произвольно.

Теорема 2.15 [63]. Пусть $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_{n-1} > 0, \alpha_n > 0$;

$|a_i - a_i^0| \leq \gamma\alpha_i, \gamma > 0, i = \theta_1, \theta_2 \dots \theta_m$ (четные, включая 0) и $i = \eta_1, \eta_2 \dots \eta_r$ (нечетные);

$|a_l - a_l^0| \leq \mu\alpha_l, \mu > 0, l \neq i, m+k+r = n+1, l = \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$;

$$\begin{cases} R(\omega) = \sum_{i=\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m} \alpha_i \omega^i + \frac{\mu}{\gamma} \sum_{i \neq \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m} \alpha_i \omega^i, 0 \leq 2i \leq n, i - \text{четные или } 0; \\ T(\omega) = \sum_{i=\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r} \alpha_i \omega^{i-1} + \frac{\gamma}{\mu} \sum_{i \neq \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r} \alpha_i \omega^{i-1}, 0 \leq 2i+1 \leq n, i - \text{нечетные} \end{cases} \quad (2.38)$$

Тогда для принадлежности интервального полинома $F(s)$ классу (n, k) -эквивалентности необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия.

1. $|a_0^0| > \alpha_0, |a_n^0| > \alpha_n$, если a_0^0, a_n^0 - середины фиксированных интервалов,

иначе

$$|a_0^0| > \gamma\alpha_0, |a_n^0| > \gamma\alpha_n, |a_n^0| > \mu\alpha_n.$$

2. Годограф $Z_0(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)} + j \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)}$ при изменении ω от 0 до ∞ проходит

через $n - 2k$ квадратов против часовой стрелки и не пересекает квадрата $(\pm\gamma; \pm\mu)$.

Отметим, что здесь замечание с изменением пары γ, μ меняются нормировочные функции и нужно заново вычислять годограф $Z_0(\omega)$ после пересчета функции $R(\omega)$ и $T(\omega)$. Поэтому указать наибольший в каком-то смысле прямоугольник не удастся, если не считать случай когда $\gamma = \mu$.

В случае линейной связи γ и μ , т.е. $\mu = l\gamma$ нормировочные функции $R(\omega)$ и $T(\omega)$ уже не будут зависеть от размахов γ и μ . В этом случае можно указать максимальное $\gamma = \gamma_{\max}$ - прямоугольник наибольшей площади с отношением сторон $\frac{\mu}{\gamma} = l$, вписанный в годограф $Z_0(\omega)$.

Сформулируем общий критерий, объединяющий теоремы 2.14 и 2.15 для исследования влияния двух параметров γ и μ на поведение интервального полинома $F(s)$ варьируя длины одних интервалов и фиксируя другие.

Теорема 2.16 [63]. Пусть $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_{n-1} > 0, \alpha_n > 0$;

$$|a_{2i} - a_{2i}^0| \leq \gamma \alpha_{2i}, 2i = \theta_1, \theta_2 \dots \theta_{m_1}, |a_{2i} - a_{2i}^0| \leq \mu \alpha_{2i}, 2i = \eta_1, \eta_2 \dots \eta_{m_2},$$

$$|a_{2i} - a_{2i}^0| \leq \alpha_{2i}, 2i = \tau_1, \tau_2 \dots \tau_{m_3}, m_1 + m_2 + m_3 = \left[\frac{n}{2} \right];$$

$$|a_{2i+1} - a_{2i+1}^0| \leq \gamma \alpha_{2i+1}, 2i+1 = \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \dots \hat{\theta}_{r_1},$$

$$|a_{2i+1} - a_{2i+1}^0| \leq \mu \alpha_{2i+1}, 2i+1 = \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2 \dots \hat{\eta}_{r_2},$$

$$|a_{2i+1} - a_{2i+1}^0| \leq \alpha_{2i+1}, 2i+1 = \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2 \dots \hat{\tau}_{r_3}, r_1 + r_2 + r_3 = \left[\frac{n}{2} \right] + 1;$$

$$\left\{ \begin{aligned} R(\omega) &= \sum_{2i=\theta_1, \theta_2 \dots \theta_{m1}} \alpha_{2i} \omega^{2i} + \frac{\mu}{\gamma} \sum_{2i=\eta_1, \eta_2 \dots \eta_{m2}} \alpha_{2i} \omega^{2i} + \\ &+ \frac{1}{\gamma} \sum_{2i=\tau_1, \tau_2 \dots \tau_{m3}} \alpha_{2i} \omega^{2i}, 0 \leq 2i \leq n, \\ T(\omega) &= \frac{\gamma}{\mu} \sum_{2i+1=\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2 \dots \hat{\theta}_{r1}} \alpha_{2i+1} \omega^{2i} + \sum_{2i+1=\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2 \dots \hat{\eta}_{r2}} \alpha_{2i+1} \omega^{2i} + \\ &+ \frac{1}{\mu} \sum_{2i=\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2 \dots \hat{\tau}_{r3}} \alpha_{2i} \omega^{2i}; \\ 1 \leq 2i+1 \leq n. \end{aligned} \right.$$

б) годограф $Z_0(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)} + j \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)}$ при изменении ω от 0 до ∞ проходит через

$n - 2k$ квадратов против часовой стрелки и не пересекает квадрата $(\pm \gamma; \pm \mu)$.

Отметим, что замечание к теореме 2.15 о линейной связи параметров γ и μ верно и для этой теоремы.

К сожалению, использовать более двух размахов неопределенности в рассмотренной постановке не удастся из-за отсутствия подходящих нормировочных функций $R(\omega)$ и $T(\omega)$.

В теоремах 2.14-2.16 за счет непрерывности и ограниченности $Z_0(\omega)$ можно освободиться от условий $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_{n+1} > 0, \alpha_n > 0$.

2.3.2. Рассмотрим интервальные полиномы с комплексными коэффициентами.

Приведем простейший случай [39], когда исследуются всего две группы: одна – реальные, вторая – мнимые части коэффициентов комплексного интервального полинома. Рассмотрим интервальное семейство полиномов с комплексными коэффициентами вида:

$$\Phi(s) = \left\{ \begin{aligned} f(s) &= A_0 + A_1 s + \dots + A_n s^n, \\ A_i &= a_i + j b_i, |a_i - a_i^0| \leq \alpha_i \gamma, \\ |b_i - b_i^0| &\leq \beta_i \mu, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \gamma > 0, \mu > 0. \end{aligned} \right.$$

Рассмотрим номинальный годограф при $-\infty < \omega < \infty$:

$$f_0(j\omega) = g_0(\omega) + jh_0(\omega)$$

$$\begin{cases} g_0(\omega) = a_0^0 - b_1^0\omega - a_2^0\omega^2 + b_3^0\omega^3 + a_4^0\omega^4 - \dots, \\ h_0(\omega) = b_0^0 + a_1^0\omega - b_2^0\omega^2 - a_3^0\omega^3 + b_4^0\omega^4 + \dots \end{cases}$$

Для номинального годографа $f_0(j\omega)$ рассмотрим нормировочные функции:

$$\begin{cases} R(\omega) = \alpha_0 + \frac{\mu}{\gamma}\beta_1|\omega| + \alpha_2\omega^2 + \frac{\mu}{\gamma}\beta_3|\omega|^3 + \alpha_4\omega^4 + \dots, \\ T(\omega) = \beta_0 + \frac{\gamma}{\mu}\alpha_1|\omega| + \beta_2\omega^2 + \frac{\gamma}{\mu}\alpha_3|\omega|^3 + \beta_4\omega^4 + \dots \end{cases} \quad (2.39)$$

Покажем, что множество значений $S(\omega)$ годографов $f(j\omega)$ интервального полинома (2.50) является прямоугольником:

$$S(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} f(j\omega) = x(\omega) + jy(\omega); \\ |x - g_0(\omega)| \leq \gamma R(\omega), |y - h_0(\omega)| \leq \mu T(\omega). \end{array} \right\} \quad (2.40)$$

В стандартных обозначениях $x(\omega) = g(\omega)$ и $y(\omega) = h(\omega)$ неравенства (2.40) можно записать точнее:

$$\begin{cases} g_0(\omega) - \gamma R(\omega) \leq g(\omega) \leq g_0(\omega) + \gamma R(\omega), \\ h_0(\omega) - \mu T(\omega) \leq h(\omega) \leq h_0(\omega) + \mu T(\omega). \end{cases} \quad (2.41)$$

Чтобы доказать неравенства (2.41) сделаем очевидные преобразования с границами первого неравенства:

Для $\omega \geq 0$:

$$\begin{aligned} g_0(\omega) - \gamma R(\omega) &= (a_0^0 - b_1^0\omega - a_2^0\omega^2 + b_3^0\omega^3 + a_4^0\omega^4 - \dots) - \\ &- \gamma(\alpha_0 + \beta_1 \frac{\mu}{\gamma}\omega + \alpha_2\omega^2 + \beta_3 \frac{\mu}{\gamma}\omega^3 + \alpha_4\omega^4 + \dots) = \\ &= (a_0^0 - \gamma\alpha_0) - (b_1^0 + \beta_1\mu)\omega - (a_2^0 + \gamma\alpha_2)\omega^2 + \\ &+ (b_3^0 - \beta_3\mu)\omega^3 + (a_4^0 - \gamma\alpha_4)\omega^4 - \dots = \underline{g_1}(\omega). \end{aligned}$$

Аналогично при $\omega \geq 0$:

$$\begin{aligned} g_0(\omega) + \gamma R(\omega) &= (a_0^0 + \gamma\alpha_0) - (b_1^0 - \beta_1\mu)\omega - (a_2^0 - \gamma\alpha_2)\omega^2 + \\ &+ (b_3^0 + \beta_3\mu)\omega^3 + (a_4^0 + \gamma\alpha_4)\omega^4 - \dots = \overline{g_1}(\omega). \end{aligned}$$

Для $\omega \leq 0$:

$$\begin{aligned}
g_0(\omega) - \gamma R(\omega) &= (a_0^0 - b_1^0 \omega - a_2^0 \omega^2 + b_3^0 \omega^3 + a_4^0 \omega^4 - \dots) - \\
&\quad - \gamma(\alpha_0 - \beta_1 \frac{\mu}{\gamma} \omega + \alpha_2 \omega^2 - \beta_3 \frac{\mu}{\gamma} \omega^3 + \alpha_4 \omega^4 \dots) = \\
&\quad = (a_0^0 - \gamma \alpha_0) - (b_1^0 - \beta_1 \mu) \omega - (a_2^0 + \alpha_2 \gamma) \omega^2 + \\
&\quad + (b_3^0 + \beta_3 \mu) \omega^3 + (a_4^0 - \gamma \alpha_4) \omega^4 - \dots = \\
&\quad = (a_0^0 - \gamma \alpha_0) + (b_1^0 - \beta_1 \mu) |\omega| - (a_2^0 + \alpha_2 \gamma) \omega^2 - \\
&\quad - (b_3^0 + \beta_3 \mu) |\omega|^3 + (a_4^0 - \gamma \alpha_4) \omega^4 - \dots = \underline{g_2}(\omega) \\
g_0(\omega) + \gamma R(\omega) &= (a_0^0 + \gamma \alpha_0) + (b_1^0 + \beta_1 \mu) |\omega| - \\
&\quad - (a_2^0 - \alpha_2 \gamma) \omega^2 - (b_3^0 - \beta_3 \mu) |\omega|^3 = \overline{g_2}(\omega)
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим границы второго неравенства из (2.41).

Для $\omega \geq 0$:

$$\begin{aligned}
h_0(\omega) - \mu T(\omega) &= (b_0^0 - \mu \beta_0) + (a_1^0 - \gamma \alpha_1) \omega - (b_2^0 + \mu \beta_2) \omega^2 - \\
&\quad - (a_3^0 + \gamma \alpha_3) \omega^3 + (b_4^0 - \mu \beta_4) \omega^4 + \dots = \underline{h_1}(\omega)
\end{aligned}$$

Аналогично при $\omega \geq 0$:

$$\begin{aligned}
h_0(\omega) + \mu T(\omega) &= (b_0^0 + \mu \beta_0) + (a_1^0 + \gamma \alpha_1) \omega - (b_2^0 - \mu \beta_2) \omega^2 - \\
&\quad - (a_3^0 - \gamma \alpha_3) \omega^3 + (b_4^0 + \mu \beta_4) \omega^4 + \dots = \overline{h_1}(\omega)
\end{aligned}$$

Для $\omega \leq 0$:

$$\begin{aligned}
h_0(\omega) - \mu T(\omega) &= (b_0^0 - \mu \beta_0) + (a_1^0 + \gamma \alpha_1) \omega - (b_2^0 + \mu \beta_2) \omega^2 - \\
&\quad - (a_3^0 - \gamma \alpha_3) \omega^3 + (b_4^0 - \mu \beta_4) \omega^4 + \dots = \underline{h_2}(\omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_0(\omega) + \mu T(\omega) &= (b_0^0 + \mu \beta_0) + (a_1^0 - \gamma \alpha_1) \omega - (b_2^0 - \mu \beta_2) \omega^2 - \\
&\quad - (a_3^0 + \gamma \alpha_3) \omega^3 + (b_4^0 + \mu \beta_4) \omega^4 + \dots = \overline{h_2}(\omega)
\end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что семейство значений $S(\omega)$ годографов $f(j\omega)$ находится при $-\infty < \omega < \infty$ в прямоугольнике $\left[\underline{g_1}, \overline{g_1} \right] \times \left[\underline{h_1}, \overline{h_1} \right]$ при $\omega \geq 0$ и в прямоугольнике $\left[\underline{g_2}, \overline{g_2} \right] \times \left[\underline{h_2}, \overline{h_2} \right]$ при $\omega \leq 0$, т. е. доказаны неравенства (2.40) и (2.41).

Заметим, что при $\omega = 0$ значения $S(\omega)$ семейства годографов $f(j\omega)$ остаются прямоугольником:

$$S(0) = [a_0^0 - \gamma\alpha_0, a_0^0 + \gamma\alpha_0] \times [b_0^0 - \mu\beta_0, b_0^0 + \mu\beta_0]$$

Условие $0 \notin S(\omega)$ из (2.40) для выполнения принципа исключения нуля в комплексном случае эквивалентно тому, что

$$\left| \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)} \right| > \gamma, \quad \left| \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)} \right| > \mu,$$

Определение 2.7. Назовем при $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, \alpha_n > 0, \beta_n > 0$, функцию

$$Z_0(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)} + j \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)},$$

определенную на всей вещественной оси, с $R(\omega)$ и $T(\omega)$ из (2.53) сложным нормированным номинальным годографом или кратко – сложным годографом.

Напомним, что интервальный полином $\Phi(s)$ из (2.50) является интервальным полиномом из класса (n, k) -эквивалентности, если любой полином из этого семейства принадлежит классу (n, k) -эквивалентности.

Теперь можно сформулировать критерий, доказанный выше.

Теорема 2.17. [39] Для того, чтобы комплексный интервальный полином $\Phi(s)$ степени n был интервальным полиномом класса (n, k) -эквивалентности при $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, \alpha_n > 0, \beta_n > 0$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

$$1. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max((a_0^0)^2 - (\gamma\alpha_0)^2, (b_0^0)^2 - (\mu\beta_0)^2) > 0, \\ \max((a_n^0)^2 - (\gamma\alpha_n)^2, (b_n^0)^2 - (\mu\beta_n)^2) > 0. \end{array} \right\} \quad (2.42)$$

2. Годограф $Z_0(\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ проходит последовательно против часовой стрелки ровно $n - 2k$ полуоборотов $(\Delta \arg_{-\infty < \omega < +\infty} Z_0(\omega) = \pi(n - 2k))$ не пересекая прямоугольника с вершинами $(\pm\gamma, \pm\mu)$.

Не трудно видеть, что сложный годограф $Z_0(\omega)$ является ограниченным при $-\infty < \omega < \infty$, и функции $\operatorname{Re} Z_0(\omega)$, $\operatorname{Im} Z_0(\omega)$ имеют скачок первой производной при $\omega = 0$.

Заметим, что:

1. При $k = 0$ речь в теореме 2.17 идет об устойчивых интервальных семействах, при $k > 0$ о неустойчивых.

2. За счет изменения двух независимых параметров γ и μ можно исследовать на робастную устойчивость интервальные полиномы с комплексными коэффициентами, варьируя величину интервалов по реальной и мнимой частям коэффициентов, что дает 2 степени свободы.

3. За счет потери ограниченности и непрерывности сложного годографа $Z_0(\omega)$ можно отбросить условие на масштабные множители: $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, \alpha_n > 0, \beta_n > 0$ заменив их условиями:

$$\sum_{\substack{2r+1 \leq n \\ 2m \leq n}}^n (\alpha_{2m} + \beta_{2r+1}) > 0, \quad \sum_{\substack{2r+1 \leq n \\ 2m \leq n}} (\alpha_{2r+1} + \beta_{2m}) > 0$$

$(m, r=1, 2, \dots)$ или одним условием $T(\omega)R(\omega) > 0$ при $\omega \in R$.

Если γ и μ зависимы линейно, т.е. $\mu = l\gamma$, то можно указать наибольший размах $\gamma_{\max}$, что интервальный полином $\Phi(s)$ находится в классе (n, k) -эквивалентности при $\gamma < \gamma_{\max}$. В этом случае нормировочные функции $R(\omega)$ и $T(\omega)$ не зависят от γ и μ , а число $\gamma_{\max}$ определяется по формуле $\gamma_{\max} = \min(\gamma^*, \gamma_\infty)$, где $\{2\gamma^*, 2l\gamma^*\}$ – размеры наибольшего прямоугольника, вписанного в сложный годограф $Z_0(\omega)$. В условиях теоремы 2.17 для этого случая (годограф $Z_0(\omega)$ – ограниченный) число γ_∞ определяется формулой

$$\gamma_{\infty} = \begin{cases} \left[\frac{|a_n^0|}{\alpha_n}, \frac{|b_n^0|}{\beta_n} \right], n - \text{четное} \\ \left[\frac{|a_n^0|}{\alpha_n}, \frac{|b_n^0|}{\beta_n} \right], n - \text{нечетное} \end{cases} \quad (2.43)$$

Если же сложный годограф:

- а) неограничен, но непрерывен, т.е. $\alpha_0 \beta_0 \neq 0, \alpha_n \beta_n = 0$, то $\gamma_{\max} = \gamma^*$;
- б) неограничен из-за разрыва при $\omega = 0$, а в окрестности $\omega = \infty$ $Z_0(\omega)$ ограниченная функция, т.е. $\alpha_0 \beta_0 = 0, \alpha_n \beta_n \neq 0$, то $\gamma_{\max} = \min(\gamma^*, \gamma_{\infty})$, где γ_{∞} вычисляется по формулам (2.43).

Для интервальных полиномов с комплексными коэффициентами можно построить аналоги теорем 2.14 – 2.16, сформулированных выше в п. 2.3.1 для интервальных полиномов с вещественными коэффициентами.

2.4 Дискретные интервальные полиномы

Анализируя известные критерии устойчивости и принцип исключения нуля для семейств характеристических полиномов дискретных систем можно сформулировать аналогичные понятия необходимые для исследования характеристик неустойчивости этих дискретных семейств. Точнее, поставить вопрос об их принадлежности некоторым однородным классам неустойчивости, разделяя дискретные полиномы по числу корней внутри и вне круга единичного радиуса с центром в нуле.

В этом параграфе рассматриваются семейства характеристических полиномов дискретных интервальных систем управления.

Определение 2.8. Семейство полиномов степени n

$$F(s, Q) = \{f(s, q) = a_0(q) + a_1(q)s + \dots + a_n(q)s^n, \quad q \in Q\} \quad (2.44)$$

назовём принадлежащим классу (n, k) -эквивалентности дискретных полиномов, если каждый полином семейства для всех значений параметра $q \in Q \subset R^m$ имеет k , $0 \leq k \leq n$, корней внутри круга единичного радиуса с центром в нуле, а $n - k$ корней – вне этого круга (с учётом кратностей).

Очевидно, семейство дискретных полиномов из класса $(n, 0)$ -эквивалентности дискретных полиномов является робастно устойчивым в пространстве параметров Q . Требование одинакового порядка n полиномов в семействе требуется, чтобы число корней вне и внутри круга $|s| \leq 1$ в сумме и с учётом кратностей было одинаковым и равно порядку n полинома. Напомним, что для устойчивых дискретных полиномов условие постоянства порядка всех полиномов в семействе не требуется [78]. В общем случае для робастной устойчивости и робастной неустойчивости семейства дискретных полиномов (робастное поведение) справедлив аналог принципа исключения нуля.

Теорема 2.18. [26] Пусть полином $f(s, q^0) \in F(s, Q)$ для некоторого $q^0 \in Q$, Q - связно, $Q \in R^m$, принадлежит классу (n, k) -эквивалентности дискретных полиномов. Тогда условие

$$0 \notin S(\omega) = \{f(e^{j\omega}, q) : q \in Q, 0 \leq \omega < 2\pi\} \quad (2.45)$$

необходимо и достаточно для принадлежности всего семейства $F(s, Q)$ классу (n, k) -эквивалентности дискретных полиномов.

Доказательство, как для вещественных, так и для комплексных коэффициентов мало отличается от непрерывного случая (теоремы 2.1, 2.5).

Для непрерывных и дискретных полиномов критерий Михайлова, принцип исключения нуля и их обобщения формулируются несколько по-разному. Для непрерывных полиномов $0 \leq \omega < +\infty$, если полиномы с вещественными коэффициентами и $-\infty < \omega < \infty$, если полиномы с комплексными коэффициентами. Это объясняется тем, что в первом случае годографы симметричны относительно вещественной оси, а во втором – нет. Точнее, для непрерывных полиномов во втором случае годографы центрально симметричны относительно свободного коэффициента только при $k = 0$ (устойчивость) при $\omega \in R$. Для дискретных полиномов в обоих случаях берётся образ всей мнимой оси (окружность), чтобы годограф после отображения стал замкнутым. Для полиномов с вещественными коэффициентами такой годограф симметричен относительно вещественной оси, а для комплексного случая – нет никакой симметрии даже для $k = 0$.

Здесь рассматриваются только центрированные интервальные ограничения на коэффициенты семейства дискретных полиномов с вещественными коэффициентами, т.е. семейство полиномов вида (кратко-интервальный дискретный полином):

$$F(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n, \quad |a_i - a_i^0| \leq \gamma \alpha_i \quad (2.46)$$

$\alpha_i > 0, i = \overline{0, n}, \underline{a_n} \cdot \bar{a_n} > 0, \gamma$ - размах неопределённости. Причем, параллелепипед коэффициентов из R^{n+1} , если все $\alpha_i > 0$. Для непрерывного случая множество $S(\omega)$ для интервального полинома является прямоугольником, соответствующие пары сторон которого всегда параллельны мнимой или действительной осям комплексной плоскости.

В дискретном случае получим выпуклый многоугольник, который меняет форму, оставаясь выпуклым многоугольником при изменении ω от 0 до 2π . Изменение ω от 0 до 2π эквивалентно изменению ω от $-\infty$ до ∞ при отображении мнимой оси в единичную окружность. Точнее,

$$S(\omega) = \left\{ f_0(e^{j\omega}) + \gamma \sum_{m=0}^n \alpha_m \mu_m e^{j\omega m} \right\} = c_0 + \left\{ \sum_{m=0}^n \mu_m s_m \right\} \quad (2.47)$$

где $c_0 = f_0(e^{j\omega})$, $s_m = \gamma \alpha_m e^{j\omega m}$, $\mu_m \in [-1, 1]$ – произвольные числа.

Множество $S(\omega)$ - многоугольник с центром в точке c_0 и сторонами расположенными под углами равными $\arg s_m$, $m = \overline{0, n}$. Многоугольник выпуклый и имеет не более $2n + 2$ сторон и столько же вершин, причём при изменении ω от 0 до 2π многоугольник $S(\omega)$ «двигаясь» трансформируется в $2n$ - угольник, $2n - 2$ угольник и т.д. вплоть до отрезка при $\omega = 0$ и $\omega = \pi$. При некоторых ω соседние стороны становятся общей (одной) стороной. Максимальное число сторон уменьшается на $2m$, если m число величин α_i равных нулю.

Сформулируем критерий принадлежности дискретного интервального полинома $f(s)$ классу (n, k) – эквивалентности дискретных полиномов.

Теорема 2.19. [26] Пусть номинальный дискретный полином

$$F_0(s) = a_0^0 + a_1^0 s + \dots + a_n^0 s^n, \quad F_0(s) \in F(s)$$

принадлежит классу (n, k) – эквивалентности дискретных полиномов. Тогда для того, чтобы интервальный полином $F(s)$ из (2.46) принадлежал классу (n, k) – эквивалентности дискретных полиномов необходимо и достаточно, чтобы для размаха неопределенности γ выполнялось неравенство

$$\gamma < \gamma_{\max}^k, \quad (2.48)$$

где

$$\gamma_{\max}^k = \min_{0 \leq \omega < 2\pi} \gamma(\omega), \quad \gamma(\omega) = \max_{\eta=0, n} \frac{\left| \sum_{i=0}^n a_i^0 \cos(i - \eta)\omega \right|}{\sum_{i=0}^n \alpha_i |\cos(i - \eta)\omega|}, \quad \omega \neq 0, \pi;$$

$$\gamma(0) = \frac{\left| \sum_{i=0}^n a_i^0 \right|}{\sum_{i=0}^n \alpha_i}, \quad \gamma(\pi) = \frac{\left| \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^0 \right|}{\sum_{i=0}^n \alpha_i}.$$

Назовём максимальный размах неопределенности $\gamma_{\max}^k$ – k -радиусом дискретного интервального семейства полиномов.

Доказательство опирается на принцип исключения нуля для общего случая (теорема 2.18) и не имеет принципиальных трудностей.

Очевидно, при $k = 0$ из теоремы 2.19 получим критерий устойчивости [78] дискретного интервального полинома. Формулы для вычисления k -радиуса $\gamma_{\max}^k$ существенно отличаются от непрерывного случая.

В дискретном случае нет аналога теорем из предыдущих параграфов о принадлежности семейств интервальных полиномов в непрерывном случае классам (n, k) – эквивалентности. В частности, в дискретном случае нет аналога теоремы Харитонова ($k = 0$). Причина в том, что $S(\omega)$ в непрерывном случае это прямоугольник, ориентация которого не меняется при изменении ω , а в дискретном случае геометрия $S(\omega)$ совершенно другая – многоугольник с меняющимся направлением и числом сторон (их число не превышает $2n + 2$).

Теорема 2.19 о принадлежности интервального полинома с вещественными коэффициентами классу (n, k) – эквивалентности дискретных полиномов обобщается и на интервальный дискретный полином с комплексными коэффициентами.

Требование $\alpha_i > 0$ для всех $i = \overline{0, n}$ оставлено для простоты, так как, если некоторое количество $m, m < n$ чисел $\alpha_i = 0$, то параллелепипед коэффициентов Q поменяет размерность с $n + 1$ на $n - m + 1$, а наибольшее число ребер многоугольника $S(\omega)$ станет меньше, т.е. $2(n - m) + 2$.

Чтобы семейство $F(s)$ оставалось интервальным и не вырождалось в номинальный полином $F_0(s)$ можно условие $\alpha_i > 0$ для всех $i = \overline{0, n}$ в (2.46)

заменить на условие $\sum_{i=0}^n \alpha_i > 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{0, n}$.

Глава 3. Методы исследования робастного поведения неинтервальных линейных систем управления

3.1 Критерии существования выпуклых множеств устойчивых и неустойчивых полиномов

В этой части главы рассмотрены критерии существования выпуклых множеств неустойчивых полиномов в пространстве коэффициентов характеристического полинома системы первого приближения принадлежащих однородным классам неустойчивости. Эти критерии позволяют свести исследование бесконечномерной задачи к конечномерной, т.е. путем проверки конечного числа условий, налагаемых на полиномы, образующие это семейство, установить свойства всего этого семейства полиномов.

Напомним, что полиномы степени n с вещественными коэффициентами

$$f(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n, a_n \neq 0 \quad (3.1)$$

принадлежат классу (n, k) -эквивалентности, если они не имеют нулевых и чисто мнимых корней и в правой полуплоскости находится ровно k корней каждого из этих полиномов, с учетом их кратностей.

Очевидно, $a_0 \neq 0$, а для полиномов с вещественными коэффициентами предполагаем для определенности $a_0 > 0$.

В дальнейшем нам потребуется критерий робастной устойчивости линейного политопа.

Теорема 3.1. [38] Если полиномы с комплексными коэффициентами $f_1(s)$ и $f_2(s)$ принадлежат классу (n, k) -эквивалентности, то для принадлежности этому классу линейного политопа

$$\alpha f_1(s) + (1 - \alpha) f_2(s), \alpha \in [0, 1] \quad (3.2)$$

необходимо и достаточно, чтобы годограф $R(j\omega) = \frac{f_1(j\omega)}{f_2(j\omega)}$ не пересекал отрицательную вещественную полуось при изменении ω от $-\infty$ до ∞ .

Доказательство. Действительно, для $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ теорема очевидно выполняется, а для $0 < \alpha < 1$ имеем:

$$\begin{aligned} \Delta \arg(\alpha f_1(j\omega) + (1-\alpha)f_2(j\omega)) &= \Delta \arg f_2(j\omega) + \Delta \arg \left(\frac{f_1(j\omega)}{f_2(j\omega)} + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \right) = \\ &= \pi(n-2k) + \Delta \arg \left(R(j\omega) + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \right) \end{aligned}$$

$-\infty < \omega < \infty$ $-\infty < \omega < \infty$ $-\infty < \omega < \infty$

Последнее эквивалентно утверждению теоремы, если потребовать, чтобы $\Delta \arg \left(R(j\omega) + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \right) = 0$ при всех $0 < \alpha < 1$. Таким образом, получаем из обобщенного критерия Найквиста требуемое условие. Теорема доказана.

Очевидно, что при $k=0$ получим известный критерий устойчивости линейного полинома. Для вещественного случая достаточно брать частоту $\omega \in [0, +\infty)$.

Приведем критерии существования аффинных семейств полиномов, принадлежащих однородным классам (n, k) -эквивалентности, т.е. критерии их робастной неустойчивости.

Теорема 3.2 [26] Семейство полиномов

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(s), \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \quad (3.3)$$

Принадлежат классу (n, k) -эквивалентности, тогда и только тогда, когда этому классу принадлежат все полиномы вида:

$$\alpha f_i(s) + (1-\alpha)f_\eta(s), \quad \alpha \in [0, 1], \quad i, n = 1, 2, \dots, m \quad (3.4)$$

Доказательство. Необходимость. В формуле (3.3) положим $\alpha = \alpha_i$, $1-\alpha = \alpha_\eta$ тогда при любом $\alpha \in [0, 1]$ полином (3.3) принадлежит семейству (3.4).

Достаточность. Пусть все полиномы вида (3.4) принадлежат классу (n, k) -эквивалентности. Обозначим угол поворота годографа Михайлова $f_l(j\omega)$ полинома $f_l(s)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$, против хода часовой стрелки, через $\Phi_l(\omega)$, $l = 1, 2, \dots, m$. Отметим, что все полиномы $f_l(s)$ принадлежат классу

(n, k) -эквивалентности и, следовательно, в силу критерия Михайлова, для них выполняются условия $\Phi_l(+\infty) = \frac{\pi}{2} \cdot (n - 2k)$, $l = 1, 2, \dots, m$.

Для семейства полиномов (3.4) введем понятие двух угловых векторных функций:

$$\begin{aligned}\bar{f}(\omega) &= f_l(j\omega), \text{ если } \Phi_l(\omega) = \max_{1 \leq l \leq m} \Phi_l(\omega), \\ \underline{f}(\omega) &= f_l(j\omega), \text{ если } \Phi_l(\omega) = \min_{1 \leq l \leq m} \Phi_l(\omega).\end{aligned}$$

Таким образом, угол поворота годографа любого полинома $f_l(s)$, $l = 1, 2, \dots, m$ находится между углами поворота векторных функций $\bar{f}(\omega)$ и $\underline{f}(\omega)$ ($\Phi(\omega) \leq \Phi_l(\omega) \leq \bar{\Phi}(\omega)$) и, эти векторные функции, поворачиваются при изменении ω от 0 до против хода часовой стрелки на угол

$$\underline{\Phi}(+\infty) = \bar{\Phi}(+\infty) = \frac{\pi}{2} \cdot (n - 2k) \quad (3.5)$$

Это также относится ко всем годографам семейства полиномов (3.4), т.к. они, при любых значениях ω , не принимают нулевых значений и заканчиваются на отрезке соединяющем концы годографов $f_i(j\omega)$ и $f_n(j\omega)$ (т.е. находятся между векторами $\bar{f}(\omega)$ и $\underline{f}(\omega)$ поворачиваясь вместе с ними, при изменении ω от 0 до $+\infty$, против хода часовой стрелки, на угол $\frac{\pi}{2} \cdot (n - 2k)$).

Таким образом, мы показали, что семейство годографов семейства полиномов (3.4) является выпуклым множеством.

Из теории выпуклых множеств известно, что любая линейная выпуклая комбинация точек выпуклого множества, является точкой этого выпуклого множества. Отсюда вытекает, что годограф любого полинома семейства (3.3) принадлежит выпуклому множеству годографов полиномов семейства (3.4) и, следовательно, любой полином семейства (3.3) принадлежит классу (n, k) -эквивалентности.

Последнюю часть теоремы можно доказать не используя понятия выпуклого множества, а опираясь лишь на тот факт что любой годограф $f(j\omega)$ семейства полиномов (3.3), в силу правила сложения векторов (правила параллелограмма) и правила

умножения вектора на число, всегда находится «между» двух векторных функций $\overline{f}(\omega)$, $\underline{f}(\omega)$ и не принимает нулевых значений.

Теорема доказана.

Требование нормировки $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ в теореме 3.2. является излишним и его можно

исключить, т.к. при умножении полинома на любое число его корни не меняются. Точнее в теореме 3.1-3.2 можно взять вместо единицы любое положительное число, что изменит только размер выпуклого множества.

Теорема 3.3. [38] Семейство полиномов (3.3) ((3.4)) и принадлежат классу (n, k) -эквивалентности в том и только в том случае, когда полиномы $f_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, m$ принадлежат классу (n, k) -эквивалентности и для всех вещественных корней уравнения

$$h_\eta(\omega)g_i(\omega) - h_i(\omega)g_\eta(\omega) = 0, \quad i \neq \eta \quad (3.6)$$

справедливо неравенство

$$g_i(\omega)g_\eta(\omega) + h_i(\omega)h_\eta(\omega) > 0, \quad i \neq \eta, \quad (3.7)$$

где $g_l(\omega)$ и $h_l(\omega)$ соответственно вещественная и мнимая часть годографа Михайлова полинома $f_l(s)$, $i, \eta, l = 1, 2, \dots, m$.

Доказательство. Достаточность. Пусть полиномы $f_l(s)$, $l = 1, 2, \dots, m$ принадлежат классу (n, k) -эквивалентности и для них выполняются условия (3.6) и (3.7). Очевидно, что выполнение условий (3.6) и (3.7) означает, что любые два годографа полиномов из этого множества не могут быть ортогональны между собой при изменении ω от 0 до $+\infty$.

Действительно, условие (3.6) означает коллинеарность годографов $f_i(j\omega)$ и $f_\eta(j\omega)$, а одновременное выполнение условия (3.7) означает их одинаковую направленность.

Отсюда вытекает, что угловые векторные функции $\overline{f}(\omega)$ и $\underline{f}(\omega)$, введенные при доказательстве теоремы 3.2, также не могут быть ортогональны между собой при

изменении ω от 0 до $+\infty$. При этом они поворачиваются вместе находящимися между ними годографами полиномов $f_l(s)$, $l = 1, 2, \dots, m$.

Тогда из свойств операций с векторами следует, что любой годограф $f_i(j\omega)$ семейства полиномов (3.3) принадлежит классу (n, k) -эквивалентности. В силу теоремы (3.2) семейство полиномов (3.4) также принадлежит классу (n, k) -эквивалентности.

Необходимость. Пусть семейство полиномов (3.3) ((3.4)) принадлежат классу (n, k) -эквивалентности, тогда полиномы $f_l(s)$, $l = 1, 2, \dots, m$ также принадлежат классу (n, k) -эквивалентности.

Пусть при некотором $\omega \in [0, +\infty)$ выполняется условие (3.6). Это означает что годографы Михайлова полиномов $f_i(s)$ и $f_\eta(s)$, т.е. вещественные координаты этих годографов пропорциональны:

$$\begin{pmatrix} g_i(\omega) \\ h_i(\omega) \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} g_\eta(\omega) \\ h_\eta(\omega) \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} g_i(\omega) \\ h_i(\omega) \end{pmatrix} - \nu \begin{pmatrix} g_\eta(\omega) \\ h_\eta(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Величина ν должна быть положительна, т.е. $\nu > 0$. Предположим противное $\nu < 0$, тогда получим, что положительная линейная комбинация этих двух годографов обращается в нуль. Это означает, что полином $f_i(s) - \nu f_\eta(s)$ ($\nu < 0$) имеет мнимый корень. Это противоречит его принадлежности семейству (3.3).

Итак, при выполнении условий (3.6) величина $\nu > 0$ и, следовательно, скалярное произведение (3.7) положительно, в силу того, что.

$$\left(\begin{pmatrix} g_i(\omega) \\ h_i(\omega) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_\eta(\omega) \\ h_\eta(\omega) \end{pmatrix} \right) = \nu (g_\eta^2(\omega) + h_\eta^2(\omega)) > 0$$

и того, что годографы Михайлова полиномов $f_l(s)$, $l = 1, 2, \dots, m$ не обращаются в нуль при $\omega \in [0, +\infty)$ (эти полиномы принадлежат классу (n, k) -эквивалентности).

Теорема доказана.

Определение 3.1. Угловой точкой выпуклого множества $\Omega \subset E^n$ называется точка A , которую нельзя представить в виде выпуклой линейной комбинации других точек этого множества.

Определение 3.2 [26] Выпуклое множество коэффициентов $\Omega \subset E^n$ полиномов

$$f(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n, A = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T, A \in \Omega,$$

имеющее конечное число угловых точек $A_1, \dots, A_m$ называют выпуклым k -множеством коэффициентов, а семейство полиномов им соответствующее $\tilde{\Omega}$ выпуклым k -множеством полиномов, если это семейство полиномов принадлежит классу (n, k) -эквивалентности.

Имеет место критерий, обобщающий теоремы 3.2 и 3.3.

Теорема 3.4. [106] Пусть множество коэффициентов семейства полиномов

$$f(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n, A = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T$$

представляет собой замкнутое, ограниченное и выпуклое k -множество $\Omega \subset E^n$, имеющее конечное число угловых точек $A_1, A_1, \dots, A_m$. Для того, чтобы множество $\tilde{\Omega}$ было выпуклым k -множеством полиномов необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

1. Угловые полиномы при $i = \overline{1, m}$,

$$f_i(s) = a_{i0} + a_{i1} s + \dots + a_{in-1} s^{n-1} + s^n, A_i = (a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{in-1})^T$$

являются полиномами из класса (n, k) -эквивалентности.

2. Выполняется:

либо полиномы

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i g_i(\omega), \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i(\omega), \text{ где } \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0,$$

$f_i(j\omega) = g_i(\omega) + jh_i(\omega)$, не имеют общих положительных корней;

либо полиномы

$$\alpha f_i(s) + (1 - \alpha) f_l(s), \alpha \in [0, 1], i, l = \overline{1, m}, i \neq l$$

являются полиномами из класса (n, k) -эквивалентности;

либо для всех положительных корней уравнения

$$h_l(\omega) g_i(\omega) - h_i(\omega) g_l(\omega) = 0$$

выполняются неравенства

$$g_i(\omega)g_l(\omega) + h_i(\omega)h_l(\omega) > 0, i, l = \overline{1, m}, i \neq l.$$

В частности, при $k = 0$ получим критерии существования выпуклых множеств коэффициентов полиномов Гурвица.

Докажем графический критерий.

Теорема 3.5. [50] Для того чтобы семейство полиномов $\tilde{\Omega}$ было выпуклым k -множеством полиномов необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:

- а) Все угловые полиномы с коэффициентами $A_i, i = \overline{1, m}$ принадлежат классу (n, k) -эквивалентности;
- б) Годографы функций

$$\begin{aligned} F_{il}(s) &= f_i(s) / f_l(s), \\ F_{il}(j\omega) &= \frac{g_i(\omega)g_l(\omega) + h_i(\omega)h_l(\omega)}{g_l^2(\omega) + h_l^2(\omega)} + \\ &+ j \frac{g_l(\omega)h_i(\omega) - g_i(\omega)h_l(\omega)}{g_l^2(\omega) + h_l^2(\omega)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

не пересекают отрицательную вещественную полуось при изменении ω от 0 до $+\infty$.

Доказательство. Условия теоремы 3.4 эквивалентны тому, что

$$\left| \text{Arg } f_i(\omega) - \text{Arg } f_l(\omega) \right| < \pi, \quad i, l = \overline{1, m} \quad (3.9)$$

при $\omega \in [0, +\infty)$. Это вытекает из того, что в при нарушении этого неравенства, т.е. при выполнении для $\omega = \bar{\omega}$ равенства

$$\left| \text{Arg } f_i(\bar{\omega}) - \text{Arg } f_l(\bar{\omega}) \right| = \pi$$

векторы $(g_i(\bar{\omega}), h_i(\bar{\omega}))^T$ и $(g_l(\bar{\omega}), h_l(\bar{\omega}))^T$ противоположно направлены, т.е.

выполняются соотношения

$$g_i(\bar{\omega})g_l(\bar{\omega}) + h_i(\bar{\omega})h_l(\bar{\omega}) < 0, \quad h_l(\bar{\omega})g_i(\bar{\omega}) - h_i(\bar{\omega})g_l(\bar{\omega}) = 0.$$

Это противоречит условиям теоремы (3.4) и, следовательно, неравенства (3.9) являются необходимыми и достаточными условиями того, что множество $\tilde{\Omega}$ является выпуклым k -множеством полиномов.

Для годографов $F_{i,l}(j\omega)$ функции $F_{i,l}(s)$ из (3.8) легко видеть, что имеют место равенства

$$\text{Arg } F_{i,l}(j\omega) = \text{Arg } f_i(\omega) - \text{Arg } f_l(\omega), \quad i, l = \overline{1, m}. \quad (3.10)$$

Более того, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \Delta_{\Gamma} \text{Arg } F_{i,l}(j\omega) &= \Delta_{\Gamma} \text{Arg } f_i(\omega) - \Delta_{\Gamma} \text{Arg } f_l(\omega) = \\ &= \text{Arg } f_i(\omega) - \text{Arg } f_l(\omega), \quad i, l = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где Δ_{Γ} обозначает приращение соответствующей функции вдоль годографа $F_{i,l}(j\omega)$.

Отсюда вытекает, что условия (3.9) эквивалентны критерию Найквиста и выполняется соотношение

$$-\pi < \Delta_{\Gamma} \text{Arg } F_{i,l}(j\omega) < \pi, \quad i, l = \overline{1, m}.$$

Это означает, что годографы $F_{i,l}(j\omega)$, при выполнении условий теоремы 3.4, не пересекают отрицательную вещественную полуось и, наоборот.

Теорема доказана.

Очевидно, при $k = 0$ получим выпуклое множество полиномов Гурвица. Обобщения теорем этого параграфа для выпуклых семейств полиномов с комплексными коэффициентами (выпуклое k -множество комплексных коэффициентов) и для параметрической зависимости коэффициентов: $A(q)$, $q \in Q$, $A(q) \in \Omega$, $\Omega \in E^n$ или $\Omega \in C^n$, Q - связно (выпуклое робастное k -множество коэффициентов полинома), проводится аналогично и без особых трудностей. Достаточно брать ω из $(-\infty, \infty)$ при сохранении других условий.

Критерий принадлежности линейного политопа (теорема 3.1) также можно считать графическим.

Последний критерий (теорема 3.4) для робастной устойчивости непрерывных интервальных полиномов не актуален, т.к. теорема Харитоновы сильнее и требует меньше проверок (4 для интервального полинома с вещественными и 8 – с комплексными коэффициентами). Однако, для исследования принадлежности интервального полинома классу (n, k) – эквивалентности уже требуется проверка 4-х линейных политопов, соответствующих внешним ребрам прямоугольника значений годографов $S(\omega)$, а в

комплексном случае – 8. Более того, для дискретных интервальных полиномов можно использовать прямо аналог теоремы 3.4 для дискретных выпуклых множеств полиномов. К сожалению, в этом случае надо проверить и линейные политопы, соответствующие всем ребрам $S(\omega)$, число которых будет $(m-1)2^m$, где m – число угловых точек дискретного выпуклого множества полиномов. Для интервального дискретного полинома $S(\omega)$ – выпуклый многоугольник, у которого $2n+2$ число вершин, где n – степень всех полиномов семейства. Ясно, что использование аналога теоремы 3.4 для дискретного случая не эффективно из-за большого числа проверок. Геометрический подход, показанный в пункте 2.4, формула (2.46) конечно предпочтительнее для дискретных интервальных полиномов.

3.2 Критерии робастного поведения семейств полиномов с неинтервальным описанием неопределенности.

В главе 2 были рассмотрены интервальные семейства полиномов, для которых неопределенными параметрами являются сами коэффициенты полиномов. Перейдем в этом параграфе к исследованию более сложного случая – рассмотрим аффинное семейство полиномов

$$F(s, Q) = \{F(s, q) = F_0(s, q) + q_1 F_1(s) + \dots + q_l F_l(s), \\ |q_i| \leq \gamma, i = \overline{1, l}\} \quad (3.12)$$

с параметрами, изменяющимися в кубе, γ – размах неопределенности коэффициентов,

$$Q = \{q \in R^l : \|q\|_\infty \leq \gamma\}. \quad (3.13)$$

где $\|q\|_\infty$ – норма, $\|q\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq l} |q_i|$.

Заметим, что Q может быть параллелепипедом, если $|q_i| \leq \alpha_i \gamma$, α_i – масштабные множители, $\alpha_i > 0$. Однако, заменой $\tilde{q}_i = q_i / \alpha_i$ можно легко свести задачу, где Q – параллелепипед, к задаче, где $\tilde{Q}$ – куб.

Определение 3.3. Одномерное семейство вида

$$\{F(s, q) : |q_i| = \gamma, i \neq k, |q_k| \leq \gamma\} \quad (3.14)$$

называется реберным полиномом, а вершинными полиномами называются полиномы вида $F(s, q), q_i = \pm \gamma, i = \overline{1, l}$.

Геометрически вершинные и реберные полиномы соответствуют вершинам и ребрам куба (3.13), т.е. реберный полином «соединяет» два «соседних» вершинных полинома (соответствующих соседним вершинам куба), и всего имеется $l \cdot 2^{l-1}$ реберных полиномов. Справедливо следующее утверждение – обобщение реберной теоремы [78] для семейства (3.12).

Теорема 3.6. [26] Пусть

$$\deg F_i(s) \leq \deg F_0(s), i = \overline{1, l}, \deg F_0(s) = n \quad (3.15)$$

$$\gamma \sum_{i=1}^l |a_n^i| < |a_n^0|, \gamma \sum_{i=1}^l |a_0^i| < |a_0^0|, \quad (3.16)$$

где $a_m^i, i = \overline{1, l}$, – коэффициенты при s^m полиномов $F_i(s)$. Пусть полином $F_0(s)$ из класса (n, k) – эквивалентности. Тогда для принадлежности всего аффинного семейства (3.12) классу (n, k) – эквивалентности необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий:

либо все реберные полиномы находятся в классе (n, k) – эквивалентности;

либо для любой пары $F_\mu(s), F_\eta(s)$ вершинных полиномов, являющихся концами реберного полинома, для их годографов

$$F_\mu(j\omega) = g_\mu(\omega) + jh_\mu(\omega) \text{ и } F_\eta(j\omega) = g_\eta(\omega) + jh_\eta(\omega)$$

выполняется: если $\omega = \omega_0$ вещественный положительный корень уравнения

$$g_\mu(\omega)h_\eta(\omega) - g_\eta(\omega)h_\mu(\omega) = 0, \quad (3.17)$$

то при $\omega = \omega_0$ выполняется неравенство

$$g_\mu(\omega)g_\eta(\omega) + h_\mu(\omega)h_\eta(\omega) > 0. \quad (3.18)$$

Проверка первого условия – принадлежность линейного политопа (реберного полинома) классу (n, k) – эквивалентности, проводится с помощью графического критерия принадлежности линейного политопа классу (n, k) – эквивалентности,

(теорема 3.1) для вещественного случая, для которого робастный критерий Найквиста является частным случаем при $k = 0$.

При $k = 0$ из теоремы 3.2 получим реберную теорему для аффинного семейства полиномов (3.3) с вещественными коэффициентами.

Геометрическую структуру множества $S(\omega)$ можно видеть на рис. 3.1.

Обобщение реберной теоремы (теорема 3.2, 3.6) позволяет получить эффективную формулировку принадлежности аффинного семейства классу (n, k) -эквивалентности, если число l неопределенных параметров мало. В этом случае следует проверить все реберные полиномы. Они представляют собой однопараметрические семейства вида

$$\alpha M(s) + (1 - \alpha)N(s)$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$ и $M(s)$, $N(s)$ – два соседних вершинных полинома, и в соответствии с обобщенным критерием Найквиста (роль точки -1 здесь играет $(1 - \alpha)/\alpha$) их принадлежность тому же классу (n, k) -эквивалентности равносильна тому, что полиномы $M(s)$, $N(s)$ из класса

(n, k) -эквивалентности, а годограф $G(j\omega) = M(j\omega)/N(j\omega)$ не пересекает отрицательной вещественной полуоси (см. теорему 3.1).

Однако, если l велико, то число таких проверок значительно (нужно проверить $l \cdot 2^{l-1}$ реберных полиномов). Другой способ, основанный на более конструктивном описании множества $S(\omega)$, используется при исследовании робастной устойчивости дискретных полиномов (глава 2, п. 2.4).

Пусть аффинное семейство (3.12) строится на базе полиномов $F_i(s)$ с комплексными коэффициентами, а множеством их параметров является множество Q , $Q \in R^l$. Тогда имеет место обобщение теоремы 3.6 с почти той же формулировкой, если добавить, что все $F_i(s)$ – полиномы с комплексными коэффициентами. Кроме того, в условиях (3.17 – 3.18) надо рассматривать частоты ω_0 и ω из $(-\infty; +\infty)$. Для доказательства этого можно использовать обобщение принципа исключения нуля или обобщение критерия Михайлова для семейств полиномов с комплексными коэффициентами.

Построение критериев принадлежности аффинных семейств полиномов с комплексными параметрами $q = (q_1, q_2, \dots, q_l)^T$, $q \in Q$, $Q \in C^l$ какому-то классу (n, k) -эквивалентности является не простым делом даже в простейшем случае – при исследовании робастной устойчивости такого семейства ($k = 0$). Дело в том, что граница соответствующего множества $S(\omega)$, как правило, состоит из кусков кривых и множество $S(\omega)$ может быть невыпуклым.

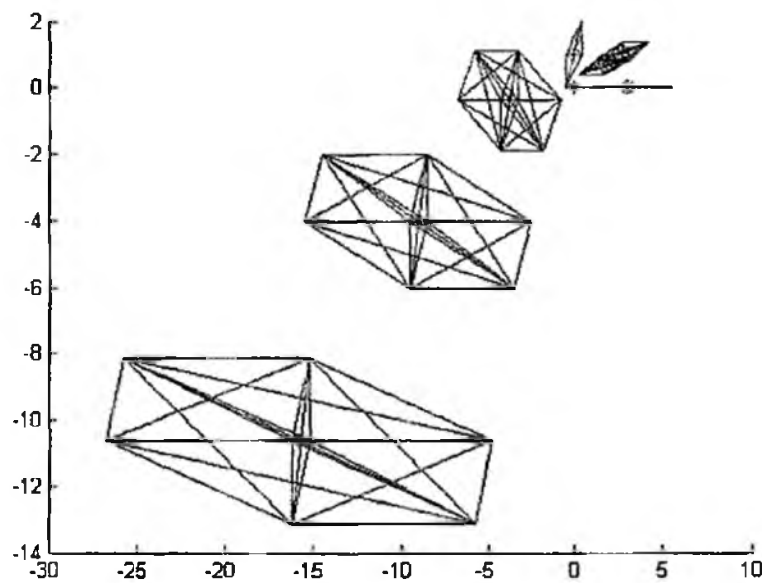


Рисунок 3.1 – Множества $S(\omega)$ для аффинных семейств полиномов при различных значениях ω (форма, ребра, угловые точки).

Выше рассматривались семейства полиномов с линейно входящими неопределенными параметрами, которые изменялись в кубе (параллелепипеде). Перейдем теперь к исследованию сферических семейств. Проверку принадлежности классам (n, k) -эквивалентности таких семейств полиномов и, в частности, робастной устойчивости и определение радиуса устойчивости или неустойчивости (k - радиус) можно сделать с помощью графических критериев, которые являются обобщением критерия Цыпкина-Поляка [78] для исследования робастной неустойчивости. Сферические ограничения есть частный случай эллиптических ограничений. Поэтому рассмотрим эллиптические ограничения:

$$\tilde{F}(s) = F(s) = \left\{ a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n, \sum_{i=0}^n \frac{(a_i - a_i^0)^2}{\alpha_i^2} \leq \gamma^2 \right\} \quad (3.19)$$

где a_i^0 — коэффициенты номинального полинома $F_0(s)$, $\alpha_i \geq 0$ — масштабы изменения коэффициентов a_i (при $\alpha_i \equiv 1$ ограничения переходят в сферические, $i = \overline{0, n}$, при $\alpha_i = 0$ считаем соответствующую полуось эллипса нулевой), причем $\alpha_0, \alpha_1 > 0$, а $\gamma > 0$ — размах неопределенности. Введем следующие функции:

$$F_0(j\omega) = h_0(\omega) + j\omega g_0(\omega);$$

$$g_0(\omega) = a_0^0 - a_2^0 \omega^2 + a_4^0 \omega^4 - \dots, \quad h_0(\omega) = a_1^0 - a_3^0 \omega^2 + a_5^0 \omega^4 - \dots,$$

$$R(\omega) = (\alpha_0^2 + \alpha_2^2 \omega^4 + \alpha_4^2 \omega^8 + \dots)^{1/2}, \quad T(\omega) = (\alpha_1^2 + \alpha_3^2 \omega^4 + \alpha_5^2 \omega^8 + \dots)^{1/2}$$

и построим номинальный нормированный годограф

$$Z(\omega) = x(\omega) + iy(\omega), \quad 0 \leq \omega < \infty,$$

$$x(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)}, \quad y(\omega) = \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)}, \quad (3.20)$$

Нормированный номинальный годограф для интервального семейства (см. главу 2) и (3.20) различны из-за разной нормировки.

Теорема 3.7. [26] Для принадлежности классу (n, k) — эквивалентности семейства $\tilde{F}(s)$ из (3.19) необходимо и достаточно, чтобы $a_0^0 > \gamma \alpha_0$, $a_n^0 > \gamma \alpha_n$ и годограф $Z(\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ проходил через $n - 2k$ квадрантов против часовой стрелки и не пересекал круга радиуса γ с центром в нуле.

Доказательство этой теоремы основано на обобщенном принципе исключения нуля с учетом того, что область значений множества $S(\omega)$ — эллипс, а не параллелепипед, как в графическом критерии Цыпкина — Поляка для робастной устойчивости ($k = 0$) и в его обобщении для робастной неустойчивости семейства ($k = \overline{1, n}$). Точнее,

$$S(\omega) = \left\{ (z - F_0(j\omega))^T M^{-1} (z - F_0(j\omega)) \leq \gamma^2 \right\} \quad (3.21)$$

$$M = M(\omega) = A(\omega) A^T(\omega), \quad (3.22)$$

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & -\alpha_2 \omega^2 & 0 & \alpha_4 \omega^4 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_1 \omega & 0 & -\alpha_3 \omega^3 & 0 & \alpha_5 \omega^5 & \dots \end{pmatrix}.$$

Как и выше, k - радиус устойчивости или неустойчивости эллиптического семейства $\tilde{F}(s)$ вычисляется следующим образом:

$$\gamma_{\max}^k = \min \{ \gamma^*, \gamma_0, \gamma_\infty \}, \quad (3.23)$$

где γ^* — радиус наибольшего круга, вписанного в годограф $Z(\omega)$,

$$\gamma_0 = a_0^0 / \alpha_0, \gamma_\infty = a_n^0 / \alpha_n.$$

При $k = 0$ получим известный графический критерий робастной устойчивости для такого типа описания неопределенности [78].

Радиус γ^* при эллиптических ограничениях всегда больше, чем размер γ^* квадрата, вписанного в годограф при интервальных ограничениях. Это следует из того, что ограничения на неопределенность в эллиптическом семействе более жесткие, чем в интервальном семействе и эллипсоид

$$\left\{ a = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T : \sum_{i=0}^n \frac{(a_i - a_i^0)^2}{\alpha_i^2} \leq \gamma^2 \right\} \quad (3.24)$$

содержится в параллелепипеде

$$\left\{ a = (a_0, a_1, \dots, a_n)^T : |a_i - a_i^0| \leq \gamma \alpha_i, i = \overline{0, n} \right\} \quad (3.25)$$

Следует заметить, что для сферических семейств не существует аналогов теоремы Харитонова или его обобщений на неустойчивые интервальные полиномы: робастное поведение такого семейства не определяется принадлежностью классам (n, k) -эквивалентности конечного числа элементов семейства полиномов.

Ограничения на масштабные множители α_0, α_1 в теореме 3.7 удается снять за счет непрерывности и ограниченности $Z(\omega)$, что позволяет обобщить эту теорему на произвольный эллипсоид коэффициентов. Кроме того, можно построить подобные графические критерии для семейства полиномов с описанием неопределенности комплексных коэффициентов A_i вида:

$$|A_i - A_i^0| \leq \alpha_i \gamma, \quad (3.26)$$

$$\sum_{i=0}^n \frac{|A_i - A_i^0|^2}{\alpha_i^2} \leq \gamma^2, \quad (3.27)$$

$$A_i, A_i^0 \in C, i = \overline{0, n}.$$

Рассмотрим пример робастного поведения семейства полиномов, мультилинейно зависящих от параметров:

$$F(s, T, k) = (1 + T_1 s) \dots (1 + T_l s) + k_1 \dots k_l \quad (3.28)$$

при

$$Q = \{T, k \in R^l : \underline{T}_i \leq T_i \leq \overline{T}_i, \underline{k}_i \leq k_i \leq \overline{k}_i, i = \overline{1, l}\}. \quad (3.29)$$

Эта задача значительно сложнее, чем рассмотренные выше. Так, область $S(\omega)$ оказывается, вообще говоря, невыпуклой, а ее границы порождены не только ребрами Q . Они могут быть криволинейными. В некоторых частных случаях задачу можно упростить. Например, если интервалы неопределенности для T_i не перекрываются, т.е.

$$\underline{T}_1 < \overline{T}_1 < \underline{T}_2 < \overline{T}_2 < \dots < \underline{T}_m < \overline{T}_m \quad (3.30)$$

то $S(\omega)$ — многоугольник с $2l$ ребрами, допускающими явное описание. Поэтому задача робастной устойчивости или неустойчивости в этом случае может быть конструктивно решена.

Таким образом, можно сделать вывод, что различные типы неопределенности и различные виды ограничений на неопределенные параметры полиномов приводят к большому разнообразию форм областей их значений. Однако многие задачи могут решаться единообразно на основе обобщенного принципа исключения нуля и применения графических критериев устойчивости таких, как критерии Михайлова и Найквиста и их обобщения на классы (n, k) -эквивалентности, которые построены выше. Однако существует много задач, где описания неопределенности в коэффициентах таковы, что множество $S(\omega)$ построить аналитически не удастся и остается только вероятностный подход к исследованию робастного поведения семейств полиномов, который обсуждается ниже в п. 3.5.

Разработаны подходы [63] для исследования робастного поведения интервального семейства дискретных полиномов на основе принципа исключения нуля и его обобщения для исследования робастной неустойчивости, т.е. для проверки интервального дискретного

семейства полиномов на принадлежность классу (n, k) – эквивалентности. При $k = 0$ получим робастно устойчивое семейство, а при $k = \overline{1, n}$ – робастно неустойчивое.

Эта методика вполне пригодна и для других семейств полиномов, если удаётся построить множество значений годографов $S(\omega)$ для всех параметров $q \in Q$, $Q \subset R^l$.

Например, для интервального семейства дискретных полиномов n -го порядка $S(\omega)$ – это многоугольник с $2n + 2$ рёбрами, который, начинаясь с отрезка при $\omega = 0$, трансформируется при $\omega > 0$ в многоугольники с числом сторон от 2 до $2n + 2$ и «поворачивается» при изменении ω . Теорема Харитонова и её обобщения здесь не работают. Остаётся строить $S(\omega)$ и выводить формулы для вычисления радиуса устойчивости или k -радиуса неустойчивости. Конечно, можно использовать и вероятностный подход, в частности метод Монте-Карло.

Однако, для аффинного семейства дискретных полиномов верны рёберная теорема для исследования робастной устойчивости и её обобщение для исследования неустойчивости в соответствующих формулировках. Кроме того, максимальный размах неопределённости принадлежности аффинного семейства дискретных полиномов классу (n, k) – эквивалентности можно найти не только графически, но и вывести формулы, аналогичные формулам для интервальных дискретных семейств (см. п. 2.4. множество $S(\omega)$ для аффинного семейства является $2l$ -угольником, где множество параметров $q \in Q$, $Q \subset R^l$).

Таким образом, как и в случае исследования на робастную устойчивость семейств полиномов, так и в случае проверки на робастную неустойчивость различные структуры неопределённости и различные ограничения на параметры приводят к большому разнообразию множества значений годографов $S(\omega)$ и их можно исследовать с помощью аналитических и графических критериев и вероятностного подхода, как в непрерывном, так и в дискретном случаях.

3.3 Исследование робастного поведения семейств полиномов методом допустимых линейных преобразований

В этой части главы рассматривается развитие и обобщение преобразований Неймарка [71] на классы (n, k) –эквивалентности.

Определение 3.4 Любое линейное преобразование $B=DA$, коэффициентов полинома из класса (n, k) –эквивалентности

$$f(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n, \quad (3.31)$$

оставляющее его полиномом того же класса

$$F(s) = b_0 + b_1 s + \dots + b_n s^n \quad (3.32)$$

будем называть допустимым линейным преобразованием. Здесь: $A, B \in R^n$, $A = (a_0, \dots, a_n)^T$, $B = (b_0, \dots, b_n)^T$, D — матрица из $R^{n \times n}$.

Теорема 3.8. Линейные преобразования коэффициентов полинома

$$b_i = \alpha a_i, b_i = \alpha^i a_i, i = 0, 1, \dots, n, \quad (3.33)$$

где $\alpha > 0$ — произвольное положительное число, являются допустимыми линейными преобразованиями.

Это вытекает из того, что если k корней полинома $f(s)$ лежат в правой полуплоскости $\text{Re } s > 0$, а $n-k$ — в левой $\text{Re } s < 0$ то корни полиномов $F(s) = \alpha f(s)$ и $F(s) = f(\alpha s)$ при произвольном положительном числе $\alpha > 0$ также лежат в этих полуплоскостях комплексного переменного в указанном числе с учетом кратностей. Если же $\alpha < 0$ или α комплексное, то второе преобразование в (3.33) уже не является допустимым, т.к. корни нового полинома поворачиваются и могут поменять свою локализацию относительно мнимой оси.

Теорема 3.9 Линейные преобразования коэффициентов полинома из класса (n, k) –эквивалентности

$$b_{2i} = \alpha a_{2i}, b_{2i+1} = \beta a_{2i+1}, \quad (3.34)$$

$$(i = \overline{0, l} \text{ при } n = 2l + 1; i = \overline{0, l-1} \text{ при } n = 2l \text{ и } a_{2l+1} = b_{2l+1} = 0),$$

где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ произвольные положительные числа, являются допустимыми линейными преобразованиями.

Действительно, это преобразование оставляет годограф нового полинома в том же квадранте, что и годограф полинома до преобразования.

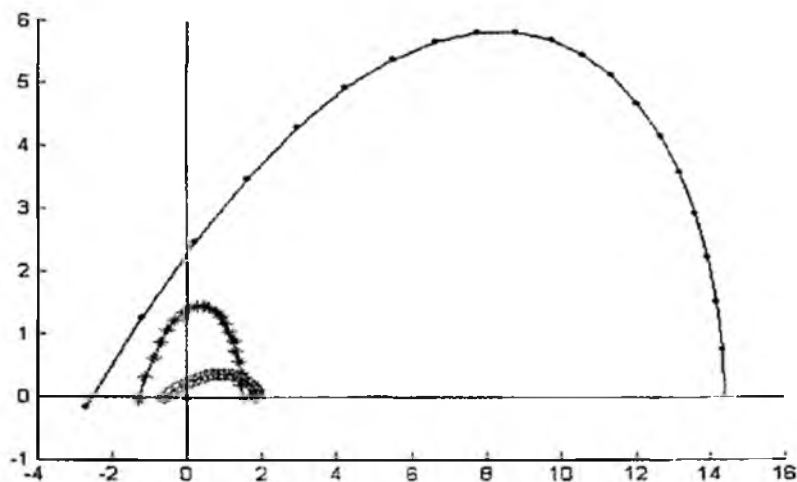


Рис. 3.2. Годографы в окрестности нуля. Звездочки – годограф исходного полинома, точки и кружки – годографы полинома после применения преобразования (3.33) с различными коэффициентами

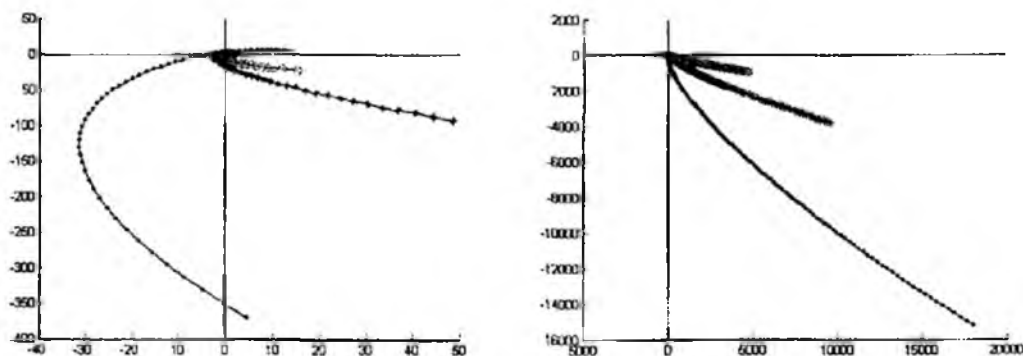


Рис. 3.3. Годографы в 3-м и 4-м квадрантах. Звездочки – годограф исходного полинома, точки и кружки – годографы полинома после применения преобразования (3.33) с различными коэффициентами

Теорема 3.10. Линейные преобразования коэффициентов полинома из класса (n, k) – эквивалентности

$$b_{2i} = \alpha a_{2i} + \gamma a_{2i+1}, b_{2i+1} = \beta a_{2i+1} \quad (3.35)$$

где $a_{n+1} = 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ и $\beta > 0$, являются допустимыми линейными преобразованиями, если $a_0 b_0 > 0$.

Теоремы 3.9-3.10 можно доказать с помощью Критериев Рауса-Гурвица, Михайлова и Эрмита-Биллера в случае устойчивости полинома ($k=0$). Заметим, что условие $a_0 b_0 > 0$ в этом случае проверять не надо [45]. Однако, для общего случая $k > 0$ это удастся сделать только применив подход Михайлова.

Наметим ход доказательства теоремы 3.9, так как в силу прозрачности метода приводить его полностью нет нужды. Действительно, обозначим годограф $f(j\omega)$ полинома $f(s)$ в виде $f(j\omega) = g(\omega) + jh(\omega)$, $0 \leq \omega < \infty$.

Тогда годограф $F(j\omega)$ полинома $F(s)$ после преобразования имеет вид:

$$F(j\omega) = \alpha g(\omega) + j\beta h(\omega), \text{ где}$$

$$\begin{aligned} g(\omega) &= a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 - a_6 \omega^6 + \dots \\ h(\omega) &= a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 - a_7 \omega^7 + \dots \end{aligned}$$

Отсюда, легко видеть, что оба годографа находятся при изменении ω от 0 до $+\infty$ в одних и тех же квадрантах. Кроме того, величины

$$\begin{aligned} f(0) &= g(0) + jh(0) = g(0) = a_0, \\ F(0) &= \alpha g(0) + j\beta h(0) = \alpha g(0) = \alpha a_0 \end{aligned}$$

являются ненулевыми и имеют значения одного знака, т.е. лежат на вещественной полуоси и имеют один знак. Далее, если при $\omega \rightarrow +\infty$ годограф $f(j\omega)$ «прилипает» к мнимой оси при $\omega \rightarrow +\infty$, т.е. $\frac{g(\omega)}{h(\omega)} \rightarrow 0$, то и годограф $F(j\omega)$ ведет себя также, оставаясь в одном квадранте с $f(j\omega)$.

Аналогично, если при $\omega \rightarrow +\infty$ годограф $f(j\omega)$ «прилипает» к вещественной оси, т.е. $\frac{h(\omega)}{g(\omega)} \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow +\infty$, то и годограф $F(j\omega)$ ведет себя также, оставаясь в одном квадранте с $f(j\omega)$. Таким образом, по критерию Михайлова

$$\Delta \arg f(j\omega) = \arg f(+\infty) - \arg f(0) = \frac{\pi}{2}(n-2k),$$

$0 \leq \omega < \infty$

$$\Delta \arg F(j\omega) = \arg F(+\infty) - \arg F(0) = \frac{\pi}{2}(n-2k).$$

$0 \leq \omega < \infty$

Отсюда, прохождение годографами одних и тех же квадрантов и совпадение значений аргументов при $\omega = 0$, $\omega = +\infty$ по критерию Михайлова доказывает теорему 3.9.

Доказательство теоремы 3.10 не является полной аналогией цепочки доказательства теоремы 3.9. Здесь нет полного совпадения положения годографов $f(j\omega)$ и $F(j\omega)$ в одном квадранте. Однако, имеется совпадение полуплоскостей локализации обоих годографов $f(j\omega)$ и $F(j\omega)$, и совпадение аргументов при $\omega = 0$ и $\omega = +\infty$.

Действительно, рассмотрим годографы:

$$f(j\omega) = g(\omega) + jh(\omega), F(j\omega) = \alpha g(\omega) + \frac{\gamma}{\omega} h(\omega) + j\beta h(\omega).$$

Пусть $\omega = 0$ ($\gamma h(\omega)/\omega$ запишем как $a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \dots$) получим значения годографа $f(0) = g(0) + jh(0) = g(0) = a_0$, $F(0) = (\alpha a_0 + \gamma a_1)$.

Условие $a_0 b_0 > 0$ гарантирует, что $f(0)$ и $F(0)$ одного знака.

При $\omega \rightarrow +\infty$ и $n = 2l + 1$ годографы ведут себя следующим образом:

$$f(j\omega) = g(\omega) + jh(\omega), g(\omega)/h(\omega) \rightarrow 0;$$

$$F(j\omega) = h(\omega)(\alpha g(\omega)/h(\omega) + \gamma/\omega) + j\beta h(\omega) = \overline{o}(h(\omega)) + j\beta h(\omega),$$

т.е. $(\alpha g(\omega) + \gamma h(\omega)/\omega)/h(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow +\infty$.

Оба годографа «прижимаются» к мнимой полуоси знака $h(\omega)$ или a_n при $\omega \rightarrow +\infty$.

При $n = 2l$ годографы при $\omega \rightarrow +\infty$ «прижимаются» к вещественной полуоси знака $g(\omega)$ или a_n , т.к.

$$f(j\omega) = g(\omega) + jh(\omega) \text{ и } h(\omega)/g(\omega) \rightarrow 0;$$

$$F(j\omega) = \alpha g(\omega) + j\beta h(\omega) + \frac{\gamma h(\omega)}{\omega} \text{ и } \frac{\omega \beta h(\omega)}{\alpha \omega g(\omega) + \gamma h(\omega)} \rightarrow 0, \omega \rightarrow +\infty,$$

так как степень числителя меньше степени знаменателя. При $n = 2l + 1$ оба годографа проходят одинаковое число полуплоскостей ($h(\omega)$ и $\beta h(\omega)$ одного знака). Формула

приращений Михайлова $\frac{\pi}{2}(n - 2k)$ дает $l - k$ полуплоскостей и один квадрант. Для

$n = 2l$ число таких полуплоскостей равно $l - k$. В первом случае при $\omega \rightarrow +\infty$

годографы «прижимаются» к мнимой полуоси одного знака, а во втором случае к вещественной полуоси одного знака.

Этим закончим обсуждение схемы доказательств теорем 3.9–3.10.

Когда $k=0$, т.е. полиномы $f(s)$ и $F(s)$ – полиномы Гурвица (с положительными коэффициентами по теореме Стодолы) схема доказательства общего случая за счет монотонности годографов и отсутствия особых случаев сильно упрощается.

Сформулируем еще два утверждения без доказательства.

Теорема 3.11. Если полином из класса (n, k) –эквивалентности имеет нечетную степень $n=2l+1$, то линейные преобразования его коэффициентов

$$b_{2i} = \alpha a_{2i}, b_{2i+1} = \beta a_{2i+1} + \gamma a_{2i} \quad (3.36)$$

$i = \overline{0, l}$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ и $\beta > 0$ произвольные положительные числа, являются допустимыми линейными преобразованиями.

Теорема 3.12. Если полином из класса (n, k) –эквивалентности имеет четную степень $n=2l$, то линейные преобразования его коэффициентов

$$b_{2i} = \alpha a_{2i} + \gamma a_{2i-1}, i = \overline{0, l}, a_{-1} = 0, b_{2i+1} = \beta a_{2i+1}, i = \overline{0, l-1}, \quad (3.37)$$

где $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ и $\beta > 0$ произвольные положительные числа, являются допустимыми линейными преобразованиями.

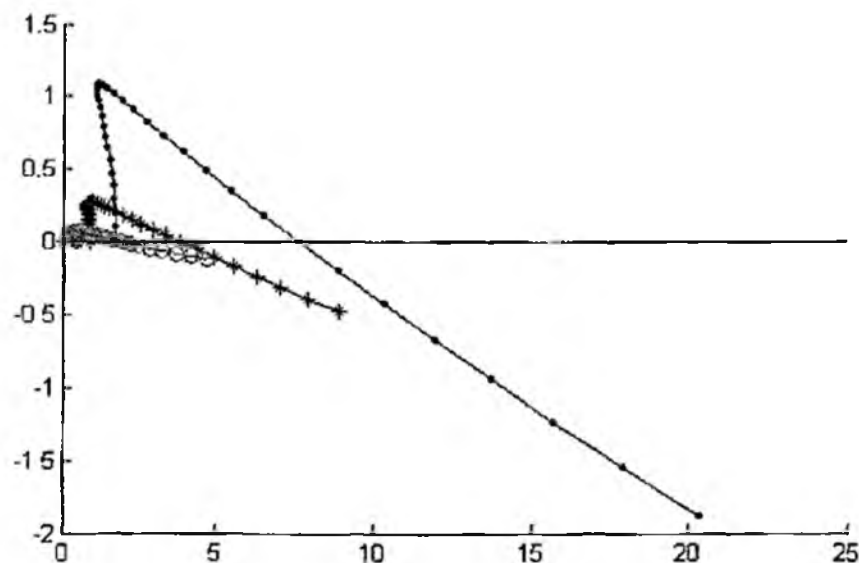


Рис. 3.4 Годографы неустойчивых полиномов в окрестности нуля. Звездочки – годограф исходного полинома, точки и кружки – годографы полинома после применения преобразования (3.36) с различными коэффициентами

Рассмотрим теперь случай, когда коэффициенты характеристического полинома системы зависят от технических параметров изучаемой многокомпонентной системы или технологического процесса, т.е. $a_i = a_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Обычно допустимые технические параметры системы или процесса принадлежат некоторому m -мерному параллелепипеду:

$$V = (\underline{\alpha}_1 < \alpha_1 < \overline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_m < \alpha_m < \overline{\alpha}_m), \quad (3.38)$$

который порождает некоторое n -мерное множество Ω коэффициентов характеристического полинома $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T \in \Omega$, где $a_i = a_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ (для простоты, $a_n = 1$).

Как известно, задача исследования робастной устойчивости или неустойчивости заключается в выяснении тех областей технических параметров изучаемой системы, которые соответствуют заданному типу устойчивости или неустойчивости системы, а точнее, областям расположения корней характеристического полинома на комплексной плоскости. Считается [50], что понятие динамической безопасности по отношению к изучаемому явлению заключается в асимптотической устойчивости стационарного или расчетного режима при любых значениях допустимых параметров, принадлежащих множеству (3.38), в случае же неустойчивости понятие динамической безопасности заключается в знании качественной картины распределения корней полиномов при любых наборах коэффициентов их множества Ω .

Таким образом, исследование динамической безопасности изучаемого процесса является одной из частных задач робастного поведения систем. Ниже, на основе теоремы Харитонова, её обобщения на неустойчивый «ящик» полиномов и разработанного выше метода допустимых линейных преобразований коэффициентов показано, что для некоторых линейных преобразований коэффициентов интервальных полиномов из класса (n, k) -эквивалентности удастся сохранить преобразованные полиномы интервальными полиномами из того же класса эквивалентности. Однако, в общем случае, при преобразованиях такого рода интервальные полиномы из класса (n, k) -эквивалентности, переходя в выпуклые множества полиномов из класса (n, k) -эквивалентности, могут терять некоторые свойства интервальности, например, угловые полиномы не переходят в угловые полиномы. Этими преобразованиями удастся расширить множество всех значений коэффициентов характеристического полинома, при которых исследуемая система

асимптотически устойчива или неустойчива. Тем самым облегчается решение общей задачи робастного поведения линейных систем управления.

Напомним обобщение теоремы Харитонова для интервального полинома с вещественными коэффициентами в простейшем варианте о том, что интервальный полином

$$F(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n, \quad \underline{a_i} \leq a_i \leq \overline{a_i}, \quad i = \overline{0, n-1} \quad (3.39)$$

принадлежит классу (n, k) -эквивалентности, тогда и только тогда, когда линейные политопы, соответствующие четырем сторонам прямоугольника с вершинами из угловых полиномов – все из класса (n, k) -эквивалентности.

Для семейств интервальных полиномов из класса (n, k) -эквивалентности справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.13. Пусть интервальный полином $F(s)$ принадлежит классу (n, k) -эквивалентности, и $\tilde{F}(s)$ – образ семейства полиномов $F(s)$ после преобразования множества его коэффициентов Ω в $\tilde{\Omega}$ с помощью линейных допустимых преобразований (3.33), (3.34). Тогда:

а) семейство полиномов $\tilde{F}(s)$ – тоже интервальное;

б) угловые полиномы для интервального семейства полиномов $F(s)$ и линейные политопы, соответствующие сторонам прямоугольника годографов $F(j\omega)$, $0 \leq \omega < \infty$, после указанных преобразований переходят в полиномы из семейства $\tilde{F}(s)$ с такими же свойствами.

Действительно, во-первых, угловые полиномы $\varphi_i(s), i = \overline{1, 4}$ интервального полинома $F(s)$ при допустимых линейных преобразованиях (3.33 – 3.34) их коэффициентов остаются полиномами того же класса (n, k) -эквивалентности и переходят в угловые полиномы преобразованного интервального полинома. Во-вторых, линейные политопы $\alpha \varphi_i(s) + (1 - \alpha) \varphi_j(s), i \neq j, i, j = \overline{1, 4}, 0 \leq \alpha \leq 1$, соответствующие сторонам прямоугольника, переходят при этих линейных преобразованиях в линейные политопы из этого же класса (n, k) -эквивалентности. Кроме того, очевидно интервалы коэффициентов переходят в интервалы после таких

преобразований: $\underline{\alpha a_i} \leq \alpha a_i \leq \overline{\alpha a_i}$, $\underline{\alpha^i a_i} \leq \alpha^i a_i \leq \overline{\alpha^i a_i}$. Поэтому, интервальный полином $F(s)$ переходит в интервальный $\tilde{F}(s)$ и интервальный полином, полученный после этих преобразований остается в классе (n, k) – эквивалентности (см. рис. 3.5).

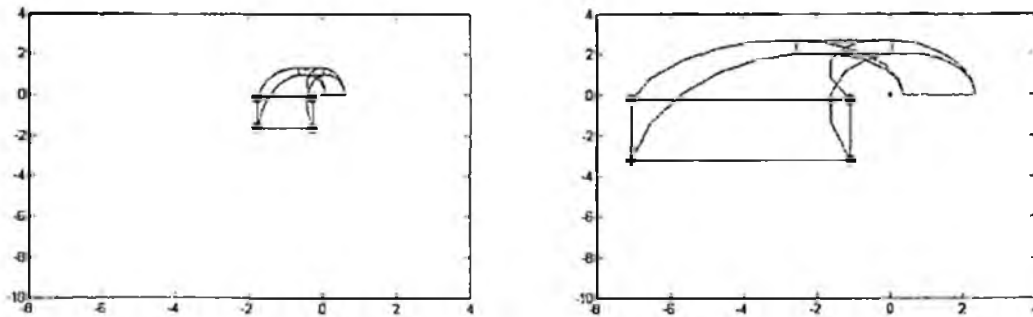


Рис. 3.5. Годографы в окрестности нуля. Годограф исходного интервального семейства полиномов – слева, годограф интервального семейства полиномов после применения преобразования (5)

Таким образом, в теореме 3.13 достаточно требовать принадлежности линейных политопов классу (n, k) – эквивалентности, и интервальный полином $\tilde{F}(s)$ при указанных линейных преобразованиях остается интервальным полиномом из класса (n, k) – эквивалентности.

В частности, при $k=0$ интервальный полином Гурвица переходит при этих преобразованиях в интервальный полином Гурвица.

Для интервального семейства полиномов можно сформулировать и доказать следующее утверждение.

Теорема 3.14. Пусть: а) $\tilde{A}$ – множество коэффициентов интервального семейства полиномов $F(s)$ из класса (n, k) – эквивалентности; б) D — матрица, допустимого линейного преобразования коэффициентов полинома (3.33 - 3.37). Тогда множество коэффициентов $\tilde{B} = \bigcup_{A \in \tilde{A}} DA$ образует интервальное семейство полиномов $\tilde{F}(s)$ из того

же класса, а полиномы соответствующие сторонам прямоугольника годографов переходят в полиномы с таким же свойством.

Образы угловых полиномов могут «перейти» на стороны прямоугольника и уже не быть угловыми (см. рис. 3.6).

Сформулируем полученные выше результаты в более общем виде.

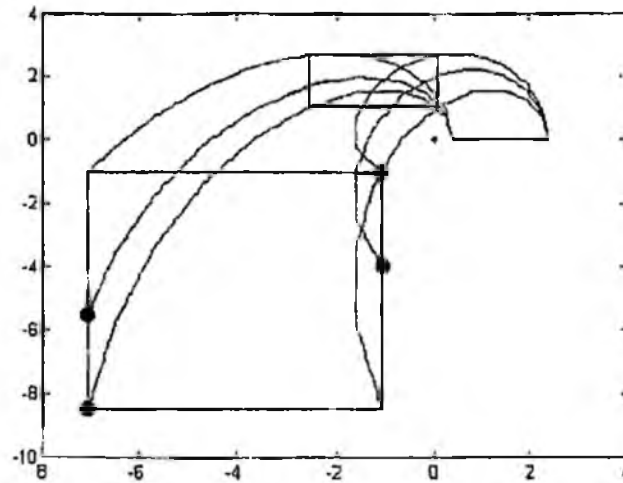


Рис. 3.6. Образ семейства годографов, полученного после преобразования (3.36) коэффициентов исходного семейства годографов интервального семейства полиномов на рис. 3.5 слева.

Теорема 3.15. [100] Пусть: а) $\tilde{A}$ — произвольное выпуклое множество коэффициентов полиномов из класса (n, k) – эквивалентности; б) D — матрица, допустимого линейного преобразования. Тогда множество коэффициентов $\tilde{B}$ преобразованных полиномов, являющихся полиномами из того же класса $\tilde{B} = \bigcup_{A \in \tilde{A}} DA$, есть выпуклое множество.

Однако образы вершинных полиномов могут не быть вершинными полиномами.

Построенные выше допустимые линейные преобразования коэффициентов полиномов из класса (n, k) – эквивалентности (3.33 – 3.38) зависят от одного, двух или трех произвольных положительных параметров. Варьирование этих параметров, позволяет получить различные выпуклые множества коэффициентов полиномов из класса (n, k) – эквивалентности.

Метод допустимых линейных преобразований коэффициентов позволяет при минимальных вычислительных затратах существенно расширить любое выпуклое множество значений коэффициентов таких семейств полиномов, включая семейства полиномов Гурвица с помощью линейных преобразований этих коэффициентов, что существенно облегчает решение как задач динамической безопасности так и задач робастной устойчивости и неустойчивости (задач робастного поведения) динамических систем по первому линейному приближению.

3.4 Робастная k -стабилизация для объектов, описанных одномерными передаточными функциями

В этой части главы, отталкиваясь от понятия робастно устойчивой стабилизации систем управления замкнутых обратной связью, введем понятие робастной (n, k) -стабилизации пары семейств полиномов $A(s, q)$, $B(s, q)$, $q \in Q$ так, чтобы с помощью пары полиномов $f(s)$ и $g(s)$ семейство полиномов

$$F(s, q) = A(s, q)f(s) + B(s, q)g(s) \quad (3.40)$$

принадлежало классу (n, k) -эквивалентности. Как следствие, при $k = 0$ получим робастную устойчивую стабилизацию объекта, описанного одномерными передаточными функциями

$$G(s, q) = \frac{A(s, q)}{B(s, q)}, \quad q \in Q$$

с помощью заданного регулятора в цепи обратной связи

$$C(s) = \frac{f(s)}{g(s)}.$$

Если $A(s, q)$, $B(s, q)$ – интервальные полиномы (Q – куб или параллелепипед в E^n), то $F(s, q)$ таким уже не является. В общем случае аналогов теоремы Харитонова и её обобщений по принадлежности семейства $F(s, q)$ классу (n, k) -эквивалентности нет. Эффективные критерии робастной (n, k) -стабилизации можно строить, учитывая, что область значений

$$S(\omega) = F(j\omega, q), \quad q \in Q$$

является восьмиугольником,

$$F(j\omega, q) = f(j\omega)A(j\omega, q) + g(j\omega)B(j\omega, q),$$

так как области значений $A(j\omega, q)$ и $B(j\omega, q)$ прямоугольники.

Если $A(s, q)$, $B(s, q)$ – аффинные семейства, то и $F(s, q)$ будет тоже аффинным семейством и в этом случае верна теорема 1 этой главы – обобщение реберной теоремы на классы (n, k) – эквивалентности в соответствующей формулировке.

Теорема 3.16. [35] Пусть $A(s, q)$, $B(s, q)$ – аффинные семейства полиномов

$$A(s, q) = P_{01}(s) + \sum_{i=1}^m q_i P_{i1}(s), \quad B(s, q) = P_{02}(s) + \sum_{i=1}^m q_i P_{i2}(s), \quad (3.41)$$

где $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)^T$, $q \in Q$, $Q \in R^m$, $|q_i| \leq \gamma$, $i = \overline{1, m}$.

Кроме того, пусть $\deg F_i(s) \leq \deg F_0(s)$, $i = \overline{1, m}$;

$$\gamma \sum_{i=1}^m |a_n^i| < |a_n^0|, \quad \gamma \sum_{i=1}^m |a_0^i| < |a_0^0|, \quad (3.42)$$

где a_i^l , $i = \overline{1, m}$ – коэффициенты при s^l полиномов $F_i(s)$,

$$\begin{aligned} F_i(s) &= q_i (P_{i1}(s) + P_{i2}(s)), \quad i = \overline{1, m}; \\ F_0(s) &= P_{01}(s) f(s) + P_{02}(s) g(s) \end{aligned} \quad (3.43)$$

с коэффициентами a_l^0 , $l = \overline{0, \tau}$, $\tau = \deg F_0(s)$. Далее пусть полином $F_0(s)$ принадлежит классу (n, k) – эквивалентности.

Тогда для принадлежности аффинного семейства

$$F(s, q) = F_0(s) + \sum_{i=1}^m q_i F_i(s) = A(s, q) f(s) + B(s, q) g(s) \quad (3.44)$$

классу (n, k) – эквивалентности (для стабилизации пары семейств $A(s, q)$ и $B(s, q)$ с помощью полиномов $f(s)$ и $g(s)$) необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий:

либо все рёберные полиномы, т.е. $F_\eta(s, q) = F(s, q)$ при $|q_i| = \gamma$, $i = \overline{1, m}$, $i \neq \eta$, $|q_\eta| \leq \gamma$, находятся в классе (n, k) – эквивалентности;

либо для любой пары вершинных полиномов $F_i(s)$, $F_l(s)$, являющихся концами рёберного полинома их годографов:

$$F_i(j\omega) = g_i(\omega) + jh_i(\omega), F_l(j\omega) = g_l(\omega) + jh_l(\omega),$$

если $\omega = \omega_0$ вещественный корень уравнения

$$g_i(\omega)h_l(\omega) - g_l(\omega)h_i(\omega) = 0, \quad (3.45)$$

то при $\omega = \omega_0$ выполняется неравенство

$$g_i(\omega)g_l(\omega) + h_i(\omega)h_l(\omega) > 0, i \neq l, i, l = \overline{1, m}. \quad (3.46)$$

Справедливость этой теоремы прямо вытекает из теоремы 3.6 этой главы. Обобщение на полиномы с комплексными коэффициентами формулируется по аналогии, но имеет больше теоретический интерес и поэтому здесь не приводится. Очевидно, при $k = 0$ получим случай робастно устойчивой стабилизации пары семейств полиномов.

В случае непараметрической неопределенности одномерных передаточных функций для открытой системы замкнутой единичной обратной связью доказан критерий робастной (n, k) -стабилизации который, при $k = 0$ дает робастный критерий Найквиста.

Пусть открытая система описывается семейством скалярных передаточных функций,

$$H(s) = H_0(s) + \Delta(s), |\Delta(j\omega)| \leq \nu |W(j\omega)|; \quad (3.47)$$

где $\Delta(s)$ - частотная неопределенность, $\omega \in [0; +\infty)$, функции $W(s)$ и $W^{-1}(s) \in RH_\infty$. Где RH_∞ - пространство дробно-рациональных функций, т.е.

функций вида $W(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$, где $A(s)$ - полином, $B(s)$ - полином Гурвица,

$\deg A(s) \leq \deg B(s)$, $\deg B(s) = n$ Очевидно, выполняется условие

$$\|W^{-1}(s)\Delta(s)\|_\infty \leq \nu. \quad (3.48)$$

Напомним, что H_∞ - норма функции $H(s)$ аналитической в $\text{Re } s \geq 0$ равна:

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{\text{Re}(s) \geq 0} \|H(s)\|_2 = \sup_{-\infty < \omega < \infty} \|H(j\omega)\|_2$$

При отсутствии неопределенности для такой системы, замкнутой единичной обратной связью, вопрос об устойчивости решается с помощью годографа Найквиста. Если же имеется неопределенность описанного выше типа, задача исследования на робастную

устойчивость замкнутой системы решается с помощью робастного аналога критерия Найквиста.

Здесь предлагается ставить задачу шире, т.е. исследовать вопрос о робастной (n, k) -стабилизации.

Теорема 3.17. Пусть неопределенности $\Delta(s)$ удовлетворяют неравенству (72), т.е.

$$|\Delta(j\omega)| \leq \nu |W(j\omega)|$$

и все передаточные функции $H(s) = H_0(s) + \Delta(s)$ имеют одинаковое число m неустойчивых полюсов при всех допустимых $\Delta(s)$. Замкнутая система робастно (n, k) -стабилизируема (сс характеристические полиномы принадлежат классу (n, k) -эквивалентности) тогда и только тогда, когда годограф

$$\tilde{H}(j\omega) = \frac{H_0(j\omega) + 1}{|W(j\omega)|} - 1, 0 \leq \omega < \infty, \quad (3.49)$$

Охватывает круг с центром в точке -1 и радиусом ν ровно $\frac{m-k}{2}$ раз против часовой стрелки, не персекая его.

В аналитической форме этот графический критерий можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.18. Если номинальная замкнутая система с передаточной функцией $H_0(s)$ разомкнутой цепи имеет характеристический полином из класса (n, k) -эквивалентности, то семейство открытых систем с передаточной функцией $H(s) = H_0(s) + \Delta(s)$ робастно (n, k) -стабилизируема тогда и только тогда, когда

$$|H_0(j\omega) + 1| > \nu |W(j\omega)|, \omega \in [0; +\infty), \text{ или } \|W^{-1}(s)(H_0(s) + 1)\|_{\infty} > \nu.$$

Ясно, что при $k = 0$ имеем робастно устойчивую стабилизацию семейства открытых систем замкнутых единичной обратной связью.

3.5 Вероятностный подход к исследованию робастного поведения семейств полиномов

В этой части главы рассмотрим вероятностный подход к общей задаче исследования принадлежности классам (n, k) – эквивалентности семейств полиномов. Проведен анализ метода Монте-Карло (ММК) для построения множеств $S(\omega)$ годографов и исследования их геометрических свойств. Для некоторых законов распределения построены аппроксимации точных критериев принадлежности семейств полиномов классам (n, k) – эквивалентности. Как следствие при $k = 0$ получаются соответствующие вероятностные критерии робастной устойчивости семейств полиномов.

В инженерной практике часто требуется и возможен не детерминированный, минимаксный, а вероятностный подход к робастности. Здесь рассмотрим только задачи с параметрической неопределенностью для семейств полиномов $F(s, q)$ зависящие от параметров q , $q \in Q$, $Q \in R^l$, и на этом множестве задана вероятностная мера. Пусть задана плотность вероятности $p(q)$, $q \in Q$. Если эта плотность не задана по смыслу задачи, то для ограниченного множества Q естественно брать равномерную плотность на Q .

Во многих случаях простейший путь оценки вероятности принадлежности классам (n, k) – эквивалентности семейств полиномов, т.е. устойчивость $k = 0$ и неустойчивость $(k = 1, n)$ при заданной плотности $p(q)$ заключается в применении метода Монте-Карло. Именно, генерируется выборка $q^1, \dots, q^N$ независимых случайных величин, имеющих плотность $p(q)$. Для них вычисляется полином $F(s, q^1), \dots, F(s, q^N)$ и с помощью предложенных в работе критериев, либо путем прямого вычисления корней проверяется их устойчивость или неустойчивость. Пусть число полиномов из класса (n, k) – эквивалентности оказалось равным L , $L \leq N$; если L близко к N , то, скорее всего, вероятность принадлежности семейства полиномов к этому классу высока. Чтобы формализовать такой подход, надо строго решать каждую из задач:

генерация выборки $q^1, \dots, q^N$;

оценка вероятности по частоте $\frac{L}{N}$.

Рассмотрим обе эти задачи более подробно.

Если Q - куб,

$$Q = \{q \in R^l : 0 \leq q_i \leq 1, i = 1, \dots, l\},$$

то равномерное распределение генерируется стандартно. Например, в программном пакете Matlab достаточно сгенерировать вектор q , компоненты которого распределены по равномерному закону, одним оператором $q = rand(l, 1)$.

Если Q - параллелепипед

$$\{ |q_i - q_i^0| \leq r_i, i = 1, \dots, l \},$$

то нужно добавить к этому масштабирование и сдвиг вектора q , что также легко сделать в Matlab: $q = rand(l, 1) * a + b$.

Если Q - шар,

$$Q = \{q \in R^l : \|q\|_2 \leq 1\},$$

то равномерно распределенные в Q случайные величины можно генерировать так:

$$q = \xi^{1/l} \frac{\eta}{\|\eta\|},$$

где $\eta \in R^l$ - нормально распределенный вектор с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, а ξ - равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина, независимая от η . В Matlab это делается двумя командами: $\eta = randn(l, 1)$, $q = rand(l, 1) ^ (1 / l) * \eta / norm(\eta)$.

Рассмотрим оценку вероятности по частоте.

Пусть задана последовательность бернуллиевских случайных величин ξ_i , $i = 1, \dots, N$ (т.е. ξ_i взаимно независимы, $\xi_i = 1$ с вероятностью p , $\xi_i = 0$ с вероятностью $1 - p$) и $M_N = \sum_{i=1}^N \xi_i$. Тогда удобная оценка p по частоте

$$\tilde{p}_N = \frac{M}{N} \text{ задается границами Чернова}$$

$$\Pr ob \{ p \geq \tilde{p}_N - \varepsilon \} \geq 1 - e^{-2\varepsilon^2 N},$$

$$\Pr ob \{ |p - \tilde{p}_N| \geq \varepsilon \} \leq 1 - 2e^{-2\varepsilon^2 N}.$$

Используя этот результат к проблеме робастного поведения семейств полиномов, получаем следующий способ оценки вероятности принадлежности классу (n, k) -эквивалентности. Пусть $F(s, q)$, $q \in Q$ - семейство полиномов, зависящее от векторного параметра

$$q \in Q \subset R^l; q_i, i = 1, \dots, N,$$

- равномерно распределенная на Q выборка, L - количество полиномов из класса (n, k) -эквивалентности из N выборочных, p - истинная вероятность принадлежности полинома классу (n, k) -эквивалентности при $q \in Q$, т.е. $p = Vol Q_M / Vol Q$, где Q_M - область принадлежности этому классу, а $Vol(\bullet)$ означает объем (мера) множества.

Тогда выполняются две оценки:

$$\Pr ob \left\{ p \geq \frac{L}{N} - \varepsilon \right\} \geq 1 - e^{-2\varepsilon^2 N}, \Pr ob \left\{ \left| p - \frac{L}{N} \right| \geq \varepsilon \right\} \leq 1 - 2e^{-2\varepsilon^2 N}. \quad (3.50)$$

Таким образом, отношение $\frac{L}{N}$ отклоняется от p больше чем на ε , с вероятностью, не

превосходящей $e^{-2\varepsilon^2 N}$. Очевидно, если $\frac{L}{N}$ близко к единице, а N «достаточно»

велико, то с большой вероятностью можно считать, что доля параметров Q_M , при которых полиномы не принадлежат классу (n, k) -эквивалентности, в Q - мала. К сожалению, слова в кавычках для разных семейств полиномов означают разный порядок чисел.

Для критериев принадлежности семейств полиномов классам (n, k) -эквивалентности, в частности устойчивости при $k = 0$, можно построить их вероятностные аналоги (вероятностная аппроксимация точных критериев). Покажем этот подход и получающиеся при этом возможности для исследования робастного поведения семейств полиномов. Пусть аффинное семейство полиномов задается, как обычно, в виде

$$F(s, q) = F_0(s) + \sum_{i=1}^l q_i F_i(s), \quad q \in Q, \quad Q \subset R^l, \quad |q_i| \leq \gamma, \quad i = \overline{1, l} \quad (3.51)$$

Критерий принадлежности классу (n, k) -эквивалентности семейства $F(s, q)$ для всех $q \in Q$ заключается в том, что область значений

$$S(\omega) = \left\{ z \in C : z = F_0(j\omega) + \sum_{i=1}^l q_i F_i(j\omega), \quad q \in Q \right\} \quad (3.52)$$

не содержит нуля (в предположении, что $F_0(s)$ из класса (n, k) -эквивалентности). Область (напомним здесь замкнутое множество) $S(\omega)$ - многоугольник с числом сторон $2l$, и возможно его точное описание. С вероятностной точки зрения будем считать $q_i, i = \overline{1, l}$ независимыми равномерно распределенными на $[-\gamma; \gamma]$ случайными величинами.

Если число l параметров достаточно велико (иначе лучше использовать ММК), то сумма $z = a_0 + \sum_{i=1}^l a_i q_i$, $a_i = F_i(j\omega)$, ведет себя приблизительно как двумерная гауссовская случайная величина со средним a_0 и матрицей ковариации

$$W = \frac{\gamma^2}{3} \sum_{i=1}^l a_i a_i^T$$

$a_i = (\operatorname{Re} a_i; \operatorname{Im} a_i)^T$ - вектор из R^2 (здесь комплексное число a_i понимается как двумерный вектор $(\operatorname{Re} a_i; \operatorname{Im} a_i) \in R^2$). Поэтому $S(\omega)$ хорошо описывается доверительным эллипсом при не очень «маленьких» l

$$\varepsilon_\tau(\omega) = \left\{ z \in R^2 : (z - a_0)^T W^{-1} (z - a_0) \leq \tau \right\}, \quad (3.53)$$

где τ задает доверительный уровень (ясно, что размер $\varepsilon_\tau(\omega)$ зависит также от размаха γ). Другими словами, если p_τ - соответствующая доверительная вероятность, то

$$\operatorname{Prob} \{ F(j\omega) \in \varepsilon_\tau(\omega) \} \approx p_\tau \quad (3.54)$$

для данного ω .

Важно отметить, что эллипс $\varepsilon_\tau(\omega)$ почти всегда значительно меньше, чем область значений $S(\omega)$.

Далее, опираясь на вероятностный аналог принципа исключения нуля (нуль не принадлежит $\varepsilon_\tau(\omega)$ для всех ω), оценим вероятностный k - радиус принадлежности семейства классу (n, k) - эквивалентности, т.е. максимально допустимое значение:

$$\gamma_p^k = \max \{ \gamma : 0 \notin \varepsilon_\tau(\omega) \forall \omega \}. \quad (3.55)$$

Отметим, что $0 \leq \omega < \infty$ для семейства полиномов с вещественными коэффициентами и $-\infty < \omega < \infty$ с комплексными. После этого видим, что $\gamma_p^k > \gamma_{\max}^k$, где $\gamma_{\max}^k$ – «точный» (детерминированный радиус) принадлежности аффинного семейства полиномов классу (n, k) - эквивалентности.

Таким образом, если пренебрегать событиями малой вероятности, то можно значительно увеличить размах неопределенности параметров. Данный способ оценки радиуса устойчивости ($k = 0$) или неустойчивости ($k = \overline{1, n}$) – приближенный, поэтому последнюю проверку вероятности робастного поведения при выбранном γ можно провести с помощью метода Монте-Карло (см. рис. 3.7).

Для демонстрации вероятностного подхода к исследованию робастного поведения семейств полиномов выше было использовано аффинное семейство. Ясно, что в инженерной практике для аффинного семейства удобнее использовать реберную теорему или ее обобщение описанное в настоящей работе для непрерывного и дискретного случаев, причем в дискретном случае радиус неопределенности можно считать аналитически, используя подход, разработанный для интервальных полиномов [см. п. 2.4].

При малом числе параметров l , т.е. малом порядке размерности пространства R^l , $Q \in R^l$ более точные результаты дает метод Монте-Карло по сравнению с приведенной вероятностной аппроксимацией $S(\omega)$ с помощью доверительного эллипса. Вероятностный подход более всего удобен, когда множество $S(\omega)$ аналитически описать сложно или невозможно. Часто его используют для предварительных оценок и

прогнозирования тенденций робастного поведения (устойчивости или неустойчивости) по движениям годографов даже по небольшой выборке параметров q из Q .

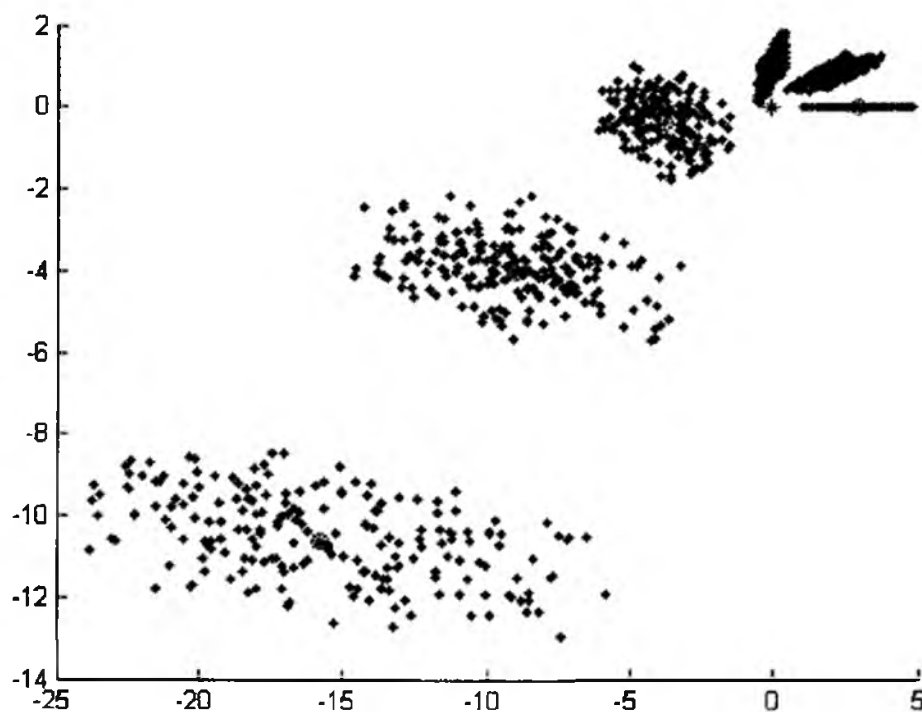


Рис. 3.7– Применение метода Монте-Карло при построении множества $S(\omega)$ аффинного семейства.

Глава 4. Анализ методов исследования робастной устойчивости и неустойчивости семейств матриц линейных систем управления.

4.1. Вспомогательные сведения, постановка проблемы и обсуждение.

Предварительно сформулируем основные определения.

Определение 4.1. Матрица $A \in C^{n \times n}$ называется:

- а) устойчивой, если весь ее спектр локализован слева от мнимой оси;
- б) устойчивой по Шуру, если ее спектр локализован внутри круга единичного радиуса.
- в) принадлежащей классу (n, k) -эквивалентности, если k чисел спектра вместе с кратностями лежат справа от мнимой оси, а $n - k$ – слева.
- г) принадлежащей классу (n, k) -эквивалентности по Шуру, если k чисел ее спектра находятся вне круга единичного радиуса, а $n - k$ – внутри этого круга.

Рассмотрим параметрические семейства матриц, такие как интервальное семейство, задаваемое в форме

$$A = (a_{ij}), \quad \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (4.1)$$

или

$$A = A_0 + \Delta, \quad \Delta = (\Delta_{ij}), \quad |\Delta_{ij}| \leq \alpha_{ij} \gamma, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad \sum_{i,j=1} \alpha_{ij} > 0, \quad \alpha_{ij} \geq 0; \quad (4.2)$$

либо аффинное семейство

$$A(q) = A_0 + \sum_{i=1}^m q_i A_i, \quad |q_i| \leq \gamma, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.3)$$

Либо матричное семейство

$$A = A_0 + \Delta, \quad \|\Delta\| \leq \gamma, \quad (4.4)$$

где матричные возмущения Δ ограничены по норме.

Определение 4.2. Семейство матриц $A \in C^{n \times n}$ называется принадлежащим классу (n, k) -эквивалентности матриц, если все его элементы (матрицы) принадлежат классу (n, k) -эквивалентности при a_{ij} из (4.1) или при всех Δ_{ij} из (3.2), или при всех $\Delta(q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ из (4.3), или при всех Δ из (3.4) из допустимого множества.

Наибольшее число $\gamma = \gamma_{\max}^k$, для которого робастное (n, k) -поведение сохраняется при всех $\gamma < \gamma_{\max}^k$, называется k -радиусом матричного семейства.

Проблемы робастной устойчивости и неустойчивости матричных семейств не решаются так же, как для соответствующих семейств полиномов. Оказывается, что положение с матрицами значительно более сложное. Например, для интервального семейства матриц нет аналогов теоремы Харитоновой и ее обобщения для классов (n, k) -эквивалентности полиномов [], а для аффинного семейства матриц неверна реберная теорема и ее обобщение на классы (n, k) -эквивалентности полиномов (глава 3). Объяснение является простым и оно заключается в том, что в характеристический полином $P(s, q) = \det(sE - A(q))$ параметры q входят не линейно (мультилинейно для интервального семейства и полиномиально для аффинного семейства), поэтому применить реберную теорему и ее обобщение не удастся. Ниже будут обсуждаться другие подходы к проблеме робастного поведения устойчивых и неустойчивых семейств матриц.

Первый из них основан на идеях теории возмущений [70]. Пусть нам известны собственные числа $\lambda_i(0)$ и собственные векторы $e_i(0)$ матрицы $A(0)$. Как они изменятся при малом возмущении $A(q)$ этой матрицы? Здесь $q \in R^m$ — векторный параметр, причем матрица $A(q)$ зависит от этого параметра дифференцируемым

образом так, что существуют и известны матрицы $D_i = \left. \frac{\partial A(q)}{\partial q_i} \right|_{q=0}$, $i = \overline{1, m}$.

Например, для аффинного семейства имеем $A(0) = A_0$, $D_i = A_i$. Имеет место известная теорема теории возмущений. Сформулируем ее для простого спектра номинальной матрицы A_0 из класса (n, k) -эквивалентности матриц.

Теорема 4.1. Пусть все собственные значения $\lambda_l(0)$ матрицы $A(0)$ различны, а X_l и Y_l — соответствующие им правые и левые собственные векторы:

$$A(0)X_l = \lambda_l(0)X_l, \quad Y_l^T A(0) = \lambda_l(0)Y_l^T, \quad \|X_l\|_F = \|Y_l\|_F = 1, \quad l = \overline{1, n}.$$

(Здесь применяется Фробениусова норма).

Тогда собственные значения матрицы $A(q)$ имеют вид

$$\lambda_l(q) = \lambda_l(0) + \sum_{i=1}^m \frac{Y_l^T D_i X_l}{Y_l^T X_l} q_i + \bar{o}(\|q\|). \quad (4.5)$$

Равенство дает оценку насколько чувствительны собственные числа матрицы $A(q)$ к изменению вектора параметров q . Пусть, например, матрица $A(0)$ из (n, k) -класса, а λ — ее собственное значение, имеющее наименьшее по реальной части расстояние до мнимой оси. Если X и Y — соответствующие правый и левый собственные векторы, а семейство матриц аффинное, то для матрицы $A(q)$ это собственное число переходит в

$$\lambda(q) \approx \lambda_l + \sum_{i=1}^m \frac{Y_l^T D_i X_l}{Y_l^T X_l} q_i + \bar{o}(\|q\|).$$

для малых по норме q , поэтому $\operatorname{Re} \lambda(q) \approx \operatorname{Re} \lambda + \sum_{i=1}^m \alpha_i q_i$, где $\alpha_i = \operatorname{Re} \frac{Y^T A_i X}{Y^T X}$, и

$\min |\operatorname{Re} \lambda(q)|$ для $|q_i| \leq \gamma$, $i = \overline{1, m}$ достигается при $q_i = \gamma \operatorname{sign} \alpha_i$ если $\operatorname{Re} \lambda < 0$ и

$q_i = -\gamma \operatorname{sign} \alpha_i$, если $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и равен приближенно $|\operatorname{Re} \lambda| - \gamma \sum_{i=1}^m |\alpha_i|$. Таким

образом, можно ожидать, что при $\gamma^* = |\operatorname{Re} \lambda| / \sum_{i=1}^m |\alpha_i|$ матрица $A(q)$ потеряет

принадлежность классу (n, k) -эквивалентности матриц ($\operatorname{Re} \lambda(q)$ станет равным

нулю). Точнее, $\gamma_k^* = \min_{1 \leq i \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_i| / \sum_{i=1}^m |\alpha_i|$ — оценка k -радиуса для $A(q)$. Такой анализ

носит частный характер и никаких точных выводов о робастном поведении семейства матриц при заданном γ таким путем сделать не удастся.

Другой подход связан с использованием достаточных условий робастной устойчивости [26]. Например, потребовать, чтобы у всего семейства матриц $A(q)$, $q \in Q$ была бы общая функция Ляпунова $V(X) = X^T P X$, $P > 0$. Известно, что существование решения матричного неравенства $A^T P + P A < 0$, $P > 0$ обеспечивает устойчивость матрицы A , тем самым существование решения системы линейных матричных неравенств

$$A^T(q)P + PA(q) < 0, \quad P > 0, \quad q \in Q, \quad (4.6)$$

гарантирует робастную устойчивость матричного семейства $A(q)$. Если $A(q)$ — аффинное семейство матриц (4.3), то неравенства (4.6) достаточно решить только для вершин множества Q . Поскольку любая точка $q \in Q$ представляется как выпуклая комбинация вершин, то из выполнения (4.6) для вершин будет следовать, что (4.6) удовлетворяется (с данным P) и для любого $q \in Q$. Итак, достаточно решить конечное число матричных неравенств

$$A^T(q^{(r)})P + PA(q^{(r)}) < 0, \quad P > 0, \quad q^{(r)} — \text{вершины } Q, \\ r = \overline{1, 2^m} \text{ (число вершин)}, \quad q \in Q \in R^m,$$

где $A(q^{(r)})$ — вершинные матрицы. Хотя число неравенств в (4.6) может быть велико, тем не менее, существуют итерационные методы решения таких неравенств, работоспособные даже для больших размерностей матриц.

Таким путем удастся получить только достаточный критерий робастной устойчивости. Если система линейных матричных неравенств (4.6) не имеет решения, то это не значит, что робастная устойчивость нарушена — могут существовать робастно устойчивые семейства, для которых нет общей функции Ляпунова. К сожалению использовать этот подход для исследования робастного (n, k) -поведения таких семейств матриц не представляется возможным.

В параграфе 4.2 удастся использовать сверхустойчивость вместо устойчивости и k -диагональное преобладание вместо общего случая принадлежности классу (n, k) -эквивалентности матриц, как в непрерывном так и в дискретном случаях.

Например, пусть в интервальном семействе (3.2) все $\alpha_{ij} \equiv 1$, т.е.

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = a_{ij}^0 + \Delta_{ij}, \quad |\Delta_{ij}| \leq \gamma, \quad i, j = \overline{1, n},$$

а номинальная матрица $A_0 = (a_{ij}^0)$ сверхустойчива:

$$\sigma(A_0) = \min_i (-a_{ii}^0 - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^0|) > 0.$$

Тогда все семейство робастно сверхустойчиво. Точнее,

$-(a_{ii}^0 + \Delta_{ii}) - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^0 + \Delta_{ij}| > 0$, $i = \overline{1, n}$, при всех $|\Delta_{ij}| \leq \gamma$, тогда и только тогда, когда $\gamma < \gamma^*$,

$$\gamma^* = \frac{\sigma(A_0)}{n}, \quad (3.7)$$

при этом радиус сверхустойчивости γ^* находится в явном виде.

Действительно,

$$\begin{aligned} & -(a_{ii}^0 + \Delta_{ii}) - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^0 + \Delta_{ij}| > -a_{ii}^0 - \Delta_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^0| - \sum_{j \neq i} |\Delta_{ij}| > \\ & > -a_{ii}^0 - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^0| - \sum_{j \neq i} |\Delta_{ij}| > \\ & > \min_i \left(-a_{ii}^0 - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^0| \right) + \min_i \left(-\sum_{j \neq i} |\Delta_{ij}| \right) > \sigma(A_0) - n\gamma > 0. \end{aligned}$$

Неравенство верно при $\gamma < \frac{\sigma(A_0)}{n}$.

Аналогичные формулы справедливы и в дискретном случае: если $\|A_0\|_1 < 1$, то семейство матриц остается сверхустойчивым при

$$\gamma < \gamma^*, \gamma^* = \frac{1 - \|A_0\|_1}{n}. \quad (4.8)$$

Общий случай, когда матрицы имеют k -диагональное преобладание рассмотрен в параграфе 4.2 для непрерывных и дискретных систем, где даются формулы k -радиуса робастного поведения этих систем.

В параграфе 4.3 удалось обобщить методику исследования робастного поведения семейств матриц с неопределенностью, задаваемой с помощью матричных норм (4.4) для исследования принадлежности семейств матриц классам (n, k) -эквивалентности.

В параграфе 4.4 приведены достаточные условия существования устойчивых выпуклых множеств в пространстве параметров нестационарной системы первого приближения, что является одной из задач робастной устойчивости матриц.

4.2. Робастное поведение семейств матриц с k -диагональным преобладанием.

Как показано в параграфе 4.1, исследование робастного поведения матричных семейств даже таких простых, как интервальное и аффинное семейства, является значительно более сложной задачей, чем исследование полиномиальных семейств. Это связано с тем, что нет аналога теоремы Харитонова и не верна реберная теорема для матричных семейств. Также как нет аналогов их обобщений для семейств классов (n, k) -эквивалентности матриц.

Использование идей теории возмущений или поиски общей функции Ляпунова не позволяют найти хотя бы достаточное условие принадлежности семейств матриц классам (n, k) -эквивалентности.

В этой части главы предлагается другой подход, связанный со сверхустойчивостью матриц.

Устойчивость – асимптотическое свойство, но оценки, справедливые для всех моментов времени, имеют некоторую константу C , которая может быть очень велика. В таком случае на начальном участке траектории может наблюдаться эффект «всплеска» – резкого роста траектории. Такие явления часто возникают при стабилизации системы. Чтобы их избежать, рассматривают [78] класс «сверхустойчивых» систем, для которых норма решения монотонно убывает. Кроме того, преимущество такого перехода к более узкому классу систем объясняется тем, что сверхустойчивость сохраняется для нестационарных систем и при наличии нестационарных и нелинейных возмущений. Здесь обобщается это понятие на, в некотором смысле, «сверхнеустойчивость» матриц непрерывных и дискретных систем управления.

Определение 4.3. [26] Матрицу $A \in R^{n \times n}$ называют матрицей с k -диагональным преобладанием если:

- а) матрица $A \in R^{n \times n}$ принадлежит классу (n, k) -эквивалентности;
 - б) k ее элементов на главной диагонали имеют положительное диагональное преобладание по строке;
- остальные $n - k$ элементов на этой диагонали имеют отрицательное диагональное преобладание по строке.

По следствию теоремы Гершгорина [] из б) следует а).

Аналогичное понятие можно ввести для комплексных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ с диагональным или k -диагональным преобладанием по строке для реальной части диагональных элементов, т.е.

$$|\operatorname{Re} a_{ii}^0| > \sum_{j=1, j \neq i}^k |a_{ij}|$$

Покажем, как «работает» этот подход. Рассмотрим интервальное матричное семейство в виде:

$$\tilde{A} = A_0 + \Delta, \quad \tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}), \quad \tilde{a}_{ij} = a_{ij}^0 + \Delta_{ij}, \quad (4.9)$$

$$|\Delta_{ij}| \leq \gamma \alpha_{ij}, \quad \gamma > 0, \quad \alpha_{ij} \geq 0 \quad i, j = \overline{1, n}, \quad \sum_{i,j} \alpha_{ij} > 0.$$

Номинальная матрица $A_0 = (a_{ij}^0)$ – k -диагональная. Точнее, для k элементов выполняется

$$\rho_1(A_0) = \min_{1 \leq i \leq n} \left(a_{ii}^0 - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^0| \right) > 0,$$

а для остальных $n - k$ выполняется

$$\rho_2(A_0) = \min_{1 \leq i \leq n} \left(-a_{ii}^0 - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^0| \right) > 0.$$

Заметим, что в первом случае $a_{ii}^0 > 0$, а во втором $a_{ii}^0 < 0$.

Обозначим

$$\rho(A_0) = \min \left(\sigma_1(A_0), \sigma_2(A_0) \right),$$

тогда

$$\rho(A_0) = \min_i \left(|a_{ii}^0| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^0| \right). \quad (4.10)$$

Теорема 4.2. [41] Для того, чтобы все матрицы интервального матричного семейства $\tilde{A}$ были k -диагональными необходимо и достаточно, чтобы номинальная

матрица A_0 была k -диагональной и размах неопределенности γ был меньше, чем k -радиус γ_k^* ,

$$\gamma_k^* = \min_i \left(\frac{|a_{ii}^0| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^0|}{\sum_j \alpha_{ij}} \right). \quad (4.11)$$

Если $\alpha_{ij} \equiv 1, i, j = \overline{1, n}$, то

$$\gamma_k^* = \frac{\rho(A_0)}{n}. \quad (4.12)$$

Таким образом, удалось найти в явном виде радиус k -диагонального преобладания (k -радиус) интервального матричного семейства. Очевидно, при $k = 0$ получим радиус сверхустойчивости такого семейства со сверхустойчивой номинальной матрицей.

Определение 4.4. Назовем матрицу $A \in C^{n \times n}$ k -диагональной по Шуру, если:

- а) она принадлежит классу (n, k) -эквивалентности по Шуру;
- б) k ее элементов на главной диагонали удовлетворяют неравенствам:

$$|a_{ii}| > 1 + \sum_{j \neq i} |a_{ij}|,$$

а $n - k$ остальных ее элементов на главной диагонали удовлетворяют неравенствам:

$$|a_{ii}| < 1 - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

Ясно, что по теореме Гершгорина [14] из б) следует а).

Теорема 4.3. [41] Для того, чтобы все матрицы интервального семейства были k -диагональными по Шуру необходимо и достаточно, чтобы номинальная матрица A_0 была k -диагональной по Шуру и размах неопределенности γ был меньше, чем k -радиус по Шуру $\gamma_{ш, k}^*$,

$$\gamma_{ш,k}^* = \min_i \left(\frac{\left| 1 - |a_{ii}^0| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}^0| \right|}{\sum_j \alpha_{ij}} \right). \quad (4.13)$$

Ясно, что при $k = 0$ получим радиус сверхустойчивости по Шуру

$$\gamma_{ш}^* = \min_i \frac{1 - \|A_0\|_1}{\sum_j \alpha_{ij}}, \quad (4.14)$$

где $\|A_0\|_1$ – строчная норма.

Если все $\alpha_{ij} \equiv 1$, то получим

$$\gamma_{ш,k}^* = \frac{\min_i \left(\left| 1 - |a_{ii}^0| + |a_{ii}^0| \right| \right) - \|A_0\|_1}{n}. \quad (4.15)$$

При $k = 0$ последняя формула дает

$$\gamma_{ш}^* = \frac{1 - \|A_0\|_1}{n} \quad (4.16)$$

– радиус свехустойчивости по Шуру в этом случае.

Определение 4.5. Будем называть семейства матриц $A \in R^{n \times n}$ с k -диагональным преобладанием по строке и неопределенностью любого типа – робастно k -диагональными, а семейства матриц $A \in C^{n \times n}$ с k -диагональным преобладанием по Шуру и неопределенностью любого типа – робастно k -диагональными по Шуру.

Таким образом, в теоремах 4.2, 4.3 получены критерии робастной k -диагональности семейств интервальных матриц, что при $k = 0$ дает, в частности, критерии робастной сверхустойчивости семейств интервальных матриц линейных непрерывных и дискретных систем управления.

Для первой теоремы не трудно построить формулы для радиуса k -диагональности для интервального семейства $\tilde{A}$ из $C^{n \times n}$ с k -диагональным преобладанием по реальной части диагональных элементов простой заменой в формуле (4.11) $|a_{ii}^0|$ на $|\operatorname{Re} a_{ii}^0|$.

4.3. Робастное поведение семейств матриц с неопределённостью заданной матричными нормами.

В этой части главы исследуется принадлежность семейств матриц из $R^{n \times n}$ и $C^{n \times n}$ классам (n, k) -эквивалентности (мы будем так говорить как и выше, имея в виду, что этим классам принадлежат характеристические полиномы этих матриц). Однако, удалось найти только достаточные условия принадлежности семейств матриц классам (n, k) -эквивалентности.

Пусть семейств матриц A ,

$$A = A_0 + \Delta, \quad \|\Delta\| \leq \gamma, \quad (4.17)$$

где номинальная матрица A_0 принадлежит классу (n, k) -эквивалентности, а для определённости норма здесь – спектральная норма.

4.3.1. Определение 4.6. Если семейство матриц A из (4.17), где A_0 принадлежит классу (n, k) -эквивалентности, принадлежит тому же классу эквивалентности при любом размахе неопределённости γ , $\gamma < \gamma_{\max}^k$, то $\gamma_{\max}^k$ называется k -радиусом робастного поведения семейства матриц A или кратко k -радиусом семейства матриц.

Задача вычисления комплексного k -радиуса (возмущения Δ -комплексные), как и в случае робастной устойчивости такого матричного семейства ($k = 0$), оказалась проще, чем вычисления вещественного k -радиуса, когда матрица A_0 и матрица возмущений Δ -вещественные.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 4.4. [26] Пусть для двух матриц A и B из $C^{n \times n}$ выполняется: матрица A принадлежит классу (n, k) -эквивалентности, а матрица $A + B$ - нет, т.е. либо $A + B$ из другого класса эквивалентности, либо $A + B$ имеет собственные числа на мнимой оси. Тогда найдётся такое число λ , $0 < \lambda \leq 1$, что $A + \lambda B$ имеет собственное число на мнимой оси, т.е. найдётся $\omega \in R$, что

$$\det(j\omega E - (A + \lambda B)) = 0.$$

Доказательство. Во втором случае, когда $A + B$ имеет собственное число на мнимой оси, означает, что $\lambda = 1$ и теорема доказана.

Рассмотрим первый случай, когда $A + B$ из другого класса эквивалентности, например, из класса (n, m) -эквивалентности и $k \neq m$. Как известно, полином

$$P(s, \lambda) = \det(sE - (A + \lambda B))$$

непрерывно зависит от параметра λ и можно использовать теорему о непрерывной зависимости корней полинома от параметра. При переходе от локализации корней k справа и $n - k$ слева от мнимой ($\lambda = 0$) оси к локализации m справа и $n - m$ слева от мнимой оси ($\lambda = 1$), по крайней мере один из корней находящийся слева или справа от мнимой оси обязательно перейдёт через мнимую ось на другую сторону.

Теорема доказана.

Сформулируем известное утверждение [26] в виде леммы, которое потребуется ниже.

Лемма. Если матрица $B \in C^{n \times n}$ не вырождена, то при любом $\Delta \in C^{n \times n}$, $\|\Delta\| < \sigma_1(B)$ матрица $B + \Delta$ тоже будет невырожденной. Если же $\gamma \geq \sigma_1(B)$, то найдётся матрица $\Delta \in C^{n \times n}$, $\|\Delta\| \leq \gamma$, что $B + \Delta$ - вырожденная матрица.

Теорема 4.5. [47] Комплексный k -радиус семейства матриц $A = A_0 + \Delta$, $\Delta \in C^{n \times n}$, $\|\Delta\| \leq \gamma$, A_0 из класса (n, k) -эквивалентности, вычисляется по формулам, записанным в одном равенстве

$$\begin{aligned} \gamma_{\max}^{k,C} &= \frac{1}{\sup_{\omega} \|(j\omega E - A)^{-1}\|} = \\ &= \frac{1}{\sup_{\omega} \sigma_n((j\omega E - A)^{-1})} = \inf_{\omega} \sigma_1(j\omega E - A), \end{aligned} \quad (4.18)$$

где $\omega \in R$, а $\sigma_1(\omega), \sigma_n(\omega)$ - наименьший и наибольший соответственно сингулярные числа матрицы $j\omega E - A$. (Здесь спектральная норма: $\|B\| = \sigma_n, \|B^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_1}$).

Доказательство. Пусть $\|\Delta\| < \gamma_{\max}^{k,C}$, но $A + \Delta$ не принадлежит классу (n, k) -эквивалентности. Тогда по теореме 4.4 существуют

$$\Delta_1 = \lambda \Delta, \|\Delta_1\| < \gamma_{\max}^{k,c}, \omega \in R, 0 < \lambda \leq 1$$

такие, что матрица $B + \Delta_1, B = j\omega E - A$, вырожденная. Таким образом, мы получили противоречие с леммой, т.к.

$$\Delta_1 < \gamma_{\max}^{k,C} \leq \frac{1}{\|B^{-1}\|} \quad (4.19)$$

Если же $\gamma \geq \gamma_{\max}^{k,C}$, то существует такое $\omega \in R$, что для $B = j\omega E - A$ выполняется $\gamma \geq \|B^{-1}\|$. По лемме найдётся такое $\Delta \in C^{n \times n}$, $\|\Delta\| \leq \gamma$, что $\det(B + \Delta) = 0$. Последнее означает, что матрица $A + \Delta$ имеет собственные значения на мнимой оси, т.е. она неустойчива.

Теорема доказана.

Как следствие, при $k = 0$ [78] получим комплексный радиус устойчивости устойчивой матрицы $A \in C^{n \times n}$ для семейства матриц $A + \Delta$ с возмущениями Δ заданный матричной нормой, т.е. при $k = 0$:

$$\gamma_{\max}^{k,C} = \gamma_{\max}^C = \sup \left\{ \gamma : A + \Delta \text{ устойчива при всех } \Delta \in C^{n \times n}, \|\Delta\| \leq \gamma \right\},$$

$$\gamma_{\max}^C = \inf_{\omega} \sigma_1(j\omega E - A).$$

Выражение для вещественного k -радиуса $\gamma_{\max}^{k,r}$ для простейшего случая, когда номинальная матрица $A \in R^{n \times n}$ устойчивая, возмущения $\Delta \in R^{n \times n}$ и семейство $A + \Delta$, робастно устойчиво при $\gamma \leq \gamma_{\max}^C$ было получено не давно.

Оказывается для общего случая, когда номинальная матрица A из класса (n, k) -эквивалентности формула для $k = 0$ переносится на случай $k = \overline{1, n}$, без изменения.

Теорема 4.6.[26] Пусть $M(\omega) = \operatorname{Re}(j\omega E - A)^{-1}$,
 $N(\omega) = \operatorname{Im}(j\omega E - A)^{-1}$, $A \in R^{n \times n}$ из класса (n, k) -эквивалентности. Далее, составим блочную матрицу

$$H(\omega, \alpha) = \begin{pmatrix} M(\omega) & -\alpha N(\omega) \\ \alpha^{-1} N(\omega) & M(\omega) \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Тогда

$$\gamma_{\max}^{k,r} = \inf_{\omega} \inf_{\alpha \in (0,1]} \sigma_{n-1}(H(\omega, \alpha)). \quad (4.21)$$

Заметим, что порядок характеристического полинома блочной матрицы $H \cdot H^T$ равен порядку своих блоков, т.е. n . Оптимизация по двум переменным, т.к. формула зависит от двух параметров: $\omega \in R$, $\alpha \in (0,1]$ (можно брать $0 \leq \omega < +\infty$) и вычислять нужно, в отличие, от формулы комплексного радиуса, не крайнее меньшее сингулярное число σ_1 , а второе σ_{n-1} за наибольшим значением σ_n . Очевидно, что для инженерной практики вычисление вещественного k -радиуса робастного поведения ($k = 0$ - устойчивое, $k = \overline{1, n}$ - неустойчивое) матричного семейства (4.17), является, более трудной задачей, чем вычисление комплексного k -радиуса.

Заметим, что отношение вещественного и комплексного k -радиусов робастного поведения матричного семейства $A + \Delta$, $\|\Delta\| \leq \gamma$, т.е. $\gamma_{\max}^{k,r} / \gamma_{\max}^{k,C}$ может быть как угодно большим.

4.3.2. Сформулируем без доказательства теорему, дающую формулу комплексного k -радиуса устойчивости для структурированной неопределённости. Точнее, пусть матрица $A \in C^{n \times n}$ принадлежит классу (n, k) -эквивалентности (при $k = 0$ она устойчива).

Требуется найти наибольшее число $\gamma_{\max}^{k,C}$ такое, что все семейство матриц вида

$$A + B\Delta D, \Delta \in C^{m \times l}, \|\Delta\| \leq \gamma \quad (4.22)$$

из того же класса эквивалентности. Матрицы $B \in C^{n \times m}$, $D \in C^{l \times n}$ - заданы.

Задачи такого рода при $k = 0$ возникают когда имеется неопределённость в цепи обратной связи в линейных системах управления. Очевидно, при $B = D = E$ получим задачу из 4.3.1.

Теорема 4.7.[26] Комплексный k -радиус робастного поведения для семейства матриц $A + B\Delta D$, $\|\Delta\| \leq \gamma$, B, D - даны, A - принадлежит классу (n, k) -эквивалентности, равен

$$\gamma_{\max}^{k,C} = \frac{1}{\sup_{\omega} \|D(j\omega E - A)^{-1} B\|} = \frac{1}{\sup_{\omega} \sigma_n(D(j\omega E - A)^{-1} B)}, \quad (4.23)$$

где $\omega \in (-\infty, \infty)$.

Для вычисления вещественного k -радиуса в этом случае можно переформулировать теорему для получения нужной формулы. Для этого достаточно в качестве матриц $M(\omega)$, $N(\omega)$ взять $\operatorname{Re}(D(j\omega E - A)^{-1} B)$ и $\operatorname{Im}(D(j\omega E - A)^{-1} B)$ - соответственно, составить блочную матрицу вида (3.20) и формально взять ту же формулу (4.21) при $\omega \in (-\infty, \infty)$ или $\omega \in [0, +\infty)$.

Ясно, что для $k = 0$ получим вещественный радиус робастной устойчивости семейства матриц для структурированной неопределённости.

В заключение заметим, что все результаты этой части главы переносятся на случай дискретных систем. Например, если матрица A - принадлежит классу (n, k) -эквивалентности по Шуру, т.е. k собственных чисел вне круга $|z| \leq 1$, а $n - k$ - внутри, то дискретный комплексный k -радиус робастного поведения семейства $A + \Delta$, $\|\Delta\| \leq \gamma$ равен

$$\gamma_{\max}^{k,C} = \frac{1}{\max_{0 \leq \omega < 2\pi} \|(e^{j\omega} E - A)^{-1}\|} = \min_{0 \leq \omega < 2\pi} \sigma_1(e^{j\omega} E - A). \quad (4.24)$$

Для $k = 0$ получим дискретный комплексный радиус робастной устойчивости.

Аналогично, можно построить формулы для дискретного вещественного k -радиуса матричного семейства $A + \Delta$, $\|\Delta\| \leq \gamma$. Так же, по аналогии, можно получить обе формулы для дискретного вещественного и комплексного k -радиуса принадлежности матричного семейства со структурированной неопределённостью. Из-за экономии места всё это опущено.

4.4. Условия существования выпуклых областей робастной устойчивости в пространстве коэффициентов нестационарных линейных систем управления.

В этой части главы анализируются достаточные условия существования робастно устойчивых выпуклых матричных множеств в пространстве параметров нестационарной системы первого приближения.

При исследовании задач робастной устойчивости нелинейных систем по первому линейному приближению чаще всего исследуют устойчивость их характеристических полиномов, коэффициенты которых определяют некоторое заданное множество. Одним из лучших достижений в исследовании устойчивости интервальных полиномов является теорема Харитонова [94]. Задача определения границ изменения элементов матрицы нестационарной линейной системы управления

$$\dot{X} = A(t, q)X, t \geq 0, q \in Q \subset R^l \quad (4.25)$$

для сохранения асимптотической устойчивости системы относится к задачам по матричной устойчивости.

Рассмотрим задачу определения границ изменения элементов матрицы $A(t, q)$, при которых ее собственные числа остаются слева от мнимой оси без построения характеристических полиномов и исследования множеств изменения их коэффициентов, при которых они остаются устойчивыми. Таким образом, исследование задач робастной асимптотической устойчивости систем первого приближения в некоторых случаях сводится к изучению робастной устойчивости матрицы $A(t, q)$ системы без обычного построения характеристических полиномов и их последующего изучения на робастную устойчивость.

Определение 4.7. Множество $U \subset E^{n \times n}$ квадратных матриц порядка n называется выпуклым, если для любых двух матриц $A_1(t, q)$ и $A_2(t, q)$, $t \geq 0$, $q \in Q$ принадлежащих этому множеству и любых чисел $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ матрица $A(t, q) = \alpha A_1(t, q) + \beta A_2(t, q)$ так же принадлежит этому множеству.

Очевидно, точка $A(t, q)$ лежит на отрезке, соединяющем точки $A_1(t, q)$ и $A_2(t, q)$. Это следует из того, что $\alpha + \beta = 1$ и для $\alpha \in [0, 1]$ можно написать

$$\begin{aligned} A(t, q) &= \alpha A_1(t, q) + \beta A_2(t, q) = \alpha A_1(t, q) + \\ &+ (1 - \alpha) A_2(t, q) = A_2(t, q) + \alpha (A_1(t, q) - A_2(t, q)). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Определение 4.8. Пусть заданы m точек (матриц) $A_1(t, q)$,

$$A_2(t, q), \dots, A_m(t, q) \quad A_i(t, q) \in E^{n \times n}, t \geq 0, q \in Q \subset R^l.$$

Выпуклой линейной комбинацией этих точек назовем выражение

$$A(t, q) = \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i(t, q), \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0. \quad (4.27)$$

Определение 4.9. Угловой точкой выпуклого множества $U \subset E^{n \times n}$ называется точка $A(t, q)$, $t \geq 0$, $q \in Q$, которую нельзя представить в виде выпуклой линейной комбинации других точек этого множества.

Используя [11, 12] не трудно доказать, что если $A_1(t, q), A_2(t, q), \dots, A_m(t, q)$ — угловые точки замкнутого, ограниченного и выпуклого множества U , то любая точка $A(t, q)$ этого множества может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации этих точек.

4.4.1. Определение 4.10. Назовем выпуклое множество $V \subset E^{n \times n}$ квадратных матриц порядка n выпуклым устойчивым матричным множеством, если для любой матрицы $A(t, q) \in V$, $t \geq 0$ ее собственные числа $\lambda_i(t, q)$ находятся в левой полуплоскости, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_i(t, q) < 0$, $q \in Q$, $i = \overline{1, n}$.

Легко доказать справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.8. Для того чтобы матрица $A(t, q) + A^T(t, q)$ в G :

$$G = T \times Q, \text{ где } t \in T, T = [t_0, \infty), t_0 \geq 0, q \in Q \subset R^l \quad (4.28)$$

была отрицательно (положительно) определенной необходимо и достаточно, чтобы матрица $A(t, q)$ тоже была отрицательно (положительно) определенной.

Это очевидно из того, что для любого вектора $X \in E^n$ выполняется равенство $X^T A(t, q)X = X^T A^T(t, q)X$, а значит $2X^T A(t, q)X = X^T (A(t, q) + A^T(t, q))X$.

Чтобы не загромождать дальнейшее изложение, будем считать элементы матрицы $A(t)$ непрерывными функциями времени при $0 \leq t_0 \leq t < +\infty$, т.к. все результаты переносятся без особых усилий на общий случай, когда $A = A(t, q)$ определена и непрерывна в области G .

Рассмотрим замкнутое ограниченное и выпуклое множество $V \subset E^{n \times n}$ с конечным числом угловых точек $A_1(t), A_2(t), \dots, A_m(t), t \geq 0$.

Теорема 4.9. Для того чтобы множество V было устойчивым матричным множеством достаточно того, что матрицы $A_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$) были отрицательно определены.

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда, любая точка $A(t)$ этого множества может быть представлена в виде линейной комбинации угловых точек:

$$A(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i(t), \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0. \quad (4.29)$$

Покажем, что матрица $A(t)$ является отрицательно определенной. Действительно, так как матрицы $A_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$) являются отрицательно определенными, то для любого вектора $X \in E^n$ справедливы неравенства:

$$X^T A_i(t)X < 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.30)$$

отсюда вытекает

$$X^T A(t)X = X^T \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i A_i(t) \right) X = \sum_{i=1}^m \alpha_i X^T A_i(t)X < 0. \quad (4.31)$$

Это означает, что матрица $A(t)$ является отрицательно определенной. Из неравенств (1.13) следует, что все собственные числа матрицы $A(t)$ лежат в левой полуплоскости.

Теорема доказана.

Теорема 4.9 является только достаточной, т.к. из того, что все собственные числа матрицы $A(t)$ локализованы в левой (в правой) полуплоскости, не следует, что матрица $A(t)$ является отрицательно (положительно) определенной. Если же матрица $A(t)$ положительно определенная, то $A(t)$ — неустойчивая матрица и опять из неравенств (1.13) следует, что все ее собственные числа находятся в правой полуплоскости. Аналогично, если $A(t) < 0$, то все ее собственные числа лежат в левой полуплоскости и $A(t)$ — устойчивая матрица.

Следующий пример показывает, что для $t \geq t_0 > 0$ собственные числа $\lambda_i(t)$ матрицы

$$A(t) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{t} & t \\ 8 & -9\sqrt{t} \end{pmatrix}$$

находятся в левой полуплоскости. Кроме того, $\lambda_i(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, т.е. $A(t)$ — устойчивая матрица. Однако ее симметричная составляющая

$$\frac{A(t) + A^T(t)}{2} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{t} & \frac{8+t}{2} \\ \frac{8+t}{2} & -9\sqrt{t} \end{pmatrix},$$

не является отрицательно определенной матрицей, т.к. $\det(A(t) + A^T(t)) < 0$ при всех $t \geq t_0$. Более того, ее собственные числа таковы, что $|\mu_i(t)| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, но $\mu_1\mu_2 < 0$ ($\mu_1\mu_2 = \det(A(t) + A^T(t))$).

Приведем еще пример, который показывает, что даже сверхустойчивые матрицы могут не являться отрицательно определенными. Для матриц

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}, \quad \frac{A + A^T}{2} = \begin{pmatrix} -2 & 4,5 \\ 4,5 & -9 \end{pmatrix}$$

собственные числа первой отрицательные, а для второй — разных знаков. Поэтому можно заключить, что устойчивость или сверхустойчивость матрицы $A(t)$ и отрицательная

определенность ее квадратичной формы не являются эквивалентными свойствами (даже, если A — постоянная матрица). С другой стороны, хотя устойчивость стационарной матрицы системы первого приближения равносильна экспоненциальной асимптотической устойчивости этой системы, но для матрицы $A(t)$ и, тем более, для матрицы $A(t, q)$ ($t \geq 0, q \in Q, Q \subset R^l$) это не так. Видимо это связано с возможным движением собственных чисел $\lambda_i(t)$ матрицы $A(t)$ из левой полуплоскости к мнимой оси при $t \rightarrow +\infty$. В следующем параграфе доказана теорема в этой связи.

Утверждения аналогичные теоремам 4.8 – 4.9 можно привести, когда матрица A зависит не только от времени, но и (или) от пространственных координат, и (или) от вектора параметров.

Для аффинного семейства матриц справедливо очевидное утверждение.

Теорема 4.10.[11] Пусть матрицы $A_0(t), A_1(t), \dots, A_m(t)$ являются отрицательноопределенными. Тогда аффинное семейство

$$A(t, q) = A_0(t) + q_1 A_1(t) + \dots + q_m A_m(t), q_i \geq 0, i = \overline{1, m} \quad (4.32)$$

является устойчивым.

Заметим, что в условиях теоремы политоп $\sum_{i=1}^m \alpha_i A_i(t), \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0$ — устойчивое выпуклое множество.

4.4.2. Известно[], что тривиальное решение линейной нестационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = A(t)X, \quad t \geq 0 \quad (4.33)$$

асимптотически устойчиво в целом, если матрица $A(t) \in R^{n \times n}$ является кусочно-непрерывной на любом промежутке $[0, T]$, а её аддитивная составляющая $H_1(t) = (A(t) + A^*(t))/2$ является отрицательно определенной матрицей. В дальнейшем будем называть такие матрицы – матрицами устойчивыми по Важевскому.

Более того, тривиальное решение нелинейной системы

$$\dot{X} = A(t)X + f(t, X), \quad t \geq 0 \quad (4.34)$$

где векторная функция $f(t, X)$ ($f(t, 0) = 0, t \geq 0$) удовлетворяет условиям Липшица, а сама постоянная Липшица достаточно мала, также асимптотически устойчиво в целом.

Свойство асимптотической устойчивости тривиального решения (но уже локальное) также распространяется на некоторые нелинейные системы.

В теории управления достаточно полно исследовано асимптотическое поведение систем вида [78]

$$\dot{X} = A(t)X + f(t, X, U), \quad t \geq 0, \quad (4.35)$$

где матрицы $A(t)$ имеют отрицательное диагональное преобладание по строке. Нетрудно видеть, что не любая сверхустойчивая матрица, является матрицей устойчивой по Важевскому. Обратное тоже, вообще говоря, неверно.

Для семейств матриц устойчивых по Важевскому справедлив аналог теоремы 4.9.

Теорема 4.11. Пусть матрицы $A_1(t), \dots, A_m(t)$ из $R^{n \times n}$ устойчивы по Важевскому, тогда их любая выпуклая комбинация

$$A(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i(t), \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = \alpha > 0$$

также устойчива по Важевскому.

Доказательство этой теоремы вытекает из свойств эрмитовых квадратичных форм и неравенстве Гирша-Бендиксона [37].

Определение 4.11. Будем говорить, что число γ является вещественным радиусом устойчивости для матрицы $A(t) \in R^{n \times n}$ устойчивой по Важевскому, если для любой матрицы $\Delta \in R^{n \times n}$ семейство матриц

$$A(t) + \Delta \quad (4.36)$$

устойчиво по Важевскому тогда и только тогда, когда выполняется строгое неравенство, $\|\Delta\| < \gamma$, $\|\Delta\|$ - спектральная норма.

Теорема 4.12.[40] Пусть матрица $A(t) \in R^{n \times n}$ устойчива по Важевскому, тогда ее вещественный радиус устойчивости вычисляется по формуле:

$$\gamma = \left| \min \left(\inf_{\substack{t \geq 0 \\ 1 \leq i \leq n}} \mu_i(t) \right) \right|, \quad (4.37)$$

или, что то же самое,

$$\gamma = \left| \max_{\substack{t \geq 0, \\ 1 \leq i \leq n}} \sup \mu_i(t) \right|$$

где $\mu_i(t)$ – собственные числа матрицы $\frac{A(t) + A^*(t)}{2}$, $\|\Delta\|$ – спектральная норма.

Справедливо утверждение. Для простоты, рассмотрим стационарный случай.

Теорема 4.13. Если матрица A – устойчива по Важевскому, то вещественный радиус устойчивости по Важевскому можно определить по формуле $\gamma < \min_{i=1, n} |\mu_i|$, где

$\mu_i, i = \overline{1, n}$ – собственные числа симметрической матрицы $H = \frac{A + A^T}{2}$.

Доказательство. Пусть матрица A – устойчива по Важевскому. Для того чтобы матрица $A + \Delta$ была также устойчива по Важевскому необходимо и достаточно выполнение следующего неравенства:

$$\forall X \neq 0, X \left(\frac{A^T + A}{2} + \frac{\Delta^T + \Delta}{2} \right) X < 0. \quad (4.38)$$

Заметим, что имеют место два очевидных неравенства:

$$X \left(\frac{\Delta^T + \Delta}{2} \right) X^T \leq \|\Delta\| \cdot \|X\|^2, \quad \|X\|^2 \min_{i=1, n} \mu_i \leq X^T H X \leq \max_{i=1, n} \mu_i \|X\|^2. \quad (4.39)$$

Из этих неравенств вытекает, что при выполнении неравенства $\max_{i=1, n} \mu_i + \|\Delta\| < 0$ выполняется и неравенство (4.38). Так как справедливо равенство $-\max_{i=1, n} \mu_i = \min_{i=1, n} |\mu_i|$,

то одна из нижних оценок величины γ получена. Для того чтобы убедиться в том, что найденное число γ , является наибольшим, достаточно подобрать матрицу Δ так, что

$\|\Delta\| = \min_{i=1, n} |\mu_i|$, но при этом матрица $A + \Delta$ была неустойчива по Важевскому.

Известно [1], что симметрическая матрица H с помощью ортогонального преобразования Q_1 (столбцами матрицы Q_1 являются ортонормированные собственные вектора матрицы H) может быть приведена к диагональному виду:

$$H = Q_1 \Lambda Q_1^T, Q_1^T H Q_1 = \Lambda, \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), Q_1^T Q_1 = E$$

где λ_i вещественные собственные числа этой матрицы с учетом их кратностей.

Для простоты будем считать, что диагональные элементы матрицы Λ расположены в порядке убывания. Возьмем матрицу $\Delta = Q_1 \Lambda_1 Q_1^T$, где Λ_1 – диагональная матрица с диагональными элементами равными $\min_{i=1,n} |\mu_i|$. Тогда с одной стороны $\|\Delta\| = \min_{i=1,n} |\mu_i|$, т.к. $\|\Delta\| = \|\Lambda_1\|$, а с другой, если в качестве вектора X выбрать первый столбец матрицы Q_1 , то получим равенство:

$$X^T (A + \Delta) X = X \left(\frac{A^T + A}{2} + \frac{\Delta^T + \Delta}{2} \right) X^T = 0. \quad (4.41)$$

Это показывает, что величина $\gamma = \min_{i=1,n} |\mu_i|$ является вещественным радиусом устойчивости по Важевскому для матрицы A . Теорема доказана.

Если же матрица $A = A(t)$ – т.е. нестационарная, то утверждение сохраняется, если

$$\gamma = \min_{1 \leq i \leq n} \inf_{t \geq 0} |\mu_i(t)| \text{ или, что то же самое } \gamma = \left| \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t \geq 0} \mu_i(t) \right|.$$

Справедливо более общее утверждение.

Теорема 4.14. Пусть матрица $A(t) \in R^{n \times n}$ устойчива по Важевскому, а возмущение $\Delta \in R^{n \times n}$ фиксировано. Тогда семейство матриц $A(t) + \mu \Delta, \mu > 0, \Delta \in R^{n \times n}$ является робастно устойчивым по Важевскому, если

$$\mu < \frac{\min_{1 \leq i \leq n} (\inf_{t \geq 0} |\mu_i(t)|)}{\|\Delta\|}, \quad (4.42)$$

где $\mu_i(t)$ – собственные числа матрицы $A(t) + A^T(t)$, $\|\Delta\|$ – матричная норма.

Доказательство. Пусть вектор $X \in R^n, X \neq 0$, тогда верна цепочка:

$$\begin{aligned} X^T (A(t) + \mu \Delta) X &= X^T A(t) X + \mu X^T \Delta X \leq X^T A X + \\ &+ |X^T \Delta \mu X| < \|X\|^2 (\max_{1 \leq i \leq n} \sup_{t \geq 0} \mu_i(t) + \min_{1 \leq i \leq n} \inf_{t \geq 0} |\mu_i(t)|) = 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

Таким образом, квадратичная форма с матрицей $A(t) + \mu\Delta$ отрицательно определенная. Теорема доказана.

Используя оценку по локализации спектра сверхустойчивых матриц и неравенства для спектров [37] можно доказать следующие утверждения.

Теорема 4.15. Если вещественная $n \times n$ матрица A - сверхустойчива, то ее спектр находится в левой полуплоскости в пересечении угла

$$|\arg \lambda - \pi| < \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{\pi}{2} \quad (4.44)$$

и прямоугольника:

$$\min_{1 \leq i \leq n} \mu_i \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i, \quad (4.45)$$

$$\min_{1 \leq i \leq n} \nu_i \leq \operatorname{Im} \lambda \leq \max_{1 \leq i \leq n} \nu_i;$$

где λ, μ_i, ν_i - собственные числа матриц A, H_1, H_2 соответственно в аддитивном представлении матрицы A ,

$$A = H_1 + JH_2 = (A + A^T)/2 + (A - A^T)/2$$

Для матриц устойчивых по Важевскому области локализации спектров A и H_1 целиком находится в левой полуплоскости, т.к. квадратичная форма с матрицей

$$H_1 = \frac{A + A^T}{2} \text{ является отрицательно определенной, чего может не быть, если матрица}$$

A сверхустойчива.

Заметим, что утверждения пункта 4.4.2 для матриц устойчивых по Важевскому можно перенести на комплексные матрицы для аналогичного понятия «устойчивости по Важевскому», когда матрица $A(t) \in C^{n \times n}$, а её эрмитова составляющая $H_1(t)$ является отрицательно определённой матрицей в разложении

$$A(t) = \frac{A(t) + A^*(t)}{2} + \frac{A(t) - A^*(t)}{2} = H_1(t) + JH_2(t).$$

Список использованных источников

1. Александров А.Ю., Жабко А.П. Устойчивость разностных систем – СПб.: Изд. СПбГУ, 2003. – 112 с.
2. Александров А.Ю., Александрова Е.Б., Екимов А.В., Смирнов Н.В. Сборник задач и упражнений по теории устойчивости. – СПб.: СПбГУ, 2003. – 164 с.
3. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления. СПб.: Наука, 1999. – 468 с.
4. Афанасьев В.Н. Управление неопределенными динамическими объектами. – М.: Изд-во Физматлит, 2008. – 208 с.
5. Барабанов А.Т. Полное решение проблемы Рауса в теории регулирования. Доклады АН СССР, 1988. Т. 301, №5. С. 1061-1065.
6. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 223 с.
7. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
8. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954. – 215 с.
9. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975. – 768 с.
10. Блистанова Л.Д., Зеленков Г.А., Зубов И.В., Зубов Н.В. Проблемы устойчивости матриц и вычислительных алгоритмов: Учебное пособие. – СПб.: ООП НИИ Химии СПбГУ, 2007. – 150 с.
11. Блистанова Л.Д., Зубов И.В., Зубов Н.В., Северцев Н.А. Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа: Учебное пособие. – СПб.: ООП НИИ Химии СПбГУ, 2002. – 119 с.
12. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. – М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2002. – 824 с.
13. Версмей Е.И., Корчанов В.М., Коровкин М.В., Погожев С.В. Компьютерное моделирование систем управления движением морских подвижных объектов. – СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2002. – 370 с.
14. Воеводин В.В., Кузнецов В.А. Матрицы и вычисления: – М.: Наука, 1984. – 320 с.
15. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. М.: Энергия, 1980. – 312 с.
16. Воронов А.А. Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979. – 336 с.
17. Гайворонский С.А. Построение границ корневых областей систем с интервальными параметрами / С.А. Гайворонский, С.В. Новокшенов // Современная техника и технологии. Тезисы докладов VII международной научно-практической конференции. Томск: изд. ТПУ, 2001. С. 260-263.
18. Гайворонский С.А., Замятин С.В. Анализ локализации корней интервального полинома в заданном секторе. Изв. Томского политех. ун-та. – 2004. Т. 307. № 4. С. 14-18.
19. Гантмахер Ф.Д. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
20. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
21. Гребенников Е.А., Митропольский Ю.А., Рябов Ю.А. Методы усреднения в резонансной аналитической динамике. М.: Янус, 1999. – 301 с.
22. Грязина Е.Н., Поляк Б.Т. Многомерная область устойчивости полиномиальных семейств специального вида. АиТ, № 12, М.: Наука, 2007. С. 38-52.
23. Дедков В.К. Методы прогнозирования индивидуальных показателей надежности. М.: ВЦ РАН, 2003. – 188 с.
24. Джури Э. Инновации и устойчивость динамических систем: перев. с англ. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1979. – 304 с.

25. Дивеев А.Н., Северцев Н.А. Метод выбора оптимального варианта технической системы. М.: ВЦ РАН, 2003. – 105с.
26. Дикусар В.В., Зеленков Г.А., Зубов Н.В. Методы анализа робастной устойчивости и неустойчивости. М.: ВЦ РАН, 2007. – 234 с.
27. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. Пер. с англ. Б.И. Копылова. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.; ил.
28. Егоров А.И. Основы теории управления. – М.: Изд-во “Физико-математическая литература”, 2004. – 503 с.
29. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. М.: Наука, 1970. – 704 с.
30. Жабко А.П., Харитонов В.Л. Методы линейной алгебры в задачах управления. – СПб.: СПбГУ, 1993. – 320 с.
31. Жабко А.П., Прасолов В.Л., Харитонов В.Л. Сборник задач и упражнений по теории управления: стабилизация программных движений. – М.: Высшая школа, 2003. – 285с.
32. Зеленков Г.А. Аналитические и численные методы построения характеристического многочлена: Монография. – Новороссийск: МГА им. адм. Ф.Ф. Ушакова, 2007. – 128 с.
33. Зеленков Г.А. О графических критериях робастной устойчивости интервальных полиномов. Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем», 2006, № 10(2). С. 181 – 187.
34. Зеленков Г.А. Области неустойчивости характеристических полиномов грубых систем. Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения», посвященной 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа. Новосибирск: НГУ, 2007. С. 582 – 583.
35. Зеленков Г.А., Зубов Н.В., Лопатин М.С. О робастной k-стабилизации для объектов, описанных передаточными функциями. Материалы международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Суздаль, Владимир: Изд-во Владимирского ГУ, 2008. С. 110-112.
36. Зеленков Г.А., Зубов Н.В., Лопатин М.С. Вероятностный подход к исследованию робастного поведения семейства матриц. Труды Института системного анализа РАН «Динамика линейных и нелинейных систем». Выпуск 25(1). М.: Изд-во «КомКнига», 2006. С. 137-141.
37. Зеленков Г.А., Зубов Н.В. О границах спектра матрицы линейного оператора в унитарном пространстве. Труды XIII международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Москва-Пушино, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. С. 34-41.
38. Зеленков Г.А., Зубов Н.В., Лопатин М.С., Неронов В.Ф. О выпуклых семействах неустойчивых полиномов. Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». Выпуск 31(1). М.: ЛКИ, 2007. С. 158-161.
39. Зеленков Г.А., Зубов Н.В., Лопатин М.С., Черноглазов Д.Г. Робастное поведение интервальных полиномов с независимыми ограничениями на вещественную и комплексную части коэффициентов. Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». Выпуск 32(3). М.: ЛКИ, 2008. С. 161 – 167.
40. Зеленков Г.А., Зубов Н.В., Черноглазов Д.Г., Неронов В.Ф. Оценка вещественного радиуса робастной устойчивости для семейства матриц, устойчивых по Важевскому. Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». Выпуск 31(1). М.: ЛКИ, 2007. С. 162-167.
41. Зеленков Г.А., Зубов Н.В., Черноглазов Д.Г. Робастные семейства матриц с k-диагональным преобладанием. Материалы шестнадцатой международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Выпуск 16. Ч.1. Пушино, Москва-Ижевск: Изд-во НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. С. 109.

42. Зеленков Г.А., Лопатин М.С., Мухин А.В. Графические критерии принадлежности семейств интервальных полиномов классам (n,k) -эквивалентности. Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». Выпуск 29(1). М.: ЛКИ, 2007. С. 131-135.
43. Зеленков Г.А., Лопатин М.С., Черноглазов Д.Г. Вероятностный подход к исследованию робастной устойчивости и неустойчивости семейств полиномов. Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». Выпуск 31(2). М.: ЛКИ, 2007. С. 126-132.
44. Зеленков Г.А., Мякинин В.В., Черноглазов Д.Г. О связи локализации спектра матрицы линейного оператора в унитарном пространстве и ее эрмитовой составляющей. Материалы XVI международной конференции «Математика. Экономика. Образование». V Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2008. С. 119-120.
45. Зеленков Г.А., Неронов В.Ф., Черноглазов Д.Г. Исследование робастного поведения семейств полиномов методом допустимых линейных преобразований. Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». Выпуск 29(1). М.: ЛКИ, 2007. С. 122-130.
46. Зеленков Г.А., Тульчий В.В., Черноглазов Д.Г., Об устойчивости и неустойчивости семейств матриц с возмущениями, ограниченными по норме. Материалы седьмой региональной научно-технической конференции «Проблемы эксплуатации водного транспорта и подготовки кадров на юге России». Новороссийск: РИО МГА имени адмирала Ф.Ф. Ушакова, 2008. С. 220.
47. Зеленков Г.А., Тульчий В.В., Черноглазов Д.Г. Проблемы робастной устойчивости систем управления подвижных объектов. Сборник научных трудов. Выпуск 13. Новороссийск: МГА им. адм. Ф.Ф. Ушакова, 2009. С. 16-18.
48. Зубов В.И. Проблема устойчивости процессов управления. – СПб.: СПбГУ, 2001. – 353с.
49. Зубов И.В. Методы анализа динамики управляемых систем. – М.: Физматлит, 2003. – 223с.
50. Зубов Н.В. Математические методы исследования динамической безопасности. – М.: ВЦ РАН, 2007. – 772 с.
51. Зубов Н.В., Зеленков Г.А., Черноглазов Д.Г. О робастной устойчивости и неустойчивости комплексных интервальных полиномов. Материалы XV международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Выпуск 15. Дубна, Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. С. 13.
52. Зубов Н.В., Зубов С.В. Лекции по математическим методам стабилизации динамических систем. – СПб.: СПбГУ, 2007. – 352 с.
53. Зубов Н.В., Тульчий В.В., Черноглазов Д.Г. О робастной устойчивости семейств нестационарных матриц устойчивых по Важевскому. Материалы международной конференции по математической теории управления и механике. Суздаль, М.:МИАН, 2009. С. 74-45.
54. Зубов н.и. Математические методы анализа и синтеза линейных нестационарных систем управления / под. ред. О.А. Малафеева. СПб.: СПбГУ, 2008. – 85 с.
55. Ильичев А.В., Северцев Н.А. Эффективность сложных систем. Динамические модели. – М.: Наука, 1989. – 311 с.
56. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. – 400с.
57. Квакуернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. – 653 с.

58. Краснощеков П.С., Петров А.А. Принципы построения моделей. – М.: МГУ, 1983. – 83с.
59. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Физматгиз, 1968. – 475 с.
60. Кондратьев С.И., Юсупов Л.Н., Кондратьев А.И. Современные подходы к обеспечению безопасности мореплавания: г. Новороссийск: Новороссийская государственная морская академия – Ростов н/Д: Северо-Кавказский региональный научный центр Российской академии транспорта, 2002. – 352 с.
61. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. – М.: Наука, 1976, т. 1. – 303с.
62. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
63. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
64. Лопатин М.С., Зеленков Г.А., Черноглазов Д.Г. Методы исследования устойчивости полиномов. Часть 2. Матричные и графические методы. Труды Института системного анализа РАН «Динамика неоднородных систем». Выпуск 42(2). М.: ЛКИ, 2010. С. 72-84.
65. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Наука, 1950. – 386 с.
66. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1952. – 432 с.
67. Маркус М., Мишк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. – М.: Наука, 1972. – 232с.
68. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
69. Миронов В.В., Северцев Н.А. Методы анализа устойчивости систем и управляемости движением. М.: Изд-во РУДН, 2002. – 166 с.
70. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
71. Найфс А.Х. Введение в теорию возмущений. – М.: Мир, 1984. – 533 с.
72. Несенчук А.А., Федорович С.М. Метод параметрического синтеза интервальных систем на основе корневых годографов полиномов Харитонова. АиТ, № 7, М.: Наука, 2008. С. 37-46.
73. Пантелеев А.В., Бортакровский А.С. Теория управления в примерах и задачах. – М.: Высшая школа. 2003. – 583 с.
74. Патрушева М.В. Качественный анализ матричных уравнений движения. Проблемы устойчивости и численные методы. СПб.: ООП НИИ Химии СПбГУ, 2000. – 148 с.
75. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. – 624 с.
76. Петров Н.П., Поляк Б.Т. Робастное D-разбиение // Автом. телемех. 1991. № 11. С. 41-53.
77. Петров Ю.П. Очерк истории автоматического управления. СПб.: ООП НИИ Химии СПбГУ, 2004. – 270 с.
78. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление – М.: Наука, 2002. – 303 с.
79. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1989. – 304 с.
80. Постников М.М. Устойчивые многочлены. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы. 1981. – 176 с.
81. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. – М.: Мир, 1984. – 284 с.
82. Раус Э. Об устойчивости заданного состояния движения. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований., 2002, – 199с.

83. Северцев Н.А., Дедков В.К. Системный анализ и моделирование безопасности. – М.: Изд-во “Высшая школа”, 2006. – 464 с.
84. Семенов В.В. Формы математического описания линейных систем. – М.: Изд-во МАИ, 1980. – 94 с.
85. Солодов А.В., Петров Ф.С. Линейные автоматические системы с переменными параметрами. – М.: Наука, 1971. – 620 с.
86. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
87. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Комкнига, 2006. – 472 с.
88. Стрюк Е.В. Области локализации спектров динамических систем по первому приближению // Изв. Вузов. Сев.-Кавк. Регион. Техн. науки. Спец. выпуск. Проблемы водного транспорта, 2007. С. 149-152.
89. Стренг Г. Линейная алгебра и ее приложения. – М.: Мир, 1980. – 456 с.
90. Тульчий В.В., Лопатин М.С., Черноглазов Д.Г. Критерии робастного поведения интервального полинома с ограничениями на группы коэффициентов. Материалы XXIII Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях ММТТ-23», Т.1. Саратов:Изд. СГТУ, 2010. С. 23-25.
91. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. – 564 с.
92. Фаддеев Д.К. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1984. – 736 с.
93. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. – М.: Мир, 1969. – 280 с.
94. Харитонов В.Л. Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. №11. С. 2086–2088.
95. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 665 с.
96. Цыпкин Я.З., Поляк Б.Т. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники, сер. Технич. киберн. Т. 32. М.: ВИНТИ, 1991. С. 3 – 31.
97. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977. – 560 с.
98. Черноглазов Д.Г., Лопатин М.С., Зеленков Г.А. Исследование устойчивости и неустойчивости интервального полинома по вещественным и мнимым частям коэффициентов. Материалы XVII международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». Выпуск 17. Дубна, Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.
99. Черноглазов Д.Г., Лопатин М.С., Тульчий В.В., Зеленков Г.А. Критерии робастной устойчивости и неустойчивости интервального полинома с двумя размахами неопределенности. Сборник научных трудов. Выпуск 14. Новороссийск: МГА им. адм. Ф.Ф. Ушакова, 2010. С. 12-16.
100. Черноглазов Д.Г. Геометрические свойства преобразований Неймарка-Зубова в робастной теории. Материалы девятой региональной научно-технической конференции «Проблемы эксплуатации водного транспорта и подготовки кадров на Юге России». Новороссийск: РИО МГА имени адмирала Ф.Ф. Ушакова, 2010.
101. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. – М.: Наука, 1965. – 207 с.
102. Шевцов Г.С. Линейная алгебра. Теория и прикладные аспекты. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 576 с.
103. Шуп Т. Прикладные численные методы в физике и технике. – М.: Высшая школа, 1990. – 240 с.
104. Bhattacharyya S.P., Chapellat H., Keel L.H. Robust control: the parametric approach. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995. – 672 с.

105. Dikussar V.V., Zelenkov G.A., Zubov N.V. Criteria for the Existence of Uniform Equivalence Classes of Unstable Interval Polynomials. // *Doklady Mathematics*. 2009. Vol. 80, №3. P. 1-3.
106. Dikussar V.V., Zelenkov G.A., Zubov N.V. Conditions for the Existence of Convex Sets of Unstable Polynomials // *Doklady Mathematics*. 2009. Vol. 80, №3. P. 942-943.
107. Faedo S. Un nuova problema di stabilita per le equazione algebriche a coefficienti reali // *Ann. Scuola Norm. Super. Piza, Ser. sci. fis. e mat.* 1953. V. 7, No. 1 – 2. P. 53 – 63.
108. Padmanabhad P., Holot C.V. Complete instability of a box of polynomials // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1992. V.37, No. 8. P. 1230-1233.
109. Sanchez-Pena R., Sznaiar M. Robust systems: theory and applications. Wiley-Interscience, 1998. – 490 c.
110. Taussky O. Bibliography of Bounds for Characteristic Roots of Finite Matrices // National Bureau of Standarts, September 1951. Rept. 1162.
111. Tempo R. Bai E.W., Dabbene F. Probabilistic robustness analysis: explicit bounds for the minimum number of samples // *Syst. Control Lett.* 1997. V. 30. P. 237-242.
112. Weinmann A. Uncertain models and robust control. Wien: Springer, 1991. – 722 c.
113. Zhou K., Doyle J.C., Glover K. Robust and optimal control. Upper Sanddle River, NJ: Prentice Hall, 1996. – 586 c.

Приложение 1 – Иллюстрации

Локализация собственных чисел с помощью неравенств Бендиксона и Гирша для аддитивного представления:

$$A = \frac{A + A^*}{2} + \frac{A - A^*}{2j} = H_1 + jH_2.$$

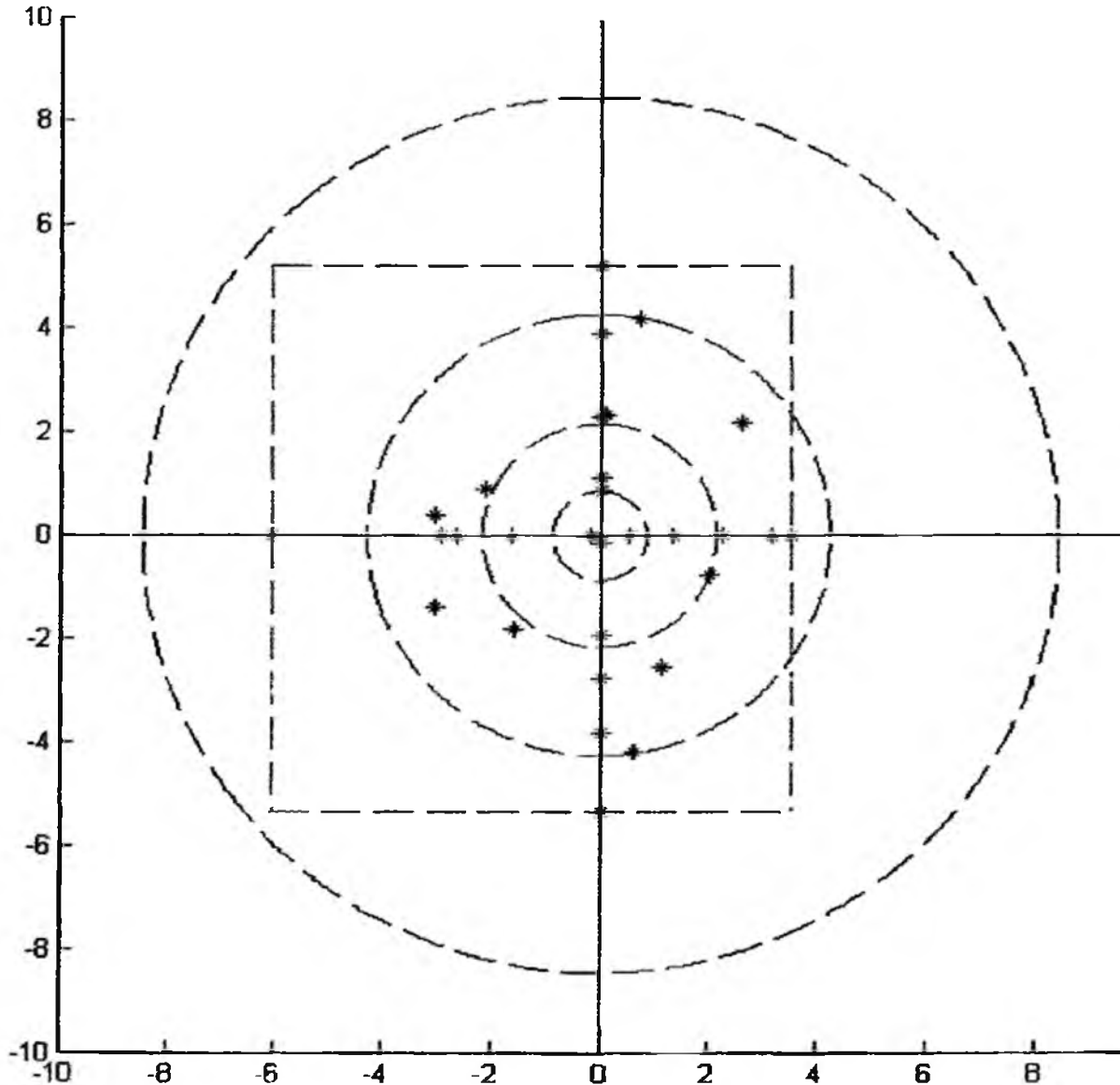


Рисунок 5.1 – Оценки локализации спектра матрицы.

Внешняя и внутренняя окружности – большой и малый сингулярные радиусы.

Окружности между ними – большой и малый спектральные радиусы.

Звездочки на плоскости – собственные числа матрицы A .

Звездочки на мнимой оси – собственные числа матрицы H_1 .

Звездочки на вещественной оси – собственные числа матрицы H_2 .

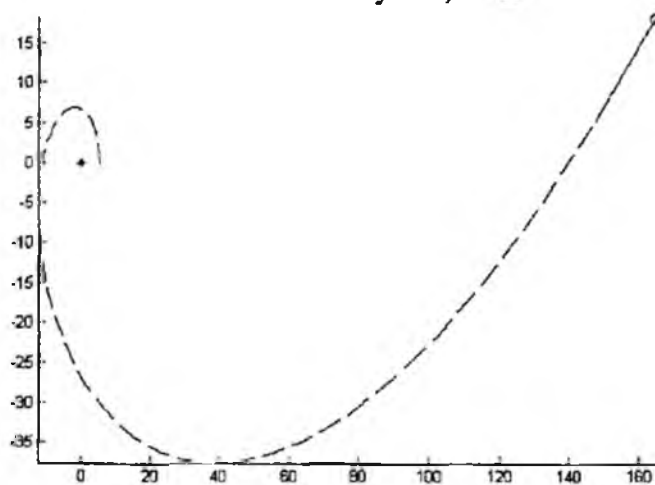
Прямоугольник – оценка с помощью неравенств:

$$\min_{1 \leq i \leq n} \eta_i \leq \operatorname{Re} \lambda \leq \max_{1 \leq i \leq n} \eta_i, \min_{1 \leq i \leq n} \mu_i \leq \operatorname{Im} \lambda \leq \max_{1 \leq i \leq n} \mu_i,$$

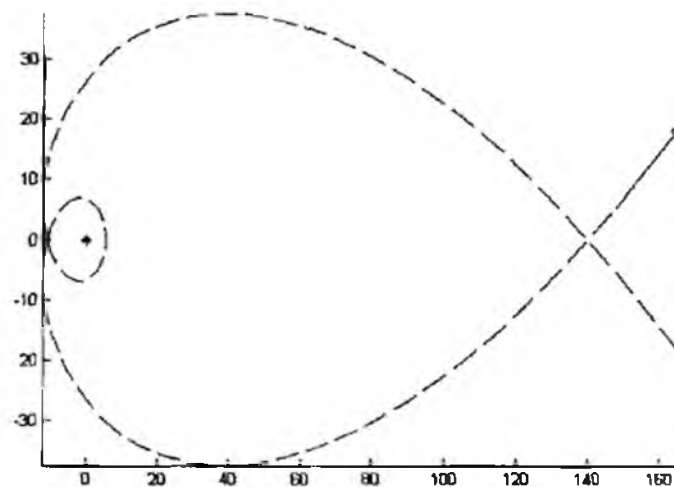
λ, η_i, μ_i – собственные числа матриц A, H_1, H_2 соответственно.

Поведение годографов характеристических полиномов – результаты численных экспериментов.

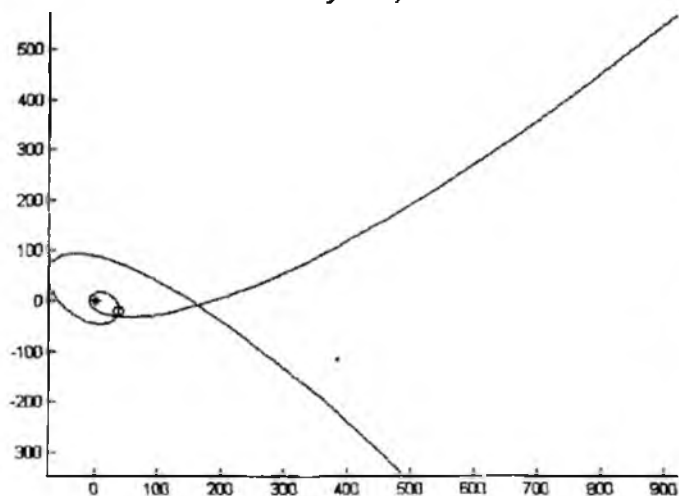
Для непрерывных систем:
вещественный случай, $\omega \geq 0$



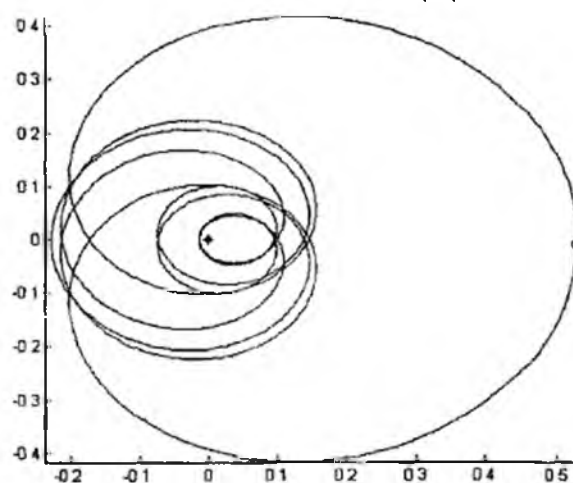
вещественный случай, $-\infty < \omega < \infty$



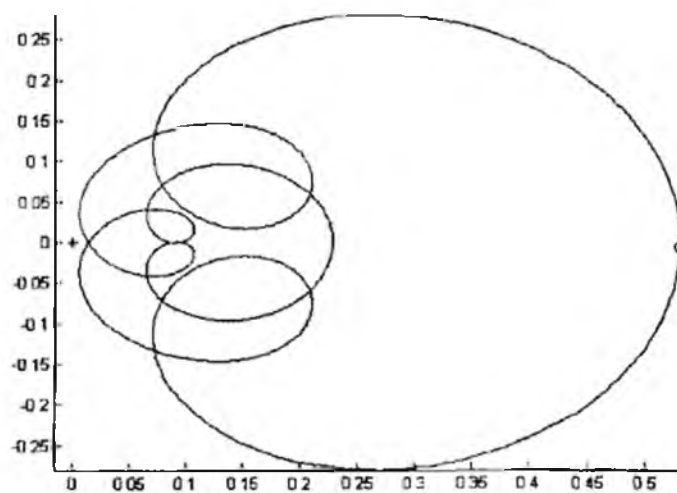
комплексный случай, $-\infty < \omega < \infty$



Для дискретных систем ($0 \leq \omega \leq 2\pi$):
вещественный случай, $|\lambda| < 1$



вещественный случай, $|\lambda| > 1$



комплексный случай, $|\lambda| > 1$

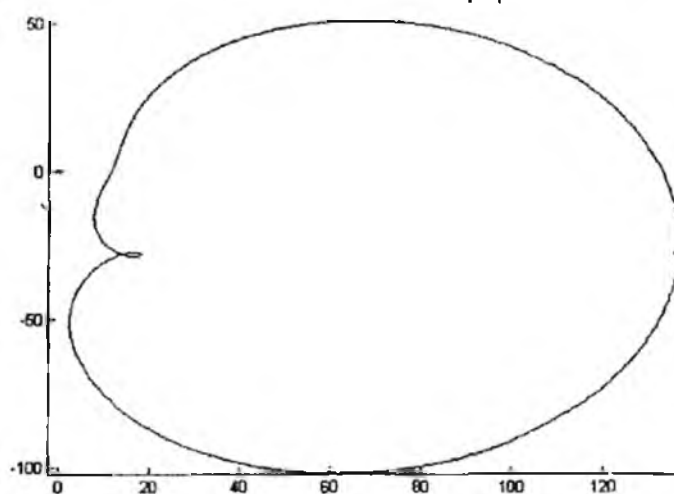
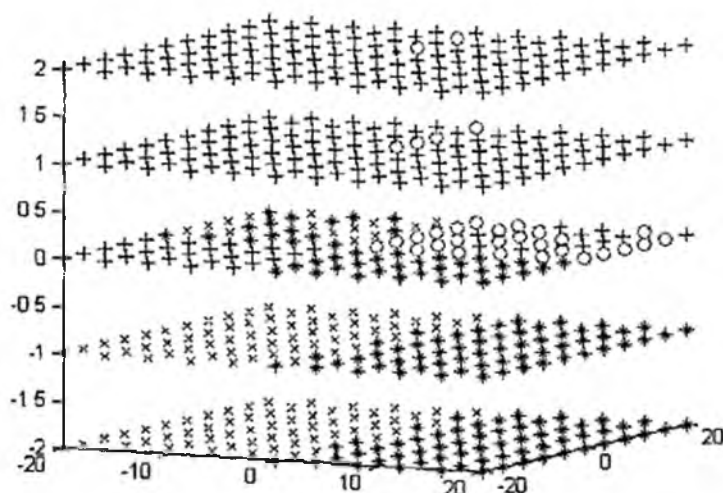
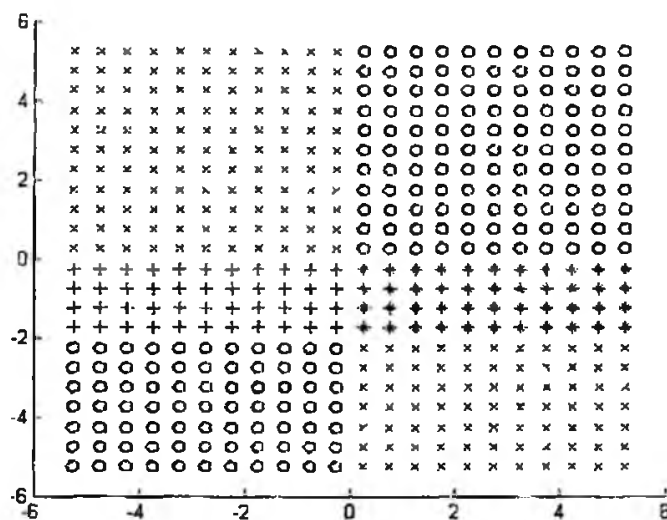


Рисунок 5.2 – Графики годографов.

Исследование параметрического семейства методом Д-разбиений – результаты численных экспериментов.



а) области устойчивости и неустойчивости в пространстве параметров $n = 3$



б) области устойчивости и неустойчивости в на плоскости параметров

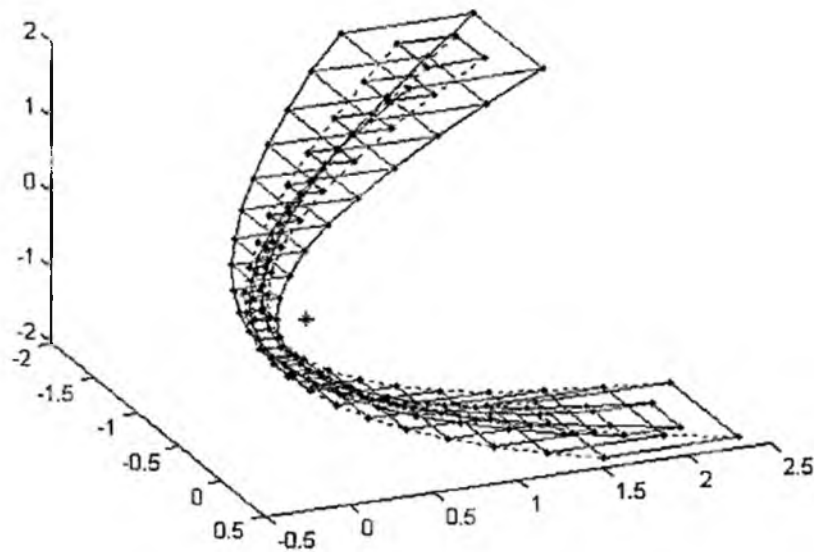
Рисунок 5.3 – Исследование робастного поведения численным методом Д-разбиений.

Круги – $k = 0$; снежинки – $k = 1$; вертикальные кресты – $k = 2$; косые кресты – $k = 3$.

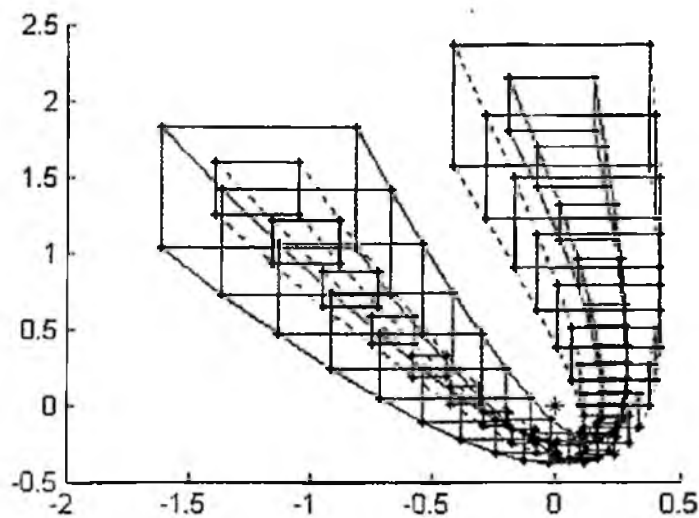
Исследование областей устойчивости и неустойчивости позволяет повысить надежность и безопасность промышленных комплексов описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями за счет проектирования систем с запасами устойчивости и неустойчивости по соответствующим параметрам.

Для матриц: $A = \{a_{ij}(\alpha, \beta, \gamma)\}$ Для полиномов: $P_n(s) = \sum_{k=0}^n b_k s^k, a_k = a_k(\alpha, \beta, \gamma)$

Диаграмма поведения семейства годографов комплексного интервального
характеристического полинома $P_n(j\omega)$.



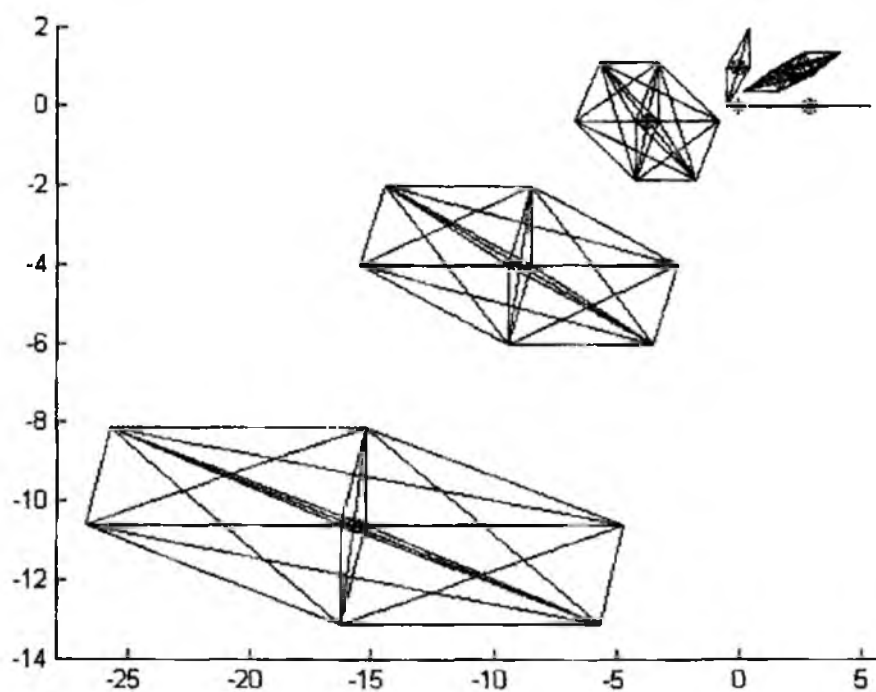
а) Поведение семейства годографов в пространстве



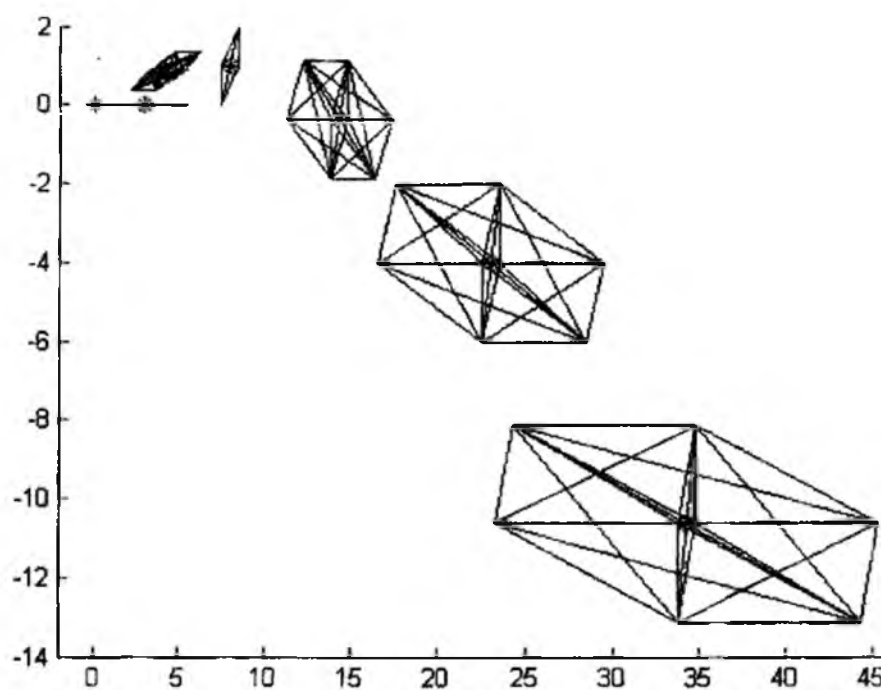
б) Поведение семейства годографов на плоскости

Рисунок 5.4 – Графики угловых годографов интервального семейства полиномов с комплексными коэффициентами.

Результат численного эксперимента иллюстрирует применение обобщения теоремы Харитоновой (глава 2) на классы неустойчивости в комплексном случае, для исследования робастного поведения интервальных полиномов с комплексными коэффициентами. Точки семейства годографов в комплексном случае при $\omega = 0$ как правило располагаются вне вещественной оси, в отличие от вещественного случая. Для анализа робастного поведения характеристического полинома рассматриваются годографы не только при положительных, но и при отрицательных значениях ω , причем внутренние вершинные годографы сменяют внешние при смене знака ω .



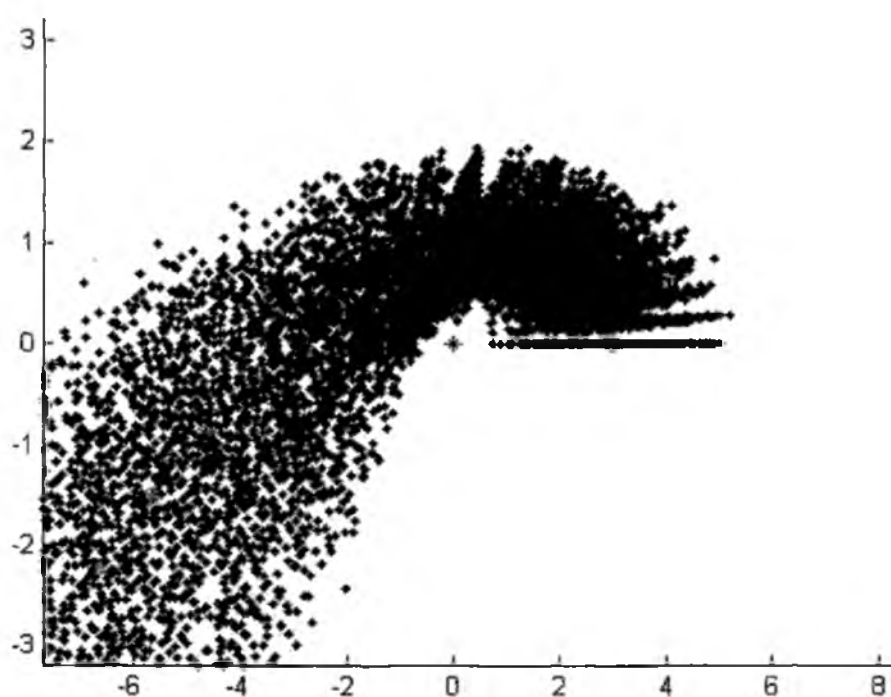
а) Устойчивое семейство



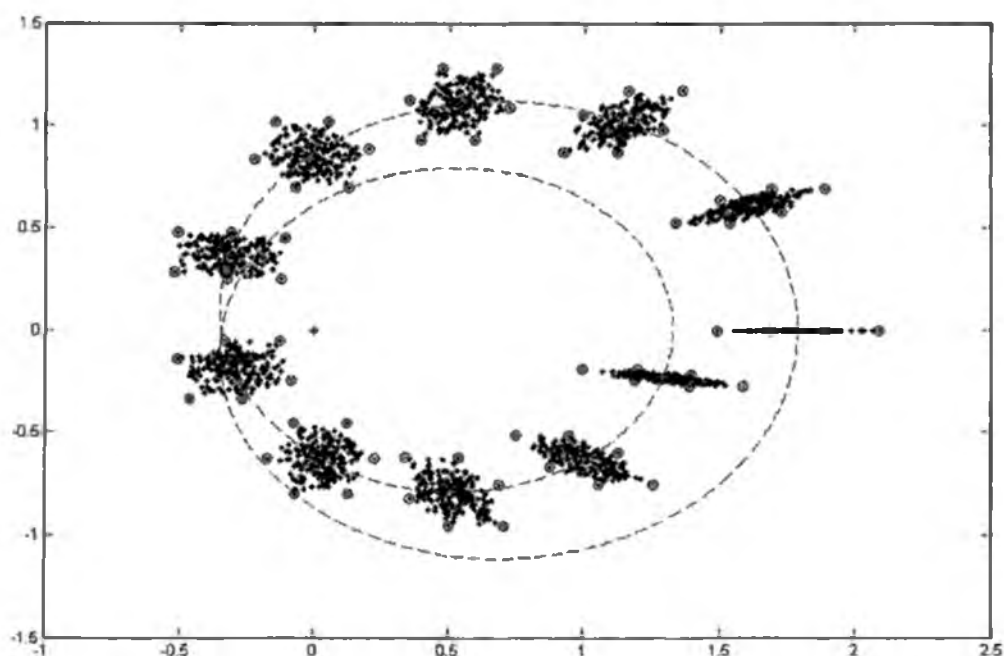
б) Неустойчивое семейство

Рисунок 5.5 – Множества точек годографов аффинного семейства полиномов.

Вероятностная аппроксимация критериев исследования робастной устойчивости и неустойчивости



а) для непрерывных систем управления изображены множества точек семейств годографов по методу Монте-Карло. Этот подход позволяет применить принцип исключения нуля, когда неопределенность описывается сложным образом.

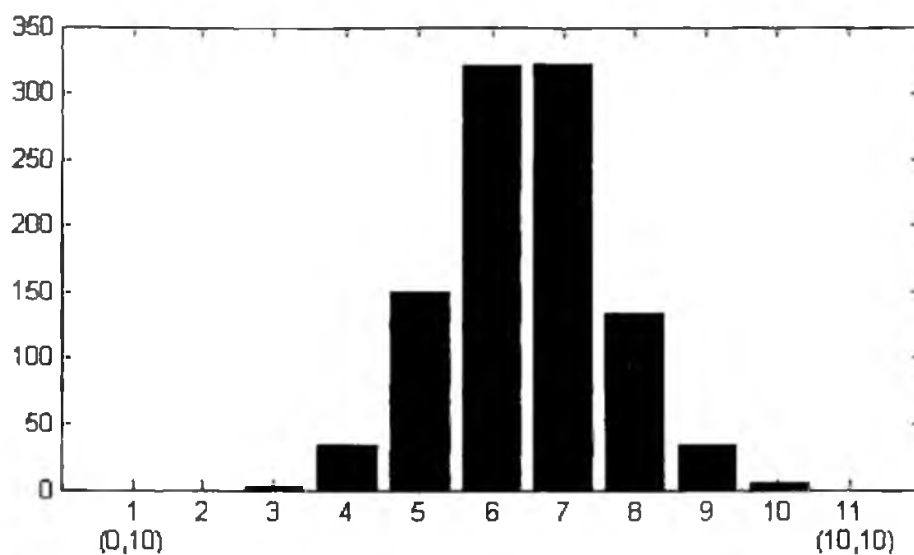


б) Для дискретных систем управления изображены множества точек семейств годографов по методу Монте-Карло.

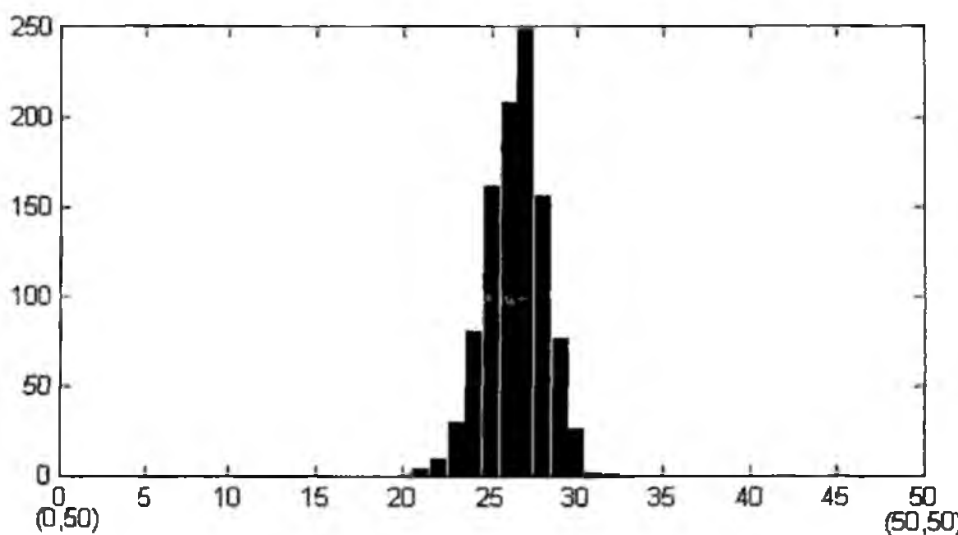
Рисунок 5.6 – Множества точек годографов семейств полиномов.

Частота попадания вещественной матрицы в класс (n, k) -эквивалентности – результаты численных экспериментов.

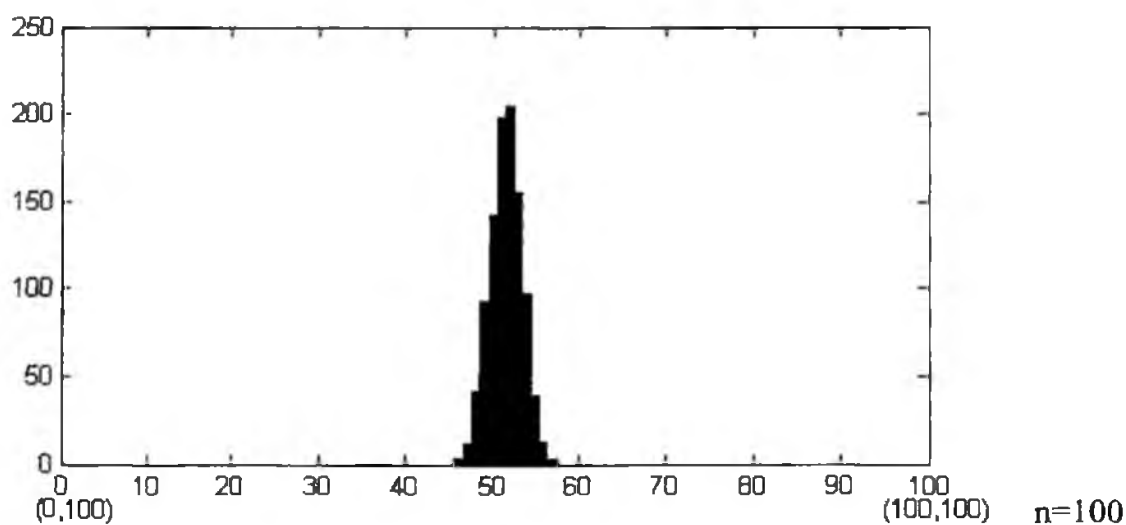
Закон – нормальный; диапазон $(-1,1)$.



$n=10$



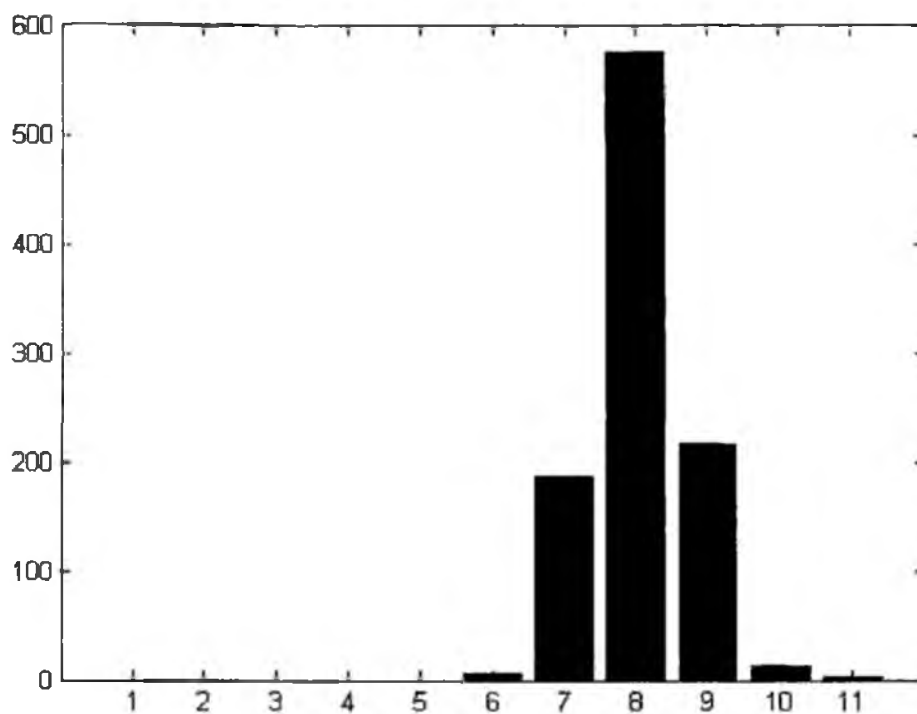
$n=50$



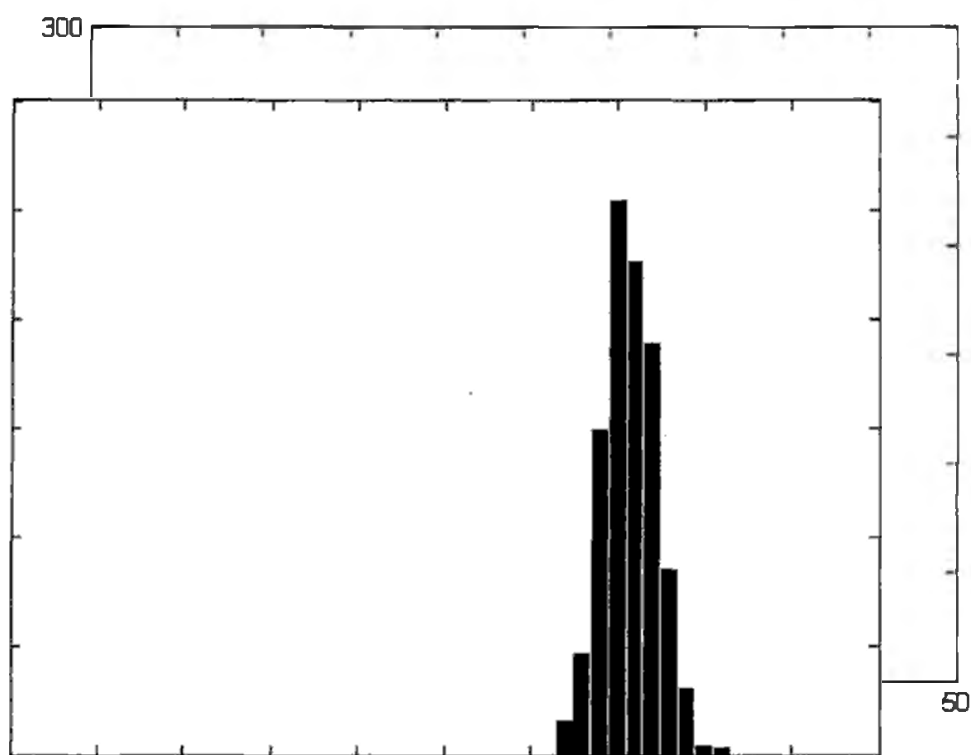
$n=100$

Рисунок 5.7 – Графики распределения матриц по классам (n, k) -эквивалентности с ростом порядка.

Частота попадания вещественной положительной трехдиагональной матрицы в класс (n, k) – эквивалентности. Закон – равномерный; диапазон $(0,1)$



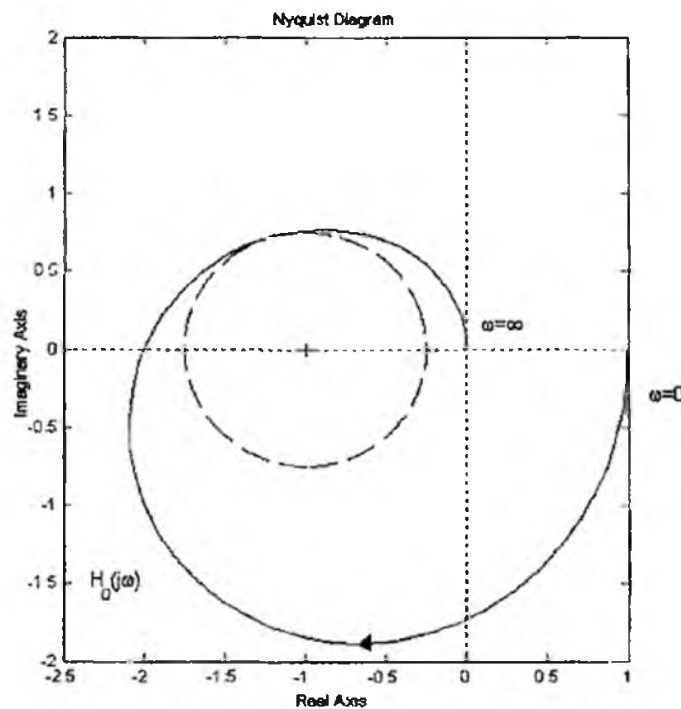
N=10



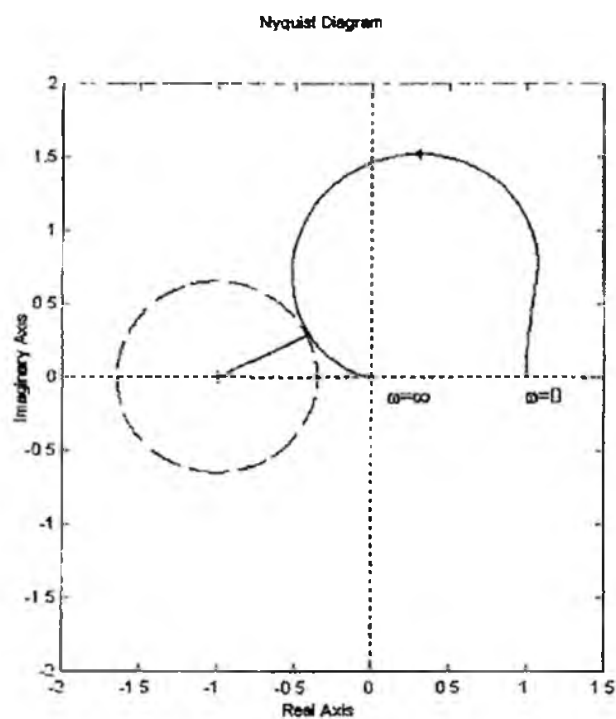
N=50

Рисунок 5.8 – Графики распределения трехдиагональных матриц по классам (n, k) -эквивалентности с ростом порядка.

Исследование устойчивости и неустойчивости семейства систем с неопределенностью передаточной функции



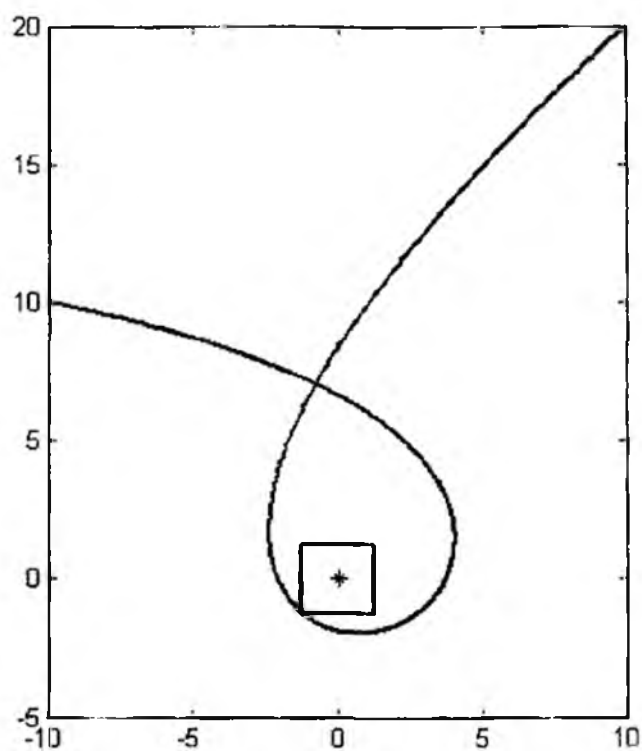
а) Семейство устойчиво



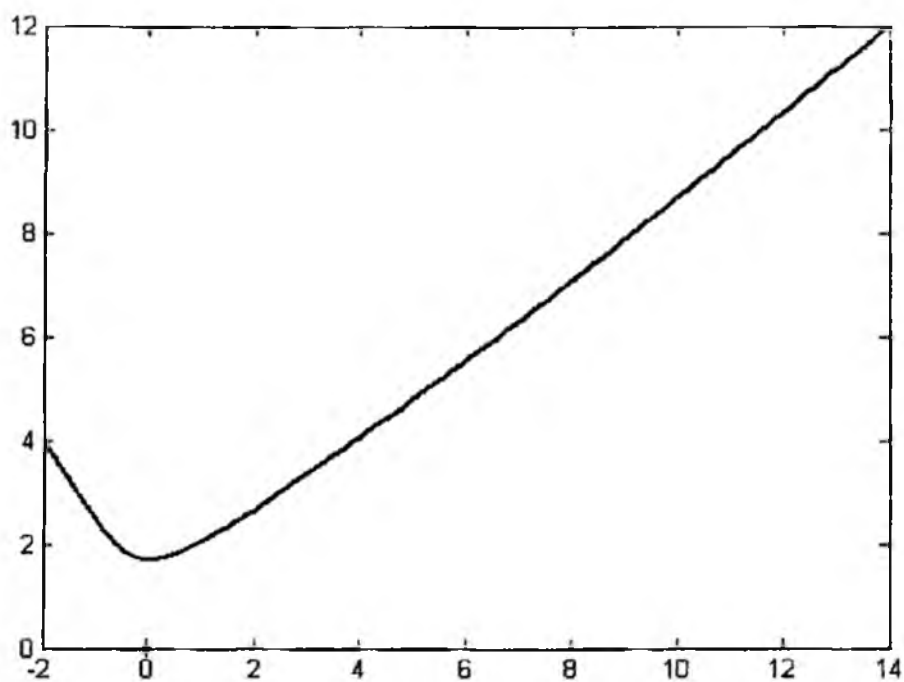
б) Семейство неустойчиво

Рисунок 5.9 – На графике изображены годографы Найквиста для устойчивых и неустойчивых систем. Пунктирная окружность показывает запас робастного поведения.

Показано применение обобщения робастного аналога критерия Найквиста.



а) Годограф Цыпкина-Поляка устойчивого семейства



а) Годограф Цыпкина-Поляка неустойчивого семейства

Рисунок 5.10 – График годографа интервального полинома с вещественными коэффициентами.

Модель управления сваркой

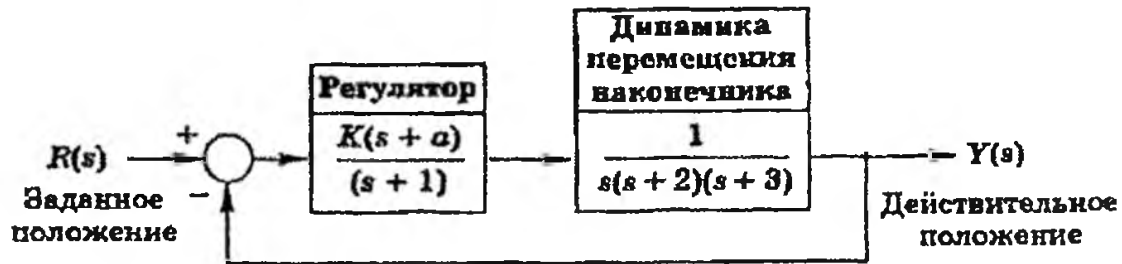


Рисунок 5.11 – Система позиционирования наконечника сварочного узла.

На современных автомобильных заводах широко применяются большие сварочные роботы. Наконечник сварочного узла подводится к различным местам кузова автомобиля и быстро и точно совершает необходимые действия. На рис. 1 изображена структурная схема системы позиционирования наконечника. Требуется определить диапазон значений параметров K и a , при которых система будет устойчивой. Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$1 + G(s) = 1 + \frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = 0.$$

Рассмотрим классический подход к исследованию устойчивости системы.

$q(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + (K+6)s + Ka = 0$. Составим таблицу Рауса:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 11 & Ka \\ s^3 & 6 & (K+6) & \\ s^2 & b_3 & Ka & \\ s^1 & c_3 & & \\ s^0 & Ka & & \end{array}$$

где

$$b_3 = \frac{60-K}{6} \text{ и } c_3 = \frac{b_3(K+6)-6Ka}{b_3}.$$

Коэффициент c_3 устанавливает связь между параметрами K и a , с другой стороны анализ b_3 требует, чтобы K было меньше 60. Полагая $c_3 = 0$, получим:

$$(K - 60)(K + 6) + 36Ka = 0.$$

Отсюда вытекает требуемая зависимость между K и a :

$$a \leq \frac{(60 - K)(K + 6)}{36K},$$

где a - положительная константа. Так, если принять $K = 40$, то получим $a \leq 0,639$.

Система n -го порядка имеет характеристическое уравнение общего вида:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + \omega_n^n = 0.$$

Если разделить все члены уравнения на ω_n^n и ввести обозначение $s^* = s / \omega_n$, то мы получим запись характеристического уравнения в нормированном виде:

$$s^{*n} + bs^{*(n-1)} + cs^{*(n-2)} + \dots + 1 = 0.$$

Например, если уравнение

$$s^3 + 5s^2 + 2s + 8 = 0$$

разделить на $8 = \omega_n^3$, то мы получим:

$$\frac{s^3}{\omega_n^3} + \frac{5}{2} \cdot \frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2}{4} \cdot \frac{s}{\omega_n} + 1 = 0,$$

или

$$s^{*3} + 2,5s^{*2} + 0,5s^* + 1 = 0.$$

В данном случае $b = 2,5$ и $c = 0,5$. Используя нормированную запись характеристического уравнения, мы можем составить сводную таблицу условий устойчивости систем до 6-го порядка включительно. Заметим, что для нашего примера $bc = 1,25$, следовательно система устойчива.

Исследуем робастные характеристики системы, а именно рассмотрим распределение областей робастной устойчивости и робастной неустойчивости системы в окрестности параметров $K = 40$, $a = 0,639$. Применим технику численного построения областей Д-разбиений. В данном случае можно указать границы областей точно, что вообще говоря редко удается для характеристических полиномов систем высокого порядка.

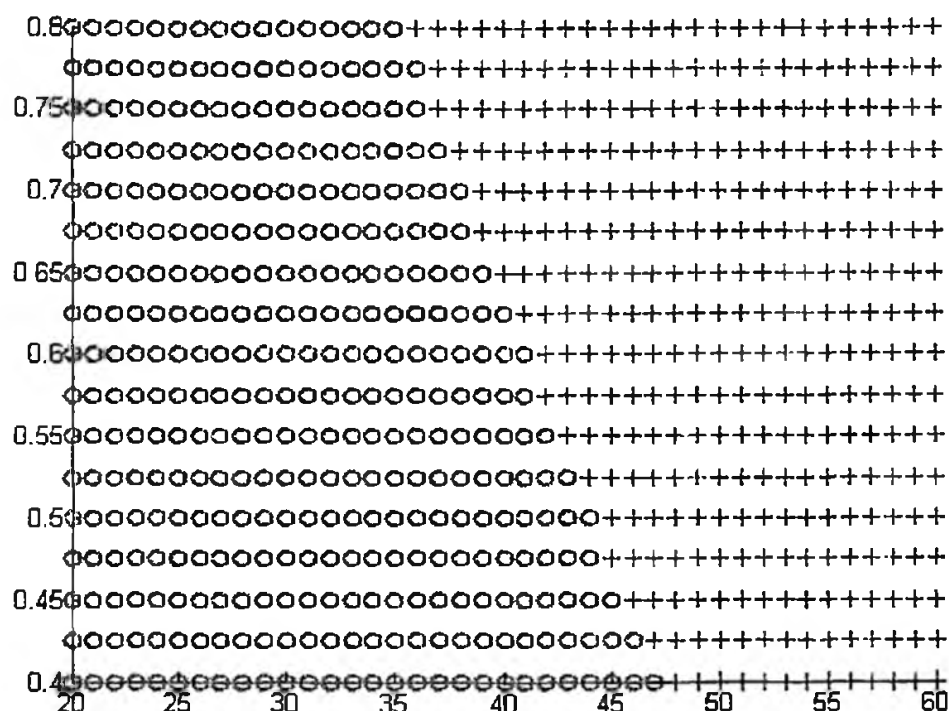


Рисунок 5.12 – Распределений областей устойчивости и неустойчивости.

На графике в окрестности параметров $K = 40$, $a = 0,639$ видны две области: робастной устойчивости (кружки) и область робастной неустойчивости класса (4,2) – два корня справа.

Математическая модель управления боковым движением самолета

Постановка задачи. В качестве объекта управления выбрана упрощённая модель самолёта. Движения самолёта по крену, рысканию и скольжению взаимосвязаны и образуют совокупность так называемого бокового движения. Это движение почти не связано с изменениями угла тангажа и вертикальными перемещениями самолёта, т.е. с его продольным движением.

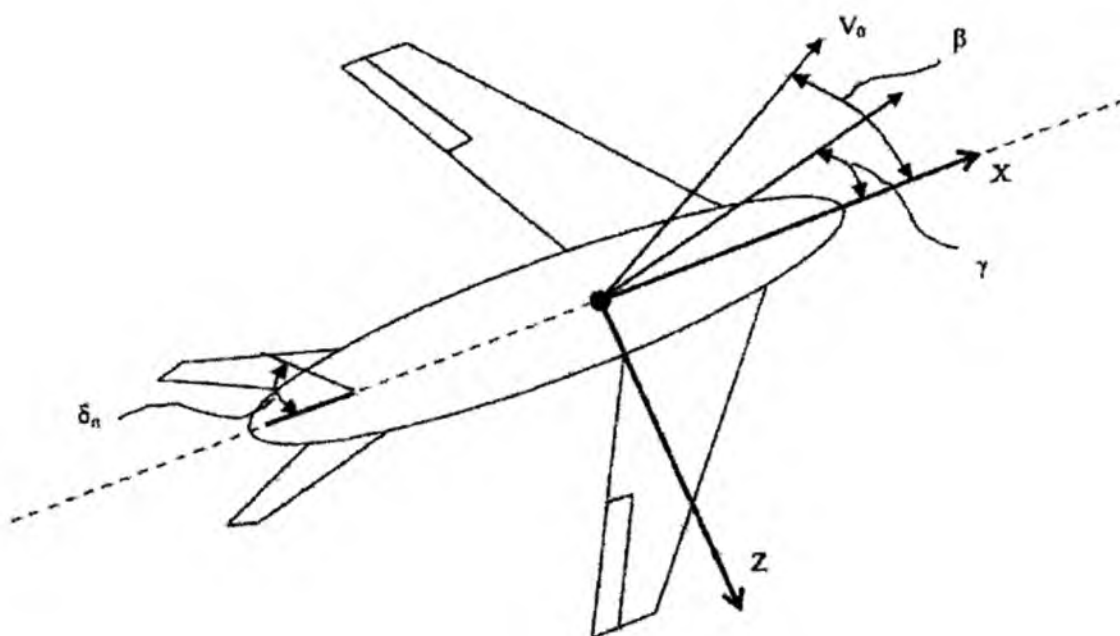


Рисунок 5.13 – Модель исследуемого объекта

Возмущённое боковое движение самолёта относительно установившегося горизонтального полёта описывается системой уравнений пятого порядка (здесь и далее временной аргумент будем опускать для краткости записи):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\beta} = \omega_y + \frac{z^{\beta}}{m_0 V_0} \beta + \frac{g}{V_0} \gamma, \\ \dot{\omega}_x = \frac{J_{xy}}{J_x} \dot{\omega}_y + \frac{1}{J_x} \left[\frac{\partial M_x}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial M_x}{\partial \omega_x} \omega_x + \frac{\partial M_x}{\partial \omega_y} \omega_y + \frac{\partial M_x}{\partial \delta_e} \delta_e \right], \\ \dot{\omega}_y = \frac{J_{xy}}{J_y} \dot{\omega}_x + \frac{1}{J_y} \left[\frac{\partial M_y}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial M_y}{\partial \omega_x} \omega_x + \frac{\partial M_y}{\partial \omega_y} \omega_y + \frac{\partial M_y}{\partial \delta_n} \delta_n \right], \\ \dot{\gamma} = \omega_x, \\ \dot{\psi} = \omega_y, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

β - угол скольжения,

ψ - угол рыскания (курса),

γ - угол крена,

ω_y - угловая скорость рыскания,

ω_x - угловая скорость крена,

δ_e, δ_n - углы отклонения элеронов и руля соответственно.

Значения моментов инерции и их производных, а также параметров самолета считаем заданными:

$$\begin{aligned}\frac{z^\beta}{m_0 V_0} &= -0.0297 \text{ сек}^{-1}; \quad \frac{1}{J_y} \frac{\partial M_y}{\partial \delta_n} = 0.379 \text{ сек}^{-1}; \\ \frac{1}{J_x} \frac{\partial M_x}{\partial \delta_e} &= 1.580 \text{ сек}^{-1}; \quad \frac{1}{J_x} \frac{\partial M_x}{\partial \beta} = -1.17 \text{ сек}^{-1}; \\ \frac{1}{J_x} \frac{\partial M_x}{\partial \omega_x} &= -0.790 \text{ сек}^{-1}; \quad \frac{1}{J_x} \frac{\partial M_x}{\partial \omega_y} = 0.129 \text{ сек}^{-1}; \\ \frac{1}{J_y} \frac{\partial M_y}{\partial \beta} &= 0.379 \text{ сек}^{-1}; \quad \frac{1}{J_y} \frac{\partial M_y}{\partial \omega_x} = -0.0125 \text{ сек}^{-1}; \\ \frac{1}{J_y} \frac{\partial M_y}{\partial \omega_y} &= 0.0096 \text{ сек}^{-1}; \quad \frac{g}{V_0} = 0.0438 \text{ сек}^{-1}; \\ \frac{J_{xy}}{J_y} &= -0.0723 \text{ сек}^{-1}; \quad \frac{J_{xy}}{J_x} = -0.106 \text{ сек}^{-1}.\end{aligned}$$

Управление самолётом осуществляется отклонением элеронов и руля (углы δ_e, δ_n). Минимизируемый функционал качества задается выражением:

$$J = \lim_{(T-t_0) \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left[\left(\frac{\delta_e}{\delta_{e0}} \right)^2 + \left(\frac{\delta_n}{\delta_{n0}} \right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right)^2 + \left(\frac{\beta - \psi}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] dt.$$

Функционал J представлен в форме $\int_{t_0}^T (x' Q x + u' R u) dt$, где

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta_{e0} = \delta_{n0} = \gamma_0 = \varepsilon_0 = 1.$$

С учётом значений коэффициентов система (5.1) может быть представлена в равносильной форме:

$$\begin{cases} \dot{\beta} = \omega_y - 0.0297\beta + 0.0438\gamma, \\ \dot{\omega}_x = -1.2196\beta - 0.7948\omega_x + 0.131\omega_y + 1.5923\delta_e - 0.0405\delta_n, \\ \dot{\omega}_y = 0.4672\beta + 0.0449\omega_x - 0.191\omega_y - 0.1151\delta_e + 0.3819\delta_n, \\ \dot{\gamma} = \omega_x, \\ \dot{\psi} = \omega_y. \end{cases} \quad (5.2)$$

Предполагаем, что приборному измерению доступны все компоненты вектора состояний:

$$y = Ex,$$

где $x = (\beta, \omega_x, \omega_y, \gamma, \psi)'$. Если принять следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} -0.0297 & 0 & 1 & 0.0438 & 0 \\ -1.2196 & -0.7948 & 0.131 & 0 & 0 \\ 0.4672 & 0.0449 & 0.0191 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.0405 & 1.5923 \\ 0.3819 & -0.1151 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u = (\delta_n, \delta_e),$$

систему (5.2) можно переписать в канонической форме: $\dot{x} = Ax + Bu$.

В реальных условиях эксплуатации объект зачастую отличается от предполагаемой модели вследствие различных помех (ветра, изменения эффективности рулей и элеронов и др.). Также может меняться и требуемое направление.

Проверим устойчивость матрицы A . Собственные числа матрицы A содержат положительное и нулевое значения, т.е. матрица является неустойчивой.

Рассмотрим робастные характеристики матрицы A для этого, исключив нулевое собственное число рассмотрим подматрицу:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -0.0297 & 0 & 1 & 0.0438 \\ -1.2196 & -0.7948 & 0.131 & 0 \\ 0.4672 & 0.0449 & 0.0191 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оценим количество классов (n, k) -эквивалентности в которые попадает матрица A_1 , если

значения ее элементов a_{ij} (не нули и не единицы) отличается от номинальных значений на 0.01. Проведем численную проверку по методу Монте-Карло на 1000 матриц:

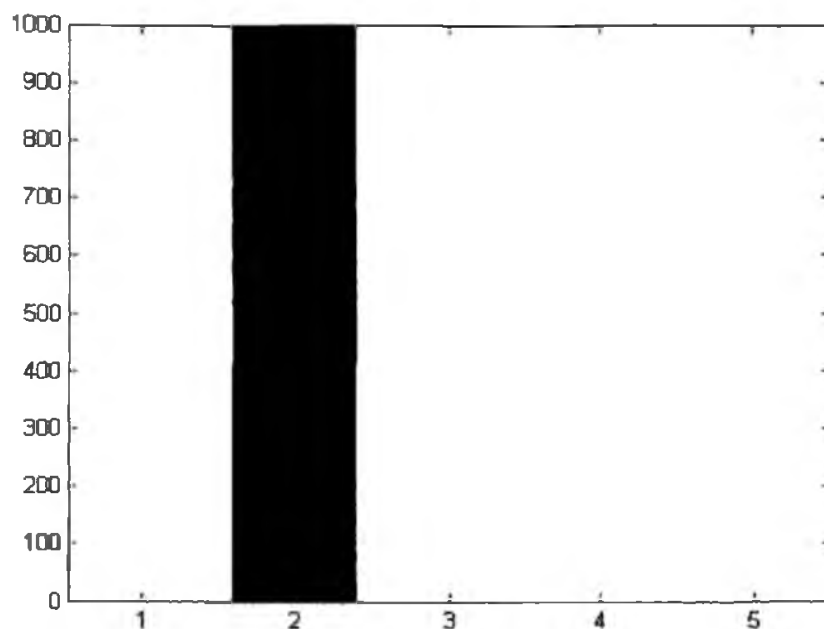


Рисунок 5.14 – Графики распределения матриц по классам (n, k) -эквивалентности.

Все матрицы принадлежат классу неустойчивости (4,1).

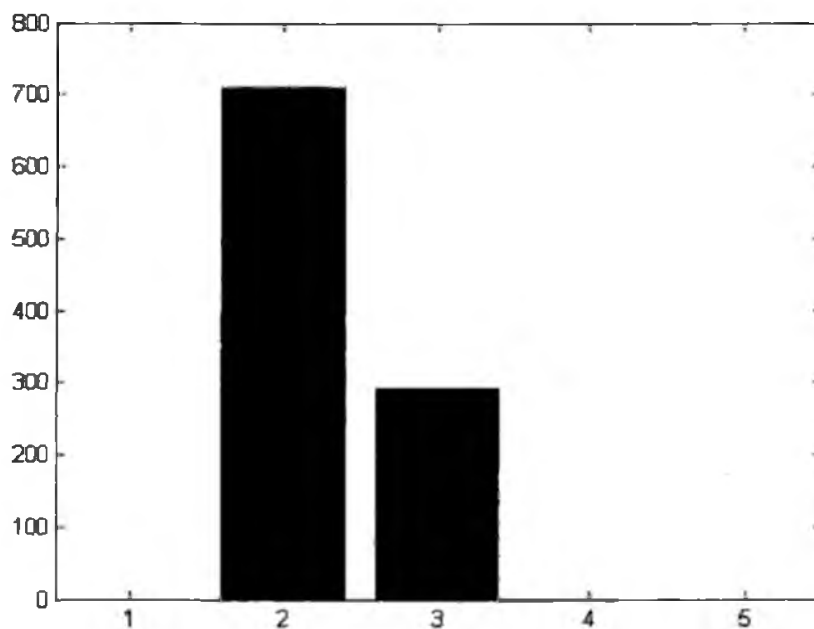


Рисунок 5.15 – Графики распределения матриц по классам (n, k) -эквивалентности.

При отклонении 0.1 получим 720 матриц в классе (4,1), 280 матриц в классе (4,2). Т.е. еще одна фазовая переменная становится неустойчивой.

Исследуем запас устойчивости характеристического полинома A .

Характеристический полином имеет вид:

$$f(x) = x^4 + 0.8054x^3 - 0.4652x^2 - 0.3377x - 0.0139.$$

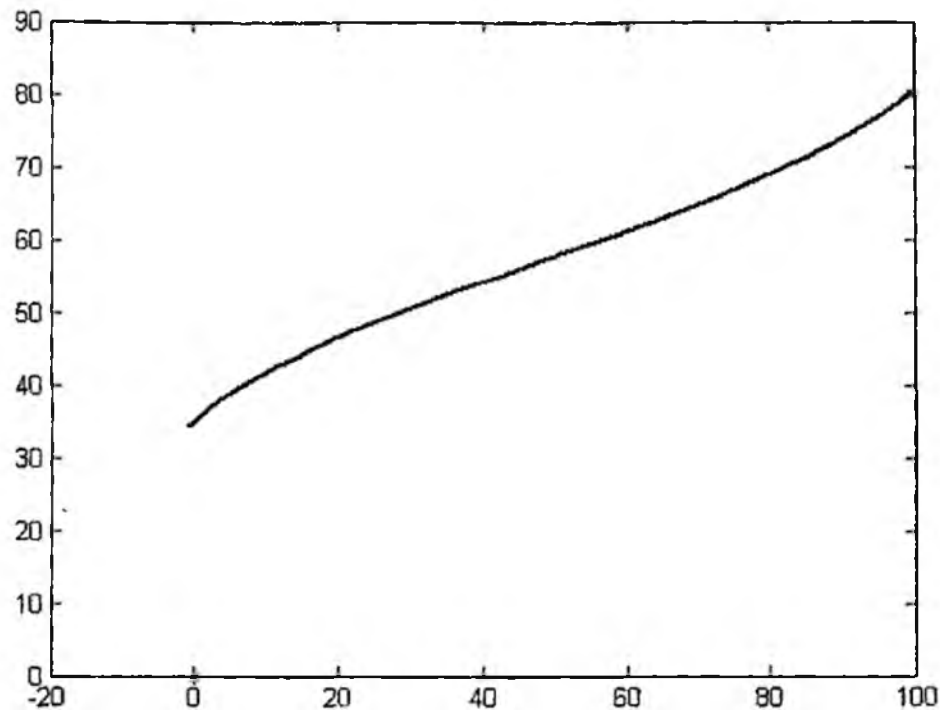


Рисунок 5.16 – График годографа Цыпкина-Поляка для полинома $f(x)$.

Полином $F(x) = \{f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad |a_i - a_i^0| \leq \gamma\alpha_i, \quad i = \overline{0, n}\}$ имеет запас робастного поведения (запас неустойчивого поведения класса (4,1)) $\gamma_{\max}^k = 0,009$ при размахах коэффициентов $\alpha_i = 0,01, n = 4$.

Математическая модель грузового судна типа "Cargo"

Плавание судна в условиях волнения сопровождается качкой и рысканием, а также дрейфом от течения и ветра, которые усложняют его удержание на проложенной траектории. При этом используются различные подходы к синтезу закона управления при описании динамики судна и действующих на него возмущений с помощью моделей различной степени полноты.

Кинематические уравнения движения судна в траекторной системе координат $O\xi\eta$ можно записать в виде (Крылов А.В. Разработка и исследование многофункциональной системы управления движением судна. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. – СПб., 1991):

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= V_x \cos(K - P) - V_y \cos \theta \sin(K - P) + V_T \cos(K_T - P), \\ \dot{\eta} &= V_x \sin(K - P) + V_y \cos \theta \cos(K - P) + V_T \sin(K_T - P); \end{aligned} \quad (5.3)$$

где V_x, V_y - продольная и боковая составляющие линейной скорости;

K - желаемый курс корабля;

P - курс корабля;

V_T, K_T - скорость и курс течения;

θ - угол крена.

Уравнения динамики судна относительно водной среды в связанной системе координат могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}(m + \lambda_{11})\dot{V}_x &= T_x + f_{11}V_x^2 + f_{17}V_x^2\delta^2 + (m + \lambda_{22})V_y\omega_z + \\ &\quad + n_{11}V_y|V_y| + F_{x\text{ВОЗМ}}; \\ (m + \lambda_{22})\dot{V}_y + \lambda_{24}\dot{\omega}_x &= (f_{22}V_x - \mu_{22})V_y + (f_{26}V_x - mV_x)\omega_z - \mu_{24}\omega_x + \\ &\quad + f_{27}V_x^2\delta + n_{21}V_y|V_y| + F_{y\text{ВОЗМ}}; \\ (J_{xx} + \lambda_{44})\dot{\omega}_x + \lambda_{42}\dot{V}_y &= (z_{\Gamma}f_{22}V_x - \mu_{24})V_y + z_{\Gamma}f_{26}V_x\omega_x - \mu_{44}\omega_x - \\ &\quad - mgh_0\vartheta + z_{\Gamma}f_{27}V_x^2\delta + n_{41}V_y|V_y| + M_{x\text{ВОЗМ}}; \\ (J_{zz} + \lambda_{66})\dot{\omega}_z &= [f_{66}V_x - (\mu_{66} + V_x^2\omega_z^{-2}\mu_{22})]\omega_z + \\ &\quad + (f_{62}V_x - \lambda_{22}V_x)V_y + f_{67}V_x^2\delta + n_{61}\omega_y|\omega_y| + M_{z\text{ВОЗМ}}; \end{aligned} \quad (5.4)$$

где ω_x, ω_z - угловые скорости бортовой качки и рыскания;

m - масса судна;

J_{xx}, J_{zz} - моменты инерции относительно соответствующих осей;

λ_{ij} ($i, j = \overline{1,6}$) - присоединенные массы при демпфирующих членах;

f_{ij}, n_{ij} - параметры модели динамики, определяемые по известным гидродинамическим

и инерциальным коэффициентам;

h_0 - метацентрическая высота;

z_Γ - аппликата приложения гидродинамической силы;

$F_{x \text{ возм}}, M_{x \text{ возм}}, M_{z \text{ возм}}$ - суммарные сила и моменты ветро-волновых возмущений

относительно соответствующих осей;

T_x - тяга гребных винтов судна.

В роли управления выступает угол перекладки руля δ .

Полагая угловую скорость бортовой качки равной нулю и пренебрегая нелинейными слагаемыми, получаем следующие уравнения бокового движения судна в горизонтальной плоскости:

$$\begin{aligned}\dot{V}_y &= a'_{11} V_x V_y + a'_{12} V_x \omega_z + b'_1 V_x^2 \delta + f_{y \text{ возм}}; \\ \dot{\omega}_z &= a'_{21} V_x V_y + a'_{22} V_x \omega_z + b'_2 V_x^2 \delta + m_{z \text{ возм}},\end{aligned}$$

где a'_{ij}, b'_i - нормированные коэффициенты, $f_{y \text{ возм}}, m_{z \text{ возм}}$ - сила и момент внешних возмущений. Эта упрощенная модель будет использована для моделирования.

Если ввести следующие обозначения:

$$x = \begin{pmatrix} V_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a'_{11} V_x & a'_{12} V_x \\ a'_{21} V_x & a'_{22} V_x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix}, \delta = u$$

и если считать, что внешние возмущения аппроксимируются белыми шумами, то мы приходим к канонической дифференциальной линейной системе, для которой будут проведены все последующие теоретические рассуждения:

$$\dot{x} = Ax + Bu + w.$$

Исследуем робастное поведение судна с конкретными параметрами. Коэффициенты матрицы A формируются следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} -0,77 & -0,34 \\ -3,39 & -1,63 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A расположены слева от мнимой оси, следовательно матрица устойчива. Матрица не является устойчивой по Важевскому (сильно сверхустойчивой):

$$H_1 = (A + A^*)/2 = \begin{pmatrix} -0,77 & -1,865 \\ -1,865 & -1,63 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы H_1 лежат слева и справа от нуля на вещественной оси.

D-разбиение функции $f(x) = x^2 + ax + b$ в окрестности параметров $a = 2,4$; $b = 0,1025$ является простым, поэтому здесь не приводится.

Математическая модель движения быстроходного морского катера (БК)

Математическая модель БК, которая сформирована в соответствии с основными положениями, изложенными в работе [13], может быть представлена в виде следующей линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{22}(v)x_2 + a_{23}(v)x_3 + a_{25}(v)x_5 + b_{21}(v)u_1, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= a_{42}(v)x_2 + a_{43}(v)x_3 + a_{44}(v)x_4 + a_{45}(v)x_5 + b_{41}(v)u_1(t) + b_{42}(v)u_2(t), \\ \dot{x}_5 &= a_{52}(v)x_2 + a_{53}(v)x_3 + a_{55}(v)x_5 + b_{51}(v)u_1, \\ \dot{x}_6 &= x_7, \\ \dot{x}_7 &= a_{76}(v)x_6 + a_{77}(v)x_7 + 2b_{36}(v)u_3 + 2b_{46}(t)u_4 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь компонентами вектора x состояния БК являются следующие физические переменные, относящиеся к связанной системе координат:

x_1 - рыскание (отклонение от заданного курса),

x_2 - угловая скорость по курсу,

x_3 - угол крена,

x_4 - угловая скорость по крену,

x_5 - угол дрейфа,

x_6 - угол дифферента,

x_7 - угловая скорость по дифференту.

Символом v обозначена скорость хода БК.

Компонентами вектора u управления являются:

u_1 – угол отклонения вертикальных рулей,

u_2 – разностный выдвиг кормовых интерцепторов правого и левого бортов катера,

u_3 – суммарный выдвиг кормовых интерцепторов правого и левого бортов катера,

u_4 – суммарный выдвиг носовых интерцепторов (программное управление).

Конструктивные особенности объекта управления определяют необходимость учета следующих ограничений на управляющие воздействия [13]:

$$\begin{aligned} |u_1| \leq \frac{\pi}{6}, \quad |\dot{u}_1| \leq \frac{\pi}{45} \frac{1}{c} & - \text{по повороту рулей;} \\ |u_3| \leq 0,1\text{м}, \quad |\dot{u}_3| \leq 0,35 \frac{\text{м}}{c} & - \text{по выдвигу интерцепторов.} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Параметры $a_{ij}(v)$ модели (5.5) определяются инерционными и гидродинамическими характеристиками БК (присоединенными массами, моментами инерции, коэффициентами сопротивления, демпфирования и т.п.). Компоненты $b_{ij}(v)$ матрицы распределения управления определяют соответствующие управляющие силы и моменты. Зависимости коэффициентов модели (5.5) от скорости хода v имеют следующий вид:

$$a_{55}(v) = -\frac{\rho}{2} \frac{1}{m_z} v \left[v_0^{2/3} C_z^\beta(v) + n_p S_p C_z^\delta(v) \right],$$

$$a_{54}(v) = \frac{\rho}{2} \frac{1}{m_z} \left[2v_0 - 3.019 v_0^{1/3} n_p S_p C_z^\delta(v) \right],$$

$$a_{52}(v) = -\frac{\rho}{2} \frac{1}{m_z} v_0^{2/3} v C_z^\theta(v),$$

$$b_{51}(v) = \frac{\rho}{2} \frac{1}{m_z} n_p S_p v C_z^\delta(v),$$

$$C_z^\beta(v) = 1.30 - 0.0450v - 0.00302v^2 + 0.000204v^3 - 0.00000320v^4,$$

$$C_z^\theta(v) = -0.1, \quad C_z^\delta(v) = -(1.60 - 0.129v + 0.0255v^2 - 0.00154v^3 + 0.0000272v^4),$$

$$a_{25}(v) = \frac{\rho}{2} \frac{1}{J_y} v^2 [v_0 m_y^\beta(v) + (11.32 + 0.0860v) n_p S_p C_z^\delta(v)],$$

$$a_{22}(v) = \frac{\rho}{2} \frac{1}{J_y} v [v_0 m_y^{\bar{\omega}}(v) + (11.32 + 0.0860v) \cdot 3.019 n_p S_p C_z^\delta(v)] v_0^{1/3},$$

$$a_{23}(v) = \frac{\rho}{2} \frac{1}{J_y} v^2 v_0 m_y^\theta(v),$$

$$b_{21}(v) = -\frac{\rho}{2} \frac{1}{J_y} v^2 (11.32 + 0.0860v) n_p S_p C_z^\delta(v),$$

$$m_y^\beta(v) = 0.170 + 0.0897v - 0.0179v^2 + 0.000772v^3 - 0.00000927v^4,$$

$$m_y^{\bar{\omega}}(v) = -6.44 - 0.313v + 0.0889v^2 - 0.00385v^3 + 0.0000461v^4,$$

$$m_y^\theta(v) = 0.55 + 0.0409v - 0.00629v^2 + 0.0000800v^3 + 0.00000297v^4,$$

$$a_{45}(v) = \frac{\rho}{2} \frac{1}{J_x} v^2 [V_0 m_x^\beta(v) - (1.72 + 0.049v) \cdot n_p S_p C_z^\delta(v)],$$

$$a_{42}(v) = \frac{\rho}{2} \frac{1}{J_x} v [v_0 m_x^{\bar{\omega}}(v) - (1.72 + 0.049v) \cdot 3.019 n_p S_p C_z^\delta(v)] v_0^{1/3},$$

$$a_{44}(v) = -\frac{2}{J_x} N_\theta,$$

$$a_{43}(v) = \frac{\rho}{2} \frac{1}{J_x} v_0 [v^2 m_x^\theta(v) - 2gh_0],$$

$$b_{41}(v) = \frac{\rho}{2} \frac{1}{J_x} v^2 (1.72 + 0.049v) \cdot n_p S_p C_z^\delta(v),$$

$$b_{42}(v) = \frac{\rho}{2} \frac{1}{J_x} v_0 v^2 \Delta C_{mx}^k \frac{1}{\delta_{k0}},$$

$$m_x^\beta(v) = 0.35 - 0.0200v + 0.000700v^2 - 0.0000500v^3 + 0.00000130v^4,$$

$$m_x^{\bar{\omega}}(v) = -0.400 + 0.162v - 0.0633v^2 + 0.00934v^3 - 0.000595v^4 + \\ + 0.00001715v^5 - 0.0000001846v^6,$$

$$m_x^\theta(v) = -0.0135v + 0.00400v^2 - 0.000251v^3 + 0.00000440v^4,$$

$$\Delta C_{mx}^k = -0.00356,$$

$$\Delta C_{mx}^n = -0.005,$$

$$a_{66}(v) = -\frac{2}{J_z} N_\psi,$$

$$a_{67}(v) = -\frac{1}{J_z} (2400 - 66.0v),$$

$$b_{36}(v) = \frac{\rho}{2} \frac{1}{J_z} v_0 v^2 m_z^k(v) \frac{1}{4\delta_{k0}},$$

$$b_{46}(v) = \frac{\rho}{2} \frac{1}{J_z} v_0 v^2 m_z^n(v) \frac{1}{4\delta_{n0}},$$

$$c_{66}(v) = \frac{1}{J_z},$$

$$m_z^k(v) = -0.0880v + 0.00880v^2 - 0.000294v^3 + 0.00000326v^4,$$

$$m_z^n(v) = 0.0233v - 0.00300v^2 + 0.000136v^3 - 0.00000210v^4,$$

$$m_c(v) = 1.32 \cdot e^{-1.12 \ln^2(v/3.5)}.$$

В приводимых выше уравнениях использованы следующие обозначения для физических параметров БК и окружающей среды:

плотность морской воды: $\rho = 0.102 \frac{\text{тс} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^4}$;

водоизмещение объекта: $v_0 = 120 \text{ м}^3$;

центральные моменты инерции: $J_{xx} = 70 \text{ т} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $J_{yy} = 680 \text{ т} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$, $J_{zz} \approx 680 \text{ т} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$;

коэффициенты присоединенных масс: $k_{11} = 0.03$, $k_{33} = 0.415$, $k_{44} = 0.4$, $k_{55} = 0.33$,

$k_{66} \approx 0.33$;

коэффициент демпфирования по крену: $N_\theta = 39.2$;

коэффициент демпфирования по дифференту: $N_\psi = 1000$;

Содержательная задача стабилизации заданного движения БК формируется следующим образом. Выбором программного управления и управления с обратной связью в режиме разгона от нулевой начальной скорости до максимальной скорости хода требуется обеспечить устойчивое движение БК, характеризуемое следующими соотношениями: $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 0$, $x_3(t) = 0$, $x_4(t) = 0$, $x_5(t) = 0$, $x_6(t) = \dot{\psi}_0(v(t))$, $x_7(t) = \psi_0(v(t))$, где $\psi_0(v)$ – заданный оптимальный закон глиссирования (закон изменения дифферента), обеспечивающий судну наилучшие гидродинамические свойства.

Зависимость оптимального дифферента от скорости хода БК представлена графически на рисунке 5.18.

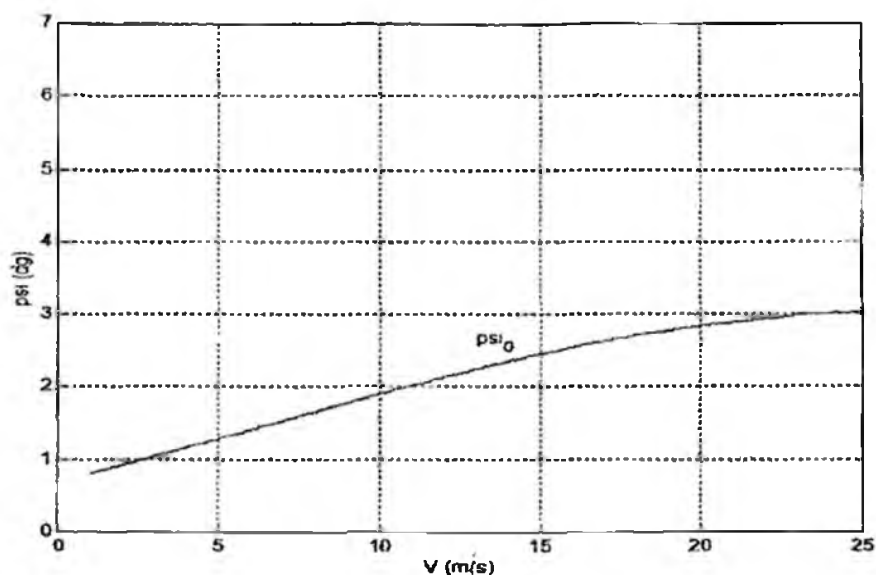


Рисунок 5.18. Оптимальный угол дифферента в функции скорости хода

Анализ математической модели (5.5) позволяет сделать следующие предварительные заключения о динамических свойствах объекта управления:

1. Разомкнутая система неустойчива по дрейфу во всем рабочем диапазоне скоростей хода $0 \leq v \leq 25.3$ м/с (~ 50 узлов).
2. Уравнения бокового движения (первые пять уравнений) и уравнения движения по дифференту являются независимыми.
3. При малых скоростях хода (< 5 узлов) коэффициенты $b_{36}(v)$, $b_{46}(v)$ малы и колеблются в окрестности нуля, что приводит к потере управляемости.
4. В диапазоне скоростей $12 \leq v \leq 18$ м/с система уравнений бокового движения оказывается неустойчивой также по курсу и по крену, что подтверждается графиком, представленным на рис. 5.19.

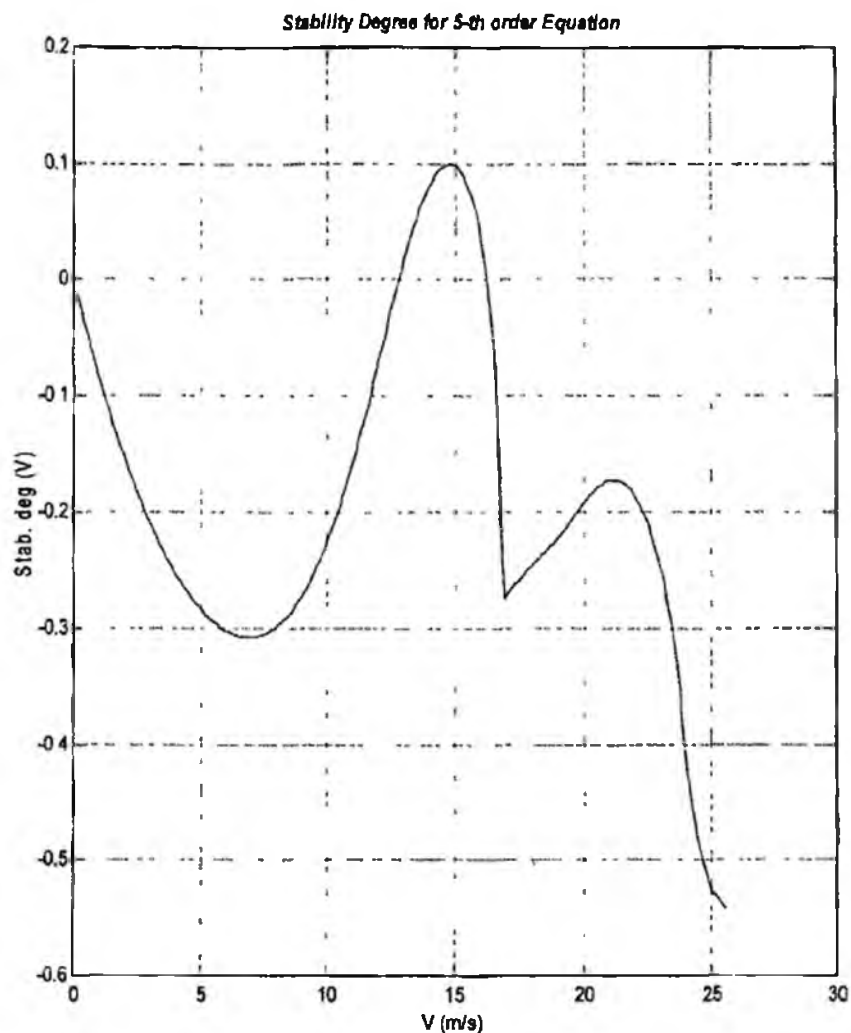


Рисунок 5.19 – Степень устойчивости объекта в функции скорости хода.

Исследование робастного поведения системы (5.5) можно проводить по следующему плану:

1. Исследовать области устойчивости и неустойчивости в окрестности ненулевых элементов матрицы.
2. Определить процентное соотношение устойчивых и неустойчивых режимов в данной окрестности по методу Монте-Карло.
3. Определить типы неустойчивых режимов в данной окрестности с точки зрения классов (n, k) -эквивалентности.
4. Проверить сильную сверхустойчивость (устойчивость по Важевскому) матрицы системы управления.
5. Исследовать неопределенность, ограниченную по норме для матрицы A .

6. Исследовать области робастной устойчивости и неустойчивости матричными и полиномиальными методами (переход к характеристическому уравнению).

7. Расширить область устойчивости матричными и полиномиальными методами, в том числе применяя допустимые линейные преобразования.

Т.к. коэффициенты матрицы системы (5.5) зависят от скорости, то при исследовании могут быть применены следующие подходы:

1. Метод замороженных коэффициентов. При различных значениях скорости с шагом рассчитываются точные значения элементов матрицы системы. К каждой матрице применяются пп.1-7. Этот подход является классическим, но дает достаточно грубую оценку поведения системы, т.к. не учитывает неопределенность в значениях коэффициентов матрицы. Отклонения в коэффициентах матрицы при близких значениях скоростей и их комбинации могут давать совершенно иную картину неустойчивости.

2. Более совершенный способ это построение интервальной матрицы.

а) Значения элементов матрицы изменяются в интервалах, границы которых определяются крайними значениями интервала скоростей (более грубый вариант – точность зависит от шага сетки).

б) Значения элементов матрицы изменяются в интервалах, границы которых определяются максимальными и минимальными значениями функций скоростей на этих интервалах (точное определение границ интервалов).

Этот подход является развитием метода замороженных коэффициентов и позволяет учитывать неопределенность в элементах матрицы и коэффициентах ее характеристического полинома, т.е. исследовать робастную устойчивость и робастную неустойчивость при всех комбинациях параметров для данных интервалов.

Приложение 3 – Программы

Листинг 1.

Программа на языке системы MATLAB для численного построения областей D-разбиений

```
% Для полиномов не более 4 порядка
% Полином передается в виде вектора коэффициентов
% Параметры:
% polinom – вектор коэффициентов номинального полинома
(коэффициент при старшей степени слева)
```

```

% r - переменная первого параметра
% q - переменная второго параметра
% rL - левая граница параметра r
% rstep - шаг параметра r
% rR - правая граница параметра r
% qL - левая граница параметра q
% qstep - шаг параметра q
% qR - правая граница параметра q

% Пример использования
% syms r q
% dr2d2([1.2*r 3.2*q 2.1 2], -5.25, 1, 5.25, -2.25, 0.005, -1.75)
function dr2d2(polinom, rL, rstep, rR, qL, qstep, qR)

axes;
hold on
for R=rL:rstep:rR
    for Q=qL:qstep:qR
        tmp = subs(polinom, 'r', R);
        tmp = subs(tmp, 'q', Q);
        korni = roots(tmp);

        % Определяем D-класс - определяем количество корней справа
        k = 0;
        for i = 1:size(korni,1)
            if (korni(i)>0)
                k = k+1;
            end
        end
        if (k == 0)
            plot(R,Q, 'go', 'LineWidth', 2)
        elseif (k == 1)
            plot(R,Q, 'b*')
        elseif (k == 2)

```

```

        plot(R,Q, 'k+')
    elseif (k == 3)
        plot(R,Q, 'rx')
    elseif (k == 4)
        plot(R,Q, 'm.')
    end
end
end
hold off

```

Листинг 2.

Программа на языке системы MATLAB для вероятностной оценки распределения областей робастного поведения в окрестности номинальных значений матрицы.

```

% Программа проверки окрестности номинальных значений матрицы
% на соотношение классов (n,k)-эквивалентности по методу Монте-
Карло
% Параметры:
% A - квадратная матрица с номинальными значениями элементов
% C - квадратная матрица с (неизменяемыми значениями)
% limits - граница отклонения значений от номинальных
% iters - количество проверяемых матриц со случайными отклонениям
% Выходные данные:
% vec - вектор значений, содержащих количества матриц в каждом
классе
% (n,k)-эквивалентности
%
% Пример использования
% A=[-0.0297 0 0 0.0438; -1.2196 -0.7948 0.131 0; 0.4672 0.0449
0.0191 0; 0 0 0 0];
% C=[0 0 1 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 1 0]
% vec=mkcheck(A, C, 0.01, 1000)
function vec=mkcheck(A, C, limits, iters)
s = size(A,2);

```

```

Sh = A==0;
vec = 1:(s+1);
vec = vec.*0;
for i=1:iters
R = (rand(s).*2-1).*limits;
M = Sh.*R+A+C;
v = sum(eig(M)>0);
vec(v+1) = vec(v+1) + 1;
end
bar(vec)

```

Листинг 3.

Программа на языке системы MATLAB для исследования запаса робастного поведения характеристического полинома графическим методом.

```

% Программа проверки запаса устойчивости номинального полинома
матрицы A
%
% Параметры:
% A - квадратная матрица с номинальными значениями элементов
% C - квадратная матрица с (неизменяемыми значениями)
% limits - граница отклонения значений от номинальных
% w - диапазон частот для построения годографа
% Возвращает запас робастного поведения
%
% Пример использования
% A=[-0.0297 0 0 0.0438; -1.2196 -0.7948 0.131 0; 0.4672 0.0449
0.0191 0; 0 0 0 0];
% C=[0 0 1 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 1 0];
% mpkcheck(A, C, 0.01, [0.01 0.1:0.1:10 10:100 100:10:1000])
function m = mpkcheck(A, C, limits, w)
a = poly(A+C);
n = size(a,2);
r = (1:n).*0+limits;

```

```

U = a;
V = a;
R = r;
T = r;

for i=1:n
    if (mod(i,4)==1)
        V(i)=0;
        T(i)=0;
    end
    if (mod(i,4)==2)
        U(i)=0;
        R(i)=0;
    end
    if (mod(i,4)==3)
        U(i)=-U(i);
        V(i)=0;
        T(i)=0;
    end
    if (mod(i,4)==0)
        V(i)=-V(i);
        U(i)=0;
        R(i)=0;
    end
end
end
U = U(n:-1:1);
V = V(n:-1:1);
R = R(n:-1:1);
T = T(n:-1:1);
X = poly2sym(U)/poly2sym(R);
Y = poly2sym(V)/poly2sym(T);

x=subs(X,'x',w);

```

```

y=subs(Y,'x',w);
sz = size(x, 2);

if (size(y,2)==1)
    y = (1:sz).*0+y;
end

x1 = max([max(x) max(y)]);
y1 = max([max(x) max(y)]);
n1 = norm([x1 y1]);
for i=1:sz
    n2 = norm([x(i) y(i)]);
    if (n1 > n2)
        n1 = n2;
        x1 = x(i);
        y1 = y(i);
    end
end

plot(x,y,'LineWidth',2)
hold on
plot(0,0,'r*')

gz = max([abs(x1) abs(y1)]);
if (x1~=y1)
    gz = min([abs(x1) abs(y1)]);
end

gn = max([abs(a(1)/r(1)) abs(a(2)/r(2))]);
g0 = max([abs(a(n)/r(n)) abs(a(n-1)/r(n-1))]);
m = min([g0 gz gn]);

```

Листинг 4.

Программа на языке системы MATLAB построения матрицы понижения порядка Рауса

```
% Программа иллюстрирующая метод понижения порядка Рауса в
матричной форме
% mppr(P)
% Входные данные:
% P - характеристический полином
%
% Выходные данные:
% MPP - матрица понижения порядка
%
% Пример использования:
% P = [0.6555 0.1712 0.7060 0.0318 0.2769 0.0462 0.0971]
% MPP = mppr(P)

function MPP = mppr(P)
n = size(P,2);

MPP = zeros(n);
P1 = P;
for j = n:-1:2
    t = sum(~(P1>0.0000001));
    if t>0
        'полином не устойчив'
        break;
    end
    Q(1:(j-1)) = P1(2:j).*(mod([1:(j-1)],2)==1);
    P1 = P1 - (P1(1)/P1(2))*[Q 0];
    Q(1) = [];
    P1(1) = [];
    MPP(n-j+1,1:size(P1,2)) = P1;
end
if t==0
```

```

        'полином устойчив'
end

```

Листинг 5.

Программа на языке системы MATLAB, позволяющая исследовать робастное поведение полиномов с аффинным описанием неопределенности с помощью точного решения.

```

syms z
syms w Poly_ real
% первый полином набора - номинальный
Poly_ = [3+2*z+3*z^2+z^3 1+z/2+z^2 (1+z)/2 1+z^2];

% Установка коэффициентов
L = size(Poly_,2);
tau = 0.5;

%cla
% Расчет центрального (номинального) полинома
Z = subs(Poly_,'z','i*w');
re = real(Z);
im = imag(Z);

lim = 2^(L-1);
polys = 2:L;
xx = 1:lim;
yy = 1:lim;
for wi=0:0.5:2.5
    x = real(subs(re,wi));
    y = real(subs(im,wi));
%cla
hold on
plot(0,0,'k*');

plot(x(1),y(1),'g*')
plot(x(1),y(1),'go')

```

```

% Расчет внутренних и внешних вершин
for kqu=1:lim
    qu = bitget(kqu, (L-1):-1:1)*2-1;
    xx(kqu) = x(1)+sum(qu.*x(polys));
    yy(kqu) = y(1)+sum(qu.*y(polys));
end
for ii=1:lim
    for jj=1:lim
        plot([xx(ii) xx(jj)], [yy(ii) yy(jj)])
    end
end

%hold off
    pause(0.2)
end

```