Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет»

На правах рукописи

Еремин Антон Владимирович

МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА, УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С УЧЕТОМ ПРОСТРАНСТВЕННО – ВРЕМЕННОЙ НЕЛОКАЛЬНОСТИ

Специальность: 05.13.18 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора технических наук

Научный консультант
доктор физико – математических наук, профессор
В.А. Кудинов

Самара 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы.

В основе классической теории процессов переноса энергии и вещества лежат принцип локальности и гипотеза сплошной среды. В соответствии с принципом локальности предполагается, что в каждом малом элементе исследуемой области устанавливается локальное термодинамическое равновесие (несмотря на наличие градиентов термодинамических параметров в системе в целом). Данное предположение позволяет использовать фундаментальные уравнения равновесной термодинамики для исследования неравновесных процессов. Однако такой подход справедлив лишь для процессов, продолжительность которых существенно превышает внутренние временные масштабы системы (среднее время свободного пробега микрочастиц, время релаксации системы к равновесному состоянию), а размеры исследуемой области значительно превышают пространственные масштабы (длину свободного пробега, межатомное расстояние).

На основе принципа локального равновесия в классической теории выводятся дифференциальные уравнения параболического типа. При их выводе используются линейные зависимости между потоками переноса и градиентами потенциала переноса (законы Фурье, Фика, Гука, Ома и др.). Полученные таким образом классические уравнения (теплопроводности, диффузии и др.) не учитывают временную и пространственную нелокальность исследуемых процессов. Из их анализа следует, что любое внешнее возмущение вызывает мгновенный отклик системы. Например, в основе вывода параболического уравнения теплопроводности лежит гипотеза Фурье, согласно которой возникновение температурного градиента внутри тела мгновенно (без задержки во времени) вызывает перенос энергии (тепловой поток). В действительности, перенос энергии из одной точки системы в другую происходит за конечный промежуток времени, определяемый физическими свойствами и внутренним строением среды. Данное противоречие приводит к известным парадоксам – отрицательным температурам в обратной тепловой волне, бесконечным поверхностным напряжениям при тепловом ударе, возникновению изотерм внутри тела и др. Аналогичные проблемы возникают в случае использования классических моделей переноса массы и импульса. В частности, полная аналогия с задачами теплопроводности наблюдается в задачах диффузии, при выводе уравнений которых используется закон Фика. В процессах колебаний упругих тел (струн, стержней, пружин, мембран и проч.) и жидкостей наблюдаются мгновенные изменения напряжений во времени, связанные с использованием законов Гука и Ньютона при выводе дифференциальных уравнений. Распространение электромагнитных волн описывается уравнениями Максвелла, частными случаями которых является телеграфное уравнение, описывающее распространение тока (напряжения) в проводниках, и уравнение Клейна – Гордона, применяемое при исследовании распространения электромагнитных волн в плазме. Анализ полученных в диссертации решений перечисленных уравнений, позволяет заключить, что неучет запаздывания системы на внешнее возмущение приводит к скачкообразным изменениям тока и напряжения в проводнике во времени, что свидетельствует о бесконечной скорости их изменения. Перечисленные парадоксы, не подтверждаемые экспериментальными данными, свидетельствуют о несоответствии классических моделей переноса реальным физическим процессам и явлениям. Таким образом, на основе анализа многочисленных теоретических и экспериментальных исследований, сделано заключение об ограниченной возможности применения классических уравнений переноса для описания локально – неравновесных процессов. Выполненные в диссертации исследования сильнонеравновесных процессов диффузии, теплового воспламенения конденсированных сред, нагрева сверхмощными потоками лазерного излучения и др. показали, что именно локально – неравновесные эффекты оказывают определяющее влияние на механизм и основные закономерности их протекания.

Повышенный интерес к изучению процессов, протекающих в локально – неравновесных условиях, обусловлен возможностями их прикладного использования: при разработке и оптимизации технологических процессов поверхностного упрочнения, создания покрытий с уникальными физико – химическими характеристиками, таких как керамики, полимеры и композиционные материалы, полупроводниковые стекла, наножидкости; при оптимизации режимов лазерной обработки изделий (поверхностном упрочнении, резке); при разработке режимов охлаждения компонентов наноэлектроники и нанотехники и др. При моделировании локально – неравновесных процессов возникает необходимость учёта внутренней структуры исследуемых объектов, что приводит к существенному усложнению классических моделей переноса.

Разработке и исследованию математических моделей локально – неравновесных процессов посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований. Применительно к теории теплопроводности уравнения локально – неравновесного переноса получают на основе теории двухфазного запаздывания, двухтемпературных и волновых моделей теплопереноса, из уравнения Больцмана путем использования теории случайных блужданий и молекулярно – кинетическими методами и др. При выводе дифференциальных уравнений используются различные физические подходы к описанию процесса переноса энергии внутри твердых тел (фонон – электронное взаимодействие, фононное рассеивания, двухфазное запаздывание и др.). При описании колебаний упругих тел используют различные модели строения твердых тел (Максвелла, Кельвина – Фойхта, многопараметрические модели), в том числе и усложненные модели, учитывающие инерционность исследуемых процессов.

Наибольший вклад в развитие теории и методов исследования неравновесных процессов внесли Onsager L., Jou D., Casa – Vazquez J., Cattaneo C., Vernotte P., Maxwell J., Tzou D.Y., Zhang Z., Lebon G., Groot S.R., Mazur P., Gyarmati I., Анисимов С.И., Каганов М.И., Пригожин И.Р., Лыков А.В., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Карташов Э.М., Кудинов В.А., Радаев Ю.Н., Соболев С.Л., Бровкин Л.А., Дмитриев А.С., Формалев В.Ф., Кирсанов Ю.А. и др. Из анализа многочисленных научных работ сделан вывод об отсутсвии единой непротиворечивой теории в области локально – неравновесного переноса. Отмечается, что в наименьшей степени разработана теория переноса импульса применительно к обширной области локально – неравновесных колебательных процессов (стержней, пружин, струн, упругих жидкостей, газов, распространения электромагнитных колебаний и проч.), описываемых волновыми уравнениями. Кроме того, в известной литературе недостаточное внимание уделяется решению и исследованию задач, описывающих взаимосвязанные процессы (термодиффузия, термоупругость и др.), многомерных задач переноса в телах сложной геометрической формы, представляющих большой интерес с практической точки зрения. В связи с этим, в диссертации наряду с разработкой теоретических основ математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса, особое внимание уделяется исследованию краевых задач, имеющих большое прикладное значение. Исходя из вышеизложенного следует актуальность темы диссертационного исследования.

Цель диссертационной работы: разработка методологии математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса, численных и приближенных аналитических методов их исследования, а также реализация алгоритмов решения краевых задач переноса (тепла, массы, импульса) в виде комплексов проблемно – ориентированных программ для ЭВМ.

Научное направление заключается в разработке новой концепции математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса на основе модифицированных уравнений сохранения (теплового и материального баланса, равновесия, движения), в том числе с учетом многократной релаксации исследуемых процессов.

Научная новизна:

1. Разработана методология математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса на основе модифицированных уравнений сохранения. В отличие от имеющихся теорий, предлагаемый подход позволяет учесть инерционность процессов переноса тепла, массы, импульса путем введения релаксационных слагаемых непосредственно в балансовые уравнения (теплового и материального баланса, уравнение равновесия и др.) указанных процессов. Возможность учета производных высшего порядка в модифицированных дифференциальных уравнениях переноса (тепла, массы, импульса) позволила обнаружить новые неизвестные ранее закономерности протекания исследуемых процессов. Преимуществом предложенного подхода является возможность его использования для решения широкого круга задач: тепломассообмена, диффузии, колебаний упругих тел, жидкостей и газов, электромагнитных колебаний.

2. На основе метода конечных элементов и теории двухфазного запаздывания разработана дискретная математическая модель локально – неравновесного переноса тепла в твердых телах. Используя современные средства автоматизации расчетов, реализован собственный APDL – алгоритм, позволивший впервые исследовать температурные поля в телах сложной (произвольной) геометрической формы для процессов, протекающих в локально – неравновесных условиях.

3. Выполнено комплексное исследование разработанных в диссертации математических моделей, описывающих локально – неравновесные процессы

тепломассопереноса: тепловое воспламенение и взрыв в конденсированных средах; высокоинтенсивный нагрев поверхности пластины потоком лазерного излучения; теплоперенос в нанокомпозитах; теплообмен в стержнях произвольного сечения в условиях вынужденной конвекции.

4. Используя модифицированные соотношения взаимности Л. Онзагера, разработан метод математического моделирования взаимосвязанного тепломассопереноса. В отличие от известных, в предлагаемой математической модели движущие силы (градиенты искомых функций температуры и концентрации) и вызываемые ими потоки (тепла и массы) разделены во времени. Учет запаздывания в феноменологических законах Фурье, Фика позволил получить новые, неизвестные ранее, закономерности протекания процессов термодиффузии.

5. На основе совместного использования интегрального метода теплового баланса и дополнительных граничных характеристик развит приближенный аналитический метод решения краевой задачи теплопроводности с подвижной границей раздела фаз (задача Стефана с абляцией). Данный подход впервые использован для определения температурных полей в расплавляемом теле конечных размеров, что позволило определить не только закон перемещения фронта плавления и глубину термического слоя, но и время полного расплавления тела.

6. Разработан метод математического моделирования нестационарного локально – неравновесного теплообмена в стабилизированном потоке несжимаемой жидкости. Впервые сформулировано дифференциальное уравнение неравновесного тепломассопереноса, учитывающее релаксационные слагаемые высшего порядка и диссипацию теплоты вследствие внутреннего трения.

7. Разработан класс приближенных аналитический методов решения краевых задач теплообмена в движущихся жидкостях на основе введения новых искомых функций. В зависимости от физических особенностей решаемой задачи, в качестве новой искомой функции используются закон изменения температуры в центре канала по его длине, закон перемещения начальной температуры по продольной координате, толщина пограничного слоя и др. В отличие от существующих методов в диссертации предложено в качестве новой искомой функции использовать зависимость плотности теплового потока на поверхности от продольной координаты.

8. На основе разработанной методологии сформулированы и детально исследованы математические модели колебательных процессов (продольных и поперечных колебаний упругих тела, вынужденных колебаний сжимаемых жидкостей). На основе данных натурного эксперимента выполнена проверка адекватности разработанных математических моделей.

9. Разработан метод математического моделирования электромагнитных колебаний, описываемых полученным в диссертации телеграфным уравнением, учитывающим запаздывание тока и напряжения в формуле закона Ома.

10. Используя аналитическое решение релятивистского уравнения Клейна – Гордона – Фока, выполнено исследование распространения электромагнитных волн в ионизированном газе, позволяющее в сочетании с

экспериментальными методами выполнять оценку концентрации электронов в плазме. Выполненные исследования позволили обнаружить равенство частот колебаний электромагнитного поля в различных точках плазмы, что свидетельствует о самосогласованности плазменных колебаний. Показано также, что плазма является дисперсионной средой для электромагнитных волн, что объясняется наличием в ней собственных внутренних и внешних пространственных и временных масштабов.

11. Используя полученные в диссертации критериальные уравнения конвективного теплообмена, разработаны методы математического моделирования сложных трубопроводных систем с учетом автоматизированной идентификации параметров модели.

12. Алгоритмы и комплексы программ, реализующие численные и аналитические методы решения сформулированных в диссертации краевых задач локально – неравновесного переноса (тепла, массы, импульса).

На защиту выносятся:

1. Методология математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса на основе модифицированных уравнений сохранения.

2. Результаты комплексных исследований локально – неравновесных процессов переноса теплоты в твердых телах (тепловое воспламенение и взрыв, высокоинтенсивный нагрев потоком лазерного излучения, теплообмен в условиях вынужденной конвекции, теплоперенос в нанокомпозитах), выполненных с использованием современных численных методов решения задач математической физики.

3. Метод математического моделирования взаимосвязанного тепломассопереноса, основанный на использовании модифицированных соотношений взаимности Л. Онзагера, учитывающих многофазное запаздывание в тепловой и диффузионной составляющих системы уравнений взаимосвязанного тепломассопереноса.

4. Результаты разработки и развития приближенных аналитических методов исследования теплообмена в стабилизированных потоках несжимаемой жидкости, основанных на введении новых искомых функций и дополнительных граничных характеристик.

5. Метод математического моделирования теплообмена в жидкости с учетом локальной неравновесности процесса, а также диссипации энергии вследствие внутреннего трения.

6. Метод математического моделирования продольных и поперечных колебаний упругих тел (стержней, пластин), позволивший обнаружить новые закономерности колебаний, связанные с учетом многократной релаксации напряжений и перемещений в уравнении второго закона Ньютона. Результаты экспериментальных исследований продольных и поперечных колебаний стержня, проведенных на специализированном оборудовании АО «РКЦ «Прогресс», выполненные с целью проверки адекватности разработанных математических моделей.

7. Метод математического моделирования электромагнитных колебаний на основе модифицированного телеграфного уравнения, учитывающего релаксационные явления.

8. Результаты исследований аналитического решения релятивистского уравнения Клейна – Гордона – Фока, описывающего распространение электромагнитных волн в плазме.

9. Метод математического моделирования разветвленных многокольцевых трубопроводных систем, включающий автоматизированную идентификацию параметров модели.

10. Метод дискретизации трехмерной математической модели локально – неравновесного теплопереноса, а также APDL – алгоритм, реализующий разработанный метод на базе проблемно – ориентированного программного комплекса Ansys.

11. Результаты разработки алгоритмов и комплексов программ для решения сформулированных в диссертации краевых задач тепломассопереноса, колебаний упругих тел и электромагнитных колебаний с учетом пространственно – временной нелокальности исследуемых процессов.

Достоверность результатов подтверждается соответствием разработанных моделей реальным физическим процессам и явлениям, протекающим в технических системах; сравнением результатов с данными натурных экспериментов, а также с опубликованными в открытой печати результатами, полученными другими авторами; непротиворечивостью полученных результатов современному представлению о внутреннем строении веществ и механизмах переноса (тепла, массы, импульса) в них.

Теоретическая и прикладная значимость работы состоит в разработке новой концепции математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса на основе модифицированных уравнений сохранения. Учет релаксационных слагаемых высшего порядка позволил исследовать процессы переноса, представляющие большой интерес с прикладной точки зрения. В диссертационной работе получены дифференциальные уравнения (преимущественно гиперболического типа), наиболее адекватно описывающие изменение искомых функций при малых и сверхмалых значениях временной и пространственной переменных (сопоставимых с длиной и временем свободного пробега микрочастиц (молекул, электронов, фононов)). Первостепенное значение этот подход имеет применительно к исследованию высокоинтенсивных процессов: горение твердых топлив; детонация; тепловое воздействие на материалы сверхмощных лазерных импульсов фемто – и пикосекундной длительности; фазовые превращения; высокочастотные колебательные процессы.

Выполненные теоретические исследования позволили установить некоторые новые, неизвестные ранее, особенности протекания физических процессов. К их числу относятся: невозможность мгновенного принятия граничных условий в реальных физических процессах – их установление включает некоторый диапазон начального временно́го участка; перемещение граничного условия первого рода по пространственной переменной в заключительной стадии процесса; наличие в поперечных колебаниях закрепленного на одном из торцов стержня практически мгновенного перескока (хлопка) при переходе его свободного торца из одного крайнего положения в другое; одновременные колебания каждой точки твердого тела с двумя (и более) различными амплитудами и частотами; теоретическое подтверждение самосогласованности электромагнитных колебаний в плазме (колебания с одинаковой частотой в различных точках плазменного потока).

В диссертационной работе приводятся результаты разработки приближенных аналитических методов решения краевых задач теплообмена в движущихся жидкостях. Прикладная значимость данного вопроса обусловлена широким распространением теплообменного оборудования в технологических схемах промышленных предприятий, системах теплоснабжения населенных пунктов и др. На основе электрогидравлической аналогии и полученных в диссертации критериальных уравнений конвективного теплообмена, разработан метод математического моделирования гидродинамики и теплообмена в сложных трубопроводных системах. Совместное использование приближенных аналитических и вычислительных методов позволило разработать компьютерные модели сложных многокольцевых трубопроводных систем, выполнить оптимизацию гидравлических режимов их работы, в том числе для объединенной тепловой сети города Самары.

Полученные результаты могут быть использованы в научно – исследовательских и конструкторских организациях для всесторонних исследований по рассмотренным проблемам, а также для проектирования и изготовления технических устройств в различных отраслях промышленности.

Связь диссертационной работы с планами научных исследований. Диссертация разработана в соответствии с планами госбюджетных тематик № 1.21.11 (01.01.2009 г. – 31.12.2012 г.) «Разработка методов получения точных аналитических решений дифференциальных уравнений гиперболического типа»; по направлению целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы»; в рамках научно – исследовательской работы № 551/02 «Разработка нового направления получения аналитических решений задач математической физики на основе определения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий», а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (проект №1273). Исследования проводились при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта: 18 – 79 – 00171; руководитель: Еремин А.В.), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта: 18 – 38 – 00029 «мол_а»; руководитель: Еремин А.В; код проекта: № 20 – 38 – 70021 «Стабильность»), Совета по грантам Президента РФ (код проекта: МК – 2614.2019.8, руководитель: Еремин А.В.), Министерства образования и науки Самарской области в рамках конкурса молодых ученых и конструкторов (2017 – 2020 гг.).

Внедрение результатов работы. Результаты диссертации были использованы при выполнении работ по созданию компьютерных моделей тепловых сетей предприятий ПАО «Т Плюс», а именно Безымянской ТЭЦ, Самарской ТЭЦ, Самарской ГРЭС, Центральной и Привокзальной отопительных котельных (г. Самара), создании объединенной компьютерной модели тепловой сети ОАО «Предприятие тепловых сетей» (г. Самара) с автоматизированной идентификацией параметров, а также при разработке концепции развития системы теплоснабжения г. Самары. Разработанные приближенные методы решения краевых задач теплопроводности и термоупругости использовались при проведении энергетического аудита ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет». Экономический эффект, подтвержденный актами внедрения, приведенными в приложениях диссертации, превышает 14 млн. руб.

Личный вклад автора является определяющим на всех этапах проведенных исследований и состоит в постановке проблем, разработке методов математического моделирования процессов переноса, выполнении основной части вычислительной работы.

Апробация работы. Основные результаты работы были представлены на XIV, XV, XVI Минском международном форуме по тепло – и массообмену (г. Минск, 2012, 2016, 2020 гг.); на VI, VII Российской национальной конференции по теплообмену (г. Москва, 2014, 2018 гг.); на международных научно – технических конференциях «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (г. Самара, 2019 г.), «Пром – инжиниринг» (г. Сочи, 2019, 2020 г.), «Динамика и виброакустика машин» (г. Самара, 2016 г.), «Неизотермические явления и процессы: от теории теплового взрыва к структурной макрокинетике» (г. Черноголовка, 2016 г.), «Математические методы в технике и технологиях» (г. Саратов, 2016 г.), «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика» (г. Москва, 2007, 2009, 2011, 2014 – 2016 гг.), «Математическая физика и ее приложения» (г. Самара, 2012, 2014 гг.), «Инновационные технологии в области агроинженерии» (г. Москва, 2012 г.); на Всероссийских научных конференциях с международным участием «Энерго – и ресурсосбережение. Энергообеспечение нетрадиционные и возобновляемые источники энергии» (г. Екатеринбург, 2017 – 2019 гг.); «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2010, 2011, 2013, 2019 гг.); в Школе – семинаре молодых ученых и специалистов под руководством академика Леонтьева А.И. «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках» (2019 г.); в Школе – семинаре молодых ученых и специалистов под рук. Академика РАН Алемасова В.Е. «Проблемы тепломассообмена и гидродинамики в энергомашиностроении» (г. Казань, 2010 г.).

Публикации. Материалы по теме диссертации представлены в 160 печатных работах. В автореферате приводятся 50 основных научных работ, из которых 26 статей – в международных изданиях, индексируемых в базе научного цитирования Web of Science, 10 статей – Scopus, 14 статей – в журналах из списка ВАК. По результатам исследований опубликованы 2 монографии и 2 учебных пособия в издательствах «Лань», «Проспект», СамГТУ.

Структура и объем работы. Диссертация включает введение, семь глав, выводы, список используемой литературы, приложения; содержит 240 страниц основного текста, 43 страницы приложений, 145 рисунков и 3 таблицы. Список цитируемой литературы состоит из 254 наименований.

1. ОБЗОР РАБОТ ПО НАПРАВЛЕНИЮ РАЗРАБОТКИ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕНОСА, МЕХАНИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ

Применительно к исследованию многих краевых задач (нелинейных, с неоднородными физическими свойствами, переменными во времени коэффициентами теплообмена, для многослойных тел и др.) точные решения пока не получены. Для отдельных задач (с переменным начальным и граничными условиями, с источниками теплоты и др.) известные аналитические решения выражаются плохо сходящимися функциональными рядами.

При решении линейных краевых задач математической физики для плоских тел (пластина) и тел с осевой и центральной симметрией (цилиндр, шар) применяются следующие методы: классические аналитические – разделения переменных (Фурье), метод источников (функций Грина) [31 – 34, 70]; методы интегральных преобразований с конечными и бесконечными пределами интегрирования (преобразования Ханкеля, Лапласа, Лежандра и др.) [32, 33]; ортогональный метод Л. В. Канторовича (приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям) [26, 28, 29]; различные модификации интегрального метода теплового баланса [5, 7, 8, 15, 46, 61, 69, 98, 99]. Применяются методы, связанные с совместным использованием аналитических (Фурье) и методов интегральных преобразований (Лапласа) с вариационными (Ритца) и методом Бубнова – Галеркина [49, 116, 117].

Применение классических аналитических методов и методов интегральных преобразований приводит к решениям в форме бесконечных рядов, содержащих функции Бесселя различного порядка. Функции Бесселя нулевого порядка появляются в решениях при выполнении уравнения Бесселя, полученного в результате разделения переменных в дифференциальном уравнении, а функция Бесселя первого порядка находится в знаменателе константы интегрирования, определяемой из начального условия краевой задачи. Неудобство использования функций Бесселя в аналитических решениях краевых задач состоит в том, что они имеют вид бесконечных степенных рядов, ограниченных числом членов ряда получаемого решения. В итоге окончательное решение краевой задачи принимает вид тройного ряда, каждый из которых содержит число членов, равное числу приближений получаемого решения. Кроме того, содержащиеся в решениях собственные числа затруднительно описать какой – либо общей формулой, так как они находятся из решения степенных алгебраических (характеристических) уравнений, которые могут быть решены лишь численными или графическими методами. Таким образом, классические точные аналитические методы и методы интегральных преобразований применительно к решению краевых задач с осевой и центральной симметрией малоэффективны и особенно в случаях, когда требуется определять искомую функцию при малых и сверхмалых значениях времени, так как в данном случае необходимо использовать большое число членов ряда решения. В связи с чем, возникает потребность в разработке более эффективных методов решения, среди которых получили распространение вариационные (Ритца) и ортогональные методы Канторовича и Бубнова – Галеркина, а также интегральный метод теплового баланса. Эти методы более универсальны, чем точные, однако их недостатком является малая точность. Основная причина состоит в том, что их использование приводит к решению больших систем алгебраических уравнений с плохо обусловленными матрицами коэффициентов. Так, например, применение к решению указанных задач ортогонального метода Л. В. Канторовича при большом числе приближений затруднительно, так как относительно собственных чисел краевой задачи получаются большие системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Здесь, также, как и при использовании классических методов, собственные числа находятся из степенных характеристических уравнений, которые не описываются общей формулой. Применение классических точных аналитических методов и методов интегральных преобразований совместно с вариационными методами и методами взвешенных невязок (ортогональный метод Бубнова – Галеркина) позволяет получать решения, не содержащие функции Бесселя. Однако при большом числе приближений точность определения собственных чисел оказывается недостаточной, что практически исключает данные методы при решении задач для малых и сверхмалых величин времени из – за плохой обусловленности матриц систем алгебраических уравнений.

Переходя к анализу исследований, связанных с использованием интегрального метода теплового баланса, отметим, что данное направление получения аналитических решений краевых задач как для плоских тел, так и для тел с осевой и центральной симметрией, является весьма эффективным и перспективным. При его использовании процесс переноса тепла рассматривается, как двухстадийный. Первая стадия характеризуется постепенным продвижением фронта возмущения от границы тела к центру. Во второй стадии изменение температуры происходит во всей области определения пространственной переменной. Введение дополнительной искомой функции применительно к каждой стадии процесса позволяет привести решение уравнения в частных производных к решению двух уравнений в обыкновенных производных. Характеризуясь большой универсальностью и простотой, этот метод имеет также и существенные недостатки, связанные с низкой точностью получаемых решений. Основная причина состоит в трудностях увеличения числа членов ряда принимаемого решения ввиду отсутствия условий (кроме основных граничных условий), из которых можно определять его неизвестные коэффициенты. В этой связи в работах [5, 30, 41, 44 – 46, 56 – 59, 65, 126] с целью повышения точности вводятся дополнительные искомые функции и дополнительные граничные условия. Следует особо отметить, что их использование не изменяет исходную постановку краевой задачи, а является лишь вспомогательным средством для существенного упрощения как процесса получения решения, так и окончательного выражения для него. Это связано с тем, что дополнительные искомые функции являются определяемыми величинами в процессе получения решения исходной краевой задачи даже в случае, если они не рассматриваются отдельно. Назначение дополнительных краевых условий состоит в том, что их выполнение решением адекватно выполнению уравнения в точках границы, что приводит к его удовлетворению и внутри области, с точностью, зависящей от числа приближений (от числа используемых дополнительных условий). При этом получение решения не связано с выполнением исходного уравнения внутри области – достаточно выполнить лишь осредненное по пространственной координате уравнение, что приводит к существенному упрощению процесса получения решения, так как позволяет привести решение уравнения в частных производных к решению обыкновенного уравнения для дополнительной искомой функции. К тому же, применение дополнительных граничных условий позволяет при определении неизвестных коэффициентов решения получать сильно разреженные матрицы систем алгебраических линейных уравнений ввиду их цепочности, что снимает проблему их плохой обусловленности, независимо от числа приближений.

В диссертации рассматривается метод решения краевых задач, основанный на применении свойства параболического уравнения, связанного с бесконечной скоростью изменения теплоты. Здесь также используются дополнительные искомые функции и дополнительные краевые условия, но не производится деление процесса на две стадии. Этот метод приводит к высокоточным аналитическим решениям всех перечисленных выше задач, а для некоторых из них (с переменными начальными и граничными условиями с источниками теплоты и др.) – эффективные точные аналитические решения, имеющие простой вид алгебраических полиномов с коэффициентами, экспоненциально стабилизирующимися во времени.

Проблеме вывода гиперболических уравнений с учетом конечной скорости передачи теплоты посвящены работы [6, 20, 34, 41, 52 – 56, 60, 63 – 65, 119]. Необходимость их получения связана с парадоксами процесса теплопроводности, заложенными в решение параболического уравнения. При получении этого решения применяется закон Фурье, в котором тепловой поток и градиент температуры не разделены по времени. Поэтому изменение градиента температуры сопровождается мгновенным изменением теплового потока. Таким образом, уже при выводе параболического уравнения теплопроводности в него закладывается бесконечная скорость передачи теплоты. В частности, установлено, что при граничных условиях первого рода тепловой поток принимает бесконечные величины, что противоречит физическим законам.

Результаты решений таких уравнений в некоторых временных диапазонах не отражают реальное изменение температуры, что впервые было показано Риманом, который доказал, что различным изотермическим кривым соответствуют разные уравнения теплопроводности. Среди них параболическое уравнение – это лишь частный случай. Риман ответил также на вопрос о том, каким должно быть температурное поле тела произвольной формы, когда изотермы в некоторый момент времени, оставались бы изотермами и в другие моменты времени. Это означает, что температура в любой точке среды должна быть представлена в виде пространственно – временных зависимостей. Кроме того, отвечая на вопрос – какие свойства будет иметь тело, чтобы система кривых оставалась изотермами, Риман впервые показал, что эти свойства определяются не физическими параметрами, а дифференциальными уравнениями, в которых могут быть операторы, содержащие производные высокого порядка и смешанные производные. Следовательно, параболическому уравнению отвечает лишь определенный класс изотермических поверхностей.

Отметим, что параболическое уравнение описывает распространение теплоты, осуществляемое взаимодействующими частицами (электронами, атомами, молекулами). Количественные характеристики процесса определяются теплопроводностью и теплоемкостью. В то же время, распространение теплоты представляет волновой процесс, определяемый скоростью волны и релаксацией потока. Следовательно, в нестационарных условиях распространения теплоты, вообще говоря, не соответствует закону Фурье, так как он не содержит параметры, которые учитывают конечную скорость процесса переноса тепла. Необходимость их использования обусловлена тем, что теплота передается частицами (электронами, молекулами, ионами), а результат переноса – температура тела – связана с их скоростями. Следовательно, в формуле для передачи теплоты необходимо учитывать скорости движения частиц, время и длину их свободного пробега и взаимодействие при ударах.

Обобщение формулы Фурье было сделано авторами работ [6, 11, 20, 34, 65], получившими для теплового потока соотношение, содержащее слагаемое $\tau_r \partial q / \partial \tau$, где $\tau_r = a / \vartheta^2$ – время (константа) релаксации, ϑ – скорость изменения теплового возмущения, τ – время. Следовательно, величиной $\tau_r \partial q / \partial \tau$ учитываются инерционные свойства потока, то есть учитывается время, необходимое для его ускорения.

А.В. Лыковым обобщенная формула Фурье была найдена исходя из теории Максвелла, основанной на аналогии свойств твердых тел и жидкостей. Здесь релаксация представляется как «рассасывание» напряжений сдвига, как рассеивание энергии в деформируемого твердого тела, переводом её в теплоту. На основе этой теории, доказана адекватность времени релаксации теплового потока τ_r и напряжений.

Используя обобщенную формулу Фурье было выведено гиперболическое уравнение, (уравнение Максвелла – Каттанео – Лыкова). Подобное уравнение найдено и А.С. Предводителевым, исходя – из анализа скоростей движения изотерм, при использовании положений Римана, полностью отказываясь при этом от релаксационной трактовки формулы Фурье.

Найденное гиперболическое уравнение аналогично телеграфному (применительно к электрическим цепям). Эквивалентность переноса тепла и электричества базируется на аналогии законов Ома и Фурье и на законе Видемана – Франца, согласно которому отношение теплопроводности и электропроводности металлов при неизменной температуре неизменно. Следовательно, электроны переносят и электрический заряд и теплоту. Ввиду высокой концентрации свободных электронов в металле теплота передается в основном электронами. Высокоэлектропроводные металлы имеют также и высокую теплопроводность.

Аналогия между данными явлениями подтверждается тем, что явление сверхпроводимости сопровождается также и явлением сверхтеплопроводности. Например, теплопроводность жидкого гелия при температуре – 270 $°C$ составляет $\lambda = 0{,}0106\, Вт/(м \cdot K)$, а при температуре – 271 $°C$ она увеличивается до $\lambda = 0{,}9869 \cdot 10^6\, Вт/(м \cdot K)$. Время релаксации теплового потока здесь $\tau_r \approx 10^{-3} c$, а скорость перемещения тепловой волны $\vartheta = 19\, м/с$ [119].

Для большой части практических задач влияние конечной скорости переноса теплоты мало. В этом случае могут использоваться классические инженерные методы моделирования теплопереноса [10, 14, 21, 81, 110, 124, 252]. Например, скорость диффузии теплоты на порядки меньше скорости тепловой волны [119]. Однако в ряде процессов наиболее достоверные результаты можно получать лишь из решения гиперболических уравнений. К числу таких процессов относятся: быстропротекающие процессы, время которых сопоставимо с временем релаксации τ_r, а также любые другие процессы, рассматриваемые на весьма малых начальных временных участках.

При достаточно больших значениях времени решения гиперболических и параболических уравнений полностью совпадают. Ответ на вопрос – в каких временных диапазонах нужно применять решения гиперболических уравнений, связан с детальным исследованием этих решений. В известной литературе они приводятся, обычно, для полупространства. В связи с чем, создаются трудности при их исследовании, т.к. нет невозможности представить исходную задачу в безразмерном виде. Поэтому отсутствует возможность их всестороннего анализа и выполнения заключений наиболее общего плана. Кроме того, решение для полупространства не позволяет выполнять исследования обратной волны, возникающей после достижения фронтом тепловой волны противоположной стенки. Результаты таких исследований приводятся в данной работе.

Распространение волн в различных средах, как известно, описывается классическим волновым уравнением, которое характеризует незатухающие колебания – не учитывает сопротивление среды процессу возмущений. Исследованию его точных аналитических решений посвящены работы [9, 27, 106, 107]. Трудности нахождения решений задач для движущихся жидкостей обусловлены их нелинейностью, так как коэффициент гидравлического сопротивления зависит от скорости. Уравнения для давления и скорости реальных вязких жидкостей приведены в [118]. Они являются зависимостями между средними в данном сечении скоростью, давлением и плотностью. К тому же они содержат среднее касательное напряжение. Система уравнений для таких средних величин может быть замкнутой лишь в случае, когда дана зависимость касательного напряжения от скорости. При этом полагается, что при неустановившемся течении касательное напряжение представляется такой же функцией скорости, как и при установившемся, т. Е. применяется гипотеза квазистационарности. Согласно данному предположению, закон Ньютона выполняется и при нестационарном изменении скорости, также полагается неизменность и соотношение и для коэффициента трения. Строгое математическое обоснование данного допущения отсутствует, и поэтому оно может быть подтверждено лишь экспериментальными данными [118]. В ряде случаев (при незначительных изменениях давления во времени) теория квазистационарности подтверждается экспериментами, однако при значительных изменениях скорости и давления наблюдаются значительные расхождения. Таким образом, теория квазистационарности может применяться лишь для ограниченного круга задач, когда изменение скорости в нестационарном режиме мало отличается от стационарного.

При существенно нестационарных процессах уравнения осредненных величин не позволяют оценить влияние нестационарности на силу трения. В связи с чем, для получения зависимости касательных напряжений от осредненных значений, давления, скорости и плотности используются уравнения Навье – Стокса, которые описывают локальные их значения. Такой путь приводит к интегрированию системы двух дифференциальных уравнений – для давления и скорости, одно из них является интегро – дифференциальным [118].

Таким образом, нелинейные уравнения, представленные для осредненных значений искомых функций, совместно с краевыми условиями представляют квазистационарную задачу. Их решение можно получить лишь путем численного интегрирования. Используя метод линеаризации разработанный И.А. Чарным, система уравнений может быть сведена к одному линейному дифференциальному уравнению относительно давления (или скорости). Анализ точных решений этого уравнения показал, что со временем давление изменяется скачкообразно. Это свидетельствует о бесконечной скорости передачи импульса Она оказывается заложенной в уравнениях законов Гука и Ньютона.

В настоящей работе используется метод, основанный на определении ускорений этих величин с использованием коэффициентов релаксации. Главные положения метода изложены в диссертации.

Возмущения, вызывающие упругие деформации среды, распространяются со скоростью, определяемой физическими свойствами. В случае, если колебательное движение не сопровождается перемещением вещества, процесс называется волновым. Условием распространения волн является упругость среды. При этом бывают продольные и поперечные волны. Для продольных волн упругость характеризуется модулем Юнга, а для поперечных, например в струне, – ее натяжением. Формулы скорости волны содержат плотность и модуль упругости (для струны – натяжение), которые характеризуют соответственно инертность среды и её упругость.

Уравнения волновых процессов относятся к гиперболическим. Нахождение их точных решений для незатухающих колебаний при воздействии возмущающей силы представляет серьезные математические трудности. Решения таких уравнений получены лишь для отдельных случаев при известных законах изменения возмущающей нагрузки [9, 27]. Исследования, связанные с проблемой бесконечной скорости передачи импульса, в известной литературе не обнаружены. В диссертации показано, что учет релаксационных свойств материалов приводит к значительному отличию результатов по сравнению со случаем их неучета. И, в частности, учет этих свойств приводит к устранению проблемы скачкообразного изменения напряжения, возникающего ввиду того, что формулой закона Гука описывается бесконечная скорость передачи импульса. Учет конечной скорости передачи импульса приводит к значительному изменению как формы колебаний, так и времени затухания процесса.

В диссертации дан вывод гиперболических уравнений применительно к колебаниям твердых тел с учетом релаксационных свойств материалов, для которых были получены точные решения и проведены их многочисленные исследования.

Классическая необратимая термодинамика основана на теории локального теплового равновесия и гипотезе сплошности исследуемых сред. То есть полагается, что в любом весьма малом объеме наблюдается локальное равновесие, несмотря на то, что в системе в целом наблюдаются градиенты различных параметров [41, 92, 93, 127 – 130, 170 – 193]. В случае, если скорость изменения макропараметров (скорость нарушения равновесия), зависящая от граничных условий, значительно меньше скорости достижения локального равновесия, то система находится в локальном равновесии, то есть $\mathrm{v} >> \vartheta$, где $\mathrm{v} = \sqrt{a/t_0} = L/t_0$; $\vartheta = \sqrt{a/\tau} = h/\tau$; a – температуропроводность; τ – время релаксации; t_0 – определяющее время макропроцесса ($\tau << t_0$); v – скорость изменения макропараметров, вызванного граничными условиями; L – определяющий макромасштаб; h – определяющий микромасштаб среды (длина свободного пробега микрочастиц, $h << L$); υ – скорость волны возмущений. Следовательно, принцип локального равновесия может быть использован лишь для отрезков времени t_0, существенно превышающих время релаксации τ, и для величин определяющего макромасштаба L, существенно превышающих определяющий микромасштаб h среды. Принимая гипотезу сплошности, не учитывается молекулярно – атомное строение среды, что может быть использовано лишь в случае, если $h << L$.

Применение теории локального равновесия и гипотезы сплошности приводит к заключению, что законы переноса справедливы как для системы в целом, так и для её любой малой части. Для подобных систем в интегральных законах сохранения приближением к нулю пределов интегрирования выполняется предельный переход и получаются дифференциальные уравнения в частных производных, представляющие законы сохранения в дифференциальном виде. Таким путем в термодинамике необратимых процессов получаются параболические уравнения (теплопроводности, энергии, диффузии и др.), являющиеся локальными, то есть в них не учитывается временна́я и пространственная нелокальность.

В теории гидравлических систем рассматривается математическое моделирование, расчет, оптимизация и идентификация трубопроводных сетей, в которых движение среды описывается законами сохранения энергии и массы . Теория гидравлических систем имеет одинаковые физико – математические основания с теорией электрических сетей, существующей в виде самостоятельной дисциплины, используемой в теоретической электротехнике. В сфере гидравлических сетей такая физико – математическая база отсутствовала в основном из – за существенной нелинейности систем дифференциальных уравнений. В условиях отсутствия вычислительной техники вопросы разработки общих математических описаний и методов расчета не имели практического значения. Появление аналоговых вычислительных устройств и ЭВМ вызвало в 1950 – 1960 – х годах большое число публикаций. Теория гидравлических сетей с самого начала строилась как научная дисциплина, объединяющая на физико – математическом уровне результаты, справедливые для гидравлических систем [1, 35, 83 – 87, 94 – 97, 100, 101, 112 – 114, 123]. Широкий круг вопросов математического описания и расчета систем транспорта газа с использованием матричной формы записи систем уравнений на основе законов Кирхгофа и разработка алгоритмов и программ, были рассмотрены в работах М.Г. Сухарева и Е.Р. Ставровского [102 – 105]. В этих работах был создан математический аппарат для решения задач управления развитием и функционированием гидравлических систем, а также разработано математическое и алгоритмическое обеспечение для автоматизированных систем проектирования и управления.

Традиционными разделами теории гидравлических сетей, являются: алгебра и модельный аппарат гидравлических сетей, методы гидравлического расчета сетей с сосредоточенными и распределенными параметрами; методы идентификации и оптимизации структуры и параметров гидравлических сетей.

В работе [112] в качестве основного математического аппарата теории гидравлических сетей была выбрана алгебра матриц и векторов, которая широко применялась в теории электрических цепей. Использование математического аппарата векторов и матричной алгебры, дает возможность выполнять компактную запись математических постановок задач, классифицировать системы уравнений и находить их решения, а также применять численные методы исследований.

Схема гидравлической сети однозначно задается некоторой матрицей соединений m узлов и n ветвей, которая автоматически учитывает особенности схемы, направление потоков, позволяет дать математическое описание материального баланса как в отдельном узле, так и для системы в целом.

Заданная матрица, связывая давление в узлах с перепадами давлений на ветвях, с учетом расходов в узлах дает математическое описание задачи распределения расхода в гидравлической сети.

Ввиду обнаружившейся в 1960 – х годах ограниченности увязочных методов расчета потокораспределения, широко применявшихся в гидравлических расчетах [23], была дана классификация и строгая математическая постановка задач гидравлического расчета сложных многокольцевых гидравлических сетей, а также определена область эффективного применения увязочных методов расчета и разработаны программы для ЭВМ [102, 112 – 114]. Далее были выполнены исследования по повышению эффективности расчетов и усовершенствованию компьютерных программ [17 – 19, 62, 66, 76 – 79, 102]. В настоящее время используются эффективные программы, позволяющие рассчитывать многокольцевые гидравлические сети, гидравлические режимы с практически с любым количеством участков, и узловых точек.

Проблема идентификации гидравлических сетей впервые была сформулирована А.П. Меренковым [72 – 80], разработавшим способ «математический расходомер», в котором был заложен общий принцип, заключающийся в создании компьютерной модели, практически идентичной реальной сети по ее гидравлическому сопротивлению, используя результаты экспериментальных исследований. Основываясь на данном принципе, выполнены работы по идентификации гидравлических сетей различных типов: теплосетей [24, 37 – 40, 42, 78, 96], водопроводных сетей [18, 100, 123], сетей газоснабжения [16, 87], нефтеснабжения и др. Проблема идентификации является одной из основных при создании моделей наиболее адекватных реальным физическим системам. Её точность зависит от числа точек, в которых известны экспериментальные данные и от точности выполненных измерений.

Метод математического моделирования, связанный с электрогидравлической аналогией, позволяет определить средние по сечениям скорости, температуры и давления движущихся жидкостей в данном сечении трубопровода. Для определения указанных величин в пределах отдельного сечения процесс течения жидкости описывается дифференциальными уравнениями. Для данного типа математического моделирования строится математическая модель процесса, которая включает уравнение и краевые условия, то есть имеем краевую задачу. Затем находится аналитическое или численное решение данной задачи. Соответственно виду определяемого решения методы бывают точные аналитические, приближенные аналитические и численные. Классическими точными аналитическими являются методы: разделения переменных, функций Грина, тепловых потенциалов, интегральных преобразований и др. [32 – 34, 70, 71, 89, 107]. К приближенным аналитическими методам относятся: вариационные (Ритца, Трефтца и др.); взвешенных невязок (Л.В. Канторовича, Бубнова – Галеркина, коллокаций и др.) [5 – 8, 28, 29, 115 – 117, 120, 122]. К численным методам относятся различные направления конечных разностей метода (переменных направлений, расщепления, дробных шагов), а также методы конечных и граничных элементов [22, 36, 109, 125] и др.

Недостатком точных аналитических методов является их малая универсальность. Они применяются в основном к линейным краевым задачам, так как для них выполнение начального условия связано с построением линейной суперпозиции частных решений и в результате получаются решения в виде бесконечного ряда. Этот ряд для малых величин времени плохо сходится. Так, при $\mathrm{Fo} = 10^{-12}$ ряд сходится лишь при использовании $5 \cdot 10^{5}$ его членов. Эти решения мало пригодны для практических приложений и особенно в случаях, если они используются в качестве промежуточной стадии при получении решения каких – либо других задач (термоупругости, автоматического управления, обратных задач и др.).

Важным преимуществом приближенных методов является универсальность. Они могут быть применены для нелинейных задач, с переменными свойствами среды, с меняющимися во времени краевыми условиями, с источниками теплоты и др. В данном случае решение находится в виде ряда, ограниченного по числу его членов. Однако, значительное повышение числа его членов связано со следующими проблемами: выполнение исходного уравнения краевой задачи приводится к решению степенного уравнения (определяющего собственные числа), степень которого зависит от количества приближений. Решение уравнений высокой степени, , представляет большие трудности. К тому же, удовлетворение начальных условий в связано с решением систем алгебраических уравнений с плохо обусловленными матрицами. В связи с чем, число приближений может быть ограниченным.

Среди приближенных имеются методы, позволяющие избежать отмеченные недостатки. К ним, в частности, относятся интегральные методы [5, 7, 8, 15, 46, 61, 69, 98, 99], при использовании которых процесс разделяется на две стадии, путем введения понятия фронта возмущения, разделяющего исходную область на две зоны – прогретую и непрогретую. Первая стадия заканчивается после достижения подвижной границей центра симметрии (при симметричных граничных условиях). Во второй стадии вводится дополнительная искомая функция, представляющая зависимость температуры от времени в центре симметрии. Такой подход при использовании дополнительных краевых условий [43 – 46, 48, 50, 56] приводит к решениям, практически заданной степени точности, в том числе для малых и сверхмалых значений времени. Это обстоятельство связано с тем, что решаемая задача разделяется на две задачи и в каждой из них решению подлежит обыкновенное дифференциальное уравнение. Кроме того, в каждой задаче начальное условие выполняется не по всей толщине тела, а только в одной краевой точке, что значительно упрощает процесс получения решения.

Применительно к различным модификациям интегрального метода [5, 7, 8, 15] основной проблемой является малая точность. Это связано с тем, что исходное уравнение выполняется лишь в среднем. Следовательно, точность решения связана с точностью выполнения исходного уравнения. С этой целью в работах [45, 46, 58, 59, 61] используются полиномы высокой степени, при определении их неизвестных коэффициентов применяются дополнительные условия. Этот метод оказался особенно эффективным при решении задач динамического и теплового пограничных слоев, где в качестве аналога временно́й переменной используется продольная координат. В настоящей диссертации данный метод распространен применительно к решению задач для турбулентного температурного пограничного слоя.

Ввиду того, что с помощью интегрального метода решается параболическое уравнение с бесконечной скоростью распространения теплоты, то введение фронта возмущения является допущением, использующимся лишь с целью получения простого приближенного аналитического решения. В работах [45, 46] доказано, что при увеличении числа приближений скорость движения фронта теплового возмущения возрастает и в пределе при $n \to \infty$ она также устремляется к бесконечной величине. Следовательно, указанное выше противоречие, связанное с принятием допущения о конечной скорости распространения теплоты, в данном случае снимается.

Результаты исследований температур, давлений, скоростей в движущихся жидкостях приводятся в работах [46, 89, 99]. Отметим, что при расчете давлений и скоростей решаются нелинейные уравнения движения. Посредством соответствующей линеаризации они могут быть сведены к 2 – ум гиперболическим уравнениям (для скорости и давления) [242]. Метод их решения, указанный в [89], является сложным и трудоемким, а получаемые решения имеют вид бесконечных рядов, которые затруднительно применять в инженерных приложениях.

При определении температуры в жидкости решается краевая задача Гретца – Нуссельта [89, 116, 117, 195, 199,203, 205, 206, 208 – 210, 213, 223, 236, 242]. Исходная краевая задача, являясь нестационарной, физически обоснованно приводится к решению двух независимых задач – нестационарной и стационарной. Первая из них используется для участков трубопровода, которых не достигло возмущение, связанное температурой, задаваемой на входе в канал. На этих участках процесс теплообмена протекает как бы в неподвижной жидкости (без учета конвективного переноса тепла в продольном направлении). Краевая задача здесь приводится к задаче для цилиндра, точные решения её известны.

Большой интерес представляет получение решения задачи Гретца – Нуссельта. Она ставится для зон трубы, которых достигает возмущение, связанное с температурой жидкости, задаваемой на входе в трубопровод. Теплообмен в этих зонах не зависит от начальной температуры, а определяется лишь заданной на входе в трубопровод температурой. Эта задача – нелинейная – ее решение впервые получили Л. Гретц (1885 г.) и В. Нуссельт (1910 г.). П.П. Шумиловым и В.С. Яблонским найдено решение, отличающееся от решений Л. Гретца и В. Нуссельта. Детальный анализ этих решений дан в работе [89], где рассматриваются два решения данной задачи, первое из которых представлено в виде бесконечного ряда. Его собственные числа определяются из степенного алгебраического уравнения. Учитывая трудности нахождения их решений, число членов ряда будет небольшим и, следовательно, получение решения для малых значений продольной координаты не представляется возможным.

Второе решение из [89] включает три различные формулы. Каждая из них применяется лишь в некотором диапазоне поперечной координаты. Разделение границ, где справедливо каждое решение не приводится, поэтому их использование при выполнении практических расчетов затруднительно.

По результатам обзора работ по избранному направлению исследований можно сделать следующие выводы:

1. В настоящее время нет единой теории локально – неравновесного переноса, которую можно распространить на все случаи передачи энергии (теплоты, массы, импульса и проч.). К тому же, в известной литературе недостаточно сведений по исследованию с учетом релаксационных процессов локально – неравновесных процессов релаксации.

2. Применительно к расчетам теплообмена в движущихся жидкостях известные аналитические методы малоэффективны ввиду принятия в математических моделях ряда упрощающих допущений, которые приводят к существенному различию моделей от реальных процессов. В случае, когда допущения не вводятся, точные аналитические решения ввиду сложности краевых задач не могут быть получены. В связи с чем, разработка эффективных приближенных аналитических методов решений указанных задач является актуальной научной проблемой.

3. Применительно к расчетам динамических и тепловых пограничных слоев практически отсутствуют аналитические методы, позволяющие определять искомые функции с достаточной для выполнения научных исследований и для инженерных приложений точностью, что связано с нелинейностью рассматриваемых краевых задач.

4. Применительно к гидравлическим расчетам сложных разветвленных многокольцевых трубопроводных систем различного назначения распространение получил метод электрогидравлической аналогии. Однако его практическое использование существенно сдерживается отсутствием эффективных методов автоматической идентификации компьютерных моделей, позволяющих максимально приблизить модель к реальной гидравлической системе по оказываемой ей сопротивлению процессу переноса среды.

2. РАЗРАБОТКА МЕТОДОЛОГИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ СОХРАНЕНИЯ

Основные научные результаты второй главы диссертации представлены в научных трудах автора [30, 60, 143, 196 – 198, 204, 211, 212, 220 – 227, 234, 235, 238 – 240, 244, 245, 248 – 250, 253, 254]. В данной главе представлены результаты разработки единой концепции математического моделирования процессов тепломассопереноса с учетом пространственно – временной нелокальности. В частности, в п. 2.1 разработана и исследована математическая модель теплопроводности с учетом инерционности процесса переноса теплоты в твердых телах. При выводе обобщенного дифференциального уравнения теплопроводности использовалась модифицированная форма уравнение теплового баланса

$$c\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(T+\sum_{k=1}^{N}\tau_k^k\frac{\partial^k T}{\partial t^k}\right)=-\mathrm{div}\left(\mathbf{q}+\sum_{k=1}^{N}r_k^k\frac{\partial^k\mathbf{q}}{\partial t^k}\right),$$

где T – температура; $\mathbf{q}$ – вектор плотности теплового потока; t – время; c – теплоемкость; ρ – плотность; τ_k, r_k – феноменологические коэффициенты релаксации.

В п. 2.2 приведены результаты разработки трехмерной модели теплопроводности на основе теории двухфазного запаздывания. Используя метод конечных элементов, выполнена дискретизация дифференциального уравнения теплопроводности, учитывающего инерционность процесса переноса тепла. Полученные в п. 2.2 теоретические результаты положены в основу разработанного в диссертации расширения к программному продукту ANSYS. С целью проверки адекватности разработанной дискретной модели теплопереноса выполнено сравнение результатов численных расчетов с известным точным аналитическим решением модельной задачи – одномерной задачи теплопроводности в неограниченной пластине. Отличие результатов составило менее 0,1% во всем диапазоне изменения временной и пространственных переменных.

В качестве примера использования разработанного алгоритма, в п. 2.2 приведены результаты решения трехмерной задачи теплопроводности в шестиугольной прямой призме со сквозным круглым отверстием в центре.

В рамках единого подхода, основанного на учете релаксационных слагаемых в модифицированных уравнениях сохранения, выполнены комплексные исследования разработанных в диссертации математических моделей локально – неравновесных процессов, имеющих большое прикладное значение. В частности, исследованы процессы теплового воспламенения и взрыва в конденсированных средах (п. 2.3, 2.4), высокоинтенсивного нагрева поверхности твердых тел потоком лазерного излучения (п. 2.5), взаимосвязанного тепломассопереноса (п. 2.6), переноса тепла в нанокомпозитах (п. 2.7), вынужденной конвекции в стержнях произвольного поперечного сечения (п. 2.8).

Во второй главе (п. 2.9) рассмотрен метод решения краевой задачи теплопроводности с подвижной границей – задача Стефана с удалением расплавленного вещества. В отличие от известных решений в диссертации приводится приближенное аналитическое решение для ограниченной области (в тонкой пластине). При его получении использовались понятия, выходящие за рамки классической теории теплопроводности: фронт температурного возмущения, глубина прогретого слоя, конечная скорость распространения теплоты. Введение в рассмотрение новых искомых функции – фронта плавления и закона движения нулевой изотермы (фронт температурного возмущения) совместно с дополнительными граничными характеристиками, позволило получить простое по форме решение в аналитическом виде.

Во второй главе (п. 2.9) на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий приведены также результаты разработки метода математического моделирования процесса теплопроводности в пластине с учетом перемещения фронта плавления при полном удалении расплавляемого вещества (задача Стефана с абляцией). Разработанный метод решения указанной задачи позволил определить законы перемещения во времени фронта температурного возмущения и фронта фазового перехода в простом аналитическом виде.

2.1. Разработка математической модели теплопроводности на основе модифицированного уравнения теплового баланса

Математическое описание диффузионных процессов переноса является важнейшей задачей математической физики. Использование принципа локального термодинамического равновесия и гипотезы сплошной среды позволило использовать фундаментальные уравнения равновесной термодинамики для исследования неравновесных процессов переноса. На основе этих принципов получены классические уравнения переноса преимущественно параболического типа. При их выводе используются линейные зависимости между потоками переноса и градиентами потенциала переноса. Такой подход может быть использован для процессов, продолжительность которых существенно превышает внутренние временные масштабы системы (среднее время свободного пробега микрочастиц, время релаксации системы к равновесному состоянию), а размеры исследуемой области значительно превышают пространственные масштабы (длину свободного пробега, межатомное расстояние). Однако для описания локально – неравновесных процессов данный подход не может быть применен. В этом случае возникает необходимость учёта внутренней структуры исследуемых объектов и конечной скорости переноса потенциалов исследуемых полей. К сильнонеравновесным процессам можно отнести высокоинтенсивных процессы: диффузии, теплового воспламенения конденсированных сред, нагрева сверхмощными потоками лазерного излучения, высокочастотный колебаний упругих тел жидкостей и газов и др. Применение принципа локального термодинамического равновесия и гипотезы сплошной среды при их описании приводит к несоответствию экспериментальных и теоретических данных.

Развитие лазерных технологий, нанотехнологий и нанотехники, появившаяся возможность осуществления технологических операций в экстремальных условиях (при сверхвысоких температурах, давлениях и их градиентах) вызвало необходимость разработки новых математических методов их интерес к изучению процессов, протекающих в локально – неравновесных условиях. К основным направлениям описания локально – неравновесных процессов относят термодинамические (Дэй У.А., Петров Н., Бранное И., Жоу Д., Касас – Баскес Х., Лебон Дж., Соболев С.Л., Дьярмати И., Де Гроот С., Мазур П.), кинетические (Максвелл С., Бубнов В.А., Микис Б.Б., Урушев Д., Борисов М., Ваврек А.), феноменологические (Gurtin M.E., Pirkin F.C., Nunziato S., Weymann N.D., Faitel G., Леванов Е.И., Сотский Е.Н.).

При выводе дифференциальных уравнений, учитывающих релаксационные эффекты, используются различные физические подходы к описанию процесса переноса энергии внутри твердых тел (фонон – электронное взаимодействие, фононное рассеивания, двухфазное запаздывание и др.). Широкое распространение получила двухтемпературная модель, разработанная советскими учеными Кагановым М.И., Анисимовым С.И., Капелиовичем Б.Л. и др., изучавшими воздействие интенсивного лазерного излучения на поверхность металлов. Одной из наиболее активно развивающихся теорий, учитывающей релаксационные эффекты, является теория двухфазного запаздывания. Математические модели, полученные на ее основе, называют моделями с двухфазным запаздыванием («dual – phase – lag model»). В основе DPL – моделей переноса лежит модифицированный закон Фурье, в котором выполнена релаксация как теплового потока, так и градиента температуры. Инерционные слагаемые в уравнение теплопроводности вводились в разные годы Лыковым А.В., Бровкиным Л.А. и др., исходя из различных физических представлений о процессе теплопроводности.

В диссертации рассматривается метод математического моделирования локально – неравновесных процессов теплопроводности на основе модифицированных форм законов сохранения. В частности, получено аналитическое решение одномерной задачи теплопроводности с учетом релаксационных свойств среды. На его основе можно определить распределение температуры в теплоизолированном стержне или неограниченной пластине. В теории теплопроводности под «неограниченной» понимают пластину, ширина и длина которой велики по сравнению с толщиной. Использование термина «неограниченная пластина» дает более полное представление о физической сущности исследуемых во второй главе диссертации процессов и применяется повсеместно. Для получения дифференциального уравнения, описывающего локально – неравновесный процесс теплопроводности, уравнение теплового баланса

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\mathbf{q} \qquad (2.1)$$

представим в виде

$$c\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(T+\sum_{k=1}^{N}\tau_k^k\frac{\partial^k T}{\partial t^k}\right)=-\mathrm{div}\left(\mathbf{q}+\sum_{k=1}^{N}r_k^k\frac{\partial^k \mathbf{q}}{\partial t^k}\right), \tag{2.2}$$

где T – температура; $\mathbf{q}$ – вектор плотности теплового потока; t – время; c – теплоемкость; ρ – плотность; τ_k, r_k – феноменологические коэффициенты релаксации; N принадлежит множеству натуральных чисел N. Степень «k» подчеркивает изменение размерности множителей τ_k^k, r_k^k с увеличением N ($[\tau_1^1]=c,\ [\tau_2^2]=c^2, \ldots, [\tau_k^k]=c^k$; [ ] – означает размерность). Учет запаздывания отклика системы на внешнее возмущение путем ввода релаксационных слагаемых в уравнение теплового баланса (без учета производных высшего порядка и принебрегая смешанными производными) выполнен в [11].

Подставляя в (2.2) соотношение для теплового потока, согласно закону Фурье [3, 68 – 71, 108]

$$\mathbf{q}=-\lambda\,\mathrm{grad}\,T, \tag{2.3}$$

получаем дифференциальное уравнение теплопроводности, учитывающее запаздывание во времени как температуры, так и теплового потока. В одномерном случае при постоянных теплофизических свойствах оно принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(T+\sum_{k=1}^{N}\tau_k^k\frac{\partial^k T}{\partial t^k}\right)=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\sum_{k=1}^{N}r_k^k\frac{\partial^{k+2} T}{\partial x^2\partial t^k}\right). \tag{2.4}$$

где $a=\lambda/(c\rho)$ – коэффициент температуропроводности; λ – коэффициент теплопроводности; x – пространственная переменная.

В зависимости от принятых значений коэффициентов релаксации дифференциальное уравнение (2.4) сводится к известным:

256)классическому параболическому уравнению (при $\tau_k=r_k=0$, $k=\overline{1,\ N}$) [3, 68 – 71, 108]

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \tag{2.5}$$

2) классическому гиперболическому уравнению (при $N=1$, $\tau_1\neq 0$, $r_1=0$) [68 – 71]

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_1\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \tag{2.6}$$

3) уравнению двухфазного запаздывания (при $N=1$, $\tau_1\neq 0$, $r_1\neq 0$)

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_1\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+ar_1\frac{\partial^3 T}{\partial x^2\partial t}. \tag{2.7}$$

В настоящее время для описания локально – неравновесных процессов переноса теплоты широко применяется уравнение (2.7). Наиболее широкое распространение теория двухфазного запаздывания (dual – phase – lag, DPL) получила в иностранной научной литературе и ассоциируется с трудами Da Yu Tzou и др. При выводе уравнения (2.7) используется закон Фурье вида [131 – 140, 147 – 151, 153 – 169, 182]

$$q(x, t+\tau_1) = -\lambda \frac{\partial T(x, t+r_1)}{\partial x}. \qquad (2.8)$$

Разлагая в ряд Тэйлора по степеням малых параметров τ_1 и r_1 (ограничиваясь одним слагаемым разложения в левой и правой частях соотношения (2.8)), получаем

$$q + \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda r_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t}. \qquad (2.9)$$

Соотношение (2.9) лежит в основе вывода уравнения двухфазного запаздывания (2.7). В работах Лыкова А.В. данная формула получена из обобщенной системы уравнений Онзагера [68 – 71]

$$I_i = L_i' \frac{\partial I_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \left(L_{ik} X_k + L_{ik}' \frac{\partial X_k}{\partial t} \right), \qquad (2.10)$$

где I_i – поток (тепла, массы и др.); X_k – движущие силы; L_i', L_{ik}, L_{ik}' – эмпирические коэффициенты.

Применительно к процессу теплопроводности $I_i = q$, $X_k = \mathrm{grad}\,T$, $L_i' = \tau_1$, $L_{ik} = -\lambda$, $L_{ik}' = -\lambda r_1$.

Совпадение формул (2.9) и (2.10) свидетельствует о том, что в формуле (2.9) учитывается взаимное влияние пространственной и временной неравновесности в нелокальном процессе теплопереноса.

Исследование математических моделей теплопроводности (2.5) – (2.7), выполнено в работах [41, 52 – 56, 65]. Из их анализа следует, что учет дополнительных слагаемых в уравнении (2.7) оказывает как количественное, так и качественное влияние на процесс теплопроводности в твердых телах.

Рассмотрим влияние релаксационных слагаемых высшего порядка $(N > 2)$ в уравнении (2.4) на процесс распространения теплоты в твердых телах. Уравнение (2.4) при $N = 3$ запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \tau_2^2 \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} + \tau_3^3 \frac{\partial^4 T}{\partial t^4} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r_1 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} + r_2^2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial t^2} + r_3^3 \frac{\partial^5 T}{\partial x^2 \partial t^3} \right). \qquad (2.11)$$

Решение уравнения (2.11) отыскивается в области $0 < x < \delta, \mathrm{Fo} > 0$. Краевые условия к уравнению (2.11) при симметричных граничных условиях первого рода для половины неограниченной пластины будут

$$T(x, 0) = T_0; \quad \frac{\partial T^k(x, 0)}{\partial t^k} = 0 \quad (k = \overline{1,\ 3}); \qquad (2.12)$$

$$T(\delta, t) = T_{\text{ст}}; \quad \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0, \qquad (2.13)$$

где T_0 – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки; δ – половина толщины пластины.

С целью выполнения параметрического анализа задачу (2.11) – (2.13) представим в безразмерном виде. Использование безразмерных параметров позволяет анализировать протекание процессов вне зависимости от конкретных исходных данных. Введем следующие обозначения:

$$\Theta = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}};\ \xi = \frac{x}{\delta};\ \text{Fo} = \frac{at}{\delta^2};\ \text{Fo}_k = \frac{a\tau_k}{\delta^2};\ R_k = \frac{a r_k}{\delta^2},$$

где $\Theta, \xi, \text{Fo}, \text{Fo}_k, R_k,$ – безразмерные температура, координата, время, коэффициенты релаксации.

Задача (2.11) – (2.13) с учетом принятых обозначений будет

$$\frac{\partial\Theta}{\partial \text{Fo}} + \text{Fo}_1 \frac{\partial^2\Theta}{\partial \text{Fo}^2} + \text{Fo}_2^2 \frac{\partial^3\Theta}{\partial \text{Fo}^3} + \text{Fo}_3^3 \frac{\partial^4\Theta}{\partial \text{Fo}^4} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2} +$$

$$+ R_1 \frac{\partial^3\Theta}{\partial\xi^2\partial \text{Fo}} + R_2^2 \frac{\partial^4\Theta}{\partial\xi^2\partial \text{Fo}^2} + R_3^3 \frac{\partial^5\Theta}{\partial\xi^2\partial \text{Fo}^3} \qquad (0 < \xi < 1;\ \text{Fo} > 0); \qquad (2.14)$$

$$\Theta(\xi,0) = 1; \qquad \frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,0)}{\partial \text{Fo}^2} = \frac{\partial^3\Theta(\xi,0)}{\partial \text{Fo}^3} 0; \qquad (2.15)$$

$$\Theta(1,\text{Fo}) = 0; \qquad \frac{\partial\Theta(0,\text{Fo})}{\partial\xi} = 0. \qquad (2.16)$$

Решение задачи (2.14) – (2.16), согласно методу Фурье, принимается в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от безразмерного времени, вторая – от безразмерной координаты

$$\Theta(\xi,\text{Fo}) = \varphi(\text{Fo})\,\psi(\xi), \qquad (2.17)$$

где $\varphi(\text{Fo})$ – неизвестная функция времени; $\psi(\xi)$ – неизвестная функция координаты.

Подставляя (2.17) в (2.14), находим

$$\nu\varphi + \text{Fo}_3^3 \frac{d^4\varphi}{d\,\text{Fo}^4} + (\text{Fo}_2^2 + R_3^3\nu)\frac{d^3\varphi}{d\,\text{Fo}^3} + (\text{Fo}_1 + R_2^2\nu)\frac{d^2\varphi}{d\,\text{Fo}^2} + (1 + R_1\nu)\frac{d\varphi}{d\,\text{Fo}} = 0; \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \nu\psi = 0, \qquad (2.19)$$

где ν − константа.

Краевые условия к уравнению (2.19), исходя из (2.16), будут

$$\psi(1) = 0; \qquad (2.20) \qquad \frac{d\,\psi(0)}{d\,\xi} = 0. \qquad (2.21)$$

Решение задачи Штурма – Лиувилля (2.19) – (2.21) представляется в виде

$$\psi_m(\xi) = \cos\left((2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right) \qquad (m = \overline{1,\infty}). \qquad (2.22)$$

Условия (2.20), (2.21) удовлетворяются соотношением (2.22). Подстановкой (2.22) в (2.19) находим формулу для расчёта собственных чисел

$$\nu_m = \frac{\pi^2(2m-1)^2}{4} \qquad (m = \overline{1,\infty}). \qquad (2.23)$$

Характеристическое уравнение к однородному уравнению (2.18):

$$\text{Fo}_1^3 z^4 + (\text{Fo}_2^2 + R_3^3\nu_m)z^3 + (\text{Fo}_1 + R_2^2\nu_m)z^2 + (1 + R_1\nu_m)\,z + \nu_m = 0. \qquad (2.24)$$

Решение уравнения (2.24), учитывая найденные численно значения z_{1m},

z_{2m}, z_{3m} и z_{4m}, будет

$$\varphi_m(\mathrm{Fo}) = \sum_{j=1}^{4} C_{jm} \exp(z_{jm}\mathrm{Fo}) \qquad (m = \overline{1,\infty}), \tag{2.25}$$

где C_{jm} − неизвестные коэффициенты.

Подставляя (2.22), (2.25) в (2.17), находим частное решение задачи

$$\Theta_m(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{j=1}^{4} C_{jm} \exp(z_{jm}\mathrm{Fo})\psi_m = [C_{1m}\exp(z_{1m}\mathrm{Fo}) + C_{2m}\exp(z_{2m}\mathrm{Fo}) +$$

$$+ C_{3m}\exp(z_{3m}\mathrm{Fo}) + C_{4m}\exp(z_{4m}\mathrm{Fo})]\psi_m \qquad (m = \overline{1,\infty}). \tag{2.26}$$

Полученное решение удовлетворяет уравнению (2.14) и граничным условиям (2.16). Для выполнения начального условия (2.15) составим сумму частных решений:

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{4} C_{jm} \exp(z_{jm}\mathrm{Fo})\psi_m \right\}. \tag{2.27}$$

Используя соотношение (2.27) составим невязку начальных условий (2.15) и потребуем ортогональности невязки ко всем собственным функциям. Вследствие ортогональности системы базисных функций из косинусов решение получаемой системы 4 m уравнений для C_{jm}, приводится к решению системы четырех алгебраических уравнений для каждого значения m $(m = \overline{1,\infty})$ вида

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 (C_{1m} + C_{2m} + C_{3m} + C_{4m}) \cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]^2 d\xi - \int\limits_0^1 \cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right] = 0; \\ \int\limits_0^1 (C_{1m}z_{1m} + C_{2m}z_{2m} + C_{3m}z_{3m} + C_{4m}z_{4m}) \cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]^2 d\xi = 0; \\ \int\limits_0^1 (C_{1m}z_{1m}^2 + C_{2m}z_{2m}^2 + C_{3m}z_{3m}^2 + C_{4m}z_{4m}^2) \cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]^2 d\xi = 0; \\ \int\limits_0^1 (C_{1m}z_{1m}^3 + C_{2m}z_{2m}^3 + C_{3m}z_{3m}^3 + C_{4m}z_{4m}^3) \cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]^2 d\xi = 0. \end{cases}$$

После вычисления неизвестных коэффициентов C_{jm} решение задачи (2.14) – (2.16) находится из (2.27).

Результаты расчетов безразмерной температуры при $\mathrm{Fo}_k = R_k = \mathrm{const}$ представлены на рисунках 2.1 – 2.6. Показано (см. рисунок 2.1), что для небольших чисел Fo_k и R_k $(\mathrm{Fo}_k = R_k = 10^{-10})$ значения температур, получаемые по формуле (2.27), совпадают с точным решением классического параболического уравнения (точки на рисунке 2.1). С увеличением Fo_k, R_k отмечается задержка принятия телом граничного условия первого рода (см. рисунок 2.2). Несмотря на строгое выполнение граничного условия первого рода в точке $\xi = 1$, в сколь угодно малой окрестности данной точки температура снижается от начального значения не мгновенно, а за некоторый конечный интервал времени $\Delta \mathrm{Fo}$, зависящий от величины коэффициентов релаксации. Так, на рисунке 2.2 показано, что процесс установления граничного условия первого рода при $\mathrm{Fo}_k = R_k = 10^{-7}$ происходит за время $\Delta \mathrm{Fo} \approx 10^{-6}$. С увеличением коэффициентов релаксации величина $\Delta \mathrm{Fo}$ также возрастает. И, например, при $\mathrm{Fo}_k = R_k = 0{,}1$ составляет уже $\Delta \mathrm{Fo} \approx 0{,}4$ (см. рисунок 2.3). При дальнейшем увеличении коэффициентов Fo_k, R_k снижение безразмерной температуры пластины происходит равномерно во всем объеме тела, т.е. практически без градиента температуры ($\partial \Theta / \partial \xi \approx 0$).

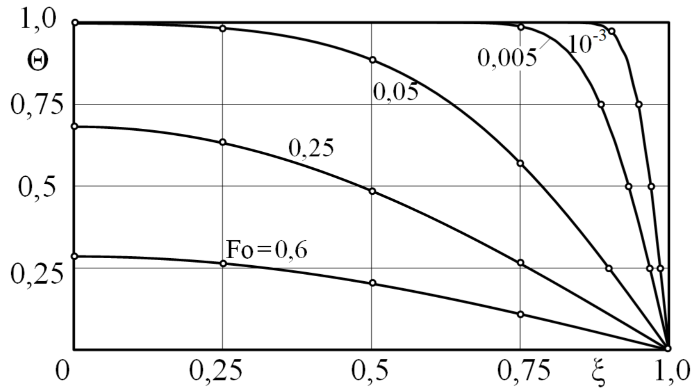


Рисунок 2.1. Распределение температуры в пластине: $\mathrm{Fo}_k = R_k = 10^{-10}$

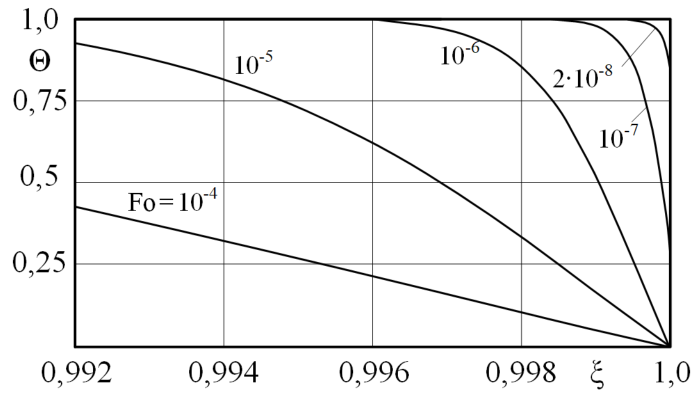


Рисунок 2.2. Распределение температуры в пластине: $\mathrm{Fo}_k = R_k = 10^{-7}$

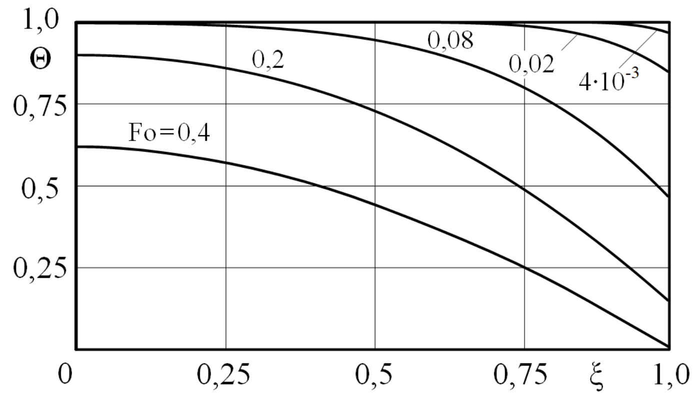


Рисунок 2.3. Распределение температуры в пластине: $\mathrm{Fo}_k = R_k = 0{,}1$

На рисунке 2.4 приведены графики изменения температуры во времени в точке $\xi = 0{,}99$ при различных значениях коэффициентов релаксации. Их анализ позволяет заключить, что учет релаксационных слагаемых в уравнении (2.14) приводит к снижению интенсивности процесса охлаждения тела – с увеличением коэффициентов Fo_k, R_k температура в любой точке пластины в выбранный момент времени оказывается выше аналогичного значения при $\mathrm{Fo}_k = R_k = 0$.

Выполнен также анализ влияния производных высшего порядка в выражении (2.14) на процесс локально – неравновесного переноса теплоты. На рисунке 2.5 приведены графики изменения безразмерной температуры тела в окрестности точки приложения граничного условия первого рода ($\xi = 0{,}999$) при различных значениях N для $\mathrm{Fo}_k = R_k = 10^{-2}$. На этом же рисунке показано изменение температуры во времени при $\mathrm{Fo}_k = R_k = 0$.

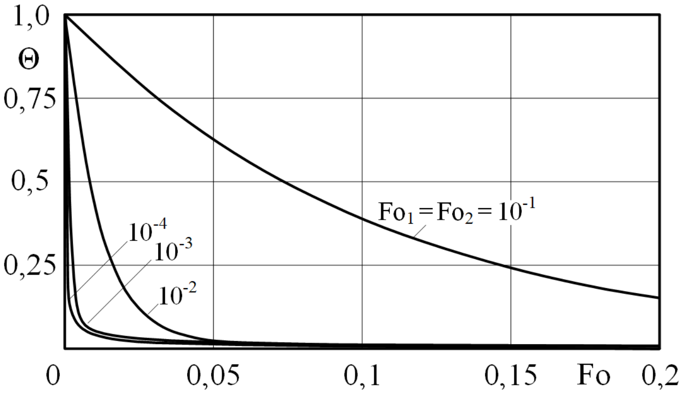


Рисунок 2.4. Изменение температуры во времени в точке $\xi = 0{,}99$

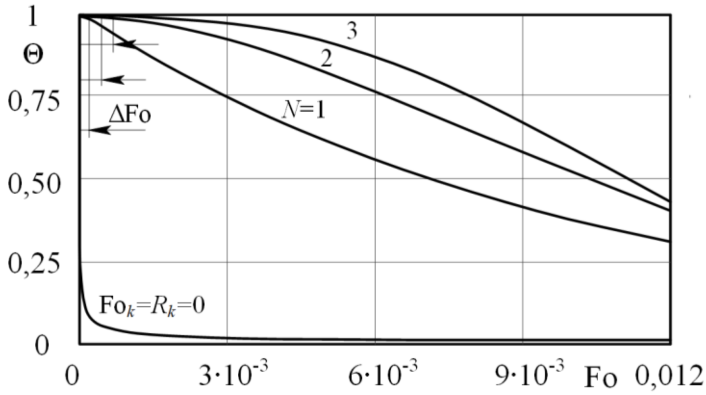


Рисунок 2.5. Изменение температуры в $\xi = 0{,}999$: $\mathrm{Fo}_k = R_k = 10^{-2}$

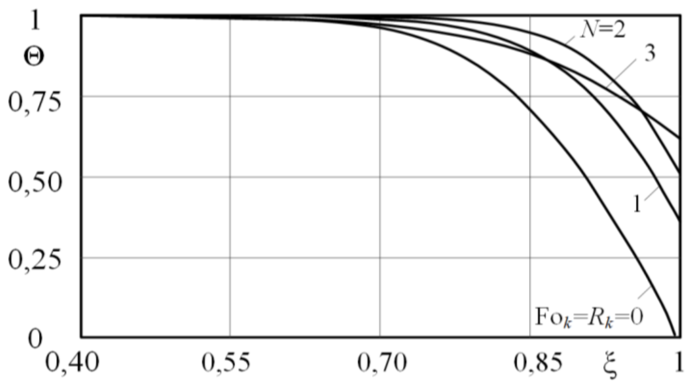


Рисунок 2.6. Распределение температуры в пластине при $\mathrm{Fo} = 10^{-2}$: $\mathrm{Fo}_k = R_k = 10^{-2}$

Показано, что при достаточно больших значениях коэффициентов релаксации ($\mathrm{Fo}_k = R_k = 10^{-2}$) наблюдается задержка принятия телом граничного условия $\Delta\mathrm{Fo}$. Наличие интервала времени $\Delta\mathrm{Fo}$, в течении которого температура в сколь угодно малой окрестности точки $\xi = 1$ не изменяется после приложения граничного условия первого рода, свидетельствует о том, что тепловой поток в этой точке в течении некоторого интервала времени также не изменяется, т.е. равен нулю. Стоит отметить, что тепловой поток, определяемый из решения параболического уравнения (2.5), устремляется к бесконечному значению в начальный момент времени [52, 53].

На рисунке 2.6 приведены графики изменения безразмерной температуры, определяемой из решения уравнения (2.4), для различных значений N при $\mathrm{Fo}=10^{-2}$. Анализ представленных на рисунках 2.4 – 2.6 кривых позволяет заключить, что учет релаксационных слагаемых в (2.14) оказывает существенное влияние на процессы переноса теплоты. В наибольшей степени влияние Fo_k, $R_k \neq 0$ проявляется на начальном этапе их протекания $\mathrm{Fo}\leq 10^{-2}$. При относительно больших значениях безразмерного времени ($\mathrm{Fo}>0{,}2$) результаты расчетов температуры при $N=\overline{1,4}$ практически совпадают. Таким образом, при исследовании процессов для Fo, значительно больших времени релаксации системы к равновесному состоянию, учет релаксационных слагаемых не дает новых представлений об их протекании. Однако, с увеличением Fo_k, R_k их влияние на процесс проявляется все существеннее и вопрос о целесообразности их учета должен рассматриваться для каждой конкретной задачи. Стоит отметить, что в работах Mitra K., Kumar S. [165], Herwig H., Beckert K.[166], Кирсанова Ю.А. [37] и др. приведены результаты экспериментального определения коэффициентов релаксации, согласно которым, значения τ_1, r_1 для некоторых материалов могут превышать $1\,c$. При указанных значениях τ_1, r_1 неучет слагаемых высшего порядка в уравнении (2.4) может приводить к существенному расхождению теоретических и экспериментальных данных.

В диссертационной работе впервые получено решение локакльно – неравновесной задачи теплопроводности в пластине толщиной 2δ с учетом зависимости теплофизических свойств от температуры. В случае линейной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры вида

$$\lambda(T)=\lambda_0(1+\beta T), \tag{2.28}$$

уравнение теплопроводности с учетом однократной релаксации ($N=1$) будет

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_1\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[-\lambda(T)\left(\frac{\partial T}{\partial x}+r_1\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial\tau}\right)\right]. \tag{2.29}$$

Используя те же обозначения, что и в рассмотренной ранее задаче, введем в рассмотрение следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta=\frac{T}{T_0};\quad K=\frac{T_{\text{ст}}}{T_0};\quad \mu=\beta T_0;\quad \xi=\frac{x}{2\delta}, \tag{2.30}$$

где β – коэффициент, характеризующий зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, $1/K$; λ_0 – значение коэффициента теплопроводности при $\beta T=0$; μ – безразмерный параметр.

Краевые условия к уравнению (2.29)будут:

$$T(x,0)=T_0; \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial T(x,0)}{\partial t}=0; \tag{2.32}$$

$$T(0,t)=T_{\text{ст}}; \tag{2.33}$$

$$T(2\delta,t)=T_{\text{ст}}. \tag{2.34}$$

С учетом введенных безразмерных параметров задача (2.29), (2.31) – (2.34) будет

$$\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_1 \frac{\partial^2\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}(1+\mu\Theta) + R_1 \frac{\partial^3\Theta}{\partial\xi^2\partial \mathrm{Fo}}(1+\mu\Theta) +$$

$$+\mu\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\xi} + R_1\frac{\partial^3\Theta}{\partial\xi^2\partial \mathrm{Fo}}\right) \quad (0<\xi<1;\;\; \mathrm{Fo}>0); \qquad (2.35)$$

$$\Theta(\xi,0)=1; \qquad (2.36) \qquad\qquad \frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}} = 0; \qquad (2.37)$$

$$\Theta(0,\mathrm{Fo}) = K; \qquad (2.38) \qquad\qquad \Theta(1,\mathrm{Fo}) = K. \qquad (2.39)$$

Результаты численного решения задачи (2.35) – (2.39) представлены на рис. 2.7. Из их анализа следует, что учет зависимости коэффициента теплопроводности от температуры приводит в существенному изменению вида температурной функции. В частности, при увеличении μ отмечается снижение температурных градиентов внутри тела (см. рисунок 2.7).

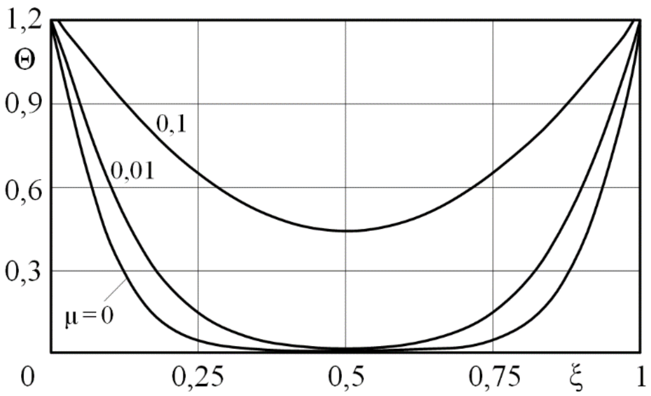


Рисунок 2.7. Распределение температуры по координате: $\mathrm{Fo}_k = R_k = 10^{-2}$; $\mathrm{Fo} = 10^{-2}$

2.2. Разработка трехмерной модели теплопроводности с учетом пространственно – временной нелокальности

В п. 1.1 диссертации приведен вывод локально – неравновесного уравнения теплопроводности на основе модифицированного уравнения теплового баланса. Показано, что при использовании $N=1$ слагаемых, полученное уравнение совпадает с уравнением двухфазного запаздывания. В настоящем параграфе для получения модели теплопереноса в трехмерных телах использован модифицированный закон Фурье с учетом релаксации как теплового потока, так и градиента температуры (DPL – модель).

Для вывода классического параболического уравнения теплопроводности, описывающего распределение температур в твердых телах произвольной формы, удобно использовать векторную запись закона Фурье

$$\mathbf{q}(\mathbf{r},t) = -\lambda \operatorname{grad} T(\mathbf{r},t), \qquad (2.40)$$

где $\mathbf{q}(\mathbf{r},t) = (q_x, q_y, q_z)$ – вектор теплового потока, как функция от координат и времени, λ – коэффициент теплопроводности, $\operatorname{grad} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$ – градиент температуры.

Согласно выражению (2.40) изменение температуры в любой точке сопровождается мгновенным изменением теплового потока во всей рассматриваемой области [70]. Следовательно, при выводе классического параболического уравнения теплопроводности в нём оказывается заложенной бесконечная скорость распространения теплоты, что подтверждается при исследовании его точных решений [70]. Так, например, в условиях теплового удара (выполнение граничного условия первого рода) тепловой поток и скорости распространения изотерм в точке приложения граничного условия в начальный момент времени устремляются к бесконечным значениям, что не согласуется с фундаментальными физическими законами. При решении большинства инженерных задач данное обстоятельство не оказывает существенного влияния на точность получаемых решений. Однако, для некоторых процессов неучет релаксационных свойств материалов приводит к существенным погрешностям при определении температурного состояния тел. К таким процессам следует относить высокоинтенсивные процессы, продолжительность которых сопоставима со временем релаксации (облучение поверхности металлов мощными ультракороткими лазерными импульсами и концентрированными потоками энергии, тепловое воспламенение, взрыв и др.), процессы, протекающие при сверхвысоких давлениях, температурах и их градиентах и др. При их протекании отмечается определённая «инерционность» теплового потока и градиента температуры [70]. Это выражается в «запаздывании» теплового потока и градиента температуры по отношению друг к другу. Математически данное явление записывается в виде:

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t+\tau_1) = -\lambda \operatorname{grad} T(\mathbf{r}, t+r_1), \tag{2.41}$$

где τ_1, r_1 – коэффициенты релаксации. Разлагая обе части (2.41) в ряд Тейлора по степеням τ_1, r_1 с точностью до членов первого порядка малости, получаем

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) + \tau_1 \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\lambda\left(\operatorname{grad} T(\mathbf{r}, t) + r_1 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} T(\mathbf{r}, t)\right). \tag{2.42}$$

Закон сохранения энергии в отсутствии объёмных источников тепла имеет вид [70]

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{r}, t), \tag{2.43}$$

где ρ – плотность, c – удельная теплоёмкость. Выражая тепловой поток $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ из (2.42) и, подставляя его в (2.43), получаем

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{r}, t) + \lambda\left(\Delta T + r_1 \frac{\partial}{\partial t} \Delta T\right), \tag{2.44}$$

где $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ – оператор Лапласа. Подставляя дивергенцию потока из (2.43) в (2.44), получим дифференциальное уравнение относительно искомой функции температуры, имеющее вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\tau_1 \rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \lambda\left(\Delta T + r_1 \frac{\partial}{\partial t} \Delta T\right),$$

или

$$\tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(T - ar_1 \Delta T) = a\Delta T\,, \qquad (2.45)$$

где $a = \lambda/(\rho c)$ – коэффициент температуропроводности. Уравнение (2.45) содержит два релаксационных слагаемых. При $\tau_1, r_1 \to 0$, оно совпадает с классическим уравнением теплопроводности.

Для численного решения уравнения (2.45), необходимо перейти от физической системы с бесконечным числом степеней свободы к системе с конечным их числом. В диссертации такой переход осуществляется при помощи метода конечных элементов (МКЭ). Для этого разобьём расчётную область сетью конечных элементов. За неизвестные величины примем значения температуры в узлах сетки T_j, $j = 1, \ldots, n$, где n – число узлов. Поле температуры в расчётной области аппроксимируется суммой

$$T(\mathbf{r},t) = \sum_{j\in E(\mathrm{r})} N_j(\mathbf{r}) T_j(t)\,, \qquad (2.46)$$

где $N_j(\mathbf{r})$ – функции формы конечных элементов, $E(\mathbf{r})$ – множество узлов конечного элемента, внутри которого (или на границе) «расположена» точка с радиусом – вектором $\mathbf{r}$. Для каждого узла $i = 1,\ldots,n$ составляется взвешенная при помощи функций формы N_i интегральная невязка уравнения (2.45), которая с учетом (2.46) примет вид

$$\int_V N_i \left[\tau_1 \sum_j N_j \frac{\partial^2 T_j}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_j N_j T_j - a\tau_2 \sum_j \Delta N_j T_j \right) - a\sum_j \Delta N_j T_j \right] dV = 0, \quad (2.47)$$

где V – объём расчётной области. Поскольку подынтегральное выражение содержит производные по координатам второго порядка, а на систему аппроксимирующих функций N_j не накладывается никаких ограничений (кроме непрерывности результирующего поля температуры), то по границам раздела элементов возможны бесконечные разрывы величины ΔN. Поэтому для вычисления интеграла (2.47) необходимо понизить порядок входящих в него производных. Естественный путь для этого предоставляет теорема Гаусса, позволяющая перейти от интегрирования по объёму в слагаемых с ΔN к интегрированию по замкнутой поверхности, ограничивающей объём. Эта теорема гласит, что для некоторого векторного поля $\mathbf{F}$, определённого в объёме V, справедливо равенство

$$\int_V \mathrm{div}\mathbf{F} dV = \oint_S \mathbf{F} d\mathrm{S}\,, \qquad (2.48)$$

где S – поверхность, ограничивающая V. Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} I_1 &= \tau_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V N_i \sum_j N_j T_j dV, \quad I_2 = \frac{\partial}{\partial t} \int_V N_i \sum_j N_j T_j dV, \\ I_3 &= ar_1 \frac{\partial}{\partial t} \int_V N_i \sum_j \Delta N_j T_j dV, \quad I_4 = a\int_V N_i \sum_j \Delta N_j T_j dV. \end{aligned} \qquad (2.49)$$

Заметим, что

$$I_1 = \tau_1 \frac{\partial I_2}{\partial t}, \quad I_3 = r_1 \frac{\partial I_4}{\partial t}.$$

Выражение (2.47) с учетом (2.49) можно записать в виде

$$\tau_1 \frac{\partial I_2}{\partial t} + I_2 - r_1 \frac{\partial I_4}{\partial t} - I_4 = 0. \qquad (2.50)$$

Из выражения (2.50) следует, что интегралы I_2 и I_4 являются независимыми. Применим к I_4 теорему Гаусса. Для этого подставим сначала в левую часть (2.48) некоторую функцию $\varphi\mathbf{F}$, где φ – скалярная функция

$$\int_V \mathrm{div}(\varphi\mathbf{F})dV = \int_V \mathrm{grad}\varphi \cdot \mathbf{F}dV + \int_V \varphi \mathrm{div}\mathbf{F}dV.$$

Преобразуя интеграл в левой части в поверхностный, получаем

$$\int_V \varphi \mathrm{div}\mathbf{F}dV = \oint_S \varphi\mathbf{F}d\mathbf{S} - \int_V \mathrm{grad}\varphi \cdot \mathbf{F}dV. \qquad (2.51)$$

Положим в (2.51) $\varphi = aN_i$, $\mathbf{F} = \sum_j \mathrm{grad}N_j T_j$

$$I_4 = a\int_V N_i \sum_j \Delta N_j T_j dV =$$

$$= a\oint_S N_i \sum_j \mathrm{grad}N_j T_j \cdot d\mathbf{S} - a\int_V \mathrm{grad}N_i \cdot \sum_j \mathrm{grad}N_j T_j dV. \qquad (2.52)$$

Поверхностный интеграл здесь – количество теплоты, проходящее через поверхность тела в единицу времени.

Запишем теперь уравнение (2.45) в матричной форме

$$\tau_1[C]\{\ddot{T}\} + [C]\{\dot{T}\} + r_1[\lambda]\{\dot{T}\} + [\lambda]\{T\} - \{Q\} = \{0\}, \qquad (2.53)$$

или окончательно

$$\tau_1[C]\{\ddot{T}\} + ([C] + r_1[\lambda])\{\dot{T}\} + [\lambda]\{T\} = \{Q\}, \qquad (2.54)$$

где $[C] = \rho c_p \int_V N_i N_j dV$ – матрица удельной теплоёмкости, $[\lambda] = \oint_S \alpha N_i N_j dS + \int_V \lambda \mathrm{grad}N_i \mathrm{grad}N_j dV$ – матрица проводимости, $\{Q\} = \oint_S \alpha N_i T_c dS + \oint_S N_i q_e dS$ – вектор теплового потока, $\{T\} = T_j,\ j = 1,\ldots,n$ – вектор неизвестных узловых температур.

Уравнение (2.54) – есть дискретная, выраженная в терминах МКЭ, матричная форма уравнения теплопроводности, учитывающая локальную неравновесность процесса. Как и следовало ожидать, оно отличается от классического уравнения

$$[C]\{\dot{T}\} + [\lambda]\{T\} = \{Q\}, \qquad (2.55)$$

наличием двух слагаемых: $\tau_1[C]\{\ddot{T}\}$ и $r_1[\lambda]\{\dot{T}\}$. Последняя добавка усиливает «демпфирующие» свойства системы – она обусловлена запаздыванием градиента температуры (нелокальность в пространстве [92, 93]). Первое слагаемое, содержащее вторую производную по времени от температуры, обусловленную запаздыванием теплового потока (нелокальность во времени [92, 93, 65]), при достаточно большом значении времени релаксации привносит изменения качественного характера, поскольку уравнение является волновым и описывает колебательный процесс распространения температуры.

Система инженерного анализа ANSYS предоставляет довольно обширный инструментарий работы с базой данных модели. Мощный встроенный язык программирования APDL позволяет не только выполнять базовые арифметические преобразования с входными и выходными величинами, но и задействовать высокопроизводительные функции математического ядра ANSYS для решения больших систем уравнений и векторно – матричных операций.

В диссертации предлагается использовать следующие средства автоматизации работы с расчётной моделью ANSYS: построение (импорт) геометрической модели, генерация расчётной сетки, наложение граничных и начальных условий, формирование матриц $[C]$, $[\lambda]$ и вектора $\{Q\}$, решение системы линейных уравнений, а также трёхмерное цветографическое отображение результатов расчёта. Единственная процедура, требующая программирования – численное интегрирование по времени уравнений (2.54), так как штатный алгоритм моделирования переходных процессов ANSYS предназначен для решения классического уравнения (2.55). Существенно упрощает разработку программы то обстоятельство, что все необходимые матрицы можно непосредственно получить из базы данных модели соответствующими APDL – командами.

Обозначим $\{T_t\}$ – вектор температуры в момент времени t. Заменим в (2.54) производные конечно – разностными аналогами. Будем использовать схему интегрирования, которой соответствует вычисление «углового коэффициента» на конце интервала $[t, t+\Delta t]$. Если провести аналогию с уравнением первого порядка общего вида $\dot{x} = f(x,t)$, то этой схеме соответствует следующая: значение переменной в следующий момент времени $x_{t+\Delta t}$ находится из решения алгебраического уравнения $x_{t+\Delta t} = x_t + f(x_{t+\Delta t}, t)\Delta t$

$$\tau_1[C]\left(\frac{\{T_{t+\Delta t}\} - \{T_t\} - \{\dot{T}_t\}\Delta t}{\Delta t^2}\right) + ([C] + r_1[\lambda])\left\{\frac{\{T_{t+\Delta t}\} - \{T_t\}}{\Delta t}\right\} + [\lambda]\{T_{t+\Delta t}\} = \{Q\},$$

откуда

$$(\tau_1[C] + ([C] + r_1[\lambda])\Delta t + [\lambda]\Delta t^2)\{T_{t+\Delta t}\} =$$
$$= \{Q\}\Delta t^2 + \tau_1[C](\{T_t\} + \{\dot{T}_t\}\Delta t) + ([C] + r_1[\lambda])\{T_t\}\Delta t. \qquad (2.56)$$

Последняя формула есть искомое рекуррентное соотношение для вектора температуры, представляющее собой систему линейных уравнений относительно $\{T_{t+\Delta t}\}$. Заметим, что в итерационном процессе матрица этой системы не меняется, поэтому её факторизацию достаточно произвести однократно до его начала, чтобы на каждом шаге по времени выполнять только прямой и обратный ход с изменяющейся правой частью.

Применяя аналогичный подход для теплового потока, определяемого из уравнения (2.42), получим

$$\{\mathbf{q}_{t+\Delta t}\}+\tau_1\left(\frac{\{\mathbf{q}_{t+\Delta t}\}-\{\mathbf{q}_t\}}{\Delta t}\right)=\{\hat{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}\}+r_1\left(\frac{\{\hat{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}\}-\{\hat{\mathbf{q}}_t\}}{\Delta t}\right),\quad j=1,\ldots,n, \qquad (2.57)$$

где $\hat{\mathbf{q}}=-\lambda\,\mathrm{grad}T$ – «классический» тепловой поток. Отсюда

$$\{\mathbf{q}_{t+\Delta t}\}=\frac{\{\hat{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}\}\Delta t+\tau_1\{\mathbf{q}_t\}+r_1(\{\hat{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}\}-\{\hat{\mathbf{q}}_t\})}{\Delta t+\tau_1}. \qquad (2.58)$$

Итерационные процессы, описываемые рекуррентными соотношениями (2.56) и (2.58), реализованы в виде расширения для программного продукта ANSYS, написанного на языке ADPL (см. п. 7.1).

С целью верификации разработанного APDL – алгоритма рассмотрим работу программы на примере одномерной задачи теплопроводности, решение которой известно. Математическая постановка задачи при граничных условиях первого рода в безразмерном виде будет

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_1\frac{\partial^2\Theta}{\partial\mathrm{Fo}^2}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}+R_1\frac{\partial^3\Theta}{\partial\xi^2\partial\mathrm{Fo}}\qquad(\mathrm{Fo}>0;\ 0<\xi<1); \qquad (2.59)$$

$$\Theta(\xi,0)=1;\qquad \frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial\mathrm{Fo}}=0;\qquad \frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=0;\qquad \Theta(1,\mathrm{Fo})=0. \qquad (2.60)$$

Решение температурных задач с использованием разработанного алгоритма осуществляется в размерном виде, т.е. каждая физическая величина, входящая в уравнение (2.56), имеет размерность. Однако, принимая $\lambda=c=\rho=1$ и, задавая граничные условия таким образом, чтобы перенос теплоты осуществлялся лишь в направлении одной из осей, размерная и безразмерная математические постановки задач полностью совпадают. Схема теплообмена, удовлетворяющая перечисленным условиям, представлена на рисунке 2.8.

На одной из граней стержня задается граничное условие первого рода $T_{\text{ст}}=1$, на всех остальных – условие отсутствия теплообмена. Граничное условие 1 – го рода задается во всех точках пространственной сетки с абсциссой $x=1$.

Начальная температура принимается равной нулю ($T_0=0$). Результаты расчетов температуры с использованием разработанного APDL – алгоритма в сравнении с точным решением представлены на рисунке 2.9. Расхождение результатов не превышает 0,01%.

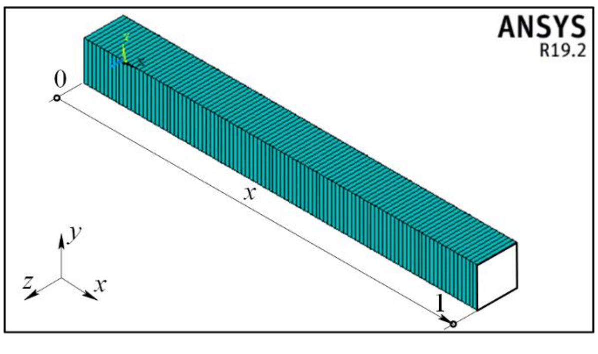


Рисунок 2.8. Схема теплообмена

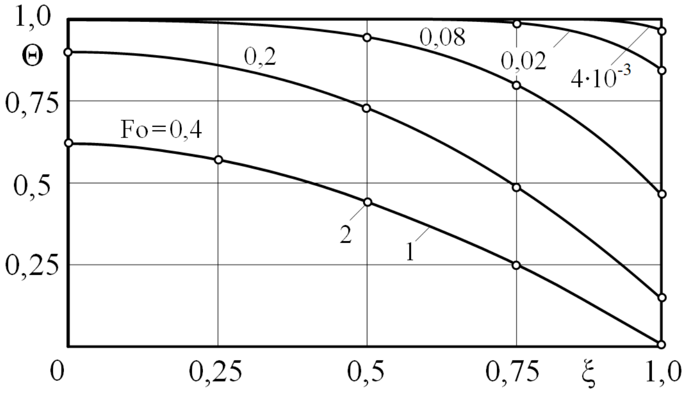


Рисунок 2.9. Распределение температуры в стержне при $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = \tau_1 = r_1 = 0{,}1$: 1 – расчет методом конечных элементов; 2 – точное решение

В качестве примера использования разработанного алгоритма для решения более сложных задач в диссертации приведены результаты моделирования температурного поля в шестиугольной прямой призме со сквозным круглым отверстием в центре (см. рисунок 2.10).

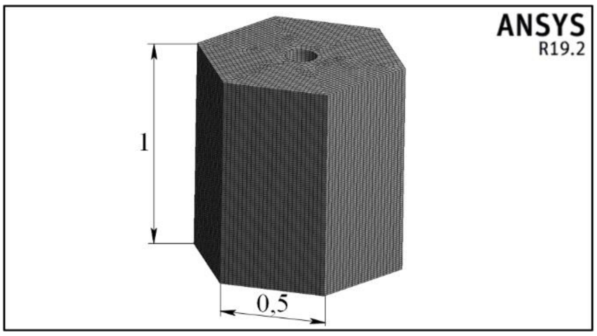


Рисунок 2.10. Шестиугольная прямая призма с отверстием

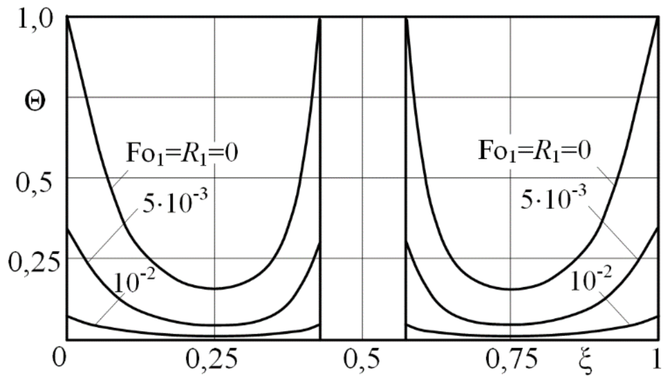


Рисунок 2.11. Распределение температуры в сечении призмы в момент времени $\mathrm{Fo} = 0{,}01$

Рассмотрены различные режимы нагрева тела (через вершину, ребра, грани). На рисунке 2.11 дано распределение температуры в сечении, проходящем через ось отверстия и одну из вершин призмы, при граничных условиях первого рода на поверхности. Анализ результатов расчетов температуры при различных значениях коэффициентов Fo_1, R_1 позволяет заключить, что учет релаксационных свойств среды приводит к существенному отличию получаемых температурных полей от классических (при $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0$). В частности, отмечается, что при увеличении Fo_1, R_1 происходит более равномерный нагрев призмы – с меньшими значениями температурных градиентов внутри области. Данные результаты могут быть использованы при исследовании формирования ударных волн напряжений и перемещений при воздействии мощного источника теплоты на поверхность тела и др.

2.3. Локально – неравновесная модель теплового воспламенения, обусловленного протеканием экзотермической химической реакции

На основе разработанной методологии моделирования локально – неравновесного переноса тепла в твердых телах предложена математическая модель теплового воспламенения в системах с источником теплоты, изменяющимся по экспоненциальному закону. Вывод дифференциального уравнения модели выполнен также на основе теории двухфазного запаздывания. Показано, что оба подхода приводят к аналогичным результатам.

Выполненные исследования показали, что при учете пространственно – временнóй нелокальности возрастает время задержки теплового воспламенения. Отмечается также, что физическое установление граничных условий происходит в течение некоторого интервала времени. Под физическим установлением граничного условия понимается следующее: несмотря на строгое выполнение граничного условия первого рода в граничной точке, в ее окрестности (сколь угодно малой) происходит постепенное изменение температуры от значения, заданного начальным условием, до значения, определяемого граничным условием. Отсюда следует, что количество подводимой к системе теплоты имеет некоторый предел, который зависит от физических свойств среды, в том числе релаксационных.

Изучение температурного состояния систем с внутренними источниками теплоты, обусловленными протеканием экзотермических химических реакций, является ключевой проблемой теории теплового воспламенения [12, 82, 111]. Экзотермические химические реакции могут протекать непосредственно внутри (в объеме) твердых тел. В зависимости от внешних условий, химического состава реагирующего вещества такие реакции могут протекать в условиях прогрессивного самоускорения. В этом случае мощность внутренних источников тепла нелинейно зависит от температуры.

Известные математические модели теплового воспламенения основаны на принципе локальности (локального термодинамического равновесия). Учитывая, что процесс теплового воспламенения является высокоинтенсивным процессом, использование принципа локальности может приводить к несоответствию расчетных данных экспериментальным. В связи с этим возникает необходимость разработки локально – неравновесных моделей воспламенения.

Рассмотрим вывод локально – неравновесного уравнения теплопроводности с учетом действия внутреннего источника теплоты переменной мощности. Уравнение теплового баланса

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + q_v, \tag{2.61}$$

представим в виде

$$c\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(T+\sum_{k=1}^{N}\tau_k^k\frac{\partial^k T}{\partial t^k}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(q+\sum_{k=1}^{N}r_k^k\frac{\partial^k q}{\partial t^k}\right)+\left(q_v+\sum_{k=1}^{N}\tau_k'^k\frac{\partial^k q_v}{\partial t^k}\right), \qquad (2.62)$$

где q_v – внутренний источник теплоты объемного действия; $\tau_k'^k$ – коэффициент релаксации внутреннего источника теплоты.

Модифицированная форма уравнения (2.61) включает инерционные слагаемые, учитывающие релаксацию температуры, теплового потока и внутреннего источника теплоты. Согласно уравнению (2.62) процесс аккумулирования теплоты (левая часть уравнения) вследствие действия внутреннего источника теплоты и изменения величины теплового потока вдоль направления координатной оси (правая часть уравнения), происходит с некоторой задержкой (запаздыванием во времени), определяемой величиной коэффициентов τ_k, r_k, τ_k'. Как будет показано далее, это эквивалентно запаздыванию теплового потока во времени вследствие возникновения температурного градиента.

Подставляя в (2.62) формулу закона Фурье (2.3), после некоторых преобразований получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(T+\sum_{k=1}^{N}\tau_k^k\frac{\partial^k T}{\partial t^k}\right)=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\sum_{k=1}^{N}r_k^k\frac{\partial^{k+2}T}{\partial x^2\partial t^k}\right)+\frac{q_v}{c\rho}+\sum_{k=1}^{N}\frac{\tau_k'^k}{c\rho}\frac{\partial^k q_v}{\partial t^k}. \qquad (2.63)$$

В диссертации рассмотрена модель теплопроводности в теле с внутренним источником теплоты, мощность которого определяется скоростью протекания химической реакции (согласно закону Аррениуса):

$$q_v(T)=Q\rho k_0\exp\left(\frac{-E}{RT}\right), \qquad (2.64)$$

где Q – тепловой эффект реакции; ρ – плотность; c – теплоемкость; k_0 – предэкспонент (предэкспоненциальный множитель); R – универсальная газовая постоянная; E – энергия активации;

С учетом (2.64) уравнение (2.63) при $N=1$ будет

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_1\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+r_1\frac{\partial^3 T}{\partial x^2\partial t}\right)+\frac{Qk_0}{c}\exp\left(-\frac{E}{RT}\right)+$$
$$+\frac{\tau_1' Qk_0 E}{cRT^2}\exp\left(-\frac{E}{RT}\right)\frac{\partial T}{\partial t}. \qquad (2.65)$$

Рассмотрим также вывод уравнения (2.65) на основе теории двухфазного запаздывания. В математических моделях, использующих принцип локального равновесия и гипотезу сплошной среды, выполняется условие бесконечной скорости распространения теплоты, что объясняется использованием при их выводе дифференциальных уравнений моделей формулы закона Фурье для теплового потока вида $q=-\lambda\partial T/\partial x$. В этой формуле градиент температуры $\partial T/\partial x$ и тепловой поток q не разделены во времени, то есть отсутсвует причинно – следственная связь явлений. При возникновении градиента температуры мгновенно (без задержки во времени) возникает тепловой поток. В действительности, реакция системы (тепловой поток) на внешнее возмущение (изменение температуры) возникает с некоторой задержкой – запаздыванием. С целью учета релаксационных явлений запишем закон Фурье в виде

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t+\tau_1) = -\lambda \operatorname{grad} T(\mathbf{r}, t+r_1)$$

или в одномерном случае

$$q + \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \cdots = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} + r_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + r_2^2 \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial t^2} + \cdots \right). \tag{2.66}$$

Ограничиваясь двумя слагаемыми в левой и правой частях соотношения (2.66), формула для определения теплового потока приводится к виду

$$q = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} + r_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} \right) - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t}, \tag{2.67}$$

где τ_1, r_1 – время релаксации теплового потока и градиента температуры.

Подставив (2.67) в уравнение теплового баланса (2.61), получим

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r_1 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} \right) + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) + q_v. \tag{2.68}$$

Выразив $\partial q / \partial x$ из (2.61) и подставив в (2.68), получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r_1 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} \right) + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{q_v}{c\rho} \right) + \frac{q_v}{c\rho}. \tag{2.69}$$

Определив производные от третьего слагаемого в правой части уравнения (2.69) с учетом (2.64), находим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r_1 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} \right) + \frac{Q k_0}{c} \exp\left(-\frac{E}{RT} \right) +$$

$$+ \frac{\tau_1 Q k_0 E}{c R T^2} \exp\left(-\frac{E}{RT} \right) \frac{\partial T}{\partial t}. \tag{2.70}$$

В случае, когда запаздывание q_v обусловлено лишь запаздыванием температурной функции ($\tau_k'^k = \tau_k^k$), полученное уравнение совпадает с уравнением (2.65). В связи с тем, что результаты вывода локально – неравновесных уравнений теплопереноса, получаемые при однократной релаксации уравнения теплового баланса ($N = 1$), совпадают с результатами, основанными на положениях теории двухфазного запаздывания, в дальнейшем будут использоваться оба этих подхода.

При равенстве нулю релаксационных слагаемых, уравнения (2.65), (2.70) приводится к классическому параболическому уравнению с нелинейным источником тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Q k_0}{c} \exp\left(-\frac{E}{RT} \right).$$

Рассмотрим классическую задачу теории теплового воспламенения – задачу о зажигании конденсированного вещества горячим телом с температурой $T_{\text{ст}}$ [12]. Схема теплообмена представлена на рис. 2.12. Краевые условия к уравнению (2.70) при несимметричных граничных условиях первого рода будут

$$T(x,\,0)=T_0;\quad \partial T(x,\,0)/\partial t=0; \tag{2.71}$$

$$T(0,\,t)=T_{\text{ст}};\quad T(L,\,t)=T_0, \tag{2.72}$$

где T_0 – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки ($T_{\text{ст}}>T_0$); L – толщина пластины.

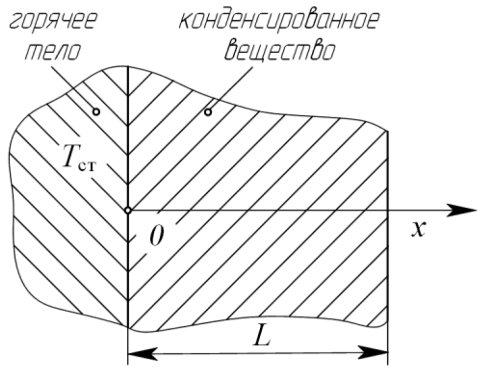


Рисунок 2.12. Схема теплообмена

С целью параметризации задачи, введем следующие безразмерные температуру, время и координату:

$$\Theta=\frac{E}{RT_{\text{ст}}^2}(T-T_{\text{ст}});\quad \text{Fo}=\frac{t}{t_{\text{а}}};\quad \xi=\frac{x}{x_{\text{а}}},$$

где $t_{\text{а}}=\dfrac{cRT_{\text{ст}}^2}{EQk_0}\exp\left(\dfrac{E}{RT_{\text{ст}}}\right)$ – временной масштаб; $x_{\text{а}}=\sqrt{at_{\text{а}}}$ – пространственный масштаб; $\beta=RT_{\text{ст}}/E$ – параметр, выражающий степень зависимости скорости химической реакции от температуры [12]; $\text{Fo}_1=\tau_1/t_{\text{а}}$, $R_1=r_1/t_{\text{а}}$ – коэффициенты релаксации.

С учетом введённых обозначений задача (2.70) – (2.72) принимает вид

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\text{Fo}}+\text{Fo}_1\frac{\partial^2\Theta}{\partial\text{Fo}^2}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}+R_1\frac{\partial^3\Theta}{\partial\xi^2\partial\text{Fo}}+\exp\left(\frac{\Theta}{\beta\Theta+1}\right)+$$

$$+\frac{\text{Fo}_1}{(\beta\Theta+1)^2}\exp\left(\frac{\Theta}{\beta\Theta+1}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\text{Fo}}\quad (0<\xi<\xi_0,\ \text{Fo}>0); \tag{2.73}$$

$$\Theta(\xi,\,0)=\Theta_0; \tag{2.74}$$

$$\partial\Theta(\xi,\,0)/\partial\tau=0; \tag{2.75}$$

$$\Theta(0,\,\text{Fo})=0; \tag{2.76}$$

$$\Theta(\xi_0,\,\text{Fo})=\Theta_0, \tag{2.77}$$

где $\xi_0=\sqrt{\delta}$; $\delta=L^2/x_{\text{а}}^2$ – параметр Франк – Каменецкого; $\Theta_0=E(T_0-T_{\text{ст}})/(RT_{\text{ст}}^2)$.

Следует особо отметить, что задача (2.73) – (2.77) имеет полностью безразмерный вид. На основе метода конечных разностей получено численное решение задачи (2.73) – (2.77). На основе явной схемы аппроксимации дифференциального уравнения разработан вычислительный алгоритм, позволяющий исследовать процесс теплового воспламенения в диапазоне времени $0 < \mathrm{Fo} < \mathrm{Fo}_з$ ($\mathrm{Fo}_з$ – время зажигания вещества). Причем $\mathrm{Fo}_з$ неизвестно заранее и определяется в результате решения задачи. При получении численного решения использовалась равномерная пространственно – временная сетка с шагами по переменным ξ и Fo равными соответственно $\Delta\xi,\ \Delta\mathrm{Fo}$. Узловые значения переменных задавались согласно соотношениям:

$$\xi_k = k\Delta\xi, \quad k = \overline{0, K}; \quad \Delta\mathrm{Fo}_i = i\,\Delta\mathrm{Fo}, \quad i = \overline{0, I}; \tag{2.78}$$

где K, I – количество шагов по переменным ξ, Fo.

Для аппроксимации вторых производных (как по времени, так и по координате) использована центральная разностная схема, первой производной по времени – схема «назад», имеющие соответственно второй и первый порядок точности.

На сетке (2.78) определялись сеточные функции $\Theta_k^i = \Theta(\xi_k, \Delta\mathrm{Fo}_i)$. При использовании явной схемы аппроксимации операторов конечно – разностный аналог задачи (2.73) – (2.77) имеет вид:

$$\frac{\Theta_k^i - \Theta_k^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_1 \frac{\Theta_k^{i+1} - 2\Theta_k^i + \Theta_k^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}^2} = \frac{\Theta_{k-1}^i - 2\Theta_k^i + \Theta_{k+1}^i}{\Delta\xi^2} +$$

$$+ R_1 \frac{\Theta_{k-1}^i - 2\Theta_k^i + \Theta_{k+1}^i - \Theta_{k-1}^{i-1} + 2\Theta_k^{i-1} - \Theta_{k+1}^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\xi^2} + \exp\left(\frac{\Theta_k^i}{\beta\Theta_k^i + 1}\right) -$$

$$+ \frac{\mathrm{Fo}_1}{(\beta\Theta_k^i + 1)^2} \exp\left(\frac{\Theta_k^i}{\beta\Theta_k^i + 1}\right) \frac{\Theta_k^i - \Theta_k^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}} \qquad (\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < \xi_0); \tag{2.79}$$

$$\Theta_k^0 = \Theta_0; \tag{2.80}$$

$$\frac{\Theta_k^1 - \Theta_k^0}{\Delta\mathrm{Fo}} = 0; \tag{2.81}$$

$$\Theta_0^i = 0; \tag{2.82}$$

$$\Theta_K^i = \Theta_0. \tag{2.83}$$

Численные исследования полученной модели показали существенную зависимость $\mathrm{Fo}_з$ от релаксационных свойств материалов (см. рисунки 2.13 – 2.16). На конкретном примере показано, что при учете релаксационных слагаемых в (2.73) отмечается задержка зажигания вещества $\Delta\mathrm{Fo}_з$ в сравнении с классической параболической моделью $(\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0)$. При решении задачи (2.79) – (2.83) использовались следующие исходные данные [12]: $E = 35$ *ккал / моль*; $Qk_0 = 2{,}45 \cdot 10^{16}$ *кал / г · моль*; $\lambda = 5{,}6 \cdot 10^{-4}$ *кал/(см · с · К)*; $c = 0{,}35$ *кал/(моль · К)*; $Q = 270$ *кал / г*; $a = \lambda/(c\rho)$ *см²/с*; $T_0 = 300$ *К*; $T_{ст} = 553$ *К*; $\rho = 1{,}6$ *г/см³*; $L = 7{,}38 \cdot 10^{-4}$ *м*.

На рисунках 2.13, 2.14 показано (в разном пространственном масштабе) изменение температуры по толщине пластины в различные моменты времени. Исследуемый процесс можно условно разделить на три стадии. В первой стадии происходит равномерный нагрев конденсированного вещества с незначительными градиентами температуры внутри области. В диапазоне безразмерного времени $0 \le \mathrm{Fo} < 60{,}06$ нагрев происходит преимущественно под действием граничного условия первого рода. Температура на этом этапе не превышает величины $\Theta = 0$, заданной граничным условием. В момент времени $\mathrm{Fo} \approx 60{,}06$ наступает тепловое равновесие – состояние, при котором поступление энергии с поверхности и за счет действия внутренних источников теплоты компенсируется теплоотводом в окружающую среду. После прохождения состояния теплового равновесия начинается вторая стадия, характеризуемая прогревом тела за счет внутренних источников тепла. В диапазоне $60{,}06 < \mathrm{Fo} < 67{,}16$ граничное условие первого рода, задаваемое в точке $\xi = 0$, становится не источником, а стоком теплоты. Координата максимума температур смещается от $\xi = 0$ до $\xi = \xi_{\max} = 1{,}37$, а вектор плотности теплового потока меняет направление на противоположное. И, наконец, в третьей стадии происходит резкое повышение температуры за счет действия внутреннего источника энергии. При этом реакция протекает в условиях самоускорения – мощность источника экспоненциально увеличивается при повышении температуры.

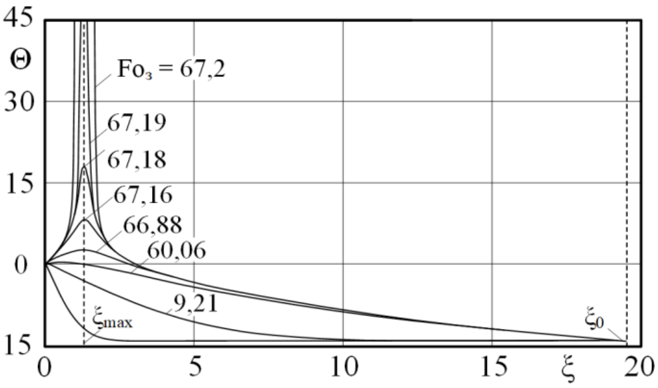


Рисунок 2.13. Распределение температуры в теле $(\mathrm{Fo}_1 = R_{1`} = 0)$

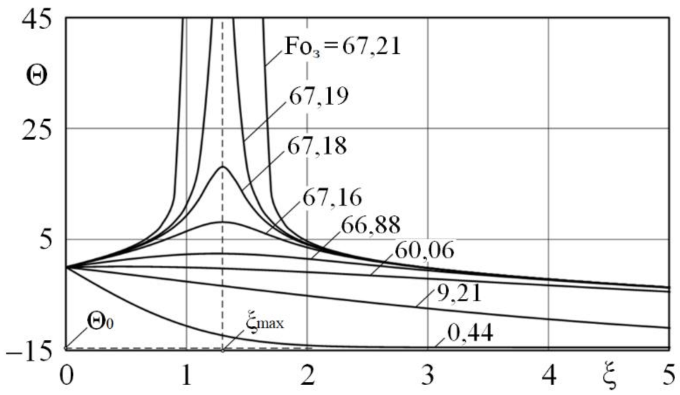


Рисунок 2.14. Распределение температуры в теле $(\mathrm{Fo}_1 = R_{1`} = 0)$

Из анализа рисунка 2.15 следует, что тепловое воспламенение происходит в момент времени $\mathrm{Fo}_з \approx 67{,}2$. Несмотря на наличие максимума температур $\xi_{\max} = 1{,}37$, неограниченное возрастание температуры происходит во всем объеме тела. Процесс прогрева происходит за малый интервал времени $\Delta\mathrm{Fo} \approx 0{,}1$. Очевидно, что столь интенсивные процессы протекают в локально – неравновесных условиях и их описание средствами равновесной термодинамики не вполне корректно.

Рассмотрим влияние релаксационных слагаемых в уравнении (2.73) на процесс теплового воспламенения. Из анализа рисунка 2.16 видно, что величина коэффициентов релаксации оказывает существенное влияние на время задержки зажигания. Причем $\Delta\mathrm{Fo}_з$ возрастает при увеличении коэффициентов Fo_1, R_1. Этот факт объясняется тем, что вследствие тепловой инерционности, возрастание теплового потока на поверхности пластины от нулевого значения до величины, определяемой граничным условием, происходит не мгновенно, а за некоторый отрезок времени. Снижение интенсивности процесса обусловлено также влиянием релаксационных свойств на мощность теплового источника. Например, при $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}35$ задержка теплового воспламенения составляет $\Delta\mathrm{Fo}_з \approx 40$, что в размерных величинах (в зависимости от геометрических характеристик и теплофизических свойств тела) может составлять несколько секунд.

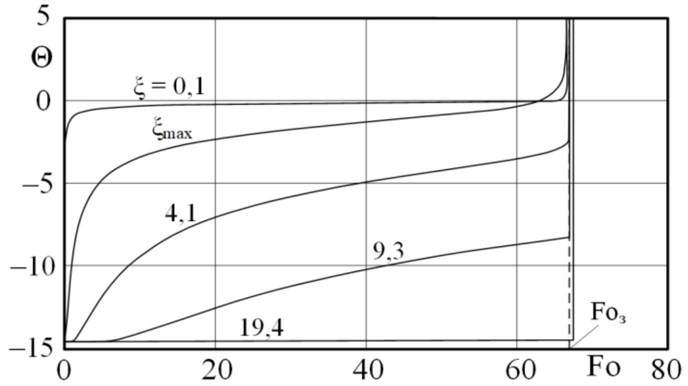


Рис. 2.15. Изменение температуры во времени $(\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0)$

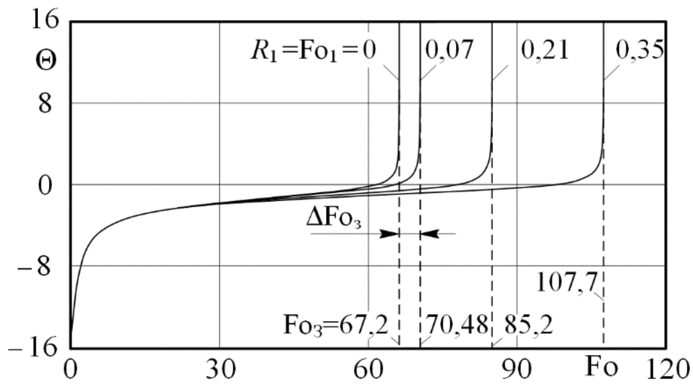


Рисунок 2.16. Изменение температуры в точке ξ_{max} при различных значениях коэффициентов релаксации $(\mathrm{Fo}_1 = R_1)$

На рисунке 2.17 показано, что время задержки теплового воспламенения $\Delta\mathrm{Fo}_з$ зависит от коэффициентов Fo_1, R_1 нелинейно – с увеличением Fo_1, R_1 влияние коэффициентов релаксации на $\Delta\mathrm{Fo}_з$ возрастает.

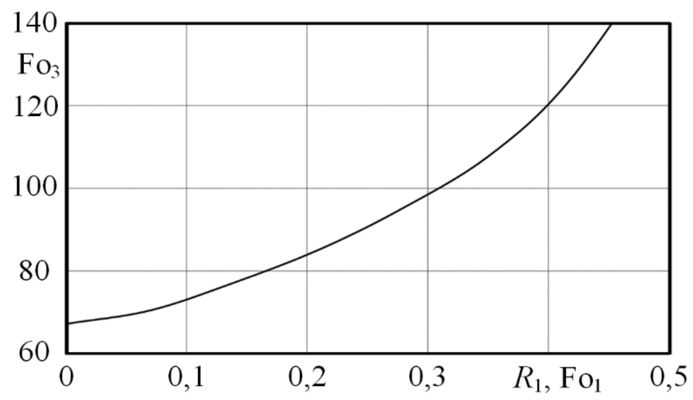


Рисунок 2.17. Зависимость времени зажигания $\mathrm{Fo}_з$ от величины коэффициентов релаксации $(\mathrm{Fo}_1 = R_1)$

2.4. Разработка и исследование математической модели теплового взрыва на основе теории двухфазного запаздывания

На основе модифицированной формы уравнения теплового баланса, получено уравнение локально – неравновесной теплопроводности с нелинейным источником теплоты. Анализ выполненных численных исследований процесса теплового взрыва позволил установить некоторые, неизвестные ранее, закономерности протекания процесса. В частности, показано, что время задержки теплового взрыва зависит от величины коэффициентов релаксации. Такой результат объясняется тем, что учет изменения от времени градиента температуры и теплового потока приводит к учету тепловой инерционности среды, связанной с невозможностью точного выполнения граничных условий в начальный момент времени – стабилизация их выполнения происходит в некотором диапазоне начального временного участка, в течении которого тепловой поток на границах тела возрастает от нуля до некоторого конкретного значения, определяемого заданными граничными условиями. Следовательно, в определенном диапазоне начального временного участка прогрев пластины происходит в условиях ограниченного теплообмена с окружающей средой, участвующей в прогреве конструкции, что и является сдерживающим фактором процесса теплового взрыва. Причем, с увеличением коэффициентов релаксации время задержки теплового взрыва возрастает.

Из полученных результатов также следует, что существует некоторый предел величины коэффициентов теплоотдачи, определяемый физическими свойствами среды, превышение которого не представляется возможным ни при каких условиях внешнего теплообмена. Теплообмен в твердых телах при наличии нелинейных внутренних источников теплоты в зависимости от соотношения мощности источников и параметров граничных условий может протекать в условиях, с течением времени приводящих к стационарному состоянию или к тепловому взрыву [12, 82, 111]. Оценка реализации того или иного варианта теплообмена возможна из анализа решения соответствующей краевой задачи.

Рассмотрим последовательность вывода уравнения теплового взрыва с учетом двухфазного запаздывания. Подставляя модифицированную форму закона Фурье, учитывающую инерционность процесса переноса тепла,

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda r_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t}, \qquad (2.84)$$

в уравнение теплового баланса (с учетом нелинейного внутреннего источника теплоты)

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + q_v(T), \qquad (2.85)$$

получаем

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r_1 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} \right) + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right) + q_v(T), \qquad (2.86)$$

где $q_v(T) = q_0(1+\beta T)$ – мощность внутреннего источника теплоты, линейно зависящего от температуры; q_0 – мощность источника в начальный момент времени; β – коэффициент.

Выразив $\partial q / \partial x$ из (2.85) и подставив в (2.86), получим

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda r_1 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\left(-c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + q_v(T) \right) + q_v(T). \qquad (2.87)$$

Определив производные в третьем слагаемом правой части выражения (2.87), находим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r_1 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} \right) + \frac{q_0}{c\rho}(1+\beta T) + \frac{\tau_1 q_0 \beta}{c\rho}\frac{\partial T}{\partial t}. \qquad (2.88)$$

Стоит отметить, что данное уравнение согласуется с классической теорией теплопроводности. Так, полагая $\tau_k^k = r_k^k = 0$ в уравнении (2.88), получаем параболическое уравнением с источником теплоты, зависящим от температуры, в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\omega_0}{c\rho}(1+\beta T). \qquad (2.89)$$

Найдем решение уравнения (2.88) для бесконечной пластины при следующих краевых условиях (см. рисунок 2.18):

$$T(x,\,0) = T_0; \qquad (2.90) \qquad\qquad \frac{\partial T(x,\,0)}{\partial t} = 0; \qquad (2.91)$$

$$\lambda \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} + \lambda r_1 \frac{\partial^2 T(0,t)}{\partial x \partial t} = \alpha_1 [T(0,t) - T_{c1}] + \alpha_1 \tau_1 \frac{\partial T(0,t)}{\partial t}; \qquad (2.92)$$

$$\lambda \frac{\partial T(\delta,t)}{\partial x} + \lambda r_1 \frac{\partial^2 T(\delta,t)}{\partial x \partial t} = \alpha_2 [T_{c2} - T(\delta,t)] - \alpha_2 \tau_1 \frac{\partial T(\delta,t)}{\partial t}, \qquad (2.93)$$

где T_0 – начальная температура; T_{c1}, T_{c2} – температуры среды на противоположных поверхностях пластины; α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи; δ – толщина пластины.

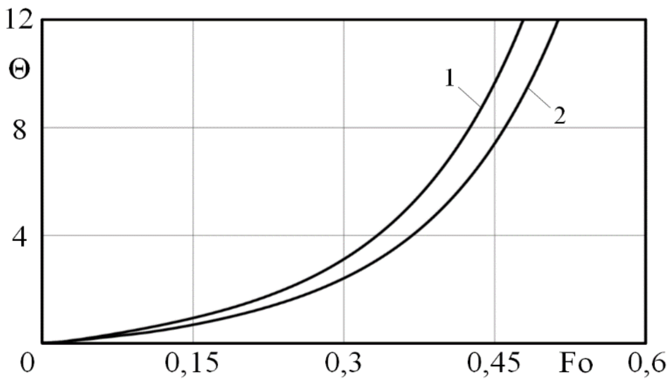


Рисунок 2.18. Схема теплообмена

В диссертации впервые выполнен учет локальной неравновесности процесса теплообмена тела с окружающей средой. Неоднородные граничные условия третьего рода (2.92), (2.93) содержат релаксационные слагаемые, влияние которых на исследуемый процесс проявляется тем существеннее, чем больше значения коэффициентов релаксации. Условия (2.92), (2.93) могут быть получены непосредственно из (2.84) или путем релаксации теплового потока и температуры согласно равенству

$$q+\sum_{k=1}^{N} r_k^k \frac{\partial^k q}{\partial t^k}=\alpha_1\left[T_{c1}-\left(T+\sum_{k=1}^{N}\tau_k^k \frac{\partial^k T}{\partial t^k}\right)\right];$$

$$q+\sum_{k=1}^{N} r_k^k \frac{\partial^k q}{\partial t^k}=\alpha_2\left[\left(T+\sum_{k=1}^{N}\tau_k^k \frac{\partial^k T}{\partial t^k}\right)-T_{c2}\right].$$

Введем следующие обозначения:

$$\Theta=\frac{T-T_0}{T_{c1}-T_0};\quad \mathrm{Fo}=\frac{at}{\delta^2};\quad \xi=\frac{x}{\delta};\quad \mathrm{Po}_1=\frac{\omega_0\delta^2\beta}{ac\rho};\quad \mathrm{Po}_2=\mathrm{Po}_1\frac{1+\beta T_0}{\beta\Delta T};\Delta T=T_{c1}-T_0;$$

$$\mathrm{Fo}_1=\frac{a\tau_1}{\delta^2};\quad R_1=\frac{ar_1}{\delta^2};\quad \mathrm{Bi}_1=\frac{\alpha_1\delta}{\lambda};\quad \mathrm{Bi}_2=\frac{\alpha_2\delta}{\lambda};\quad \Delta T_1=\frac{T_0-T_{c1}}{\Delta T}, \qquad (2.94)$$

Po_1 – критерий Померанцева; $\mathrm{Bi}_1, \mathrm{Bi}_2$ – критерии Био; Po_2 – безразмерный коэффициент.

С учетом обозначений (2.94) задача (2.88), (2.90) – (2.93) будет

$$(1-\mathrm{Fo}_1\mathrm{Po}_1)\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_1\frac{\partial^2\Theta}{\partial\mathrm{Fo}^2}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}+R_1\frac{\partial^3\Theta}{\partial\xi^2\partial\mathrm{Fo}}+\mathrm{Po}_1\Theta+\mathrm{Po}_2 \qquad (2.95)$$

$$(0<\xi<1;\quad \mathrm{Fo}>0);$$

$$\Theta(\xi,0)=0; \qquad (2.96) \qquad\qquad \frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial\mathrm{Fo}}=0; \qquad (2.97)$$

$$\left[\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}+R_1\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi\partial\mathrm{Fo}}-\mathrm{Bi}_1\left(\Theta+\mathrm{Fo}_1\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{Fo}}+\Delta T_1\right)\right]_{\xi=0}=0; \qquad (2.98)$$

$$\left[\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}+R_1\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi\partial\mathrm{Fo}}-\mathrm{Bi}_2\left(\Delta T_2-\Theta-\mathrm{Fo}_1\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{Fo}}\right)\right]_{\xi=1}=0, \qquad (2.99)$$

Используя метод конечных разностей получено численное решение задачи (2.95) – (2.99). На основе явной схемы аппроксимации дифференциального уравнения (2.95) разработан вычислительный алгоритм, позволяющий исследовать процесс теплового взрыва в широком диапазоне временной переменной. Созданный на базе программного комплекса MathCAD алгоритм позволяет в автоматическом режиме выполнять разбиение на конечные элементы (равномерные отрезки) исследуемую пространственную область, выполнять вывод результатов в графическом и текстовом виде.

При получении численного решения использовалась равномерная пространственно – временная сетка с шагами по переменным ξ и Fo равными соответственно $\Delta\xi$, $\Delta\mathrm{Fo}$. Узловые значения ξ и Fo задавались согласно соотношениям:

$$\xi_k=k\Delta\xi,\qquad k=\overline{0,K};\qquad \Delta\mathrm{Fo}_i=i\,\Delta\mathrm{Fo},\qquad i=\overline{0,I}; \qquad (2.100)$$

где K, I – количество шагов по переменным, ξ, Fo.

Для аппроксимации вторых производных (как по времени, так и по координате) использована центральная разностная схема, первой производной по времени – схема «назад», имеющие соответственно второй и первый порядок точности.

На сетке (2.78) вычислялись значения сеточной функции $\Theta_k^i = \Theta(\xi_k, \Delta\text{Fo}_i)$. При использовании явной схемы аппроксимации операторов конечно – разностный аналог задачи (2.95) – (2.99) имеет вид:

$$(1-\text{Fo}_1\text{Po}_1)\frac{\Theta_k^i-\Theta_k^{i-1}}{\Delta\text{Fo}}+\text{Fo}_1\frac{\Theta_k^{i+1}-2\Theta_k^i+\Theta_k^{i-1}}{\Delta\text{Fo}^2}=\frac{\Theta_{k-1}^i-2\Theta_k^i+\Theta_{k+1}^i}{\Delta\xi^2}+$$

$$+R_1\frac{\Theta_{k-1}^i-2\Theta_k^i+\Theta_{k+1}^i-\Theta_{k-1}^{i-1}+2\Theta_k^{i-1}-\Theta_{k+1}^{i-1}}{\Delta\text{Fo}\Delta\xi^2}+\text{Po}_1\Theta_k^i+\text{Po}_2; \qquad (2.101)$$

$$\Theta_k^0=0; \qquad (2.102) \qquad\qquad \frac{\Theta_k^1-\Theta_k^0}{\Delta\text{Fo}}=0; \qquad (2.103)$$

$$\frac{\Theta_1^i-\Theta_0^i}{\Delta\xi}+\text{Fo}_2\frac{\Theta_1^{i+1}-\Theta_0^{i+1}-\Theta_1^i+\Theta_0^i}{\Delta\text{Fo}\Delta\xi}-$$

$$-\text{Bi}_1\left(\Theta_0^i+\text{Fo}_1\frac{\Theta_0^{i+1}-\Theta_0^i}{\Delta\text{Fo}}+\Delta T_1\right)=0; \qquad (2.104)$$

$$\frac{\Theta_K^i-\Theta_{K-1}^i}{\Delta\xi}+\text{Fo}_2\frac{\Theta_K^{i+1}-\Theta_{K-1}^{i+1}-\Theta_K^i+\Theta_{K-1}^i}{\Delta\text{Fo}\Delta\xi}-$$

$$-\text{Bi}_2\left(\Delta T_2-\Theta_{K-1}^i-\text{Fo}_1\frac{\Theta_{K-1}^{i+1}-\Theta_{K-1}^i}{\Delta\text{Fo}}\right)=0. \qquad (2.105)$$

Результаты решения задачи (2.101) – (2.105) приводятся на рисунках 2.19 – 2.21 (при $\text{Bi}_1=5;\ \text{Bi}_2=10$). Анализ полученных результатов позволяет заключить, что в зависимости от значений параметров системы могут реализовываться два характерных режима – стационарный и режим теплового взрыва. Так, из анализа рисунка 2.19 видно, что при заданных условиях внешнего теплообмена ($\text{Bi}_1=5;\ \text{Bi}_2=10$), времени релаксации ($\text{Fo}_1=R_1=0{,}1$) и коэффициенте $\beta=0{,}001$ тепловой взрыв не наблюдается. С течением времени интенсивность изменения температуры снижается и при значении числа Фурье $\text{Fo}>0{,}42$ наблюдается установление стационарного режима (см. рис. 2.20). В этом случае количество энергии, выделяемое внутри системы, компенсируется теплоотводом через стенки пластины в окружающую среду.

Наибольшее влияние на установление того или иного режима оказывает величина β – коэффициент, учитывающий возрастание мощности внутреннего источника теплоты от температуры. Например, при $\beta=0{,}1$ неограниченное возрастание температуры происходит при любых значениях коэффициентов Fo_1 и R_1. Важно, однако, отметить, что с ростом величины коэффициентов релаксации наблюдается снижение интенсивности нагрева пластины. На рисунке 2.20 температурные кривые смещаются вправо, что свидетельствует о замедлении процесса в целом. С возрастанием коэффициентов релаксации в один и тот же момент времени температура в любой точке исследуемой области оказывается ниже (см. кривые 1 и 2 на рисунке 2.20). Так, в момент времени $\mathrm{Fo} = 0{,}125$ температура в точке $\xi = 0{,}9$ при $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10^{-3}$ составляет $\Theta \approx 6{,}5$, а при $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}05$ – $\Theta \approx 1{,}5$. Снижение интенсивности процесса прогрева при учете релаксационных явлений обусловлено несколькими факторами. Во – первых, при учете пространственно – временной нелокальности изменение температуры во времени сдерживается инерционными слагаемыми в уравнении (2.95) (смешанная производная в правой части уравнения и вторая производная по времени в левой). Во – вторых, учет релаксационных слагаемых в граничных условиях третьего рода приводит к снижению интенсивности нагрева пластины на начальном этапе протекания процесса. Кроме того, при выводе уравнения (2.95) учитывалась инерционность действия внутреннего источника теплоты.

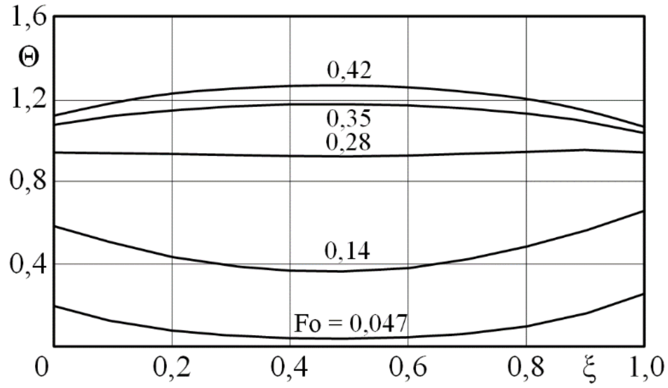


Рисунок 2.19. Изменение температуры по координате ξ во времени: $\beta = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}1$

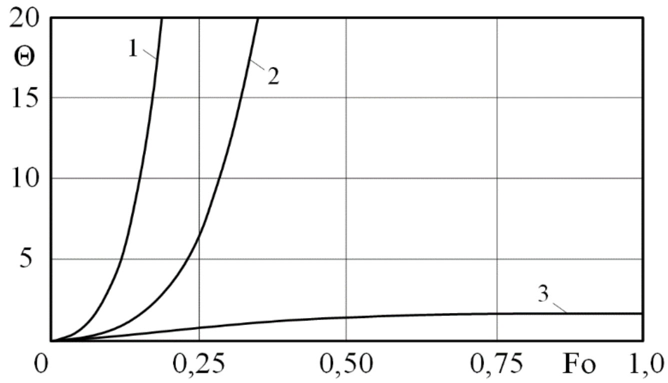


Рисунок 2.20. Изменение температуры при $\xi = 0{,}9$: 1 – $\beta = 0{,}1$; $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10^{-3}$; 2 – $\beta = 0{,}1$; $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}05$; 3 – $\beta = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}1$

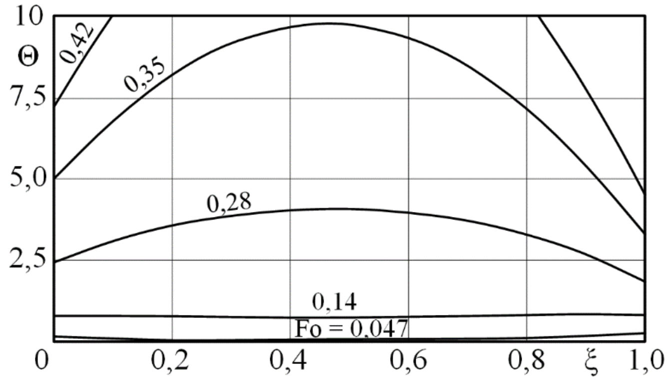


Рисунок 2.21. Изменение температуры по координате ξ во времени: $\beta = 0{,}1$; $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}1$

В диссертационной работе было выполнено исследование процесса нагрева пластины под действием лишь внутреннего источника теплоты. На границах исследуемой области задавалось условие отсутствия теплообмена. Было показано, что и в этом случае учет релаксационных явлений приводит к задержке теплового взрыва и снижению интенсивности прогрева пластины в целом.

На рисунке 2.21 приведены результаты расчетов функции $\Theta(\xi, \mathrm{Fo})$ для случая неограниченного возрастания температуры. Отмечается, что с увеличением времени Fo, значение безразмерной температуры также возрастает во всех точках пространственной переменной. Стабилизация температурного состояния пластины не происходит (в отличие от рис. 2.19). Таким образом, численные исследования показали зависимость времени задержки от релаксационных свойств материалов. Независимо от условий протекания процесса (прогрев или охлаждение), в случае учета релаксационных явлений время задержки теплового взрыва возрастает.

2.5. Исследование сильнонеравновесных процессов тепловых возмущений, вызываемых сверхкороткими лазерными импульсами

Современные лазерные установки позволяют получать изменяемые по частоте лазерные импульсы фемтосекундной длительности (до $10^{-15}\ c$), что приводит к возникновению в исследуемой конструкции сильно неравновесных состояний быстро релаксирующих температурных возбуждений (время релаксации $10^{-11} - 10^{-14}\ c$) [143, 161, 169, 238]. Однако известные модели теплообмена, включающие параболические уравнения, получены без учёта релаксационных явлений. Известно, что эти модели основаны на принципе локальности, согласно которому в любом малом элементе среды предполагается наличие локального теплового равновесия, тогда как в системе в целом наблюдаются градиенты потенциалов исследуемых температур. Такое состояние можно допустить лишь в случае, если скорость релаксации системы к локальному равновесию значительно больше скорости нарушения равновесия, вызванного граничными условиями [92, 93].

Используя модифицированный закон теплового баланса, получена математическая модель локально – неравновесного нагрева пластины сверхкороткими лазерными импульсами, моделируемыми переменным во времени граничным условием второго рода (тепловой поток – ступенчатая функция времени) с учётом его локальной неравновесности. Численные исследования модели показали, что учёт локальной неравновесности импульсного граничного условия второго рода приводит к сглаживанию скачков температуры в поверхностном слое пластины. При этом глубина прогретого слоя для каждой мощности теплового потока имеет определённую величину, неизменную во времени. Разработан также алгоритм управления тепловым потоком, исходя из достижения заданной и неизменной во времени температуры поверхности пластины.

Учитывая, что процесс воздействия импульсного лазерного излучения является кратковременным, то неучёт его локальной неравновесности может приводить к значительному отличию получаемых параметров от их действительных значений. Уравнение локально – неравновесного теплопереноса было получено в п. 2.1 диссертации и имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\sum_{k=1}^{N}\tau_k^k\frac{\partial^{k+1}T}{\partial t^{k+1}}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\sum_{k=1}^{N}r_k^k\frac{\partial^{k+2}T}{\partial x^2\partial t^k}\right) \qquad (2.106)$$

Найдем решение уравнения (2.106) при следующих краевых условиях:

$$T(x,0)=T_0; \quad (2.107) \qquad \frac{\partial T(x,0)}{\partial t}=0; \quad (2.108) \qquad \frac{\partial T(\delta,t)}{\partial x}=0; \quad (2.109)$$

$$-\lambda\left(\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}+\tau_1\frac{\partial^2 T(0,t)}{\partial x\partial t}\right)=q(t)+\tau_1\frac{\partial q(t)}{\partial t}, \qquad (2.110)$$

где δ – толщина пластины; T_0 – начальная температура; $q(t)=q_0\sin(\omega t)$ – изменяющийся во времени тепловой поток.

При воздействии лазерного излучения на поверхность твердого тела формула для теплового потока $q(t)$ может быть представлена в виде ступенчатой (разрывной) периодической функции (см. рисунок 2.22)

$$q(t)=\begin{cases} q_0, & \sin(\omega t)\ge 0; \\ 0, & \sin(\omega t)<0, \end{cases} \qquad (2.111)$$

где q_0 – амплитуда колебаний теплового потока, характеризующая мощность источника теплоты; $\omega=2\pi/\eta$ – круговая частота; η – период полного колебания. Для представления теплового потока в виде непрерывной периодической функции запишем (2.114) в виде

$$q^*(t)=\begin{cases} q_0\sin\left(\dfrac{z\omega t}{2}\right)^2, & j\eta\le t<\eta\left(\dfrac{1}{2z}+j\right)\vee\eta\left(\dfrac{z-1}{2z}+j\right)\le t<\eta\left(\dfrac{1}{2}+j\right); \\ q_0, & \eta\left(\dfrac{1}{2z}+j\right)\le t<\eta\left(\dfrac{z-1}{2z}+j\right); \\ 0, & \eta\left(\dfrac{1}{2}+j\right)\le t<\eta(1+j), \end{cases} \qquad (2.112)$$

где $N=\overline{1,\infty}$; $j=N-1$; $z=2N$ – коэффициент, определяющий точность аппроксимации. При $z\to\infty$ интервал времени δt, за который величина теплового потока изменяется от минимального значения до максимального и наоборот – стремится к нулю (рисунок 2.22). В этом случае $q^*(t)\to q(t)$. Период, частота и амплитуда тепловых потоков, определяемых согласно (2.111) и (2.113), совпадают при любых значениях z.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta=\frac{T-T_0}{T_0}; \quad \mathrm{Fo}_1=\frac{a\tau_1}{\delta^2}; \quad R_1=\frac{ar_1}{\delta^2}; \quad \mathrm{Ki}=\frac{q_0\delta}{\lambda T_0}; \quad \mathrm{Pd}=\frac{\omega\delta^2}{a};$$

$$\mathrm{Fo}=at/\delta^2; \quad \xi=x/\delta, \qquad (2.113)$$

где Θ, Fo, ξ – соответственно безразмерные температура, время, координата;

Fo_1 – безразмерный коэффициент релаксации; Ki – критерий Кирпичева; Pd – критерий Предводителева.

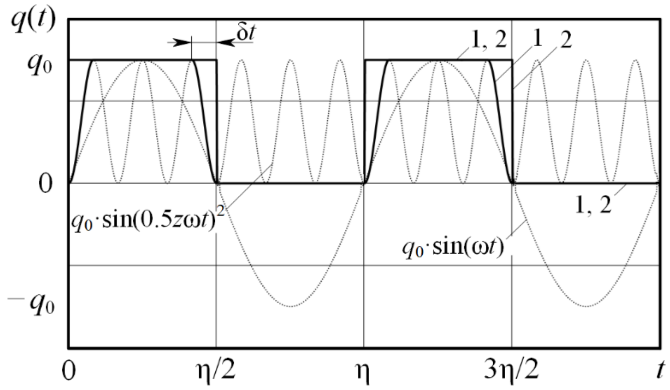


Рисунок 2.22. Изменение теплового потока во времени: 1 – $q^*(t)$ при $z=6$ (по формуле (2.112)); 2 – $q(t)$ (по формуле (2.111))

С учётом соотношения для плотности теплового потока (2.112) и безразмерных параметров (2.113), задача (2.106) – (2.110) принимает вид

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_1\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}+R_1\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2\partial\mathrm{Fo}}, \qquad (2.114)$$

$$\Theta(\xi,0)=0; \quad (2.115) \qquad \frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial\mathrm{Fo}}=0; \quad (2.116) \qquad \frac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=0; \quad (2.117)$$

$$-\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}-\mathrm{Fo}_1\frac{\partial^2\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi\mathrm{Fo}}=$$

$$=\begin{cases}\mathrm{Ki}\sin\left(\dfrac{z}{2}\mathrm{Pd}\mathrm{Fo}\right)^2+z\mathrm{Fo}_1\mathrm{Ki}\,\mathrm{Pd}\sin(z\mathrm{Pd}\mathrm{Fo}),\\ \dfrac{j2\pi}{\mathrm{Pd}}\le\mathrm{Fo}<\dfrac{2\pi}{\mathrm{Pd}}\left(\dfrac{1}{2z}+j\right)\vee\dfrac{2\pi}{\mathrm{Pd}}\left(\dfrac{z-1}{2z}+j\right)\le\mathrm{Fo}<\dfrac{2\pi}{\mathrm{Pd}}\left(\dfrac{1}{2}+j\right);\\ \mathrm{Ki},\quad \dfrac{2\pi}{\mathrm{Pd}}\left(\dfrac{1}{2z}+j\right)\le\mathrm{Fo}<\dfrac{2\pi}{\mathrm{Pd}}\left(\dfrac{z-1}{2z}+j\right);\\ 0,\quad \dfrac{2\pi}{\mathrm{Pd}}\left(\dfrac{1}{2}+j\right)\le\mathrm{Fo}<\dfrac{2\pi}{\mathrm{Pd}}(1+j).\end{cases} \qquad (2.118)$$

Получение точных аналитических решений задач нагрева поверхности пластины концентрированными потоками энергии, задаваемыми разрывными функциями вида (2.111), крайне затруднительно, а в некоторых случаях невозможно. В связи с этим, в диссертации получено численное решение задачи (2.114) – (2.118) на основе метода конечных разностей. Согласно данному методу решение исходной задачи отыскивается в виде дискретной функции температуры Θ_i^k. Дискретизация пространственно – временной области выполняется по переменным ξ и Fo:

$$\xi_k=k\Delta\xi,\quad k=\overline{1,K};\ \Delta\mathrm{Fo}_i=i\,\Delta\mathrm{Fo},\quad i=\overline{1,I},$$

где K, I – – количество шагов по переменным ξ, Fo.

При получении численного решении задачи (2.114) – (2.118) использовалась равномерная пространственно – временная сетка как по времени, так и по координате. Конечно – разностный аналог задачи (2.114) – (2.118) имеет вид

$$\frac{\Theta_k^i-\Theta_k^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_1\frac{\Theta_k^{i+1}-2\Theta_k^i+\Theta_k^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}^2}=\frac{\Theta_{k-1}^i-2\Theta_k^i+\Theta_{k+1}^i}{\Delta\xi^2}+$$

$$+R_1\frac{\Theta_{k-1}^i-2\Theta_k^i+\Theta_{k+1}^i-\Theta_{k-1}^{i-1}+2\Theta_k^{i-1}-\Theta_{k+1}^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\xi^2};$$

$$\Theta_k^0=0\,; \qquad \frac{\Theta_k^1-\Theta_k^0}{\Delta\mathrm{Fo}}=0\,; \qquad \frac{\Theta_K^i-\Theta_{K-1}^i}{\Delta\xi}=0\,;$$

$$-\frac{\Theta_1^i-\Theta_0^i}{\Delta\xi}-\mathrm{Fo}_1\frac{\Theta_1^i-\Theta_0^i-\Theta_1^{i-1}+\Theta_0^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\xi^2}=$$

$$=\begin{cases}\mathrm{Ki}\sin\left(\dfrac{z}{2}\mathrm{Pd}\,i\Delta\mathrm{Fo}\right)^2+z\mathrm{Fo}_1\mathrm{Ki}\,\mathrm{Pd}\sin(z\mathrm{Pd}\,i\Delta\mathrm{Fo}),\\ \dfrac{j2\pi}{\mathrm{Pd}}\le i\Delta\mathrm{Fo}<\dfrac{2\pi}{\mathrm{Pd}}\left(\dfrac{1}{2z}+j\right)\vee\dfrac{2\pi}{\mathrm{Pd}}\left(\dfrac{z-1}{2z}+j\right)\le i\Delta\mathrm{Fo}<\dfrac{2\pi}{\mathrm{Pd}}\left(\dfrac{1}{2}+j\right);\\ \mathrm{Ki},\quad \dfrac{2\pi}{\mathrm{Pd}}\left(\dfrac{1}{2z}+j\right)\le i\Delta\mathrm{Fo}<\dfrac{2\pi}{\mathrm{Pd}}\left(\dfrac{z-1}{2z}+j\right);\\ 0,\quad \dfrac{2\pi}{\mathrm{Pd}}\left(\dfrac{1}{2}+j\right)\le i\Delta\mathrm{Fo}<\dfrac{2\pi}{\mathrm{Pd}}(1+j).\end{cases}$$

Использование явной схемы аппроксимации дифференциальных операторов исходной краевой задачи позволило разработать вычислительный алгоритм на базе программного продукта MathCAD 15 (см. п. 7.3). Разработанный алгоритм позволяет получать численные решения задачи (2.114) – (2.118) при различных исходных данных. Его важной особенностью является возможность настройки пространственно – временной сетки путем изменения шага по координатам ξ и Fo. Несмотря на достоинства использования явной схемы аппроксимации исходного дифференциального уравнения, возникают известные сложности, в том числе, оценка погрешности вычислений.

С целью анализа точности получаемых решений использованы апостериорные методы оценки погрешности принятой разностной схемы. В частности, выполнен анализ погрешности вычислений на сгущающихся сетках (как по пространству, так и по времени). Результаты вычислений погрешности ε в зависимости от величины пространственного шага $\Delta\xi$ показали, что при $\Delta\xi<10^{-2}$ погрешность вычислений составляет не более 0,01%. При вычислении абсолютной погрешности ε в качестве эталонного значения использовалось значение функции температуры при пространственном шаге $\Delta\xi=10^{-4}$.

На рисунке 2.23 приведены результаты расчетов температуры на поверхности пластины $(\xi=0)$ при различных значениях коэффициентов релаксации Fo_1, R_1. Из их анализа видно, что амплитуда колебаний температуры снижается с увеличением коэффициентов релаксации, а при значениях Fo_1, R_1 больших 0,1 отмечается монотонный характер нагрева поверхности при практическом отсутствии колебательного процесса.

На рисунке 2.24 даны расчеты в случае, когда релаксационные свойства материалов не учитываются ($\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0$) и учитываются ($\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}001$). Их анализ позволяет заключить, что учет релаксационных свойств приводит к запаздыванию прогрева тела, что в наибольшей степени сказывается при малых и сверхмалых значениях временной и пространственной переменных. С увеличением времени отличие температурных кривых уменьшается и при каких – то больших значениях временно́й переменной кривые практически совпадают. Этот факт свидетельствует о том, что ввиду теплоинерционных свойств материала мгновенный прогрев тела невозможен ни при каких условиях внешнего теплообмена, в том числе и от тепловых потоков сверхвысокой интенсивности.

На рисунке 2.25 приведены результаты расчетов, позволяющие оценить влияние разрывности теплового потока на температурное состояние конструкции. Из их анализа следует, что в диапазоне времени, когда тепловой поток равен нулю, происходит уменьшение температуры вблизи поверхности стенки $(\xi = 0)$, которое с увеличением координаты оказывается незначительным.

На рисунке 2.27 приведены результаты расчетов, позволяющие выполнить оценку влияния величины критерия Кирпичева на температурное состояние конструкции. Из их анализа следует, что для каждой величины числа Fo существует некоторый предел перемещения фронта температурного возмущения, который не может быть превышен дальнейшим увеличением критерия Кирпичева. Например, для $\mathrm{Fo} = 1{,}57 \cdot 10^{-3}$ величина координаты ξ, на которую перемещается фронт температурного возмущения, возрастает вплоть до $\mathrm{Ki} = 10000$. Однако дальнейшее увеличение критерия Ki не оказывает влияния на величину фронта при данном значении числа Fo (см. рисунок 2.27). Таким образом, скорость продвижения фронта нагрева зависит от внешнего источника лишь до некоторого предела (см. рисунок 2.28).

Решения, полученные численным методом, неудобны для выполнения параметрического анализа. Найдем приближенное аналитическое решение задачи (2.114) – (2.118), положив $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0$. Математическая постановка задачи в данном случае будет

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} \qquad (\mathrm{Fo} > 0;\ 0 < \xi < 1); \qquad (2.119)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \qquad (2.120) \qquad -\frac{\partial \Theta(0, \mathrm{Fo})}{\partial \xi} = \mathrm{Ki}(\mathrm{Fo});; \qquad (2.121)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, \mathrm{Fo})}{\partial \xi} = 0. \qquad (2.122)$$

В работе [99] рассмотрен интегральный метод, позволяющий находить решение достаточно высокой точности почти во всей области времени нестационарного процесса $(0 < \mathrm{Fo} < \infty)$. Процесс нагрева здесь разделяется на две стадии: $0 < \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}^*$ и $\mathrm{Fo}^* \le \mathrm{Fo} < \infty$. В первой стадии вводится в рассмотрение новая искомая функция $q_1(\mathrm{Fo})$ – закон перемещения нулевой изотермы (фронт температурного возмущения). Согласно методу решения задачи (2.119) – (2.122) предполагается, что скорость распространения теплоты конечна. Из данного предположения следует, что изменение температуры на начальном этапе процесса $(0 < \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}^*)$ происходит не во всем объеме тела, а лишь в прогретом слое. Таким образом, новая искомая функция представляет собой закон изменения толщины прогретого слоя во времени. Величина Fo^* соответствует времени достижения фронтом температурного возмущения центра пластины с координатой $\xi = 1$. Во второй стадии процесса вводится функция $q_2(\mathrm{Fo}) = \Theta(1, \mathrm{Fo})$, представляющая собой закон изменения температуры во времени в центре пластины.

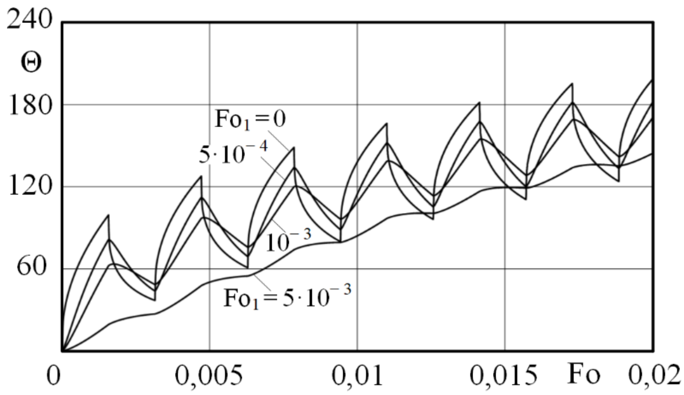


Рисунок 2.23. Изменение температуры во времени на границе пластины ($\mathrm{Ki} = 2000$; $\mathrm{Pd} = 2000$; $z = 10^5$)

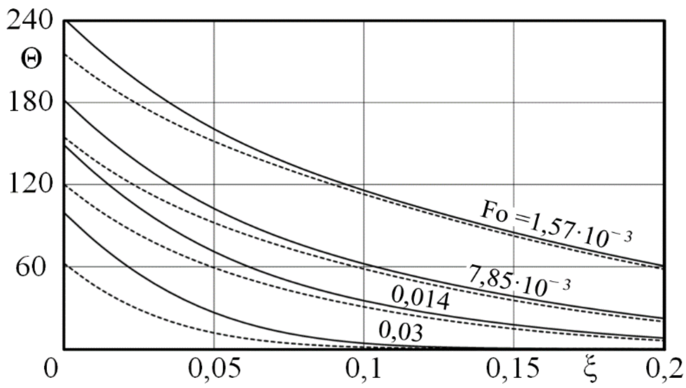


Рисунок 2.24. Распределение температуры в пластине ($\mathrm{Ki} = 2000$; $\mathrm{Pd} = 2000$; $z = 10^5$):
———————— – $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0$;
– – – – – – – – $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10^{-3}$

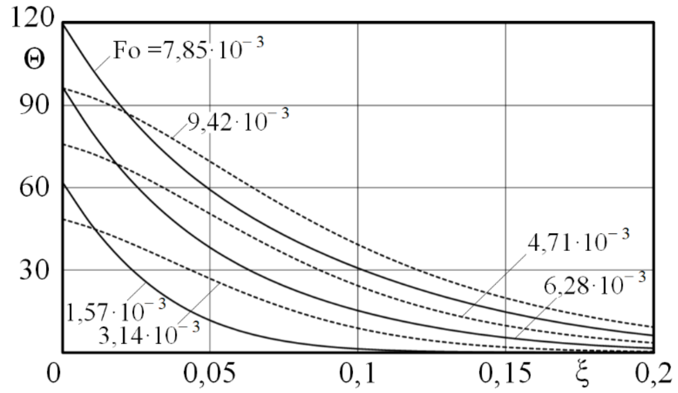


Рисунок 2.25. Распределение температуры в пластине с учетом разрывности теплового потока ($\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10^{-3}$, $\mathrm{Ki} = 2000$, $\mathrm{Pd} = 2000$, $z = 10^5$): ———— – тепловой поток не равен нулю; – – – – – тепловой поток равен нулю

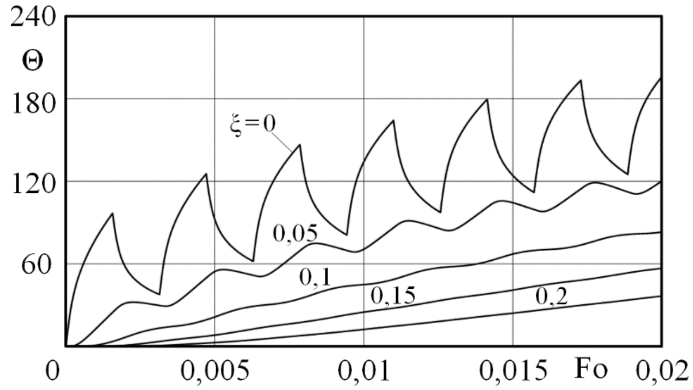


Рисунок 2.26. Распределение температуры от времени в отдельных точках пространственной переменной ($\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10^{-4}$, $z = 10^5$, $\mathrm{Ki} = 2000$, $\mathrm{Pd} = 2000$)

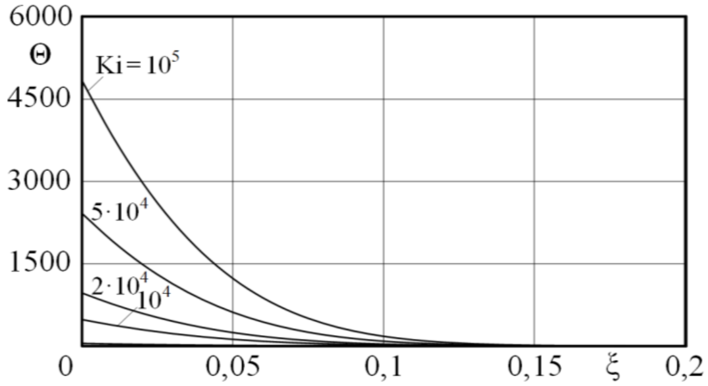


Рисунок 2.27. Распределение температуры в пластине при $\mathrm{Fo} = 1{,}57 \cdot 10^{-3}$ для различных значений критерия Кирпичева ($\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10^{-4}$, $\mathrm{Ki} = 2000$, $z = 10^5$, $\mathrm{Pd} = 2000$)

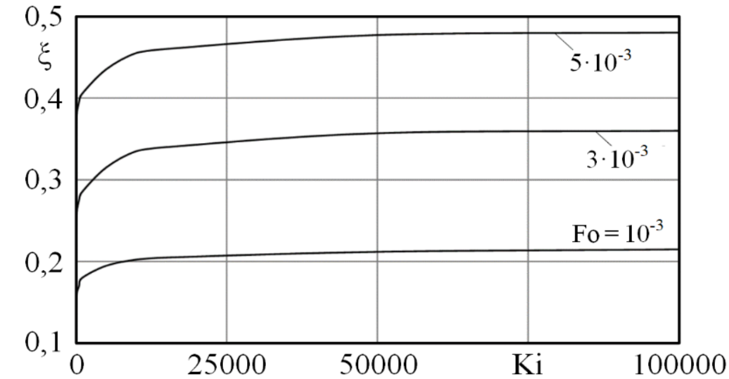


Рисунок 2.28. Изменение фронта температурного возмущения от критерия Кирпичева для различных значений безразмерного времени Fo

Как показали приведенные выше исследования, наибольший интерес представляет рассмотрение первой стадии процесса. В связи с чем, вторая стадия настоящей работе рассматриваться не будет. Применительно к первой стадии, ввиду принятого допущения о конечной скорости распространения теплоты, тепловой поток постепенно продвигается по координате ξ во времени, имея нулевое значение в начальный момент времени $(q_1(0) = 0)$. Следовательно, модель теплопроводности на первой стадии процесса приближается к принятой выше модели (см. задачу (2.114) – (2.118)), в которой учитываются релаксационные свойства материала, несмотря на то, что решается параболическое уравнение (2.119).

Постановка задачи в первой стадии включает уравнение (2.119) с условием (2.121), а также следующие условия, которые выполняются на фронте возмущения (см. рисунок 2.29)

$$\Theta(q_1, \mathrm{Fo}) = 0; \qquad (2.123)$$

$$\frac{\partial \Theta(q_1, \mathrm{Fo})}{\partial \xi} = 0 \qquad (0 < \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}^*; \quad 0 \le \xi \le q_1(\mathrm{Fo})), \qquad (2.124)$$

где выражения (2.123), (2.124) – условия сопряжения зон.

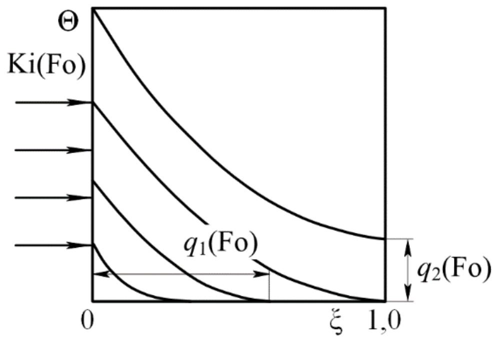


Рисунок 2.29. Расчетная схема теплообмена

Решение задачи (2.119), (2.121), (2.123), (2.124) будем искать в виде следующего соотношения:

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=0}^{n} a_k(q_1)\,\xi^k, \tag{2.125}$$

где $a_k(q_1)$ – неизвестные коэффициенты, для определения которых используются условия (2.121), (2.123), (2.124). В результате подстановки (2.125) в перечисленные условия, получим систему трех линейных алгебраических уравнений. С учетом найденных из решения системы коэффициентов $a_k(q_1)\ (k = 0, 1, 2)$ выражение (2.125) будет

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \mathrm{Ki}(\mathrm{Fo})\left(0{,}5q_1 - \xi + \frac{0{,}5\xi^2}{q_1}\right), \tag{2.126}$$

где $\mathrm{Ki}(\mathrm{Fo}) = \dfrac{q(t)\delta}{\lambda T_0}$.

В выражении (2.126) неизвестной величиной является введенная ранее функция $q_1(\mathrm{Fo})$. Для ее определения проинтегрируем дифференциальное уравнение (2.119) в пределах глубины прогретого слоя, т.е. в пределах пространственной переменной $0 \le \xi \le q_1(\mathrm{Fo})$

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}\, d\xi = \int_0^{q_1} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^2}\, d\xi. \tag{2.127}$$

Вычисляя интеграл правой части (2.127), находим

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}\, d\xi = \frac{\partial \Theta(q_1, \mathrm{Fo})}{\partial \xi} - \frac{\partial \Theta(0, \mathrm{Fo})}{\partial \xi}. \tag{2.128}$$

Учитывая (2.121) и (2.124), соотношение (2.128) будет

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}\, \mathrm{d}\xi = \mathrm{Ki}(\mathrm{Fo}). \tag{2.129}$$

Подставив (2.126) в (2.129) (принимая $\mathrm{Ki} = \mathrm{const}$), для $q_1(\mathrm{Fo})$ имеем обыкновенное уравнение вида

$$dq_1^2 = 6d\mathrm{Fo}. \tag{2.130}$$

Интегрируя (2.130), для начального условия $q_1(0) = 0$ найдём

$$q_1 = \sqrt{6\,\mathrm{Fo}}. \tag{2.131}$$

Положив $q_1(\mathrm{Fo})=1$, имеем время завершения первой стадии $\mathrm{Fo}=\mathrm{Fo}^*=0{,}1667$.

Подставив (2.131) в (2.126), имеем решение задачи (2.119), (2.121), (2.123), (2.124) для первого приближения

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=0{,}5\mathrm{Ki}\left(\sqrt{6\mathrm{Fo}}-2\xi+\frac{\xi^2}{\sqrt{6\mathrm{Fo}}}\right). \qquad (2.132)$$

Из анализа расчетов по формуле (2.132) видно, что в области чисел Фурье $0{,}03\le\mathrm{Fo}\le\mathrm{Fo}^*=0{,}1667$ их расхождение с точным решением находится в пределах 6%, а при $\mathrm{Fo}\le 0{,}03$ – 1%.

Найдем решение задачи (2.119), (2.121), (2.123), (2.124) в случае, если тепловой поток – линейная функция времени

$$\mathrm{Ki}(\mathrm{Fo})=\mathrm{Ki}\,\mathrm{Fo}. \qquad (2.133)$$

Дифференциальное уравнение относительно $q_1(\mathrm{Fo})$ здесь будет

$$\frac{dq_1^2}{d\mathrm{Fo}}+\frac{q_1^2}{\mathrm{Fo}}=6. \qquad (2.134)$$

Интегрируя (2.134), с начальным условием $q_1(0)=0$ находим

$$q_1(\mathrm{Fo})=\sqrt{3\mathrm{Fo}}. \qquad (2.135)$$

Формулы (2.126), (2.135) будут решением задачи (2.119), (2.121), (2.123), (2.124) для первого приближения (при линейном изменении теплового потока от времени).

Одномерность краевой задачи для первой стадии процесса теплопроводности обосновывается тем, что импульсному лазерному облучению миллисекундных длительностей подвергаются поверхности изделий, толщины которых по сравнению с поперечными размерами пятна излучения незначительны. В связи с чем, величиной теплового потока в плоскости пятна излучения можно пренебречь.

Для удобства расчетов температурного состояния конкретных материалов формулу (2.126) представим в размерном виде

$$T=T_0+0{,}5\frac{q(t)\delta}{\lambda}\left[\sqrt{3\frac{at}{\delta^2}}-2\frac{x}{\delta}+\frac{(x/\delta)^2}{\sqrt{3at/\delta^2}}\right], \qquad (2.136)$$

где $q(t)=q_0\dfrac{at}{\delta^2}$.

Формула (2.136) для поверхности пластины $(x=0)$ будет

$$T(0,\,t)=T_0+0{,}5\frac{q(t)}{\lambda}\sqrt{3at}. \qquad (2.137)$$

Результаты расчетов температур по формуле (2.137) для алюминия даны на рисунке 2.30 $(\lambda=204\ \mathit{Вт/(м\cdot °C)},\ a=91\cdot10^{-6}\,м^2/с,\ T_0=20°C)$.

Из анализа видно, что температура поверхности пластины неограниченно возрастает во времени. Однако во многих практических случаях требуется, чтобы температура поверхности, достигнув за определенное время некоторой заданной величины, далее с течением времени оставалась бы неизменной.

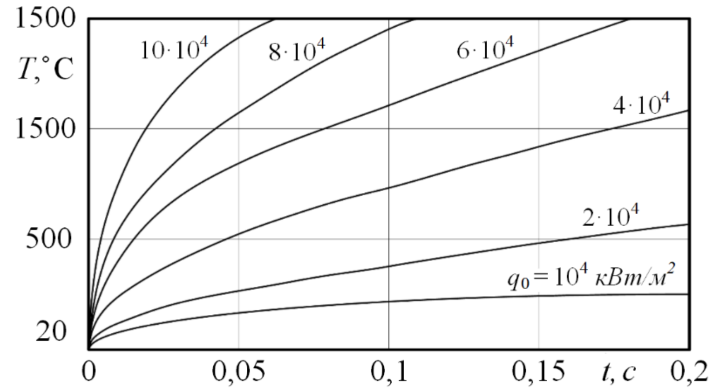


Рисунок 2.30. Изменение температуры на поверхности алюминиевой пластины в зависимости от мощности потока лазерного излучения

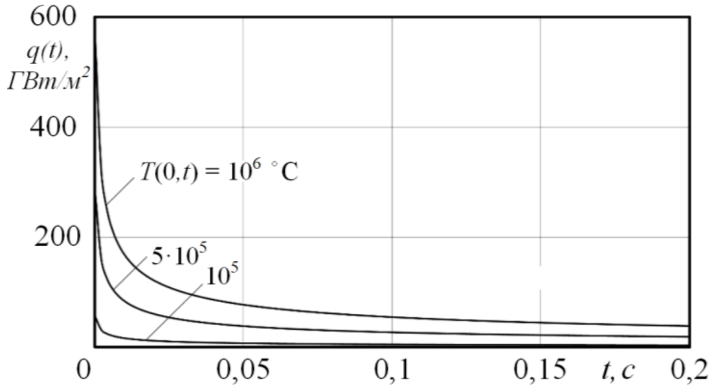


Рисунок 2.31. Изменение теплового потока во времени (по формуле (2.138))

Отметим, что неизменность температуры поверхности можно обеспечить лишь до момента времени пока фронт возмущения не достигнет противоположной границы пластины. После того, как он достигнет координаты $(x = \delta)$, вся пластина участвует в процессе теплообмена и достижение постоянной во времени температуры стенки уже не представляется возможным – она будет неограниченно возрастать с течением времени. Таким образом, достижение постоянной во времени температуры стенки возможно лишь на первой стадии процесса. Для этого необходимо, используя формулу (2.137), найти такую закономерность изменения теплового потока от времени $q(t)$, чтобы температура поверхности пластины $(x = 0)$ была заданной и неизменной во времени. Выражая $q(t)$ из (2.137), получаем

$$q(t) = \frac{2\lambda(T(0,t) - T_0)}{\sqrt{3at}} \qquad (t > 0). \tag{2.138}$$

По формуле (2.138), задавая любые конкретные температуры поверхности пластины, можно найти соответствующие формулы для изменения теплового потока. Соответственно этим формулам следует организовывать изменение потока лазерного излучения во времени. Графики зависимости теплового потока от времени для разных значений температуры на границе алюминиевой пластины приведены на рисунке 2.31.

Анализируя результаты, заключаем, что для достижения любой заданной температуры поверхности изделия тепловой поток на незначительном участке начального диапазона времени $(t \neq 0)$ уменьшается от максимального значения в начальный момент времени до некоторой минимальной величины. Затем практически не изменяющейся во времени. Отметим, что диапазон времени в данном случае ограничен величиной времени первой стадии процесса $(0 < \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}^*)$, определяемой из соотношения (2.135), положив $q_1(\mathrm{Fo}^*) = 1$. Отсюда находим $\mathrm{Fo}^* = 1{,}7320508$.

2.6. Локально – неравновесная модель взаимосвязанного тепломассопереноса

В диссертационной работе с целью учёта пространственно – временной нелокальности для вывода дифференциальных уравнений взаимосвязанного тепломассопереноса используются модифицированные соотношения взаимности Онзагера, в которых движущие силы и вызываемые ими потоки разлагаются в ряд по степеням малых параметров коэффициентов релаксации. В этих соотношениях искомые функции оказываются зависимыми не только от движущих сил и потоков, но и от скоростей и ускорений их изменения во времени.

Экспериментально и теоретически было обнаружено, что, если несколько явлений переноса протекают одновременно, то при их наложении появляются новые эффекты: градиент концентрации вызывает перенос теплоты (эффект Дюфура); градиент температуры приводит к переносу вещества – к термодиффузии (эффект Соре); наложение теплопроводности и электропроводности приводит к эффектам Томсона и Пельтье и др. В аналитических выражениях эффекты наложения описываются соотношениями взаимности Онзагера, согласно которым поток I_i, вызванный действием сил X_k, $(k = \overline{1, n})$, пропорционален этим силам [68, 71, 91]

$$I_i = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} X_k \qquad (i = \overline{1, n}). \tag{2.139}$$

Из соотношений (2.139) следует, что матрица кинетических коэффициентов является симметричной относительно главной диагонали, то есть $L_{ik} = L_{ki}$. При этом коэффициенты L_{ii}, расположенные на главной диагонали, определяют интенсивность переноса i – го потока субстанции, протекающего под действием соответствующей силы.

При совместном протекании неизотермической диффузии и теплопроводности соотношения (2.139) для бинарной смеси могут быть записаны в виде [91]

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= -\frac{L_{11} A_{11}}{T} \operatorname{grad} \mu - \frac{L_{12}}{T^2} \operatorname{grad} T; \\ I_2 &= -\frac{L_{21} A_{11}}{T} \operatorname{grad} \mu - \frac{L_{22}}{T^2} \operatorname{grad} T. \end{aligned}\right\} \tag{2.140}$$

И, в частности, L_{12} характеризует перенос вещества, связанный с градиентом температуры (эффект Соре), а L_{21} – перенос теплоты, вследствие градиента концентрации (эффект Дюфура). Условие $L_{12} = L_{21}$ означает симметрию влияния градиента температуры на поток вещества и градиента концентрации на поток теплоты.

Система уравнений (2.140) может быть записана в виде

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= -\frac{L_{11}A_{11}}{T}\frac{\partial\mu}{\partial C}\operatorname{grad}C - \frac{\rho C D'}{A_{11}}\operatorname{grad}T; \\ I_2 &= -\rho C T\, D''\frac{\partial\mu}{\partial C}\operatorname{grad}C - \frac{L_{22}}{T^2}\operatorname{grad}T. \end{aligned}\right\} \quad (2.141)$$

Введем следующие обозначения:

$$L'_{11} = -\frac{L_{11}A_{11}}{T}\frac{\partial\mu}{\partial C} = -\rho D;\ L'_{12} = -\frac{\rho C D'}{A_{11}};\ L'_{21} = -\rho C T\, D''\frac{\partial\mu}{\partial c};\ L'_{22} = -\frac{L_{22}}{T^2} = -\lambda;$$

$$X_1 = \operatorname{grad}C;\ X_2 = \operatorname{grad}T;\ D = \frac{L_{11}A_{11}}{\rho T}\frac{\partial\mu}{\partial C};\ D' = \frac{L_{12}A_{11}}{\rho C T^2};\ D'' = \frac{L_{21}A_{11}}{\rho C T^2}. \quad (2.142)$$

Стоит отметить, что вследствие равенства $L_{12} = L_{21}$, коэффициенты термодиффузии и Дюфура также равны ($D' = D''$).

С учетом принятых обозначений система уравнений (2.141) приводится к виду (2.139)

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= L'_{11}X_1 + L'_{12}X_2; \\ I_2 &= L'_{21}X_1 + L'_{22}X_2. \end{aligned}\right\} \quad (2.143)$$

Соотношения Онзагера (2.139) относятся к феноменологическим (опытным) законам, согласно которым любое изменение движущей силы (причины) X_k, ($k = \overline{1, n}$) приводит к мгновенному изменению потоков (следствий) I_i, ($i = \overline{1, n}$). Таким образом, соотношения Онзагера в виде (2.143) не позволяют установить прининно – следственную связь явлений – возникновение потока под действием термодинамических сил без временного лага, то есть без запаздывания во времени. В связи с чем, в дифференциальные уравнения (2.143), получаемые на основе соотношений (2.139), закладывается бесконечная скорость распространения потенциалов исследуемых полей.

С целью учёта скоростей и ускорений движущих сил и вызываемых ими потоков запишем соотношения (2.143) в виде

$$\left.\begin{aligned} I_1 + \sum_{m=1}^{N}\tau'_m\frac{\partial^m I_1}{\partial t^m} &= L'_{11}\left(X_1 + \sum_{m=1}^{N} r'_m\frac{\partial^m X_1}{\partial t^m}\right) + L'_{12}\left(X_2 + \sum_{m=1}^{N} r_m\frac{\partial^m X_2}{\partial t^m}\right); \\ I_2 + \sum_{m=1}^{N}\tau_m\frac{\partial^m I_2}{\partial t^m} &= L'_{21}\left(X_1 + \sum_{m=1}^{N} r'_m\frac{\partial^m X_1}{\partial t^m}\right) + L'_{22}\left(X_2 + \sum_{m=1}^{N} r_m\frac{\partial^m X_2}{\partial t^m}\right). \end{aligned}\right\} \quad (2.144)$$

Ограничиваясь в правой и левой части соотношений (2.144) одним релаксационным слагаемым ($N = 1$), находим

$$\left.\begin{aligned} I_1 + \tau'_1\frac{\partial I_1}{\partial t} &= L'_{11}\left(X_1 + r'_1\frac{\partial X_1}{\partial t}\right) + L'_{12}\left(X_2 + r_1\frac{\partial X_2}{\partial t}\right); \\ I_2 + \tau_1\frac{\partial I_2}{\partial t} &= L'_{21}\left(X_1 + r'_1\frac{\partial X_1}{\partial t}\right) + L'_{22}\left(X_2 + r_1\frac{\partial X_2}{\partial t}\right). \end{aligned}\right\} \quad (2.145)$$

Уравнения законов сохранения массы и теплоты имеют вид

$$\rho\frac{\partial C}{\partial t}=-\frac{\partial I_1}{\partial x}; \tag{2.146}$$

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=-\frac{\partial I_2}{\partial x}. \tag{2.147}$$

Выражая I_1, I_2 из (2.144) и подставляя в (2.146), (2.147), получаем

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial C}{\partial t}&=\tau_1'\frac{\partial^2 I_1}{\partial x\partial t}-L_{11}'\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}+r_1'\frac{\partial^2 X_1}{\partial x\partial t}\right)-L_{12}'\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}+r_1\frac{\partial^2 X_2}{\partial x\partial t}\right);\\ c\rho\frac{\partial T}{\partial t}&=\tau_1\frac{\partial^2 I_2}{\partial x\partial t}-L_{21}'\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}+r_1'\frac{\partial^2 X_1}{\partial x\partial t}\right)-L_{22}'\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}+r_1\frac{\partial^2 X_2}{\partial x\partial t}\right).\end{aligned}\right\} \tag{2.148}$$

Смешанные производные от потоков I_1, I_2 представим в виде

$$\tau_1'\frac{\partial^2 I_1}{\partial x\partial t}=\tau_1'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I_1}{\partial x}\right)=-\tau_1'\rho\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}; \tag{2.149}$$

$$\tau_1\frac{\partial^2 I_2}{\partial x\partial t}=\tau_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I_2}{\partial x}\right)=-\tau_1 c\rho\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \tag{2.150}$$

С учетом (2.142), (2.149), (2.150) система уравнений (2.148) будет

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t}+\tau_1'\frac{\partial^2 C}{\partial t^2}&=D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+r_1'\frac{\partial^3 C}{\partial x^2\partial t}\right)+a_{12}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+r_1\frac{\partial^3 T}{\partial x^2\partial t}\right);\\ \frac{\partial T}{\partial t}+\tau_1\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}&=a_{21}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+r_1'\frac{\partial^3 C}{\partial x^2\partial t}\right)+a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+r_1\frac{\partial^3 T}{\partial x^2\partial t}\right).\end{aligned}\right\} \tag{2.151}$$

Рассмотрим краевую задачу тепломассопереноса для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях первого рода. Краевые условия при симметричном теплообмене и диффузии имеют вид

$$C(x,0)=C_0\ ;\quad T(x,0)=T_0\ ;\quad \frac{\partial C(x,0)}{\partial t}=0\ ;\quad \frac{\partial T(x,0)}{\partial t}=0; \tag{2.152}$$

$$\frac{\partial C(0,t)}{\partial x}=0\ ;\quad \frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=0;\quad C(\delta,t)=C_1\ ;\quad T(\delta,t)=T_1. \tag{2.153}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathrm{Fo}=\frac{Dt}{\delta^2};\quad \xi=\frac{x}{\delta}.\ \mathrm{Fo}_1=\frac{\tau_1 D}{\delta^2}\ ;\quad \mathrm{Fo}_1'=\frac{\tau_1' D}{\delta^2};\quad R_1=\frac{r_1 D}{\delta^2};\quad R_1'=\frac{r_1' D}{\delta^2}. \tag{2.154}$$

С учётом введенных временных и пространственных масштабов и безразмерных коэффициентов релаксации задача (2.151) – (2.153) будет

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial \mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_1'\frac{\partial^2 C}{\partial \mathrm{Fo}^2}&=\frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2}+R_1'\frac{\partial^3 C}{\partial \xi^2\partial \mathrm{Fo}}+a_{12}^*\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}+R_1\frac{\partial^3 T}{\partial \xi^2\partial \mathrm{Fo}}\right);\\ \frac{\partial T}{\partial \mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_1\frac{\partial^2 T}{\partial \mathrm{Fo}^2}&=a_{21}^*\left(\frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2}+R_1'\frac{\partial^3 C}{\partial \xi^2\partial \mathrm{Fo}}\right)+a^*\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}+R_1\frac{\partial^3 T}{\partial \xi^2\partial \mathrm{Fo}}\right);\end{aligned}\right\} \tag{2.155}$$

$$(\mathrm{Fo}>0;\quad 0<\xi<1;\quad 0<C<1;\quad T_1\le T\le T_0);$$

$$C(\xi,0)=C_0; \quad (2.156) \qquad T(\xi,0)=T_0; \quad (2.157)$$

$$\frac{\partial C(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}}=0; \quad (2.158) \qquad \frac{\partial T(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}}=0. \quad (2.159)$$

$$C(1,\mathrm{Fo})=C_1; \quad (2.160) \qquad T(1,\mathrm{Fo})=T_1; \quad (2.161)$$

$$\frac{\partial C(0,\mathrm{Fo})}{\partial \xi}=0; \quad (2.162) \qquad \frac{\partial T(0,\mathrm{Fo})}{\partial \xi}=0. \quad (2.163)$$

где $a_{12}^*=a_{12}/D$; $a_{21}^*=a_{21}/D$; $a^*=a/D$.

Рассмотрим решение задачи (2.155) – (2.163) при конкретных исходных данных: $a=10^{-6}\ м^2/c$; $D=5\cdot10^{-7}\ м^2/c$; $C_0=0$; $T_0=600\ K$; $C_1=1$; $T_1=200\ K$; $a_{12}^*=10^{-4}/K$; $a_{21}^*=10^{-2}\ K$.

Получение точных аналитических решений системы дифференциальных уравнений взаимосвязанного тепломассопереноса крайне затруднительно. В связи с этим, в диссертации получено численное решение задачи (2.155) – (2.163) на основе метода конечных разностей. Согласно данному методу решение исходной системы уравнений отыскивается для дискретных функции температуры и концентрации. Дискретизация пространственно – временной области выполняется по переменным ξ и Fo:

$$\xi_k=k\Delta\xi; \quad k=\overline{1,K}; \quad \Delta\mathrm{Fo}_i=i\Delta\mathrm{Fo}; \quad i=\overline{1,I}, \qquad (2.164)$$

где K, I – количество шагов по переменным ξ, Fo. Оценка погрешности метода осуществлялась путем сгущения пространственногой и временной сетки.

При получении численного решении задачи (2.155) – (2.163) использовалась равномерная пространственно – временная сетка как по времени, так и по координате. Конечно – разностный аналог задачи будет

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{C_k^i-C_k^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}}+F_1'\frac{C_k^{i+1}-2C_k^i+C_k^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}^2}=\frac{C_{k-1}^i-2C_k^i+C_{k+1}^i}{\Delta\xi^2}+\\
&+R_1'\frac{C_{k-1}^i-2C_k^i+C_{k+1}^i-C_{k-1}^{i-1}+2C_k^{i-1}-C_{k+1}^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\xi^2}+\\
&+a_{12}^*\left(\frac{T_{k-1}^i-2T_k^i+T_{k+1}^i}{\Delta\xi^2}+R_1\frac{T_{k-1}^i-2T_k^i+T_{k+1}^i-T_{k-1}^{i-1}+2T_k^{i-1}-T_{k+1}^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\xi^2}\right);
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{T_k^i-T_k^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}}+F_1\frac{T_k^{i+1}-TC_k^i+T_k^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}^2}=a_{21}^*\frac{C_{k-1}^i-2C_k^i+C_{k+1}^i}{\Delta\xi^2}+\\
&+a_{21}^*R_1'\frac{C_{k-1}^i-2C_k^i+C_{k+1}^i-C_{k-1}^{i-1}+2C_k^{i-1}-C_{k+1}^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\xi^2}+\\
&+a^*\left(\frac{T_{k-1}^i-2T_k^i+T_{k+1}^i}{\Delta\xi^2}+R_1\frac{T_{k-1}^i-2T_k^i+T_{k+1}^i-T_{k-1}^{i-1}+2T_k^{i-1}-T_{k+1}^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\xi^2}\right);
\end{aligned}\right\} \qquad (2.165)$$

$$C_k^0=C_0; \quad T_k^0=T_0; \quad C_k^1=C_k^0; \quad T_k^1=T_k^0; \qquad (2.166)$$

$$C_1^i = C_2^i; \quad T_1^i = T_2^i; \quad C_K^i = C_1; \quad T_K^i = T_1. \qquad (2.167)$$

Результаты численного решения задачи (2.165) – (2.167) приведены на рис. 2.32, 2.33. Их анализ позволяет заключить, что как для температурной функции, так и для функции концентрации, граничные условия первого рода не принимаются мгновенно – их установление происходит в течение некоторого диапазона начального временного участка.

Отметим, что непосредственно в точке $\xi = 1$ граничные условия выполняются, однако в бесконечно малой окрестности этой точки наблюдаются скачки температуры и концентрации, величина которых зависит от коэффициентов релаксации. Например, при $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = \mathrm{Fo}_1' = R_1' = 10^{-2}$ установление граничного условий происходит за время $\Delta\mathrm{Fo} \approx 0{,}08$ как для функции концентрации, так и для температуры. Сравнение решений с учётом и без учёта двукратного запаздывания показывает, что их различие наблюдается лишь на участке временно́го установления граничных условий первого рода, за пределами которого эти решения практически совпадают. Следовательно, решения классических уравнений взаимосвязанного тепломассопереноса, полученные без учёта релаксационных явлений, в диапазоне времени установления граничных условий не могут быть использованы, ввиду неадекватного описания реальных физических процессов.

Таким образом, классические решения неприменимы для всех быстропротекающих процессов, время протекания которых сопоставимо со временем релаксации, а также для любых других процессов при малых и сверхмалых значениях временной переменной.

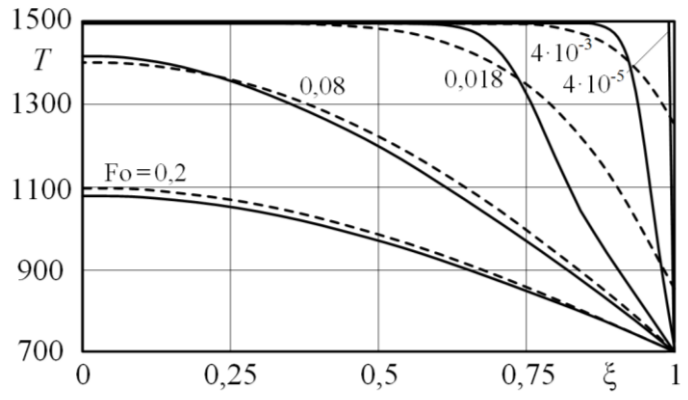


Рисунок 2.32. Распределение температуры в пластине: —— – $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = \mathrm{Fo}_1' = R_1' = 0$; – – – – $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = \mathrm{Fo}_1' = R_1' = 10^{-2}$

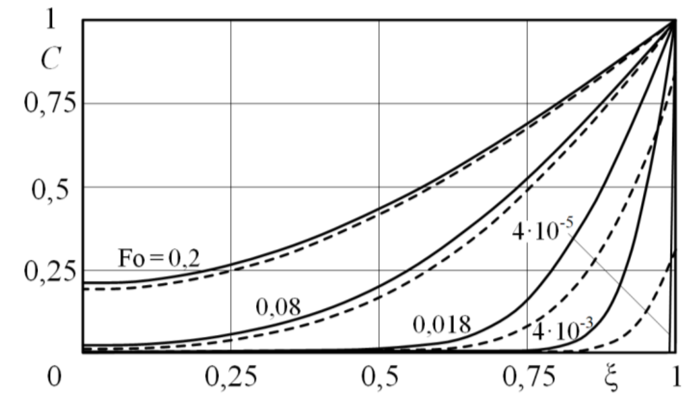


Рисунок 2.33. Распределение концентраций в пластине: —— – $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = \mathrm{Fo}_1' = R_1' = 0$; – – – – $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = \mathrm{Fo}_1' = R_1' = 10^{-2}$

2.7. Разработка и исследование локально – неравновесной модели теплопроводности в двухслойной пластине

В диссертационной работе впервые теоретически описано наличие скачка температуры в точке контакта двух слоев, имеющих в начальный момент различную температуру. Экспериментальным исследованиям данного факта посвящены труды Mitra K., Kumar S., Vedavars A. И др. [165]. Отмечается, что продолжительность установления температуры в точке контакта определяется соотношением коэффициентов релаксации слоев и она тем больше, чем больше различие между ними.

Для получения дифференциальных уравнений, описывающих распределение температуры в двухслойной пластине, учитывающих пространственно – временную неравновесность, представим соотношение для теплового потока в виде

$$q = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x} + r_1\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t}\right) - \tau_1\frac{\partial q}{\partial t}, \qquad (2.168)$$

где τ_1, r_1 – время релаксации теплового потока и градиента температуры.

Подставив (2.168) в уравнение теплового баланса

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \qquad (2.169)$$

найдём

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda r_1\frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} + \tau_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right), \qquad (2.170)$$

где ρ – плотность; c – теплоемкость; λ – теплопроводность.

Выразив $\partial q/\partial x$ из (2.169) и подставив в (2.170), получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + a r_1\frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t}, \qquad (2.171)$$

где $a = \lambda/(c\rho)$ – коэффициенты температуропроводности.

Уравнение (2.171) при равных нулю коэффициентах релаксации аналогично классическому параболическому диффузионному уравнению теплопроводности. Исследуем теперь процесс переноса тепла в двухслойной конструкции (нанопластине) при несимметричных граничных условиях первого рода. Схема теплообмена представлена на рисунке 2.34.

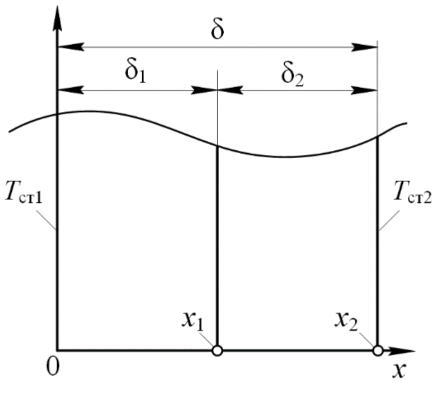


Рисунок 2.34. Схема теплообмена

Математическая постановка задачи для двухслойной пластины с учётом локальной неравновесности имеет вид

$$\frac{\partial T_1(x,t)}{\partial t}+\tau_1\frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial t^2}=a_1\left[\frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2}+r_1\frac{\partial^3 T_1(x,t)}{\partial x^2\partial t}\right] \tag{2.172}$$

$$(0<x\le x_1;\quad t>0);$$

$$\frac{\partial T_2(x,t)}{\partial t}+\tau_1'\frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial t^2}=a_2\left[\frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2}+r_1'\frac{\partial^3 T_2(x,t)}{\partial x^2\partial t}\right] \tag{2.173}$$

$$(x_1\le x<x_2;\quad t>0)$$

$$T_1(x,0)=T_{01};\qquad T_2(x,0)=T_{02}; \tag{2.174}$$

$$\frac{\partial T_1(x,0)}{\partial t}=\frac{\partial T_2(x,0)}{\partial t}=0; \tag{2.175}$$

$$T_1(x_1,t)=T_2(x_1,t); \tag{2.176}$$

$$\lambda_1\left[\frac{\partial T_1(x_1,t)}{\partial x}+r_1\frac{\partial^2 T_1(x_1,t)}{\partial x\partial t}\right]=\lambda_2\left[\frac{\partial T_2(x_1,t)}{\partial x}+r_1'\frac{\partial^2 T_2(x_1,t)}{\partial x\partial t}\right], \tag{2.177}$$

$$T_1(0,t)=T_{\text{ст}1};\quad T_2(x_2,t)=T_{\text{ст}2}, \tag{2.178}$$

где T_1, T_2 – температуры слоёв; a_1, a_2 – коэффициенты температуропроводности; x – координата; t – время; δ_i – толщина i – го слоя; δ – суммарная толщина слоёв; T_{0i} – начальная температура i – го слоя; $T_{\text{ст}i}$ – температура поверхности i – го слоя; τ_1, r_1 и τ_1', r_1' – коэффициенты релаксации для первого и второго слоев пластины соответственно.

Обозначим:

$$\Theta_i=\frac{T_i-T_{01}}{T_{\text{ст}1}-T_{01}};\quad \xi=\frac{x}{\delta};\quad \xi_1=\frac{x_1}{\delta};\quad \mathrm{Fo}=\frac{a_1 t}{\delta^2};$$

$$\mathrm{Fo}_1=\frac{a_1\tau_1}{\delta^2};\quad R_1=\frac{a_2 r_1}{\delta^2};\quad \mathrm{Fo}_1'=\frac{a_2\tau_1'}{\delta^2};\quad R_1'=\frac{a_2 r_1'}{\delta^2},$$

где Θ, Fo, ξ – безразмерные температура, время, координата; Fo_1, R_1, Fo_1', R_1' – безразмерные коэффициенты релаксации.

Использую введенные безразмерные величины, задача (2.172) – (2.178) принимает вид

$$\frac{\partial\Theta_1(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_1\frac{\partial^2\Theta_1(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}=\frac{\partial^2\Theta_1(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}+R_1\frac{\partial^3\Theta_1(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2\partial\mathrm{Fo}}$$

$$(0<\xi\le\xi_1;\quad \mathrm{Fo}>0)$$

$$\frac{\partial\Theta_2(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_1'\frac{a_1}{a_2}\frac{\partial^2\Theta_2(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}=\frac{a_2}{a_1}\frac{\partial^2\Theta_2(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}+R_1'\frac{\partial^3\Theta_2(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2\partial\mathrm{Fo}}$$

$$(\xi_1\le\xi<1;\quad \mathrm{Fo}>0);$$

$$\Theta_1(\xi,0)=0;\quad \Theta_2(\xi,0)=\frac{T_{02}-T_{01}}{T_{\text{ст}1}-T_{01}};\quad \frac{\partial\Theta_1(\xi,0)}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial\Theta_2(\xi,0)}{\partial\mathrm{Fo}}=0;$$

$$\Theta_1(0,\mathrm{Fo})=1;\qquad \Theta_1(\xi_1,\mathrm{Fo})=\Theta_2(\xi_1,\mathrm{Fo});$$

$$F_1\left[\frac{\partial\Theta_1(\xi_1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}+R_1\frac{\partial^2\Theta_1(\xi_1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi\partial\mathrm{Fo}}\right]=\frac{\partial\Theta_2(\xi_1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}+R_1'F_1F_2\frac{\partial^2\Theta_2(\xi_1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi\partial\mathrm{Fo}};$$

$$\Theta_2(1,\mathrm{Fo})=\frac{T_{\text{ст}2}-T_{01}}{T_{\text{ст}1}-T_{01}},$$

где $F_1=\lambda_1/\lambda_2$; $F_2=c_2\rho_2/(c_1\rho_1)$.

Для получения решения задачи сформулированной задачи применялся метод конечных разностей. Была использована равномерная пространственно – временная сетка с шагами $\Delta\xi=10^{-2}$ и $\Delta\mathrm{Fo}=10^{-6}$ по переменным ξ и Fo так, что

$$\xi_k=k\Delta\xi;\quad k=\overline{1,K};\quad \Delta\mathrm{Fo}_i=i\Delta\mathrm{Fo};\quad i=\overline{1,I},$$

где K, I – количество шагов по переменным ξ, Fo.

На основе явной схемы аппроксимации системы дифференциальных уравнений исходная задача приводилась к виду

$$\frac{\Theta_{1k}^{i}-\Theta_{1k}^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_1\frac{\Theta_{1k}^{i+1}-2\Theta_{1k}^{i}+\Theta_{1k}^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}}=\frac{\Theta_{1k-1}^{i}-2\Theta_{1k}^{i}+\Theta_{1k+1}^{i}}{\Delta\xi^2}+$$

$$+R_1\frac{\Theta_{1k-1}^{i}-2\Theta_{1k}^{i}+\Theta_{1k+1}^{i}-\Theta_{1k-1}^{i-1}+2\Theta_{1k}^{i-1}-\Theta_{1k+1}^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\xi^2};$$

$$\frac{\Theta_{2k}^{i}-\Theta_{2k}^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_1'\frac{\Theta_{2k}^{i+1}-2\Theta_{2k}^{i}+\Theta_{2k}^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}^2}=\frac{a_2}{a_1}\frac{\Theta_{2k-1}^{i}-2\Theta_{2k}^{i}+\Theta_{2k+1}^{i}}{\Delta\xi^2}+$$

$$+R_1'\frac{\Theta_{2k-1}^{i}-2\Theta_{2k}^{i}+\Theta_{2k+1}^{i}-\Theta_{2k-1}^{i-1}+2\Theta_{2k}^{i-1}-\Theta_{2k+1}^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\xi^2};$$

$$\Theta_{1k}^{0}=0;\quad \Theta_{2k}^{0}=\frac{T_{02}-T_{01}}{T_{\text{ст}1}-T_{01}};\quad \frac{\Theta_{1k}^{1}-\Theta_{1k}^{0}}{\Delta\mathrm{Fo}}=\frac{\Theta_{2k}^{1}-\Theta_{2k}^{0}}{\Delta\mathrm{Fo}}=0;$$

$$\Theta_{10}^{i}=1;\quad \Theta_{1CP}^{i}=\Theta_{2CP}^{i};$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left[\frac{\Theta_{1CP}^{i}-\Theta_{1CP-1}^{i}}{\Delta\xi}+R_1\frac{\Theta_{1CP}^{i+1}-\Theta_{1CP-1}^{i+1}-\Theta_{1CP}^{i}+\Theta_{1CP-1}^{i}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\xi}\right]=$$

$$\frac{\Theta_{2CP+1}^{i}-\Theta_{2CP}^{i}}{\Delta\xi}+R_1'\frac{a_1}{a_2}\frac{\Theta_{1CP+1}^{i+1}-\Theta_{2CP}^{i+1}-\Theta_{2CP+1}^{i}+\Theta_{2CP}^{i}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\xi};$$

$$\Theta_{2k}^{i}=\frac{T_{\text{ст}2}-T_{01}}{T_{\text{ст}1}-T_{01}},$$

где Θ_{1CP}^{i}, Θ_{2CP}^{i} – значения температурной функции на i – м временно́м шаге в точке контакта слоёв.

Рассмотрим решение задачи при $\mathrm{Fo}_1=R_1=\mathrm{Fo}_1'=R_1'$ и следующих исходных данных: $T_{01}=0\,^{\mathrm{o}}C$; $T_{02}=100\,^{\mathrm{o}}C$; $T_{\text{ст}1}=100\,^{\mathrm{o}}C$; $T_{\text{ст}2}=0\,^{\mathrm{o}}C$; $F_1=1{,}09$; $F_2=0{,}92$.

На рисунках 2.34, 2.35 представлены результаты решения при $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = \mathrm{Fo}_1' = R_1' = 0$ и $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = \mathrm{Fo}_1' = R_1' = 0{,}006$ соответственно.

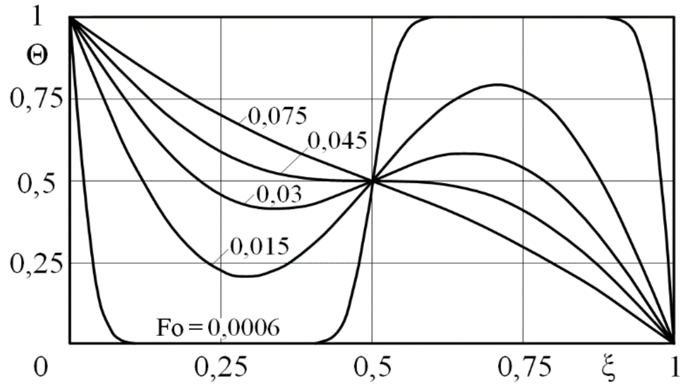


Рисунок 2.34. Распределение температуры по координате: $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = \mathrm{Fo}_1' = R_1' = 0$

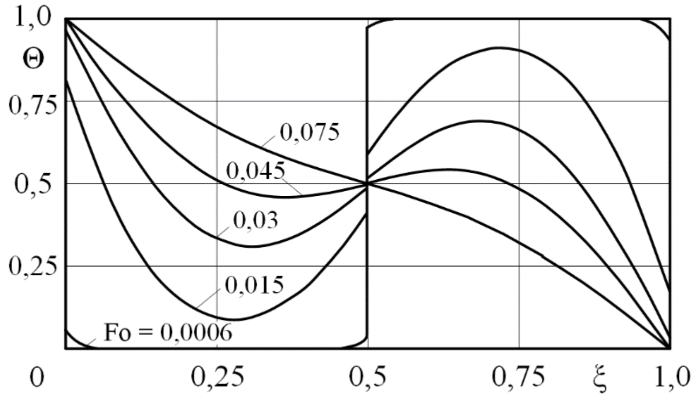


Рисунок 2.35. Распределение температуры по координате: $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = \mathrm{Fo}_1' = R_1' = 0{,}006$

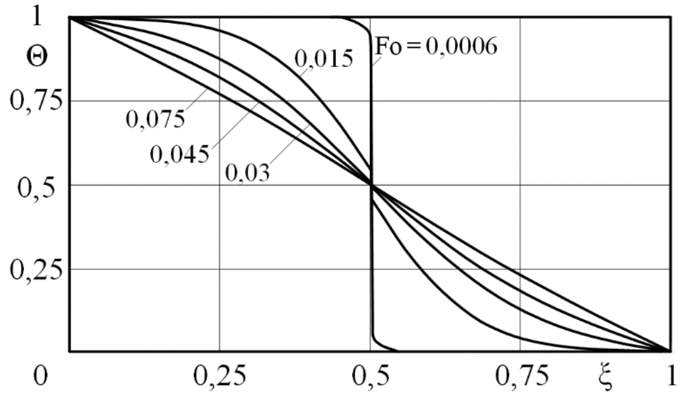


Рисунок 2.37. Распределение температуры по координате: $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = \mathrm{Fo}_1' = R_1' = 0{,}006$

Из их анализа следует, что при учете пространственно – временной нелокальности происходит задержка физического установления граничных условий первого рода, а также наблюдается скачок температуры на контакте слоев (несмотря на точное выполнение условий сопряжения, в том числе и условия (2.176)). При временах $\mathrm{Fo} > 0{,}075$ температурные решения совпадают.

На рисунке 2.37 приведены также результаты расчетов температурного поля внутри двухслойной конструкции при следующих начальных условиях:

$$\Theta_1(\xi,0) = 1; \quad \Theta_2(\xi,0) = 0.$$

Из их анализа видно, что в диапазоне $0 < \mathrm{Fo} < 0{,}035$ при $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = \mathrm{Fo}_1' = R_1' = 0{,}006$ в бесконечно малой окрестности точки контакта слоёв наблюдается скачок температуры. Этот факт подтверждается экспериментальными данными – в реальных композиционных наноструктурах на границе двух материалов возникает температурный скачок. Отсутствие скачка температуры в окрестности точек задания граничных условий объясняется тем, что граничные условия в данном случае совпадают с начальными условиями.

С целью анализа точности получаемых решений использованы апостериорные методы оценки погрешности разработанной разностной схемы. В частности, выполнен анализ погрешности вычислений на сгущающихся сетках (как по пространству, так и по времени) при $(\xi = 0{,}1;\ \mathrm{Fo} = 0{,}005)$. Из анализа результатов вычисления погрешности ε в зависимости от величины пространственного шага $\Delta\xi$, сделан вывод, что значение сеточной функции с уменьшением шага по координате сходится к некоторому значению $(\Theta \approx 0.3144)$, что косвенно свидетельствует о сходимости выбранной разностной схемы при $\Delta\xi \to 0$. Отмечается, что при $\Delta\xi < 10^{-2}$ погрешность вычислений составляет не более 0,01%. При вычислении абсолютной погрешности ε в качестве эталонного значения использовалось значение функции температуры при пространственном шаге $\Delta\xi = 10^{-4}$. Выполнена также оценка влияния временного шага на устойчивость разностной схемы и погрешность вычислений ε. Отмечается, что при $\Delta\mathrm{Fo} < 10^{-7}$ погрешность вычисления температуры составляет не более 0,001%. Дальнейшее уменьшение шага при исследовании температурной функции в данной пространственно – временной области $(\xi = 0{,}1;\ \mathrm{Fo} = 0{,}005)$ нецелесообразно.

2.8. Исследование локально – неравновесного теплообмена в стержне в условиях вынужденной конвекции

В промышленности широко используются различного рода теплообменные аппараты, предназначенные для передачи теплоты от одной среды (газ, жидкость, расплавленный металл и проч.) к другой. Их эффективность характеризуется количеством теплоты, передаваемой через единицу площади в единицу времени, которое зависит от многих факторов: геометрической формы поверхностей (ребра, стержни, шипы, лунки и проч.); физических свойств материала теплообменника и омывающих сред; коэффициентов теплоотдачи, зависящих от скоростей течения сред. С целью интенсификации теплообмена во многих случаях применяются стержни, расположенные перпендикулярно теплопередающей поверхности, преимущество которых состоит в максимальной простоте конструкции. Однако их тепловой расчёт в нестационарных режимах работы связан со значительными трудностями ввиду необходимости решения краевой задачи для сложного дифференциального уравнения, включающего слагаемое, учитывающее конвективный теплообмен стержня с окружающей средой. Точное решение задачи теплопроводности при условиях 1 – го и 3 – го рода на разных торцах стержня в настоящее время не получено, что не позволяет выполнить оценку эффективности передачи теплоты в нестационарном режиме работы, ограничиваясь лишь расчетами стационарных режимов. В диссертации разработан численно – аналитический метод, позволяющий получить приближенное решение задачи с точностью, достаточной для практических приложений.

Рассмотрим вывод дифференциального уравнения теплопроводности для конечного стержня произвольного сечения в условиях конвективного теплообмена с окружающей средой с учетом пространственно – временной нелокальности (рисунок 2.38). Для этого модифицируем закон Фурье вида $q=-\lambda\partial T/\partial x$ так, чтобы в нем было учтено изменение от времени градиента температуры и теплового потока

$$q=-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}+r_1\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial t}\right)-\tau_1\frac{\partial q}{\partial t}. \qquad (2.179)$$

Запишем соотношение теплового баланса для элементарного участка стержня, с учетом теплообмена на боковой его поверхности [3, 108]

$$c\rho S\frac{\partial T}{\partial t}\Delta x\Delta t=-S\frac{\partial q}{\partial x}\Delta x\Delta t+\alpha_1 p(T_{\text{ср}}-T)\Delta x\Delta t\,, \qquad (2.180)$$

где $S\dfrac{\partial T}{\partial t}\Delta x\Delta t$ – количество тепла, сообщенного участку стержня от сечения x до $x+\Delta x$ за промежуток времени от t до $t+\Delta t$ в результате прохождения вдоль стержня теплового потока q; $\alpha_1 p(T_{\text{ср}}-T)\Delta x\Delta t$ – количество тепла, поступившего к выбранному участку стержня за это же время через его боковую поверхность (по закону Ньютона); $c\rho S\dfrac{\partial T}{\partial t}\Delta x\Delta t$ – количество тепла, благодаря которому температура выделенного участка стержня за указанное время изменилась на величину $\partial T/\partial t$; p – периметр; α_1 – теплоотдачf с боковой поверхности; S – площадь сечения; $T_{\text{ср}}$ – температура среды.

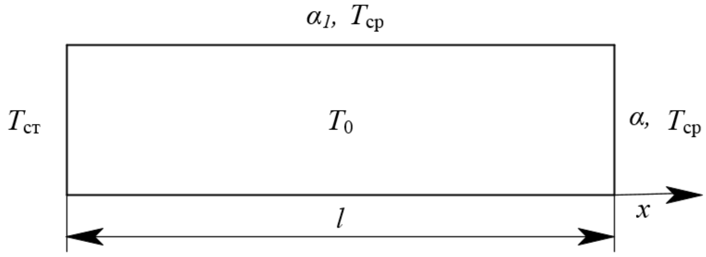


Рисунок 2.38. Схема теплообмена в стержне

Разделим обе части уравнения (2.180) на $c\rho S\Delta x\Delta t$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-\frac{1}{c\rho}\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\alpha_1 p}{c\rho S}(T_{\text{ср}}-T)\,. \qquad (2.181)$$

Подставляя (2.179) в (2.181), находим

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\tau_1}{c\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)+a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+ar_1\frac{\partial^3 T}{\partial x^2\partial t}+b(T_{\text{ср}}-T)\,, \qquad (2.182)$$

где $b=(\alpha_1 p)/(c\rho S)$ – константа; $a=\lambda/(c\rho)$ – коэффициент температуропроводности.

Выразим из (2.181) $\partial q/\partial x$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -c\rho\frac{\partial T}{\partial t} + bc\rho(T_{\text{ср}} - T). \tag{2.183}$$

Подставим (2.183) в (2.182)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\tau_1\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \tau_1 b - \frac{\partial T}{\partial t} + a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + ar_1\frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} + b(T_{\text{ср}} - T). \tag{2.184}$$

Уравнение (2.184) можно записать в виде

$$(1+\tau_1 b)\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + r_1\frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t}\right) + b(T_{\text{ср}} - T). \tag{2.185}$$

Краевые условия для случая, когда на одном из торцов стержня поддерживается постоянная температура (граничные условия первого рода), а на втором торце стержня теплообмен происходит при граничных условиях третьего рода (причем коэффициенты теплоотдачи с боковой поверхности и с торца не равны) имеют вид

$$T(x,0) = T_0; \quad \frac{\partial T(x,0)}{\partial t} = 0; \quad T(0,t) = T_{\text{ст}}; \quad \lambda\frac{\partial T(l,t)}{\partial x} = \alpha(T_{\text{ср}} - T), \tag{2.186}$$

где T_0 – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура стержня при $x = 0$; α – коэффициент теплоотдачи на торце стержня; l – длина стержня.

Обозначим:

$$\Theta = \frac{T - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}}; \quad \text{Fo} = \frac{at}{l^2}; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad \text{Fo}_1 = \frac{a\tau_1}{l^2}; \quad R_1 = \frac{ar_1}{l^2};$$

$$\text{Bi} = \frac{\alpha l}{\lambda}; \quad D = \frac{T_{\text{ст}} - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}}; \quad B = \frac{bl^2}{a}; \quad D = \frac{T_{\text{ст}} - T_{\text{ср}}}{T_0 - T_{\text{ср}}}.$$

Задача (2.185), (2.186) с учетом обозначений будет

$$\text{Fo}_1\frac{\partial^2\Theta}{\partial \text{Fo}^2} + (1 + \text{Fo}_1 B)\frac{\partial\Theta}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2} + R_1\frac{\partial^3\Theta}{\partial\xi^2\partial \text{Fo}} - B\Theta \tag{2.187}$$

$$(0 < \xi < 0; \quad \text{Fo} > 0);$$

$$\Theta(\xi,0) = 1; \quad \frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial \text{Fo}} = 0;$$

$$\Theta(0,\text{Fo}) = D; \quad \frac{\partial\Theta(1,\text{Fo})}{\partial\xi} + \text{Bi}\Theta(1,\text{Fo}) = 0. \tag{2.188}$$

Если положить $\tau_1 = r_1 = 0$, то уравнение (2.187) приводится к классическому уравнению для стержня с учетом теплообмена на боковой поверхности

$$\frac{\partial\Theta}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2} - B\Theta. \tag{2.189}$$

Получение точных аналитических решений краевой задачи конвективного теплообмекна в стержне крайне затруднительно. В связи с этим, в диссертации получено численное решение задачи (2.187) – (2.188) на основе метода конечных разностей. Согласно данному методу решение исходной системы уравнений отыскивается для дискретных функции температуры $\Theta_i^k = \Theta(\xi_i,\ \Delta\text{Fo}_k)$. При решении задачи (2.187), (2.188) численным методом строилась пространственно – временная сетка с шагами $\Delta\xi,\ \Delta\text{Fo}$ по переменным ξ, Fo так, что

$$\xi_i = i\Delta\xi, \quad i=\overline{0,I}; \qquad \Delta\text{Fo}_k = k\,\Delta\text{Fo}, \qquad k=\overline{0,K}, \tag{2.190}$$

где $I,\ K$ – количество шагов по переменным ξ, Fo.

На сетке (2.190) введем сеточные функции $\Theta_i^k = \Theta(\xi_i,\ \Delta\text{Fo}_k)$. Конечно – разностный аналог исходной задачи (2.187), (2.188) имеет вид

$$\text{Fo}_1 \frac{\Theta_i^{k-1} - 2\Theta_i^k + \Theta_i^{k+1}}{\Delta\text{Fo}^2} + (1+\text{Fo}_1 B)\frac{\Theta_i^{k+1} - \Theta_i^k}{\Delta\text{Fo}} = \frac{\Theta_{i-1}^k - 2\Theta_i^k + \Theta_{i+1}^k}{\Delta\xi^2} +$$

$$+ R_1 \frac{\Theta_{i-1}^{k+1} - 2\Theta_i^{k+1} + \Theta_{i+1}^{k+1} - \Theta_{i-1}^k + 2\Theta_i^k - \Theta_{i+1}^k}{\Delta\xi^2\Delta\text{Fo}} - B\Theta_i^k; \tag{2.191}$$

$$\Theta_i^0 = 0; \qquad \Theta_i^0 = \Theta_i^1; \qquad \Theta_0^k = D; \qquad \frac{\Theta_I^k - \Theta_{I-1}^k}{\Delta\xi^2} + \text{Bi}\,\Theta_I^k = 0. \tag{2.192}$$

Результаты решения (2.191) – (2.192) даны на рисунках 2.39 – 2.41.

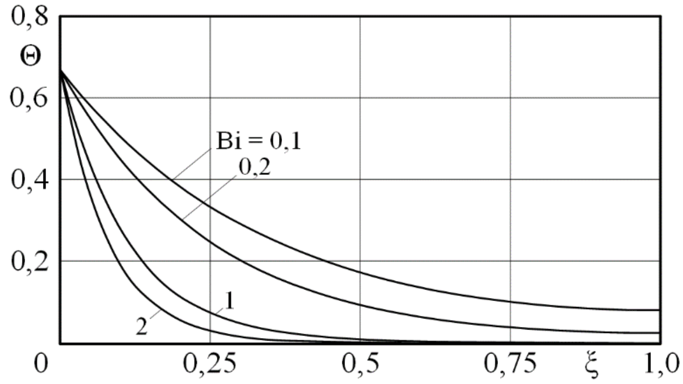


Рисунок 2.39. Распределение температуры в стержне: $\text{Fo}_1 = R_1 = 0$; $D = 0{,}667$; $B = 160$

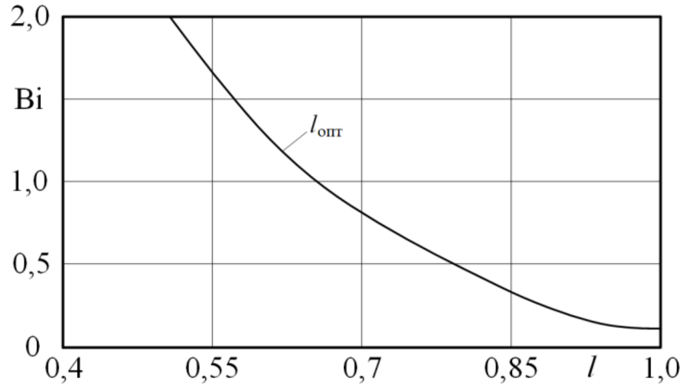


Рисунок 2.40. Зависимость оптимальной длины стержня от $\text{Fo}_1 = R_1 = 0$; $D = 0{,}667$; $B = 160$

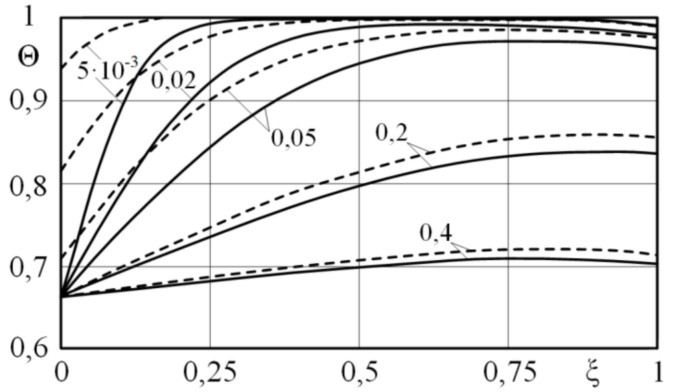


Рисунок 2.41. Распределение температуры в стержне ($D = 0{,}67$; $B = 0{,}312$): 1 – $\text{Fo}_1 = R_1 = 0$; 2 – $\text{Fo}_1 = R_1 = 0{,}1$

Анализ результатов численных расчетов распределения температуры по длине стержня позволяет заключить, что при высокой интенсивности теплообмена $(\mathrm{Bi} > 0{,}5)$ часть стержня принимает температуру окружающей среды. Так, например, при $\mathrm{Bi} = 1$ безразмерная температура в диапазоне значений $0{,}6 < \xi < 1$ равна нулю. При этом тепловой поток в направлении оси стержня на этом участке отсутствует. Таким образом, дальнейшее увеличение длины стержня не приводит к увеличению теплового потока в направлении оси стержня, т.е. существует оптимальная длина стержня, при которой тепловая мощность стержня (шипа, ребра) перестает увеличиваться. На рисунке 2.40 представлена зависимость оптимальной длины ξ стержня от Bi.

В диссертации также выполнена оценка влияния коэффициентов релаксации на процесс теплообмена в стержне. На рисунке 2.41 приведены результаты расчетов температуры в неустановившемся процессе теплообмена. Их анализ позволяет заключить, что учет релаксационных свойств оказывает наибольшее влияние на процесс теплообмена в диапазоне временной переменной $0 < \mathrm{Fo} \le 0{,}2$. С течением времени расхождение результатов расчетов при $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0$ и $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}1$ уменьшается и не превышает 5%. Процесс установления граничных условий первого рода составляет $\Delta\mathrm{Fo} \approx 0{,}2$ и зависит от величины коэффциентов релаксации.

2.9. Разработка метода решения задачи Стефана путём определения дополнительных искомых функций и дополнительных граничных условий

Тепловые процессы, протекающие в реальных технических системах, в некоторых случаях сопровождаются изменением агрегатного состояния отдельных их элементов и узлов (кристаллизацией, плавлением и др.). Исследование таких процессов представляет интерес с теоретической и прикладной точки зрения. В связи с этим в диссертации развивается приближенный аналитический метод решения краевой задачи теплопроводности с подвижной границей – задача Стефана с удалением расплавленного вещества (с абляцией). Такие процессы реализуются, например, при высокоскоростном движении твердых тел в атмосфере Земли. В отличие от известных решений в диссертации приводится приближенное аналитическое решение для ограниченной области (тонкой пластины). При его получении использовались понятия, выходящие за рамки классической теории теплопроводности: фронт температурного возмущения, глубина прогретого слоя, конечная скорость распространения теплоты. Введение в рассмотрение новых искомых функций – фронта плавления и закона движения нулевой изотермы (фронт температурного возмущения) совместно с дополнительными граничными характеристиками, позволило получить простое по форме решение в аналитическом виде.

Рассмотрим решение задачи Стефана для пластины для случая, когда на одной из ее поверхностей $(\xi = 1)$ поддерживается постоянная температура (задано граничное условие первого рода), а на второй ($\xi = 1$) задан тепловой поток (граничное условие второго рода) [30].

Для нахождения решения в безразмерном виде, введем следующие безразмерные параметры: $\Theta = (T - T_0)/(T_{пл} - T)$ – безразмерная температура; $\xi = x/R$ – безразмерная координата; $\mathrm{Fo} = at/R^2$ – число Фурье; x – координата; t – время; R – толщина пластины; T_0 – начальная температура; $\mathrm{Ki} = FR/[\lambda(T_{пл} - T_0)]$ – критерий Кирпичева; $\mathrm{Po} = Q\rho a/[\lambda(T_{пл} - T_0)]$ – критерий Померанцева; $T_{пл}$ – температура плавления; $\mathrm{Fo}_{пл}$ – время достижения поверхностью пластины ($\xi = 0$) температуры плавления; a – коэффициент температуропроводности; ρ – плотность; Fo^* – время достижения фронтом температурного возмущения координаты $\xi = 1$; Q – теплота плавления; F – тепловой поток; λ – коэффициент теплопроводности; $\mathrm{Fo}_к$ – время окончания плавления (время при котором фронт плавления достигает координаты $\xi = 0{,}999$); $\delta(t), \delta(\mathrm{Fo})$ – функции, характеризующие движение фронта температурного возмущения по пространственной переменной во времени; $s(t)$ – функция, характеризующая перемещение фронта плавления по координате x во времени; $z(\mathrm{Fo}) = s(t)/R$ – безразмерная величина фронта плавления. Индексы: «0» – начальное значение; «к» – конечное значение, «пл» – плавление.

Рассмотрим решение краевой задачи Стефана на основе совместного использования интегрального метода теплового баланса и дополнительных граничных характеристик [30]. Согласно данному методу помимо подвижной границы плавления $z(\mathrm{Fo})$ (фронта плавления) вводится также фронт температурного возмущения $\delta(\mathrm{Fo})$, представляющий собой подвижную границу прогретого слоя (толщину термического слоя) [30].

Процесс теплообмена разделяется на три стадии по времени. Первая стадия характеризуется нагревом пластины до температуры плавления ($0 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_{пл}$). В этой стадии температурное состояние определяется в пределах пространственной координаты $0 \le \xi \le \delta(\mathrm{Fo})$. Окончание первой стадии происходит при нагреве поверхности пластины до температуры плавления. Решение во второй стадии процесса отыскивается в диапазоне времени $\mathrm{Fo}_{пл} \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}^*$, где Fo^* – время достижения фронтом температурного возмущения координаты $\xi = 1$. В этой стадии решение разыскивается в пространственной области $z(\mathrm{Fo}) \le \xi \le \delta(\mathrm{Fo})$, то есть в пределах двух подвижных границ – фронта плавления и фронта температурного возмущения. Окончание второй стадии характеризуется достижением фронта температурного возмущения $\delta(\mathrm{Fo})$ поверхности пластины с координатой $\xi = 1$. В третьей стадии температуры пластины определяется в пределах изменения пространственной переменной $z(\mathrm{Fo}) \le \xi \le 1$ и временной – $\mathrm{Fo}_{пл} \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_к$.

Рассмотрим алгоритм получения решения задачи Стефана с абляцией последовательно для каждой стадии. Так, краевая задача для первой стадии формулируется в виде

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\qquad(0<\xi<\delta(\mathrm{Fo});\quad 0<\mathrm{Fo}\le\mathrm{Fo}_{\text{пл}});\tag{2.193}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=-\mathrm{Ki};\ (2.194)\qquad \Theta(\delta,\mathrm{Fo})=0;\quad (2.195)\qquad \frac{\partial\Theta(\delta,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=0.\quad (2.196)$$

Граничные условия (2.195), (2.196) задаются на фронте температурного возмущения $\delta(\mathrm{Fo})$. Согласно условию (2.195) температуры на фронте температурного возмущения равна начальной температуре. Условие (2.196) является условием сопряжения прогретой и непрогретой зон.

Решение задачи (2.213) – (2.216) принимается следующим в виде ряда

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{k=0}^{n}b_k(\delta)\xi^k,\tag{2.197}$$

где коэффициенты $b_k(\delta)$ определяются из решения системы трех алгебраических уравнений, получаемой в результате подстановки (2.197) в (2.194) – (2.196). После отыскания неизвестных коэффициентов $b_k(\delta)$, выражение (2.197) принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\mathrm{Ki}(0{,}5\delta-\xi+0{,}5\xi^2/\delta).\tag{2.198}$$

В соответствии с используемым методом, составляем интеграл теплового баланса:

$$\frac{\partial}{\partial\mathrm{Fo}}\int_0^{\delta(\mathrm{Fo})}\Theta(\xi,\mathrm{Fo})\,d\xi=\int_0^{\delta(\mathrm{Fo})}\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial^2\xi}d\xi.\tag{2.199}$$

Подставляем (2.198) в (2.199), затем определяем интегралы для неизвестной функции $\delta(\mathrm{Fo})$ и получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\delta(\mathrm{Fo})d\delta(\mathrm{Fo})=3d\,\mathrm{Fo}.\tag{2.200}$$

Интегрируя (2.200), с учётом начального условия $\delta(0)=0$ находим

$$\delta(\mathrm{Fo})=\sqrt{6\mathrm{Fo}}.\tag{2.201}$$

Соотношения (2.198), (2.201) определяют решение задачи (2.193) – (2.196) для первого приближения. Выражение (2.198) для поверхности пластины $\xi=0$ будет

$$\Theta(0,\mathrm{Fo})=0{,}5\mathrm{Ki}\sqrt{6\mathrm{Fo}}.\tag{2.202}$$

Выражение (2.202) не отличается от решений, полученных в работах [30, 46, 99]. Их отличие от точных решений составляет 9%.

Для увеличения точности следует увеличивать число слагаемых решения (2.197), при определении неизвестных коэффициентов которого привлекаются дополнительные граничные характеристики. Например, во втором приближении они будут

$$\frac{\partial^3\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3}=0;\quad \frac{\partial^2\Theta(\delta,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}=0;\quad \frac{\partial^3\Theta(\delta,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3}=0. \qquad (2.203)$$

Выполнение искомым решением условий (2.203) эквивалентно выполнению уравнения (2.193) и производных от него в граничных точках исследуемой области.

Подставив (2.197) в основные (2.194) – (2.196) и дополнительные (2.203) условия находятся шесть неизвестных коэффициентов $b_k(\delta)$, $(k=\overline{0,5})$, определив которые соотношение (2.197) примет вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\delta\mathrm{Ki}\left[\frac{3}{10}-\frac{\xi}{\delta}+\left(\frac{\xi}{\delta}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)^4+\frac{1}{5}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)^5\right]. \qquad (2.203)$$

Подставив (2.204) в (2.199), получим

$$\delta(\mathrm{Fo})\,d\delta(\mathrm{Fo})=7{,}5d\,\mathrm{Fo}. \qquad (2.204)$$

Интегрируя (2.205), с учётом начального условия $\delta(0)=0$ находим

$$\delta(\mathrm{Fo})=\sqrt{15\mathrm{Fo}}. \qquad (2.205)$$

Выражения (2.204), (2.206) будут решением задачи (2.193) – (2.196) для второго приближения. Формула (2.204) для поверхности пластины $(\xi=0)$ имеет вид

$$\Theta(0,\mathrm{Fo})=\frac{3\mathrm{Ki}\sqrt{15\mathrm{Fo}}}{10}. \qquad (2.206)$$

Погрешность вычислений температуры по формуле (2.203) составляет ~2,5%. Для повышения точности, в последующих приближения используются дополнительные граничные характеристики, определяемы согласно следующим выражениям:

$$\frac{\partial^i\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^i}=0;\quad \frac{\partial^{i-1}\Theta(\delta,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^{i-1}}=0;\frac{\partial^i\Theta(\delta,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^i}=0,(i=5,7,9,11,\ldots). \qquad (2.207)$$

Для дальнейшего повышения точности получаемых решений необходимо увеличивать степень аппроксимирующего полинома (2.197). При этом число неизвестных коэффициентов $b_k(\delta)$ возрастает и для их определения необходимо использовать соотношения (2.207). Подставляя (2.197) в соотношения (2.207), будем получать систему девяти уравнений в третьем приближении, двенадцати – в четвертом и т.д.

Во второй стадии процесса необходимо определять температуру в пределах двух подвижных фронтов – фронта плавления $z(\mathrm{Fo})$ и фронта температурного возмущения $\delta(\mathrm{Fo})$. Для определения начального положения $\delta(\mathrm{Fo})$ (в момент начала плавления $\Theta(0,\mathrm{Fo})=\Theta_{\text{пл}}=1$), запишем формулы (2.198) и (2.203) в момент времени $\mathrm{Fo}=\mathrm{Fo}_{\text{пл}}$ применительно к точке $\xi=0$

$$\delta(\mathrm{Fo}_{\text{пл}})=\frac{2}{\mathrm{Ki}}; \qquad (2.208) \qquad\qquad \delta(\mathrm{Fo}_{\text{пл}})=\frac{10}{3\mathrm{Ki}}. \qquad (2.209)$$

Из (2.218) следует, что фронт температурного возмущения не достигает поверхности пластины ($\xi=1$) при всех значениях $\mathrm{Ki}\ge 2$. Следовательно, в этом случае решение отыскивается в пределах двух фронтов $\delta(\text{Fo})$ и $z(\text{Fo})$. Краевая задача, соответствующая второй стадии процесса, будет (см. рисунок 2.42):

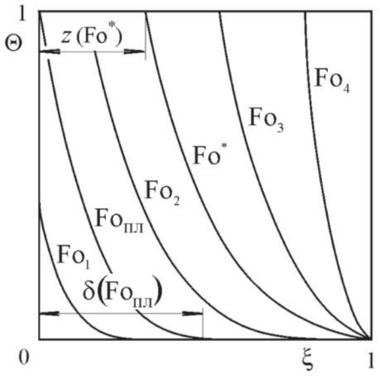


Рисунок 2.42. Расчетная схема теплообмена и плавления

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} \qquad (\tau_{\text{пл}} \le \tau \le \tau^*;\ s(\tau) < x \le \delta(\tau)); \qquad (2.210)$$

$$T(x,0) = T_{\text{н}}(x); \qquad (2.211) \qquad\qquad T(s,\tau) = T_{\text{пл}}; \qquad (2.212)$$

$$T(\delta,\tau) = T_0; \qquad (2.213) \qquad\qquad \frac{\partial T(\delta,\tau)}{\partial \tau} = 0; \qquad (2.214)$$

$$F + \lambda\frac{\partial T(z,\tau)}{\partial x} - Q\rho\frac{dz(\tau)}{d\tau} = 0, \qquad (2.215)$$

где $T_{\text{н}}(x)$ – начальное распределение температуры в пластине, определяемое из решения задачи для первой стадии процесса при $\text{Fo} = \text{Fo}_{\text{пл}}$.

Используя введенные ранее безразмерные переменные и параметры, задача (2.231) – (2.236) приводится к виду

$$\frac{\partial \Theta(\xi,\text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi,\text{Fo})}{\partial \xi^2} \qquad (\text{Fo}_{\text{пл}} \le \text{Fo} \le \text{Fo}^*;\quad z(\text{Fo}) < \xi \le \delta(\text{Fo})); \qquad (2.216)$$

$$\Theta(\xi,\text{Fo}_{\text{пл}}) = 0{,}5\text{Ki}\,\delta\,(\text{Fo}_{\text{пл}})(1-\xi/\delta\,(\text{Fo}_{\text{пл}}))^2; \qquad (2.217)$$

$$\Theta(z,\text{Fo}) = 1; \quad (2.218) \qquad \Theta(\delta,\text{Fo}) = 0; \quad (2.219) \qquad \frac{\partial \Theta(\delta,\text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad (2.220)$$

$$\frac{\partial \Theta(z,\text{Fo})}{\partial \xi} - \text{Po}\frac{d\,z(\text{Fo})}{d\,\text{Fo}} + \text{Ki} = 0, \qquad (2.221)$$

Начальное условие (2.217) в первом приближении записывается согласно (2.198) и представляет собой распределение температуры в момент окончания первой стадии процесса.

Так как постановки задач для первой и второй стадии в момент времени $\text{Fo} = \text{Fo}_{\text{пл}}$ полностью совпадают, в специальном выполнении начального условия (2.217) нет необходимости. Условие (2.217) будет удовлетворено при получении решения задачи (2.216) – (2.221). Стоит отметить, что отсчет времени во второй стадии снова ведется от $\text{Fo} = \text{Fo}_{\text{пл}} = 0$.

Также как и в первой стадии, решение будем отыскивать в виде алгебраического полинома

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{k=0}^{n} b_k(\delta,z)\xi^k\,, \qquad (2.222)$$

где $b_k(\delta,z)-$ коэффициенты, определяемые из условий (2.218) – (2.221). Подставляя (2.222) в граничные условия, и, решая получившуюся систему алгебраических уравнений, находим $b_k(\delta,z)$. С учетом найденных значений неизвестных коэффициентов, выражение (2.222) будет:

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\frac{(\delta-\xi)^2}{(\delta-z)^2}\,. \qquad (2.223)$$

Для определения неизвестных функций $\delta(\mathrm{Fo})$ и $z(\mathrm{Fo})$, входящих в соотношение (2.233) запишем интеграл теплового баланса, то есть составим невязку исходного дифференциального уравнения (2.217) в пределах изменения пространственной переменной (от $\xi=z(\mathrm{Fo})$ до $\xi=\delta(\mathrm{Fo})$):

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{Fo}}\int_z^{\delta}\Theta(\xi,\mathrm{Fo})\,d\xi=\int_z^{\delta}\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\,d\xi\,. \qquad (2.224)$$

Подставив (2.223) в (2.224), находим

$$\nu(\mathrm{Fo})d\nu(\mathrm{Fo})=6d\mathrm{Fo}, \qquad (2.225)$$

где $\nu(\mathrm{Fo})=\delta(\mathrm{Fo})-z(\mathrm{Fo})$.

Интегрируя (2.226), получаем

$$0{,}5\nu^2=6\,\mathrm{Fo}+C. \qquad (2.226)$$

Для определения константы интегрирования C используем начальное условие $\nu(0)=\delta(0)-z(0)$. Из (2.208) следует, что $\delta(0)=\delta(\mathrm{Fo}_{\text{пл}})=2/\mathrm{Ki}$. Учитывая, что $z(0)=0$, находим $C=2/\mathrm{Ki}^2$. С учетом найденной константы интегрирования функция $\nu(\mathrm{Fo})$ определяется по формуле

$$\nu(\mathrm{Fo})=\frac{2\sqrt{3\mathrm{Ki}^2\mathrm{Fo}+1}}{\mathrm{Ki}}. \qquad (2.227)$$

Чтобы найти решение для каждой из функций $\delta(\mathrm{Fo})$ и $z(\mathrm{Fo})$, используем условие (2.221):

$$\mathrm{Ki}-\frac{2}{\delta-z}-\mathrm{Po}\frac{dz}{d\mathrm{Fo}}=0. \qquad (2.228)$$

Подставив в (2.228) вместо $(\delta-z)$ соотношение для $\nu=\delta-z$ из (2.227), находим

$$\frac{dz}{d\mathrm{Fo}}+\frac{\mathrm{Ki}}{\mathrm{Po}\sqrt{6\mathrm{Ki}^2\mathrm{Fo}+1}}-\frac{\mathrm{Ki}}{\mathrm{Po}}=0. \qquad (2.229)$$

Интегрируя (2.229), получаем

$$z(\mathrm{Fo})=\frac{3\mathrm{Ki}^2\mathrm{Fo}+2-2\sqrt{3\mathrm{Ki}^2\mathrm{Fo}+1}}{3\mathrm{PoKi}}+C, \qquad (2.230)$$

где C − константа интегрирования, находимая из начального условия $z(0)=0$. Отсюда $C=0$.

Учитывая, что $\delta=\nu+z$, а также выражения (2.217) в (2.230), получаем

$$\delta(\mathrm{Fo}) = \frac{2\sqrt{3\mathrm{Ki}^2\mathrm{Fo}+1}\left(3\mathrm{Po}-1\right)+3\mathrm{KiFo}+2}{3\mathrm{PoKi}}. \qquad (2.231)$$

Распределение температуры в пластине (с учетом движения двух фронтов) определяется теперь из (2.223).

Для повышения точности получаемых решений необходимо повышать степень аппроксимирующего полинома. Для этого будем использовать дополнительные граничные. Их общие формулы имеют вид

$$\frac{\partial^n \Theta(\delta,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^n} = 0; \quad \frac{\partial^{n+1}\Theta(\delta,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^{n+1}} \quad (n = 2, 4, 6, 8, \ldots). \qquad (2.232)$$

Общая формула для решения, удовлетворяющего основным (2.219) – (2.221) и всем дополнительным условиям записывается в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = k\frac{(\delta-\xi)^{2k}}{(\delta-z)^{2k}} - (k-1)\frac{(\delta-\xi)^{2k+1}}{(\delta-z)^{2k+1}} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (2.233)$$

Дополнительные условия для второго приближения (2.233) примут вид

$$\frac{\partial^2\Theta(\delta,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} = 0; \quad \frac{\partial^3\Theta(\delta,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3} = 0. \qquad (2.234)$$

Формула для решения во втором приближении будет

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 2\frac{(\delta-\xi)^4}{(\delta-z)^4} - \frac{(\delta-\xi)^5}{(\delta-z)^5}. \qquad (2.235)$$

Соотношение (2.235) выполняет основные (2.218) – (2.221) и дополнительные (2.234) условия.

Из решения во втором приближении требуется определить неизвестные функции $\delta(\mathrm{Fo})$ и $z(\mathrm{Fo})$. Подставим (2.235) в интеграл (2.224). Определяя интегралы находим

$$7\nu(\mathrm{Fo})d\nu = 90d\mathrm{Fo}. \qquad (2.236)$$

Интегрируя (2.236), получаем

$$\nu(\mathrm{Fo}) = \delta(\mathrm{Fo}) - z(\mathrm{Fo}) = \sqrt{2C + 180\mathrm{Fo}/7}, \qquad (2.237)$$

где C − константа, определяемая из условия $\nu(0) = \delta(0) - z(0)$. Так как $z(0) = 0$, а $\delta(0) = 10/(3\mathrm{Ki})$, то $\nu(0) = 10/(3\mathrm{Ki})$. При учете найденной константы интегрирования выражение (2.237) будет

$$\nu(\mathrm{Fo}) = \frac{2\sqrt{35}\sqrt{81\mathrm{Ki}^2\mathrm{Fo}+35}}{21\mathrm{Ki}}. \qquad (2.238)$$

Выражения для расчета каждой из функций $\delta(\mathrm{Fo})$ и $z(\mathrm{Fo})$ будут:

$$z(\mathrm{Fo}) = \mathrm{KiFo}/\mathrm{Po} - \frac{\sqrt{113{,}4\mathrm{Ki}^2\mathrm{Fo}+49}-7}{9\mathrm{PoKi}}. \qquad (2.239)$$

$$\delta(\mathrm{Fo}) = \frac{\mathrm{KiFo}}{\mathrm{Po}} - \frac{7\sqrt{113{,}4\mathrm{Ki}^2\mathrm{Fo}+49}-49-6\mathrm{Po}\sqrt{35}\sqrt{81\mathrm{FoKi}^2+35}}{63\mathrm{PoKi}}. \qquad (2.240)$$

Формулы (2.235), (2.239), (2.240) будут решением задачи (2.216) – (2.221) (вторая стадия) для 2 – го приближения. Результаты вычислений приведены на рисунках 2.43 – 2.45.

При достижении фронтом теплового возмущения координаты $\xi = 1\,(\delta(\mathrm{Fo}^*) = 1)$, наступает 3 – я стадия теплообмена и плавления. Решение в третьей стадии отыскивается в диапазоне времени $\mathrm{Fo}^* \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_к$, то есть с момента окончания второй стадии вплоть до полного расплавления вещества. Постановка задачи для третьей стадии процесса формулируется в виде

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} \qquad (z(\mathrm{Fo}) < \xi \le 1; \quad \mathrm{Fo}^* \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_к) \tag{2.241}$$

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}^*) = \frac{(1-\xi)^2}{[1-z(\mathrm{Fo}^*)]^2}\,; \tag{2.242}$$

$$\Theta(z,\mathrm{Fo}) = 1; \quad (2.243) \qquad \Theta(1,\mathrm{Fo}) = 0\,. \tag{2.244}$$

$$\frac{\partial\Theta(z,\mathrm{Fo})}{\partial\xi} - \mathrm{Po}\frac{dz(\mathrm{Fo})}{d\,\mathrm{Fo}} + \mathrm{Ki} = 0\,, \tag{2.245}$$

где за начальную температуру, определяемую формулой (2.242), принимается изменение температуры в конце 2 – ой стадии процесса (формула (2.235) при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}^*$; $z(\mathrm{Fo}) = z(\mathrm{Fo}^*)$; $\delta(\mathrm{Fo}^*) = 1$).

Решение для задачи (2.241) – (2.245) отыскивается в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \frac{(1-\xi)^2}{(1-z)^2}\,. \tag{2.246}$$

Отметим, что соотношение (2.246) удовлетворяет условиям (2.243), (2.244). Для нахождения неизвестной функции $z(\mathrm{Fo})$ определим интеграл невязки уравнения (2.21) в диапазоне от $\xi = z(\mathrm{Fo})$ до $\xi = 1$

$$\frac{\partial}{\partial\mathrm{Fo}}\int_z^1 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})\,d\xi = \int_z^1 \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\,d\xi. \tag{2.247}$$

Вычисляя интеграл правой части (2.247), находим

$$\frac{\partial}{\partial\mathrm{Fo}}\int_z^1 \Theta(\xi,\,\mathrm{Fo})\,d\xi = \frac{\partial\Theta(1,\,\mathrm{Fo})}{\partial\xi} - \frac{\partial\Theta(z,\,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\,. \tag{2.248}$$

Выражение (2.248), учитывая (2.246) будет

$$\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{Fo}}\int_z^1 \Theta(\xi,\,\mathrm{Fo})\,d\,\xi = -\frac{\partial\Theta(z,\,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\,. \tag{2.249}$$

Выразив из (2.245) $\partial\Theta(z,\,\mathrm{Fo})/\partial\xi$ и, подставив полученное выражение в (2.249), находим

$$\frac{\partial}{\partial\mathrm{Fo}}\int_z^1 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})d\xi = \mathrm{Ki} - \mathrm{Po}\frac{dz(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}}\,. \tag{2.250}$$

Подставив (2.246) в (2.250), для неизвестной функции $z(\mathrm{Fo})$ получим

$$\left(\mathrm{Po} - \frac{1}{3}\right)\frac{dz(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} = \mathrm{Ki}\,. \tag{2.251}$$

Начальное условие для (2.251) определяется из решения задачи во второй стадии процесса при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}^*$:

$$z(\mathrm{Fo}^*) = \frac{3\mathrm{Ki}^2\mathrm{Fo}^* + 2 - 2\sqrt{3\mathrm{Ki}^2\mathrm{Fo}^* + 1}}{3\mathrm{KiPo}}. \tag{2.252}$$

Интегрируя (2.252), имеем

$$z(\mathrm{Fo}) = \frac{\mathrm{KiFo}}{\mathrm{Po} - 1/3} + C, \tag{2.253}$$

где C – константа интегрирования, находимая из условия (2.252).

$$z(\mathrm{Fo}) = \frac{3\mathrm{Ki}^2\mathrm{Fo}^* + 2 - 2\sqrt{3\mathrm{Ki}^2\mathrm{Fo}^* + 1}}{3\mathrm{KiPo}} - \frac{\mathrm{Ki}(\mathrm{Fo} - \mathrm{Fo}^*)}{\mathrm{Po} - 1/3}. \tag{2.254}$$

Формулы (2.246), (2.254) являются решением задачи (2.241) – (2.245) для первого приближения. Для второго приближения решение будет

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 2\frac{(1-\xi)^4}{(1-z)^4} - \frac{(1-\xi)^5}{(1-z)^5}. \tag{2.255}$$

Подставив (2.255) в интеграл (2.250), получим

$$\frac{dz(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} = \frac{30\mathrm{Ki}}{30\mathrm{Po} + 23}. \tag{2.256}$$

Проинтегрировав (2.256), имеем

$$z(\mathrm{Fo}) = C + \frac{30\mathrm{KiFo}}{30\mathrm{Po} + 23}, \tag{2.257}$$

где C – константа интегрирования, определяемая по формуле

$$C = \frac{\mathrm{FoKi}}{\mathrm{Po}} - \frac{\sqrt{2835\mathrm{Ki}^2\mathrm{Fo} + 1225} + 35}{45\mathrm{KiPo}} - \frac{30\mathrm{Fo}^*\mathrm{Ki}}{30\mathrm{Po} + 23}. \tag{2.258}$$

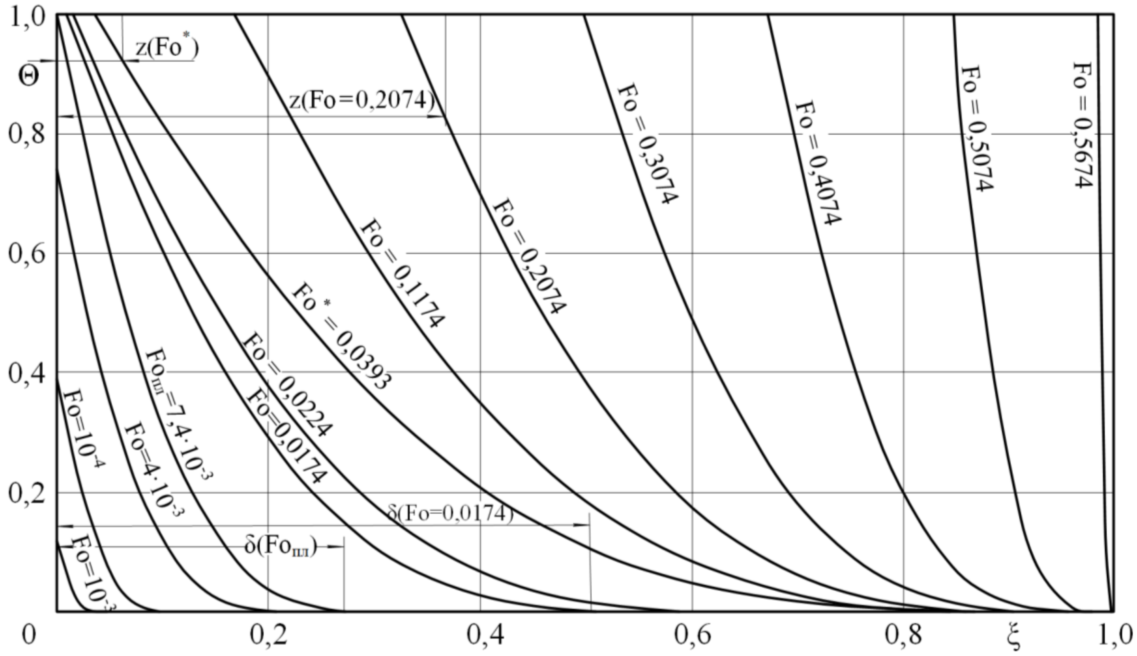


Рисунок 2.43. Изменение температуры в процессе прогрева и плавления (2 – ое приближение) при $\mathrm{Ki} = 10$, $\mathrm{Po} = 5$: $(0 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_{\text{пл}})$ – 1 – ая стадия; $(\mathrm{Fo}_{\text{пл}} \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}^*)$ – 2 – ая стадия; $(\mathrm{Fo}^* \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_{\text{к}})$ – 3 – я стадия $(\mathrm{Fo}_{\text{к}} = 0{,}5908)$

Формулы (2.255), (2.257), (2.258) являются решением задачи (2.241) –

(2.245) для второго приближения. Расчеты температуры от начала нагрева и до окончания плавления даны на рисунке 2.43. Из их анализа видно, что при значениях $\mathrm{Ki}=10,\ \mathrm{Po}=5$ плавление происходит в течение времени $\mathrm{Fo}_{к}=0{,}5908$. Если считать $z(\mathrm{Fo}_{к})=0{,}999$, то величина $z(\mathrm{Fo}_{к})=1$ здесь недостижима из – за невозможности совмещения двух разных граничных условий 1 – го рода вида (2.243), (2.244) в точке $\xi=1$. В связи с этим, фронт плавления может только асимптотически приближаться к точке $\xi=1$. Но, если допустить, что при $z(\mathrm{Fo}_{к})=0{,}999$ наступает полное расплавление, то его время будет некоторой конечной величиной, равной $\mathrm{Fo}_{к}=0{,}5908$.

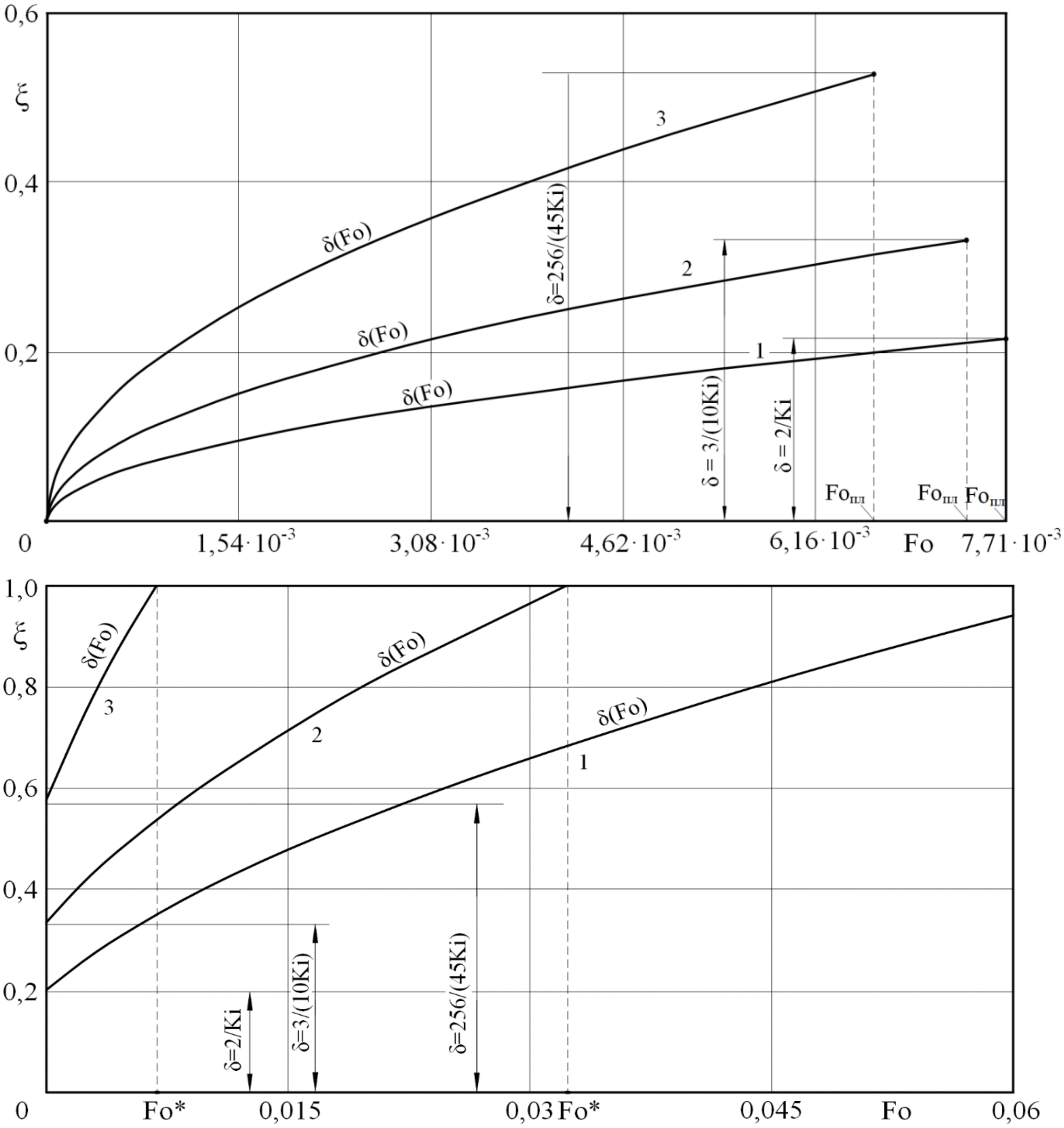


Рисунок 2.44. Распределение фронта теплового возмущения $\delta(\mathrm{Fo})$ по переменной ξ во времени Fo в течении 1 – й стадии процесса ($0\le\mathrm{Fo}\le\mathrm{Fo}_{пл}$) (верхний рисунок) и 2 – й стадии ($\mathrm{Fo}_{пл}\le\mathrm{Fo}\le\mathrm{Fo}^*,\ \mathrm{Fo}_{пл}=0$) (нижний рисунок) при $\mathrm{Ki}=10,\ \mathrm{Po}=5$: 1, 2, 3 – первое, второе и пятое приближения

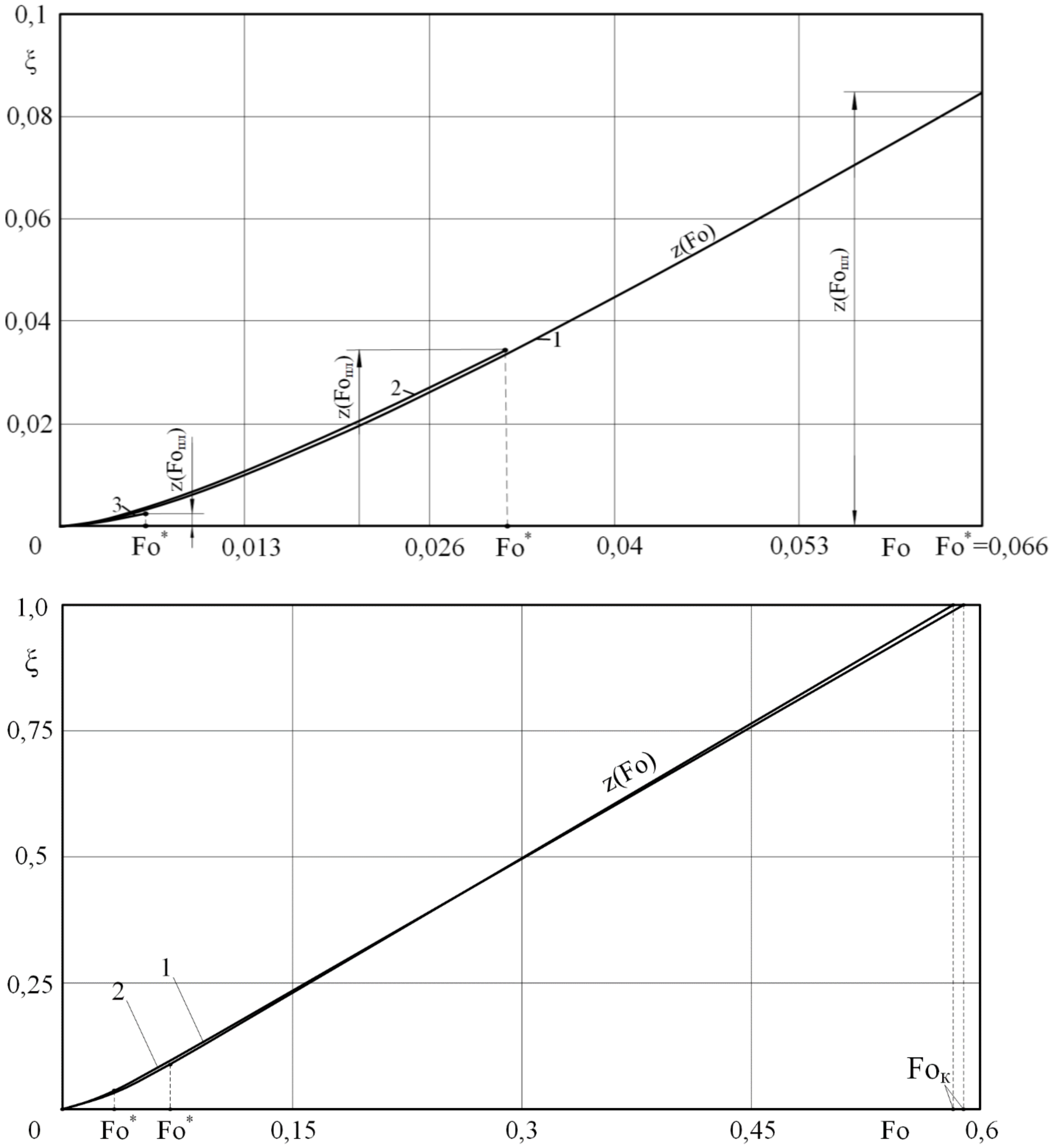


Рисунок 2.45. Изменение фронта плавления $z(\mathrm{Fo})$ по переменной ξ во времени Fo в течении 2 – й стадии процесса $\mathrm{Fo}_{пл} \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}^*$, $\mathrm{Fo}_{пл} = 0)$ (верхний рисунок) и в течении 2 – й $(\mathrm{Fo}_{пл} \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}^*)$ и 3 – й $(\mathrm{Fo}^* \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_к)$ стадий процесса (нижний рисунок) при $\mathrm{Ki} = 10$, $\mathrm{Po} = 5$: 1, 2, 3 – первое, второе и пятое приближения

Расчеты передвижения фронта теплового возмущения $\delta(\mathrm{Fo})$ по переменной ξ в диапазонах 1 – ой $(0 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_{пл})$ и 2 – ой стадий даны на рисунке 2.44, где видно, что при увеличении количества приближений скорость движения фронта теплового возмущения увеличивается. Этот факт объясняется тем, что решается параболическое уравнение теплопроводности, которое описывает бесконечную скорость распределения температурного возмущения.

Расчеты перемещения фронта плавления $z(\mathrm{Fo})$ даны на рисунке 2.45.

На рисунке 2.45 видно, что во временнóм диапазоне $0 \le \mathrm{Fo} \le 0{,}066$, закон перемещения фронта плавления – нелинейный, а на участке $0{,}066 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_{к} = 0{,}5908$ – практически линейный. Отметим, что отмеченные временные диапазоны имеют место лишь при $\mathrm{Ki} = 10, \mathrm{Po} = 5$. Для каких – то других чисел Кирпичева и Померанцева эти диапазоны будут другими.

Расчеты показали, что закон движения фронта плавления практически независим от количества приближений.

Анализ невязки дифференциального уравнения для второй стадии процесса показал, что в пятом приближении в диапазоне пространственной переменной $0{,}33 \le \xi \le 1$ при $\mathrm{Fo} = 10^{-5}$ (отчет времени ведется от $\mathrm{Fo}_{пл} = 0$) она практически равна нулю. Ненулевая невязка наблюдается лишь вблизи фронта плавления. Скорость перемещения фронта плавления на некотором начальном участке временнóй переменной является нелинейной функцией времени. На последующем отрезке времени вплоть до полного расплавления вещества нелинейная закономерность изменения скорости переходит в линейную.

Таким образом, на основе совместного использования интегрального метода теплового баланса и дополнительных граничных характеристик развит приближенный аналитический метод решения краевой задачи теплопроводности с подвижной границей раздела фаз (задача Стефана с абляцией). Данный подход впервые использован для определения температурных полей в расплавляемом теле конечных размеров.

3. ТЕПЛООБМЕН В ДВИЖУЩИХСЯ ЖИДКОСТЯХ

Основные научные результаты автора, полученные в главе 3, представлены в работах 142, 144, 195, 199, 202 – 210, 213, 218, 223, 228, 232, 236, 237, 246, 251.

В п. 3.1 приведены результаты разработки и исследования математической модели переноса теплоты в жидкости с учётом релаксационных явлений. На основе использования метода конечных разностей получено численное решение сформулированной задачи и выполнен детальный его анализ. Показано, что в зависимости от физических свойств жидкости (в том числе и релаксационных) интенсивность теплообмена ограничена некоторым предельным значением. Так, вне зависимости от заданных граничных условий (первого, второго или третьего рода) плотность теплового потока на поверхности канала не может превышать некоторого верхнего значения, определяемого условиями задачи.

В п. 3.2 – 3.4 рассматриваются задачи о теплообмене в жидкостях, движущихся в каналах различной конфигурации. При исследовании процессов в условиях локального равновесия учет релаксационных слагаемых в дифференциальных уравнениях переноса не дает новых представлений об их протекании. В связи с этим в диссертации развиваются также приближенные аналитические методы построения решений уравнений параболического типа, вывод которых основан на принципах локального теплового равновесия и гипотезе сплошности исследуемых сред. При их разработке использованы понятия, выходящие за рамки классической теории (глубина термического слоя, фронт температурного возмущения, конечная скорость распространения теплоты).

Исследованию формирования теплового пограничного слоя при турбулентном течении жидкости посвящен п 3.6 диссертационной работы. Используя эмпирическую зависимость распределения скорости и толщины турбулентного динамического пограничного слоя, разработана методика получения аналитического решения краевой задачи, моделирующей формирование в турбулентном динамическом пограничном слое теплового пограничного слоя. Решение получено в общем виде и позволяет определять распределение температур в пограничном слое для различных скоростных профилей.

3.1. Математическая модель локально – неравновесного теплообмена в стабилизированном потоке несжимаемой жидкости

Исходя из принципа локальности и гипотезы сплошной среды, в любом малом элементе среды предполагается наличие состояния локального равновесия, тогда как в системе в целом могут наблюдаться градиенты температур, концентраций и т.д. Такое состояние возможно в случае, когда интенсивность нарушения теплового равновесия, вызванного граничными условиями, значительно меньше скорости релаксации системы к локальному тепловому равновесию. Таким образом, использование принципа локальности ограничено временами, значительно превышающими время релаксации (определяемое временем свободного пробега микрочастиц), и характерными микромасштабами системы (определяемыми длиной свободного пробега микрочастиц). Уравнение энергии в этом случае может быть представлено в виде

$$\rho\frac{\partial i}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{q} + q_v, \tag{3.1}$$

где ρ – плотность жидкости; i – теплосодержание (энтальпия); $\vec{q}$ – вектор плотности теплового потока; q_v – внутренний источник теплоты.

Учитывая, что $di = cdT$ (c – удельная теплоемкость), уравнение энергии (3.1) записывается в виде

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{q} + q_v \tag{3.2}$$

В уравнении (3.2) не учтена причинно – следственная связь явлений – изменение температуры жидкости вследствие изменения ($\operatorname{div}\vec{q} \neq 0$) теплового потока происходит мгновенно, без задержки во времени. Очевидно, что процессы переноса (тепла, массы, импульса) характеризуются некоторой конечной скоростью их протекания. Таким образом, в действительности всякий реальный процесс переноса нелокален. В связи с этим возникает необходимость разработки новых методов математического моделирования процессов переноса с учетом их инерционности.

Рассмотрим вывод дифференциального уравнения локально – неравновесного нагрева жидкости в плоскопараллельном канале, ширина которого значительно превышает высоту (см. рис. 3.1). Температура потока в начальный момент времени равна $T_н$. Температура стенок канала $T_{ст}$ поддерживается постоянной в течении всего процесса теплообмена ($T_{ст} > T_н$). Во входное сечение канала поступает жидкость с температурой T_0 ($T_н < T_0 < T_{ст}$). Таким образом, нагрев жидкости происходит вследствие двух факторов – нагрева от стенки и конвективного теплопереноса от входного сечения.

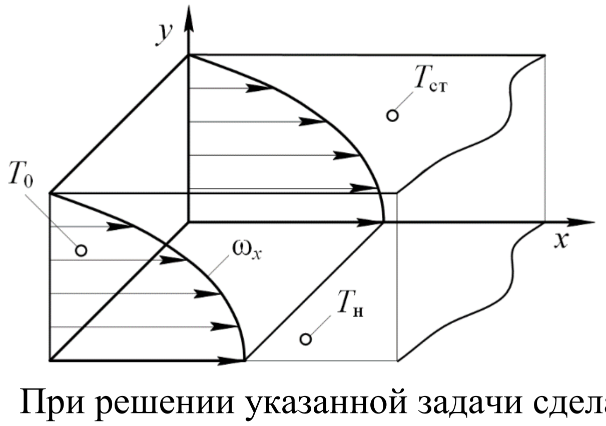


Рисунок 3.1. Схема теплообмена при ламинарном течении жидкости в плоскопараллельном канале

При решении указанной задачи сделаем ряд допущений [89]:

1) течение жидкости ламинарное, стабилизированное;

2) диапазон изменения температуры незначителен и зависимостью

физических свойств жидкости от температуры можно пренебречь;

3) жидкость несжимаема;

4) конвективным переносом в поперечном направлении и теплопроводностью в продольном пренебрегается.

С целью учета инерционности процесса теплообмена в жидкости, выполним временную релаксацию уравнения энергии (3.2) [202]:

$$c\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(T+\tau_1\frac{\partial T}{\partial t}\right)=-\mathrm{div}\left(\vec{q}+r_1\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}\right)+q_v, \qquad (3.3)$$

где τ_1, r_1 – коэффициенты релаксации.

Конвективный перенос теплоты всегда сопровождается теплопроводностью, т.к. частицы жидкости, имеющие разную температуру, в процессе движения соприкасаются. Тогда суммарный тепловой поток $\vec{q}$ можно представить, как сумму тепловых потоков, обусловленных конвективным переносом $\vec{q}_\text{к}$ и теплопроводностью $\vec{q}_\text{т}$

$$\vec{q}=\vec{q}_\text{к}+\vec{q}_\text{т}.$$

Тогда выражение (3.3) будет

$$c\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(T+\tau_1\frac{\partial T}{\partial t}\right)=-\mathrm{div}\left(\vec{q}_\text{к}+\vec{q}_\text{т}+r_1\frac{\partial\vec{q}_\text{к}}{\partial t}+r_1\frac{\partial\vec{q}_\text{т}}{\partial t}\right)+q_v. \qquad (3.4)$$

Учитывая принятые исходные данные, а также свойство линейности оператора дивергенции векторного поля, запишем (3.4) в виде

$$\begin{gathered}c\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(T+\tau_1\frac{\partial T}{\partial t}\right)=-\frac{\partial q_{\text{к}x}}{\partial x}-\frac{\partial q_{\text{к}y}}{\partial y}-\frac{\partial q_{\text{т}x}}{\partial x}-\frac{\partial q_{\text{т}y}}{\partial y}-\\ -r_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q_{\text{к}x}}{\partial x}+\frac{\partial q_{\text{к}y}}{\partial y}+\frac{\partial q_{\text{т}x}}{\partial x}+\frac{\partial q_{\text{т}y}}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)^2.\end{gathered} \qquad (3.5)$$

где $q_{\text{к}x}, q_{\text{к}y}, q_{\text{т}x}, q_{\text{т}y}$ – проекций векторов $\vec{q}_\text{к}$, $\vec{q}_\text{т}$ на координатные оси x, y.

Пренебрегая согласно п. 4 принятых допущений, конвективным переносом в поперечном направлении и теплопроводностью в продольном получаем

$$c\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(T+\tau_1\frac{\partial T}{\partial t}\right)=-\frac{\partial q_{\text{к}x}}{\partial x}-\frac{\partial q_{\text{т}y}}{\partial y}-r_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q_{\text{к}x}}{\partial x}+\frac{\partial q_{\text{т}y}}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)^2. \qquad (3.6)$$

Тепловые потоки, обусловленные конвективным переносом и теплопроводностью могут быть определены по формулам

$$\vec{q}_\text{к}=\rho\vec{\omega}i;\quad \vec{q}_\text{т}=-\lambda\Delta T, \qquad (3.7)$$

где $\vec{\omega}$ – скорость; λ – коэффициент теплопроводности; T – температура.

Подставляя (3.7) в (3.6), получаем

$$c\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(T+\tau_1\frac{\partial T}{\partial t}\right)=-c\rho\omega_x\frac{\partial T}{\partial x}+\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-$$

$$-r_1\frac{\partial}{\partial t}\left(c\rho\omega_x\frac{\partial T}{\partial x}-\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)^2. \tag{3.8}$$

После некоторых преобразований уравнение энергии (3.8), описывающее локально – неравновесный теплообмен в жидкости, приводится к виду

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_1\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-\omega_x\frac{\partial T}{\partial x}-r_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega_x\frac{\partial T}{\partial x}-a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\frac{\mu}{c\rho}\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)^2. \tag{3.9}$$

Рассмотрим вывод уравнения (3.9), исходя из других соображений. Используем при этом положения теории двухфазного запаздывания.

При выводе классического уравнения используются следующие формулы для проекций суммарного вектора теплового потока [90]:

$$q_x=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}+\rho\omega_x i;\quad q_y=-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}+\rho\omega_y i, \tag{3.10}$$

Подставляя соотношения (3.10) в уравнение теплового баланса

$$\rho\frac{\partial i}{\partial t}=-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)^2. \tag{3.11}$$

находим уравнение энергии вида

$$\rho\frac{\partial i}{\partial t}+\rho\omega_x\frac{\partial i}{\partial x}+\rho\omega_y\frac{\partial i}{\partial y}=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)^2$$

или с учетом $di=cdT$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\omega_x\frac{\partial T}{\partial x}+\omega_y\frac{\partial T}{\partial y}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\frac{\mu}{c\rho}\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)^2. \tag{3.12}$$

Учитывая сделанные допущения (см. п. 4), получаем известное уравнение, описывающее теплообмен в потоке жидкости

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\omega_x\frac{\partial T}{\partial x}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\mu}{c\rho}\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)^2. \tag{3.13}$$

Важно отметить, что полученное ранее уравнение энергии (3.9), описывающее локально – неравновесный теплообмен, при равенстве нулю коэффициентов релаксации ($\tau_1=r_1=0$)совпадает с уравнением (3.13).

Согласно теории двухфазного запаздывания компоненты теплового потока по осям x и y принимаются в виде

$$q_x=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}-\tau_1\frac{\partial q_x}{\partial t}-\lambda r_1\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial t}+\rho\omega_x i+r_1\rho\omega_x\frac{\partial i}{\partial t}; \tag{3.14}$$

$$q_y=-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}-\tau_1\frac{\partial q_y}{\partial t}-\lambda r_1\frac{\partial^2 T}{\partial y\partial t}+\rho\omega_x i+r_1\rho\omega_y\frac{\partial i}{\partial t}. \tag{3.15}$$

Подставляя (3.14), (3.15) в (3.11), с учетом допущений, получаем

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\tau_1\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-\omega_x\frac{\partial T}{\partial x}-r_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega_x\frac{\partial T}{\partial x}-a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\frac{\mu}{c\rho}\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)^2.$$

Из сравнения полученного уравнения с выражением (3.9) следует, что оба подхода приводят к одинаковым результатам.

С целью учета многократной релаксации процесса теплообмена уравнение энергии может быть представлено в виде

$$c\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(T+\sum_{k=1}^{N}\tau_k^k\frac{\partial T}{\partial t}\right)=-\mathrm{div}\left(\vec{q}_\text{к}+\sum_{k=1}^{N}r_k^k\frac{\partial\vec{q}_\text{к}}{\partial t}+\vec{q}_\text{т}+\sum_{k=1}^{N}r_k^k\frac{\partial\vec{q}_\text{т}}{\partial t}\right)+q_v.$$

Найдем решение уравнения (3.9) для $N=1$ при краевых условиях, соответствующих исходным данным и принятой схеме теплообмена:

$$T(x,y,0)=T_\text{н};\quad \frac{\partial T(x,y,0)}{\partial t}=0;\tag{3.16}$$

$$T(0,y,t)=T_0;\quad \frac{\partial T(0,y,t)}{\partial x}=0;\tag{3.17}$$

$$\frac{\partial T(x,0,t)}{\partial y}=0;\quad T(x,\delta,t)=T_\text{ст}.\tag{3.18}$$

С учетом принятых допущений закон распределения скорости по толщине канала определяется из решения уравнения движения и имеет вид: $\omega_x=3\omega_\text{ср}(1-y^2/\delta^2)/2$, где $\omega_\text{ср}$ – средняя скорость течения жидкости.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta=\frac{T-T_\text{ст}}{\mu\omega_\text{ср}^2/\lambda};\quad \xi=\frac{y}{\delta};\quad \mathrm{Fo}=\frac{at}{\delta^2};\quad \mathrm{Fo}_1=\frac{a\tau_1}{\delta^2};\quad R_1=\frac{ar_1}{\delta^2};$$

$$\eta=\frac{2}{3}\frac{ax}{\delta^2\omega_\text{ср}};\quad \mathrm{Pe}=\left(\frac{2}{3}\frac{a}{\delta\omega_\text{ср}}\right)^2;\quad \Theta_\text{н}=\frac{T_\text{н}-T_\text{ст}}{\mu\omega_\text{ср}^2/\lambda};\quad \Theta_0=\frac{T_0-T_\text{ст}}{\mu\omega_\text{ср}^2/\lambda},$$

где Θ – безразмерная температура; η, ξ – безразмерные продольная и поперечная координаты; Fo – число Фурье (безразмерное время); Fo_1, R_1 – безразмерные коэффициенты релаксации; Pe – число Пекле; $\Theta_\text{н}$ – начальное значение температуры (при $\mathrm{Fo}=0$); Θ_0 –температуры на входе в канал ($\eta=0$).

С учетом введенных параметров задача (3.9), (3.16) – (3.18) будет

$$\frac{\partial}{\partial\mathrm{Fo}}\left(\Theta+\mathrm{Fo}_1\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{Fo}}\right)=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\Theta+R_1\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{Fo}}\right)-(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\Theta+R_1\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{Fo}}\right)+9\xi^2\tag{3.19}$$

$$(\mathrm{Fo}>0;\ \ 0<\xi<1;\ \ \eta>0);\tag{3.20}$$

$$\Theta(\xi,\eta,0)=\Theta_\text{н};\quad \frac{\partial\Theta(\xi,\eta,0)}{\partial\mathrm{Fo}}=0;\tag{3.21}$$

$$\Theta(\xi,0,\mathrm{Fo})=\Theta_0;\quad \frac{\partial\Theta(\xi,0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=0;\tag{3.22}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\eta,\mathrm{Fo})}{\partial\eta}=0;\quad \Theta(1,\eta,\mathrm{Fo})=0.\tag{3.23}$$

Используя метод конечных разностей получено численное решение задачи (3.19) – (3.23). При получении решения использована явная схема аппроксимации дифференциальных операторов, позволяющая получать значения искомой функции температуры на следующем временном шаге без решения системы линейных алгебраических уравнений. Созданный на базе программного комплекса MathCAD алгоритм позволяет в автоматическом режиме выполнять дискретизацию пространственной области, выполнять вывод результатов в графическом и текстовом виде.

При получении численного решения использовалась равномерная пространственно – временная сетка с шагами по переменным ξ, η и Fo равными соответственно $\Delta\xi,\ \Delta\eta,\ \Delta\mathrm{Fo}$. Узловые значения ξ, η и Fo задавались согласно соотношениям:

$$\eta_i = i\Delta\eta, \quad i=\overline{0,I};\ \ \xi_j = j\Delta\xi, \quad j=\overline{0,J},\ \ \Delta\mathrm{Fo}_k = k\,\Delta\mathrm{Fo}, \quad k=\overline{0,K}, \tag{3.24}$$

где I, J, K – количество шагов по переменным $\xi,\ \eta,\ \mathrm{Fo}$. На сетке (3.24) введем сеточные функции $\Theta_{i,j}^{k} = \Theta(\xi_i, \eta_j, \Delta\mathrm{Fo}_k)$. На основе явной схемы аппроксимации дифференциального краевой задачи (3.19) – (3.23) сформулирован ее конечно – разностный аналог:

$$\frac{\Theta_{i,j}^{k}-\Theta_{i,j}^{k-1}}{\Delta\mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_1\frac{\Theta_{i,j}^{k-1}-2\Theta_{i,j}^{k}+\Theta_{i,j}^{k+1}}{\Delta\mathrm{Fo}^2} = \frac{\Theta_{i,j-1}^{k}-2\Theta_{i,j}^{k}+\Theta_{i,j+1}^{k}}{\Delta\xi^2} +$$

$$+R_1\left(\frac{\Theta_{i,j-1}^{k}-2\Theta_{i,j}^{k}+\Theta_{i,j+1}^{k}-\Theta_{i,j-1}^{k-1}+2\Theta_{i,j}^{k-1}-\Theta_{i,j+1}^{k-1}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\xi^2}\right)-(1-\xi_j^2)\left(\frac{\Theta_{i+1,j}^{k}-\Theta_{i,j}^{k}}{\Delta\eta}+\right.$$

$$\left.+R_1\frac{\Theta_{i+1,j}^{k}-\Theta_{i,j}^{k}-\Theta_{i+1,j}^{k-1}+\Theta_{i,j}^{k-1}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\eta}\right)+9\xi_j^2;$$

$$\Theta_{i,j}^{0}=\Theta_{\text{н}};\quad \Theta_{i,j}^{0}=\Theta_{i,j}^{1};\quad \Theta_{0,j}^{k}=\Theta_0;\quad \Theta_{0,j}^{k}=\Theta_{1,j}^{k};\quad \Theta_{i,0}^{k}=\Theta_{i,1}^{k};\quad \Theta_{i,J}^{k}=0.$$

Результаты численных расчетов для различных диапазонов изменения пространственных и временной переменных представлены на рисунках 3.2 – 3.6. В частности, на рисунке рис. 3.2 приведены графики изменения безразмерной температуры в окрестности точки приложения граничного условия первого рода ($0{,}99 \le \xi \le 1{,}0$) без учета диссипации энергии.

Показано, что в диапазоне безразмерного времени $0 \le \mathrm{Fo} \le 10^{-6}$ в малой окрестности точки $\xi = 1$ происходит постепенное снижение температура от начального значения $\Theta(\xi,\eta,0)=\Theta_{\text{н}}$ до значения, заданного на границе $\Theta(1,\eta,\mathrm{Fo})=0$. Причем, промежуток времени $\Delta\mathrm{Fo}$, в течение которого происходит физическое установление граничного условия, зависит от релаксационных свойств (коэффициентов релаксации $\mathrm{Fo}_1 = R_1$) жидкости. Так, из рисунка 3.3 видно, что при некоторых больших значениях коэффициентов релаксации ($\mathrm{Fo}_1 = R_1 > 5$) снижение температуры происходит равномерно по всему сечению канала. Близкие к указанным температурные режимы могут развиваться при течении расплавов, жидкостей с сверхвысокой теплопроводностью, наножидкостей и др.

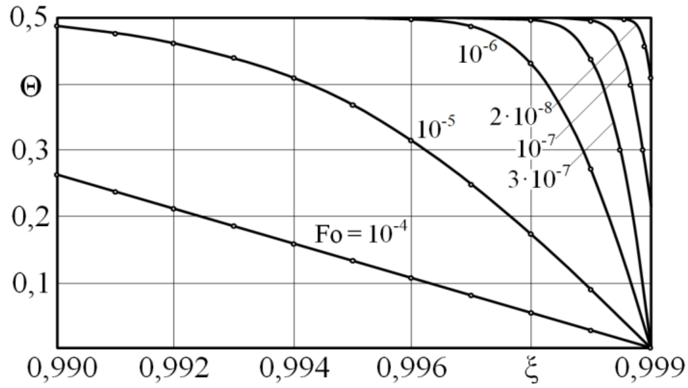


Рисунок 3.2. Распределение температуры по ширине канала без учета диссипации энергии: $\eta = 5\cdot10^{-5}$; $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10^{-7}$; $\mathrm{Pe} = 10^{-7}$; $\Theta_{\text{н}} = 0.5$. ——— – метод конечных разностей; ∘ – точное решение

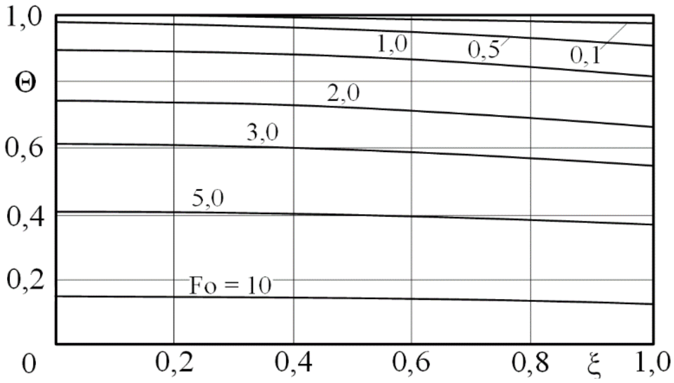


Рисунок 3.3. Распределение температуры по ширине канала без учета диссипации энергии: $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 5$; $\Theta_{\text{н}} = 1$; $\xi \to \infty$

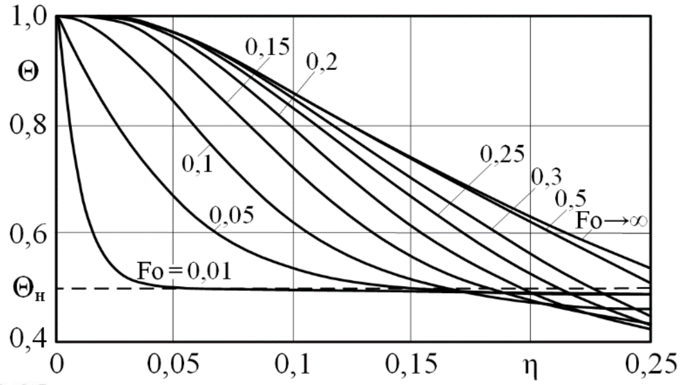


Рисунок 3.4. Распределение температуры по длине канала с учетом диссипации энергии и релаксационных свойств жидкости: $\Theta_{\text{н}} = 0{,}5$; $\xi = 0$; $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10^{-4}$; $\mathrm{Pe} = 10^{-7}$

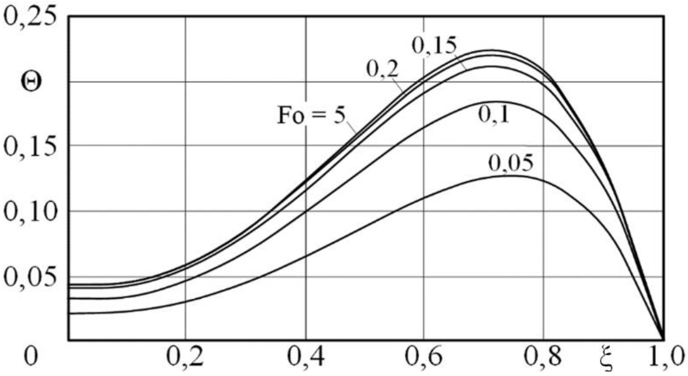


Рисунок 3.5. Распределение температуры по ширине канала с учетом диссипации энергии и релаксационных свойств жидкости: $\eta = 0{,}05$; $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10^{-4}$; $\mathrm{Pe} = 10^{-7}$; $T_{\text{н}} = T_{\text{ст}} = T_0 = 0$

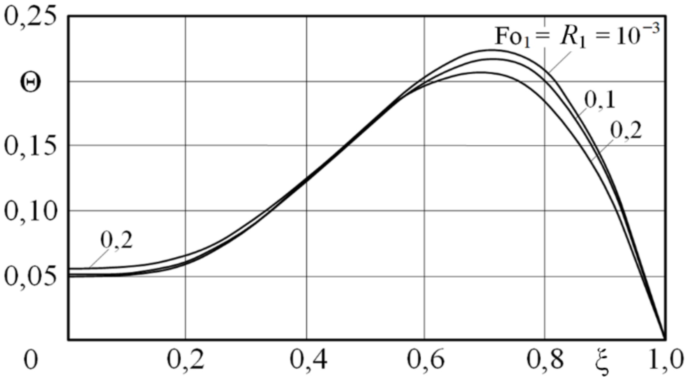


Рисунок 3.6. Распределение температуры по ширине канала с учетом диссипации энергии при различных значениях коэффициентов релаксации $\mathrm{Fo}_1 = R_1$: $\eta = 0{,}05$; $\mathrm{Pe} = 10^{-7}$; $T_{\text{н}} = T_{\text{ст}} = T_0 = 0$

Полученные данные полностью согласуются с результатами точного аналитического решения, приведенного в работах [56]. То есть физическое установление граничных условий происходит в течение некоторого интервала времени. Под физическим установлением граничного условия понимается следующее: несмотря на строгое выполнение граничного условия первого рода в граничной точке, в ее окрестности (сколь угодно малой) происходит постепенное изменение температуры жидкости от значения, заданного начальным условием, до значения, определяемого граничным условием. Данное обстоятельство свидетельствует о том, что коэффициент теплоотдачи при теплообмене текущей жидкости с окружающей средой не может превышать некоторого верхнего предела, определяемого физическими свойствами жидкости, вне зависимости от интенсивности внешнего теплообмена [56].

В диссертационной работе рассмотрено также влияние диссипативного слагаемого в уравнении (3.19) на процесс теплообмена. На рисунке 3.4 приведены графики функции Θ в диапазоне $0 \le \eta \le 0{,}25$ на оси канала (в центре) при $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10^{-4}$ и $\mathrm{Pe} = 10^{-7}$. Из их анализа видно, что при значениях продольной координаты $\eta \le 0{,}17$ граничное условие первого рода, определенное на поверхности канала $(\xi = 1{,}0)$ практически не оказывает влияние на температурное поле в потоке вплоть до $\mathrm{Fo} = 0{,}05$.

С целью оценки влияния диссипации энергии, обусловленной внутренним трением, выполнен также расчет температурных полей в потоке жидкости при $T_{\text{н}} = T_{\text{ст}} = T_0$. В данном случае изменение температуры обусловлено лишь действием внутреннего источника теплоты. Результаты выполненных расчетов даны на рисунке 3.5. Из них видно, что наибольшее влияние диссипативных явлений проявляется в зоне максимальных градиентов скорости. Повышение температуры происходит до некоторого момента времени, при котором диссипативный подвод теплоты компенсируется теплоотводом через границу канала и набегающим потоком жидкости. Стабилизация температурного состояния при $\eta = 0{,}05$, $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10^{-4}$, $\mathrm{Pe} = 10^{-7}$ наблюдается при значении времени $\mathrm{Fo} = 5$.

Влияние коэффициентов релаксации на формирование температурного поля внутри потока под действием только диссипативного источника теплоты показано на рисунке 3.6. Из его анализа следует, что с увеличением коэффициентов релаксации Fo_1, R_1 максимум температур смещается в направлении центра канала. Абсолютное значение максимальной температуры снижается, в то время как температура в центре канала незначительно увеличивается.

3.2. Разработка и исследование математической модели теплообмена в ламинарном потоке несжимаемой жидкости

На основе анализа влияния релаксационных свойств на протекание различных теплообменных процессов сделан вывод о необходимости их учета при описании сильнонеравновесных явлений в различных физических системах переноса. При исследовании процессов в условиях локального равновесия учет релаксационных слагаемых в дифференциальных уравнениях переноса не дает новых представлений об их протекании. В связи с этим в диссертации развиваются также приближенные аналитические методы построения решений уравнений параболического типа, вывод которых основан на принципе локального термодинамического равновесия и гипотезе сплошности исследуемых сред. При их разработке использованы понятия, выходящие за рамки классической теории (глубина термического слоя, фронт температурного возмущения, конечная скорость распространения теплоты).

Исследование распределения скоростей и температур в движущихся жидкостях имеет как теоретическое, так и прикладное значение. Проектирование эффективного теплообменного оборудования, определение тепловых потерь в трубопроводных системах и др. связаны с необходимостью определения полей скоростей и температур в потоках жидкостей и газов. В настоящей статье приведены результаты развития приближенного аналитического метода математического моделирования процесса переноса тепла в ламинарных потоках. На примере решения задачи Гретца – Нуссельта для цилиндрического канала рассмотрены основные положения метода. Показано, что задача отыскания решения дифференциального уравнения в частных производных относительно функции температуры может быть сведена к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения относительно новой искомой функции. Совместное использование интегрального метода теплового баланса и дополнительных граничных характеристик позволило получить простое по форме аналитическое решение рассматриваемой задачи. Отмечается, что точность полученных решений зависит от числа выполненных приближений, т.е. от количества членов аппроксимирующего ряда. Так, при использовании всего одного слагаемого, т.е. уже в первом приближении, относительная погрешность метода составляет не более 10% в диапазоне изменения продольной координаты $0{,}1 \leq \eta < \infty$ и снижается до 4% уже во втором приближении. Аналитический вид получаемых решений, позволяет анализировать поля изотерм внутри канала, вычислять безразмерные значения среднемассовой температуры, число Нуссельта и др.

Задача теплообмена в ламинарном потоке несжимаемой жидкости физически обоснованно разделяется на две задача: нестационарную и стационарную. В случае, если рассматривается канал круглого сечения, решению подлежит нестационарная задача о распределении температуры в цилиндрическом теле (жидкость здесь, как бы неподвижна) и стационарная задача Гретца. Границы использования той или иной задачи определяются соотношениями между временно́й и пространственной координатой.

Применяя двукратные интегральные преобразования Лапласа – Карсона по времени Fo и безразмерной координате η, решение задачи (23), (24) сводится к решению двух независимых задач, наибольшие трудности из которых представляет задача Гретца – Нуссельта. В диссертации получено приближенное аналитическое решение задачи Гретца на основе интегрального метода теплового баланса, согласно которому в рассмотрение вводится новая искомая функция – фронт температурного возмущения q_1. Данный подход впервые использовался в работах Goodman T., Eckert E., Drake R. В диссертации данный метод рассмотрен применительно к решению стационарных задач, где определению подлежит не закон перемещения фронта температурного возмущения во времени, а его пространственное положение. То есть, определяются координаты невозмущенной области, имеющей начальную температуру $T_н$. Согласно данному методу задача разделяется на две стадии [203].

В качестве конкретного примера рассмотрим последовательность решения задачи теплообмена при движении жидкости в цилиндрическом канале (трубе). Схема теплообмена представлена на рис. 3.7.

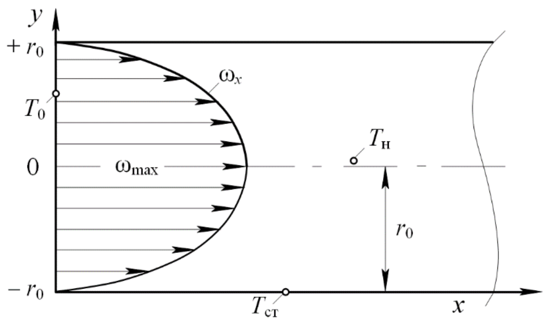


Рисунок 3.7. Схема ламинарного течения

С целью упрощения исходной задачи введем допущения: течение жидкости ламинарное стабилизированное; диссипацией энергии пренебрегается; теплопроводность по продольной переменной не учитывается. Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial T(y,x,t)}{\partial t} + \omega_x \frac{\partial T(y,x,t)}{\partial x} = \frac{a}{y}\frac{\partial T(y,x,t)}{\partial y} + a\frac{\partial^2 T(y,x,t)}{\partial y^2} \qquad (3.25)$$

$$(0 < y < r_0;\ \ x > 0;\ \ t > 0);$$

$$T(y,x,0) = T_н; \qquad (3.26) \qquad\qquad T(y,0,t) = T_0. \qquad (3.27)$$

$$T(r_0,x,t) = T_{ст}; \qquad (3.28) \qquad\qquad \frac{\partial T(0,x,t)}{\partial y} = 0, \qquad (3.29)$$

где T – температура; x, y – продольная и поперечная координаты; r_0 – радиус трубы; T_0 – температура на входе в теплообменник ($x = 0$); $T_{ст}$ – температура поверхности канала; $T_н$ – начальная температура жидкости; a – коэффициент температуропроводности; $\omega_x = 2\omega_{ср}(1-\xi^2/r_0^2)$ – распределение скорости по координате поперечной координате y; $\omega_{ср} = 0{,}5\omega_{max}$ – средняя скорость; ω_{max} – максимальная скорость; t – время.

Для приведения задачи (3.25) – (3.29) к безразмерному виду обозначим

$$\Theta = \frac{T - T_{ст}}{T_0 - T_{ст}};\ \ \xi = \frac{y}{r_0};\ \ \eta = \frac{1}{2}\frac{x}{\mathrm{Pe}\, r_0};\ \ \mathrm{Pe} = \frac{\omega_{ср} r_0}{a};\ \ \mathrm{Fo} = \frac{at}{r_0^2}, \qquad (3.30)$$

где Θ, ξ, η – соответственно безразмерные температура, поперечная и продольная координаты; Pe – число Пекле; Fo – число Фурье.

Используя введенные безразмерные параметры (3.30), задача (3.25) – (3.29) может быть записана в виде

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\eta,\mathrm{Fo})}{\partial\,\mathrm{Fo}}+(1-\xi^2)\frac{\partial\Theta(\xi,\eta,\mathrm{Fo})}{\partial\eta}=\frac{1}{\xi}\frac{\partial\Theta(\xi,\eta,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\Theta(\xi,\eta,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} \tag{3.31}$$

$$(0<\xi<1;\ \ \eta>0;\ \ \mathrm{Fo}>0);$$

$$\Theta(\xi,\eta,0)=\Theta_\text{н}; \tag{3.32}$$

$$\Theta(\xi,0,\mathrm{Fo})=1; \tag{3.33}$$

$$\Theta(1,\eta,\mathrm{Fo})=0; \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\eta,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=0, \tag{3.35}$$

где $\Theta_\text{н}=(T_\text{н}-T_\text{ст})/(T_0-T_\text{ст})$.

Для задачи (3.31) – (3.35) используем двукратное преобразование Лапласа – Карсона по времени Fo и координате x

$$T'(\xi,S,\mathrm{Fo})=S\int_0^\infty\Theta(\xi,\eta,\mathrm{Fo})\exp(-S\eta)d\eta; \tag{3.36}$$

$$\overline{T}(\xi,S,P)=S\int_0^\infty T'(\xi,S,\mathrm{Fo})\exp(-P\,\mathrm{Fo})\,d\mathrm{Fo}, \tag{3.37}$$

где S,P – параметры преобразования Лапласа – Карсона.

Соотношение (3.37), учитывая (3.36), приводится к виду

$$\overline{T}(\xi,S,P)=PS\int_0^\infty\int_0^\infty\Theta(\xi,\eta,\mathrm{Fo})\exp(-S\eta-P\,\mathrm{Fo})d\eta d\,\mathrm{Fo}. \tag{3.38}$$

Задача (3.31) – (3.35) в области изображений принимает вид

$$P[\overline{T}(\xi,S,P)-\Theta_\text{н}]+S(1-\xi^2)[\overline{T}(\xi,S,P)-1]-$$
$$-\frac{1}{\xi}\frac{\partial\overline{T}(\xi,S,P)}{\partial y}\xi-\frac{\partial^2\overline{T}(\xi,S,P)}{\partial\xi^2}=0; \tag{3.39}$$

$$\overline{T}(1,S,P)=0; \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial\overline{T}(0,S,P)}{\partial\xi}=0. \tag{3.41}$$

Решение задачи (3.39) – (3.41) в первом приближении находится в виде

$$\overline{T}(\xi,S,P)=\nu_1(S,P)\varphi_1(\xi), \tag{3.42}$$

где $\nu_1(S,P)$ – коэффициент ; $\varphi_1(\xi)$ – координатная функция вида

$$\varphi_1(\xi)=1-\xi^2. \tag{3.43}$$

Очевидно, что решение (3.42) ввиду использования координатной функции (3.43) удовлетворяет условиям (3.40), (3.41). Для нахождения неизвестного коэффициента $\nu_1(S,P)$ составляется невязка уравнения (3.39) и требуется выполнение ортогональности невязки к функции $\varphi_1(\xi)$

$$\int_0^1\Big\{\xi P[\overline{T}(\xi,S,P)-\Theta_\text{н}]+S(1-\xi^2)[\overline{T}(\xi,S,P)-1]-$$
$$-\frac{\partial\overline{T}(\xi,S,P)}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial^2\overline{T}(\xi,S,P)}{\partial\xi^2}\Big\}\varphi_1(\xi)\,d\xi=0. \tag{3.44}$$

Подставляя (3.42) в (3.44), находим

$$\int_0^1 \left\{ yP[\nu_1(S,P)(1-\xi^2)-\Theta_{\text{н}}]+\xi S(1-\xi^2)[\nu_1(S,P)-1]+ \right.$$

$$\left. +2\nu_1(S,P)\xi+2\nu_1(S,P)\xi \right\}(1-\xi^2)\,d\xi=0. \qquad (3.45)$$

Вычисляя интегралы в (3.45), для неизвестного коэффициента $\nu_1(S,P)$ получаем следующую формулу

$$\nu_1(S,P)=\frac{PF_1+SF_2}{PF_3+SF_4+F_5}\,, \qquad (3.46)$$

где $F_1=\Theta_{\text{н}}\int_0^1 \xi(1-\xi^2)\,d\xi$; $F_2=\int_0^1 \xi(1-\xi^2)^2 d\xi$; $F_3=\int_0^1 \xi(1-\xi^2)^2 d\xi$;

$$F_4=\int_0^1 \xi(1-\xi^2)^3 d\xi;\ F_5=4\int_0^1 \xi(1-\xi^2)\,d\xi\,.$$

В области оригиналов соотношение (3.42) приводится к виду

$$\Theta(\xi,\eta,\mathrm{Fo})=\begin{cases}\dfrac{F_1}{F_3}\exp\left(-\dfrac{F_5}{F_3}\mathrm{Fo}\right)\varphi_1(\xi) & \text{при } \eta>\dfrac{F_4}{F_3}\mathrm{Fo};\\[2ex] \dfrac{F_2}{F_3}\exp\left(-\dfrac{F_5}{F_4}\eta\right)\varphi_1(\xi) & \text{при } \eta<\dfrac{F_4}{F_3}\mathrm{Fo}.\end{cases} \qquad (3.47)$$

Таким образом, решение относительно искомой функции температуры разделяется на два независимых решения. Верхняя строка в (3.47) представляет решение задачи теплопроводности для цилиндрического тела. То есть здесь температура отыскивается как бы в неподвижной жидкости. Для данной зоны, процесс теплообмена не зависит от температуры потока, заданной на входе в канал (задача квазистационарная). Нижняя строка в (3.7) – решение стационарной задачи теплообмена применительно к стабилизированному ламинарному потоку несжимаемой жидкости.

Таким образом, решение нестационарной задачи представляется в виде двух соотношений, являющихся решениями нестационарной и квазистационарной задач. Полагая, что этот подход справедлив и для решений в последующих приближениях, будем искать решения для каждой из этих задач в отдельности. Этот подход вполне обоснован при решении задачи интегральным методом и методом характеристик [89, 116, 117].

Учитывая, что точное аналитическое решение нестационарной задачи известно, наибольшую трудность здесь представляет получение решения квазистационарной задачи. В данной работе приводится метод нахождения решения, связанный с определением фронта возмущения и некоторых дополнительных краевых условий. Его особенностью является возможность получения решений для малых и сверхмалых значений продольной пространственной переменной.

Математическая постановка квазистационарной задачи (задачи Гретца – Нуссельта) имеет вид

$$\omega_x \frac{\partial T(y,x)}{\partial x} = \frac{a}{y}\frac{\partial t(y,x)}{\partial y} + a\frac{\partial^2 t(y,\eta)}{\partial y^2} \qquad (0 < y < r_0; \quad x > 0);$$

$$T(y,0) = T_0; \qquad T(r_0,x) = T_{\text{ст}}; \qquad \frac{\partial T(0,x)}{\partial y} = 0.$$

Для приведения задачи Гретца – Нуссельта к безразмерному виду воспользуемся обозначениями (3.30), за исключением безразмерной температуры, определяемой теперь соотношением

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_{\text{ст}} - T_0}.$$

С учетом принятых обозначений математическая постановка задачи Гретца – Нуссельта принимает вид

$$(1-\xi^2)\frac{\partial\Theta(\xi,\eta)}{\partial\eta} = \frac{1}{\xi}\frac{\partial\Theta(\xi,\eta)}{\partial\xi} + \frac{\partial^2\Theta(\xi,\eta)}{\partial\xi^2} \qquad (\eta > 0;\ 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(y,0) = 0; \qquad \Theta(1,\eta) = 1; \qquad \frac{\partial\Theta(0,\eta)}{\partial y} = 0.$$

Для удобства получения решения интегральным методом теплового баланса произведем замену переменной $\xi = 1 - z$. Задача Гретца – Нуссельта при этом будет

$$z(2-z)\frac{\partial\Theta(z,\eta)}{\partial\eta} = \frac{\partial^2\Theta(z,\eta)}{\partial z^2} - \frac{1}{1-z}\frac{\partial\Theta(z,\eta)}{\partial z} \qquad (\eta > 0; \quad 0 < z < 1); \qquad (3.48)$$

$$\Theta(z,0) = 0; \qquad (3.49) \qquad \Theta(0,\eta) = 1; \qquad (3.50) \qquad \frac{\partial\Theta(1,\eta)}{\partial y} = 0. \qquad (3.51)$$

Следуя интегральному методу теплового баланса, будем рассматривать две стадии процесса относительно поперечной координаты η: $(0 \le \eta \le \eta_1)$ и $(\eta_1 \le \eta < \infty)$. По координате z введем фронт теплового возмущения, разделяющий исходную область $(0 \le z \le 1)$ на два участка – прогретый $0 \le z \le q_1(\eta)$ и непрогретый $q_1(\eta) \le z \le 1$, где $q_1(\eta)$ – функция, зависящая от переменой η (рисунок 3.8). В зоне, которую ещё не достиг фронт возмущения, сохраняется температура $\Theta(z,0) = 0$, заданная на входе в канал. Окончание первой стадии происходит после достижении движущейся границей оси трубы, где $q_1(\eta) = 1$, а координата η принимает значение $\eta = \eta^*$. Затем начинается вторая стадия, когда температура изменяется во всем диапазоне координаты $0 \le z \le 1$. Здесь определяется новая искомая функция $q_2(\eta)$, которая характеризует изменение температуры от времени в центре трубы.

Очевидно, что ее определение связано с допущением о конечной скорости перемещения теплоты. В диссертации показано, что при повышении точности получаемого решения (при увеличении числа приближений), координата невозмущенной области смещается в направлении входного сечения и в пределе при $n \to \infty$ величина продольной координаты $\eta = \eta^*$, при которой $q_1(\eta)$ достигает координату $z = 1$, приближается к нулю.

Следовательно, при задании граничного условия первого рода температура в центре канала мгновенно (без задержки во времени) начинает изменяться от начального значения до значения, заданного граничным условием. То есть, в пределе, для любых значений поперечной координаты $\eta > 0$ безразмерная температура подчиняется неравенству $\Theta(0,\eta) > 0$.

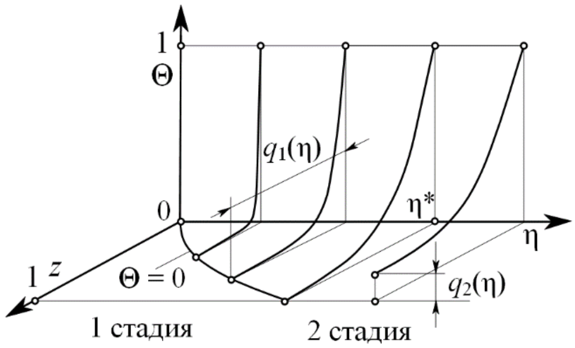


Рисунок 3.8. Расчетная схема теплообмена

Постановка задачи для первой стадии будет

$$z(2-z)\frac{\partial\Theta(z,\eta)}{\partial\eta} = \frac{\partial^2\Theta(z,\eta)}{\partial z^2} - \frac{1}{1-z}\frac{\partial\Theta(z,\eta)}{\partial z} \tag{3.52}$$

$$(0 \le \eta \le \eta^*; \quad 0 < z \le q_1(\eta));$$

$$\Theta(0,\eta) = 1; \quad (3.53) \qquad \Theta(q_1,\eta) = 0; \quad (3.54) \qquad \frac{\Theta(q_1,\eta)}{\partial z} = 0. \quad (3.55)$$

где (3.54), (3.55) представляют условиям сопряжения прогретой и непрогретой зон. Согласно условию (3.54) на фронте возмущения при его движении по переменной z от $z = 0$ до $z = 1$ (где заканчивается первая стадия) сохраняется температура, определяемая граничным условием (3.49). Отсутствие этого условия в задаче (3.52) – (3.55) объясняется тем, что в первой стадии краевая задача определена лишь для $z \le q_1(\eta)$, а не во всем диапазоне координаты $0 \le z \le 1$. В задаче (3.52) – (3.55) не приводится также условие (3.51), т.к. оно не оказывает влияния на теплообмен в 1 – ой стадии.

Потребуем, чтобы искомое решение задачи (3.52) – (3.55) удовлетворяло интегралу теплового баланса

$$\int_0^{q_1}(1-z)(2z-z^2)\,\frac{\partial\Theta(z,\eta)}{\partial\eta}dz = \int_0^{q_1}\left[(1-z)\frac{\partial^2\Theta(z,\eta)}{\partial z^2} - \frac{\partial\Theta(z,\eta)}{\partial z}\right]dz. \tag{3.56}$$

Решение задачи (3.52) – (3.55), определяется в виде

$$\Theta(z,x) = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k(q_1)\varphi_k(z), \tag{3.57}$$

где $a_k(q_1)$ – коэффициенты, определяемые из основных граничных условий и дополнительных граничных характеристик; $\varphi_k(z) = z^k$ – координатные функции.

Очевидно, что выражение (3.57), благодаря принятой системы координатных функций, удовлетворяет (3.53). Для определения решения задачи в первом приближении подставим (3.57), ограничиваясь двумя членами ряда, в условия (3.54), (3.55). Для неизвестных коэффициентов $a_k(q_1)$, $(k=1,2)$ получим два алгебраических уравнения. После нахождения коэффициентов a_k (3.57) будет

$$\Theta(z,x)=1-z(2-z/q_1)/q_1 . \tag{3.58}$$

Подставляя (3.58) в интеграл теплового баланса (3.56), относительно $q_1(\eta)$ получаем нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(2q_1^4-9q_1^3+10q_1^2)dq_1 = 60d\eta . \tag{3.59}$$

Начальное условие для уравнения (3.59) имеет вид

$$q_1(0)=0 . \tag{3.60}$$

Задача (3.59), (3.60) ввиду нелинейности допускает лишь численное решение. В связи с чем, рассмотрим метод нахождения её приближенного аналитического решения. Введем новую независимую переменную $\psi=\eta/\eta^*$, где η^* – продольная координата, для которой фронт возмущения $q_1(\eta)$ достигает координаты $y=1$, то есть $q_1(\eta)=q_1(\eta^*)=1$. Задача (3.59), (3.60) для переменной ψ принимает вид

$$(2q_1^4-9q_1^3+10q_1^2)dq_1/d\psi=60d\eta^* \tag{3.61}$$

$$(0\le\psi\le1; \qquad 0\le q_1(\psi)\le1); \tag{3.62}$$

$$q_1(0)=0, \tag{3.63}$$

где η^* является неизвестной величиной, определяемой из решения задачи (3.61) – (3.63), которое принимается в виде

$$q_1(\psi)=b\psi^{\lambda} , \tag{3.64}$$

где b, λ – неизвестные постоянные.

Из соотношений (3.62) следует, что $q_1(1)=1$ и, следовательно, $b=1$.

Соотношение (3.64) удовлетворяет граничному условию (3.63). Для определения постоянных λ и неизвестной величины η^* необходимо иметь два дополнительных граничных условия. Для нахождения первого из них потребуем, чтобы соотношение (3.64) удовлетворяло осредненному в диапазоне $0\le\psi\le1$ уравнению (3.61) интегралу теплового баланса вида

$$\int_0^1(2q_1^4-9q_1^3+10q_1^2)\frac{dq_1}{d\psi}-60d\eta^*)d\psi=0 . \tag{3.65}$$

Подставляя (3.64) в (3.65), находим уравнение первого дополнительного условия, из решения которого получаем $\eta^*=0{,}02472$.

Для нахождения второго дополнительного условия потребуем, чтобы соотношение (3.64) удовлетворяло уравнению (3.61) в точке $\psi=1$, то есть

$$\left[(2q_1^4-9q_1^3+10q_1^2)dq/d\psi-60\eta^*\right]_{\psi=1}=0 . \tag{3.66}$$

Соотношение (3.66) с учетом (3.64) приводится к алгебраическому уравнению, из решения которого находим $\lambda=0{,}4944$. С учётом полученных значений b, η^*, λ соотношение (3.64) для переменной η принимает вид

$$q_1(\eta) = \frac{b}{(\eta^*)^{\lambda}}\eta^{\lambda} = 6{,}23\eta^{0{,}4944}. \qquad (3.67)$$

В результате сравнения значений $q_1(\eta)$ по формуле (3.67) с численным решением уравнением (3.59) заключаем, что их расхождение не превышает $0{,}6\,\%$ (рисунок 3.9). Следовательно, выражение (3.67) может быть использовано в соотношении (3.58), являющемся решением задачи (3.52) – (3.55) в первом приближении.

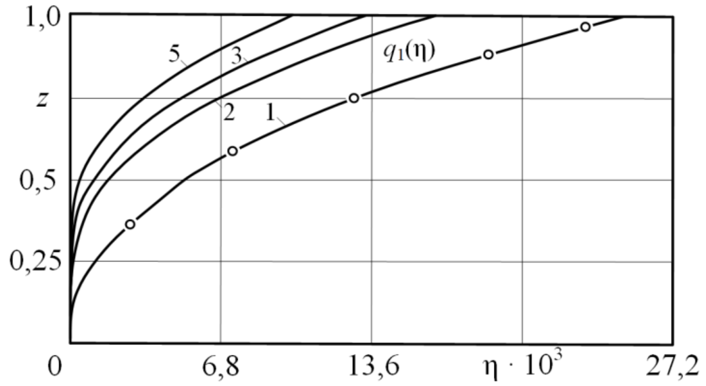


Рисунок 3.9. Перемещение фронта теплового возмущения $q_1(\eta)$ по переменной z в зависимости от переменной η: 1, 2, 3, 5 – номер приближения; ∘ – численное решение

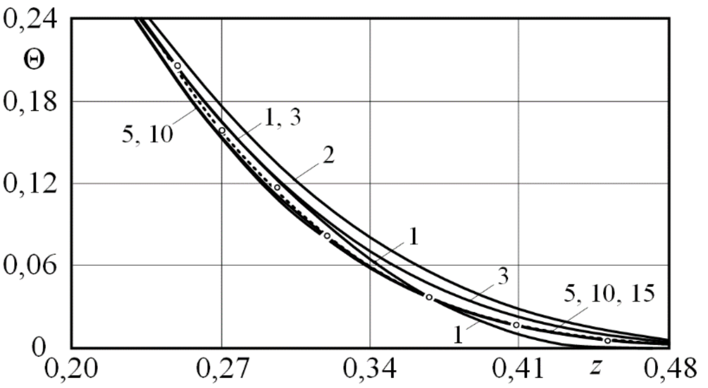


Рисунок 3.10. Распределение температуры при $\eta = 5 \cdot 10^{-3}$: 1, 2, 3, 5, 10, 15 – соответственно первое, второе, третье, пятое, десятое, пятнадцатое приближения; – – – – численный метод; ∘ – точное аналитическое решение

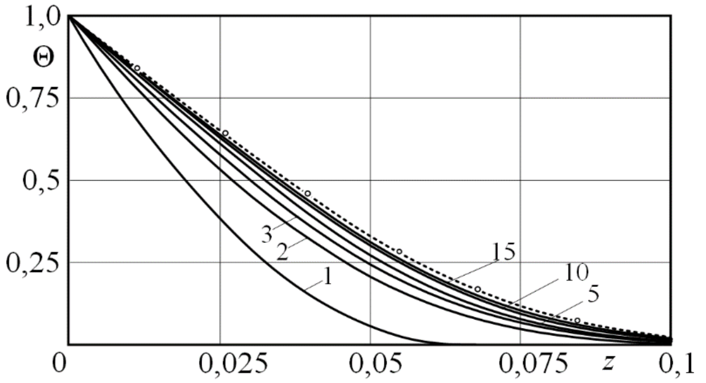


Рисунок 3.11. Изменение температуры при $\eta = 10^{-4}$: 1, 2, 3, 5, 10, 15 – соответственно первое, второе, третье, пятое, десятое, пятнадцатое приближения; – – – – численные метод; ∘ – точное аналитическое решение

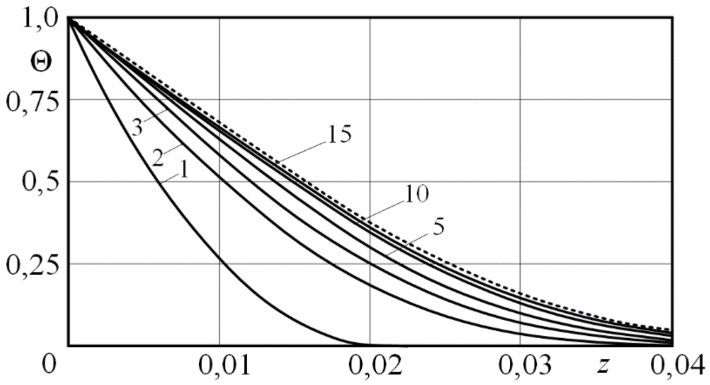


Рисунок 3.12. Изменение температуры при $\eta = 10^{-5}$: 1, 2, 3, 5, 10, 15 – соответственно первое, второе, третье, пятое, десятое, пятнадцатое приближения; – – – – численный метод

Расчеты температур по формуле (3.58) в сравнении с решением численным методом (метод конечных разностей) даны на рисунках 3.10 – 3.12. На рисунке 3.10 приведены также результаты точного решения [89], в котором было использовано восемь членов ряда. Применение большего их количества затрудняется необходимостью решения высокой степени характеристического (алгебраического) уравнения, определяющего собственные числа краевой задачи.

Поэтому для малых и сверхмалых величин переменной x такое решение не может быть использовано ввиду его недостаточной точности. В связи с чем, сравнение с точным решением дано лишь для $\eta = 5\cdot 10^{-3}$ и $\eta = 10^{-4}$ (см. рисунки 3.10, 3.11), а для $\eta = 10^{-5}$ (см. рисунок 3.12) сравнение выполняется лишь с результатами, полученными методом конечных разностей. При конечно – разностной аппроксимации для интервала $10^{-2} \le \eta \le 10^{-5}$ $\Delta\eta$ и Δz принимались соответственно равными $\Delta\eta = 10^{-5}$; $\Delta z = 2\cdot 10^{-2}$ для интервала $10^{-3} \le \eta \le 10^{-5}$ – $\Delta\eta = 10^{-9}$; $\Delta z = 10^{-3}$. Из анализа полученных результатов следует, что в диапазоне $0 \le \eta \le 0{,}005$ отличие решения, найденного по формуле (3.43), от точного аналитического решения и от расчета численным методом не превышает $8\,\%$. С уменьшением координаты η расхождение возрастает.

Повышение точности зависит от числа слагаемых (3.57). При повышении степени аппроксимирующего полинома возрастает количество неизвестных коэффициентов $a_k(q_1)$. Для их определения используются дополнительные граничные характеристики. Методы их получения изложены в работах [46]. Общие формулы для них имеют вид

$$\frac{\partial^i \Theta(0,\eta)}{\partial z^i} - \frac{\partial^{i-1}\Theta(0,\eta)}{\partial z^{i-1}} - \frac{\partial^{i-2}\Theta(0,\eta)}{\partial z^{i-2}} - \ldots = 0 \qquad (i = 2,3,4,\ldots); \tag{3.68}$$

$$\frac{\partial^i \Theta(z,q_1)}{\partial z^i} = 0 \qquad (i = 2,3,4,\ldots). \tag{3.69}$$

Физическое содержание дополнительных граничных условий состоит в том, что их удовлетворение решением равносильно выполнению уравнения в точках границы и на фронте теплового возмущения (движущаяся граница). В работах [28, 29] доказано, что удовлетворение уравнения на границах приводит к его удовлетворению и внутри области, причем, с точностью, связанной с числом приближений (с числом используемых при определении неизвестных коэффициентов искомого решения дополнительных граничных условий). Отметим, что, ввиду наличия в дополнительных граничных условиях производных высокого порядка, матрицы систем алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов решения содержат большое число нулевых коэффициентов. Системы алгебраических уравнений в данном случае являются цепочными, и они могут быть решены практически при любом числе приближений.

При определении решения во втором приближении будем использовать пять членов ряда (3.57). Для определения неизвестных коэффициентов $a_k(q_1)$ подставим (3.57) в граничные условия (3.54), (3.55), а также в дополнительные граничные характеристики (3.59) (при $i=2$), (3.69) (при $i=2,3$). Из решения системы пяти алгебраических уравнений с пятью неизвестными найдем a_k, $(k=\overline{1,5})$. С их учетом формула (3.57) будет

$$\Theta(z,\eta)=1-\frac{z}{q_1(q_1+8)}\left[20-10z+\frac{(q_1+2)z^2}{q_1^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{5(3q_1+8)z^3}{q_1^3}-\frac{4(q_1+3)z^4}{q_1^4}\right] \qquad (3.70)$$

Подставляя (3.70) в (3.56), для функции $q_1(\eta)$ получаем дифференциальное уравнение, решение которого следует находить при граничном условии $q_1(0)=0$

$$q_1^3(552+150q_1-41q_1^2-5q_1^3)dq_1=-10(2016+252q_1)d\eta. \qquad (3.71)$$

Используя изложенный выше метод решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, находим

$$q_1(\eta)=5{,}5\eta^{0{,}41}. \qquad (3.72)$$

Положив $q_1(\eta^*)=1$, получаем $\eta^*=0{,}016$.

Формулы (3.70), (3.72) будут решениями задачи (3.52) – (3.55) во втором приближении. Из анализа расчетов по (3.70) в сравнении с точным аналитическим решением [89], а также с численным расчетом, следует, что для второго приближения решение уточняется (расхождение с численным расчетом уменьшается с 8 % – в первом приближении до 4% – во втором). Отметим, что решение численным методом и точное аналитическое решение в диапазоне числа $5\cdot10^{-3}\le\eta\le10^{-4}$ практически совпадают.

Для получения решения в третьем приближении ко всем использованным во втором приближении основным и дополнительным граничным условиям следует присоединить дополнительные граничные условия (3.68) (при $i=3$), (3.694) (при $i=4,5$). Подставляя (3.57), используя 8 членов ряда, в отмеченные условия, для коэффициентов $a_k(q_1)$, $(k=\overline{1,8})$ получаем цепочную систему восьми алгебраических линейных уравнений. Подставляя (3.57) (с учетом найденных значений коэффициентов) $a_k(q_1)$, $(k=\overline{1,8})$ в (3.54), для новой неизвестной функции $q_1(\eta)$ получаем нелинейное обыкновенное уравнение, которое необходимо интегрировать при граничном условии $q_1(0)=0$

$$q_1^2(-194040+42840q_1+12078q_1^2+1803q_1^3-802q_1^4-105q_1^5-10q_1^6)dq_1=$$
$$=-10(349272+49896q_1+5544q_1^2)d\eta. \qquad (3.73)$$

Интегрируя уравнение (3.73), используя изложенный выше метод, находим

$$q_1(\eta)=5{,}34\eta^{0{,}39}. \qquad (3.74)$$

Приняв в (3.74) $q_1(\eta^*)=1$, получаем $\eta^*=0{,}013$.

При использовании дополнительных краевых условий и метода решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, были найдены аналитические решения со 2 – го по 5 – ое, а также 10 – го и 15 – го приближений. Например, в 15 – ом приближении было использовано два основных и тридцать дополнительных граничных условий. Следовательно, решение (3.57) содержало 32 члена ряда.

На рисунке 3.9 приведены результаты расчетов продвижения фронта температурного возмущения $q_1(\eta)$ по переменной z в зависимости от осевой переменной η для различного количества приближений n. Их анализ приводит к заключению, что с увеличением приближений величина осевой координаты, для которой фронт возмущения $q_1(\eta)$ достигает центра трубы $z=1$, уменьшается и при $n\to\infty$ $\eta\to 0$. Данный результат соответствует гипотезе о бесконечной скорости перемещения теплоты, заложенной в параболическом уравнении теплопроводности.

Рассмотрим теперь вторую стадию процесса. Данная стадия характеризуется изменением температуры во всем объеме жидкости. Понятие термического слоя здесь не рассматривается, так как функция $q_1(\eta)$ достигает центра канала. Для получения решения во второй стадии введем в рассмотрение новую функцию – закон изменения температуры в центре канала по его длине $q_1(\eta)$.

Математическая постановка задачи имеет вид

$$(2z-z^2)\frac{\partial\Theta(z,\eta)}{\partial x}=\frac{\partial^2\Theta(z,\eta)}{\partial z^2}-\frac{1}{1-z}\frac{\partial\Theta(z,\eta)}{\partial z} \qquad (\eta>0;\quad 0<z<1); \qquad (3.75)$$

$$\Theta(z,0)=0; \qquad (3.76) \qquad \Theta(0,\eta)=1; \qquad (3.77) \qquad \frac{\partial\Theta(1,\eta)}{\partial z}=0. \qquad (3.78)$$

Введем новую искомую функцию

$$q_2(\eta)=\Theta(1,\eta), \qquad (3.79)$$

характеризующую изменение температуры по продольной координате на оси трубы $(z=1)$. Ввиду бесконечной скорости распространения теплоты диапазон её изменения будет включать всю область определения координаты η $(0<\eta<\infty)$ и весь диапазон температуры ($0\le\Theta\le 1$).

Решение задачи (3.75) – (3.78) определяется в виде

$$\Theta(z,\eta)=1-\sum_{k=1}^{m}b_k(q_2)z^k, \qquad (3.80)$$

где $b_k(q_2)$ – неизвестные коэффициенты.

Координатные функции вида (3.80) позволяют удовлетворить искомым решением условие (3.77) для всех m. При получении решения в первом приближении подставим (3.80), ограничиваясь двумя слагаемыми ряда, в (3.78), (3.79). Для неизвестных коэффициентов $b_k(q_2)$, $(k=1,2)$ получим систему двух алгебраических уравнений. Соотношение (3.80) с учетом значений этих коэффициентов $b_k(q_2)$ приводится к виду

$$\Theta(z,\eta)=1+(q_2-1)(2-z)z\,. \tag{3.81}$$

Потребуем, чтобы решение (3.81) удовлетворяло интегральному уравнению

$$\int_0^1(1-z)(2z-z^2)\,\frac{\partial\Theta(z,\eta)}{\partial\eta}dz=\int_0^1\left[(1-z)\frac{\partial^2\Theta(z,\eta)}{\partial z^2}-\frac{\partial\Theta(z,\eta)}{\partial z}\right]dz. \tag{3.82}$$

Подставляя (3.81) в (3.82) для неизвестной функции $q_2(\eta)$ будем иметь обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dq_2+12(q_2-1)d\eta=0\,. \tag{3.83}$$

Интегрируя (3.83), находим

$$q_2(\eta)=1+(\exp(-12(C-\eta)))/12\,, \tag{3.84}$$

где C – постоянная интегрирования.

Подставляя (3.84) в (3.81), будем иметь

$$\Theta(z,\eta)=1+[(2-z)z\exp(-12(C-\eta))]/12\,. \tag{3.85}$$

Для нахождения постоянной интегрирования используется условие (3.76). Составляя его невязку и, требуя выполнение её ортогональности к координатной функции z^k, находим

$$\int_0^1\Theta(z,0)zdz=0\,. \tag{3.86}$$

Подставляя (3.85) в (3.86), получаем

$$\int_0^1\left[1+\frac{C}{12}(2-z)z^2\right]dz=0\,. \tag{3.87}$$

Константа интегрирования $C=-28{,}8$ определяется из решения уравнения (3.87). Соотношение (3.85) после вычисления постоянной C принимает вид

$$\Theta(z,\eta)=1+[(2-z)\exp(-12(-28{,}8-\eta))]/12\,. \tag{3.88}$$

Соотношение (3.88) представляет решение задачи (3.75) – (3.78) в первом приближении.

Повышение точности связано с увеличением количества слагаемых ряда (3.80). Для определения неизвестных коэффициентов необходимо привлекать дополнительные условия. Для их нахождения в точке $z=0$ используется общая формула (3.53). Применительно к точке $z=1$ дополнительные условия имеют вид

$$\frac{\partial^2\Theta(1,\eta)}{\partial z^2}=\frac{1}{2}\frac{dq_2(\eta)}{\partial\eta}; \tag{3.89}$$

$$\frac{\partial^3\Theta(1,z)}{\partial z^3}=0; \tag{3.90}$$

$$\frac{8}{3}\frac{\partial^4\Theta(1,\eta)}{\partial z^4}=\frac{\partial^2 q_2}{\partial\eta^2}-4\frac{\partial q_2}{\partial\eta}; \tag{3.91}$$

$$\frac{\partial^5\Theta(1,\eta)}{\partial z^5}=0\,. \tag{3.92}$$

При получении решения во 2 – ом приближении подставим (3.80), ограничиваясь пятью членами ряда, в основное (3.78) и дополнительные (3.68) (при $i = 2$), (3.82), (3.89), (3.90) условия. Для неизвестных коэффициентов $b_k(q_2)$, $(k = \overline{1,5})$ получаем пять алгебраических уравнений. После их определения решение (3.80) будет

$$\Theta(z,\eta) = 1 + \frac{z}{3}\left[(q_2 - 1)(16z^4 + 55z^3 + 60z^2 + 10z + 20)/3\right] + \\ + \frac{dq_2}{d\eta}\left(-z^4 + \frac{13}{4}z^3 - z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}\right). \quad (3.93)$$

Подставляя (3.93) в (3.82), будем иметь уравнение вида

$$129\frac{d^2 q_2(\eta)}{d\eta^2} + 6484\frac{dq_2(\eta)}{d\eta} + 40320 q_2(\eta) = 40320. \quad (3.94)$$

Интегрируя (3.94), находим

$$q_2(\eta) = 1 + C_1 \exp(-7{,}26986\eta) + C_2 \exp(-42{,}99371\eta), \quad (3.95)$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования.

С целью определения постоянных интегрирования найдем невязку условия (3.76) и выполняется требование ее ортогональности к координатным функциям $\psi = z^k$.

$$\int_0^1 \Theta(z,0)\psi_j(z)dz = 0 \qquad (j = k = 1, 2). \quad (3.96)$$

Соотношение (3.96) после подстановки (3.93) (с учётом (3.95)) представляет систему двух алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования C_1 и C_2, из решения которой находим: $C_1 = -1{,}25$; $C_2 = 0{,}25$. Для определения констант интегрирования можно также использовать более простой и, практически эквивалентный по точности, способ, заключающийся в выполнении условий: $q_2(0) = 0$; $dq_2(0)/d\eta = 0$. Подставляя (3.95) в эти условия, относительно C_1 и C_2 получаем систему двух алгебраических уравнений. Из ее решения: $C_1 = -1{,}204$; $C_2 = 0{,}204$.

Подставляя значения C_1 и C_2 в (3.95), находим

$$q_2(\eta) = 1 - [-1{,}25\exp(-7{,}2699\eta) + 0{,}25\exp(-42{,}99\eta)]. \quad (3.97)$$

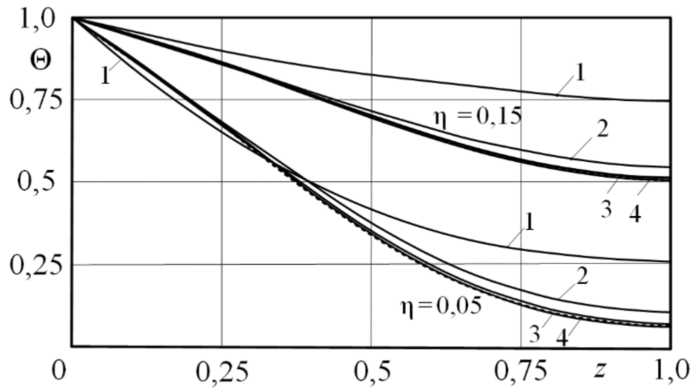


Рисунок 3.13. Распределение температуры. 1, 2, 3 – соответственно первое, второе и третье приближения; 4 – точное решение; – – – – метод конечных разностей

Соотношения (3.93), (3.97) будут решением задачи (3.75) – (3.78) для 2 – го приближения. Отметим, что находящиеся под знаком экспонент константы мало отличаются от собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля, получающихся при использовании точных аналитических методов [2, 89]. Их точные значения: $\lambda_1 = 7{,}3136$ и $\lambda_2 = 44{,}6095$.

Из анализа расчетов по соотношению (3.93) в сравнении с точным решением и с численным решением можно заключить, что в диапазоне $0{,}05 \le \eta < \infty$ расхождение не превышает 10% (рисунок 3.13).

Для решения задачи (3.75) – (3.78) в третьем приближении подставим (3.80), ограничиваясь восемью членами ряда в основное (3.78) и дополнительные (3.68) (при $i = 2$), (3.69) (при $i = 2, 3$), (3.89) – (3.92) граничные условия. Для неизвестных коэффициентов $a_k(q_2)$ $(k = \overline{1,8})$ получаем систему восьми алгебраических уравнений. Из решения системы алгебраических уравнений находим неизвестные коэффициенты

$$b_0 = 1; \quad b_1 = \frac{96}{55}l + \frac{159q_2'}{1540} + \frac{3q_2''}{6160};$$

$$b_2 = \frac{48}{55}l + \frac{159q_2'}{3080} + \frac{3q_2''}{12320};$$

$$b_3 = \frac{32}{55}l + \frac{53q_2'}{1540} + \frac{q_2''}{6160}; \quad b_4 = \frac{78}{11}l + \frac{1075q_2'}{1232} + \frac{29q_2''}{4928}; \quad b_5 = 0;$$

$$b_6 = \frac{824}{55}l + \frac{1693q_2'}{770} + \frac{61q_2''}{3080}; \quad b_7 = \frac{768}{55}l - \frac{813q_2'}{385} - \frac{67q_2''}{3080};$$

$$b_8 = \frac{213}{55}l + \frac{3673q_2'}{6160} + \frac{171q_2''}{24640}, \tag{3.98}$$

где $l = q_2 - 1$; q_2', q_2'' – первая и вторая производные от функции q_2 по η.

Подставляя (3.80) с учётом (3.98) в интегральное уравнение (3.82), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $q_2(\eta)$:

$$\frac{15649}{683020800}\frac{d^3q_2}{d\eta^3} + \frac{382469}{56918400}\frac{d^2q_2}{d\eta^2} + \frac{72767}{254100}\frac{dq_2}{d\eta} + \frac{96}{55}q_2 = \frac{96}{55}. \tag{3.99}$$

Его решение

$$q_2(\eta) = C_1\exp(\nu_1\eta) + C_2\exp(\nu_2\eta) + C_3\exp(\nu_3\eta) + 1, \tag{3.100}$$

где C_1, C_2, C_3– константы интегрирования; $\nu_1 = -7{,}3215$; $\nu_2 = -42{,}78975$; $\nu_3 = -243{,}174485$.

Константы интегрирования C_1, C_2, C_3 определяются из граничных условий $q_2(\eta_1) = 0$; $dq_2(\eta_1)/d\eta = 0$; $d^2q_2(\eta_1)/d\eta^2 = 0$.

После их определения формула (3.100) будет

$$q_2(\eta) = A_1\exp(\nu_1\eta) + A_2\exp(\nu_2\eta) + A_3\exp(\nu_3\eta) + 1, \tag{3.101}$$

где $A_1 = -1{,}2438$; $A_2 = 0{,}2505$; $A_3 = -0{,}0066$.

Соотношения (3.80) (при $n = 8$) и (3.101) являются решением задачи

(3.75) – (3.78) в третьем приближении.

В диссертационной работе выполнено сравнение результатов численных расчетов с расчетами по формуле (3.100). Отмечается, что в диапазоне $0{,}0137 \le \eta < \infty$ их расхождение не превышает 1,5% (рисунок 3.13). Число приближений, при необходимости, можно увеличить. Однако уже полученные результаты свидетельствуют о хорошей сходимости приближенных решений.

Характерной особенностью найденных выше аналитических решений является алгебраическая зависимость температур от поперечной пространственной переменной z в отличие от классических решений, где она выражается через тригонометрические или Бесселевы функции. Данное обстоятельство позволяет, в частности, получить формулу для построения изотерм и скоростей их движения. Построение изотерм будем выполнять, используя формулы первого приближения для первой и второй стадии процесса (3.58) и (3.81). Выражая из этих формул координату z, как функцию температуры $\Theta(z,\eta)$ и координаты η, получаем формулу для функции распределения изотерм

$$z(\Theta,\eta) = q_1(1+\sqrt{\Theta})\,; \tag{3.102}$$

$$z(\Theta,\eta) = \frac{q_2 + \sqrt{(q_2-\Theta)(q_2-1)} - 1}{q_2 - 1}\,. \tag{3.103}$$

Формулы (3.102) и (3.103) позволяют для любых $\Theta(z,\eta) = \mathrm{const}$ построить графики изотерм (см. рисунок 3.14).

Из анализа полученных результатов можно отметить, совпадение нулевой изотермы $\Theta = 0$ с кривой перемещения фронта возмущения, найденного по соотношению (3.67) (см. рисунок 3.9). Действительно, формула (3.102) при $\Theta(z,\eta) = 0$ приводится к формуле (3.67). Можно также отметить, что все изотермы исходят из точки $z = \eta = 0$ и они перпендикулярны оси η в центре канала ($z = 1$), что объясняется выполнением здесь граничного условия (3.63) (условие адиабатной стенки).

Дифференцируя уравнения (3.102), (3.103), описывающие распределение изотерм в теле, по переменной η, находятся формулы для определения скоростей движения изотерм

$$\vartheta(z,x) = q(\eta)[1-\sqrt{\Theta(z,\eta)}\,]; \tag{3.104}$$

$$\vartheta(z,x) = 0{,}5(q_2(\eta)-1)^{-3/2}[q_2(\eta)-\Theta(z,\eta)][\Theta(z,\eta)-1]\frac{dq_2(\eta)}{d\eta}. \tag{3.105}$$

Расчеты по соотношениям (3.104), (3.105) даны на рисунке 3.15, из анализа которых следует, что при $z \to 0$ и $\eta \to 0$ скорости изотерм устремляются к бесконечным значениям. Данный факт объясняется выполнением в этой точке граничного условия первого рода (3.53) (тепловой удар, реализуемый в математической модели лишь при бесконечно большой величине теплового потока). Бесконечные значения скоростей движения изотрем отмечаются также и при приближении к точке $z = 1$, что объясняется выполнением здесь граничного условия отсутствия теплообмена.

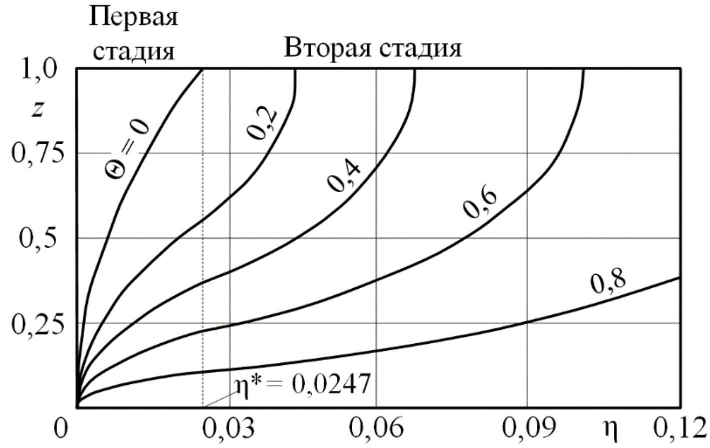


Рисунок 3.14. Распределение изотерм $\Theta(z,\eta)=\mathrm{const}$ по координате z в зависимости от величины координаты η

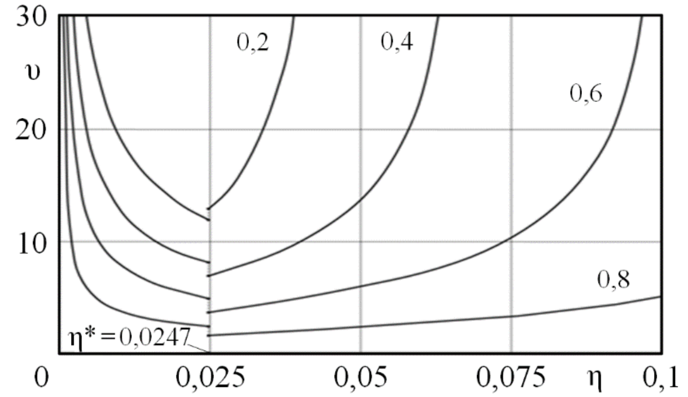


Рисунок 3.15. Графики скоростей движения изотерм

Вследствие невысокой точности решений первого приближения вида (3.58), (3.61) изотермы определяемые по соотношениям (3.102), (3.103), имеют незначительный излом в точке сопряжения кривых 1 – ой и 2 – ой стадий процесса, т. Е. в точке $\eta=\eta^*=0{,}0247$ (рисунок 3.14). Поэтому, в этой точке наблюдается некоторый скачок в распределении скоростей движения изотерм (рисунок 3.15). Отметим, что уже во втором приближении как скачок в скоростях, так и излом в изотермах сглаживаются.

Таким образом, путем представления сложной нелинейной задачи нестационарного теплообмена в виде трех независимых задач получены высокой точности их приближенные аналитические решения. Следует однако отметить, что с увеличением числа приближений в связи с усложнением дифференциальных уравнений для дополнительных искомых функций $q_1(\eta)$ и $q_2(\eta)$, трудности получения решений возрастают. Применительно ко второй стадии процесса возрастает также и порядок уравнения, что усложняет получение его аналитического решения. Однако все эти трудности не являются принципиальными, так как они приводят лишь к возрастанию объёма вычислительной работы, выполняемой на компьютерах.

3.3. Теплообмен в стабилизированном потоке несжимаемой жидкости с учетом диссипации энергии

Используя дополнительную искомую функцию и дополнительные краевые условия, в диссертации получено также аналитическое решение задачи теплообмена для движущейся жидкости с учётом диссипации теплоты при меняющемся по продольной переменной граничном условии 1 – го рода. Применение дополнительной искомой функции, определяющей изменение температуры по продольной координате в центре канала, основывается на бесконечной скорости перемещения теплоты, заложенной в параболическом уравнении теплообмена, согласно которой температура в центре канала начинает изменяться сразу после приложения граничного условия на его поверхности.

Рассмотрим применение разработанного метода для решения квазистационарной задачи теплообмена с учетом диссипации теплоты при ламинарном течении жидкости в круглой трубе в случае, когда температура стенки является линейной функцией продольной переменной (см. рисунок 3.16).

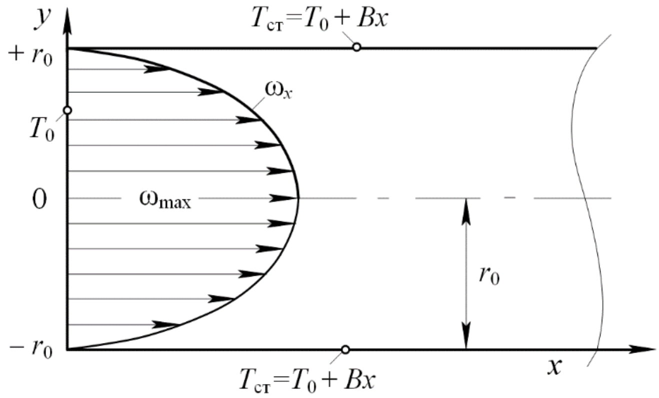


Рисунок 3.16. Схема течения жидкости в круглой трубе

Введём допущения: профиль скорости неизменен по длине канала; физические свойства жидкости постоянны; внутренние источники теплоты, не связанные с диссипацией энергии, отсутствуют [89, 116, 117].

$$\omega_x \frac{\partial T(y,x)}{\partial x} = \frac{a}{y}\frac{\partial T(y,x)}{\partial y} + a\frac{\partial^2 T(y,x)}{\partial y^2} + \frac{\mu}{c\rho}\left(\frac{d\omega_x}{d\xi}\right)^2 \quad (x>0;\ 0<y<r_0); \qquad (3.106)$$

$$T(y,0)=T_0; \quad (3.107) \qquad \frac{\partial T(0,x)}{\partial y}=0; \quad (3.108) \qquad T(r_0,x)=T_0+Bx, \quad (3.109)$$

где T – температура; x – продольная координата; y – поперечная координата; a – температуропроводность жидкости; μ – коэффициент динамической вязкости; c – теплоёмкость; ρ – плотность; $\omega_x = 2\omega_{ср}(1-y^2/r_0^2)$ – профиль скорости y; r_0 – радиус трубы; T_0 – температура жидкости на входе в участок трубы со стабилизированным профилем скорости; $B=dT/dx$ – коэффициент, характеризующий интенсивность изменения температуры по длине теплообменного участка трубы; $\omega_{ср}=0{,}5\omega_{max}$ – средняя скорость; ω_{max} – максимальная скорость, определяемая по формуле $\omega_{max}=\Delta p r_0^2/(8\mu l)$, где Δp – перепад давления по длине участка трубы; l – длина трубы.

Введём следующие обозначения:

$$\Theta = \frac{T-T_0}{T_0}; \qquad \xi=\frac{y}{r_0}; \qquad \eta=\frac{xa}{2\omega_{ср} r_0^2}, \qquad (3.110)$$

где Θ – безразмерная температура; ξ, η – безразмерные поперечная и продольные координаты.

Введение безразмерных переменных и параметров позволяет записать исходную краевую задачу (3.106) – (3.109) в безразмерном (параметрическом) виде

$$\xi(1-\xi^2)\frac{\partial\Theta(\xi,\eta)}{\partial\eta}=\frac{\partial\Theta(\xi,\eta)}{\partial\xi}+\xi\frac{\partial^2\Theta(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}+D\xi^3 \qquad (3.111)$$

$$(\eta>0;\ \ 0<\xi<1);$$

$$\Theta(\xi,0)=0; \quad (3.112) \qquad \frac{\partial\Theta(0,\eta)}{\partial\xi}=0; \quad (3.113) \qquad \Theta(1,\eta)=A\eta. \quad (3.114)$$

где A, D _ безразмерные комплексы, имеющие вид: $A=2B\omega_{\text{ср}}r_0^2/(aT_0)$; $D=16\mu\omega_{\text{ср}}^2/(\lambda T_0)$.

Для упрощения получения решения задачи (3.111) – (3.114) введём дополнительную искомую функцию

$$q(\eta)=\Theta(0,\eta), \qquad (3.115)$$

характеризующую изменение температуры по продольной переменной на оси трубы (в точке $\xi=0$). Вследствие бесконечной скорости перемещения теплоты, заложенной в уравнении (3.111), температура на оси трубы будет изменяться сразу после установления граничного условия на её внутренней поверхности. Следовательно, диапазон изменения функции $q(\eta)$ будет составлять весь диапазон изменения пространственной переменной η. Так как температура на оси трубы является искомой величиной краевой задачи (3.111) – (3.114), то введение функции $q(\eta)$ никоим образом этой задачи не изменяет, а является лишь дополнительным средством, позволяющим упростить получение её приближенного аналитического решения.

Решение задачи (3.111) – (3.114) будем искать в виде

$$\Theta(\xi,\eta)=A\left[\eta-\frac{1}{2}(1-\xi^2)+\sum_{k=1}^{n}b_k(q)\varphi_k(\xi)\right], \qquad (3.116)$$

где $b_k(q)$, $(k=\overline{1,n})$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(\xi)=1-\xi^{2k}$ – координатные функции.

Вследствие особого вида системы координатных функций соотношение (3.116) удовлетворяет соотношение (3.113), (3.114). Неизвестные коэффициенты $b_k(q)$, $(k=\overline{1,n})$ находятся из соотношения (3.115) и дополнительных условий, определяемых в таком виде, чтобы их выполнение получаемым решением в точках границы $\xi=0$ и $\xi=1$ было равносильно выполнению в них уравнения (3.111). Методы решения, связанные с выполнением уравнения в точках границы рассматривались также в работах [46, 98, 99].

В точке $\xi=0$ уравнение (3.111) приводится к граничному условию (3.113). Следовательно, выполнение этого граничного условия решением

(3.116) эквивалентно выполнению в этой точке уравнения (3.111).

Для нахождения дополнительного граничного условия в точке $\xi = 1$ продифференцируем условие (3.114) по переменной $\eta : \partial\Theta(1,\eta)/\partial\eta = A$. Подставляя полученное соотношение в уравнение (3.111), получаем следующее дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial\Theta(1,\eta)}{\partial\xi} + \frac{\partial^2\Theta(1,\eta)}{\partial\xi^2} + D = 0. \qquad (3.117)$$

Применительно к точке $\xi = 0$ необходимо также использовать дополнительные граничные условия, полученные на основе соотношения (3.115). Продифференцируем это соотношение по переменной x

$$\frac{dq(\eta)}{d\eta} = \frac{\partial\Theta(0,\eta)}{\partial\eta}. \qquad (3.118)$$

Соотношение (3.118), с учётом уравнения (3.111) приводится к виду

$$\frac{dq(x)}{dx} = \frac{1}{y}\frac{\partial\Theta(0,x)}{\partial y} + \frac{\partial^2\Theta(0,x)}{\partial x^2}. \qquad (3.119)$$

Раскрывая неопределенность в первом члене правой части соотношения (3.119) по правилу Лопиталя, получаем следующее дополнительное условие

$$\frac{dq(\eta)}{d\eta} = 2\frac{\partial^2\Theta(0,\eta)}{\partial\xi^2}. \qquad (3.120)$$

Продифференцируем (3.120) по переменной η

$$\frac{d^2q(\eta)}{d\eta^2} = 2\frac{\partial}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\Theta(0,\eta)}{\partial\eta}\right). \qquad (3.121)$$

После некоторых преобразований и, учитывая условия (3.118), (3.120), выражение (3.121) приводится к следующему виду:

$$\frac{d^2q(\eta)}{d\eta^2} = 4\frac{\partial^4\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^4}. \qquad (3.122)$$

Аналогично, можно найти и последующие дополнительные условия.

Для определения решения в 1 – ом приближении подставим (3.116), ограничиваясь одним членом ряда, в соотношение (3.115). Для неизвестного коэффициента $b_1(q)$ будем иметь алгебраическое линейное уравнение. Из его решения, находим $b_1(q) = q(\eta)/A - \eta + 1/2$. Соотношение (3.116) с учётом полученного значения $b_1(q)$ будет

$$\Theta(\xi,\eta) = A\eta - [A\eta - q(\eta)](1-\xi^2). \qquad (3.123)$$

Потребуем, чтобы (3.123) удовлетворяло интегральному уравнению

$$\int_0^1 \xi(1-\xi^2)\frac{\partial\Theta(\xi,\eta)}{\partial\eta}d\xi = \int_0^1\left(\frac{\partial\Theta(\xi,\eta)}{\partial\xi} + \xi\frac{\partial^2\Theta(\xi,\eta)}{\partial\xi^2} + D\xi^3\right)d\xi. \qquad (3.124)$$

Подставляя (3.123) в (3.124), получаем

$$\frac{dq(\eta)}{d\eta} + 12q(\eta) - (12\eta - 0{,}5)A - 1{,}5D = 0. \qquad (3.125)$$

Интегрируя (3.125), будем иметь

$$q(\eta) = A\eta + 0{,}125(D - A) + C\exp(-12\eta), \tag{3.126}$$

где C – постоянная интегрирования.

Подставляя (3.126) в (3.123), получаем

$$\Theta(\xi,\eta) = A\eta - (1-\xi^2)\left[\frac{1}{8}(A - D) - Ce^{-12\eta}\right]. \tag{3.127}$$

Для определения константы интегрирования найдем невязку условия (3.112) и потребуем выполнения ортогональности невязки к координатной функции $\varphi_1(\xi) = 1 - \xi^2$

$$\int_0^1 \Theta(\xi,0)(1-\xi^2)d\xi = 0. \tag{3.128}$$

Подставляя (3.127) в (3.128), для постоянной интегрирования, получаем алгебраическое уравнение. Из его решения определяем

$$C = 0{,}125(A - D). \tag{3.129}$$

Соотношение (3.127) с учётом (3.129) является решением задачи (3.111) – (3.114) в 1 – ом приближении. Расчёты по формуле (3.127) в сравнении с решением задачи (3.111) – (3.114) численным методом (метод конечных разностей) даны на рисунке 3.17. Их анализ приводит к заключению, что расхождение результатов в диапазоне $0{,}1 \le \eta \le 1{,}0$ не превышает 6 %.

С целью проверки аналитического решения задачи (3.111) – (3.114), из – за отсутствия точного решения этой задачи было найдено её численное решение с использованием метода прогонки. При этом в рассматриваемой области была введена пространственная сетка с шагами $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ по переменным η и ξ соответственно:

$$\xi_i = i\Delta\xi, \quad i = \overline{0, I}; \quad \eta_i = j\Delta\eta, \quad j = \overline{0, J}.$$

где I, J – количество шагов по переменным ξ и η. Использовалась пространственная сетка с шагами $\Delta\xi = 0{,}02$ и $\Delta\eta = 10^{-5}$.

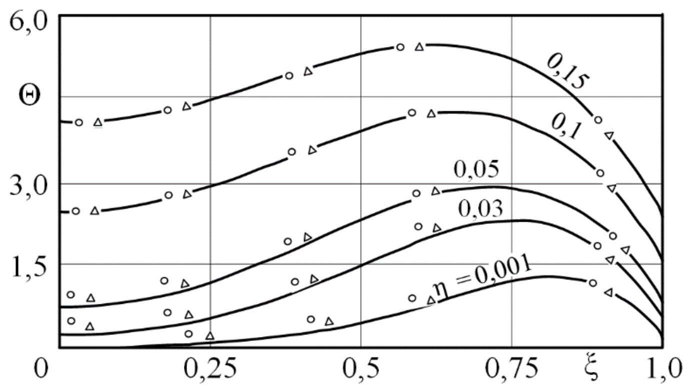


Рисунок 3.17. Распределение температуры. ○ – по формуле (3.130); △ – по формуле (3.135); ——— – численное решение; $A = 15$; $D = 100$

На основе явной схемы аппроксимации дифференциального уравнения, задача (3.137) – (3.140) представляется в виде

$$\xi_i(1-\xi_i^2)\frac{\Theta_i^{j+1} - \Theta_i^j}{\Delta\eta} = \frac{\Theta_{i+1}^j - \Theta_i^j}{\Delta\xi} + \xi_i\frac{\Theta_{i+1}^j - 2\Theta_i^j + \Theta_{i-1}^j}{\Delta\xi} + D\xi_i^3;$$

$$\Theta_i^0 = 0; \qquad \frac{\Theta_1^j - \Theta_0^j}{\Delta\xi} = 0; \qquad \Theta_I^j = A\eta_j.$$

Повышение точности связано с увеличением количества членов ряда (3.116). При получении решения во 2 – ом приближении подставим (3.116) ограничиваясь двумя членами ряда, в соотношение (3.141) и дополнительное условие (3.120). Для неизвестных коэффициентов $b_k(q)$, $(k=1,2)$ получаем два алгебраических уравнения. Из их решения находим: $b_1(q) = 0{,}5 - q'(\eta)/4A$; $b_2(q) = (0{,}25q'(\eta) + q(\eta) - A\eta)/A$.

Решение (3.116) с учётом полученных значений коэффициентов $b_k(q)$, $(k=1,2)$ принимает вид

$$\Theta(\xi,\eta) = A\eta - \frac{A}{2}(1-\xi^2) + \frac{1}{4}(2A - q')(1-\xi^2) + $$
$$+ \frac{1}{4}(q' + 4(q - A\eta))(1-\xi^4), \qquad (3.130)$$

где $q' = dq(\eta)/d\eta$. В дальнейшем будем использовать также обозначение $q'' = d^2q(\eta)/d\eta^2$.

Подставляя (3.130) в интеграл теплового баланса (3.124), получаем

$$\frac{1}{96}q'' + \frac{17}{24}q' + 4q + A\left(\frac{1}{24} - 4\eta\right) - \frac{D}{4} = 0. \qquad (3.131)$$

Интегрируя (3.131), получаем

$$q(\eta) = C_1 \exp((-2(17+\sqrt{193})\eta) + C_2 \exp(2(-17+\sqrt{193})\eta) + $$
$$+ A(\eta - 3/16) + D/16, \qquad (3.132)$$

где C_1, C_2– постоянные интегрирования, которые определяются из граничного условия (3.112). Составляя его невязку и, требуя выполнения её ортогональности к координатным функциям $\varphi_j(\xi)$, $(j=1,\ 2)$, получаем

$$\int_0^1 \Theta(\xi,0)\varphi_j(\xi)d\xi = 0 \qquad (j=1,\ 2). \qquad (3.133)$$

Подставляя (3.130) (с учётом (3.132)) в (3.133), относительно постоянных интегрирования C_1 и C_2 получим два алгебраических уравнения

$$\left.\begin{aligned} &-(\sqrt{193}+1)C_1 + (\sqrt{193}-1)C_2 - 105A/42 + D = 0;\\ &\frac{16}{315}\sqrt{193}(C_2 - C_1) - \frac{16}{105}(C_2 - C_1) - \frac{34}{315}A + \frac{2}{45}D = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (3.134)$$

Из решения полученной системы уравнений найдем: $C_1 = 0{,}0069D - 0{,}0029A$; $C_1 = 0{,}1904A - 0{,}069D$.

Решение (3.130) с учетом (3.132) и полученных значений постоянных интегрирования является решением задачи (3.111) – (3.114) во 2 – ом приближении. Из анализа расчётов по решению (3.130) в сравнении с численным решением следует, что в диапазоне $0{,}01 \le \eta \le 1{,}0$ их расхождение не выше 4 % (рисунки 3.17, 3.18).

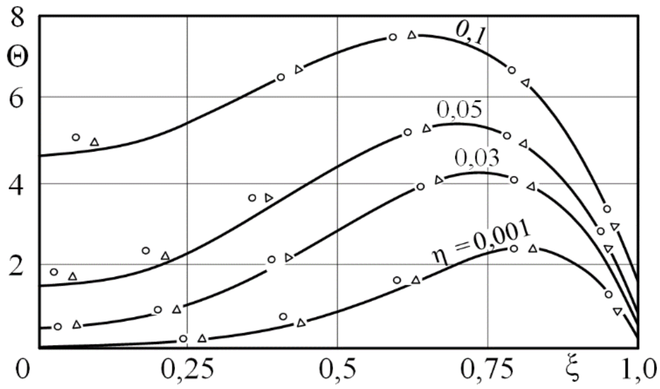


Рисунок 3.18. Распределение температуры. ○ – по формуле (3.130); △ – по формуле (3.135); ——– численное решение; $A = 15$; $D = 200$

Для решения задачи (3.111) – (3.114) в 3 – ем приближении подставим (3.126), ограничиваясь тремя членами ряда в соотношение (3.115) и дополнительные условия (3.117), (3.120). Для коэффициентов $b_k(q)$, $(k = 1,\ 2, 3)$ получаем три алгебраических уравнения. После определения $b_k(q)$ формула (3.126) будет иметь вид

$$\Theta(\xi,\eta) = A\eta - \frac{q'}{4}(1-\xi^2) - \frac{D+36(A\eta-q)-8q'}{20}(1-\xi^4) + $$
$$+\frac{D+16(a\eta-q)-3q'}{20}(1-\xi^6). \qquad (3.135)$$

Подставляя (3.135) в (3.124), находим

$$\frac{19}{480}q'' + \frac{79}{40}q' + 12q + \left(\frac{11}{40} - 12\eta\right)A - \frac{3}{4}D = 0. \qquad (3.136)$$

Интегрируя (3.136), имеем

$$q(\eta) = C_1 e^{\mu_1\eta} + C_2 e^{\mu_2\eta} + \left(\eta - \frac{3}{16}\right)A + \frac{D}{16}, \qquad (3.137)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования; $\mu_{1,2} = \pm 6(\sqrt{3201} \mp 79)/19$.

Для определения C_1 и C_2 найдём невязку условия (3.112) и потребуем выполнения её ортогональности к функциям $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$

$$\int_0^1 \Theta(\xi,0)\,\varphi_j(\xi)d\xi = 0 \qquad (j = 1,\ 2). \qquad (3.138)$$

Подставляя (3.135) с учётом (3.137) в (3.138) и, определяя интегралы, относительно C_1 и C_2 будем иметь два алгебраических уравнения. Из их решения находим: $C_1 = -0{,}01A + 0{,}017D$; $C_2 = 0{,}196A - 0{,}0769D$.

Формула (3.135) с учётом (3.137) и полученных значений постоянных интегрирования является решением задачи (3.111) – (3.114) в 3 – ем приближении. Из анализа расчётов по решению (3.135) в сравнении с численным решением следует, что в диапазоне $0{,}01 \le \eta \le 1{,}0$ их расхождение не превышает 2% (рисунки 3.17, 3.18). Можно отметить, что с увеличением величины D происходит возрастание температуры и увеличение температурных градиентов внутри движущейся жидкости, что объясняется увеличением диссипативного слагаемого в уравнении (3.111), принимающего наибольшие значения в зонах максимального изменения скорости (см.

рисунок 3.16). На рисунке 3.19 даны результаты решения задачи (3.111) – (3.114) для случая, когда $D = 0$, а граничные условия заменены на следующие:

$$\Theta(\xi,0) = 1; \quad \Theta(1,\eta) = 0. \tag{3.139}$$

Решение в данном случае принималось в виде

$$\Theta(\xi,\eta) = \sum_{k=1}^{n} b_k(q)(1-\xi^{2k}). \tag{3.140}$$

Сравнение результатов расчётов по формуле (3.140) в третьем приближении $(n = 3)$ с решением данной задачи по методу Л.В. Канторовича в шестом приближении, а также с точным аналитическим решением [89], показало, что в диапазоне $0{,}05 \le x \le \infty$ их расхождение не превышает 2,5 %.

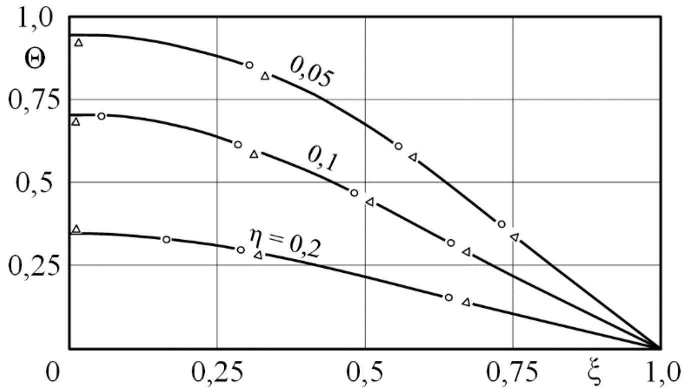


Рисунок 3.19. Распределение температуры. ○ – метод Л.В. Канторовича (шестое приближение]); △ – по формуле (3.140) при $n = 3$; ——— – точное решение

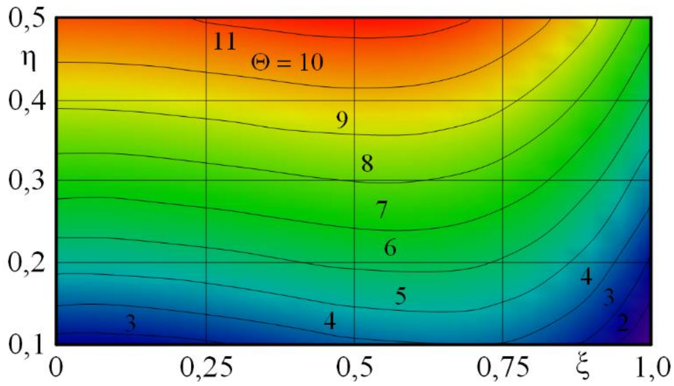


Рисунок 3.20. Распределение изотерм при $A = 15$; $D = 100$. Расчёт по формуле (3.130)

Ввиду простоты аналитических решений, имеется возможность исследования теплообмена в полях изотермических линий с определением скоростей их движения. И, в частности, на рисунке 3.20 приведены графики распределения изотерм $\Theta(\xi,\eta) = \text{const}$ в зависимости от величин поперечной и продольной координат. Изотермы определялись из решения (3.130) (второе приближение) при $A = 15$, $D = 100$. Их анализ позволяет заключить, что изотермы возникая на стенке трубопровода $(\xi = 1)$, движутся по направлению к центру канала $(\xi = 0)$ при этом изотермические линии перпендикулярны осевой линии канала, что свидетельствует о бесконечно большой скорости их перемещения при приближении к оси канала.

3.4. Разработка и исследование теплообмена при ламинарном течении жидкости в плоскопараллельном канале

Для математического описания процессов тепломассопереноса в движущихся средах используются классические закономерности механики сплошных сред: уравнения Навье – Стокса, уравнение неразрывности, уравнение энергии [89]. Дополненные зависимостями физических свойств жидкости от температуры и давления, эти уравнения образуют замкнутую систему уравнений, описывающую конвективный теплообмен и динамику жидкости. Использование точных аналитических методов решения указанных задач возможно лишь в некоторых простейших случаях. Например, при решении линейных краевых задач для плоских тел и тел с центральной осевой симметрией применяются методы разделения переменных (Фурье), метод функций Грина [4, 32 – 34]; методы интегральных преобразований с конечными и бесконечными пределами интегрирования (преобразования Ханкеля, Лапласа, Лежандра и др.) [32 – 34]. Такие решения, как правило, выражаются сложными аналитическими зависимостями, бесконечными рядами, содержащими специальные функции, что существенно ограничивает их практическое использование.

В настоящее время широкое распространение получили численные методы исследования процессов тепломассопереноса в потоках жидкостей и газов. Современные программные продукты позволяют в автоматическом режиме выполнять построение расчетных сеток, решать систем линейных уравнений, предлагают широкий набор инструментов для анализа полученных результатов. Однако, аналитические решения, обладают некоторыми существенными преимуществами в сравнении с численными. В частности, решения, полученные в аналитическом виде, позволяют выполнять параметрический анализ исследуемой системы, параметрическую идентификацию, настройку и программирование измерительных устройств, планирование управляющих воздействий в производственных процессах и др. В связи с этим, развитие получили приближенные аналитические методы математического моделирования процессов переноса в движущихся жидкостях.

В диссертации приведены результаты разработки приближенного аналитического метода решения задач теплообмена, основанного на введении новой искомой функции – плотности теплового потока на поверхности. В качестве конкретного примера использования данного метода рассмотрим задачу теплообмена в стабилизированном потоке несжимаемой жидкости, движущейся в плоском канале шириной h (см. рис. 3.21).

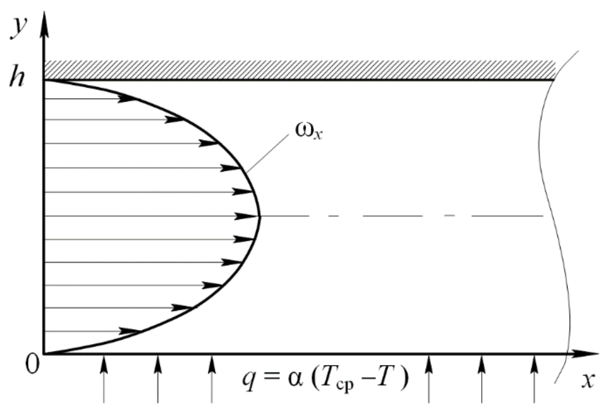


Рисунок 3.21. Схема теплообмена

Для вывода дифференциального уравнения, описывающего данный процесс, примем следующие допущения [89]: 1) течение стационарное, стабилизированное; 2) жидкость несжимаема; 3) теплофизические свойства постоянны; 4) режим течения жидкости ламинарный; 5) внутренние источники теплоты, а также диссипация энергии не учитываются. При указанных допущениях процесс нестационарного теплопереноса описывается уравнениями Навье – Стокса совместно с уравнением энергии и неразрывности.

Известно, что при постоянных физических свойствах жидкости процесс теплообмена не оказывает никакого влияния на течение жидкости. В этом случае жидкость движется так, как если бы течение было изотермическим.

Введем систему координат так, как показано на рисунке 3.21. В данном случае, уравнение движения будет

$$\frac{d^2\omega_x}{dy^2} = -\frac{\Delta p}{\mu l},$$

где x, y – соответственно продольная и поперечная пространственные координаты; ω_x – проекция вектора скорости на ось Ox; $\Delta p / l = const$ – падение давления на участке канала длиной l; μ – динамическая вязкость.

Учитывая, что скорость потока на поверхности канала равна нулю $(\omega_x(h) = \omega_x(0) = 0),$ из решения уравнения движения получим известный закон распределения скорости в плоском канале

$$\omega_x(y) = \frac{\Delta p h^2}{2\mu l}\left[\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right].$$

Найдем также среднюю скорость потока, определяемую по формуле

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{Q}{hB} = \frac{\int\limits_0^h w_x(y) B dy}{hB} = \frac{\Delta p h^2}{12\mu l},$$

где Q – объемный расход; B – ширина канала.

С учетом найденного профиля скорости ω_x и средней скорости $\omega_{\text{ср}}$ уравнение энергии будет

$$6\omega_{\text{ср}}\left[\frac{y}{h} - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right]\frac{\partial T(y,x)}{\partial x} = a\frac{\partial^2 T(y,x)}{\partial y^2}. \qquad (3.141)$$

Рассмотрим задачу о теплообмене в плоском канале для случая, когда температура на входе в канал равна T_0, одна из его поверхностей теплоизолирована, а на другой – задано граничное условие третьего рода. Решение уравнения (3.141) будем отыскивать в области $0 < y < 1;\ x > 0.$

Краевые условия к уравнению (3.141) формулируются в виде (см. рисунок 3.21)

$$T(y,0)=T_0;\qquad \frac{\partial T(h,x)}{\partial y}=0;\qquad \frac{\partial T(0,x)}{\partial y}=\alpha[T_{\text{ср}}-T(0,x)],\tag{3.142}$$

где α – коэффициент теплоотдачи; $T_{\text{ср}}$ – температура среды.

Задача (3.141), (3.142) может быть представлена в безразмерном виде. Для этого введем следующие безразмерные параметры:

$$\Theta=\frac{T-T_{\text{ср}}}{T_0-T_{\text{ср}}};\quad \xi=\frac{y}{h};\quad \eta=\frac{x}{\text{Pe}h};\quad \text{Pe}=\frac{\omega_{\text{ср}}h}{a};\quad \text{Bi}=\frac{\alpha h}{\lambda}$$

где Θ – безразмерная температура; ξ,η – безразмерные поперечная и продольная координаты соответственно; Pe – число Пекле; Bi – число Био. Задача (3.141), (3.142) с учетом введенных обозначений будет

$$6(\xi-\xi^2)\frac{\partial\Theta(\xi,\eta)}{\partial\eta}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\eta)}{\partial\xi^2};\tag{3.143}$$

$$\Theta(\xi,0)=1;\tag{3.144}$$

$$\frac{\partial\Theta(1,\eta)}{\partial\xi}=0;\tag{3.145}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\eta)}{\partial\xi}=\text{Bi}\,\Theta(0,\eta),\tag{3.146}$$

где $\text{Bi}=\alpha h/\lambda$ – критерий Био.

Согласно разработанному методу введем в рассмотрение новую искомую функцию координаты

$$\varphi(\eta)=\frac{\partial\Theta(0,\eta)}{\partial\xi}.\tag{3.147}$$

Возвращаясь к размерным величинам, выражение (3.147) может быть записано в виде

$$\varphi(x)=\frac{h}{T_0-T_{\text{ср}}}\frac{\partial T(0,x)}{\partial y}.\tag{3.148}$$

Плотность теплового потока по закону Фурье на поверхности канала определяется выражением

$$q(x)=-\lambda\frac{\partial T(h,x)}{\partial y}.\tag{3.149}$$

Выражение (3.148) с учетом (3.149) будет

$$\varphi(x)=\frac{h}{\lambda(T_{\text{ср}}-T_0)}q(x)=k\,q(x),\tag{3.150}$$

где $k=\text{const}$ – некоторый коэффициент, определяемый масштабом системы. Таким образом, отличием данного метода от известных, является использование в качестве новой искомой функции закона изменения плотности теплового потока в точке приложения граничного условия третьего рода в произведении с константой. Использование соотношения (3.34), как будет показано далее, позволяет уже в первом приближении с высокой точностью определять плотность теплового потока на поверхности тела.

Решение задачи (3.143) – (3.146) отыскивается в виде полинома n – ной степени

$$\Theta(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n} b_i(\eta)\,\xi^{i-1}\ , \tag{3.151}$$

где n – число членов ряда (3.151); $b_i(\text{Fo})$ – неизвестные коэффициенты, зависящие от безразмерной координаты.

Для получения решения задачи (3.143) – (3.146) в первом приближении ограничимся тремя слагаемыми в выражении (3.151). Для определения неизвестных коэффициентов $b_i(\eta)$ подставим выражение (3.151) в граничные условия (3.145) и (3.146), а также в дополнительное условие (3.147). В результате подстановки получим систему трех алгебраических уравнений

$$\begin{cases} b_2+2b_3=0; \\ b_2-\text{Bi}b_1=0; \\ b_2-\varphi(\eta)=0. \end{cases}$$

Из решения системы находим

$$b_1(\eta)=\frac{\varphi(\eta)}{2\text{Bi}};\qquad b_2(\eta)=\varphi(\eta);\qquad b_3(\eta)=-\frac{\varphi(\eta)}{2}.$$

Выражение (3.151) с учетом найденных коэффициентов будет

$$\Theta(\xi,\eta)=f_1(\xi)\varphi(\eta), \tag{3.152}$$

где $f_1(\xi)=\xi-\dfrac{1}{\text{Bi}}-\dfrac{\xi^2}{2}$ – координатная функция. Полученное соотношение удовлетворяет граничным условиям (3.145) и (3.146), а также в дополнительному условию (3.147) при любых значениях функции $\varphi(\eta)$.

Для приближенного удовлетворения исходного дифференциального уравнение (3.143), проинтегрируем его в пределах изменения пространственной координаты, т.е. составим интеграл теплового баланса

$$\int_0^1\left(6(\xi-\xi^2)\frac{\partial\Theta(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right)d\xi=\int_0^1\left(\frac{\partial^2\Theta(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}\right)d\xi. \tag{3.153}$$

Вычисляя интеграл, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta}\left(\frac{1}{\text{Bi}}+\frac{7}{20}\right)+\varphi(\eta)\ =0,$$

из решения, которого находим

$$\varphi(\eta)=C_1e^{-\frac{\eta}{K}}, \tag{3.154}$$

где C_1 – константа интегрирования; $K=\dfrac{1}{\text{Bi}}+\dfrac{7}{20}.$

Подставляя (3.154) в (3.152), получаем

$$\Theta(\eta,\xi)=f_1(\xi)\,C_1e^{-\frac{\eta}{K}}. \tag{3.155}$$

Для выполнения условия (3.144) составим его невязку и потребуем ортогональности невязки к координатной функции $f_1(\xi)$

$$\int_0^1 [\Theta(\xi, 0) - 1]\, f_1(\xi)\, d\xi = (\mathrm{Bi} + 3) C_1 + 3\mathrm{Bi} = 0\,. \tag{3.156}$$

Из решения уравнения (3.156) определим константу интегрирования $C_1 = 3\mathrm{Bi}/(\mathrm{Bi} + 3)$. Выражение (3.155) с учетом найденного значения представляет решение задачи (3.143) – (3.146) в первом приближении и может быть записано в виде

$$\Theta(\xi, \eta) = \frac{3\mathrm{Bi}}{\mathrm{Bi} + 3}\left(\xi - \frac{1}{\mathrm{Bi}} - \frac{\xi^2}{2}\right) e^{-\frac{\eta}{\kappa}}\,. \tag{3.157}$$

Результаты расчётов температуры по формуле (3.157) представлены на рисунках 3.22, 3.23.

Невысокая точность полученного в первом приближении решения обусловлена недостаточным числом членов ряда (3.151). Во втором приближении будем использовать шесть слагаемых в выражении (3.151). При определении неизвестных коэффициентов $b_i(\eta)$ помимо основных граничных условий будут использоваться дополнительные граничные характеристики, физический смысл которых состоит в выполнении исходного дифференциального уравнения (3.143) и выражений, полученных после его дифференцирования в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$. В работе [99] показано, что выполнение уравнения на границах с увеличением числа приближений ведет к его выполнению и внутри исследуемой области.

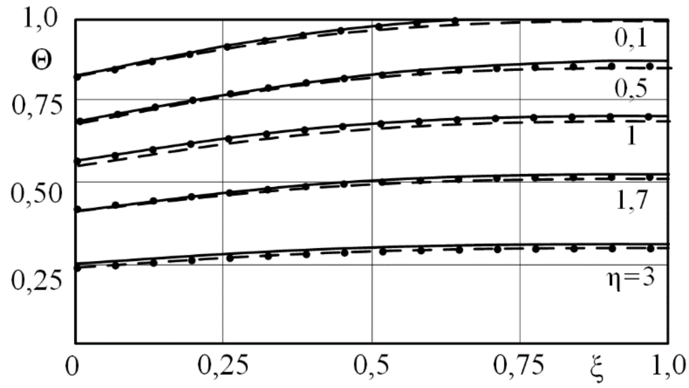


Рисунок 3.22. Распределение безразмерной температуры в канале по координате. • • • – 1 приближение; —— – 2 приближение; – – – – численное решение; Bi = 0,5

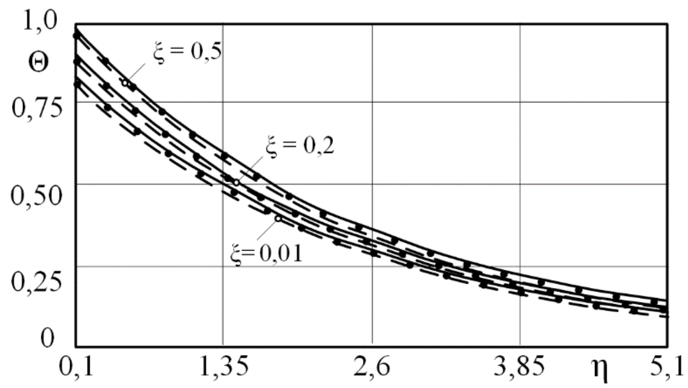


Рисунок 3.23. Изменение безразмерной температуры по координате. • • • – 1 приближение; —— – 2 приближение; – – – – численное решение; Bi = 0,5

Для получения решения задачи (3.143) – (3.146) во втором приближении будем использовать шесть членов ряда (3.151) ($n = 6$). В этом случае, для определения неизвестных коэффициентов $b_i(\mathrm{Fo})$ помимо условий (3.145) –

(3.147) будем использовать три дополнительных условия, два из которых будут записаны для точки $\xi = 0$ и одно для $\xi = 1$ [99].

Записывая уравнение (3.143) в точке $\xi = 0$, получаем первое дополнительное условие

$$\frac{\partial^2 \Theta(0,\eta)}{\partial \xi^2} = 0\,. \tag{3.158}$$

Для получения второго дополнительного условия продифференцируем исходное дифференциальное уравнение по пространственной переменной ξ.

$$-6\frac{\partial \Theta(\xi,\eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial^3 \Theta(\xi,\eta)}{\partial \xi^3} \tag{3.159}$$

Записывая соотношение (3.159) в точке $\xi = 0$ с учетом (3.145), (3.146), получаем второе дополнительное условие

$$\frac{6}{\mathrm{Bi}}\frac{\partial \varphi(0,\eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial^3 \Theta(0,\eta)}{\partial \xi^3}\,. \tag{3.160}$$

Третье граничное условие может быть получено путем однократного дифференцирования исходного уравнения (3.143) по пространственной переменной применительно к точке $\xi = 1$. С учетом (3.145) получим

$$\frac{\partial^3 \Theta(1,\eta)}{\partial \xi^3} = 0\,. \tag{3.161}$$

Подставляя (3.151) в (3.145) – (3.147) и дополнительные условия (3.158), (3.160), (3.161). Получаем систему шести алгебраических уравнений, из решения которой определяем неизвестные коэффициенты $b_i(\eta)$

$$b_1(\eta) = \frac{\varphi(\eta)}{\mathrm{Bi}}; \quad b_2(\eta) = \varphi(\eta); \quad b_3(\eta) = 0;$$

$$b_4(\eta) = \frac{1}{\mathrm{Bi}}\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta}; \quad b_5(\eta) = -\frac{\varphi(\eta)}{2} - \frac{5}{4}\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta}; \quad b_6(\eta) = \frac{\varphi(\eta)}{5} + \frac{2}{5\mathrm{Bi}}\frac{d\varphi(\eta)}{d\eta}.$$

Вычисляя интеграл (3.153) (с учетом найденных коэффициентов), получаем однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$9\frac{d^2\varphi(\eta)}{d\eta^2} - \frac{d\varphi(\eta)}{d\eta}(63\mathrm{Bi} + 140) + 140\mathrm{Bi}\varphi(\eta) = 0. \tag{3.162}$$

Его решение имеет вид

$$\varphi(\eta) = C_1 \exp(K_1\eta) + C_2 \exp(K_2\eta)\,, \tag{3.163}$$

$$K_1 = \frac{\sqrt{7}\sqrt{567\mathrm{Bi}^2 + 1800 + \mathrm{Bi} + 2800}}{18} - \frac{7\mathrm{Bi}}{2} - \frac{70}{9};$$

$$K_2 = -\frac{\sqrt{7}\sqrt{567\mathrm{Bi}^2 + 1800 + \mathrm{Bi} + 2800}}{18} - \frac{7\mathrm{Bi}}{2} - \frac{70}{9}.$$

Выражение (3.151) после подстановки в него найденных коэффициентов может быть представлено в виде

$$\Theta(\eta,\xi)=\sum_{j=1}^{2} f_j(\xi)\, C_j \exp(K_j\eta)\,, \tag{3.164}$$

где $f_j(\xi)=\xi+\dfrac{1}{\mathrm{Bi}}-\dfrac{\xi^4}{2}+\dfrac{\xi^5}{5}+\dfrac{\xi^3K_j}{\mathrm{Bi}}-\dfrac{5\xi^4K_j}{4\mathrm{Bi}}+\dfrac{2\xi^5K_j}{5\mathrm{Bi}}$.

Составляя невязку начального условия и требуя ортогональности невязки к каждой координатной функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$, получаем систему двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 (\Theta(\xi,0)-1)\, f_1(\xi)\, d\xi = 0, \\ \int\limits_0^1 (\Theta(\xi,0)-1)\, f_2(\xi)\, d\xi = 0. \end{cases}$$

из решения, которой найдем C_1, C_2.

Например, при Bi = 0,5, константы интегрирования равны $C_1=0{,}037$ и $C_2=-0{,}42$.

Выражение (3.164) с учетом найденных констант интегрирования представляет решение задачи (3.143) – (3.146) во втором приближении. Для дальнейшего повышения точности необходимо увеличивать число членов ряда (3.151). Так, в третьем приближении будем использовать девять членов ряда, в четвертом – двенадцать и так далее. Таким образом могут быть получены приближенные аналитические решения (3.143) – (3.146) с точностью, достаточной для большинства инженерных задач. Общие формулы для получения дополнительных граничных характеристик имеют вид

$$\frac{\partial^{2k-1}\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^{2k-1}}=0\,; \qquad -\frac{1}{\mathrm{Bi}}\frac{\partial^{k-1}\varphi(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^{k-1}}=\frac{\partial^{k+1}\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^{k+1}}\,;$$

$$-\mathrm{Bi}\frac{\partial^{k-1}\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^{k-1}}=\frac{\partial^{2k-1}\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^{2k-1}}\,,$$

где $k=1,\,2,\,3\,\ldots$.– номер приближения.

Результаты расчётов температуры в третьем приближении в сравнении с результатами численного решения даны на рисунках 3.22, 3.23. Из них видно, что в диапазоне $0{,}1\le \mathrm{Fo}<\infty$ расхождение полученных результатов не превышает 3%.

3.5. Исследование распределения температуры в турбулентном пограничном слое

Исследование процессов, протекающих в пограничных слоях, имеет большую практическую и теоретическую значимость. В общем случае, процессы переноса в пограничном слое описывается системой уравнений конвективного тепломассообмена. Для несжимаемой жидкости она записывается в виде [67, 89]

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = -(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} + \nu\Delta\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{f}\,; \tag{3.165}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0\,; \tag{3.166}$$

$$c\rho\left[\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla T\right] = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + q_v + \Phi\,; \tag{3.167}$$

$$\rho = \mathrm{const}\,; \qquad c = c(T)\,; \qquad \lambda = \lambda(T)\,; \qquad \nu = \nu(T) \tag{3.168}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – скорость; t – время; ν – кинематическая вязкость; p – давление; $\mathbf{f}$ – массовые силы; T – температура; λ – коэффициент теплопроводности; c – теплоемкость; q_v – внутренние объемные источники тепла; Φ – диссипативная функция.

Несмотря на то, что система дифференциальных уравнений (3.165) – (3.168) замкнута, ее аналитические решения получены лишь для некоторых частных случаев. В связи с этим активно развиваются методы вычислительной гидродинамики (CFD – моделирование). Численное моделирование тепломассообменных процессов позволяет получать решения сложнейших задач, имеющих большое прикладное значение. Использование численных методов моделирования тепловых и гидродинамических процессов, наряду с перечисленными достоинствами, имеет и недостатки: использование CFD методов требует больших вычислительных мощностей, специального программного обеспечения. Неизменно возникают проблемы сходимости решений, накопления вычислительной погрешности и др. Кроме того, существенно осложняется параметрический анализ полученных результатов.

В связи с этим, развитие получили также приближенные аналитические методы решения задач тепломассопереноса в движущихся жидкостях. Приближенные аналитические методы позволяют получать простые по форме аналитические решения в виде формул, содержащих известные параметры. Их использование не требует специальных знаний или использования дорогостоящего оборудования. И для отдельных прикладных задач тепломассообмена их использование оказывается предпочтительным.

В диссертации приведены результаты разработки математической модели теплообмена в турбулентном пограничном слое при течении набегающего потока вдоль неограниченной пластины (см. рисунок 3.24). Под «неограниченной» понимают такую пластину, ширина и длина которой велики по сравнению с толщиной.

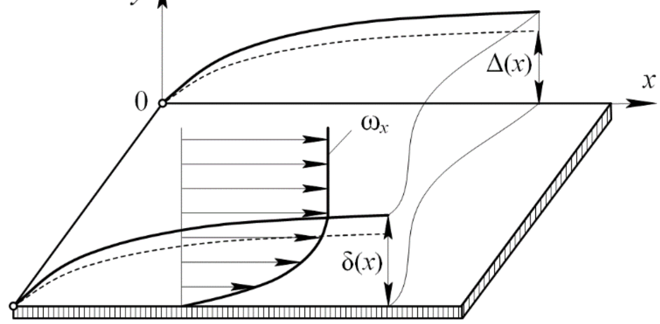


Рисунок 3.25. Изменение тощины теплового пограничного слоя п длине пластины

С целью упрощения исходной системы дифференциальных уравнений (3.165) – (3.168) сделан ряд допущений: 1) теплофизические свойства жидкости не зависят от температуры и давления; 2) в потоке жидкости отсутствуют источники тепла; 3) количество тепла выделяемого вследствие диссипации пренебрежимо мало; 4) профили скорости по направления координатных осей (компоненты вектора скорости $\boldsymbol{\omega}$) определяются экспериментально.

С учетом сделанных допущений система уравнений (3.165) – (3.168) для исследуемой схемы (см. рисунок 3.24) в декартовой системе координат будет

$$c\rho\omega_x \frac{\partial \bar{T}(x,y)}{\partial x} + c\rho\omega_y \frac{\partial \bar{T}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(\lambda + cA_q)\frac{\partial \bar{T}(x,y)}{\partial y}\right] \qquad (3.169)$$

$$(x > 0;\ \ 0 < y < \Delta),$$

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} = 0 \qquad (x > 0,\ \ 0 < y < \Delta); \qquad (3.170)$$

$$\rho = \mathrm{const}; \quad c = \mathrm{const}; \quad \lambda = \mathrm{const}; \quad \nu = \mathrm{const} \qquad (3.171)$$

где ω_x, ω_y – осредненные по времени компоненты вектора скорости; $\bar{T}$ – осредненная по времени температура; A_q, A_τ – коэффициенты турбулентного обмена для тепла и импульса, зависящие от координаты y [121]; p – осредненное давление; $\Delta = \Delta(x)$ – толщина теплового пограничного слоя; ρ, c, λ, ν – осредненные значения плотности, коэффициентов теплоемкости, теплопроводности и кинематической вязкости соответственно.

Уравнения (3.169) – (3.171), не включают уравнения движения (Навье – Стокса), так как для определения ω_x, ω_y будут использованы эмпирические зависимости, полученные экспериментально. Осреднение во времени искомых функций позволяет использовать классические подходы для описания турбулентного движения, в том числе и в пограничном слое.

Следуя интегральному методу теплового баланса, будем искать решение не исходного уравнения (3.169), а осредненного в пределах толщины теплового пограничного слоя:

$$c\rho\int_0^\Delta \omega_x \frac{\partial \bar{T}(x,y)}{\partial x} dy + c\rho\int_0^\Delta \omega_y \frac{\partial \bar{T}(x,y)}{\partial y} dy = \int_0^\Delta \frac{\partial}{\partial y}\left[(\lambda + cA_q)\frac{\partial \bar{T}(x,y)}{\partial y}\right] dy. \quad (3.172)$$

Коэффициент турбулентного обмена A_q в общем случае зависят от расстояния от поверхности пластины, т.е. является функцией поперечной координаты y. Причем A_q изменяется от нуля на поверхности ($y = 0$) до некоторого максимального значения на границе пограничного слоя ($y = \Delta$). В дальнейшем, будем использовать осредненное в пределах толщины теплового пограничного слоя значение коэффициента A_q, в предположении, что оно не изменяется вдоль продольной координаты:

$$\overline{A}_q = \frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} A_q(y)\,dy\,. \qquad (3.173)$$

С учетом (3.173) уравнение (3.172) можно записать в виде [228]

$$\int_0^{\Delta}\omega_x \frac{\partial\overline{T}}{\partial x}dy + \int_0^{\Delta}\omega_y \frac{\partial\overline{T}}{\partial y}\,dy = a_э\int_0^{\Delta}\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial y^2}dy\,, \qquad (3.174)$$

где $a_э = a + a_т$ – эквивалентный коэффициент температуропроводности; $a = \lambda/(c\rho)$, $a_т = \overline{A}_q/\rho$ – коэффициенты молекулярной и турбулентной температуропроводности соответственно. Стоит отметить, что коэффициент $a_т$ характеризует режим течения жидкости, а не ее теплофизических свойства.

Краевые условия к уравнению (3.174) будут

$$\overline{T}(x,0) = \overline{T}_{ст};; \quad (3.175) \qquad \overline{T}(x,\Delta) = \overline{T}_{ср};; \quad (3.176) \qquad T(0,y) = \overline{T}_{ст}, \quad (3.177)$$

где $\overline{T}_{ст}$ – температура поверхности пластины; $\overline{T}_{ср}$ – температура невозмущенной жидкости.

Введем в рассмотрение также дополнительное граничное условие

$$\left.\frac{\partial\overline{T}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=\Delta} = 0, \qquad (3.178)$$

представляющее собой условие сопряжения прогретой и непрогретой зон.

По аналогии с (3.174) получим также интегральное уравнение неразрывности (3.170)

$$\int_0^{\Delta}\frac{\partial\omega_x}{\partial x}dy + \int_0^{\Delta}\frac{\partial\omega_y}{\partial y}dy = 0$$

или с учетом равенства нулю скорости потока на поверхности

$$\int_0^{\Delta}\frac{\partial\omega_x}{\partial x}dy = -\int_0^{\Delta}\frac{\partial\omega_y}{\partial y}dy = \omega_y\big|_{y=\Delta} - \omega_y\big|_{y=0} = -\omega_y\big|_{y=\Delta}\,. \qquad (3.179)$$

Вычисляя интеграл в правой части уравнения (3.174), а также выполняя интегрирование по частям второго слагаемого в левой, получаем

$$\int_0^{\Delta}\omega_x \frac{\partial\overline{T}}{\partial x}dy + \overline{T}(x,\Delta)\,\omega_y\big|_{y=\Delta} - \overline{T}(x,0)\,\omega_y\big|_{y=0} - \int_0^{\Delta}\overline{T}(x,y)\frac{\partial\omega_y}{\partial y}\,dy =$$

$$= a_э\left[\left.\frac{\partial\overline{T}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=\Delta} - \left.\frac{\partial\overline{T}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}\right]. \qquad (3.180)$$

С учетом (3.178), (3.179) уравнение (3.180) будет

$$\int_0^{\Delta}\omega_x \frac{\partial\overline{T}}{\partial x}dy - \overline{T}_{ср}\int_0^{\Delta}\frac{\partial\omega_x}{\partial x}dy + \int_0^{\Delta}\overline{T}(x,y)\frac{\partial\omega_x}{\partial x}\,dy = -a_э\left.\frac{\partial\overline{T}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}$$

или в эквивалентном виде

$$\int_0^{\Delta}\omega_x[\overline{T}_{ср} - \overline{T}(x,y)]dy = a_э\left.\frac{\partial\overline{T}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}. \qquad (3.181)$$

Введем в рассмотрение избыточную температуру

$$T(x,y)=\overline{T}(x,y)-\overline{T}_{\text{ст}}; \quad T_{\text{ср}}=\overline{T}_{\text{ср}}-\overline{T}_{\text{ст}}. \tag{3.182}$$

С учетом (3.182) при $a_{\text{э}}=\text{const}$, уравнение (3.172) будет

$$\omega_x\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}+\omega_y\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}=a_{\text{э}}\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}, \tag{3.183}$$

а интегральная задач (3.174) – (3.177) при этом будет

$$\int\limits_0^{\Delta}\omega_x[T_{\text{ср}}-T(x,y)]dy=a_{\text{э}}\left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0}. \tag{3.184}$$

$T(x,0)=0;;$ (3.185) $T(x,\Delta)=T_{\text{ср}};;$ (3.186) $T(0,y)=0.$ (3.187)

Для получения решения задачи (3.184) – (3.187), согласно рассматриваемому методу, помимо основных будут использованы дополнительные граничные характеристики. Первое из которых введено ранее и имеет вид (3.178). Таким образом, при получении первого приближения решения задачи (3.183) – (3.187) будут использованы три условия – два основные и одно дополнительное (3.178). Причем два из них относятся к границе пограничного слоя ($y=\Delta$), одно – к поверхности пластины ($y=0$):

$$T(x,0)=0; \quad T(x,\Delta)=T_{\text{ср}}; \quad \left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right|_{y=\Delta}=0. \tag{3.188}$$

Стоит отметить, что условие (3.177) будет выполнено естественным образом в процессе получения решения (путем выполнения условия $\Delta(0)=0$).

Решение задачи (3.184), (3.188) отыскивается в виде алгебраического полинома с нечетными степенями

$$T(x,y)=\sum_{k=1}^{j}a_k\varphi_k(y), \tag{3.189}$$

где $a_k=a_k(\Delta)$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(y)=y^{2k-1}$ – координатные функции; j – число членов ряда (3.189).

Благодаря применению координатных функций $\varphi_k(y)$ с нечетными степенями, первое граничное условие из (3.188) удовлетворяются в любом приближении. Подставим (3.189) (при $j=2$) во второе и третье условия (3.188). В результате подстановки получим систему двух алгебраических уравнений. Ее решение

$$a_1=\frac{3}{2}\frac{T_{\text{ср}}}{\Delta}; \quad a_2=-\frac{3}{2}\frac{T_{\text{ср}}}{\Delta^3}. \tag{3.190}$$

С учетом найденных $a_k(\Delta)$ $(k=1,2)$, выражение (3.189) примет вид

$$\frac{T}{T_{\text{ср}}}=\frac{3}{2}\frac{y}{\Delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^3. \tag{3.191}$$

В соотношение (3.190) помимо искомой функции температуры входит величина $\Delta=\Delta(x)$ – толщина теплового пограничного слоя, зависящая от скорости движения жидкости ω_x. Для вычисления ω_x использована известная эмпирическая зависимость, полученная на основе обобщения экспериментальных данных

$$\omega_x = \omega_{\max}\left[\frac{y}{\delta(x)}\right]^{1/n}, \tag{3.192}$$

где $\omega_{\max}$ – максимальная скорость набегающего потока; $\delta(x)$ – толщина динамического пограничного слоя; n – показатель степени, зависящий от числа Рейнольдса (Re).

Для определения толщины динамического пограничного слоя воспользуемся теоремой импульсов, из которой следует

$$\tau_0(x) = \rho\omega_{\max}^2 \frac{d\delta_2(x)}{dx}, \tag{3.193}$$

где $\tau_0(x)$ – касательное напряжение на стенке на расстоянии x от передней кромки; $\delta_2(x) = \delta(x)n[(1+n)(2+n)]^{-1}$ – толщина потери импульса; n – показатель степени в соотношении (3.191).

С другой стороны, используя закон сопротивления Блазиуса, можно получить

$$\tau_0(x) = [C(n)]^{-\frac{2n}{n+1}} \rho\omega_{\max}^{\frac{2n}{n+1}} \left(\frac{\nu}{\delta(x)}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \tag{3.194}$$

где ν – кинематическая вязкость; $C(n)$ – коэффициенты К. Вигхардта (см. табл. 3.1).

Разделив (3.192) и (3.193) на $\rho\omega_{\max}^2$ и приравняв получившиеся соотношения, получим дифференциальное уравнение, решение которого при любых n будет

$$\delta(x) = K_1(n) x \mathrm{Re}_x^{-\frac{2}{n+3}}, \tag{3.195}$$

$$K_1(n) = (n^2+5n+6)^{\frac{n+1}{n+3}} n^{-\frac{n+1}{n+3}} [C(n)]^{-\frac{2n(n+1)}{(n+1)(n+3)}}$$

где $\mathrm{Re}_x = \omega_{\max} x/\nu$ – локальное число Рейнольдса.

В таблице 3.1 представлены значения $K_1(n)$ для различных n.

Таблица 3.1

Наименование параметра	**Показатель степени в выражении (3.191)**			
	7	8	9	10
C	8,74	9,71	10,6	11,5
$K_1(n)$	0,371	0,313	0,272	0,239
$K_2(n)$ (1 прибл.)	0,296	0,304	0,311	0,317
$K_2(n)$ (2 прибл.)	0,207	0,214	0,220	0,224

Подставляя (3.190), (3.191), (3.194) в (3.184), получим следующее дифференциальное уравнение

$$K_2(n)\omega_{\max}\beta^{\frac{2n+1}{n}} \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{a_1\Delta(x)}{T_{\text{ср}}}\frac{a_{\text{э}}}{\delta(x)}, \tag{3.196}$$

где $\beta = \Delta(x)/\delta(x)$; $K_2(n)$ – коэффициент, зависящий от числа выполненных приближений. Например, в первом приближении он равен

$$K_2(n) = 3n^3 /[(n+1)(2n+1)(4n+1)]^{-1},$$

во втором

$$K_2(n) = 105n^5[(n+1)(2n+1)(4n+1)(6n+1)(8n+1)]^{-1}$$

и т.д. С увеличением числа приближений вид дифференциального уравнения (3.195) не изменяется.

Решение уравнения (3.195) в любом приближении будет

$$\Delta(x) = K_3(n)x\,\mathrm{Pr}^{-\frac{n}{2n+1}}\,\mathrm{Re}_x^{-\frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(2n+1)}}, \qquad (3.197)$$

$$K_3(n) = K_1(n)^{\frac{1}{2n+1}}\left[\frac{a_1(n+3)}{K_2(n)(n+1)}\right]^{\frac{n}{2n+1}}$$

где – $\mathrm{Pr} = \nu / a_э$ – число Прандтля.

Соотношение (3.190) с учетом (3.196) представляет решение задачи (3.184) – (3.187) в первом приближении. Например, при $n = 8$, соотношение (3.197) будет

$$\Delta(x) = 3{,}77\,x\,\mathrm{Pr}^{-0.471}\,\mathrm{Re}_x^{-0.481}.$$

На рисунке 3.25 приведены графики изменения толщины теплового пограничного слоя в зависимости от выбранного профиля скорости (3.191) при следующих исходных данных: $\omega_{\max} = 5$ $м/с$; $a_э = 10^{-6}\,м^2/с$; $\rho = 1000$ $кг/м^3$; $\nu = 10^{-6}\,м^2/с$; $T_{ср} = 20\,^\circ C$. Распределение температуры по толщине теплового пограничного слоя представлено на рис. 3.26.

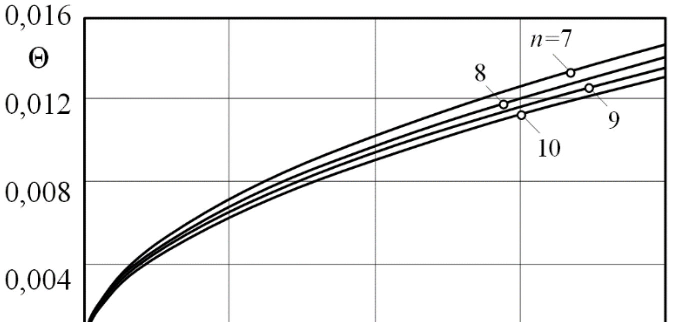


Рисунок 3.25. Изменение тощины теплового пограничного слоя по длине пластины

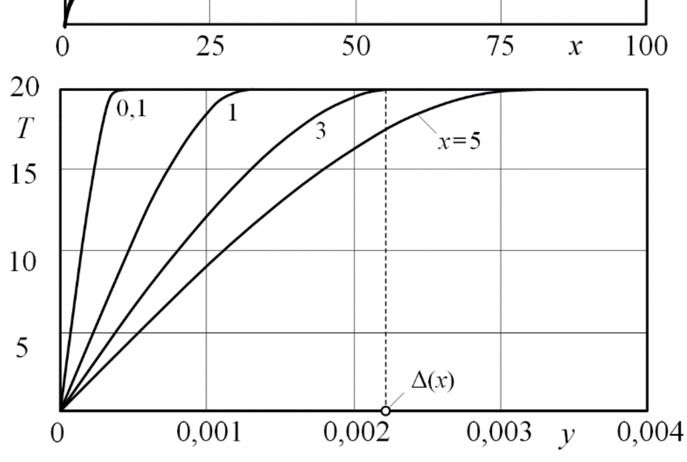


Рисунок 3.26. Распределение температуры по толщине пограничного слоя. Расчет по формуле (3.190)

Для получения решения во втором и последующих приближениях, будем добавлять еще по три дополнительных условия. Далее будет показано, что во втором приближении достаточно использовать лишь два дополнительных условия, записанных в $y=\Delta$, т.к. условия в $y=0$ выполняются при любых значениях a_k в (3.189). Ограничимся рассмотрением алгоритма получения ДГУ для второго приближения. Для получения первого из них записывается уравнение (3.183) в точке $y=0$. Учитывая, что проекции вектора скорости здесь $\omega_x=\omega_y=0$, первое дополнительное условие для второго приближения будет

$$\left.\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}\right|_{y=0}=0. \tag{3.198}$$

Данное условие удовлетворяется при любых значениях неизвестных коэффициентов a_k в (3.189). Для получения следующего ДГУ запишем (3.183) в точке $y=\Delta$. С учетом третьего условия из (3.188) получим

$$\left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}\right|_{y=\Delta}=\frac{a_э}{\omega_x}\left.\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}\right|_{y=\Delta} \tag{3.199}$$

Дифференцируя второе соотношение из (3.188) по x и сравнивая с (3.199), получаем второе ДГУ

$$\left.\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}\right|_{y=\Delta}=0. \tag{3.200}$$

Для получения третьего ДГУ продифференцируем уравнение (3.183) по переменной y

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\frac{\partial T(x,y)}{\partial x}+\omega_x\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial \omega_y}{\partial y}\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}+\omega_y\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}=a_э\frac{\partial^3 T(x,y)}{\partial y^3}.$$

Запишем получившееся соотношение применительно к точке $y=\Delta$

$$\left.\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x\partial y}\right|_{y=\Delta}=\frac{a_э}{\omega_x}\left.\frac{\partial^3 T(x,y)}{\partial y^3}\right|_{y=\Delta}. \tag{3.201}$$

Дифференцируя третье условие из (3.188) по x и сравнивая с (3.201), получаем третье ДГУ

$$\left.\frac{\partial^3 T(x,y)}{\partial y^3}\right|_{y=\Delta}=0. \tag{3.202}$$

Таким образом, для получения решения во втором приближении будем использовать следующие дополнительные граничные условия:

$$\left.\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}\right|_{y=\Delta}=0;\qquad \left.\frac{\partial^3 T(x,y)}{\partial y^3}\right|_{y=\Delta}=0. \tag{3.203}$$

Подставляя (3.189) (при $j=4$) в второе и третье условия (3.188), а также в (3.203) получим систему четырех алгебраических уравнений. Ее решение

$$a_1 = \frac{35}{16}\frac{T_{\text{ср}}}{\Delta}; \quad a_2 = -\frac{35}{16}\frac{T_{\text{ср}}}{\Delta^3}; \quad a_3 = \frac{21}{16}\frac{T_{\text{ср}}}{\Delta^5}; \quad a_4 = -\frac{5}{16}\frac{T_{\text{ср}}}{\Delta^7}. \tag{3.204}$$

Выражение (3.189) с учетом (3.203) представляет решение задачи во втором приближении. Значения коэффициентов $K_1(n)$, $K_2(n)$ для второго приближения приведены в таблице 3.1.

Одной из важнейших задач исследования тепловых процессов в пограничном слое является определения коэффициента теплоотдачи на поверхности обтекаемой пластины. Согласно закону Ньютона – Рихмана

$$-\lambda \left.\frac{\partial T(x,y)}{\partial n}\right|_{y=0} = \alpha(T_{\text{ср}} - T_{\text{ст}}),$$

можно определить значение коэффициента теплоотдачи в виде

$$\alpha = \frac{\lambda}{T_{\text{ср}} - T_{\text{ст}}}\frac{\partial T(x,y)}{\partial n}. \tag{3.205}$$

Подставляя в (3.205) значение температуры, найденное в первом приближении получим

$$\mathrm{Nu}_x = \frac{3}{2}K_3(n)^{-1}\,\mathrm{Re}_x^{\frac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(2n+1)}}\,\mathrm{Pr}^{\frac{n}{2n+1}} \tag{3.206}$$

где $\mathrm{Nu}_x = \alpha x/\lambda_э$ – число Нуссельта; $\mathrm{Pr} = \nu/a_э$ – число Прандтля.

Используя критериальное уравнение (3.206) можно определять тепловые потоки на ограничивающей поток поверхности.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ, ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ

Основные научные результаты автора, полученные в главе 4, представлены в работах (200, 233, 247, 251, 256).

В п. 4.1, 4.2, 4.4, используя единую методологию моделирования процессов переноса на основе модифицированных уравнений сохранения, разработаны и детально исследованы математические модели колебаний упругих тел. В частности, разработана математическая модель продольных колебаний упругого стержня. При выводе дифференциального уравнения, описывающего указанный процесс, в диссертации использован модифицированный закон Ньютона

$$\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma}{\partial x} - \frac{k_{\text{c}}}{V}\frac{\partial U}{\partial t},$$

в котором учтено запаздывание во времени как нормального напряжения σ, так и функции перемещения U, имеющий вид

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(U + \sum_{k=1}^{N}\tau_k^k\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma + \sum_{k=1}^{N}r_k^k\frac{\partial^k\sigma}{\partial t^k}\right) - \frac{k_{\text{c}}}{V}\frac{\partial}{\partial t}\left(U + \sum_{k=1}^{N}\tau_k^k\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right).$$

Учёт релаксационных слагаемых в законе Ньютона, а также внутреннего сопротивления среды позволил приблизиться к описанию реальных процессов, что подтверждается сравнением результатов теоретических исследований с экспериментальными. Результаты экспериментов приведены в п. 4.3, 4.5. Натурные эксперименты проводились в рамках научного проекта № 18-79-00171 «Экспериментально – теоретическое исследование влияния релаксационных свойств материалов на колебательные и тепловые процессы с целью построения новых более точных математических моделей», финансируемого Российским научным фондом. Работы выполнялись в соответствии с Соглашением о сотрудничестве ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» с АО «Ракетно – космический центр «Прогресс» №1 – сотр от 26.04.2017 г. При проведении экспериментальных исследований использовались специальные измерительные системы и установки лаборатории динамических испытаний прогресс АО «РКЦ «Прогресс».

Наличие экспериментальных данных позволило из решения обратной задачи определить коэффициенты сопротивления среды. Отмечается, что можно выделить два временны́х участка, в пределах которых колебательные процессы, существенно отличаются. Первый временной участок характеризуется значительно более интенсивным затуханием, причем снижение амплитуды происходит по экспоненциальному закону. Затухание колебательного процесса на втором участке происходит практически линейно.

В параграфе 4.6 приведены результаты исследований колебаний сжимаемых жидкостей при воздействии внешней нагрузки. Определены условия возникновения резонансных колебаний, биений.

4.1. Разработка математической модели затухающих колебаний упругого стержня на основе модифицированного уравнения движения

Многие технические процессы сопровождаются колебательными движениями (колебаниями) отдельных элементов оборудования, механизмов, конструкций. Колебания могут возникать вследствие возвратно – поступательного движения деталей и узлов машин, при вращении роторов турбин, компрессоров, вследствие их разбалансировки и др. Особый интерес представляют резонансные явления. Точность математического описания перечисленных процессов зависит от используемых при расчетах коэффициентов, характеризующих механические свойства материалов. Например, способность материала сопротивляться растяжению, сжатию при упругой деформации характеризуется величиной модуля Юнга, интенсивность затухания колебаний определяется коэффициентом сопротивления среды и т.д. В диссертации показано, что для более точного описания колебательных процессов необходимо также учитывать релаксационные свойства материалов. Влияние учета коэффициентов релаксации на колебательные процессы рассмотрим на примере затухающих продольных колебаний упругого стержня.

Рассмотрим вывод одномерного волнового уравнения, описывающего незатухающие колебания упругого стержня. В основе его вывода лежит закон Гука – закон устанавливающий связь между нормальным напряжением σ и деформацией ε. Согласно закону Гука [3, 9, 108]

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{4.1}$$

где коэффициент пропорциональности E – модуль Юнга, $Па$; U – перемещение, $м$; x – координата, $м$;

Подставляя закон Гука в уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{4.2}$$

получаем классическое волновое уравнение незатухающих колебаний.

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = e^2\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \tag{4.3}$$

В соотношениях (4.2), (4.3) используются следующие обозначения: t – время, $с$; ρ – плотность, $кг/м^3$; $e = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольного возмущения.

Как отмечалось ранее, полученное гиперболическое уравнение описывает незатухающие колебания упругого стержня. Однако всякий реальный колебательный процесс, протекающий в изолированной системе в отсутствии внешнего воздействия, является затухающим. Снижение амплитуды колебаний во времени обусловлено внутренним сопротивлением среды. Сила сопротивления $F_с$ определяется соотношением

$$F_с = -k_з\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{4.4}$$

где $k_з$ − коэффициент затухания, $кг/с$.

Учитывая силу внутреннего сопротивления $F_с$, уравнение движения (4.2) принимает вид

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{k_з}{V} \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{4.5}$$

Учитывая что $F_с$ является объемной силой, в уравнении (4.5) величина $F_с$ отнесена к объему V. С учетом (4.1) одномерное дифференциальное уравнение затухающих колебаний будет

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial U}{\partial t}, \tag{4.6}$$

где $\eta = k_з/(\rho V)$ − коэффициент сопротивления среды, имеющий размерность, $1/c$.

Согласно уравнению (4.2), (4.5) исследуемая система реагирует на внешнее возмущение мгновенно, без задержки во времени. То есть изменение градиента искомой функции перемещения U (пространственное изменение) влечет мгновенное ее изменение и во времени (временное изменение). Причем уравнения (4.2), (4.5) не учитывают причинно – следственную связь явлений. Из их анализа не следует какое из этих явлений (временное или пространственное изменение) первично. Очевидно, что процессы переноса (тепла, массы, импульса) характеризуются некоторой скоростью их протекания. В связи с этим, в диссертации с целью учета инерционности реальных систем предлагается использовать модифицированный закон Ньютона в виде

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(U + \sum_{k=1}^{N} \tau_k^k \frac{\partial^k U}{\partial t^k} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma + \sum_{k=1}^{N} r_k^k \frac{\partial^k \sigma}{\partial t^k} \right) - \frac{k_з}{V} \frac{\partial}{\partial t}\left(U + \sum_{k=1}^{N} \tau_k^k \frac{\partial^k U}{\partial t^k} \right), \tag{4.7}$$

где τ_k, r_k – коэффициенты релаксации.

Подставляя в (4.7) формулу закона Гука (4.1), получаем уравнение колебаний стержня, учитывающее запаздывание напряжения и перемещения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(U + \sum_{k=1}^{N} \tau_k^k \frac{\partial^k U}{\partial t^k} \right) = e^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \sum_{k=1}^{N} r_k^k \frac{\partial^{k+1} U}{\partial x \partial t^k} \right) - \eta \frac{\partial}{\partial t}\left(U + \sum_{k=1}^{N} \tau_k^k \frac{\partial^k U}{\partial t^k} \right). \tag{4.8}$$

Согласно уравнению (4.8) отклик системы на внешнее возмущение происходит с некоторой задержкой (сдвигом во времени), зависящей от релаксационных свойств среды τ_k и r_k.

Уравнение (4.8) может быть получено и из других соображений. Следуя теории двухфазного запаздывания, представим закон Гука в виде

$$\sigma(t + \tau_1) = E \frac{\partial U(t + r_1)}{\partial x}, \tag{4.9}$$

где τ_1, τ_2 – коэффициенты релаксации, c.

Разлагая (4.9) в ряд по степеням τ_1, r_1 с точностью до членов первого порядка малости, получаем

$$\sigma = E\left(\frac{\partial U}{\partial x} + r_1\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right) - \tau_1\frac{\partial \sigma}{\partial t}\,. \qquad (4.10)$$

Модифицированный закон Гука (4.10) совпадает с моделями вязкоупругих тел Максвелла и Кельвина – Фойхта [9]. Причем (4.10) с точностью до постоянных совпадает с усложненными моделями, в которых рассматривается дополнительный элемент – пружина, соединённая параллельно с моделью Максвелла и последовательно с моделью Кельвина – Фойхта. Физическая сущность этих моделей состоит в учете зависимости напряжений и деформаций от времени, а также их взаимного влияния на исследуемые процессы.

Аналогичная выражению (4.10) запись закона Гука может быть выведена из системы уравнений Онзагера вида [68 – 71]

$$J_i = L_i^{(r)}\frac{\partial J_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N}\left(L_{ik}X_k + L'_{ik}\frac{\partial X_k}{\partial t}\right), \qquad (4.11)$$

где J_i – поток тепла, массы, импульса и т. Д.; X_k – движущие силы (в данном случае $X_k = \varepsilon = \partial u/\partial x$); $L_i^{(r)}$, L_{ik}, L'_{ik} – постоянные.

Если принять $L_i^{(r)} = -\tau_1$; $L_{ik}^{(r)} = E$; $L'_{ik} = Er_2$; $J_i = \sigma$; $X_k = \partial u/\partial x$, то выражение (4.11) сводится к записи модифицированного закона Гука вида (4.10). Тождественность полученных (4.10) и (4.11) свидетельствует об учете в выражении (4.10) перекрёстных эффектов – пространственно – временной нелокальности.

Подставляя (4.10) в уравнение движения (4.5), после некоторых преобразований получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \tau_1\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} = e^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + r_1\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial t}\right) - \eta\left(\frac{\partial U}{\partial t} - \tau_1\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right). \qquad (4.12)$$

Очевидно, что при $N = 1$ уравнения (4.8) и (4.12) совпадают. Стоит отметить также, что при $\tau_1 = r_1 = \gamma = 0$ уравнения (4.8), (4.12) приводится к уравнению незатухающих колебаний (4.3).

Найдём точное аналитическое решение краевой задачи о колебаниях стержня, один торец которого жёстко закреплён, а второй – находится в свободном состоянии. Стержень деформирован по линейному закону, причем наибольшее удлинение в начальной момент времени имеет конец стержня. Математическая постановка задачи включает уравнение (4.8) при $N = 1$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \tau_1\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} = e^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + r_1\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial t}\right) - \eta\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \tau_1\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) \quad (t > 0;\quad 0 < x < \delta); \qquad (4.13)$$

с краевыми условиями

$$U(x,0) = b(\delta - x)\,; \qquad (4.14) \qquad\qquad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0\,; \qquad (4.15)$$

$$\frac{\partial^2 U(x,0)}{\partial t} = 0\,; \qquad (4.16) \qquad\qquad \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = 0\,; \qquad (4.17)$$

$$U(\delta,t)=0, \tag{4.18}$$

где δ – длина стержня, $м$; b – коэффициент, учитывающий начальное перемещение стержня.

Из начального условия (4.14) следует, что при $t=0$ перемещение стержня линейно зависит от координаты x, принимая максимальное значение $U(0,0)=b\delta$ в точке $x=0$ и минимальное $U(\delta,0)=0$ – в точке $x=\delta$.

Введём следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta=\frac{U}{U_0};\quad \xi=\frac{x}{\delta};\quad \mathrm{Fo}=\frac{et}{\delta};\quad \mathrm{Fo}_1=\frac{e\tau_1}{\delta};\quad R_1=\frac{er_1}{\delta};\quad \gamma=\frac{\delta\eta}{e},$$

где Θ, ξ, Fo – безразмерные перемещение, координата и время; $U_0=b\delta$; Fo_1, R_1, γ – безразмерные коэффициенты релаксации и сопротивления среды.

Введение безразмерных переменных и параметров позволяет записать исходную краевую задачу (4.13) – (4.18) в безразмерном (параметрическом) виде:

$$\mathrm{Fo}_1\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^3}+(1+\gamma\mathrm{Fo}_1)\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}+\gamma\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=$$

$$=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}+R_1\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2\partial\mathrm{Fo}}\qquad (\mathrm{Fo}>0;\quad 0<\xi<1); \tag{4.19}$$

$$\Theta(\xi,0)=1-\xi; \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial\mathrm{Fo}}=0; \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial^2\Theta(\xi,0)}{\partial\mathrm{Fo}^2}=0; \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=0; \tag{4.23}$$

$$\Theta(1,\mathrm{Fo})=0. \tag{4.24}$$

Согласно методу разделения переменных решение задачи (4.19) – (4.24) отыскивается в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\varphi(\mathrm{Fo})\psi(\xi). \tag{4.25}$$

Подставляя (4.25) в (4.19), получаем

$$\mathrm{Fo}_1\varphi'''+(1+\gamma\mathrm{Fo}_1)\varphi''+(\gamma+\nu R_1)\varphi'+\nu\varphi=0; \tag{4.26}$$

$$\psi''+\nu\psi=0, \tag{4.27}$$

где $\varphi',\varphi'',\varphi'''$ – первая, вторая и третья производные от функции $\varphi(\mathrm{Fo})$ по времени Fo; ψ'' – вторая производная от функции $\psi(\xi)$ по координате ξ; ν – некоторая постоянная.

Подставляя (4.25) в (4.23), (4.24), находим

$$d\psi(0)/d\xi=0; \tag{4.28}$$

$$\psi(1)=0. \tag{4.29}$$

Решение краевой задачи Штурма – Лиувилля (4.27) – (4.29) принимается в виде

$$\psi_m=\cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]\quad (m=\overline{1,\infty}). \tag{4.30}$$

Очевидно, что соотношение (4.30) удовлетворяет граничным условиям

(4.28), (4.29). Подставляя (4.30) в (4.27), для определения собственных чисел получаем следующую формулу

$$\nu_m = \frac{(2m-1)^2\pi^2}{4} \quad (m=\overline{1,\infty}). \tag{4.31}$$

Собственные функции с точностью до постоянного множителя (ввиду однородности уравнения (4.27)) находятся из (4.30). Величину постоянного множителя можно положить равным единице.

Характеристическое уравнение для однородного дифференциального уравнения (4.26) имеет вид

$$\mathrm{Fo}_1 z^3 + (1+\gamma\mathrm{Fo}_1)z^2 + (\gamma+\nu_m R_1)z + \nu_k = 0 \quad (m=\overline{1,\infty}). \tag{4.32}$$

При некоторых справедливых значениях $\mathrm{Fo}_1, R_1, \gamma$ возможны два варианта:

256. Если дискриминант

$$D = -4(1+\gamma\mathrm{Fo}_1)^3\nu_m + (1+\gamma\mathrm{Fo}_1)^2(\gamma+\nu_m R_1)^2 - 4\mathrm{Fo}_1(\gamma+$$
$$+\nu_m R_1)^3 + 18\mathrm{Fo}_1(1+\gamma\mathrm{Fo}_1)\nu_m(\gamma+\nu_k R_1) - 27\mathrm{Fo}_1^2\nu_m^2 < 0,$$

то будем иметь 2 комплексно – сопряжённых (z_{1m}, z_{2m}) и 1 вещественный (z_{3m}) корень

$$z_{1m} = j_m + i\beta_m; \quad z_{2m} = j_m - i\beta_m; \quad z_{3m} = \upsilon_m, \tag{4.33}$$

$$j_m = -0{,}5(\alpha_m + \vartheta_m) - \frac{1+\gamma\mathrm{Fo}_1}{3\mathrm{Fo}_1}; \quad \beta_m = 0{,}5\sqrt{3}(\alpha_m - \vartheta_m); \quad \upsilon_m = \alpha_m + \vartheta_m - \frac{1+\gamma\mathrm{Fo}_1}{3\mathrm{Fo}_1};$$

$$\alpha_m = \left(-\frac{q_m}{2} + \sqrt{Q_m}\right)^{\frac{1}{3}}; \quad \vartheta_m = \left(-\frac{q_m}{2} - \sqrt{Q_m}\right)^{\frac{1}{3}}; \quad Q_m = \left(\frac{p_m}{3}\right)^3 - \left(\frac{q_m}{2}\right)^2$$

$$p_m = \frac{\gamma}{\mathrm{Fo}_1} - \frac{(1+\gamma\mathrm{Fo}_1)^2}{3\mathrm{Fo}_1^2} + \frac{R_1^2\nu_m}{\mathrm{Fo}_1};$$

$$q_m = \frac{\nu_\mathrm{m}}{\mathrm{Fo}_1} - \frac{2(1+\gamma\mathrm{Fo}_1)^3}{27\mathrm{Fo}_1^3} - \frac{\mathrm{Fo}_3(1+\gamma\mathrm{Fo}_1)}{3\mathrm{Fo}_1^2} - \frac{R_1(1+\gamma\mathrm{Fo}_1)\nu}{3\mathrm{Fo}_1^2}.$$

Частные решения (4.26) будут

$$\varphi_{1m} = \exp[(j_m + i\beta_m)\mathrm{Fo}]; \quad \varphi_{2m} = \exp[(j_m - i\beta_m)\mathrm{Fo}]; \quad \varphi_{3m} = \exp(z_{3m}\mathrm{Fo}). \tag{4.34}$$

В соответствии с формулой Эйлера

$$\exp(is) = \cos s + i\sin s; \quad \exp(-is) = \cos s - i\sin s,$$

общее решение уравнения (4.26) приводится к виду

$$\varphi_m = C_{1m}\exp[(j_m + i\beta_m)\mathrm{Fo}] + C_{2m}\exp[(j_m - i\beta_m)\mathrm{Fo}] + C_{3m}\exp(z_{3m}\mathrm{Fo}) =$$
$$= \exp(j_m\mathrm{Fo})\big[C_{1m}\exp[i\beta_m\mathrm{Fo}] + C_{2m}\exp(-i\beta_m)\mathrm{Fo}]\big] + C_{3m}\exp(z_{3m}\mathrm{Fo}) =$$
$$= \exp(j_m\mathrm{Fo})\big[\cos(\beta_m\mathrm{Fo})(C_{1m}+C_{2m}) - \sin(\beta_m\mathrm{Fo})(iC_{2m} - iC_{1m})\big] + C_{3m}\exp(z_{3m}\mathrm{Fo}) =$$
$$= \exp(j_m\mathrm{Fo})\big[B_{1m}\cos(\beta_m\mathrm{Fo}) - B_{2m}\sin(\beta_m\mathrm{Fo})\big] + C_{3m}\exp(z_{3m}\mathrm{Fo}), \tag{4.35}$$

где $B_{1m} = C_{1m} + C_{2m}$, $B_{2m} = i(C_{2m} - C_{1m})$, C_{3m} – постоянные интегрирования.

Подставим (4.30), (4.35) в (4.25) и составим сумму частных решений:

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \sum_{m=1}^{\infty}\big\{\exp(j_m\,\mathrm{Fo})\big[B_{1m}\cos(\beta_m\mathrm{Fo}) - B_{2m}\sin(\beta_m\mathrm{Fo})\big] +$$

$$+C_{3m}\exp(z_{3m}\mathrm{Fo})\}\psi_m \qquad (m=\overline{1,\infty}). \qquad (4.36)$$

Постоянные интегрирования B_{1m}, B_{2m}, C_{3m} определяются из начальных условий (4.20) – (4.22). Формулы для них будут

$$B_{1m}=(B_{2m}\beta-C_{3m}z_{3m})/\,j_m; \quad B_{2m}=[(j_m^2-\beta_m^2)B_{1m}+C_{3m}z_{3m}{}^2]/(2\,j_m\beta);$$

$$C_{3k}=-[(r^2\pi^2)B_{1k}+8\cos(0{,}5r\pi)-8]/(r^2\pi^2) \qquad (r=2m-1;\; m=\overline{1,\infty}).$$

2. Если дискриминант $D>0$, то будем иметь 3 действительных корня. Решение уравнения (4.26) в данном случае будет

$$\varphi_m=D_{1m}\exp(z_{1m}\mathrm{Fo})+D_{1m}\exp(z_{2m}\mathrm{Fo})+D_{3m}\exp(z_{3m}\mathrm{Fo}), \qquad (4.37)$$

где D_{1m}, D_{2m}, D_{3m} – коэффициенты.

Подставим (4.37) в (4.25) и составим сумму частных решений задачи:

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{m=1}^{\infty}\left[D_{1m}\exp(z_{1m}\mathrm{Fo})+D_{2m}\exp(z_{2m}\mathrm{Fo})+D_{3m}\exp(z_{3m}\mathrm{Fo})\right]\psi_m \qquad (4.38)$$

Коэффициенты D_{1m}, D_{2m}, D_{3m} определяются из начальных условий (4.20) – (4.22).

Формула (4.1) закона Гука с учетом обозначений $\Theta=U/U_0$ и $\xi=x/\delta$ в безразмерном виде будет

$$\bar{\sigma}=\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}, \qquad (4.39)$$

где $\bar{\sigma}=\sigma/(bE)$; $\Theta(\xi,\mathrm{Fo})$ – функция, описывающая распределение безразмерных перемещений в случае незатухающих колебаний упругих тел.

Точное аналитическое решение уравнения незатухающих колебаний имеет вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8}{(2m-1)^2\pi^2}\cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\mathrm{Fo}\right]\cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]. \qquad (4.40)$$

Результаты расчетов безразмерного напряжения по формуле (4.39) с учётом формулы (4.40) даны на рисунке 4.1. Из них видно, что колебания $\bar{\sigma}$ происходят с характерным «скачком» во времени.

Соотношение (4.10) в безразмерном виде будет

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\mathrm{Fo}}+A_1\bar{\sigma}=A_2(\mathrm{Fo}), \qquad (4.41)$$

где $A_1=1/\mathrm{Fo}_1$; $A_2(\mathrm{Fo})=\dfrac{1}{\mathrm{Fo}_1}\dfrac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}+\dfrac{R_1}{\mathrm{Fo}_1}\dfrac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi\partial\mathrm{Fo}}$.

Интегрируя уравнение (4.41), находим

$$\bar{\sigma}=[\int A_1A_2(\mathrm{Fo})\exp(A_1\mathrm{Fo})\,d\mathrm{Fo}+C]\exp(-A_1\mathrm{Fo}), \qquad (4.42)$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая из начального условия $\bar{\sigma}(0)=0$.

Анализ результатов расчетов напряжения по формуле (4.42) позволяет заключить, что напряжения различных точек стержня изменяются во времени по гармоническому закону (см. рисунок 4.2). То есть, учет релаксационных слагаемых позволяет устранить скачкообразное изменение напряжений.

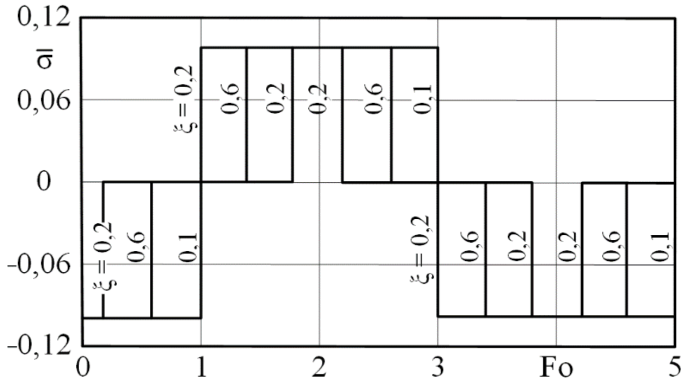


Рисунок 4.1. Распределение напряжений (расчет по формуле (4.39))

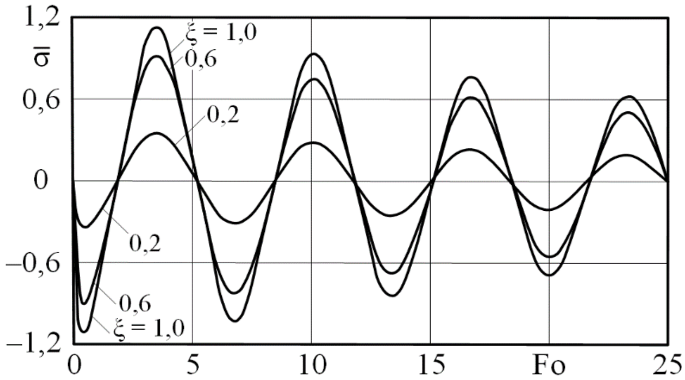


Рисунок 4.2. Распределение напряжений (расчет по формуле (4.42)): $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}1$

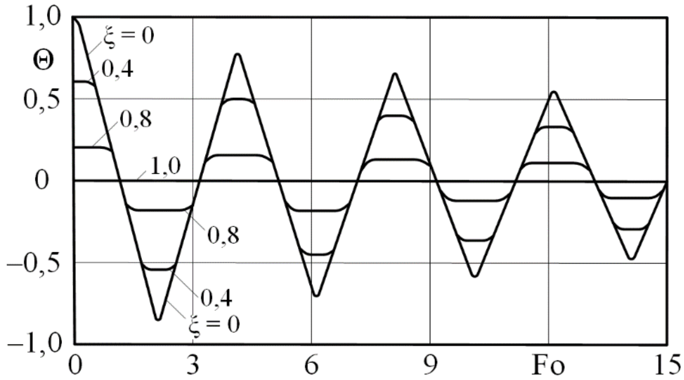


Рисунок 4.3. Изменение перемещений (расчет по формуле (4.36)): $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = \gamma = 0{,}1$; $n = 100$

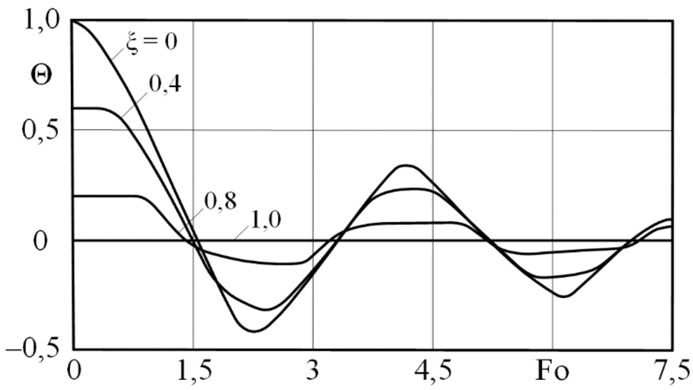


Рисунок 4.4. Изменение перемещений (расчет по формуле (4.36)): $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}1$; $\gamma = 0{,}5$; $n = 100$

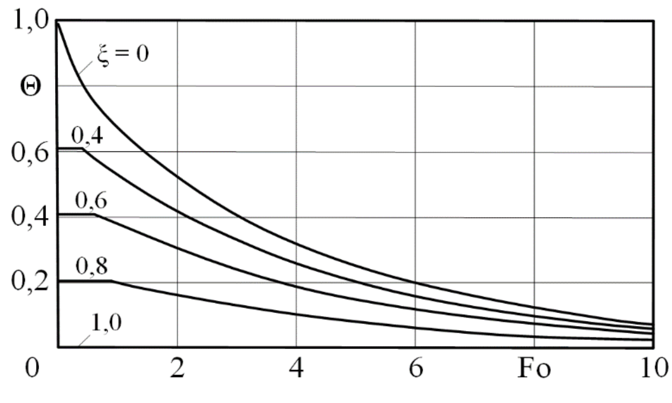


Рисунок 4.5. Изменение перемещений (расчет по формуле (4.36)): $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}1$; $\gamma = 30$; $n = 100$

На рисунках 4.3 – 4.5 приведены результаты расчетов перемещений по формуле (4.36) при $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = \gamma = 0{,}1$ (рисунок 4.3) и $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}1$, $\gamma = 0{,}5$ (рисунок 4.4); $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}1$, $\gamma = 30$ (рисунок 4.5). Из них следует, что с увеличением числа Fo_3 (при неизменных Fo_1, R_1) амплитуда колебаний уменьшается и при каких – то больших значениях величины γ $(\gamma > 5)$ наблюдается критическое затухание (см. рисунок 4.5), то есть возврат стержня в равновесное состояние происходит без колебаний отдельных его точек.

Таким образом, в диссертации построена математическая модель затухающих колебаний упругих тел с учетом сопротивления среды и релаксационных свойств материалов. Анализ полученных результатов позволяет заключить, что учет релаксационных слагаемых в законе Гука позволяет приблизиться к описанию реальных процессов, недопускающих бесконечных напряжений в начальный момент времени при граничных условиях первого рода, а также скачков искомой функции перемещений.

4.2. Математическая модель продольных колебаний стержня с учетом многократной релаксации напряжения и градиента перемещения в формуле закона Гука

В диссертационной работе впервые рассмотрено влияние производных высших порядков в уравнении продольных колебаний стержня. Для этого запишем уравнение (4.8), имеющее вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(U + \sum_{k=1}^{N} \tau_k^k \frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right) = e^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \sum_{k=1}^{N} r_k^k \frac{\partial^{k+1} U}{\partial x \partial t^k}\right) - \eta \frac{\partial}{\partial t}\left(U + \sum_{k=1}^{N} \tau_k^k \frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right)$$

, (4.43)

при $N = 2$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \tau_1 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \tau_2^2 \frac{\partial^4 U}{\partial t^4} = e^2\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + r_1 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} + r_2^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2}\right] -$$

$$-\eta \frac{\partial U}{\partial t} - \eta\tau_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \eta\tau_2^2 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3}, \qquad (4.44)$$

После некоторых преобразований уравнение (4.44) приводится к виду

$$\tau_2^2 \frac{\partial^4 U}{\partial t^4} + (\tau_1 + \eta\tau_2^2)\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + (1 + \eta\tau_1)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial U}{\partial t} =$$

$$= e^2\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + r_1 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} + r_2^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2}\right]. \qquad (4.45)$$

Найдем решение краевой задачи о колебаниях стержня, один торец которого жёстко закреплен (при $x = \delta$), а второй свободно перемещается. Решение отыскивается в области: $t > 0;\quad 0 < x < \delta$. Стержень деформирован по линейному закону, причем наибольшее удлинение в начальной момент времени имеет свободный конец стержня. Краевые условия к уравнению (6) в данном случае будут

$$U(x,0)=b(\delta-x)\,;\qquad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\frac{\partial^2 U(x,0)}{\partial t^2}=\frac{\partial^3 U(x,0)}{\partial t^3}=0\,; \tag{4.46}$$

$$U(\delta,t)=0\,;\qquad \frac{\partial U(0,t)}{\partial x}=0\,. \tag{4.47}$$

где δ – длина стержня, *м*; b – коэффициент, учитывающий начальное перемещение стержня.

Задача (4.45) – (4.47) может быть приведена к безразмерному виду. Для этого введем в рассмотрение безразмерные переменные и параметры аналогично п. 4.1:

$$\Theta=\frac{U}{U_0};\quad \xi=\frac{x}{\delta};\quad \mathrm{Fo}=\frac{et}{\delta};\quad \mathrm{Fo}_1=\frac{e\tau_1}{\delta};\quad R_1=\frac{er_1}{\delta};\quad \gamma=\frac{\delta\eta}{e}\,, \qquad .$$

С учетом введенных безразмерных переменных и параметров задача (4.45) – (4.47) записывается в виде

$$\mathrm{Fo}_2^2\frac{\partial^4\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^4}+(\mathrm{Fo}_1+\gamma\mathrm{Fo}_2^2)\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^3}+(1+\gamma\mathrm{Fo}_1)\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2}+\gamma\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}=$$

$$=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}+R_1\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2\partial\mathrm{Fo}}+R_2^2\frac{\partial^4\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2\partial\mathrm{Fo}^2}\quad(\mathrm{Fo}>0;\quad 0<\xi<1)\,; \tag{4.48}$$

$$\Theta(\xi,0)=1-\xi\,;\qquad \frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,0)}{\partial\mathrm{Fo}^2}=\frac{\partial^3\Theta(\xi,0)}{\partial\mathrm{Fo}^3}=0\,; \tag{4.49}$$

$$\Theta(1,\mathrm{Fo})=0\,;\qquad \frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=0\,. \tag{4.50}$$

Следуя методу разделения переменных Фурье, решение задачи (4.48) – (4.50) отыскивается в виде произведения двух функций

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\varphi(\mathrm{Fo})\,\psi(\xi)\,, \tag{4.51}$$

где $\varphi(\mathrm{Fo})$ – неизвестная функция времени; $\psi(\xi)$ – неизвестная функция координаты.

Подставив (4.51) в (4.48), получим

$$\mathrm{Fo}_1^2\frac{d^4\varphi}{d\,\mathrm{Fo}^4}+\mathrm{Fo}_1\mathrm{Fo}_4\frac{d^3\varphi}{d\,\mathrm{Fo}^3}+(\mathrm{Fo}_2^2\nu_m+\mathrm{Fo}_4)\frac{d^2\varphi}{d\,\mathrm{Fo}^2}+$$

$$+(\nu_m\mathrm{Fo}_2+\mathrm{Fo}_3)\frac{d\varphi}{d\,\mathrm{Fo}}+\nu_m\varphi=0\,; \tag{4.52}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\,\xi^2}+\nu_m\,\psi=0\,, \tag{4.53}$$

где ν_m – постоянная $(m=\overline{1,\infty})$.

Краевые условия к уравнению (4.53), согласно (4.50) будут

$$\psi(1)=0\,;\qquad \frac{d\,\psi(0)}{d\,\xi}=0\,. \tag{4.54}$$

Решение для задачи (4.53) – (4.54) отыскивается в виде

$$\psi(\xi)=\cos\left((2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right)\qquad (m=\overline{1,\infty}). \qquad (4.55)$$

Условия (4.54) удовлетворяются соотношением (4.55). Подстановкой (4.55) в (4.53) находим формулу для вычисления ν_m

$$\nu_m=\frac{\pi^2(2m-1)^2}{4}\qquad (m=\overline{1,\infty}). \qquad (4.56)$$

Характеристическое уравнение к дифференциальному уравнению (4.52) записывается в виде

$$\mathrm{Fo}_1^2 z^4+\mathrm{Fo}_1\mathrm{Fo}_4 z^3+(\mathrm{Fo}_2^2\nu_m+\mathrm{Fo}_4)z^2+(\nu_m\mathrm{Fo}_2+\mathrm{Fo}_3)z+\nu_m\varphi=0. \qquad (4.57)$$

Частные решения дифференциального уравнения (4.57) записываются в виде

$$\varphi_m(\mathrm{Fo})=\sum_{j=1}^{4}C_{jm}\exp(z_{jm}\mathrm{Fo})\qquad (m=\overline{1,\infty}), \qquad (4.58)$$

где C_{jm} – неизвестные коэффициенты; z_{jm} – корни характеристического уравнения (4.57), определяемые численно.

Подставляя (4.55), (4.58) в (4.51), получаем

$$\Theta_m(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{j=1}^{4}C_{jm}\exp(z_{jm}\mathrm{Fo})\cos\left((2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right)\qquad (m=\overline{1,\infty}). \qquad (4.59)$$

Все частные решения (4.59) удовлетворяют уравнению (4.48) и граничным условиям (4.50). Для выполнения начальных условий (4.49) запишем сумму частных решений в виде

$$\Theta(\xi,\,\mathrm{Fo})=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{4}C_{jm}\exp(z_{jm}\mathrm{Fo})\cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]\right\}. \qquad (4.60)$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты C_{jm} составим невязку начальных условий (4.49) и потребуем ортогональности невязки ко всем собственным функциям. Вследствие ортогональности системы базисных функций (косинусов), решение получаемой системы 4 m уравнений для C_{jm}, сводится к решению четырех алгебраических уравнений для каждого значения m вида

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^1(C_{1m}+C_{2m}+C_{3m}+C_{4m})\cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]^2 d\xi-\int_0^1(1-\xi)\cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]=0;\\ \displaystyle\int_0^1(C_{1m}z_{1m}+C_{2m}z_{2m}+C_{3m}z_{3m}+C_{4m}z_{4m})\cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]^2 d\xi=0;\\ \displaystyle\int_0^1(C_{1m}z_{1m}^2+C_{2m}z_{2m}^2+C_{3m}z_{3m}^2+C_{4m}z_{4m}^2)\cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]^2 d\xi=0;\\ \displaystyle\int_0^1(C_{1m}z_{1m}^3+C_{2m}z_{2m}^3+C_{3m}z_{3m}^3+C_{4m}z_{4m}^3)\cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]^2 d\xi=0.\end{cases}$$

После вычисления неизвестных коэффициентов C_{jm} решение задачи (4.48) – (4.50) находится из (4.60).

Результаты расчетов по формуле (4.60) представлены на рисунках 4.6, 4.7.

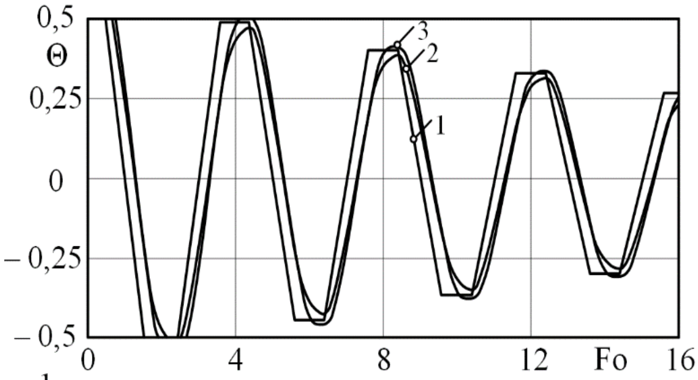


Рисунок 4.6. Колебания стержня во времени ($\gamma = 0{,}1$):
1 – $\mathrm{Fo}_k = R_k = 0$ $(k = 1,\ 2)$;
2 – $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}3,\ \ \mathrm{Fo}_2 = R_2 = 0$;
3 – $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}3,\ \mathrm{Fo}_2 = R_2 = 0{,}21$

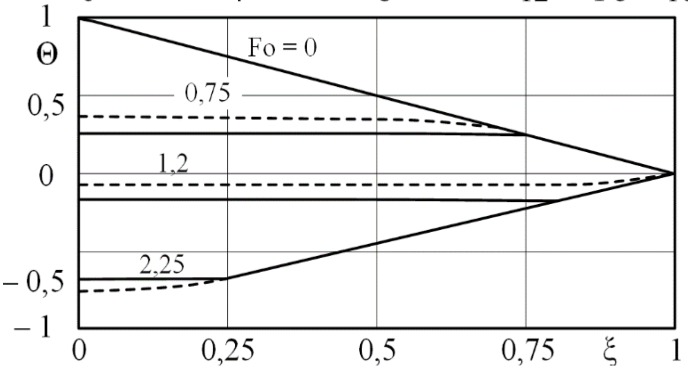


Рисунок 4.7. Распределение перемещений по координате ($\gamma = 0{,}1$): сплошная линия – без релаксации; прерывистая линия – с релаксацией ($\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}3$, $\mathrm{Fo}_2 = R_2 = 0{,}21$)

Из их анализа следует, что учет релаксационных свойств среды приводит к существенному изменению профиля волны. На рис. 4.6 представлены результаты расчетов перемещений по формуле (4.60) в точке $\xi = 0{,}4$. Из их анализа следует, что учет релаксационных слагаемых в уравнении движения приводит к сглаживанию профиля волны, устраняя скачки искомой функции. Причем, влияние на колебательный процесс оказывают и производные высокого порядка (при достаточно больших значениях коэффициентов релаксации).

На рисунке 4.7 представлено распределение перемещений по координате в различные моменты времени. Отмечается, что при учете релаксационных свойств материалов имеет место запаздывание функции перемещения в каждый момент времени (в сравнении со случаем, когда релаксационные свойства не учитываются).

4.3. Экспериментально – теоретические исследования продольных колебаний стержня

С целью подтверждения адекватности полученных в п. 4.1, 4.2 аналитических решений в диссертации приводятся также результаты экспериментальных исследований, выполненных в рамках Соглашения о сотрудничестве с АО «Ракетно – космический центр «Прогресс» №1 – сотр от 26.04.2017 г. (см. Приложения). Исследования выполнялись на специализированном оборудовании АО «РКЦ «Прогресс», включающем стенд для создания начальных удлинений и индуктивный датчик перемещений, фиксирующий продольные колебания свободного торца стержня.

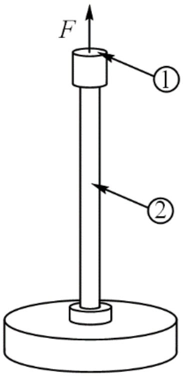


Рисунок 4.8. Принципиальная схема измерений: 1, 2 – схема размещения датчиков перемещения

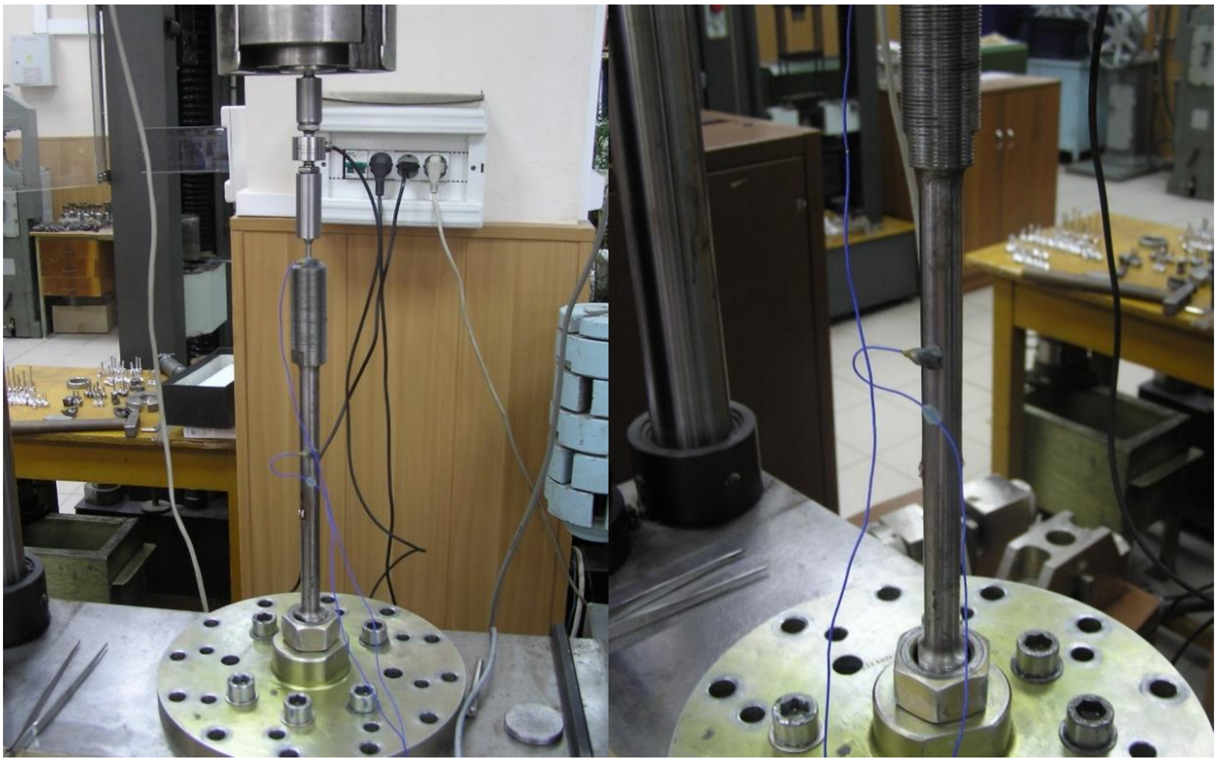


Рисунок 4.9. Схема закрепления стержня

Испытательный стенд представлен на рисунке 4.9. В соответствии с протоколом испытаний исследовался стержень круглого сечения из стали марки 30ХГСА. Диаметр стержня составлял 17 *мм*, а длина – 310 *мм*. Один из торцов стержня закреплялся на силовой раме и оставался неподвижным в течении всего испытания (см. рисунки 4.8 – 4.10). В свободный торец стержня вворачивалась цилиндрическая шпилька малого диаметра (4 *мм*). Диаметр шпильки подбирался исходя из требуемого начального удлинения (0,1 *мм*) и характеристик разрывной машины. После разрыва шпильки стержень совершал продольные колебания. Амплитуда колебаний и их частота фиксировались в заранее определенных сечениях стержня (см. рисунок 4.8) – на свободном торце и в середине.

Результаты выполненных исследований приведены на рисунках 4.11 – 4.17. Из анализа результатов экспериментальных исследований следует, что можно выделить два временны́х участка, в пределах которых колебательные процессы, существенно отличаются. И, в частности, на участке времени $0 < t \le 0{,}015$ c происходит неупорядоченное (скачкообразное) уменьшение амплитуды колебаний, а на участке $0{,}015 < t \le 0{,}1$ c – линейное (рисунки 4.11 и 4.12 (в безразмерном виде)). Опытные данные показали, что коэффициент сопротивления среды γ на начальном временном промежутке колебательного процесса (участке 1) на порядок больше, чем на участке 2 (рисунок 4.12). Это объясняется наличием высокочастотных (до 2400 $Гц$) колебаний на участке 1, приводящих к увеличению энтропии системы в результате диссипации энергии.

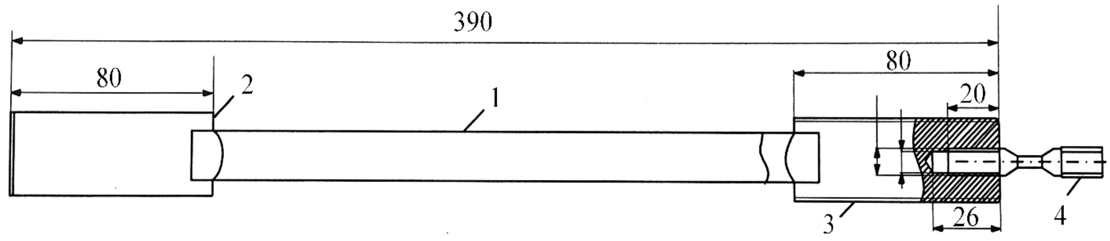


Рисунок 4.10. Схема закрепления стержня

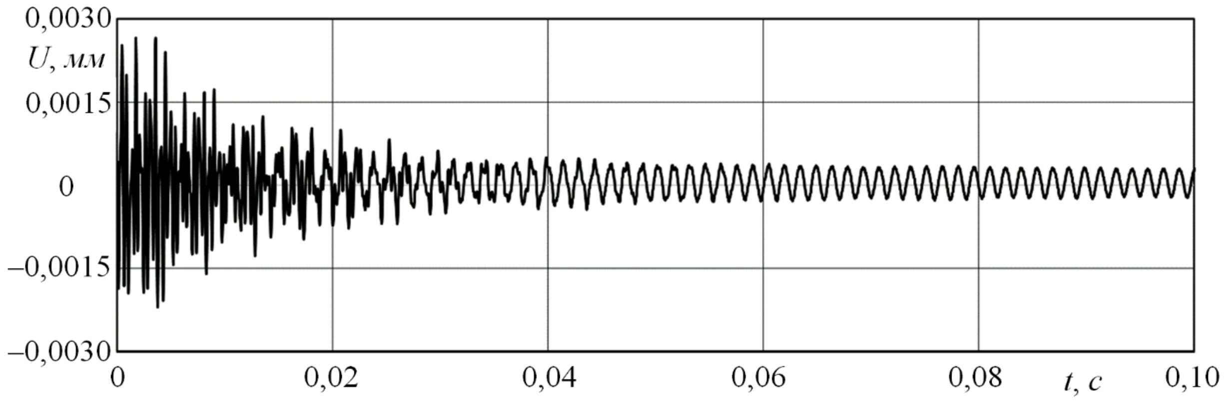


Рисунок 4.11. Колебания свободного торца стержня при $0 \le t \le 0{,}1$ с (эксперимент)

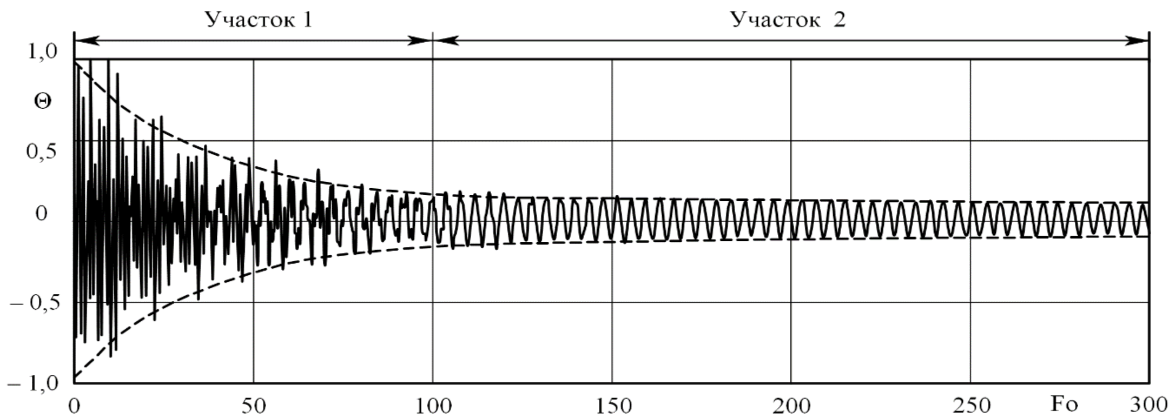


Рисунок 4.12. Колебания стержня на участках неупорядоченного и линейного изменения амплитуды (эксперимент)

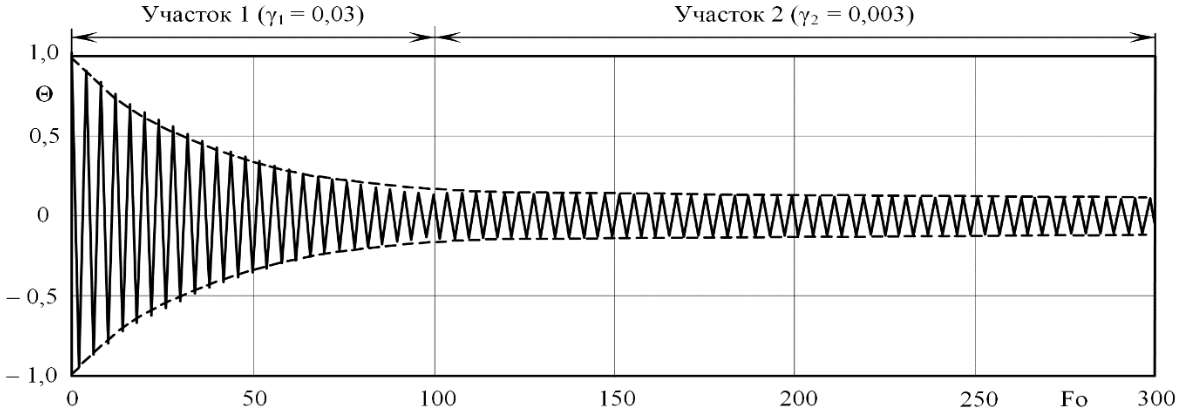


Рисунок 4.13. Результаты расчетных колебаний стержня при различных коэффициентах сопротивления на участках экспоненциального и линейного изменения амплитуды

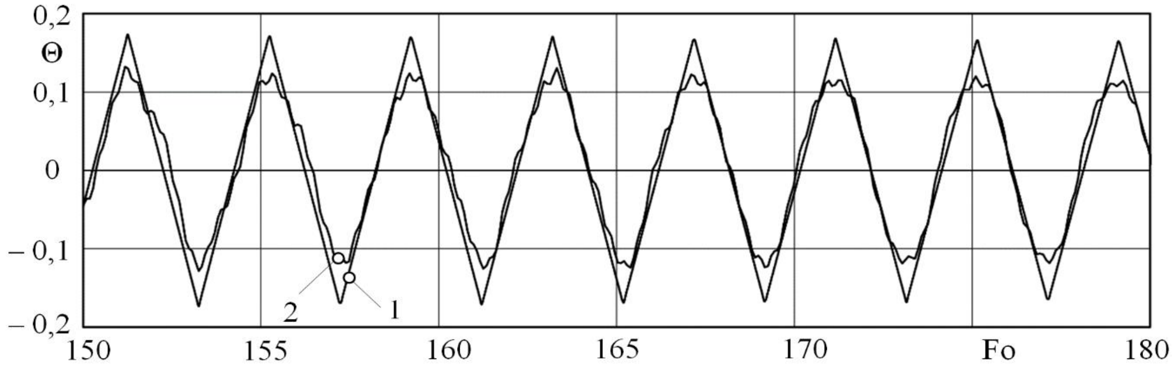


Рисунок 4.14. Колебания стержня на участке линейного изменения амплитуды (в увеличенном масштабе): 1 – расчет при $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0,\ \gamma_2 = 0{,}003$; 2 – эксперимент

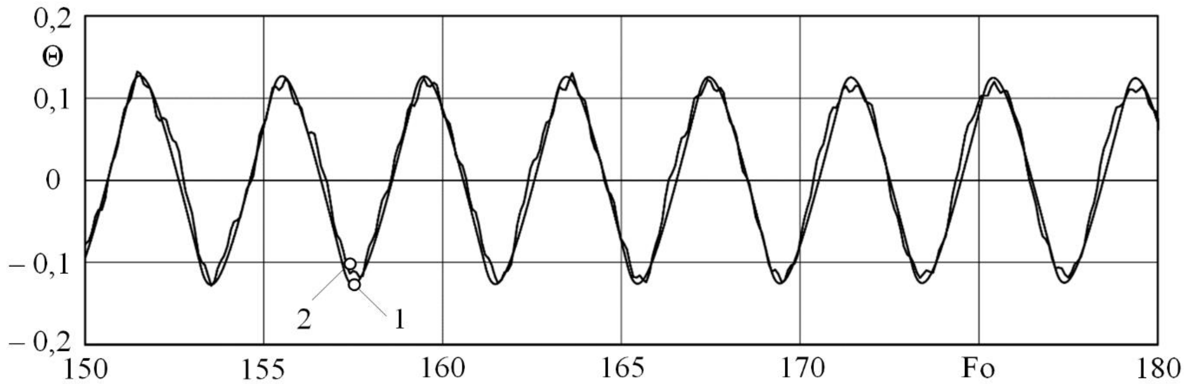


Рисунок 4.15. Колебания стержня на участке линейного изменения амплитуды (в увеличенном масштабе): 1 – расчет при $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}5,\ \gamma_2 = 0{,}003$; 2 – эксперимент

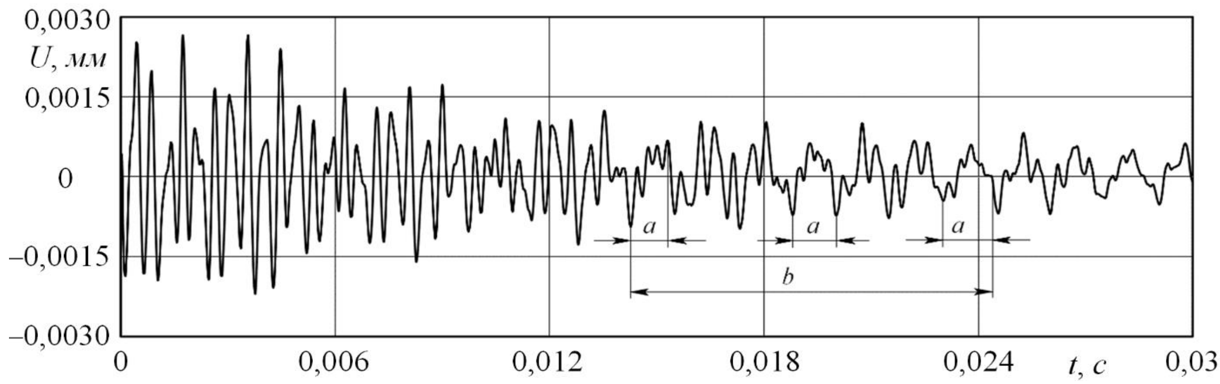


Рисунок 4.16. Колебания свободного торца стержня во времени (эксперимент)

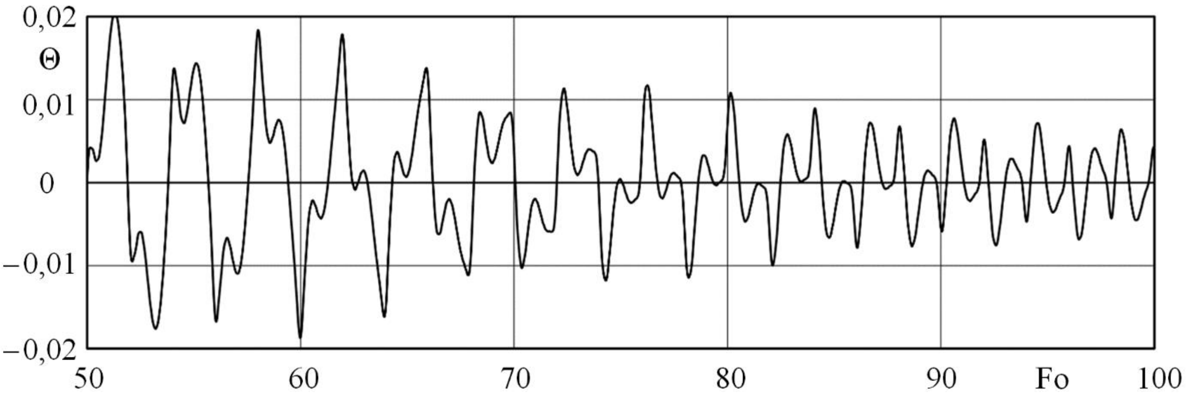


Рисунок 4.17. Колебания торца стержня во времени Fo: $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 2,\ \gamma = 1{,}2$

На втором временном участке частота колебаний уменьшается (до 600 *Гц*), по этой причине и величина коэффициента затухания γ в теоретической модели принимается меньшей. Отметим, что на первом временном участке амплитуда колебаний в теоретическом исследовании осреднялась и принималась экспоненциально затухающей. Безразмерные коэффициенты сопротивления оказались равными $\gamma_1 = 0{,}03$ – для первого временного участка и $\gamma_1 = 0{,}003$ – для второго. Коэффициенты релаксации принимались одинаковыми и показали, что их неучёт приводит к более высокой амплитуде колебаний по сравнению с экспериментальными данными при практически совпадающей частоте колебаний (рисунок 4.14). Учёт коэффициентов релаксации приводит к практическому совпадению результатов теоретических и экспериментальных исследований (рисунок 4.15).

Использованное при проведении эксперимента оборудование, позволило выполнить анализ колебательного процесса в диапазоне сверхмалых значений времени (см. рисунок 4.16). Из анализа представленных результатов видно, что свободный торец стержня участвует во многих (теоретически в бесконечном количестве) колебательных процессах (см. рисунок 4.16). То есть процесс сжатия (или растяжения) стержня одновременно сопровождается его малоамплитудными и высокочастотными колебаниями. Результаты экспериментальных исследований, приведенных на рисунке 4.16, теоретической моделью подтверждаются лишь качественно как по амплитуде, так и по частоте колебаний. При этом необходимо задавать коэффициенты релаксации $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 2$, несколько превышающие их значения на участке линейного изменения амплитуды (рисунок 4.17).

Для подтверждения результатов рассматриваемая задача была решена методом конечных разностей. Для этого в исследуемой области строилась пространственно – временная сетка с шагами $\Delta\xi = 0{,}01$, $\Delta\mathrm{Fo} = 0{,}005$ соответственно по переменным ξ и Fo так, что

$$\xi_k = k\,\Delta\xi, \quad k = \overline{0, K}; \quad \Delta\mathrm{Fo}_i = i\,\Delta\mathrm{Fo}, \quad i = \overline{0, I}, \tag{4.61}$$

где $K = 200$, $I = 50000$ – количество шагов по переменным ξ, Fo.

На сетке (4.68) вводятся сеточные функции $\Theta_k^i = \Theta(\xi_k, \mathrm{Fo}_i)$. Используя принятую схему аппроксимации, исходная краевая задача (4.19) – (4.24) записывается в виде

$$\mathrm{Fo}_1\frac{\Theta_k^{i+1}-3\Theta_k^{i}+3\Theta_k^{i-1}-\Theta_k^{i-2}}{\Delta\mathrm{Fo}^3}+(1+\gamma\mathrm{Fo}_1)\frac{\Theta_k^{i-1}-2\Theta_k^{i}+\Theta_k^{i+1}}{\Delta\mathrm{Fo}^2}+\gamma\frac{\Theta_k^{i+1}-\Theta_k^{i}}{\Delta\mathrm{Fo}}=$$

$$=\frac{\Theta_{k-1}^{i}-2\Theta_k^{i}+\Theta_{k+1}^{i}}{\Delta\xi^2}+R_1\left(\frac{\Theta_{k-1}^{i}-2\Theta_k^{i}+\Theta_{k+1}^{i}}{\Delta\xi^2\Delta\mathrm{Fo}}-\frac{\Theta_{k-1}^{i-1}-2\Theta_k^{i-1}+\Theta_{k+1}^{i-1}}{\Delta\xi^2\Delta\mathrm{Fo}}\right);$$

$$\Theta_k^0=1-\xi_k;\qquad \frac{\Theta_k^1-\Theta_k^0}{\Delta\mathrm{Fo}}=0;\qquad \frac{\Theta_k^0-2\Theta_k^1+\Theta_k^2}{\Delta\mathrm{Fo}}=0;$$

$$\frac{\Theta_1^i-\Theta_0^i}{\Delta\xi}=0;\qquad \Theta_K^i=0.$$

Расхождение результатов расчетов по формулам (4.36), (4.38) с результатами численного решения при указанных пространственно – временных шагах сетки не превышают 0,1%.

4.4. Математическая модель поперечных колебаний упругого стержня с учетом двухфазного запаздывания

Получено уравнение поперечных колебаний закрепленного на одном из торцов стержня с учетом сил сопротивления и релаксационных свойств материалов. Используя метод разделения переменных найдено его точное аналитическое решение детальный анализ которого показал, что колебания каждой точки стержня происходят с несколькими амплитудами и частотами. При этом большой амплитуде соответствует малая частота, а малой амплитуде – большая. Минимальную частоту имеет свободный торец стержня.

Частота колебаний участков стержня с приближением к точке закрепления возрастает при уменьшающейся амплитуде колебаний. Переход свободного торца стержня из одного крайнего положения в другое происходит с временной задержкой пребывания в каждом из крайних положений, что подтверждается и экспериментальными исследованиями (см. п. 4.5.). В продольном направлении форма стержня имеет волновой характер с максимальной амплитудой в средней части по длине стержня.

При выводе уравнения поперечных колебаний стержня предполагается, что в исходном недеформированном состоянии его упругая ось является прямолинейной и совпадающей с линией центров тяжести поперечных сечений стержня. В этом случае приложение внешней силы по направлению данной оси при изгибе стержня не вызывает его кручения. Эта ось принимается за продольную координатную ось x, от которой отсчитываются отклонения различных поперечных сечений стержня, перпендикулярных данной оси. При этом считается, что отклонение различных точек стержня, расположенных на главной оси, происходят перпендикулярно ее прямолинейному недеформированному состоянию, то есть пренебрегается смещениями этих точек вдоль оси x. Предполагается также, что поперечные колебания различных точек главной оси стержня происходят в плоскости колебаний и являются настолько малыми, что восстанавливающие силы находятся в пределах пропорциональности.

При указанных допущениях поперечные отклонения точек оси стержня однозначно определяются продольной координатой и временем. Полученное с учетом этих допущений уравнение поперечных колебаний стержня имеет вид

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = 0 \qquad (t > 0;\ \ 0 < x < l), \tag{4.62}$$

где y – поперечные перемещения оси стержня; x – продольная координата; t – время; $a = EI/\rho S$; E – модуль упругости; I – момент инерции поперечного сечения стержня относительно своей горизонтальной оси; ρ – плотность стержня; S – площадь поперечного сечения; l – длина стержня.

Уравнение (4.62) представляет линейное уравнение четвертого порядка, в котором не учитываются релаксационные свойства материалов и их сопротивление процессу колебаний, то есть оно описывает незатухающие колебания.

Исследование колебаний стержня с учетом внутреннего сопротивления связано с существенными упрощениями понятий о его природе. Предлагаемые формулы его учета, как правило, не раскрывают механизма их появления, который до настоящего времени остается неизвестным. Например, согласно формуле Фойхта сила внутреннего сопротивления пропорциональна первой степени скорости деформации или, что тоже самое, скорости изменения упругой восстанавливающей силы. Так как в уравнении (4.62) упругая восстанавливающая сила описывается первым слагаемым, то скорость ее уменьшения будет

$$a^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial y^4(x,t)}{\partial x^4}\right) = a^2 \frac{\partial^5 y(x,t)}{\partial x^4 \partial t}. \tag{4.63}$$

С учетом (4.63) сила внутреннего сопротивления будет

$$F_{\text{с}} = \eta a^2 \frac{\partial^5 y(x,t)}{\partial x^4 \partial t}, \tag{4.64}$$

где η – коэффициент сопротивления, имеющий размерность времени.

Подставляя (4.64) в (4.62), получаем

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \eta a^2 \frac{\partial^5 y(x,t)}{\partial x^4 \partial t} = 0. \tag{4.65}$$

Уравнение (4.65) описывает затухающие колебания ввиду учета внутреннего сопротивления. Однако предположение о пропорциональности внутреннего сопротивления скорости деформации опытом не подтверждается. Этот факт можно объяснить тем, что последнее слагаемое уравнения (4.65) описывает не только сопротивление материала, но и его релаксационные свойства. То есть это слагаемое характеризует также запаздывание колебаний, оцениваемое коэффициентом сопротивления η, являющимся, по сути, коэффициентом релаксации, о чем свидетельствует и его размерность. Однако в данном случае запаздывание является однократным.

В работах [41, 65] показано, что учет однократного запаздывания приводит к скачкообразному изменению искомой функции. С целью сглаживания процесса колебаний следует использовать двукратное запаздывание. Для этого продифференцируем первое слагаемое уравнения (4.62) по времени, умножив его на некоторый коэффициент релаксации τ_1, и подставим полученное соотношение в уравнение (4.72)

$$\tau_1 \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \eta a^2 \frac{\partial^5 y(x,t)}{\partial x^4 \partial t} = 0 . \qquad (4.66)$$

Уравнение (4.66) учитывает релаксационные свойства среды с учетом двукратного запаздывания и, к тому же, оно описывает затухающие колебания. Если положить $\tau_1 = 0$ и $\eta = 0$, то уравнение (4.66) приводится к уравнению (4.62).

Отметим, что первое слагаемое уравнения (4.66), характеризует запаздывание натяжения стержня в формуле закона Гука, а последнее – градиент перемещения.

Начальные и граничные условия к уравнению (4.66) записываются в виде

$$y(x,0) = bx; \qquad (4.67) \qquad\qquad \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} = 0; \qquad (4.68)$$

$$\frac{\partial^2 y(x,0)}{\partial t^2} = 0; \qquad (4.69) \qquad\qquad y(0,t) = 0; \qquad (4.70)$$

$$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0; \qquad (4.71) \qquad\qquad \frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2} = 0; \qquad (4.72)$$

$$\frac{\partial^3 y(l,t)}{\partial x^3} = 0, \qquad (4.73)$$

где b – безразмерный коэффициент.

Согласно условиям (4.68), (4.69) начальные скорости и начальные ускорения принимаются равными нулю. Условия (4.70) и (4.70) обозначают равенство нулю прогиба и угла поворота в точке $x = 0$. Согласно условию (4.72) изгибающий момент на свободном торце стержня равен нулю, а по условию (4.72) принимается, что в течение всего времени процесса колебания тангенциальная сила на свободном торце стержня равна нулю.

Приведем задачу (4.66) – (4.73) к безразмерному виду. Обозначим:

$$\Theta = \frac{y}{y_0}; \quad \mathrm{Fo} = \frac{at}{l^2}; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad \mathrm{Fo}_1 = \frac{a\tau_1}{l^2}; \quad \gamma = \frac{a\eta}{l^2}, \qquad (4.74)$$

где Θ – безразмерное перемещение; Fo – число Фурье (безразмерное время); ξ – безразмерная координата; Fo_1 – безразмерный коэффициент релаксации; γ – безразмерный коэффициент сопротивления; $y_0 = bl$.

С учетом обозначений (4.74) задача о поперечных колебаниях поперечного стержня (4.66) – (4.73) примет вид

$$\mathrm{Fo}_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \mathrm{Fo}^3} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \mathrm{Fo}^2} + \frac{\partial^4 \Theta}{\partial \xi^4} + \gamma \frac{\partial^5 \Theta}{\partial \xi^4 \partial \mathrm{Fo}} = 0 \quad (\mathrm{Fo} > 0; \ \ 0 < \xi < 1); \qquad (4.75)$$

$$\Theta(\xi,0)=\xi\,; \qquad (4.76) \qquad\qquad \frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}}=0\,; \qquad (4.77)$$

$$\frac{\partial^2\Theta(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}^2}=0\,; \qquad (4.78) \qquad\qquad \Theta(0,\mathrm{Fo})=0\,; \qquad (4.79)$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=0\,; \qquad (4.80) \qquad\qquad \frac{\partial^2\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}=0\,; \qquad (4.81)$$

$$\frac{\partial^3\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3}=0\,. \qquad (4.82)$$

Решение задачи (4.75) – (4.82) принимается в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\varphi(\mathrm{Fo})\psi(\xi)\,. \qquad (4.83)$$

Подставляя (4.82) в (4.75), находим

$$\mathrm{Fo}_1\varphi'''+\varphi''+\gamma\nu\varphi'+\nu\varphi=0\,; \qquad (4.84)$$

$$\psi_\xi^{IV}+\nu\psi=0\,, \qquad (4.85)$$

где $\varphi'=\partial\varphi/\partial\mathrm{Fo}$; $\varphi''=\partial^2\varphi/\partial\mathrm{Fo}^2$; $\varphi'''=\partial^3\varphi/\partial\mathrm{Fo}^3$; $\psi_\xi^{IV}=\partial^4\psi/\partial\xi^4$; ν – некоторая постоянная.

Граничные условия к уравнению (4.85) принимают вид

$$\psi(0)=0\,; \qquad (4.86) \qquad\qquad \frac{\partial\psi(0)}{\partial\xi}=0\,; \qquad (4.87)$$

$$\frac{\partial^2\psi(1)}{\partial\xi^2}=0\,; \qquad (4.88) \qquad\qquad \frac{\partial^3\psi(1)}{\partial\xi^3}=0\,. \qquad (4.89)$$

Интегрируя уравнение (4.85) получаем

$$\psi(\xi)=A\cosh(\omega)+B\sinh(\omega)+C\cos(\omega)+D\sin(\omega)\,, \qquad (4.90)$$

где $\omega=\xi\sqrt[4]{\nu}$; A, B, C, D – постоянные интегрирования.

Подставляя (4.90) в (4.86), (4.87), находим $C=-A$; $D=-B$. Соотношение (4.90) принимает вид

$$\psi(\xi)=A(\cosh(\omega)-\cos(\omega))+B(\sinh(\omega)-\sin(\omega))\,. \qquad (4.91)$$

Постоянные интегрирования A и B находятся из граничных условий (4.88), (4.89). Подставляя (4.91) в (4.88), (4.89), находим

$$\left.\begin{aligned} &A(\cosh(\mu)+\cos(\mu))+B(\sinh(\mu)+\sin(\mu))=0;\\ &A(\sinh(\mu)-\sin(\mu))+B(\cosh(\mu)+\cos(\mu))=0,\end{aligned}\right\} \qquad (4.92)$$

где $\mu=\sqrt[4]{\nu}$.

Однородная система уравнений имеет нетривиальное решение в случае, если ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix}\cosh(\mu)+\cos(\mu) & \sinh(\mu)+\sin(\mu)\\ \sinh(\mu)-\sin(\mu) & \cosh(\mu)+\cos(\mu)\end{vmatrix}=0\,. \qquad (4.93)$$

Раскрывая определитель, находим

$$\cosh(\mu)\cos(\mu)=-1. \qquad (4.94)$$

Из решения трансцендентного уравнения (4.94) получаем собственные числа μ_k краевой задачи Штурма – Лиувилля (4.85) – (4.89). Первые 6 чисел следующие: $\mu_1 = 1{,}875$; $\mu_2 = 4{,}694$; $\mu_3 = 7{,}855$; $\mu_4 = 10{,}996$; $\mu_5 = 14{,}137$; $\mu_6 = 17{,}279$. Собственные функции находятся из (4.91).

Коэффициенты A и B соотношения (4.91) для каждого собственного числа находятся из системы уравнений (4.92). В однородной системе полагаем $A = 1$ для каждого собственного числа. Первые четыре коэффициента равны соответственно $B_1 = -0{,}734$; $B_2 = -1{,}01846$; $B_3 = -0{,}99922$; $B_4 = -1{,}00033$.

Характеристическое уравнение для (4.84) будет

$$\mathrm{Fo}_1 z^3 + z^2 + \gamma\nu z + \nu = 0. \qquad (4.95)$$

Решение уравнения (4.95) имеет вид

$$\varphi(\mathrm{Fo}) = C_{1k} e^{z_{1k}\mathrm{Fo}} + C_{2k} e^{z_{2k}\mathrm{Fo}} + C_{3k} e^{z_{3k}\mathrm{Fo}}, \qquad (4.96)$$

где C_{1k}, C_{2k}, C_{3k} – константы интегрирования; z_{1k}, z_{2k}, z_{3k} – корни характеристического уравнения (4.102).

Подставляя (4.91), (4.96) в (4.83) находим

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = (C_{1k} e^{z_{1k}\mathrm{Fo}} + C_{2k} e^{z_{2k}\mathrm{Fo}} + C_{3k} e^{z_{3k}\mathrm{Fo}})(\cosh(\omega) - \\ - \cos(\omega) + B(\sinh(\omega) - \sin(\omega)). \qquad (4.97)$$

Каждое частное решение (4.97) удовлетворяет уравнению (4.75) и граничным условиям (4.79) – (4.82). Но ни одно из них не удовлетворяет начальным условиям (4.76) – (4.78). Для их вычисления составим сумму частных решений

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big[(C_{1k} e^{z_{1k}\mathrm{Fo}} + C_{2k} e^{z_{2k}\mathrm{Fo}} + C_{3k} e^{z_{3k}\mathrm{Fo}})(\cosh(\omega) - \\ - \cos(\omega) + B(\sinh(\omega) - \sin(\omega)) \Big]. \qquad (4.98)$$

Константы интегрирования C_{1k}, C_{2k}, C_{3k} находятся из начальных условий (4.76) – (4.78) путем составления их невязки и выполнения требований ее ортогональности ко всем собственным функциям $\psi_k(\xi)$. Ввиду ортогональности собственных функций, неизвестные в бесконечной системе алгебраических линейных уравнений относительно констант интегрирования разделяются. В итоге для их определения необходимо решать в общем виде три алгебраических уравнения относительно трех констант интегрирования.

После определения констант интегрирования точное аналитическое решение задачи (4.75) – (4.82) в замкнутом виде находится из (4.98).

Результаты расчетов перемещений по формуле (4.98) даны на рисунках 4.18, 4.19. На рисунке 4.18 представлены результаты расчетов без учета релаксационных свойств материала ($\mathrm{Fo}_1 = \gamma = 0$). Из его анализа следует, что частота колебаний различных точек стержня по высоте имеет различную величину. Так, минимальная частота колебаний наблюдается на свободном торце стержня ($\xi = 0{,}9$), а максимальная при $\xi = 0{,}2$. Интересной особенностью колебательного процесса является наличие временной задержки стержня в крайних положениях.

На рис. 4.19 даны результаты расчетов при учете релаксационных свойств материала $(\mathrm{Fo}_1 = \gamma = 0{,}1)$. Их анализ позволяет заключить, что учет релаксационных свойств приводит к сглаживанию процесса колебаний – к устранению скачкообразного изменения искомой функции.

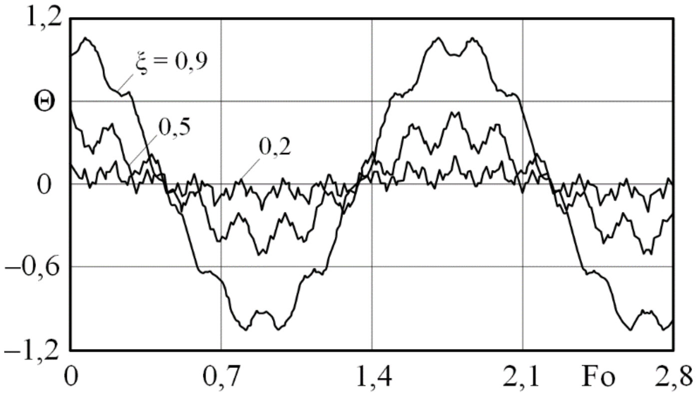


Рисунок 4.18. Перемещение различных точек стержня во времени без учета релаксационных свойств $(\mathrm{Fo}_1 = \gamma = 0)$

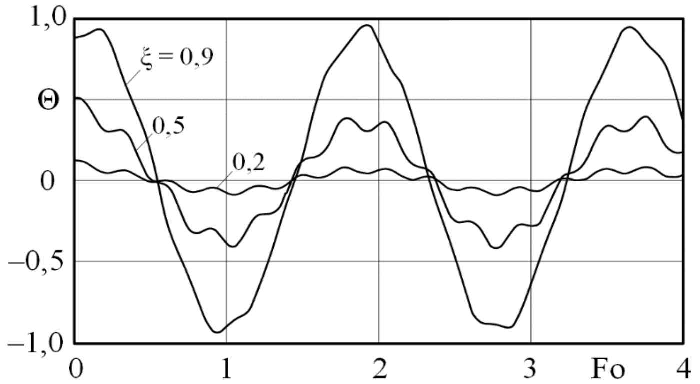


Рисунок 4.19. Перемещение различных точек стержня во времени с учетом релаксационных свойств $(\mathrm{Fo}_1 = \gamma = 0{,}2)$

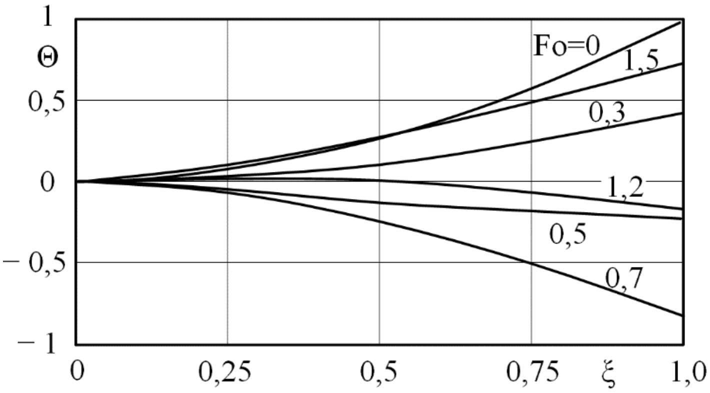


Рисунок 4.20. Колебания свободного конца стержня во времени $(\mathrm{Fo}_1 = \gamma = 10^{-3})$

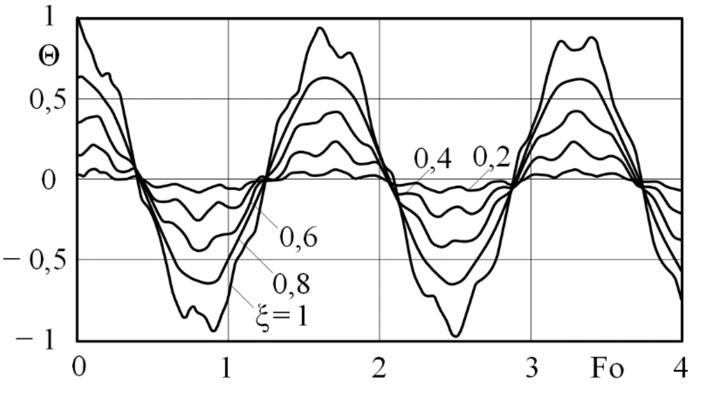


Рисунок 4.21. Колебания различных точек стержня во времени с учетом релаксационных свойств $(\mathrm{Fo}_1 = \gamma = 10^{-3})$

В диссертации получено также решение задачи о поперечных колебаниях стержня при квадратичном распределении функции Θ в начальный момент времени. В этом случае в постановке задачи (4.75) – (4.82) следует заменить начальное условие (4.76) на следующее:

$$\Theta(\xi,0) = \xi^2 .$$

Безразмерные переменные и параметры вводятся аналогично (4.74) за исключением безразмерного перемещения

$$\Theta = y / y_0 ,$$

где $y_0 = bl^2$.

На рисунке 4.20 приведены результаты, характеризующие изгиб стержня по высоте для отдельных моментов времени. Их анализ позволяет заключить, что происходит волновой изгиб стержня в пределах его длины. На рисунке 4.21 приведены результаты расчетов безразмерного перемещения для различных точек стержня. Показано, что максимальная частота колебаний наблюдается в окрестности точки жесткого закрепления стержня.

4.5. Экспериментально – теоретические исследования поперечных колебаний стержня

С целью подтверждения теоретических результатов были выполнены экспериментальные исследования поперечных колебаний стального стержня, закрепленного на одном из его торцов. Исследования производились на специальном стенде АО РКЦ «Прогресс» (см. рисунок 4.22, 4.23).

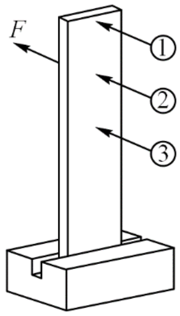


Рисунок 4.22. Принципиальная схема измерений 1, 2, 3 – датчики перемещения LS5-20/2, LS5-10/10, LS5-50/100 соответственно

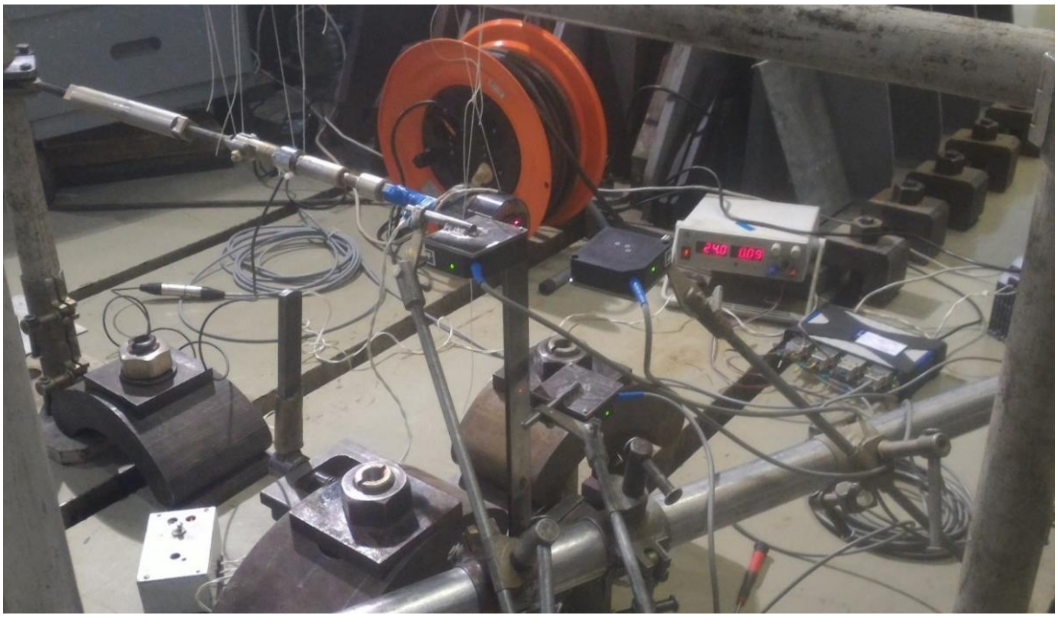


Рисунок 4.23. Схема закрепления стержня

Экспериментальные исследования проводились в несколько этапов:

1. Определение колебаний стержня путем отклонения незакрепленного конца стержня на расстояние до 3 *мм* электромагнитом и дальнейшей потери связи в цепи «электромагнит – стержень» за счет выключения источника питания электромагнита, при этом датчики перемещения распределялись следующим образом: первая измерительная точка – 5 *мм* от верхнего края, вторая – 50 *мм*, третья – 100 *мм*. Электромагнит после потери связи со стержнем выключался.

2. Определение колебаний пластины путем отклонения незакрепленного конца пластины на расстояние до 3 *мм* электромагнитом и дальнейшей потери связи в цепи «электромагнит – пластина», при этом датчики перемещения распределялись следующим образом: первая измерительная точка – 5 *мм* от верхнего края, вторая – 82,5 *мм*, третья – 165 *мм* соответственно. Электромагнит после потери связи с пластиной не выключался.

3. Определение колебаний пластины путем отклонения незакрепленного конца пластины на расстояние до 3 *мм* электромагнитом и дальнейшей потери связи в цепи «электромагнит – пластина» за счет выключения источника питания электромагнита, при этом датчики перемещения распределены следующим образом: первая измерительная точка – 5 *мм* от верхнего края, вторая – 82,5 *мм*, третья – 165 *мм* соответственно. Электромагнит после потери связи с пластиной выключался.

При проведении эксперимента использовалось следующее измерительное оборудование: электромагнит, датчик перемещения LS5 – 20/2, датчик перемещения LS5 – 10/10, датчик перемещения LS5 – 50/100, датчик силы, QuantumX MX 840, термогигрометр ИВА – 6Н.

На рисунке 4.24 приведены результаты экспериментальных исследований поперечных колебаний закрепленного на одном из торцов стержня, выполненных на специальном стенде АО РКЦ «Прогресс».

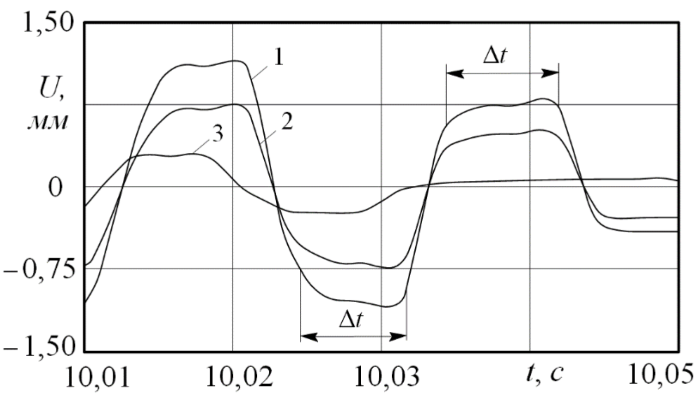


Рисунок 4.24. Перемещение различных точек стержня во времени. 1, 2, 3 – показания датчиков LS5-20/2, LS5-10/10, LS5-50/100 соответственно

Анализ результатов позволяет заключить, что колебания стержня происходят с некоторой временной задержкой в крайних положениях стержня. При этом переход стержня из одного крайнего положения происходит за очень короткий отрезок времени. Видно также, что колебания различных точек стержня по его высоте происходят с разной частотой, причем большая частота имеет место в точках, расположенных вблизи точки закрепления. Из сравнения результатов численных и экспериментальных исследований можно заключить о их качественном соответствии.

4.6. Резонансные колебания газа с учётом его релаксационных свойств

Под действием некоторого возмущения в газе могут происходить периодические колебания, связанные с изменением плотности и давления. Причем, колебательный процесс не сопровождается перемещением газа. Такого рода колебания газа описываются гиперболическими (волновыми) уравнениями. В случае, когда возмущающая сила изменяется по гармоническому закону, при совпадении собственной частоты колебаний газа и частоты возмущающей силы могут возникать резонансные колебания давления (плотности) газа.

В основе вывода гиперболического уравнения колебаний газа лежит соотношение, связывающее изменение избыточного давления в зависимости от деформации (аналог закона Гука) [27, 251]

$$p_{\text{из}} = -\rho_0 e^2 \varepsilon \tag{4.99}$$

и уравнение второго закона Ньютона

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p_{\text{из}}}{\partial x} - \frac{k}{V}\frac{\partial \xi}{\partial t}, \tag{4.100}$$

где $\varepsilon = \partial\xi/\partial x$ – деформация; $p_{\text{из}}$ – избыточное давление; ρ_0 – плотность в равновесном состоянии; ξ – перемещение; x – координата; t – время; k – коэффициент сопротивления, $кг/с$; $e = \sqrt{\partial p/\partial\rho}$ – скорость распространения волны; p – давление; ρ – плотность.

Подставляя (4.99) в уравнение второго закона Ньютона, получаем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{4.101}$$

Уравнение (4.101) не содержит слагаемого, учитывающего затухание колебательного процесса. При его выводе применяется соотношение (4.99), не учитывающее временную связь между деформацией ε и плотностью ρ. Согласно (4.99) причина (деформация) и следствие (плотность) не разделены во времени. То есть изменение плотности при возникновении деформации происходит без задержки во времени с бесконечной скоростью. Очевидно, что процессы переноса (тепла, массы, импульса) характеризуются некоторой конечной скоростью их протекания, зависящей, в том числе, от релаксационных свойств. Для учета инерционности исследуемого процесса представим соотношение (4.99) в виде

$$p_{\text{из}} + \tau_1 \frac{\partial p_{\text{из}}}{\partial t} = -\rho_0 e^2 \left(\varepsilon + r_1 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right), \tag{4.102}$$

где τ_1, r_1 – коэффициенты релаксации.

Подставляя (4.102) в (4.100), находим

$$\tau_1 \frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3} + (1+\tau_1 R)\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = e^2\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + r_1 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t}\right) - \eta \frac{\partial \xi}{\partial t}, \tag{4.103}$$

где $R = k/(\rho_0 V)$ – коэффициент сопротивления среды.

При $\tau_1 = r_1 = R = 0$, то уравнение (4.103) тождественно волновому уравнению незатухающих колебаний (4.101).

Рассмотрим решение задачи о колебаниях газа в трубе, один конец которой непроницаем и неподвижен, а на втором – действует внешняя сила F, задаваемая следующим образом:

$$\frac{F}{S} = \rho_0 e^2 \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} = \sin(\omega t), \tag{4.104}$$

где S – единица площади; ω, $1/c$ – круговая частота.

Математическая постановка задачи в предположении, что начальное перемещение газа в любой точке пространственной переменной равно ξ_0, будет включать уравнение (4.110) и следующие краевые условия

$$\xi(x,0) = \xi_0; \tag{4.105}$$

$$\frac{\partial \xi(x,0)}{\partial t} = 0; \tag{4.106}$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x,0)}{\partial t^2} = 0; \tag{4.107}$$

$$\frac{\partial \xi(0,t)}{\partial x} = \sin(\omega t); \tag{4.108}$$

$$\xi(\delta,t) = 0, \tag{4.109}$$

где δ – длина трубы, *м*.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры

$$\psi = \frac{\xi}{\xi_0}; \quad \eta = \frac{x}{\delta}; \quad \mathrm{Fo} = \frac{et}{\delta}; \quad \mathrm{Fo}_1 = \frac{e\tau_1}{\delta}; \quad R_1 = \frac{er_1}{\delta};$$

$$\gamma = \frac{\delta R}{e}; \quad \mathrm{Fo}_4 = 1 + \mathrm{Fo}_1 \gamma, \tag{4.110}$$

где ψ – перемещение; η – координата; Fo – число Фурье; Fo_1, Fo_2, Fo_3 – безразмерные коэффициенты релаксации; Fo_3 – безразмерный коэффициент сопротивления среды. Fo_4 – коэффициент, учитывающий совместное влияние релаксационных свойств газа и коэффициента релаксации на колебательный процесс.

С учётом (4.117) задача (4.110), (4.112) – (4.116) принимает вид

$$\gamma \frac{\partial \psi(\eta,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_1 \frac{\partial^3 \psi(\eta,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^3} + (1+\mathrm{Fo}_1\gamma)\frac{\partial^2 \psi(\eta,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} = \tag{4.111}$$

$$= \frac{\partial^2 \psi(\eta,\mathrm{Fo})}{\partial \eta^2} + R_1 \frac{\partial^3 \psi(\eta,\mathrm{Fo})}{\partial \eta^2 \partial \mathrm{Fo}} \qquad (\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < \eta < 1);$$

$$\psi(\eta,0) = 1; \tag{4.112}$$

$$\frac{\partial \psi(\eta,0)}{\partial \mathrm{Fo}} = 0; \tag{4.113}$$

$$\frac{\partial^2\psi(\eta,0)}{\partial \mathrm{Fo}^2}=0; \qquad (4.114) \qquad \frac{\partial\psi(0,\mathrm{Fo})}{\partial\eta}=A\sin(\nu\,\mathrm{Fo}); \qquad (4.115)$$

$$\psi(1,\mathrm{Fo})=0, \qquad (4.116)$$

где $A=\delta/\xi_0$; $\nu=\omega\delta/e$.

Получение точных аналитических решений краевой задачи колебаний газа в цилиндрическом канале с внешней нагрузкой не представляется возможным. В связи с этим, в диссертации получено численное решение задачи (4.111) – (4.1163) на основе метода конечных разностей. Согласно данному методу решение исходной системы уравнений отыскивается для дискретных функции перемещения $\psi_k^i=\psi(\eta_k,\mathrm{Fo}_i)$. При решении задачи (4.111) – (4.116) численным методом строилась пространственно – временная сетка по переменным η и Fo так, что

$$\eta_k=k\,\Delta\eta, \qquad k=\overline{0,K}; \qquad \Delta\mathrm{Fo}_i=i\,\Delta\mathrm{Fo}, \qquad i=\overline{0,I}, \qquad (4.117)$$

где $K=200$, $I=50000$ – количество шагов по переменным η, Fo.

Конечно разностный аналог задачи (4.111) – (4.1163) имеет вид

$$\gamma\frac{\psi_k^{i+1}-\psi_k^i}{\Delta\mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_1\frac{\psi_k^{i+1}-3\psi_k^i+3\psi_k^{i-1}-\psi_k^{i-2}}{\Delta\mathrm{Fo}^3}+(1+\mathrm{Fo}_1\gamma)\frac{\psi_k^{i-1}-2\psi_k^i+\psi_k^{i+1}}{\Delta\mathrm{Fo}^2}=$$

$$=\frac{\psi_{k-1}^i-2\psi_k^i+\psi_{k+1}^i}{\Delta\eta^2}+R_1\left(\frac{\psi_{k-1}^i-2\psi_k^i+\psi_{k+1}^i}{\Delta\eta^2\Delta\mathrm{Fo}}-\frac{\psi_{k-1}^{i-1}-2\psi_k^{i-1}+\psi_{k+1}^{i-1}}{\Delta\eta^2\Delta\mathrm{Fo}}\right);$$

$$\psi_k^0=1-\eta_k; \qquad \frac{\psi_k^1-\psi_k^0}{\Delta\mathrm{Fo}}=0; \qquad \frac{\psi_k^0-2\psi_k^1+\psi_k^2}{\Delta\eta}=0;$$

$$\frac{\psi_1^i-\psi_0^i}{\Delta\eta}=A\sin(\nu\,\mathrm{Fo}_i); \qquad \psi_K^i=0.$$

Результаты выполненных исследований приведены на рисунках 4.25 – 4.30. При $\mathrm{Fo}_1=R_1=\gamma=0$ колебания незатухающие. При $\gamma=0{,}3$ и $\mathrm{Fo}_1=R_1=\nu=A=0$ колебания становятся затухающими с экспоненциально уменьшающейся амплитудой (рисунок 4.25). С увеличением коэффициента сопротивления среды Fo_3 амплитуда колебаний газа уменьшается (рисунок 4.26). При больших значениях коэффициента сопротивления $(\gamma\geq 100)$ возврат всех точек стержня в равновесное положение происходит без колебаний внутренних точек стержня (критическое затухание) при неизменной амплитуде колебаний внешней нагрузки (рис. 4.27). На рисунке 4.28 приведены результаты расчетов для случая резонансных колебаний ($\nu=1{,}575$) при $\mathrm{Fo}_1=R_1=10$, $\gamma=0{,}3$. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне $0\leq\mathrm{Fo}\leq 100$ амплитуда колебаний газа существенно увеличивается в незатухающем процессе колебаний. На рис. 4.29 даны результаты расчетов для $\mathrm{Fo}_1=R_1=0{,}1$, $\gamma=0{,}3$ и при задании частоты колебаний нагрузки $\nu=0{,}1$, несовпадающей с частотой собственных колебаний газа, то есть колебания в данном случае происходят при нерезонансных частотах. Из их анализа следует, что в диапазоне $0\leq\mathrm{Fo}\leq 16$ колебания экспоненциально затухают.

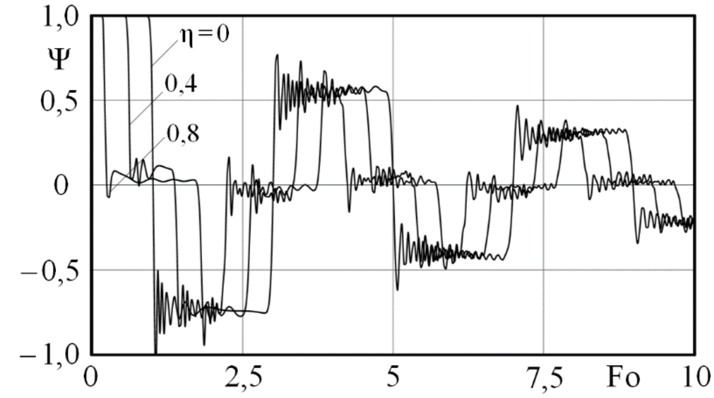


Рисунок 4.25. Колебания газа во времени ($\mathrm{Fo}_1 = R_1 = \nu = A = 0$; $\gamma = 0{,}3$)

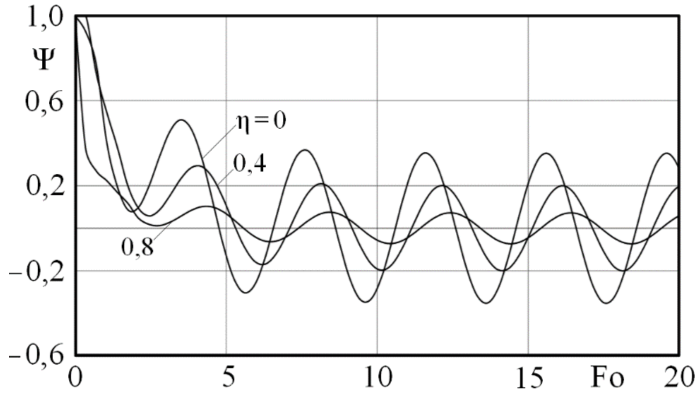


Рисунок 4.26. Колебания газа во времени ($\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0; \gamma = 5$; $\nu = 1{,}575$; $A = 1$)

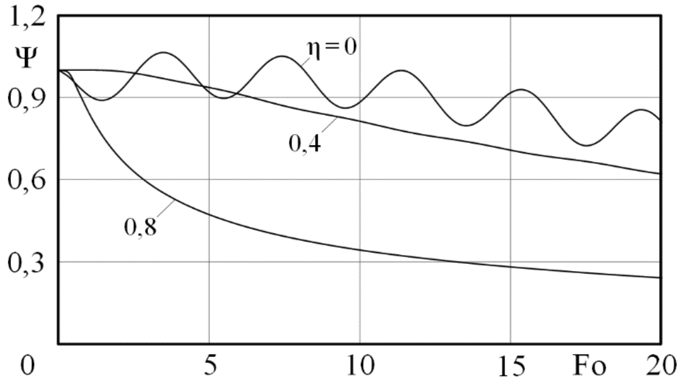


Рисунок 4.27. Колебания газа во времени ($\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0$; $\gamma = 100$; $\nu = 1{,}575$; $A = 1$)

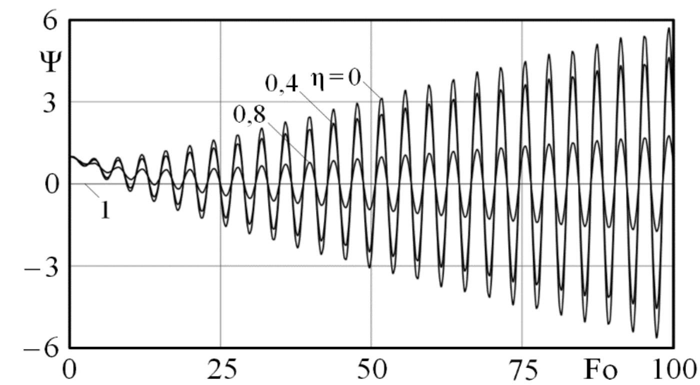


Рисунок 4.28. Резонансные колебания газа во времени ($\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10$; $\gamma = 0{,}3$; $\nu = 1{,}575$; $A = 0{,}1$)

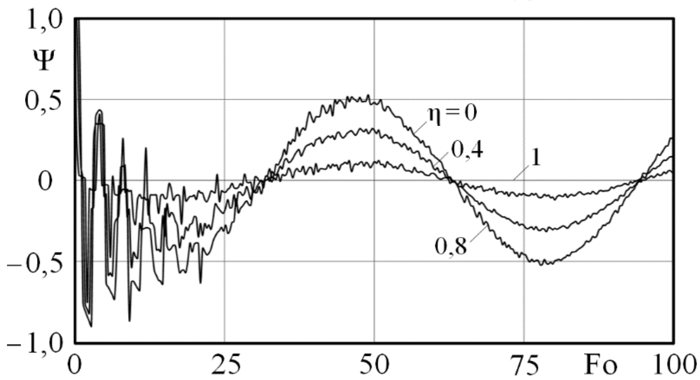


Рисунок 4.29. Колебания газа во времени ($\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 0{,}1$; $\gamma = 0{,}3$; $\nu = 0{,}1$; $A = 0{,}5$)

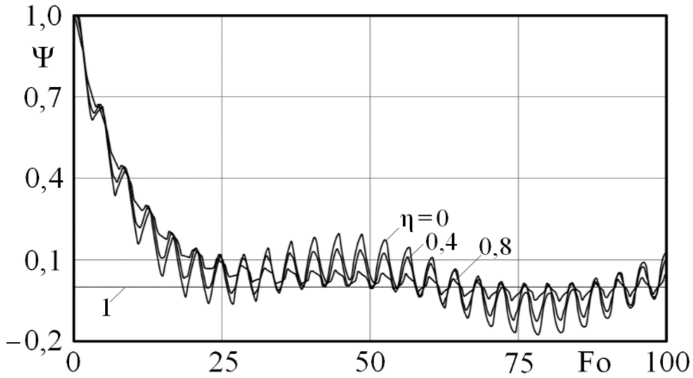


Рисунок 4.30. Колебания газа во времени ($\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10$; $\gamma = 0{,}3$; $\nu = 0{,}1$; $A = 0{,}1$)

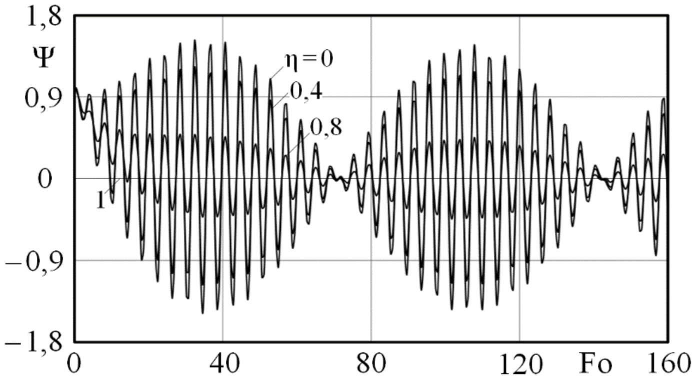


Рисунок 4.30. Бифуркационные колебания газа во времени ($\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10$; $\gamma = 0{,}3$; $\nu = 1{,}5$; $A = 0{,}1$)

При дальнейшем увеличении числа Fo процесс колебаний стабилизируется при одинаковом отклонении в область положительных и отрицательных значений перемещений $\Theta = \pm 0{,}5$.

Результаты расчетов нерезонансных колебаний ($\nu = 0{,}1$; $A = 0{,}1$) при некоторых больших значениях коэффициентов релаксации ($\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10$ приведены на рисунке 4.30. Их анализа следует, что колебания газа поочередно происходят в области положительных и отрицательных значений перемещения по отношению к исходному (невозмущенному) положению газа в незатухающем во времени процессе колебаний.

При увеличении коэффициентов релаксации в незатухающем процессе колебаний наблюдается бифуркационный резонанс, при котором амплитуда колебаний возрастает периодически (см. рисунок 4.31). Такого типа колебания называются биениями. Результаты расчетов данного варианта исследований при $\mathrm{Fo}_1 = R_1 = 10$, $\gamma = 0{,}3$, $A = 0{,}1$; $\nu = 1{,}5$; даны на рисунке 4.31. Из их анализа следует, что в данном случае не наблюдается стабилизации процесса колебаний во времени.

5. РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КОЛЕБАНИЙ С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ

Научные результаты главы даны в работах [217, 219, 255] автора диссертации. В пятой главе приведены результаты разработки метода математического моделирования электромагнитных волн, описываемых телеграфным уравнением. В параграфе 5.1 получено аналитическое решение классического телеграфного уравнения в форме бесконечного тригонометрического ряда. Показано, что решения классических телеграфных уравнений приводят к скачкам искомых функций (напряжения или тока). Следовательно, эти уравнения описывают мгновенные их изменения, что эквивалентно передаче электрических потенциалов с бесконечной скоростью. В литературных источниках, где даются выводы телеграфных уравнений, отсутствует анализ причин скачкообразного изменения искомых функций, получаемых из их точных аналитических решений.

В п. 5.2 – 5.3, используя единую методологию математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса, получено и детально исследовано обобщенное телеграфное уравнение, учитывающее релаксационные эффекты.

В параграфе 5.4 выполнены детальные исследования полученного в диссертации аналитического уравнения Клейна – Гордона, описывающего распределение электромагнитных волн в плазме. Показано, что колебания в различных точках плазмы происходят с одинаковой частотой, то есть они являются самосогласованными, но с различной амплитудой. Используя полученное решение, разработаны рекомендации по определению плотности электронов в плазме путем проведения экспериментально – теоретических исследований. В п. 5.4 приведены также результаты получения локально – неравновесной математической модели распространения электромагнитных волн в плазме. Получено и детально исследовано релаксированное уравнение Клейна – Гордона.

5.1. Исследование математической модели распространения электромагнитных колебаний в электрических линиях постоянного тока

Используя модифицированную формулу закона Ома, включающую релаксационные слагаемые, выведены телеграфные уравнения, учитывающие ускорения во времени силы тока и напряжения. Исследования точных аналитических решений полученных уравнений позволили заключить об устранении скачкообразного изменения искомых функций, наблюдающегося в решениях классических телеграфных уравнений, что свидетельствует об устранении бесконечной скорости распространения потенциалов электрического поля. Анализ аналитических решений показал также невозможность мгновенного принятия силы тока (напряжения) на границах проводника в начальный момент времени – процесс их установления включает некоторый диапазон начального времени, что свидетельствует о невозможности принятия граничного условия 1–ого рода мгновенно в любых реальных процессах электропроводности.

Процесс распространения электрического тока в проводниках обуславливается движением электрических зарядов. Движущей силой (причиной) согласно закону Ома является градиент напряжения dU/dx, а следствием – сила тока (поток зарядов), то есть [4, 13, 88]

$$I = -\sigma \frac{dU}{dx}, \tag{5.1}$$

где

$$\sigma = \frac{1}{R}; \tag{5.2}$$

U – напряжение, $В$; I – сила тока; σ – электропроводность, $1/Ом$; R – активное сопротивление, $Ом$, приходящееся на единицу длины проводника Δx; x – координата, $м$.

Так как в формуле (5.1) причина и следствие не разделены во времени, то с изменением причины следствие наступает мгновенно. Следовательно, в этой формуле заложена бесконечная скорость передачи импульса. Очевидно, что в любых реальных процессах скорость передачи потенциалов каких угодно величин (теплоты, массы, импульса и проч.) не может принимать бесконечных значений – скорость их передачи ограничивается физическими (и релаксационными) свойствами материала среды. К числу уравнений, в которых заложена бесконечная скорость передачи потенциалов исследуемых полей, относятся следующие уравнения: Фурье, Фика, Ньютона, Гука. Уравнения, выведенные на их основе, являются локальными, так как в них вводится допущение о бесконечной скорости передачи потенциалов исследуемых полей, то есть длина и время свободного пробега микрочастиц (электронов, атомов, молекул) принимаются равными нулю или, что то же самое, не учитывается пространственно – временная нелокальность процесса. Для её учёта в формулах диффузионных законов необходимо учитывать ускорение во времени как движущих сил (разности потенциалов или градиентов соответствующих величин – температуры, скорости, перемещения и др.) так и величин, являющихся следствием изменения движущих сил – тепловой поток, поток массы, нормальное и касательное напряжения, сила тока (поток зарядов).

Рассмотрим последовательность вывода уравнений электрических колебаний тока и напряжения в проводниках с распределёнными параметрами (длина линии значительно больше длины электромагнитной волны). Напряжение и сила тока в таких линиях описываются уравнениями в частных производных. Принципиальное отличие от линий с сосредоточенными параметрами (описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями) состоит в том, что здесь необходимо учитывать активное сопротивление проводников (в линиях постоянного тока), индуктивность линий, емкость между проводником и землей, утечки тока через изоляцию. Индуктивность линий обусловлена магнитным полем, возникающем между проводами. Емкость обусловлена наличием электрического поля между проводами. Утечки тока через несовершенную изоляцию связаны с тем, что проводимость между проводниками, в общем случае, не равна нулю [3, 4].

Как было отмечено, аналитические решения классических телеграфных уравнений приводят к скачкам искомых функций (напряжения или тока). В литературных источниках, где даются выводы телеграфных уравнений, отсутствует анализ причин скачкообразного изменения искомых функций, получаемых из их точных аналитических решений. Для выполнения такого анализа рассмотрим вывод телеграфных уравнений для силы тока и напряжения применительно к длинной двухпроводной линии постоянного тока [3, 4] (рисунок 5.1).

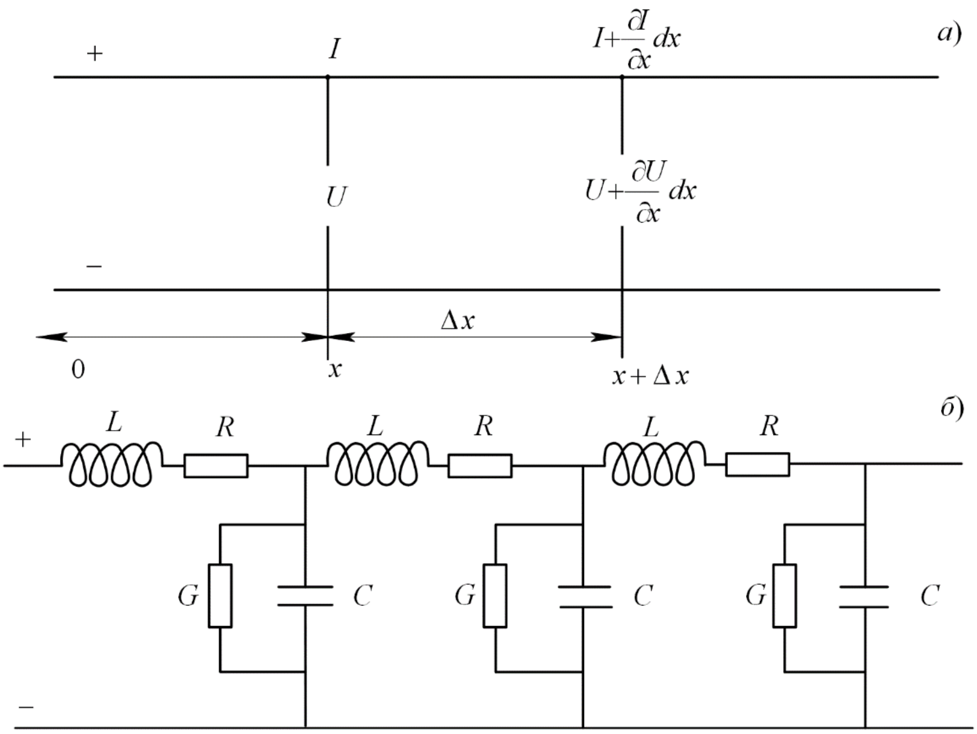


Рисунок 5.1. Схема двухпроводной линии постоянного тока с равномерно распределенными параметрами (индуктивностями *L*, активным сопротивлением *R*, емкостями *C* и проводимостью изоляции *G*)

Распространение электрического тока в проводнике с распределенными параметрами характеризуется силой тока I и напряжением U, которые являются функциями положения точки x по длине проводника l и времени t. Согласно закону Ома изменение напряжения на участке Δx равно сумме изменений напряжения на активном (IR) и индуктивном сопротивлениях ($L\partial I / \partial t$) [3, 4]

$$IR\Delta x\Delta t + L\frac{\partial I}{\partial t}\Delta x\Delta t = -\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x\Delta t, \tag{5.3}$$

где L – коэффициент самоиндукции, $\Gamma = B \cdot c / A$.

Приходящее на единицу длины провода Δx в единицу времени количество электричества, равно сумме двух величин: количеству электричества, необходимого для зарядки элемента Δx и количества, теряемого из – за несовершенства изоляции, то есть

$$UG\Delta x\Delta t + C\frac{\partial U}{\partial t}\Delta x\Delta t = -\frac{\partial I}{\partial x}\Delta x\Delta t\,, \tag{5.4}$$

где C – ёмкость, $\varPhi = Кл/В$; G – проводимость изоляции, $1/Ом$; R, C, L, G – рассчитаны на единицу длины линии.

Разделим уравнения (5.3), (5.4) на $R\Delta x\Delta t$ и $G\Delta x\Delta t$ соответственно. В результате получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$I + \frac{L}{R}\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial x}; \tag{5.5}$$

$$U + \frac{C}{G}\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{G}\frac{\partial I}{\partial x}. \tag{5.6}$$

Уравнения (5.5), (5.6) могут быть сведены к двум независимым уравнениям (относительно функций силы тока и напряжения). Рассмотрим сначала вывод дифференциального уравнения относительно функции I. Продифференцируем уравнение (5.5) по времени t и умножим на C/G

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{LC}{RG}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = -\frac{C}{RG}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}, \tag{5.7}$$

а уравнение (5.6) продифференцируем по координате x и умножим на $1/R$:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{C}{RG}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t} = -\frac{1}{GR}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}. \tag{5.8}$$

Вычтем из (5.8) выражение (5.7)

$$\frac{C}{G}\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{LC}{RG}\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{1}{GR}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{5.9}$$

Выразим $\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial U}{\partial x}$ из (5.5) и подставим в (5.9). После некоторых преобразований получаем следующее уравнение:

$$LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (RC + GL)\frac{\partial I}{\partial t} + RGI = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \tag{5.10}$$

Аналогичное по форме уравнение может быть получено относительно функции напряжения U. Для этого продифференцируем (5.6) по времени t и умножим на L/R

$$\frac{L}{R}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{LC}{RG}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{L}{RG}\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t}. \tag{5.11}$$

Продифференцируем (5.5) по координате x и умножим на $1/G$

$$\frac{1}{G}\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{L}{RG}\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t} = -\frac{1}{RG}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}. \tag{5.12}$$

Вычитая из (5.11) соотношение (5.12), получаем

$$\frac{L}{R}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{LC}{RG}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{RG}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{G}\frac{\partial I}{\partial x}. \tag{5.13}$$

Выразим $\dfrac{1}{G}\dfrac{\partial I}{\partial x}$ из (5.6) и подставим в (5.13)

$$LC\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+(RC+GL)\frac{\partial U}{\partial t}+RGU=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\,. \tag{5.14}$$

Из сравнения уравнений (5.10) и (5.13) видно, что оба уравнения имеют одинаковый порядок, тип и структуру. В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать лишь одно из них – уравнение относительно неизвестной функции напряжения U .

Найдем решение уравнения (5.13) для линии с распределенными параметрами, имеющей потенциал U_0 относительно земли, с потенциалом равным нулю. Конец линии $(x=0)$ изолирован, а при $(x=l)$ – в начальный момент времени заземлен. Заземлен. Требуется найти изменение напряжения по длине во времени. Задача включает уравнение (5.13) и краевые условия вида [51]

$$U(x,0)=U_0; \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=0; \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x}=0; \tag{5.17}$$

$$U(l,t)=0\,. \tag{5.18}$$

где $U_0=\text{const}$ – напряжение в линии (по отношению к земле) в начальный момент времени; l – длина линии.

Выполним параметрический анализ краевой задачи (5.13) – (5.18). Для этого введем в рассмотрение следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta=\frac{U}{U_0};\quad \text{Fo}=\frac{at}{l};\quad \xi=\frac{x}{l}, \tag{5.19}$$

где $a=1/\sqrt{LC}$ – скорость распространения электрических колебаний; $F_1=al(RC+LG)$, $F_2=l^2RG$ – безразмерные коэффициенты; Θ, Fo, ξ – соответственно, безразмерные напряжение, время, пространственная координата.

С учетом принятых обозначений (5.19) задача (5.13) – (5.18) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial \text{Fo}^2}+F_1\frac{\partial\Theta}{\partial \text{Fo}}+F_2\Theta=\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}\qquad (0<\xi<1;\quad \text{Fo}>0). \tag{5.20}$$

$$\Theta(\xi,0)=1; \tag{5.21}$$

$$\frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial \text{Fo}}=0; \tag{5.22}$$

$$\frac{\Theta(0,\text{Fo})}{\partial\xi}=0; \tag{5.23}$$

$$\Theta(1,\text{Fo})=0, \tag{5.24}$$

Принебрегая потерями через изоляцию $(G=0)$, и активным сопротивлением провода $(R=0)$, то $F_1=F_2=0$ и уравнение (5.20) аналогично гиперболическому уравнению, описывающему незатухающие волновые колебания

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2}. \tag{5.25}$$

На основе метода разделения переменных можно получить аналитическое решение задачи (5.20) – (5.24) в виде бесконечного ряда

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{m=1}^{\infty} (C_{1m} e^{z_{1m}\mathrm{Fo}} + C_{2m} e^{z_{2m}\mathrm{Fo}}) \cos[0{,}5(2m-1)\pi\xi], \tag{5.26}$$

$$C_{1m} = -\frac{C_{2m} z_{2m}}{z_{1m}}; \quad C_{2m} = \frac{4 z_{1m} \sin[0{,}5(2m-1)\pi]}{(z_{1m} - z_{2m})[\sin[(2m-1)\pi] + (2m-1)\pi]};$$

$$\nu_m = \frac{(2m-1)^2 \pi^2}{4} - F_2; \quad z_{1,2} = \frac{-F_1 \pm \sqrt{(F_1^2 - 4\nu_m)}}{2}.$$

В случае, если в соотношении для $z_{1,2}$ подкоренное выражение $(F_1^2 - 4\nu_m) < 0$, то получаем комплексные корни

$$z_1 = \gamma + i\beta \ ; \quad z_2 = \gamma - i\beta,$$

где $i = \sqrt{-1}$; $\gamma = -F_1/2$; $\beta = (\sqrt{(F_1^2 - 4\nu_m)})/2$.

Решение задачи в этом случае приводится к виду

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{m=1}^{\infty} \exp(\gamma\,\mathrm{Fo})[B_{1m} \cos(\beta \mathrm{Fo}) - B_{2m} \sin(\beta \mathrm{Fo})] \cos[0{,}5(2m-1)\pi\xi], \tag{5.27}$$

где

$$B_{1m} = 4[(2m-1)\,\pi]; \ B_{2m} = \gamma B_{1m}/\beta.$$

Расчеты по формулам (5.26), (5.27) для разных величин безразмерных параметров F_1 и F_2 даны на рисунках 5.2 – 5.9.

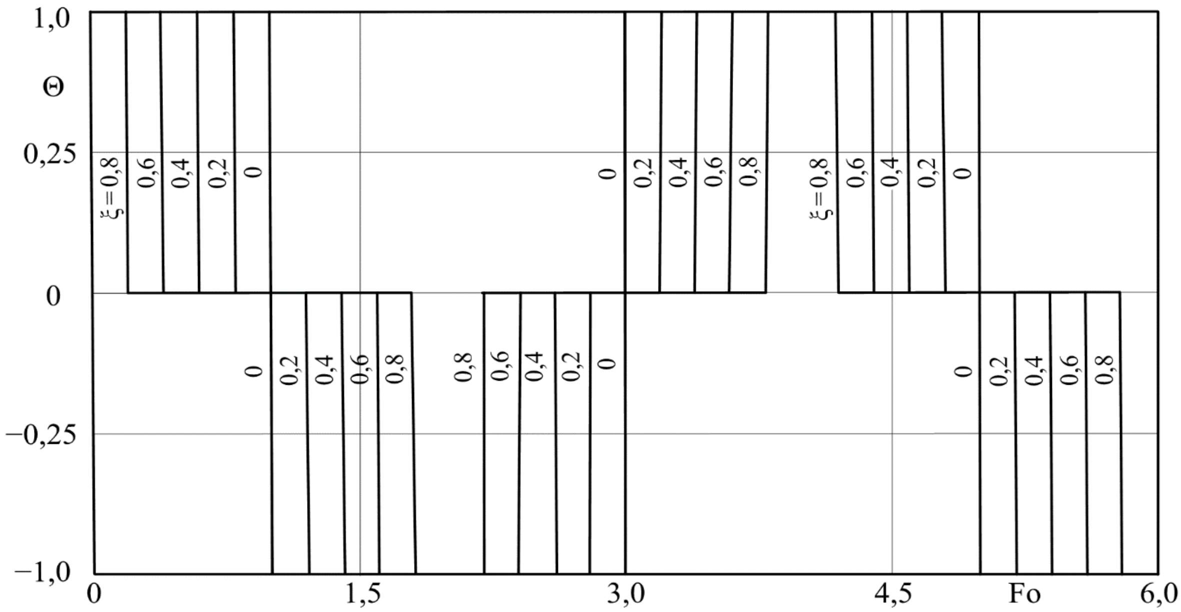


Рисунок 5.2. Изменение напряжения от времени в отдельных точках по длине проводника ($F_1 = F_2 = 0$)

И, в частности, при $F_1 = F_2 = 0$ колебания напряжения незатухающие, что можно объяснить отсутствием потерь в проводах ($R = 0$) и через изоляцию ($G = 0$) (рисунок 5.2). В прямой волне напряжение скачком меняется от нуля, заданного условием (5.24), до единицы, заданной условием (5.21). На фронте волны производная от напряжения по пространственной координате $\partial U / \partial x$ устремляется к бесконечной величине. При достижении фронтом волны конца проводника ($\xi = 0$) она отражается со сменой знака напряжения. Таким образом происходит незатующий процесс колебаний (рис. 5.2). При значениях коэффициентов $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$, колебательный процесс становится затухающим. Причем, с увеличением F_1 и F_2 время затухания уменьшается (см. рис. 5.3 – 5.9). При $F_1 = F_2 = 10$ после достижения фронтом волны конца проводника ($\xi = 0$) скачки прекращаются и с увеличением Fo напряжение уменьшается до $U = 0$ при $\mathrm{Fo} \approx 4$ (рис. 5.6, 5.7). При больших значениях F_1 и F_2 происходит напряжение изменяется без скачков (рис. 5.8, 5.9).

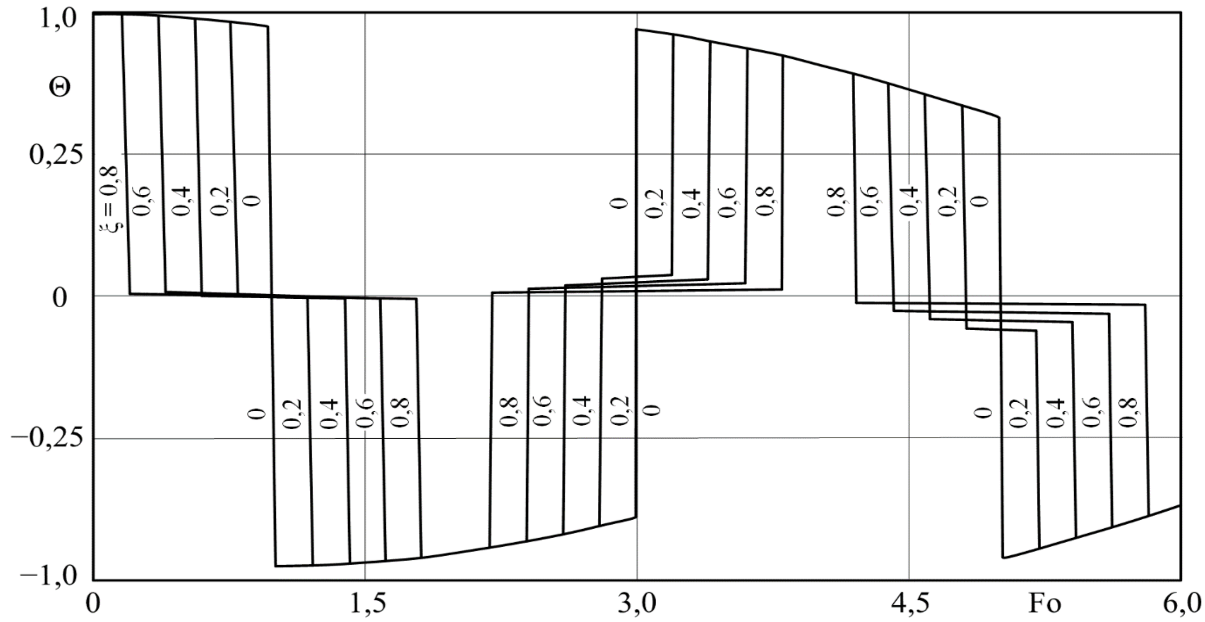


Рисунок 5.3. Изменение напряжения во времени ($F_1 = F_2 = 0{,}1$)

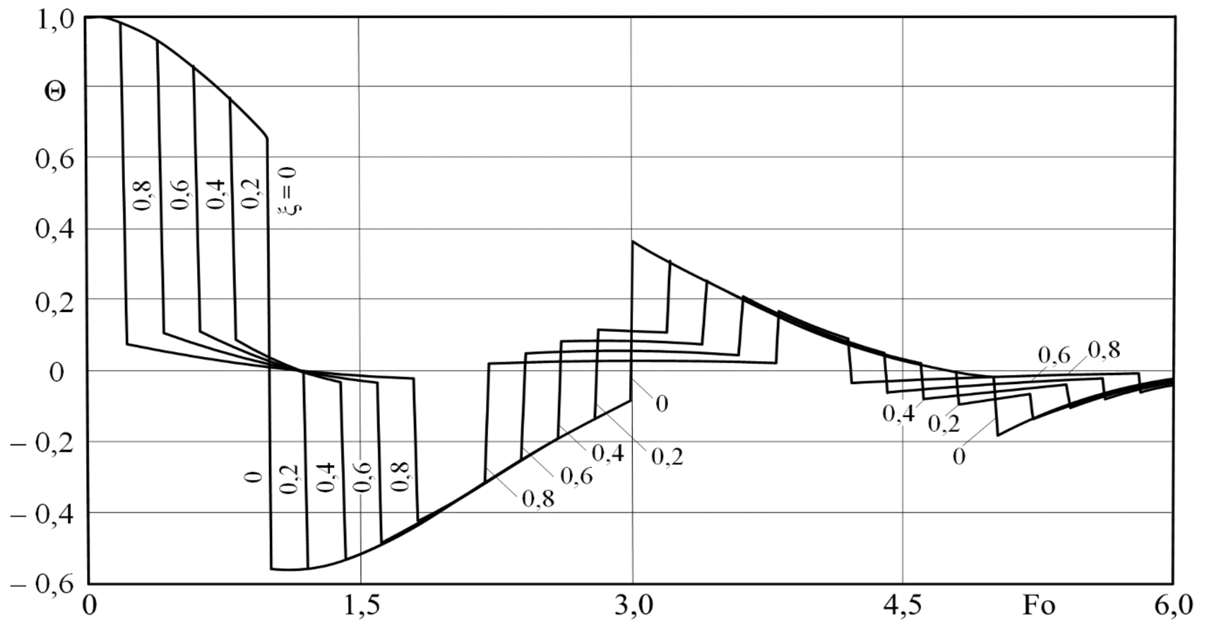


Рисунок 5.4. Изменение напряжения во времени ($F_1 = F_2 = 1{,}0$)

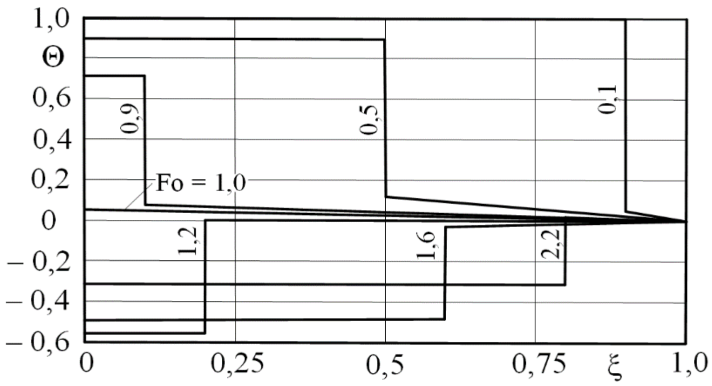


Рисунок 5.5. Изменение напряжения по длине проводника ($F_1 = F_2 = 1{,}0$)

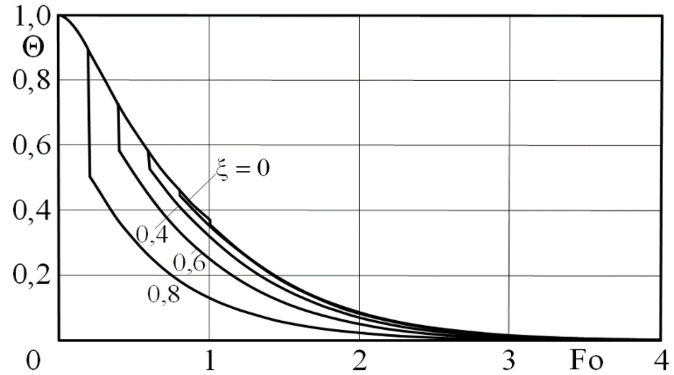


Рисунок 5.6. Изменение напряжения во времени ($F_1 = F_2 = 10$)

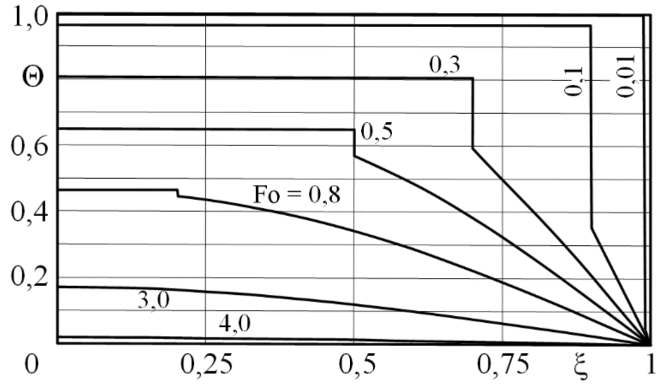


Рисунок 5.7. Изменение напряжения по длине проводника ($F_1 = F_2 = 10$)

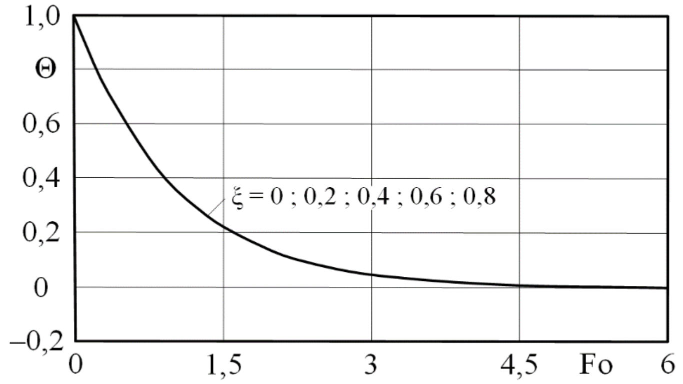


Рисунок 5.8. Изменение напряжения от времени ($F_1 = F_2 = 75000$)

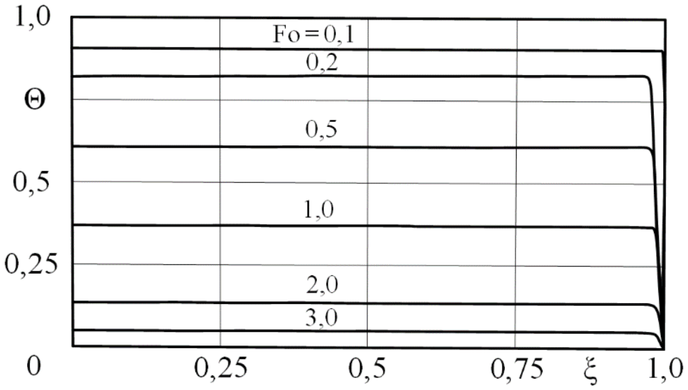


Рисунок 5.9. Изменение напряжения вдоль проводника ($F_1 = F_2 = 75000$)

5.2. Вывод модифицированных телеграфных уравнений на основе учета релаксационных слагаемых в формуле закона Ома

Процесс распространения электрического тока в проводниках обуславливается движением электрических зарядов. Движущей силой (причиной) согласно закону Ома является градиент напряжения dU/dx, а следствием – сила тока (см. (5.1)). Так как в формуле (5.1) причина и следствие не разделены во времени, то с изменением причины следствие наступает мгновенно. Следовательно, в этой формуле заложена бесконечная скорость передачи импульса. Очевидно, что в любых реальных процессах скорость передачи потенциалов каких угодно величин (теплоты, массы, импульса, электромагнитных колебаний и проч.) не может принимать бесконечных значений – скорость их передачи ограничивается физическими (и релаксационными) свойствами среды.

В параграфе 5.1 показано, что дифференциальные уравнения, выведенные на основе закона Ома (5.1), являются локальными, так как в них вводится допущение о бесконечной скорости передачи потенциалов исследуемых полей, то есть длина и время свободного пробега микрочастиц принимаются равными нулю или, что то же самое, не учитывается пространственно – временная нелокальность процесса. Для её учёта в формулах диффузионных законов необходимо учитывать ускорение во времени как движущих сил (разности потенциалов или градиентов соответствующих величин – температуры, скорости, перемещения и др.) так и величин, являющихся следствием изменения движущих сил – тепловой поток, поток массы, нормальное и касательное напряжения, сила тока (поток зарядов). В настоящее время наиболее разработанной является теория двухфазного запаздывания, применяемая для моделирования процессов переноса теплоты, массы, колебаний упругих тел. В диссертации теория двухфазного запаздывания впервые используется для разработки математической модели электромагнитных колебаний.

В п. 5.1 получены соотношения (5.5), (5.6), имеющие вид

$$I + \frac{L}{R}\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial x}; \tag{5.28}$$

$$U + \frac{C}{G}\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{G}\frac{\partial I}{\partial x}. \tag{5.29}$$

Анализ соотношения (5.28) позволяет заключить, что в данной интерпретации закона Ома выполнена релаксация силы тока, так как вторым слагаемым этого соотношения учтено его ускорение во времени с коэффициентом релаксации $\tau_1 = L/R,\ c$, имеющим размерность времени. Аналогично, в соотношении (5.29) выполнена релаксация напряжения с коэффициентом релаксации $\tau_1' = C/G,\ c$. Такая «односторонняя» релаксация формул закона Ома, как будет показано ниже, приводит к скачкообразному изменению тока и напряжения вдоль проводника во времени, что свидетельствует о бесконечной скорости их изменения. Отметим, что согласно соотношению (5.28) изменение силы тока (или изменение напряжения в соотношении (5.29)) влечет мгновенное изменение градиента напряжения $\partial U/\partial x$ (или градиента силы тока $\partial I/\partial x$ в соотношении (5.29)). То есть в данных соотношениях учтены скорости изменения во времени силы тока и напряжения (вторые слагаемые в формулах (5.28), (5.29)), но не учтены скорости изменения их градиентов.

С целью устранения скачкообразного изменения искомых функций в формулах закона Ома (5.28), (5.29) выполним релаксацию градиентов силы тока и напряжения. Отметим, что релаксация функций I и U выполнена в исходных соотношениях. Выражения (5.28), (5.29) запишем в виде

$$I+\tau_1\frac{\partial I}{\partial t}=-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+r_1\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right); \tag{5.30}$$

$$U+\tau_1'\frac{\partial U}{\partial t}=-\frac{1}{G}\left(\frac{\partial I}{\partial x}+r_1'\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t}\right), \tag{5.31}$$

где $\tau_1=L/R$, $\tau_1'=C/G$ – коэффициенты релаксации напряжения и силы тока; r_1, r_1' – коэффициенты релаксации градиентов напряжения и силы тока.

Как и в п. 5.1 приведем соотношения (5.30), (5.31) к двум независимым уравнениям (относительно функций силы тока и напряжения). Рассмотрим вывод дифференциального уравнения относительно функции силы тока I.

Продифференцируем (5.30) по t, умножив на τ_1'

$$\tau_1'\frac{\partial I}{\partial t}+\tau_1\tau_1'\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}+\frac{\tau_1'}{R}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}+\frac{\tau_1' r}{R}\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial t^2}=0, \tag{5.32}$$

а соотношение (5.31) по переменной x, умножив на $1/R$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\tau_1'}{R}\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}+\frac{1}{RG}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}+\frac{r_1'}{RG}\frac{\partial^3 I}{\partial x^2\partial t}=0. \tag{5.33}$$

Вычитая из (5.32) соотношение (5.33), находим

$$\frac{\tau_1' r}{R}\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial t^2}+\tau_1\tau_1'\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}+\tau_1'\frac{\partial I}{\partial t}=\frac{1}{RG}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}+\frac{r_1'}{RG}\frac{\partial^3 I}{\partial x^2\partial t}+\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{5.34}$$

Выразим $\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial U}{\partial x}$ из (5.28)

$$\frac{1}{R}\frac{\partial U}{\partial x}=-\tau_1\frac{\partial I}{\partial t}-I. \tag{5.35}$$

Продифференцируем (5.35) дважды по t, умножив на $\tau_1' r$

$$\frac{\tau_1' r}{R}\frac{\partial^3 U}{\partial x\partial t^2}=-\tau_1'\tau_1 r\frac{\partial^3 I}{\partial t^3}-\tau_1' r\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}. \tag{5.36}$$

Подставим (5.35), (5.36) в (5.34)

$$-\tau_1\tau_1' r\frac{\partial^3 I}{\partial t^3}+\tau_1'(\tau_1-r)\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}+(\tau_1+\tau_1')\frac{\partial I}{\partial t}+I=\frac{1}{RG}\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}+r_1'\frac{\partial^3 I}{\partial x^2\partial t}\right). \tag{5.37}$$

С целью вывода уравнения для функции U продифференцируем соотношение (5.30) по переменной x, разделив его на G

$$\frac{1}{G}\frac{\partial I}{\partial x}+\frac{\tau_1}{G}\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t}+\frac{1}{RG}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{r_1}{RG}\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial t}=0. \tag{5.38}$$

Продифференцируем выражение (5.31) по переменной t, умножив его на τ_1'

$$\tau_1\frac{\partial U}{\partial t}+\tau_1\tau_1'\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\frac{\tau_1}{G}\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t}+\frac{\tau_1 r_1'}{G}\frac{\partial^3 I}{\partial x\partial t^2}=0. \tag{5.39}$$

Вычитая из (5.39) (5.38), находим

$$\frac{\tau_1 r_1'}{G}\frac{\partial^3 I}{\partial x\partial t^2}+\tau_1\tau_1'\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\tau_1\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{1}{RG}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{r_1}{RG}\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial t}-\frac{1}{G}\frac{\partial I}{\partial x}=0. \tag{5.40}$$

Представим соотношение (5.29) в виде

$$\frac{1}{G}\frac{\partial I}{\partial x}=-\tau_1'\frac{\partial U}{\partial t}-U. \tag{5.41}$$

Продифференцируем (5.41) дважды по переменной t, умножив его на $\tau_1 r_1'$

$$\frac{\tau_1 r_1'}{G}\frac{\partial^3 I}{\partial x\partial t^2}=-\tau_1\tau_1' r_1'\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}-\tau_1 r_1'\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \tag{5.42}$$

Соотношение (5.40) с учетом (5.41), (5.42) будет

$$-\tau_1\tau_1' r_1'\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}+\tau_1(\tau_1'-r_1')\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+(\tau_1'+\tau_1)\frac{\partial U}{\partial t}+U=\frac{1}{RG}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+r_1\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial t}\right). \tag{5.43}$$

Учитывая, что $\tau_1 = L/R$ и $\tau_1' = C/G$ выражение (5.43) можно представить в виде

$$-r_1'\frac{LC}{RG}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}+\frac{L}{R}\left(\frac{C}{G}-r_1'\right)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\left(\frac{C}{G}+\frac{L}{R}\right)\frac{\partial U}{\partial t}+U=\frac{1}{RG}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+r_1\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial t}\right)$$

или, умножив на RG

$$-r_1' LC\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}+(LC-r_1' LG)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+(RC+LG)\frac{\partial U}{\partial t}+RGU=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+r_1\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial t}\right). \tag{5.44}$$

Представим уравнение (5.44) в безразмерном виде при . Для этого введем безразмерные переменные и параметры в соответствии с (5.19) и дополнительный параметр – коэффициент релаксации Fo_1:

$$\Theta=\frac{U}{U_0};\quad \mathrm{Fo}=\frac{at}{l};\quad \xi=\frac{x}{l};\quad \mathrm{Fo}_1=\frac{ar_1}{l};\quad \mathrm{Fo}_1'=\frac{ar_1'}{l};$$

$$F_1=al(RC+LG);\quad F_2=l^2 RG.$$

Запишем уравнение (5.44) при $r_1'=r_1$

$$-r_1 LC\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}+(LC-r_1' LG)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+(RC+LG)\frac{\partial U}{\partial t}+RGU=$$

$$=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+r_1\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial t}. \tag{5.45}$$

С учетом обозначений (5.45) будет

$$-\mathrm{Fo}_1\frac{\partial^3\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^3}+(1-\mathrm{Fo}_1\gamma)\frac{\partial^2\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^2}+F_1\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}}+F_2\Theta=\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}+\mathrm{Fo}_1\frac{\partial^3\Theta}{\partial\xi^2\partial \mathrm{Fo}}, \qquad (5.46)$$

где $\gamma = lG/(aC)$ – безразмерный параметр.

Стоит отметить, что при $\mathrm{Fo}_1 = 0$ уравнение (5.46) принимает вид (5.20).

Запишем уравнение (5.46) в более универсальном виде:

$$D_3\frac{\partial^3\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^3}+D_2\frac{\partial^2\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^2}+D_1\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}}+D_0\Theta+D\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}+D_4\frac{\partial^3\Theta}{\partial\xi^2\partial \mathrm{Fo}}=0. \qquad (5.47)$$

где $D_3 = -\mathrm{Fo}_1$; $D_2 = 1-\mathrm{Fo}_1\gamma$; $D_1 = F_1$; $D_0 = F_2$; $D = -1$; $D_4 = -\mathrm{Fo}_1$ – безразмерные коэффициенты.

Решение уравнения (5.47) получим в следующем параграфе, где оно будет выведено исходя из положений теории двухфазного запаздывания.

5.3. Разработка математической модели распространения электромагнитных колебаний с учетом многофазного запаздывания

Рассмотрим вывод обобщенного дифференциального уравнения, описывающего электромагнитные колебания в проводнике. Представим соотношения (5.5), (5.6) в виде

$$I+\sum_{k=1}^{N}\tau_k^k\frac{\partial^k I}{\partial t^k}+\frac{L}{R}\frac{\partial}{\partial t}\left(I+\sum_{k=1}^{N}\tau_k^k\frac{\partial^k I}{\partial t^k}\right)=-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\sum_{k=1}^{N}r_k^k\frac{\partial^{k+1}U}{\partial x\partial t^k}\right); \qquad (5.48)$$

$$U+\sum_{k=1}^{N}\tau'_k\frac{\partial^k U}{\partial t^k}+\frac{C}{G}\frac{\partial}{\partial t}\left(U+\sum_{k=1}^{N}\tau'_k\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right)=-\frac{1}{G}\left(\frac{\partial I}{\partial x}+\sum_{k=1}^{N}r'_k\frac{\partial^{k+1}I}{\partial x\partial t^k}\right), \qquad (5.49)$$

где τ_k, τ'_k, r_k, r'_k – коэффициенты релаксации. В выражениях (5.48), (5.49) показатели степени коэффициентов релаксации опущены.

Рассмотрим вывод дифференциального уравнения электромагнитных колебаний относительно функции напряжения U при $N=1$. Соотношения (5.48), (5.49) принимают вид

$$I+\tau_1\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{L}{R}\frac{\partial}{\partial t}\left(I+\tau_1\frac{\partial I}{\partial t}\right)=-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+r_1\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial t}\right); \qquad (5.50)$$

$$U+\tau'_1\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{C}{G}\frac{\partial}{\partial t}\left(U+\tau'_1\frac{\partial U}{\partial t}\right)=-\frac{1}{G}\left(\frac{\partial I}{\partial x}+r'_1\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t}\right). \qquad (5.51)$$

Отметим, что в (5.50) с целью учета инерционности процесса переноса импульса, выполнена релаксация как силы тока (первое слагаемое в (5.28)), так и скорости изменения силы тока (второе слагаемое в (5.28)). Аналогично в уравнении (5.51) релаксируется первое и второе слагаемые соотношения (5.29). В параграфе 5.1 полагалось, что релаксация силы тока и напряжения уже выполнена вторыми слагаемыми в (5.28) и (5.29). В дальнейшем будет показано, что оба этих подхода приводят к аналогичным результатам (с точностью до постоянных множителей).

Продифференцируем (5.50) по x и умножим на R

$$R\frac{\partial I}{\partial x}+R\tau_1\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t}+L\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t}+L\tau_1\frac{\partial^3 I}{\partial x\partial t^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+r_1\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial t}=0. \tag{5.52}$$

Соотношение (5.51) продифференцируем по t и умножим на LG

$$LG\frac{\partial U}{\partial t}+LG\tau_1'\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+CL\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+CL\tau_1'\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}+L\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t}+Lr_1'\frac{\partial^3 I}{\partial x\partial t^2}=0. \tag{5.53}$$

Вычитая из (5.53) соотношение (5.52) при $\tau_1=\tau_1'=r_1=r_1'$, получаем

$$LC\tau_1\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}+L\left(C\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+G\tau_1\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)+LG\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-$$

$$-\tau_1\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial t}-R\tau_1\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t}-R\frac{\partial I}{\partial x}=0 \tag{5.54}$$

Из закона Ома в форме (5.6)

$$U+\frac{C}{G}\frac{\partial U}{\partial t}=-\frac{1}{G}\frac{\partial I}{\partial x}$$

следует

$$\frac{\partial I}{\partial x}=-GU-C\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{5.55}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x\partial t}=-G\frac{\partial U}{\partial t}-C\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \tag{5.56}$$

Подставляя (5.55), (5.56) в (5.54), после некоторых преобразований получаем

$$\tau_1\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}+\left[LC+\tau_1(RC+LG)\right]\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+(RC+LG+\tau_1 RG)\frac{\partial U}{\partial t}+RGU=$$

$$=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\tau_1\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial t}. \tag{5.57}$$

Обозначим:

$$\Theta=\frac{U}{U_0};\quad \mathrm{Fo}=\frac{at}{l};\quad \xi=\frac{x}{l};\quad \mathrm{Fo}_1=\frac{a\tau_1}{l};$$

$$F_1=al(RC+LG);\quad F_2=l^2RG. \tag{5.58}$$

С учетом (5.58) уравнение (5.57) приводится к безразмерному виду

$$\mathrm{Fo}_1\frac{\partial^3\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^3}+(1+\mathrm{Fo}_1F_1)\frac{\partial^2\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^2}+(F_1+\mathrm{Fo}_1F_2)\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}}+F_2\Theta=\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}+\mathrm{Fo}_1\frac{\partial^3\Theta}{\partial\xi^2\partial \mathrm{Fo}} \tag{5.59}$$

$$(\mathrm{Fo}>0;\quad 0<\xi<1).$$

Отмечается, что при Fo_1, уравнение (5.59) имеет вид

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^2}+F_1\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}}+F_2\Theta=\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}$$

и полностью совпадает с полученным ранее уравнением (5.20).

Запишем уравнение (5.59) в более универсальном виде:

$$D_3\frac{\partial^3\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^3}+D_2\frac{\partial^2\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^2}+D_1\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}}+D_0\Theta+D\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}+D_4\frac{\partial^3\Theta}{\partial\xi^2\partial \mathrm{Fo}}=0. \tag{5.60}$$

где $D_3 = \mathrm{Fo}_1$; $D_2 = 1 + \mathrm{Fo}_1 F_1$; $D_1 = F_1 + \mathrm{Fo}_1 F_2$; $D_0 = F_2$; $D = -1$; $D_4 = -\mathrm{Fo}_1$ – безразмерные коэффициенты.

Уравнение (5.60) полностью совпадает (с точностью до постоянных множителей) с полученным ранее уравнением (5.47)

Краевые условия для (5.59) имеют вид

$$\Theta(\xi,0) = 1; \qquad (5.61) \qquad\qquad \frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}} = 0; \qquad (5.62)$$

$$\frac{\partial^2\Theta(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}^2} = 0; \qquad (5.63) \qquad\qquad \frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial \xi} = 0, \qquad (5.64)$$

$$\Theta(1,\mathrm{Fo}) = 0. \qquad (5.65)$$

Следуя методу Фурье, решение задачи (5.60) – (5.65) находится в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \varphi(\mathrm{Fo})\psi(\xi). \qquad (5.66)$$

Подставляя (5.66) в (5.60), для неизвестных функций $\varphi(\mathrm{Fo})$ и $\psi(\xi)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$D_3 \frac{d^3\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^3} + D_2 \frac{d^2\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^2} + (D_1 + \nu D_4)\frac{d\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} + (D_0 + \nu D)\varphi(\mathrm{Fo}); \qquad (5.67)$$

$$\frac{d^2\varphi(\xi)}{d\xi^2} + \nu\psi(\xi) = 0, \qquad (5.68)$$

где ν – некоторая постоянная.

Подставляя (5.66) в условия (5.64), (5.65), находим граничные условия для функции $\psi(\xi)$

$$\frac{d\psi(0)}{d\xi} = 0; \qquad (5.69) \qquad\qquad \varphi(1) = 0. \qquad (5.70)$$

Решение задачи Штурма – Лиувилля (5.68) – (5.70) находится в виде

$$\psi_m(\xi) = \cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right] \qquad (m = \overline{1,\infty}). \qquad (5.71)$$

Выражение (5.71) точно удовлетворяет условиям (5.69), (5.70). Подставляя (5.71) в (5.68), будем иметь следующую формулу для нахождения собственных чисел краевой задачи Штурма – Лиувилля

$$\nu_m = \frac{(2m-1)^2\pi^2}{4} \qquad (m = \overline{1,\infty}). \qquad (5.72)$$

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (5.67) имеет вид

$$D_3 z^3 + D_2 z^2 + A_m z + B_m = 0, \qquad (5.73)$$

где $A_m = D_1 + \nu_m D_4$; $B_m = D_0 + \nu_m D$.

Обозначим корни характеристического уравнения (5.73) z_{1m}, z_{2m}, z_{3m}. Таким образом, будем иметь три корня z_{1m}, z_{2m}, z_{3m} для каждого собственного числа ν_m.

Решение уравнения (5.73) приводится к виду

$$\varphi_m(\mathrm{Fo}) = C_{1m}e^{z_{1m}\mathrm{Fo}} + C_{2m}e^{z_{2m}\mathrm{Fo}} + C_{3m}e^{z_{3m}\mathrm{Fo}}, \qquad (5.74)$$

где C_{1m}, C_{2m}, C_{3m} – константы интегрирования.

Подставляя (5.71), (5.74) в (5.66) и, определяя сумму частных решений, находим

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{m=1}^{\infty}(C_{1m}e^{z_{1m}\mathrm{Fo}}+C_{2m}e^{z_{2m}\mathrm{Fo}}+C_{3m}e^{z_{3m}\mathrm{Fo}})\cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]\quad(m=\overline{1,\infty}).\quad(5.75)$$

Константы интегрирования определяются из начальных условий (5.61) – (5.63). Вследствие ортогональности системы базисных функций из косинусов решение получаемой системы 3 m уравнений для C_{1m}, C_{2m}, C_{3m} приводится к трем алгебраическим уравнениям для каждого значения m $(m=\overline{1,\infty})$ вида

$$\begin{cases}\int\limits_0^1(C_{1m}+C_{2m}+C_{3m})\cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]^2d\xi-\int\limits_0^1\cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]=0;\\ \int\limits_0^1(C_{1m}z_{1m}+C_{2m}z_{2m}+C_{3m}z_{3m})\cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]^2d\xi=0;\\ \int\limits_0^1(C_{1m}z_{1m}^2+C_{2m}z_{2m}^2+C_{3m}z_{3m}^2)\cos\left[(2m-1)\frac{\pi}{2}\xi\right]^2d\xi=0.\end{cases}\quad(5.76)$$

Определив константы интегрирования, решение задачи (5.60) – (5.65) находится из (5.75). На рисунках 5.10 – 5.13 даны результаты вычислений по формуле (5.75) при различных исходных данных. Из сравнения рисунков 5.10, 5.11 и 5.12, 5.13, следует, что учёт релаксационных слагаемых в формулах закона Ома позволяет устранить скачкообразное изменение искомой функции.

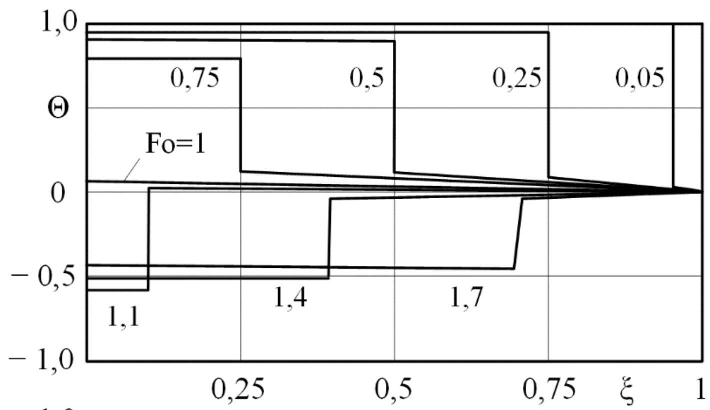


Рисунок 5.10. Изменение напряжения вдоль проводника ($F_1=F_2=0{,}1$) без учета релаксации ($\mathrm{Fo}_1=0$)

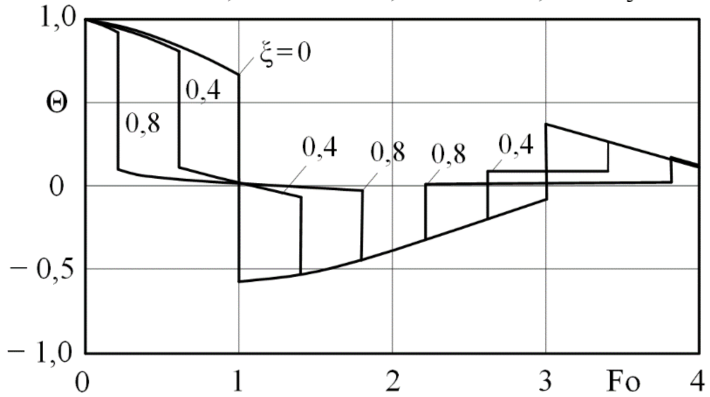


Рисунок 5.11. Изменение напряжения от времени ($F_1=F_2=0{,}1$) без учета релаксации ($\mathrm{Fo}_1=0$)

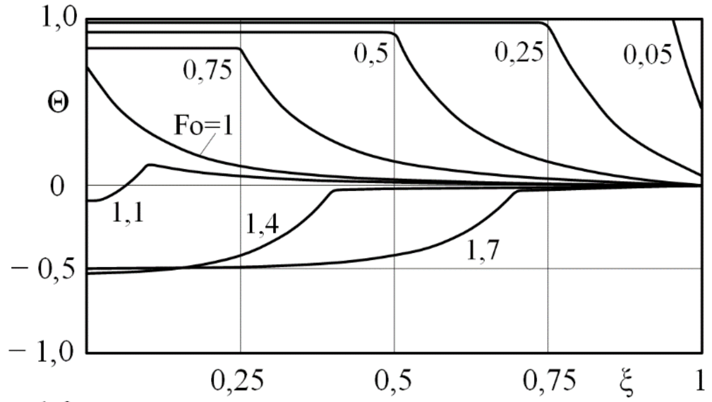


Рисунок 5.12. Изменение напряжения вдоль проводника ($F_1 = F_2 = \mathrm{Fo}_1 = 0{,}1$)

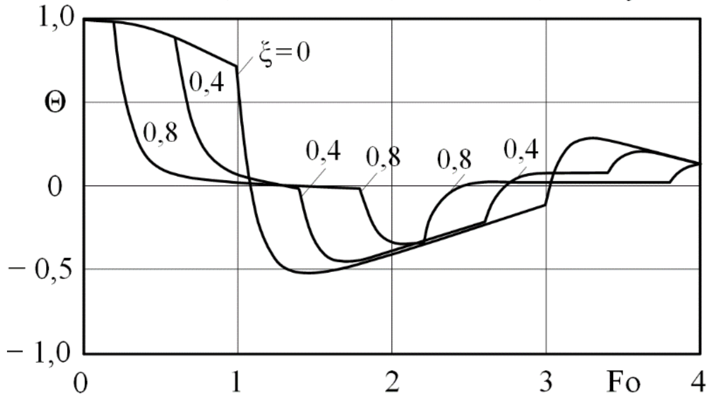


Рисунок 5.13. Изменение напряжения от времени ($F_1 = F_2 = \mathrm{Fo}_1 = 0{,}1$)

Кроме того, обнаруживается, что граничное условие 1 – го рода (5.65) (при пробах $\xi = 1{,}0$) не может быть принято мгновенно – процесс его установления включает некоторый диапазон начального временного участка, соответствующий $0 \le \mathrm{Fo} \le 0{,}5$ (рисунок 5.12). Установленный расчётным путём факт задержки установления граничного условия 1 – го рода свидетельствует о невозможности мгновенного изменения напряжения в точке $\xi = 1{,}0$, ввиду оказываемого средой сопротивления процессу изменения её потенциала.

5.4. Разработка и исследование локально – неравновесной математической модели электромагнитных колебаний в плазме

На основе полученного в работе аналитического решения релятивистского уравнения Клейна – Гордона выполнены исследования электромагнитных колебаний в плазме, находящейся в прямоугольном канале. Показано, что колебания в различных её точках имеют одинаковую частоту, но различную амплитуду. Совпадение частот в различных точках плазмы свидетельствует о самосогласованности плазменных колебаний. В пределах ширины канала колебания происходят одновременно с двумя амплитудами: с большой частотой и малой амплитудой, а также – с большой амплитудой и малой частотой. Исследования показали зависимость фазовой скорости от длины волны (частоты). Следовательно, плазма является дисперсионной средой для электромагнитных волн, что объясняется наличием в ней собственных внутренних и внешних пространственных и временных масштабов. К внутренним относятся дебаевский радиус (пространственный масштаб декомпенсации плазмы) и плазменная частота, определяющая временной масштаб декомпенсации. Внешним пространственным масштабом является конечная ширина канала. Найденное решение может быть использовано при исследовании плотности электронов в плазме путем анализа условий, при которых электромагнитная волна распространяется в плазме, то есть не отражается полностью. Исходя из условий полного отражения (отсечки электромагнитной волны), фиксируемого экспериментально, находится плазменная частота и плотность электронов в плазме. Важной характеристикой плазмы, связанной с её электропроводностью и теплопроводностью, является плотность электронов, определяемая с помощью интерферометров на основе анализа интерференционных полос. Этот метод может быть применен лишь в диапазоне длин волн, соответствующих плотностям электронов в пределах $10^{20}\ м^{-3} \le n_e \le 10^{22}\ м^{-3}$. Для длин волн, не закрываемых интерферометрами, используется метод, связанный анализом аналитического решения уравнения электромагнитных волн, для которых плазма в зависимости от плотности электронов представляет рассеивающую среду. И, в частности, от плотности электронов зависит плазменная частота и дебаевский радиус, представляющий характерный пространственный масштаб декомпенсации плазмы. Используя точное аналитическое решение уравнения электромагнитных волн, можно определять плотность электронов, плазменную частоту, дебаевский радиус, временной масштаб декомпенсации плазмы (величина, обратная частоте).

Если не учитывать магнитное поле, то электромагнитные волны в плазме описываются уравнением Клейна – Гордона. Для волны, у которой составляющая E_y, перпендикулярная оси z (поперечная волна), распространяющейся в канале (волноводе) шириной δ, это уравнение будет [88, 90] (рисунок 5.14)

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} E_y(x,t) = 0, \qquad (5.77)$$

где E_y – волновая функция (напряженность электромагнитного поля); x – координата; t – время; c – скорость света в вакууме; ω_p – плазменная частота, определяемая по формуле

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e}, \qquad (5.78)$$

где n_e – плотность электронов в плазме; e, m_e – заряд и масса электрона.

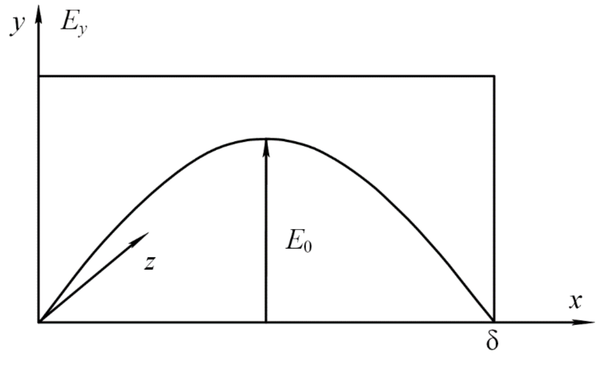


Рисунок 5.14. Схема канала

Допустим, что плазма содержится в канале, на стенках которого волновая функция равна нулю, а в начальное время она задана в виде постоянной величины E_0. Краевые условия для уравнения (5.77) здесь имеют вид

$$E_y(x,0) = E_0; \qquad (5.79) \qquad\qquad \frac{\partial E_y(x,0)}{\partial t} = 0. \qquad (5.80)$$

$$E_y(0,t) = 0; \qquad (5.81) \qquad\qquad E_y(\delta,t) = 0. \qquad (5.82)$$

где δ − ширина канала; $E_0 = \text{const}$.

Обозначим:

$$\Theta = \frac{E_y}{E_0}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad \text{Fo} = \frac{ct}{\delta}; \quad \text{Fo}_r = \frac{\omega_p^2\delta^2}{c^2}.$$

Введение безразмерных переменных и параметров позволяет записать исходную краевую задачу в безразмерном (параметрическом) виде

$$\frac{\partial^2\Theta(\xi,\text{Fo})}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\Theta(\xi,\text{Fo})}{\partial\text{Fo}^2} - \text{Fo}_r\Theta(\xi,\text{Fo}) = 0 \quad (\text{Fo} > 0;\ 0 < \xi < 1); \qquad (5.83)$$

$$\Theta(\xi,0) = 1; \qquad (5.84) \qquad\qquad \frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial\text{Fo}} = 0; \qquad (5.85)$$

$$\Theta(0,\text{Fo}) = 0; \qquad (5.86) \qquad\qquad \Theta(1,\text{Fo}) = 0. \qquad (5.87)$$

Решение задачи (5.83) – (5.87) находится в виде

$$\Theta(\xi,\text{Fo}) = \varphi(\text{Fo})\chi(\xi), \qquad (5.88)$$

где $\varphi(\text{Fo})$ и $\chi(\xi)$ − неизвестные функции.

Подставляя (5.88) в (5.83), находим

$$\frac{d^2\varphi(\text{Fo})}{d\text{Fo}^2} + \mu^2\varphi(\text{Fo}) = 0; \qquad (5.89)$$

$$\frac{d^2\chi(\xi)}{d\xi^2} + (\mu^2 - \text{Fo}_r)\chi(\xi) = 0, \qquad (5.90)$$

где μ^2 – некоторая постоянная.

Граничные условия для уравнения (5.90) будут

$$\chi(0) = \chi(1) = 0. \qquad (5.91)$$

Решение задачи Штурма – Лиувилля (5.90), (5.91) находится в виде

$$\chi(\xi) = A\cos\left[(2m-1)(1-2\xi)\frac{\pi}{2}\right] \quad (m = \overline{1,\infty}), \qquad (5.92)$$

где A – постоянная.

Последнее выражение удовлетворяет условиям (5.91). Подставляя (5.92) в (5.90), для собственных чисел получаем формулу

$$\mu_m^2 = (2m-1)^2\pi^2 + \text{Fo}_r \quad (m = \overline{1,\infty}). \qquad (5.93)$$

Ввиду однородности уравнения (5.90), собственные функции $\chi(\xi)$ находятся с точностью до постоянного множителя A, определяемого из условия нормировки

$$\int_0^1 A^2 |\chi(\xi)|^2 d\xi = \int_0^1 A^2 \cos^2 \left[(2m-1)(1-2\xi)\frac{\pi}{2} \right] d\xi = 1.$$

Определяя интеграл, находим $A = \sqrt{2}$.

Собственные функции, представляющие решение уравнения (5.90), находятся из соотношения

$$\chi_m(\xi) = \sqrt{2}\cos\left[(2m-1)(1-2\xi)\frac{\pi}{2} \right] \quad (m = \overline{1,\infty}). \tag{5.94}$$

Собственные функции, по соотношению (5.94), совпадают с функциями, стоячих волн в краевой задаче колебаний струны, жестко закрепленной на ее концах (рисунке 5.15). Граничные условия для струны в данном случае совпадают с условиями (5.91) и они приводят к дискретному набору частот колебаний струны и собственной функции, то есть наблюдается квантование частот.

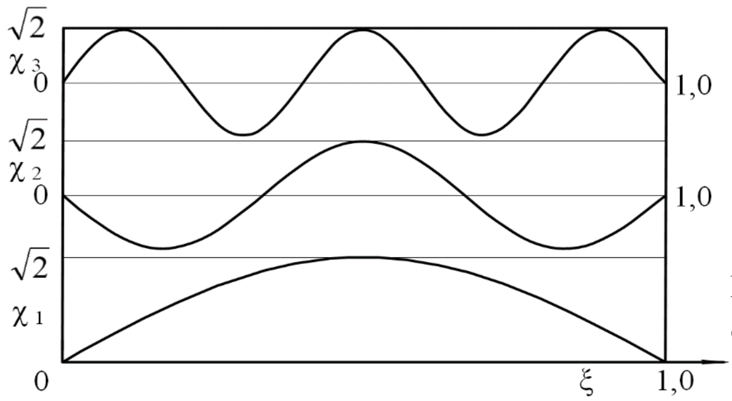


Рисунок 5.15. Собственные функции $\chi_m(\xi)$, ($m = 1,\ 2,\ 3$)

Если в уравнении (5.90) обозначить $\mu^2 - \mathrm{Fo}_r = k^2$, где $k = 2m_0 E/\hbar^2$ – волновое число, то для микрочастицы, находящейся в потенциальной «яме», уровни энергии $E_k = (\mu_k^2 - \mathrm{Fo}_r)\hbar^2/(2m)$ для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$ совпадают с их значениями, определяемыми из решения уравнения Шредингера. Например, при $k = 1, 2, 3$ находим: $E_1 = 32{,}9$ *эВ*; $E_2 = 296{,}1$ *эВ*; $E_3 = 822{,}5$ *эВ*. Расчеты приводятся для следующих исходных данных: $m = 9{,}10953\cdot 10^{-31}$ *кг*; $c = 10^6$ *м/с*; $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}05\cdot 10^{-34}$ *Дж·с* – постоянная Планка ($h = 6{,}62618\cdot 10^{-34}$ *Дж·с*).

Характеристическое уравнение к однородному уравнению (5.89) будет $z^2 + \mu_m^2 = 0$. Для любого собственного числа это уравнение имеет два корня

$$z_{jm} = \pm\sqrt{-\mu_m^2} = \pm i\mu_m,\ (j = 1, 2;\ m = \overline{1,\infty}),$$

где $i = \sqrt{-1}$.

С учётом найденных значений z_{1m} и z_{2m} решение дифференциального уравнения (5.89) отыскивается в виде

$$\varphi_m(\mathrm{Fo}) = C_{1m}\exp(z_{1m}\mathrm{Fo}) + C_{2m}\exp(z_{2m}\mathrm{Fo}), \tag{5.95}$$

где C_{jm}, $(j = 1, 2;\ m = \overline{1,\infty})$ – константы.

Соотношение (5.95), используя формулы Эйлера $\exp(is) = \cos s + i\sin s$

и $\exp(-is) = \cos\ s - i\sin s$, приводится к виду

$$\varphi_m(\text{Fo}) = C_{1m}\left[\cos(\mu_m\text{Fo}) + i\ \sin(\mu_m\text{Fo})\right] + C_{2m}\left[\cos(\mu_m\text{Fo}) - i\ \sin(\mu_m\text{Fo})\right] =$$

$$= (C_{1m} + C_{2m})\cos(\mu_m\text{Fo}) - i\,(C_{2m} - C_{1m})\sin(\mu_m\text{Fo}) =$$

$$= B_{1m}\cos(\mu_m\text{Fo}) + B_{2m}\sin(\mu_m\text{Fo})\ \ (m = \overline{1,\infty}), \qquad (5.96)$$

где $B_{1m} = C_{1m} + C_{2m}$; $B_{2m} = i\,(C_{2m} - C_{1m})$.

Подставляя (5.94), (5.96) в (5.88), получаем

$$\Theta(\xi,\text{Fo}) = A[B_{1k}\cos(\mu_k\text{Fo}) + B_{2k}\sin(\mu_k\text{Fo})]\cos\left[(2m-1)(1-2\xi)\frac{\pi}{2}\right]. \qquad (5.97)$$

Всякое частное решение (5.97) удовлетворяет уравнению (5.83) и граничным условиям (5.86), (5.87). Для удовлетворения условий (5.84), (5.85) необходимо составить сумму частных решений

$$\Theta(\xi,\text{Fo}) = A\sum_{m=1}^{\infty}\left[B_{1m}\cos(\mu_m\text{Fo}) + B_{2m}\sin(\mu_m\text{Fo})\right]\cos\left[(2m-1)(1-2\xi)\frac{\pi}{2}\right] \qquad (5.98)$$

Для определения констант интегрирования B_{1k} и B_{2k} используются начальные условия (5.84), (5.85).

Подставляя (5.98) в (5.84), находим

$$A\sum_{m=1}^{\infty} B_{1m}\cos\left[(2m-1)(1-2\xi)\frac{\pi}{2}\right] = 1. \qquad (5.99)$$

Умножим (5.99) на $\cos\left(j\dfrac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)$ $(j = 2m-1;\quad m = \overline{1,\infty})$ и проинтегрируем в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$

$$\int_0^1 A\sum_{m=1}^{\infty} B_{1m}\cos\left[(2m-1)(1-2\xi)\frac{\pi}{2}\right]\cos\left(j\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)d\xi =$$

$$= \int_0^1 \cos\left(j\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)d\xi. \qquad (5.100)$$

Ввиду ортогональности системы базисных функций (косинусов) соотношение (5.100) принимает вид

$$A\int_0^1 B_{1m}\cos^2\left[(2m-1)(1-2\xi)\frac{\pi}{2}\right]d\xi = \int_0^1 \cos\left[(2m-1)(1-2\xi)\frac{\pi}{2}\right]d\xi, \qquad (5.101)$$

Определяя интегралы в (5.101), получаем

$$B_{1m} = \frac{4(-1)^{m+1}}{A\pi(2m-1)}. \qquad (5.102)$$

Подставляя (5.98) в (5.85), находим: $B_{2m} = 0$.

Соотношение (5.98), учитывая B_{1m} и B_{2m}, будет

$$\Theta(\xi,\text{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{m+1}}{A\pi(2m-1)}\cos(\mu_m\text{Fo})\cos\left[(2m-1)(1-2\xi)\frac{\pi}{2}\right]. \qquad (5.103)$$

В таблице 6.1 приведены значения плотности электронов в плазме n_e, плазменная частота ω_p, дебаевский радиус r_D и характерный временной масштаб декомпенсации плазмы τ в зависимости от величины Fo_r. Дебаевский радиус r_D определялся при температуре плазмы $T = 3000\ K$ по формуле

$$r_D = \sqrt{kT/(4\pi n_e e^2)}\,, \tag{5.104}$$

где $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}$ $Дж/К$ – постоянная Больцмана.

Характеристики плазмы при различных значениях Fo_r.

Таблица 5.1.

Fo_r	**1**	**10**	**100**	**10^3**	**10^4**
n_e, $1/м^3$	$7\cdot 10^{18}$	$3\cdot 10^{19}$	10^{20}	10^{21}	$0{,}8\cdot 10^{22}$
ω_p, $Гц$	$1{,}5\cdot 10^{11}$	$3\cdot 10^{11}$	$6\cdot 10^{11}$	$1{,}8\cdot 10^{12}$	$5\cdot 10^{12}$
r_D, $м$	$1{,}4\cdot 10^{-6}$	$7\cdot 10^{-7}$	$4\cdot 10^{-7}$	10^{-7}	$4\cdot 10^{-8}$
τ, $с$	$6{,}6\cdot 10^{-12}$	$3{,}3\cdot 10^{-12}$	$1{,}6\cdot 10^{-12}$	$5{,}7\cdot 10^{-13}$	$2\cdot 10^{-13}$

В решении (5.103) плотность электронов n_e содержится в соотношении для μ_m, определяемых по формуле (5.193). Для нахождения зависимости плотности электронов в плазме от распределения волновой функции, необходимо найти условия, при которых электромагнитная волна распространяется в плазме, то есть не отражается полностью. Условия полного отражения можно определить из диэлектрической постоянной плазмы $\varepsilon = c^2/\vartheta^2$, где ϑ – фазовая скорость распространения волны [90].

Для этого рассмотрим некоторую функцию $\Theta^*(\xi, \mathrm{Fo})$, являющуюся решением уравнения (5.83), независимо от вида краевых условий и конкретной величины плазменной частоты. Эту функцию можно записать в виде

$$\Theta^*(\xi, \mathrm{Fo}) = De^{i(k_1\xi - \mathrm{Fo}_1\mathrm{Fo})}\,, \tag{5.105}$$

где D − безразмерная амплитуда колебаний; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; $k_1 = K\delta = 2\pi\delta/\lambda$ − безразмерный волновой вектор; K − волновой вектор; $\lambda = 2\pi c/\omega$ – длина волны; $\mathrm{Fo}_1 = \omega_1\delta/c$ − безразмерный комплекс; ω_1 − частота колебаний электромагнитной волны.

Для выполнения равенства соотношений (5.103) и (5.105) потребуем, чтобы решение (5.105) удовлетворяло уравнению (5.83). Для этого подставим (5.105) в (5.83)

$$-k_1^2 + \mathrm{Fo}_1^2 - \mathrm{Fo}_r = 0\,. \tag{5.106}$$

Отсюда с учётом соотношений для Fo_r и Fo_1 находим

$$k_1^2 = (\omega_1^2\delta^2/c^2)(1 - \omega_p^2/\omega_1^2)\,. \tag{5.107}$$

Из анализа соотношения (5.107) следует, что при $\omega_p < \omega_1$ волновой вектор k_1 будет действительной величиной, а при $\omega_p > \omega_1$ − мнимой. Следовательно, волны с частотой $\omega_1 < \omega_p$ не могут распространяться в плазме вследствие их практически полного отражения. Для определения условий полного отражения в формулу для фазовой скорости распространения волны в плазме $\vartheta = \omega_1 / K_1$ подставим соотношение (5.107) [90]

$$\vartheta = c/(1-\omega_p^2/\omega_1^2)^{1/2}.$$

Отсюда диэлектрическая постоянная плазмы будет

$$\varepsilon = 1-\omega_p^2/\omega_1^2. \qquad (5.108)$$

Следовательно, полное отражение волны будет для всех $\omega_p > \omega_1$. Плотность электронов определяется по частоте, при которой распространение электромагнитной волны из – за отражения полностью прекращается. Так как плазменная частота ω_p зависит от плотности электронов n_e, то для волн с частотой $\omega_1 > \omega_p$ от нее будет зависеть и диэлектрическая постоянная плазмы. Из соотношения (5.108) следует, что электромагнитная волна распространяется лишь при положительных значениях ε.

Формула (5.103) позволяет рассчитывать распространение электромагнитных волн в плазме при любых конкретных краевых условиях вида (5.84) – (5.87), варьируя параметром Fo_r, входящим в соотношение (5.93). Для каждого Fo_r с учётом конкретных значений заряда электрона и его массы по формуле $\mathrm{Fo}_r = \omega_\mathrm{p}^2\delta^2/c^2$ находится плазменная частота ω_p, на основе которой можно определить концентрацию электронов в плазме n_e.

Расчеты по формуле (5.103) для $\mathrm{Fo}_r = 75000$ даны на рисунках 5.16. Из них видно, что в диапазоне времени $0 < \mathrm{Fo} < 5$ происходит формирование профиля электромагнитной волны. При $\mathrm{Fo} > 5$ наблюдается некоторый установившийся (автомодельный) процесс колебаний, при котором форма профиля в незатухающем процессе колебаний повторяется. При этом форма графиков колебаний совпадает с формой квантовых фракталов [16, 152, 185]. Анализ волновой функции показывает, что плазма для электромагнитных волн является дисперсионной средой (фазовая скорость зависит от длины волны). Используя формулу для безразмерной величины волнового вектора $k_1 = 2\pi\delta/\lambda$, можно выполнить анализ причин, вызывающих дисперсию электромагнитных волн в плазме.

В случае, если $\delta << \lambda$, то $k_1 \to 0$ и волновые колебания отсутствуют. При $\delta >> \lambda$ $k_1 \to \infty$ и, следовательно, фазовая скорость $\vartheta = \omega_0 / K_1 \to 0$ при $\omega_0 = \mathrm{const}$, либо $\omega_0 \to 0$, при $\vartheta = \mathrm{const}$. Следовательно, колебательные процессы в волноводе связаны с наличием в нем собственного пространственного масштаба – конечной ширины δ (внешний собственный пространственный масштаб). Длина волны электромагнитных колебаний в плазме зависит от плазменной частоты, являющейся величиной, обратной временному масштабу декомпенсации плазмы τ (внутренний собственный масштаб). Внутренний пространственный масштаб декомпенсации плазмы определяется величиной дебаевского радиуса, зависящего от концентрации электронов в плазме. Отсюда можно сделать вывод, что дисперсия в плазме определяется совместным влиянием собственных пространственных (внешним δ и внутренним r_D) и временнòго масштабов.

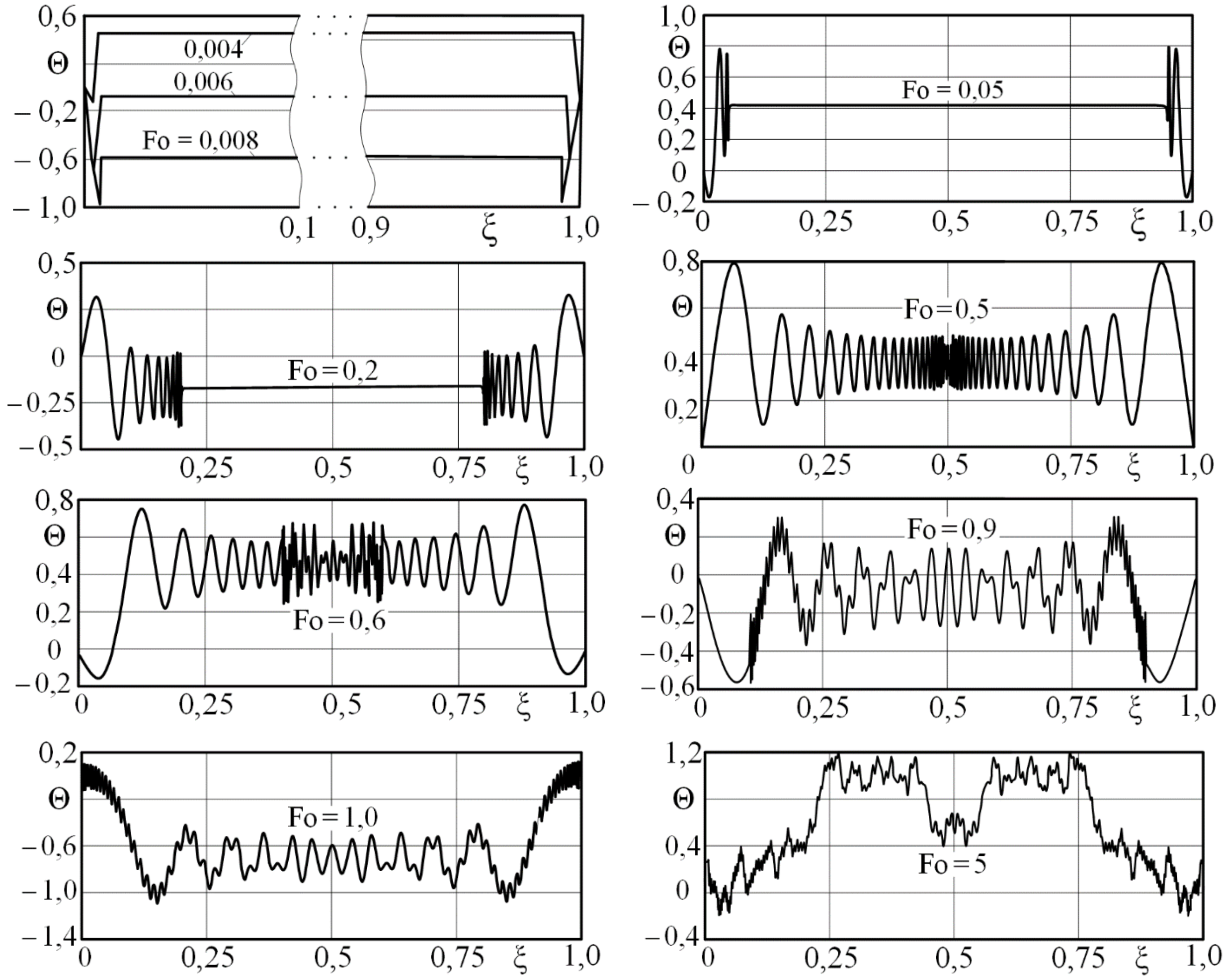


Рисунок 5.16. Изменение функции $\Theta(\xi, \mathrm{Fo})$. $n = 10^5$ (число членов ряда (5.123))

На рисунках 5.17, 5.18 приведены результаты расчётов изменения волновой функции в точке $\xi = 0{,}1$ во времени для малого $10 \le \mathrm{Fo} \le 11$ и большого $0 \le \mathrm{Fo} \le 100$ его диапазона. Анализ расчётов позволяет заключить, что в каждой точке пространственной переменной происходят высокочастотные колебания с переменной амплитудой. При этом частота колебаний оказывается неизменной и равной $\omega_p = 0{,}44 \cdot 10^{18}\ 1/c$.

На рисунке 5.19 приведены результаты расчетов электромагнитных колебаний по формуле (5.103) для трех точек пространственной переменной: $\xi = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5$ в некоторых малых диапазонах числа Фурье. Из их анализа следует, что колебания в различных точках канала имеют одинаковую частоту, что свидетельствует о самосогласованности (взаимосвязанности) колебаний во всем объеме плазмы [13]. В то же время колебания в различных точках имеют различную амплитуду, которая в каждой точке с течением времени может уменьшаться или возрастать. Причем, изменение амплитуды во времени в различных точках происходит несогласованно, увеличение во времени амплитуды колебаний в какой – то одной точке может сопровождаться её уменьшением в другой.

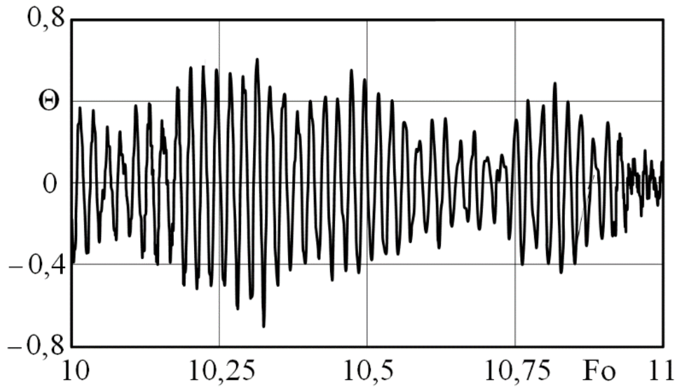


Рисунок 5.17. Изменение волновой функции в точке $\xi = 0{,}1$. $n = 10^6$; $10 \le \mathrm{Fo} \le 11$

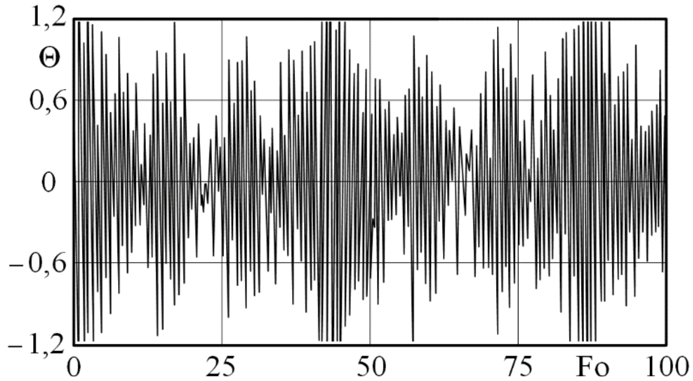


Рисунок 5.18. Изменение волновой функции в точке $\xi = 0{,}1$. $n = 10^6$; $0 \le \mathrm{Fo} \le 100$

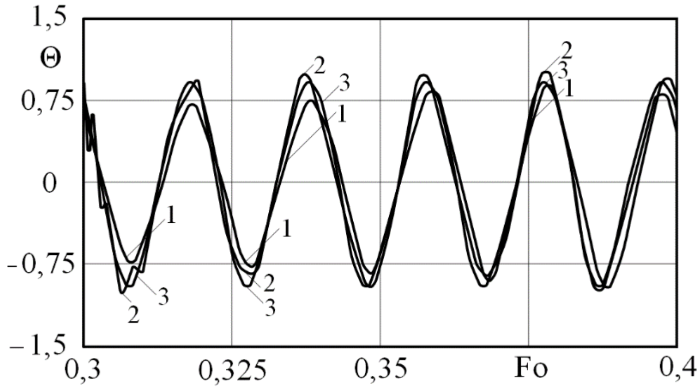


Рисунок 5.19. Изменение функции $\Theta(\xi, \mathrm{Fo})$. $\mathrm{Fo}_r = 10^5$. $n = 1000$. 1 – $\xi = 0{,}1$; 2 – $\xi = 0{,}3$; 3 – $\xi = 0{,}5$

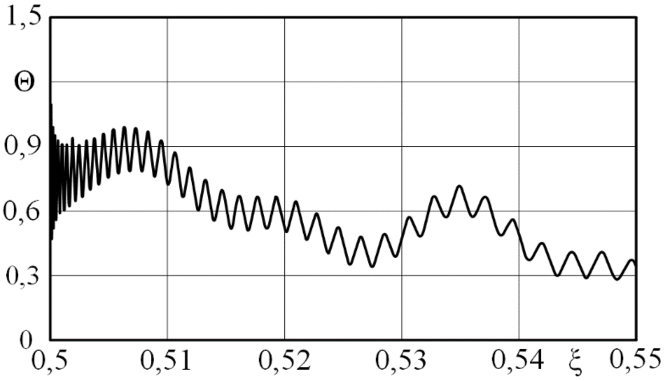


Рисунок 5.20. Изменение функции $\Theta(\xi, \mathrm{Fo})$. $n = 10^6$; $\mathrm{Fo} = 5{,}5$

Из анализа рисунка 5.20 следует, что в пределах ширины канала колебания одновременно происходят с малой амплитудой и большой частотой, а также – с большой амплитудой и малой частотой.

На основе разработанной методологии в диссертации получено и исследовано релаксированное уравнение Клейна – Гордона в форме

$$\mathrm{Fo}_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \mathrm{Fo}^3} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \mathrm{Fo}^2} + \mathrm{Fo}_r \Theta = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + R_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial \mathrm{Fo}} \quad (\mathrm{Fo} > 0;\ 0 < \xi < 1); \qquad (5.109)$$

$$\Theta(\xi,0)=1; \quad \frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}}=0; \quad \frac{\partial^2\Theta(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}^2}=0; \tag{5.110}$$

$$\Theta(0,\mathrm{Fo})=0; \quad \Theta(1,\mathrm{Fo})=0. \tag{5.111}$$

Запишем уравнение (5.109) в форме, используемой в параграфах 5.2, 5.3:

$$D_3\frac{\partial^3\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^3}+D_2\frac{\partial^2\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^2}+D_1\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}}+D_0\Theta+D\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}+D_4\frac{\partial^3\Theta}{\partial\xi^2\partial \mathrm{Fo}}=0. \tag{5.112}$$

где $D_3=\mathrm{Fo}_1$; $D_2=1$; $D_1=0$; $D_0=\mathrm{Fo}_r$; $D=-1$; $D_4=-R_1$ – коэффициенты.

Следуя методу разделения переменных Фурье, решение задачи (5.109) – (5.111) находится в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\varphi(\mathrm{Fo})\psi(\xi). \tag{5.113}$$

Подставляя (5.118) в (5.112), для функций $\varphi(\mathrm{Fo})$ и $\psi(\xi)$ получаем обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$D_3\frac{d^3\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^3}+D_2\frac{d^2\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^2}+(\nu D_4)\frac{d\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}}+(D_0+\nu)\varphi(\mathrm{Fo}); \tag{5.114}$$

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2}+\nu\psi(\xi)=0, \tag{5.115}$$

где ν – постоянная.

Подставляя (5.118) в условия (5.111), получаем граничные условия для функции $\psi(\xi)$

$$\frac{d\psi(0)}{d\xi}=0; \quad (5.116) \qquad \psi(1)=0. \tag{5.117}$$

Решение задачи Штурма – Лиувилля (5.120) – (5.122) находится, в виде

$$\psi(\xi)=\cos\left[(2m-1)(1-2\xi)\frac{\pi}{2}\right] \quad (m=\overline{1,\infty}). \tag{5.118}$$

Выражение (5.71) точно удовлетворяет условиям (5.111). Подставляя (5.123) в (5.120), будем иметь следующую формулу для нахождения собственных чисел задачи Штурма – Лиувилля

$$\nu_m=(2m-1)^2\pi^2 \quad (m=\overline{1,\infty}). \tag{5.119}$$

Характеристическое уравнение для (5.67) можно записать в виде:

$$D_3z^3+D_2z^2+A_mz+B_m=0, \tag{5.120}$$

где $A_m=\nu_mD_4$; $B_m=D_0+\nu_m$.

Обозначим корни характеристического уравнения (5.125) z_{1m}, z_{2m}, z_{3m}. Таким образом, будем иметь три корня для каждого собственного числа ν_m.

Решение уравнения (5.73) приводится к виду

$$\varphi_m(\mathrm{Fo})=C_{1m}e^{z_{1m}\mathrm{Fo}}+C_{2m}e^{z_{2m}\mathrm{Fo}}+C_{3m}e^{z_{3m}\mathrm{Fo}}, \tag{5.121}$$

где C_{1m}, C_{2m}, C_{3m} – константы интегрирования.

Подставив (5.123), (5.123) в (5.118) и, определив сумму частных решений, получаем

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_{1m} e^{z_{1m}\mathrm{Fo}} + C_{2m} e^{z_{2m}\mathrm{Fo}} + C_{3m} e^{z_{3m}\mathrm{Fo}} \right) \cos\left[(2m-1)(1-2\xi)\frac{\pi}{2} \right]. \quad (5.122)$$

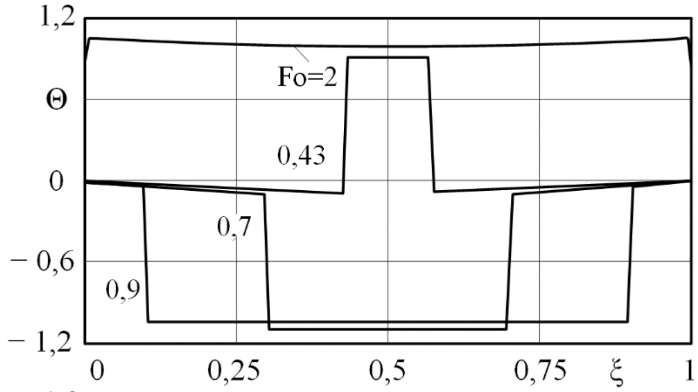


Рисунок 5.21. Распределение волновой функции по координате: $\mathrm{Fo}_r = 1;\ \mathrm{Fo}_1 = 0$

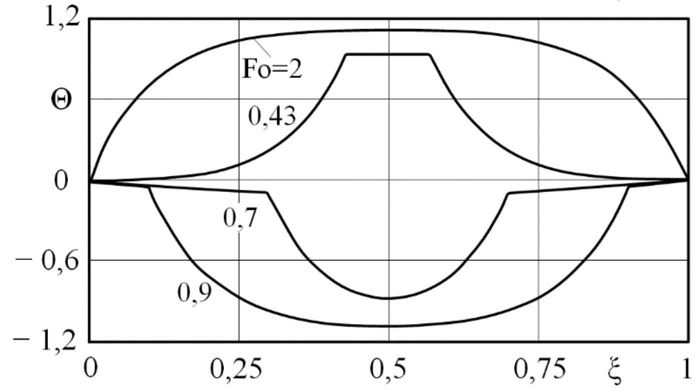


Рисунок 5.22. Распределение волновой функции по координате: $\mathrm{Fo}_r = 1;\ \mathrm{Fo}_1 = 0{,}1$

Постоянные интегрирования определяются из (5.110).

Результаты решения релаксированного уравнения Клейна – Гордона в сравнении с решением классического уравнения (5.83) приведены на рисунках 5.21, 5.22. Из их сравнения видно, что при неучете релаксационных слагаемых $(\mathrm{Fo}_1 = 0)$ наблюдается скачкообразное изменение искомой функции Θ (рисунок 5.21). При $(\mathrm{Fo}_1 \neq 0)$ скачки сглаживаются (рис. 5.22), что связано с наличием смешанной производной в уравнении (5.109).

6. ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНЫХ МНОГОКОЛЬЦЕВЫХ ТРУБОПРОВОДНЫХ СИСТЕМ НА КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЯХ, ОСНОВАННЫХ НА ЭЛЕКТРОГИДРАВЛИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ

Основные научные результаты автора, связанные с оптимизацией гидравлических режимов сложных трубопроводных систем приведены в [42, 145, 146, 194, 201, 214 – 216, 229 – 231, 232, 241, 243].

В настоящей главе рассматриваются теоретические положения, связанные с построением компьютерных моделей сложных трубопроводных систем. Широкое распространение при анализе сложных гидравлических систем получил метод электрогидравлических аналогий. В частности, используя два закона Кирхгофа, применяемые при расчетах электрических схем, могут быть построены уравнения потокораспределения в трубопроводных системах. Используя указанные законы, построены компьютерные модели конкретных гидравлических систем. Особенностью разработанного в диссертации подхода является использование алгоритма автоматизированной идентификации параметров системы. Под идентификацией понимается определение таких значений параметров модели системы, при которых ее расчетные характеристики (давления, расходы) совпадают с фактическими, определяемыми экспериментально. В качестве варьируемых параметров используются коэффициент трения и диаметры трубопровода.

В параграфе 6.1 описаны основные теоретические положения, лежащие в основе, автоматизированного расчета гидравлических режимов с учётом автоматизированной идентификации параметров. В п. 6.2 – 6.4 на конкретных примерах показано, что использование компьютерных моделей при проектировании и реконструкции систем теплоснабжения позволяет определять, как оптимальные геометрические характеристики отдельных участков сетей (диаметры длины), так и режимы их работы (расходы, напоры). Результаты проведенных исследований легли в основу разработки плана мероприятий повышения энергетической эффективности корректных объектов систем теплоснабжения. Экономический эффект от внедрения данных мероприятий подтверждается актами о внедрении результатов работ (см. приложения).

6.1. Основные положения теории расчета потокораспределения в гидравлических сетях

При проектировании трубопроводных систем различного назначения (нефтепроводы, водопроводы, системы теплоснабжения) возникает необходимость выполнения гидравлических расчетов. В зависимости от типа решаемой задачи различают наладочный, поверочный и конструкторский расчеты. Например, по результатам наладочного расчета определяют диаметры сужающих устройств (диафрагмы, сопла элеваторов и др.). При проектировании новых трубопроводных систем или реконструкции существующих выполняют конструкторский расчет, целью которого является выбор оптимальных характеристик трубопроводов, в частности, их диаметров. При выполнении поверочного расчета определяют параметры теплового и гидравлического режимов работы трубопроводной системы. Вне зависимости от типа выполняемых расчетов, погрешность вычислений существенно зависит от точности используемых исходных данных (геометрические характеристики трубопроводов, нагрузки потребителей, температурные графики). Как правило, при моделировании гидравлических и тепловых процессов в сложных трубопроводных системах используют паспортные характеристики элементов сети. В действительности, характеристики реальных систем могут существенно отличаться от паспортных. Причин этого несоответствия множество: неточность определения нагрузок потребителей; изменение коэффициентов трения при износе трубопроводов; снижения расхода от утечек; «зарастание» трубопроводов, приводящее к изменению их диаметров и др. В связи с этим при выполнении гидравлических расчетов возникает необходимость калибровки сетей – уточнение параметров математической модели трубопроводной сети, по данным измерений.

При выполнении гидравлических расчетов сложный трубопроводных сетей (тепловых сетей г. Самары), в диссертационной работе использован метод автоматизированной идентификации параметров. При построении компьютерных моделей использован программный комплекс, разработанный на кафедре «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика» ФГБОУ ВО «СамГТУ». Отличие используемого подхода от известных (ZuluThermo, Поток) состоит в том, что при идентификации параметров варьируются не только значения коэффициентов трения, но и диаметры трубопроводов. Данный процесс полностью автоматизирован, что позволяет в результате многочисленных итеративных расчетов приблизиться к описанию реальной трубопроводной системы. Важно отметить, что при выполнении тепловых расчетов трубопроводов использованы критериальные уравнения, полученные в третьей главе диссертации.

Рассмотрим теоретические положения, лежащие в основе итеративного метода расчета гидравлических систем. Гидродинамические и тепловые процессы, протекающие в потоках жидкостей и газов, описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений. Использование точных аналитических методов применительно к таким задачам крайне затруднено, а во многих случаях не представляется возможным. В связи с этим, широкое распространение при анализе сложных гидравлических систем получил метод электрогидравлических аналогий. В частности, используя два закона Кирхгофа, применяемые при расчетах электрических схем, могут быть построены уравнения потокораспределения в трубопроводных системах. Использование данного метода позволяет исключить необходимость непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений, заменяя данный процесс вычислительной процедурой решения систем алгебраических уравнений. Преимуществом данного подхода является возможность его алгоритмизации с последующей реализацией в виде проблемно – ориентированных программных комплексов для ЭВМ. Разработке этой теории посвящены публикации [102 – 105]. Расчеты выполняются итеративно, путем минимизации поправочных расходов.

Рассмотрим идею метода электрогидравлической аналогии на примере расчета закольцованной трубопроводной сети с тремя ответвлениями (рисунок 6.1). Расходы на участках кольца a, b, c, d обозначим через Q_a, Q_b, Q_c, Q_d, а на ответвлениях – через Q_1, Q_2, Q_3. По заданным расходам Q_1, Q_2, Q_3 и $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ необходимо найти расходы на участках кольца Q_a, Q_b, Q_c, Q_d.

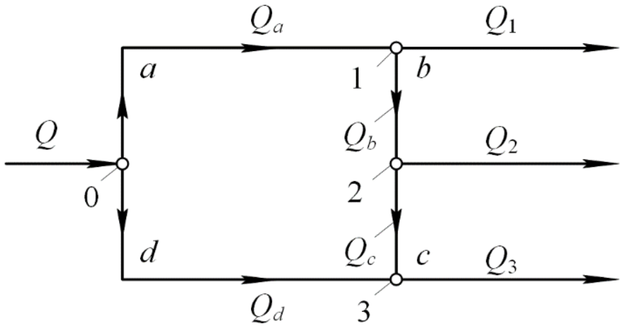


Рисунок 6.1. Расчетная схема

На первом шаге итеративного расчета для каждого участка кольца задаются произвольные распределения расходов Q_a, Q_b, Q_c, Q_d. Тогда для узлов 0, 1, 2 по первому закону Кирхгофа находим $Q_d = Q - Q_a$; $Q_a = Q_1 + Q_b$; $Q_b = Q_2 + Q_c$.

Используя принятые расходы на участках кольца, и, следуя второму закону Кирхгофа, находится невязка напоров [97]

$$\delta H = \sum_{i=1}^{4} S_i Q_i^2 = S_a Q_a^2 + S_b Q_b^2 + S_c Q_c^2 - S_d Q_d^2. \qquad (6.1)$$

В связи с тем, что на первом шаге задано произвольное распределение расходов, величина невязки напоров δH не равна нулю. Для того, чтобы минимизировать δH вводится поправочный расход δQ, который вычитается или прибавляется к расходам Q_a, Q_b, Q_c, Q_d в зависимости от того перегружены соответствующие участки сети или недогружены:

$$S_a(Q_a - \delta Q)^2 + S_b(Q_b - \delta Q)^2 + S_c(Q_c - \delta Q)^2 - S_d(Q_d + \delta Q)^2 = 0. \qquad (6.2)$$

В известных работах слагаемые, содержащие $(\delta Q)^2$, не учитываются ввиду малости. Однако, их учет не создает принципиальных трудностей и может быть учтен в вычислительном алгоритме. Ввиду того, что при этом увеличивается объем вычислительной работы, а точность увеличивается незначительно, величиной $(\delta Q)^2$ пренебрегаем. В этом случае, величина δQ определяется из решения алгебраического уравнения:

$$\delta Q = \frac{\delta H}{2\sum_{i=1}^{n} S_i Q_i}, \qquad (6.3)$$

где $\sum_{i=1}^{n} S_i Q_i = S_a Q_a + S_b Q_b + S_c Q_c + S_d Q_d$.

После того, как значение поправочного расхода δQ определено, уточняются расходы на участках Q_a, Q_b, Q_c, Q_d. Рассмотренный алгоритм повторяется до тех пор пока данные последних итераций не совпадут (с заданной точностью).

Рассмотрим разобранный алгоритм применительно к конкретной гидравлической схеме (см. рисунок 6.1). Используем следующие исходные данные:

$$Q = 60\ \ м^3/ч;\quad S_a = 5\cdot 10^{-5}\ \ ч^2/м^5;\quad S_b = 2\cdot 10^{-5}\ \ ч^2/м^5;\quad S_c = 8\cdot 10^{-5}\ \ ч^2/м^5;$$

$$S_d = 4\cdot 10^{-5}\ \ ч^2/м^5;\quad Q_1 = 15\ \ м^3/ч;\quad Q_2 = 25\ \ м^3/ч;\quad Q_3 = 20\ \ м^3/ч.$$

Для определения расходов Q_a, Q_b, Q_c, Q_d на всех участках на первой итерации зададимся произвольными их величинами:

$$Q_a = 50\ \ м^3/ч;\quad Q_b = 35\ \ м^3/ч;\quad Q_c = 10\ \ м^3/ч;\quad Q_d = 10\ \ м^3/ч.$$

Согласно формуле (6.1) невязка напоров будет равна $\delta H = 0{,}1535\ \ м$. Поправочный расход определим по формуле (6.3): $\delta Q = 17{,}47\ \ м$.

Используя найденное значение δQ, определяем значения Q_a, Q_b, Q_c, Q_d на втором шаге:

$$Q_a = 32{,}53\ \ м^3/ч;\quad Q_b = 17{,}53\ \ м^3/ч;\quad Q_c = -7{,}47\ \ м^3/ч;\quad Q_d = 27{,}47\ \ м^3/ч.$$

Знак расхода Q_c здесь отрицательный. Следовательно, направление движения, принятое на первом шаге, на этом участке следует сменить, то есть расход необходимо взять положительным. Тогда находим $\delta H = 0{,}024408\ \ м$; $\delta Q = 3{,}32\ \ м^3/ч$.

Уточняя расходы на ветвях, будем иметь:

$$Q_a = 29{,}21\ \ м^3/ч;\quad Q_b = 14{,}21\ \ м^3/ч;\quad Q_c = 10{,}79\ \ м^3/ч;\quad Q_d = 30{,}79\ \ м^3/ч.$$

Аналогичные действия выполняются и для третьей итерации. Так значения δH и δQ будут: $\delta H = 0{,}0074\ \ м$; $\delta Q = 1{,}1\ \ м^3/ч$, а уточненные расходы по участкам:

$$Q_a = 28{,}11\ \ м^3/ч;\quad Q_b = 13{,}11\ \ м^3/ч;\quad Q_c = 11{,}89\ \ м^3/ч;\quad Q_d = 31{,}89\ \ м^3/ч.$$

Проверим выполнение первого закона Кирхгофа:

$$Q_1 = 15\ \ м^3/ч;\quad Q_2 = 25\ \ м^3/ч;\quad Q_3 = 20\ \ м^3/ч;\quad Q_1 = Q_a - Q_b = 15\ \ м^3/ч;$$

$$Q_2 = Q_b + Q_c = 25;\quad Q_3 = Q_d - Q_c = 20\ \ м^3/ч.$$

Таким образом, на третьем шаге получены расходы на ветвях сети, с заданной точностью совпадающие с заданными Q_1, Q_2, Q_3.

При моделировании гидравлического режима более сложных систем необходимо использовать вычислительную технику. При построении компьютерной модели гидравлической сети применяется теория графов [25], на основе которой создается «дерево» теплосети. Любое дерево можно пронумеровать в соответствии с данными положениями. Алгоритм перенумерации дан в [25]. С помощью программы определяются расходы в любой точке, с указанием направления течения среды, выполняется анализ работы при отключении участков сети, определяются затраты энергии на перемещение среды. Граф удобно задаётся матрицей, в которой строки соответствуют вершинам графа, а столбцы – дугам. Отметим, что матрица удобна при рассмотрении систем уравнений, определяемых графом. Форма представления графа в виде матрицы удобна также тем, что позволяет оперативно изменять информацию о тепловой сети.

Компьютерная модель гидравлической сети состоит из следующих основных элементов: 1) участки трубопроводов; 2) задвижки; 3) насосы. Каждый из перечисленных элементов описывается своей характеристикой. Так, для участков трубопроводов определяются потери напора, равные сумме линейных (на трение) и местных потерь

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d}\frac{\upsilon^2}{2g} + \sum \xi \frac{\upsilon^2}{2g}, \tag{6.4}$$

где Δh – суммарная потеря напора, $м$; λ – коэффициент сопротивления (трения); l – длина трубопровода, $м$; d – диаметр трубопровода, $м$; υ – скорость течения жидкости, $м/с$; $\sum \xi$ – суммарная величина коэффициентов местных сопротивлений.

Через эквивалентную длину трубопровода $l_э = d\sum \xi/\lambda$, местные потери сводятся к линейным и формула (6.4) может быть представлена в виде

$$\Delta h = \frac{8\lambda(l + l_э)}{\pi^2 g d^5} Q^2$$

или в более удобном виде

$$\Delta h = SQ^2,$$

где $S = \dfrac{8\lambda(l + l_э)}{\pi^2 g d^5}$ – гидравлическое сопротивление на участке, $с^2/м^5$.

Характеристика задвижки записывается в виде

$$\Delta h = SQ^2,$$

где S – сопротивление задвижки.

Участки – насосы задаются зависимостями, которые связывают напор и подачу. Характеристика насоса в координатах Q – H представляется уравнением

$$H = H_ф - Q_н^т S_ф,$$

где $H_ф$ – напор при закрытой на выходе задвижке $(Q_н = 0)$, $м$; $Q_н$ – производительность насоса, $м^3/с$; $S_ф$ – сопротивление насоса.

Искомые величины $H_ф$ и $S_ф$ находятся по двум точкам, принятым из каталога, на основе соотношений

$$S_ф = \frac{H_а - H_б}{Q_б^2 - Q_а^2}; \quad H_ф = H_а + S_ф Q_а^2,$$

где «а» и «б» являются параметрами H и Q, взятыми из паспорта.

В действительности, диаметр колеса насоса D, количество оборотов n и другие характеристики могут отличаться от приведенных в паспорте. Полученная аналитическим методом характеристика является базовой, а действительные её данные $H_ф^*$ и $S_ф^*$ находятся из соотношений

$$S_ф^* = S_ф; \qquad H_ф^* = H_ф \left(\frac{D^*}{D} \right)^2 \left(\frac{n^*}{n} \right)^2, \tag{6.5}$$

где $S_ф^*$, $H_ф^*$, n^* – данные истинной характеристики; $S_ф$, $H_ф$, n – данные базовой характеристики.

Рассмотрим пример определения характеристики насоса СЭ-2500-180. Значения расхода в зависимости от напора даны в таблице 6.1.

В качестве расчетных точек, которые соответствуют индексам «а» и «б» в формулах (6.5), используем точки 3 и 5. На основе табличных данных, по формулам (6.5) получаем

$$S_ф = \frac{222 - 180}{2500^2 - 1500^2} = 1{,}05 \cdot 10^{-5}\ с^2 / м^5;$$

$$H_а = 222 + 1{,}05 \cdot 10^{-5} \cdot 1500^2 = 245{,}6\ м.$$

Таблица 6.1

№ точки	1	2	3	4	5	6
$Q_а$, $м^5 / ч$	0	1100	1500	1900	2500	3000
$H_а$, $м$	240	230	222	209	180	144

Таким образом, получаем следующую формулу для характеристики насоса СЭ-2500-180

$$H_ф = 245{,}6 - 0{,}0000105 \cdot Q^2.$$

С учетом того, что паспортные характеристики не всегда соответствуют действительному состоянию насоса в программном комплексе предусмотрена возможность корректировки. Для этого в рассмотрение вводятся два коэффициента, которые корректируют величины $S_ф$ и напор при закрытой задвижке $H_ф$. Величина этих коэффициентов определяется из эксперимента.

Таким образом строится модель с паспортными данными оборудования. Однако действительные характеристики не совпадают с паспортными. Для приближения модели к действительной сети производится её идентификация. На основе экспериментальных данных гидравлические сопротивления отдельных ветвей модели изменяют так, чтобы расчетные значения приближались к экспериментальным. Данный процесс – процесс идентификации автоматизирован и осуществляется итеративно. Точность идентификации определяется объемом экспериментальных данных. При разработке новых сетей, идентификация не требуется.

6.2. Проектирование теплового вывода источника системы теплоснабжения

Применение компьютерных моделей при проектировании трубопроводных сетей позволяет полностью воспроизводить протекающие в них гидравлические процессы. С помощью модели можно выполнять многочисленные вычислительные эксперименты для данной гидравлической сети, что делает возможным определение оптимальной конфигурации системы в целом.

При построении модели новой сети задаются длины труб, высоты расположения оборудования и другое, а также параметры среды, которые будут выдерживаться при работе. Точки расположения регуляторов расхода (давления), задвижек, насосов, а также диаметры, находятся путем многовариантных расчётов на компьютерной модели.

Рассмотрим последовательность проектирования тепловывода от ТЭЦ-1 с целью подключения к ней существующих потребителей ТЭЦ-2. Схема подсоединения нового вывода от ТЭЦ-1 к ТЭЦ-2 приведена на рисунке 6.2. В настоящее время потребители $П_1$, $П_2$ и $П_3$ запитаны от первого, второго и третьего теловыводов ТЭЦ-2 соответственно. Планируется, что от нового тепловывода ТЭЦ-1 будут запитаны все потребители $П_3$ с учетом перспективной нагрузки. Расход теплоносителя на расчетном режиме на покрытие существующей нагрузки составляет 4600 $т/ч$, перспективной – 5800 $т/ч$.

Для обеспечения высокого качества теплоснабжения потребителей $П_3$ необходимо, чтобы значение напора на вводе каждого потребителя был не ниже нормативного. Для этого давление в точке 23 должно поддерживаться не менее 11 $кгс/см^2$. По условиям технического задания необходимо удовлетворить таким требованиям: новый тепловывод ТЭЦ-1 нужно присоединить к ТЭЦ-2 в точке 23 на прямом и точке 29 на обратном трубопроводах (см. рисунок 6.2); давление на сетевых насосах ТЭЦ-1 должно быть не более 16 $кгс/см^2$.

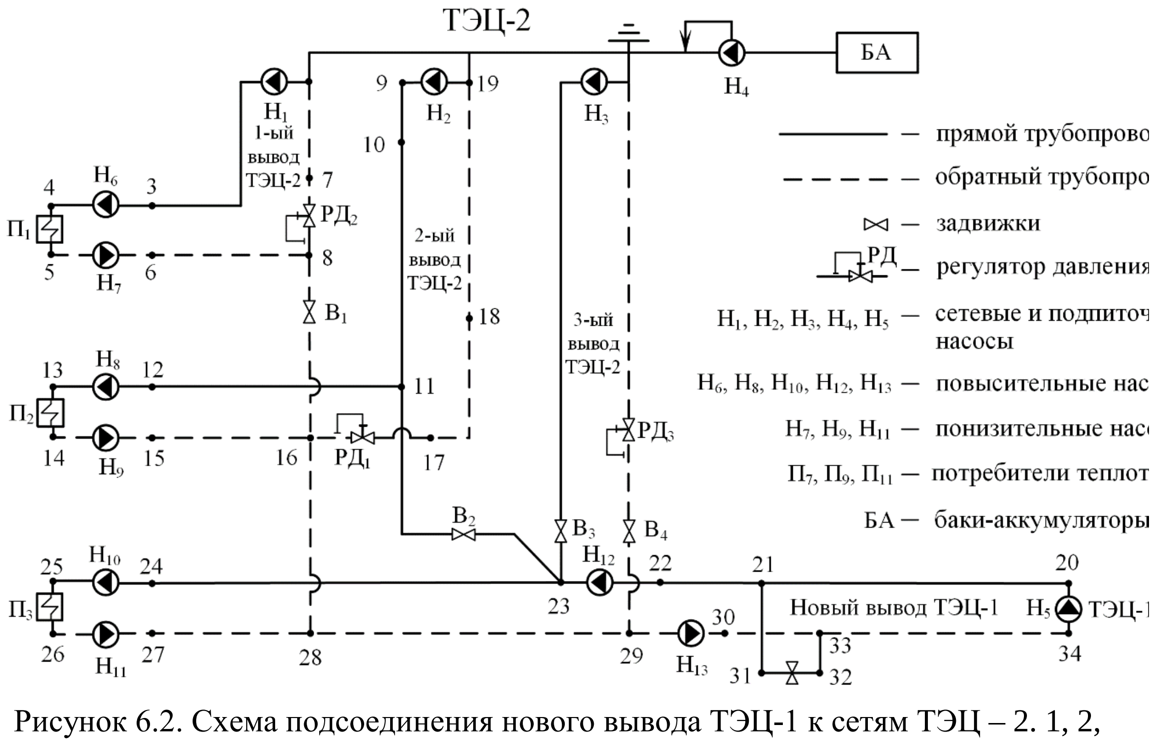


Рисунок 6.2. Схема подсоединения нового вывода ТЭЦ-1 к сетям ТЭЦ – 2. 1, 2, 3,…, 34 – характерные точки сети

Для проектирования нового тепловывода ТЭЦ-1 была выполнена серия расчетов гидравлического режима объединенной тепловой сети с двумя тепловыми источниками (ТЭЦ-1 и ТЭЦ-2). По результатам моделирования определены оптимальные геометрические характеристики трубопроводов, а также оптимальные режимные параметры. Расчеты выполнялись для трех режимов работы тепловой сети: 1) минимально возможной; 2) при нагрузке, соответствующей текущей нагрузке потребителей; 3) при максимальной нагрузке, учитывающей прирост перспективной нагрузки.

При выполнении расчетов использовались фактические данные по расходам теплоносителя. Для режима с текущей нагрузкой расход на горячее водоснабжение 1482 $т/ч$ определен как разность между расходом в прямом и обратном трубопроводах третьего тепловывода ТЭЦ-2 (равными соответственно 4575 $т/ч$ и 3097 $т/ч$). Расходы по второму тепловыводу брались равными 5064 $т/ч$, 3181 $т/ч$, 1983 $т/ч$ в прямом, обратном трубопроводах и на горячее водоснабжение. Давление в обратной трубе второго вывода ТЭЦ-2 (точка 19) составляет 2,2 $кгс/см^2$. Давление после насосов $Н_8$ и $Н_{10}$ будет 10 $кгс/см^2$. Давление перед насосом $Н_9$ равно 3,0 $кгс/см^2$, а перед насосом $Н_{11}$ – 4,5 $кгс/см^2$.

Главным параметром регулирования является давление перед сетевыми насосами $Н_5$ ТЭЦ – 1, которое должно быть в пределах 1,5 – 3 $кгс/см^2$. Его поддержание регулятором давления РД1.

Расчеты давлений для тепловыводов, применительно к 1 – му варианту работы, даны на рисунках 6.3 – 6.5. На представленных рисунках обозначения характерных точек аналогичны обозначениям на рисунке 6.2.

В точке 34 давление должно быть 2,5 $кгс/см^2$. Настройка РД1 должна соответствовать давлению 5,5 $кгс/см^2$, что, согласно техническим условиям на проектирование, должно быть не больше давления в области точки 16. Давление после $Н_{10}$, равное 10 $кгс/см^2$, создается насосами $Н_5$ ТЭЦ-1, что позволяет убрать насосную $Н_{10}$. Давление, создаваемое насосами $Н_5$ должно быть 11,5 $кгс/см^2$ (давление 202 $м\ вод.ст.$, точка 20 на рисунке 6.3).

Из анализа рисунка 6.2 следует, что на участке 19 – 17 (см. рисунок 6.2) давление уменьшается до 10 $м\ вод.ст.$ (1 $кгс/см^2$). В связи с чем, жидкость на этом участке может вскипеть. В связи с этим дана рекомендация по увеличению давления, поддерживаемого насосами $Н_4$ до 3 – 3,5 $кгс/см^2$.

Наиболее важным с точки зрения подбора геометрических характеристик проектируемого тепловывода трубопровода является расчет с учетом прироста потребления (с учетом нагрузки перспективных потребителей). Для режима с перспективной нагрузкой расход на горячее водоснабжение 2008 $т/ч$ определен как разность между расходом в прямом и обратном трубопроводах равными соответственно 5800 $т/ч$ и 3792 $т/ч$.

Из анализа результатов расчета на компьютерной модели сделано заключение, что для поддержания насосами $Н_5$ ТЭЦ-1 давления 2,5 $кгс/см^2$, регулятор РД1 нужно настроить на давление 7 $кгс/см^2$ (см. рисунок 6.5).

Следовательно, наиболее оптимальным вариантом присоединения нового вывода к ТЭЦ-2 будет вариант с перемычкой 16 – 28 (см. рисунок 6.2) между обратными магистралями теплосетей второго и третьего выводов ТЭЦ-2. На участке между точками 16-17 следует подключить регулятор давления РД1.

Расчеты показали, что при современной нагрузке в сетях 2-го и 3-го выводов ТЭЦ – 2 для поддержания в точке 34 давления 2,5 $кгс/см^2$ РД1 нужно настроить на давление 5,5 $кгс/см^2$.

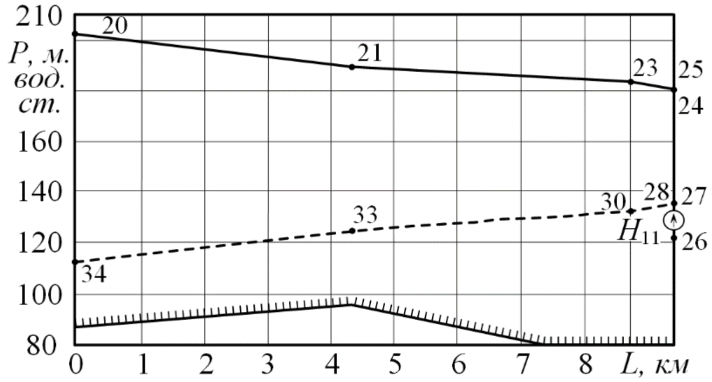


Рисунок 6.3. Эпюры давлений: P – давление; L – длина участка; • – тепловые камеры); ——— – прямой трубопровод; – – – – обратный трубопровод; ⊥⊥ – отметка земли, *м*

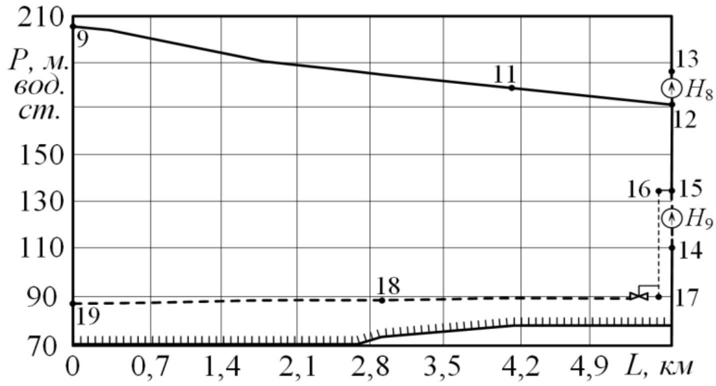


Рисунок 6.4. Пьезометрические давления по линиям 9 – 11 – 12 – 13 (прямая магистраль), 14 – 15 – 16 – 17 – 18 – 19 (обратная магистраль)

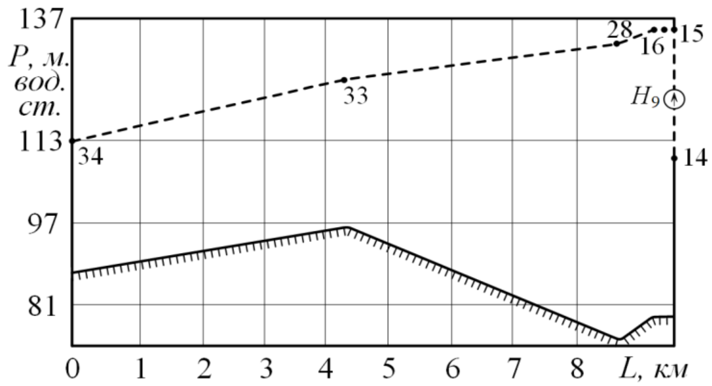


Рисунок 6.5. Пьезометрические давления по линии 14 – 15 – 16 – 28 – 33 – 34 (обратная магистраль)

Анализ результатов исследований, выполненных на компьютерной модели, приводит к заключению, что при снабжении абонентов от двух тепловых источников, с различными схемами отопления, возникают проблемы, от решения которых зависит работоспособность системы в целом. Среди них наиболее важной является проблема настройки РД.

6.3. Разработка компьютерной модели системы централизованного теплоснабжения с двумя источниками теплоты

Одной из наиболее распространенных проблем, возникающих при определении оптимальных режимов работы гидравлических систем с несколькими источниками теплоты, является широкий диапазон изменения высотных отметок как потребителей, так и источников теплоты. Рассмотрим тепловую сеть, изображенную на рисунке 6.6. Особенность этой сети состоит в том, что тепловые источники расположены на существенно отличающихся высотных отметках.

При выполнении расчетов использованы следующие исходные данные по тепловым выводам ТЭЦ-1 и ТЭЦ-2. Расход в подающем трубопроводе ТЭЦ-1 – 12000 $т/ч$ (4200 $т/ч$ первый вывод, 7100 $т/ч$ – второй). Расход теплоносителя в обратном трубопроводе ТЭЦ-1 – 10000 $т/ч$ (1550 $т/ч$ первый тепловывод, 8200 $т/ч$ – второй). Суммарный расход от ТЭЦ-2 равен 7300 $т/ч$ в прямых и 6500 $т/ч$ – в обратных трубопроводах. Из них первый вывод – 830 и 650 $т/ч$, второй – 680 и 590 $т/ч$, третий – 4060 и 3620 $т/ч$, четвертый – 1430 и 1150 $т/ч$ соответственно.

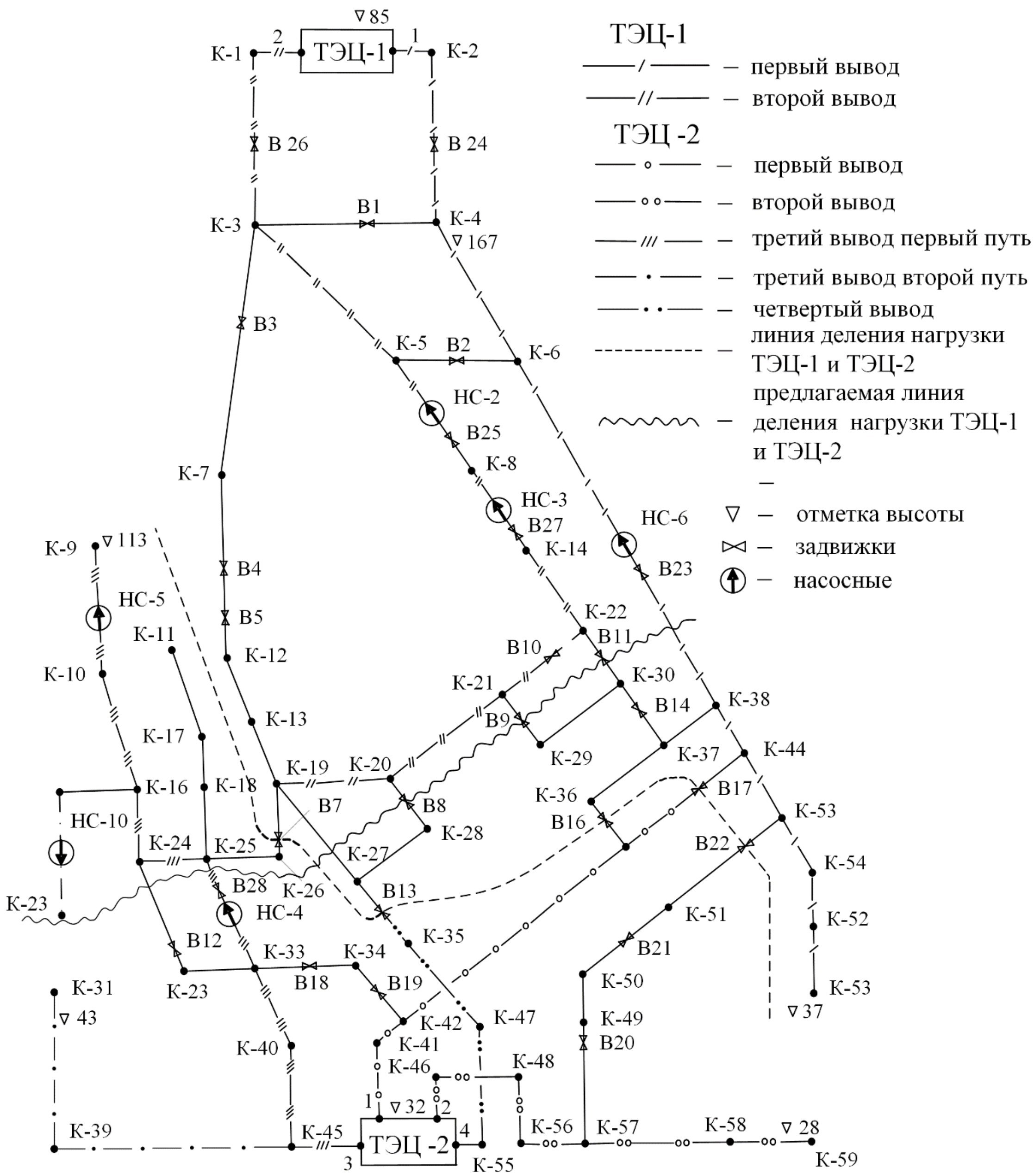


Рисунок 6.6. Схема тепловых сетей от ТЭЦ-1 и ТЭЦ-2

Результаты расчетов давлений для отдельных выводов ТЭЦ-1 и ТЭЦ-2 в реальном режиме работы даны на рисунках 6.7 – 6.11. Проведем их анализ Важной особенностью в данном случае является большое различие в отметках высот размещения источников теплоты (ТЭЦ-1 – 85 *м*, ТЭЦ-2 – 32 *м*). Причем, сети, питаемые от ТЭЦ-1 и ТЭЦ-2, разделены закрытыми задвижками (см. рисунок 6.6). Стоит отметить, что ТЭЦ-1, находящаяся на высоте 85 *м*, питает потребителей, вблизи ТЭЦ-2, находящихся на отметке высоты 33 *м* (см. 1 – ый вывод ТЭЦ-1, рисунки 6.6, 6.7) и удалённых от ТЭЦ-1 на 16 *км*. Кроме того, на удалении 3 – 5 *км* от ТЭЦ-1 находится участок сети с отметкой 167 *м* и, следовательно, давление в обратной трубе следует обеспечивать не менее 180 *м*, что производится задвижками (В24, В26, см. рисунки 6.6, 6.7, 6.8). ТЭЦ-2, расположенная на высоте 32 *м*, обеспечивает отопление потребителей, находящихся на высоте 113 *м*. Для обеспечения требуемых режимов работы используются три повысительные насосные (НС-4, НС-5 и НС-10). Следовательно, данных потребителей более целесообразно запитывать от ТЭЦ-1. Целесообразно также потребителей, находящихся на высотах 30 – 50 *м*, запитывать от ТЭЦ-2. В связи с чем, можно рекомендовать следующую схему разделения нагрузки между ТЭЦ-1 и ТЭЦ-2 (на рисунке 6.6 деление сетей выполнено волнистой линией). Нагрузку абонентов на высоте 30 – 50 *м* передать ТЭЦ-2, а на высоте более 60 *м* – ТЭЦ-1. Выполненныетисследования показали, что рекомендуемое деление нагрузки при существующих схемах трубопроводов можно сделать лишь при увеличении диаметров труб с 400 до 800 *мм* (длина участка 1,1 *км*) на участке от К-19 до К-26 При этом отпадает необходимость использования насосных НС-4, НС-5, НС-10 и НС-6.

Анализ эпюр давлений для 1 – го вывода ТЭЦ-1 (см. рисунок 6.7) позволяет заключить, что в области тепловой камеры К-55 располагаемый перепад давлений составляет 10 *м вод.ст.* Для решения данной проблемы требуется уменьшение дросселирования давления с помощью задвижки В23. Точно также можно решить проблему увеличения перепада давления в районе камеры К-19 2 – го вывода ТЭЦ-1 (рисунок 6.8), с помощью задвижки В27. Следовательно, для обеспечения требуемого перепада давлений требуется лишь оптимально отрегулировать работу дросселирующих запорных устройств на прямых трубопроводах и понизительных насосов на обратных. Распределение давлений на выводах от ТЭЦ-2 дано на рисунках 6.9 – 6.11. Из их анализа видно, что главной проблемой является недостаточно располагаемый перепад давлений. Например, на 1 – ом пути 3 – го вывода (см. рисунок 6.11) он составляет лишь 8 *м вод.ст.* (тепловая камера К-31), а в области камеры К-16 2 – го пути 3 – го вывода происходит соединение линий давления прямой и обратной труб. Основная причина состоит в малом напоре, создаваемом насосами ТЭЦ-2 (51 *м вод.ст*). Как показали расчеты, увеличение давления на 20 – 30 *м вод.ст.*, позволит запитать всю планируемую нагрузку, без выполнения реконструкции трубопроводов.

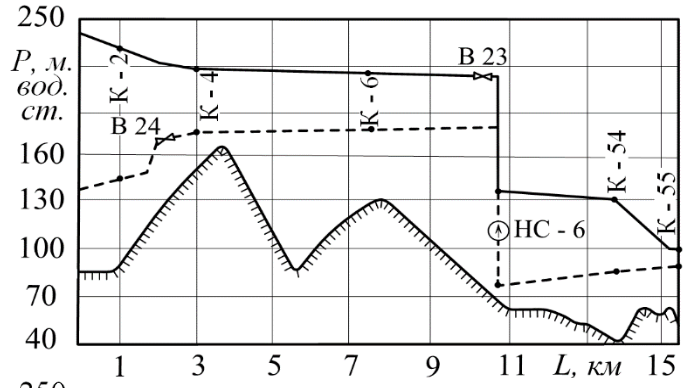


Рисунок 6.7. Первый вывод ТЭЦ-1: P – давление; L – длина участка; • – тепловые камеры; ——— – прямой трубопровод; – – – – обратный трубопровод; ╨╨ – отметка земли, *м*

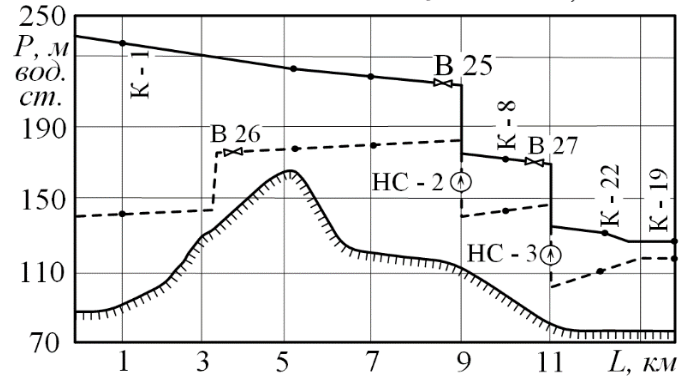


Рисунок 6.8. Второй вывод ТЭЦ-1. НС-2, НС-3 – понизительные насосные

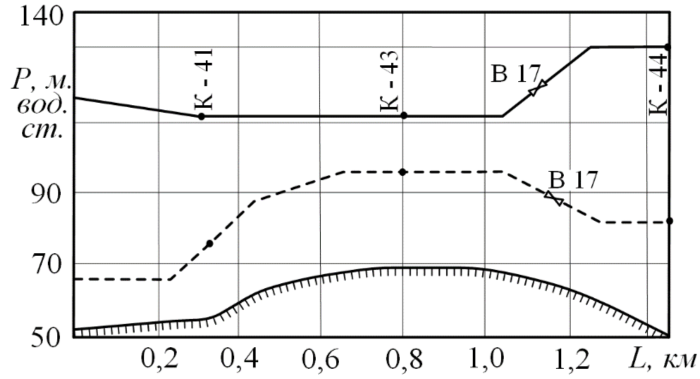


Рисунок 6.9. Первый вывод ТЭЦ-2

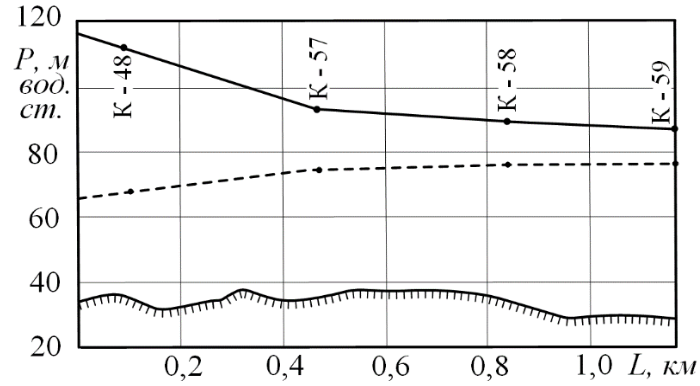


Рисунок 6.10. Второй вывод ТЭЦ-2

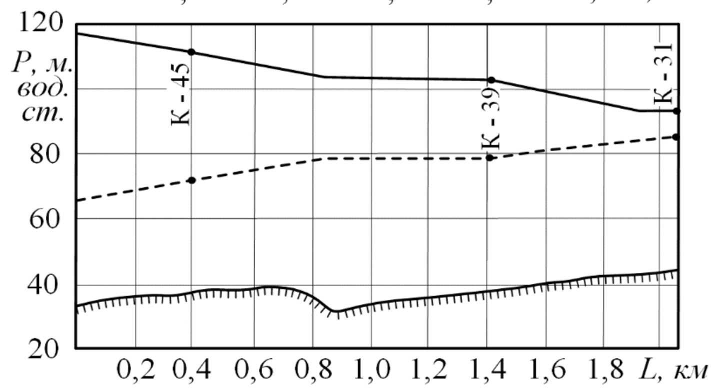


Рисунок 6.11. Третий вывод ТЭЦ-2 (первый путь)

В качестве еще одного примера системы с двумя тепловыми источниками, рассмотрим существующие тепловые сети Привокзальной отопительной котельной (ПОК) и Самарской ГРЭС (СГРЭС), входящих в систему централизованного теплоснабжения г. Самара (рисунок 6.12).

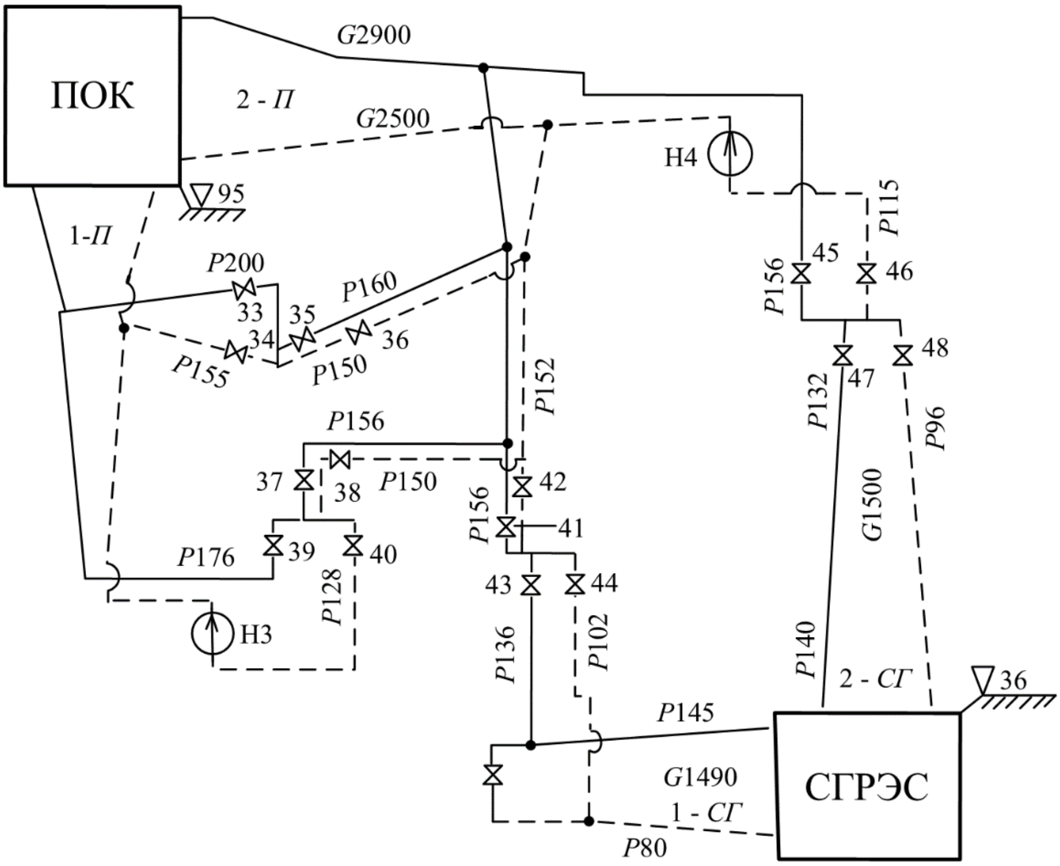


Рисунок 6.12. Распределение давлений в теплосети от ПОК и СГРЭС: 1 – *П*, 2 – *П* – первый и второй выводы ПОК; 1 – *СГ*, 2 – *СГ* – первый и второй выводы СГРЭС

В настоящее время теплосети ПОК и СГРЭС на местности разделены закрытыми задвижками. Однако, имея модели от двух источников теплоты, их можно соединить в одну модель и рассчитать наиболее оптимальных варианты ее работы. И, в частности, расчёты, выполненные на компьютерной модели теплосети от ПОК, показали малый располагаемый перепад на выводе 2-*П* (около 5 *м вод. ст.*) при минимально допустимом (нормативном) 20 *м вод. ст.* (рисунок 6.11). В то же время, расчёты распределения давления на тепловыводе 1-*СГ* СГРЭС показали значительное превышение нормативного перепада давления между прямым и обратным трубопроводами, составляющего 34 *м вод. ст*. В связи с чем, целесообразной является передача части нагрузки от ПОК на СГРЭС. И, в частности, передача нагрузки в количестве 800 т/ч позволяет поднять располагаемый перепад давлений на тепловыводе 2-*П* ПОК до 25 *м вод. ст.* (см. рисунок 6.14). При этом на тепловыводе 1-*СГ* СГРЭС располагаемый перепад понизится до 26 *м вод. ст*.

При идентификации модели от ПОК проведено исследование двух вариантов, отличающихся числом точек, где были даны экспериментальные давления. При числе узлов теплосети от ПОК, равном 180 и при экспериментальных данных по давлениям в 35 точках, точность идентификации составляла около 7 %. При 54 экспериментальных точках, точность идентификации увеличивается до 4 %.

Вариантом, альтернативным передаче нагрузки от ПОК к СГРЭС, является увеличение диаметров трубопроводов на тепловыводе 2-*П* ПОК. И, в частности, расчёты показали что увеличение диаметров труб на участке от $L = 2{,}3$ *км* до $L = 3{,}1$ *км* с 400 *мм* до 800 *мм* позволяет поднять располагаемый перепад давлений на 35 *м вод. ст.* (рисунки 6.13, 6.14).

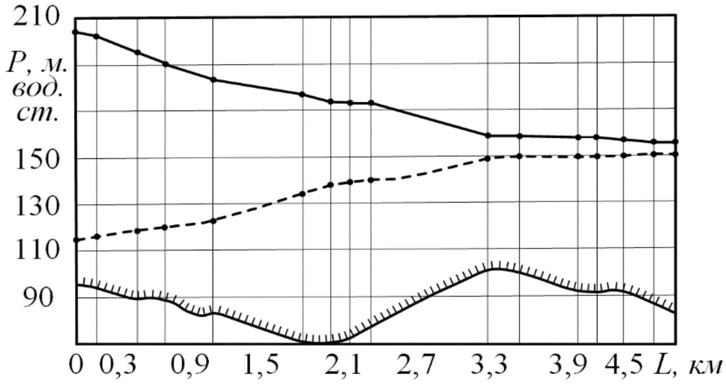


Рисунок 6.13. Распределение давления на втором выводе ПОК до передачи нагрузки на первый вывод СГРЭС: *P* – давление; *L* – длина участка; • – тепловые камеры). ——— –прямой трубопровод; – – – – обратный трубопровод; – отметка земли, *м*

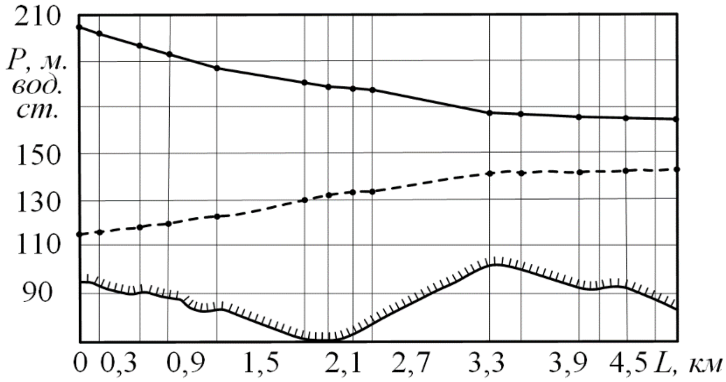


Рисунок 6.14. Распределение давления на втором выводе ПОК после передачи нагрузки на первый вывод СГРЭС

6.4. Разработка объединенной компьютерной модели теплосетей Самарской ТЭЦ, Безымянской ТЭЦ и Центральной отопительной котельной

Применение рассмотренных в пп. 6.1, 6.2. алгоритмов построения компьютерных моделей рассмотрим также на примере разработки объединенной компьютерной модели теплосетей с тремя тепловыми источниками (Самарская ТЭЦ (СамТЭЦ), Безымянская ТЭЦ (БТЭЦ) и Центральная отопительная котельная (ЦОК)), входящими в систему централизованного теплоснабжения г. Самара (рисунок 6.15).

В настоящее время теплосети указанных источников теплоты на местности разделены закрытыми задвижками. Однако, имея компьютерные модели теплосетей от этих источников, их можно представить в виде единой компьютерной модели, на которой можно рассчитывать различные варианты её работы с целью определения наиболее оптимальных из них. И, в частности, расчёты, выполненные на компьютерной модели теплосети от БТЭЦ, показали недостаточный располагаемый перепад давлений между прямой и обратной линиями тепловой сети по линии *АБВС* (менее 5 *м вод. ст.*) и по линии

АБВДЕF (менее 10 *м вод. ст.*) при минимально допустимом 20 *м вод. ст.* (см. рисунки 6.15, 6.6, 6.7). Причинами являются: малые диаметры трубопроводов; большой расход среды. В то же время, расчёты распределения давления на тепловыводе СамТЭЦ по линии $A_1Б_1B_1C_1$ показали значительное превышение нормативного перепада давления между прямым и обратным трубопроводами, составляющего 55 *м вод. ст.* (см. рисунок 6.8).

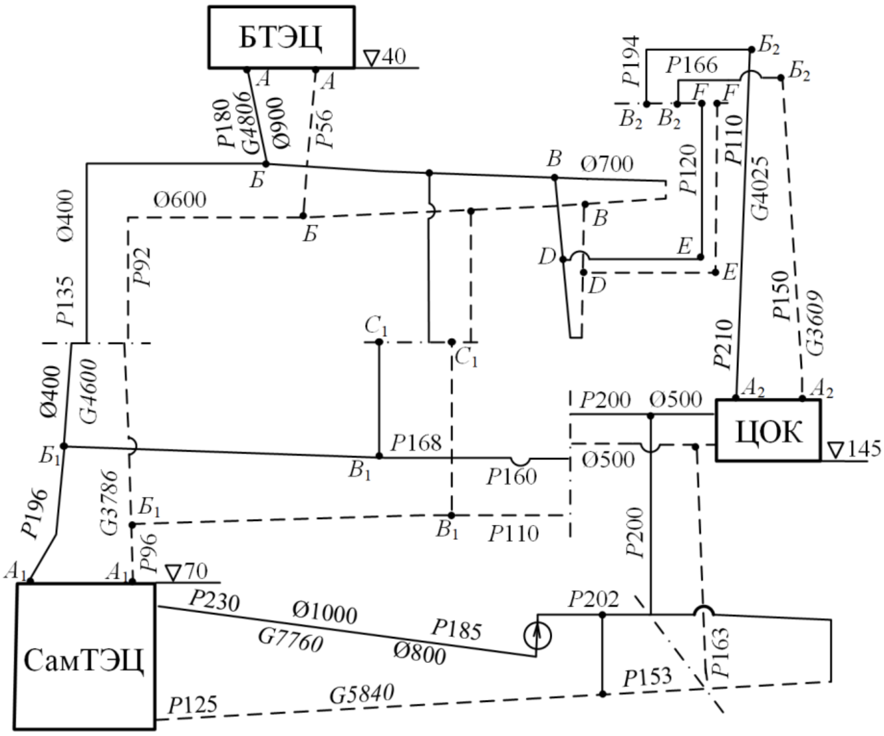


Рисунок 6.15. Схема теплосетей и эпюры давлений от источников теплоты от СамТЭЦ, БТЭЦ, ЦОК

Отметим, что для уточнения компьютерных моделей всех трех источников теплоты выполнялась их идентификация. Особенностью подхода, использованного в диссертации состоит в том, что варьируемыми параметрами являются не только коэффициенты трения, но и диаметры трубопроводов. Процесс идентификации итеративный. Его точность существенно зависит от количества экспериментальных данных. Важно отметить, что несмотря на повышение точности, при увеличении числа фактических значений давлений, измеренных экспериментально, существенно возрастает объем вычислительной работы.

Таким образом, разработаны новые математические и компьютерные модели разветвлённых многокольцевых трубопроводных систем различного назначения, практически полностью воспроизводящие гидравлические и тепловые процессы, протекающие в реальных системах. Благодаря применению метода автоматической идентификации параметров модели, связанной с использованием экспериментальных данных, имеется возможность построения компьютерных моделей, отличающихся от реальных гидравлических систем не более чем на 3 – 5 %.

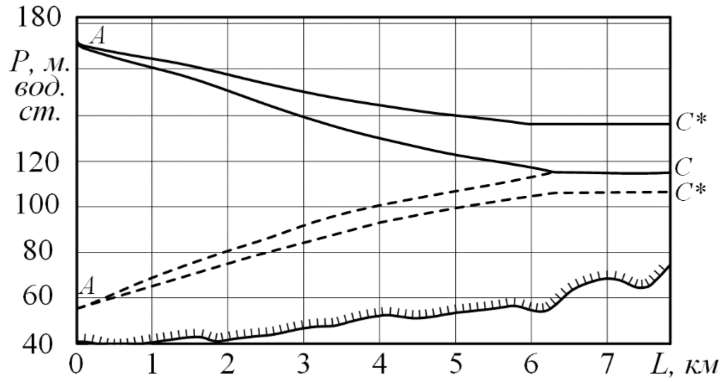


Рисунок 6.16. Распределение давления по линии *АБВС* от БТЭЦ до передачи нагрузки СамТЭЦ и ЦОК; *АС** – после передачи нагрузки (см. рисунок 6.19): *Р* – давление; *L* – длина участка). —— – –прямой трубопровод; – – – – обратный трубопровод; – отметка земли, *м*

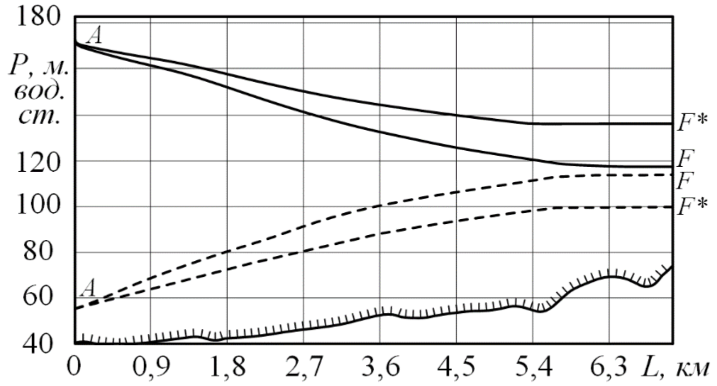


Рисунок 6.17. Распределение давлений по линии *АБBDEF* от БТЭЦ до передачи нагрузки СамТЭЦ и ПОК; *AF** – после передачи нагрузки (см. рисунок 6.19)

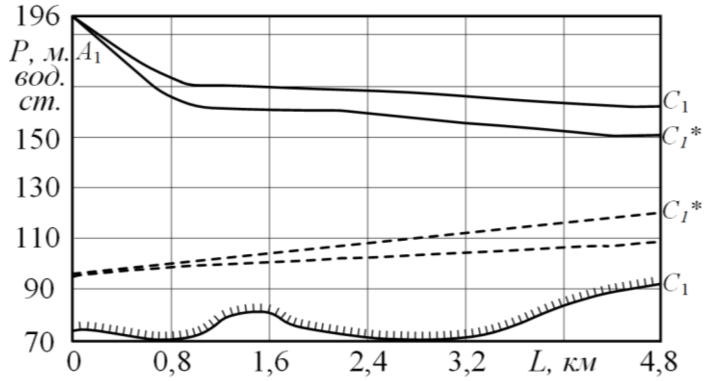


Рисунок 6.18. Распределение давлений по пути $A_1Б_1B_1C_1$ от СамТЭЦ до приема нагрузки от БТЭЦ; A_1C_1* – после приема нагрузки (см. рисунок 6.19)

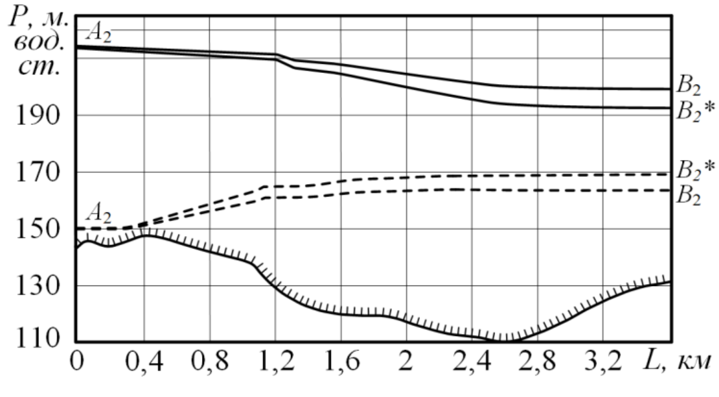


Рисунок 6.19. Распределение давлений по пути $A_2Б_2B_2$ от ЦОК до приема нагрузки от БТЭЦ; A_1B_2* после приема нагрузки (см. рисунок 6.19)

7. КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

В главе 7 представлены результаты разработки программ для ЭВМ, реализующих разработанные в диссертации методы решения задач переноса с учётом конечной и бесконечной скорости распространения потенциалов исследуемых полей. В частности, представлен APDL – алгоритм, позволяющий использовать возможности программного продукта ANSYS (построение сетки, решение систем уравнений, отображение результатов и др.) для решения трехмерных задач теплопроводности.

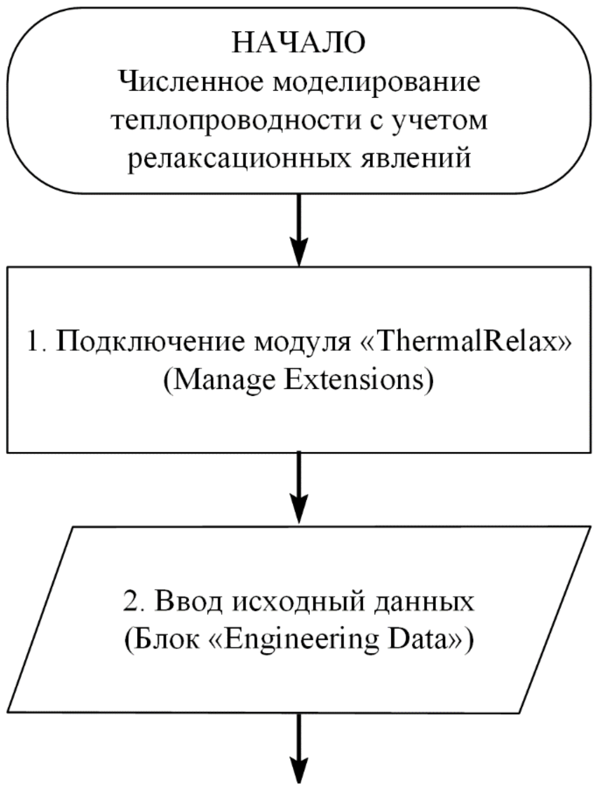
В п. 7.2, 7.3 представлены алгоритмы решения отдельных задач, представленных в п. 2.5, 2.7, методом конечных разностей с использованием средств автоматизации расчетов программного продукта PTC MathCAD 15.0.

Свидетельства о регистрации программных комплексов приведены в приложении диссертации.

7.1. Реализация метода решения трехмерных задач теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты

Используя средства автоматизации расчетов программного комплекса ANSYS (построение (импорт) геометрической модели, генерация расчётной сетки, решение системы линейных уравнений, цветографическое отображение результатов расчёта) разработан APDL – алгоритм, позволяющий выполнять расчет температурных полей в телах сложной геометрической формы с учетом конечной скорости распространения теплоты.

Укрупненная блок – схема решения задач теплопроводности с использованием модуля «ThermalRelax» приведена на рисунке 7.1.



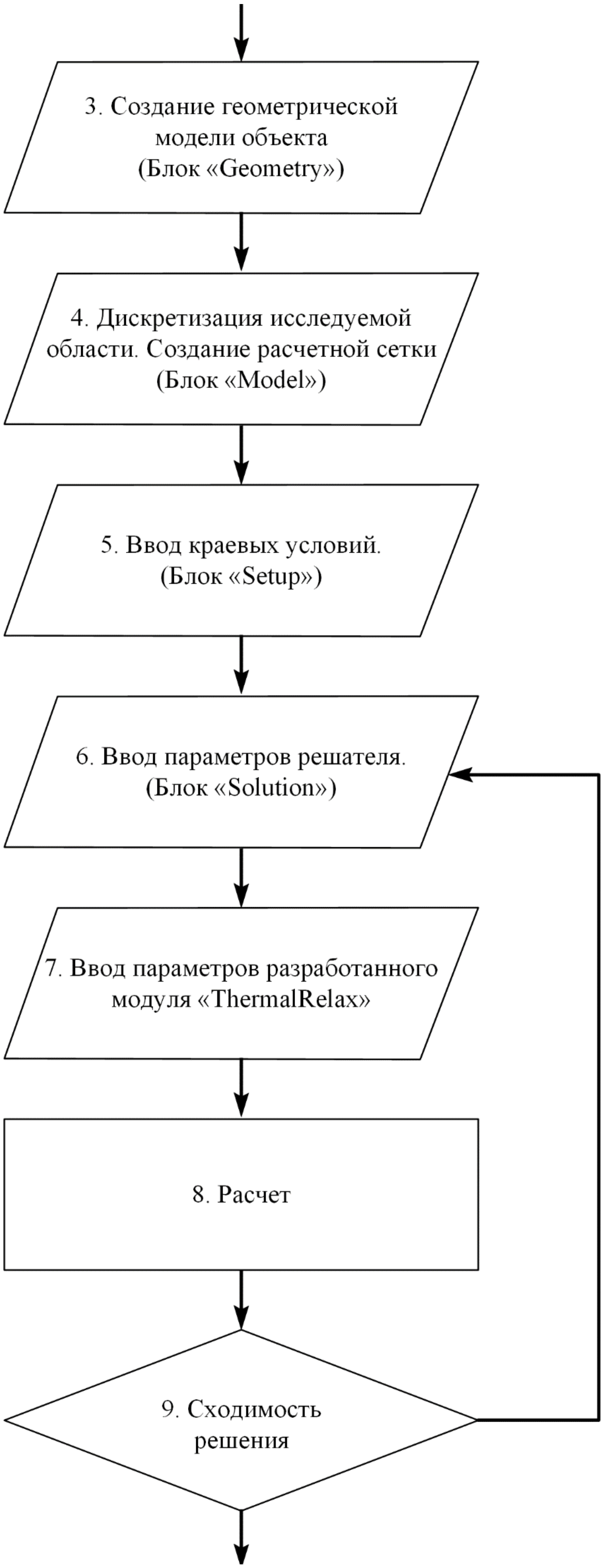

3. Создание геометрической модели объекта (Блок «Geometry»)
4. Дискретизация исследуемой области. Создание расчетной сетки (Блок «Model»)
5. Ввод краевых условий. (Блок «Setup»)
6. Ввод параметров решателя. (Блок «Solution»)
7. Ввод параметров разработанного модуля «ThermalRelax»
8. Расчет
9. Сходимость решения

Рисунок 7.1. Укрупненная блок – схема решения задач локально – неравновесного теплопереноса в программном модуле «ThermalRelax»

Рассмотрим результаты результаты разработки вычислительного алгоритма, написанного на языке программирования APDL (ANSYS Parametric Design Language). Разработанный алгоритм позволил впервые исследовать температурные поля в телах сложной (произвольной) геометрической формы с учетом инерционности процесса переноса теплоты. Использование встроенных функций ANSYS для построения геометрической модели исследуемого объекта, нанесения расчетной сетки, решения систем уравнений позволяет выполнять расчеты температурных полей в телах произвольной формы, при граничных условиях различного вида. Ниже приведен программный код, адаптированный для использования в ANSYS Mechanical Enterprise Utility Menu и вызывается командой Read Input from:

1) Системные операции: удаление всех переменных; получение имени проекта

```
*FREE, ALL
*DEL, ALL, , NOPR
ALLSEL, ALL, ALL
*GET, NAME, ACTIVE, 0, JOBNAM
```

2) Блок ввода исходных данных

2.1) Ввод номеров узлов, по которым будет построена «измерительная ось» для вывода температуры

```
P1 = NODE(KX(16), KY(16), KZ(16))
P2 = NODE(KX(14), KY(14), KZ(14))
/PREP7
```

2.2) Ввод температуры, определяемой граничным условием первого рода

```
T_MAX = 0.0
```

2.3) Задание начального условия. Данная значение температуры в начальный момент времени будет присвоено всем узлам, в которых не задано T_MAX

```
T_INIT = 1.0
```

2.4) Ввод величины шага по временной переменной

```
TIME_STEP = 1e-3
```

2.5) Вычисление конечного времени интегрирования (определяется количеством шагов по временной переменной)

```
END_TIME = 100.0*TIME_STEP
TOTAL_TIME = 0.0
```

2.6) Ввод коэффициентов релаксации

```
TAU1 = 1
TAU2 = 1
```

2.7) Системные операции: удаление ограничений на значения температуры; выбор компонента с узлами для задания постоянной температуры; формирование массивов узлов для задания постоянной температуры; присвоение постоянной температуры; инверсия выборки

```
DDELE, ALL, ALL
CMSEL, S, CONSTR_NODES
*VGET, CONSTRAINED_NODES, NODE, , NLIST, ,
*GET, N_CONSTR, PARM, CONSTRAINED_NODES, DIM, 1
*DO, I, 1, N_CONSTR
D, CONSTRAINED_NODES(I), TEMP, T_MAX
*ENDDO
NSEL, INVE
*VGET, NODES, NODE, , NLIST, ,
*GET, N, PARM, NODES, DIM, 1
NSEL, ALL
```

3) Работа с матрицами проводимости и теплоемкости

3.1) Получение суммы матриц проводимости и теплоёмкости

```
/SOLU
ANTYPE, 4
TRNOPT, FULL
LUMPM, 0
TIMINT, ON
WRFULL, 1
TIME, 1
SOLVE
/POST1
*SMAT, K_AND_C, D, IMPORT, FULL, %NAME%.FULL, STIFF
*GET, SCAL_FACTOR, ACTIVE, 0, SOLU, DTIME
```

3.2) Получение матрицы проводимости

```
/SOLU
ANTYPE, 0
TIMINT, OFF !STEADY STATE, K = K
WRFULL, 1
SOLVE
WRFULL, 0
/POST1
```

*SMAT, K, D, IMPORT, FULL, %NAME%.FULL, STIFF
*SMAT, K_, D, IMPORT, FULL, %NAME%.FULL, STIFF
*VEC, Q, D, IMPORT, FULL, %NAME%.FULL, RHS
*SMAT, Nod2Bcs, D, IMPORT, FULL, %name%.full, NOD2BCS
*VEC, MAPFORWARD, I, IMPORT, FULL, %NAME%.FULL, FORWARD
*SMAT, C, D, IMPORT, FULL, %NAME%.FULL, STIFF
*AXPY, 1, 0, K_AND_C, -1, 0, C !MATM = MATK_PLUS_C – MATK
*SCAL, C, SCAL_FACTOR !C

4) Формирование матрицы системы для определения нового значения температуры, факторизация матрицы

*VEC, T0, D, ALLOC, Q_DIM !T0 – вектор температур на текущем шаге
*INIT, T0, CONST, T_INIT ! инициализация вектора температур
*VEC, T_DOT, D, ALLOC, Q_DIM !T_DOT – вектор производной температуры по времени
*INIT, T_DOT, CONST, 0.0
*VEC, RHS, D, ALLOC, Q_DIM
*VEC, T_NEW, D, ALLOC, Q_DIM !T_NEW – вектор температур на следующем шаге
AXPY, .0, 0.0, C, TAU2, 0.0, K_ ![C] + TAU2[K_]
*AXPY, TIME_STEP, 0.0, K_, TIME_STEP**2, 0.0, K !([C] + TAU2*[K])*TIME_STEP + [K]*TIME_STEP**2
AXPY, TAU1, 0.0, C, 1.0, 0.0, K !TAU1[C]+([C] + TAU2*[K])*TIME_STEP + [K]*TIME_STEP**2
*LSENGINE, BCS, MY_SOLVER, K, INCORE
*LSFACTOR, MY_SOLVER

5) Системные операции: выбор всех узлов модели; определение числа узлов; присвоение узлам начальной температуры; присвоение узлам температуры, определяемой ггграничным условием

/PREP7
NSEL, ALL
DDELE, ALL, ALL
*VGET, ALL_NODES, NODE, , NLIST, ,
*GET, ALL_N, PARM, ALL_NODES, DIM, 1
D, NODES(I), TEMP, T_INIT
*ENDDO
*DO, I, 1, N_CONSTR
D, CONSTRAINED_NODES(I), TEMP, T_MAX
*ENDDO
/SOLU
ANTYPE, 0
DELTIM, 1
TIME, 1
SOLVE

6) Инициализация векторов тепловых потоков

/POST1

*VGET, HEAT_FLUX_ANSYS0, NODE, 1, TF, SUM !HEAT_FLUX_ANSYS0 – стандартный вектор теплового потока в текущий момент времени (на основе классического закона Фурье)

*DIM, HEAT_FLUX0, ARRAY, ALL_N !HEAT_FLUX0 – релаксированный вектор теплового потока в текущий момент времени

*DIM, HEAT_FLUX_NEW, ARRAY, ALL_N !HEAT_FLUX_NEW – вектор теплового потока в следующий момент времени

7) Системные операции: формирование таблицы значений температуры; создание «измерительной оси» для вывода температур по заданным начальной и конечной точкам траектории

```
PLNSOL, TEMP
/WAIT, 0.5
TIME_TO_END = END_TIME
*DIM, TEMP_TABLE, ARRAY, 100, 7
PATH, MY_PATH, 2, 30, 100
PPATH, 1, P1
PPATH, 2, P2
PDEF, , TEMP, , AVG
PAGET, PDATA, TABLE
*DO, I, 1, 100
TEMP_TABLE(I, 1) = PDATA(I, 5)
*ENDDO
COLUMN_COUNT = 2
```

8) Реализация цикла интегрирования по временной переменной

***DOWHILE, TIME_TO_END**

8.1) Формирование правой части СЛАУ с использованием векторно-матричных операций модуля APDL – MATH

```
*INIT, RHS, CONST, 0.0
*AXPY, 1.0, 0, T0, TIME_STEP, 0, T_DOT
*MULT, C, , T_DOT, , C_T_DOT
*MULT, K_, , T0, , RHS
*AXPY, TAU1, 0, C_T_DOT, TIME_STEP, 0, RHS
*AXPY, TIME_STEP**2, 0, Q, 1.0, 0, RHS
*INIT, T_NEW, CONST, 0.0
*LSBAC, MY_SOLVER, RHS, T_NEW
```

8.2) Вычисление производной температуры по времени

```
*AXPY, 1/TIME_STEP, 0, T_NEW, -1/TIME_STEP, 0, T0 ! 6)
*VEC, T_DOT, D, COPY, T0! 7)
 *VEC, T0, D, COPY, T_NEW! 8) !T0 <- T_NEW
*MULT, Nod2Bcs, TRAN, T_NEW, , T_NEW_CONV
TOTAL_TIME = TOTAL_TIME + TIME_STEP
TIME_TO_END = END_TIME – TOTAL_TIME
/PREP7
NSEL, ALL
```

```
DDELE, ALL, ALL
*DO, I, 1, N
J = MAPFORWARD(NODES(I))
NODAL_TEMP = T_NEW_CONV((J-1)*Q_NUMDOF + 1)
D, NODES(I), TEMP, NODAL_TEMP *ENDDO
*DO, I, 1, N_CONSTR
D, CONSTRAINED_NODES(I), TEMP, T_MAX *ENDDO
/SOLU
ANTYPE, 0
DELTIM, 1
TIME, 1
SOLVE
/POST1
*DEL, HEAT_FLUX_ANSYS, , NOPR
*VGET, HEAT_FLUX_ANSYS, NODE, 1, TF, SUM
*DO, I, 1, ALL_N
HEAT_FLUX_NEW(I) = (TAU1*HEAT_FLUX0(I) + HEAT_FLUX_ANSYS(I)*TIME_STEP + TAU2*(HEAT_FLUX_ANSYS(I)-HEAT_FLUX_ANSYS0(I)))/(TIME_STEP + TAU1)
HEAT_FLUX0(I) = HEAT_FLUX_NEW(I)
HEAT_FLUX_ANSYS0(I) = HEAT_FLUX_ANSYS(I)
DNSOL, ALL_NODES(I), TF, SUM, HEAT_FLUX_NEW(I) *ENDDO
PLNSOL, TEMP
PATH, MY_PATH, 2, 30, 100
PPATH, 1, P1
PPATH, 2, P2
PDEF, , TEMP, , AVG
*DEL, PDATA, , NOPR
PAGET, PDATA, TABLE
*IF, TOTAL_TIME, EQ, 0.001, THEN
*DO, I, 1, 100
TEMP_TABLE(I, COLUMN_COUNT) = PDATA(I, 5)
*ENDDO
COLUMN_COUNT = COLUMN_COUNT + 1
```

8.3) Сохранение промежуточных результатов в различные моменты времени

```
/SHOW, PNG
/REPLO
/REPLO
/SHOW, CLOSE
*ENDIF
*IF, TOTAL_TIME, EQ, 0.01, THEN *DO, I, 1, 100
TEMP_TABLE(I, COLUMN_COUNT) = PDATA(I, 5)
*ENDDO
COLUMN_COUNT = COLUMN_COUNT + 1
```

```
/SHOW, PNG
/REPLO
/SHOW, CLOSE
*ENDIF
*IF, TOTAL_TIME, EQ, 0.05, THEN !... И Т. Д.
*DO, I, 1, 100
TEMP_TABLE(I, COLUMN_COUNT) = PDATA(I, 5)
*ENDDO
COLUMN_COUNT = COLUMN_COUNT + 1
/SHOW, PNG
/REPLO
/SHOW, CLOSE
*ENDIF
*IF, TOTAL_TIME, EQ, 0.1, THEN
*DO, I, 1, 100
TEMP_TABLE(I, COLUMN_COUNT) = PDATA(I, 5)
*ENDDO
COLUMN_COUNT = COLUMN_COUNT + 1
/SHOW, PNG
/REPLO
/SHOW, CLOSE
*ENDIF
*IF, TOTAL_TIME, EQ, 0.5, THEN
*DO, I, 1, 100
TEMP_TABLE(I, COLUMN_COUNT) = PDATA(I, 5)
*ENDDO
COLUMN_COUNT = COLUMN_COUNT + 1
/SHOW, PNG
/REPLO
/SHOW, CLOSE
*ENDIF
*IF, TOTAL_TIME, EQ, 1.0, THEN
*DO, I, 1, 100
TEMP_TABLE(I, COLUMN_COUNT) = PDATA(I, 5)
*ENDDO
COLUMN_COUNT = COLUMN_COUNT + 1
/SHOW, PNG
/REPLO
/SHOW, CLOSE
*ENDIF
*ENDDO
```

8.4) Сохранение промежуточных результатов в виде таблицы значений в различные моменты времени

```
*MWRITE, TEMP_TABLE(1, 1), TEMP_DATA, DAT, , JIK (200F10.4)
```

Для удобства использования разработанного программного комплекса было разработано расширения для Ansys Workbench 2019 R2, устанавливаемое с помощью стандартного менеджера расширений ANSYS ACT (Application Customization Toolkit).

Меню установки модуля «ThermalRelax», а также графический интерфейс расширения представлены на рисунке 7.2, 7.3.

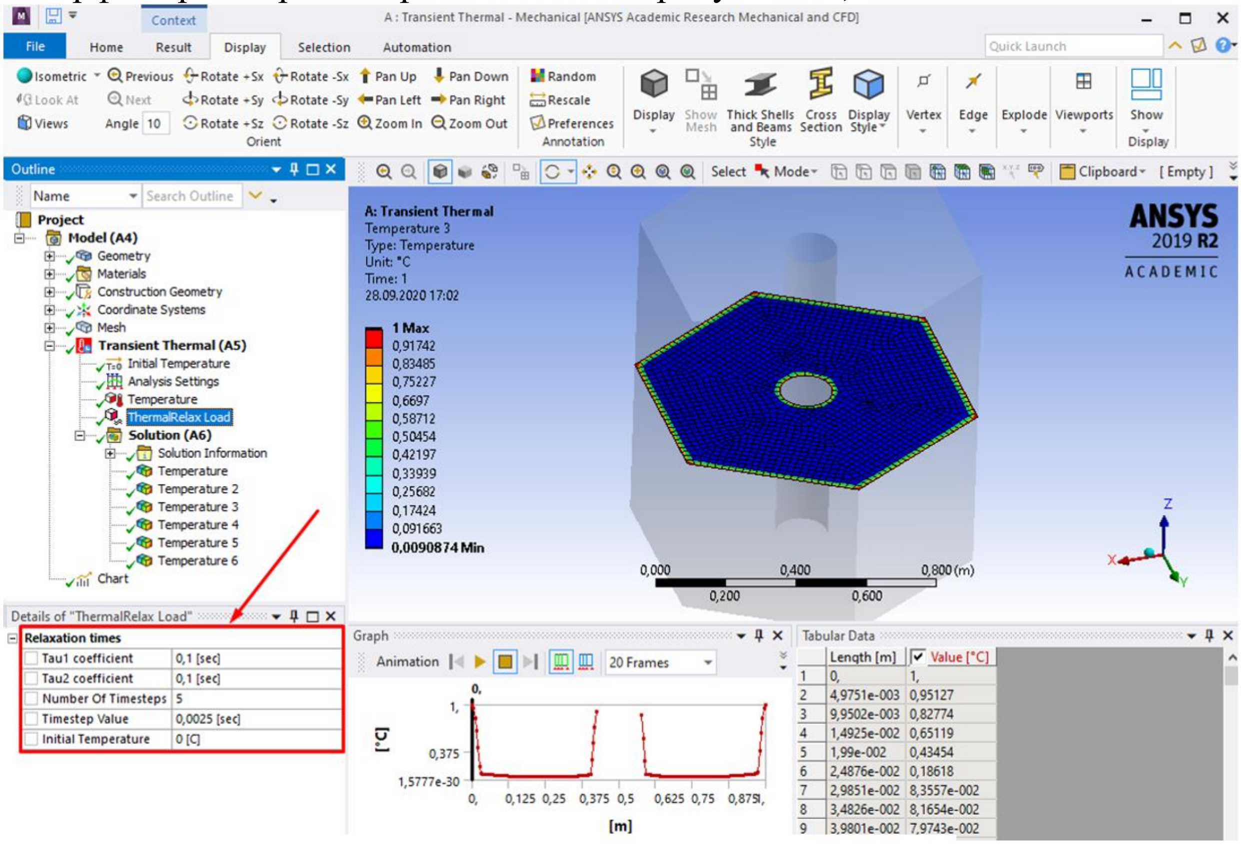


Рисунок 7.2. Графический интерфейс расширения «ThermalRelax»

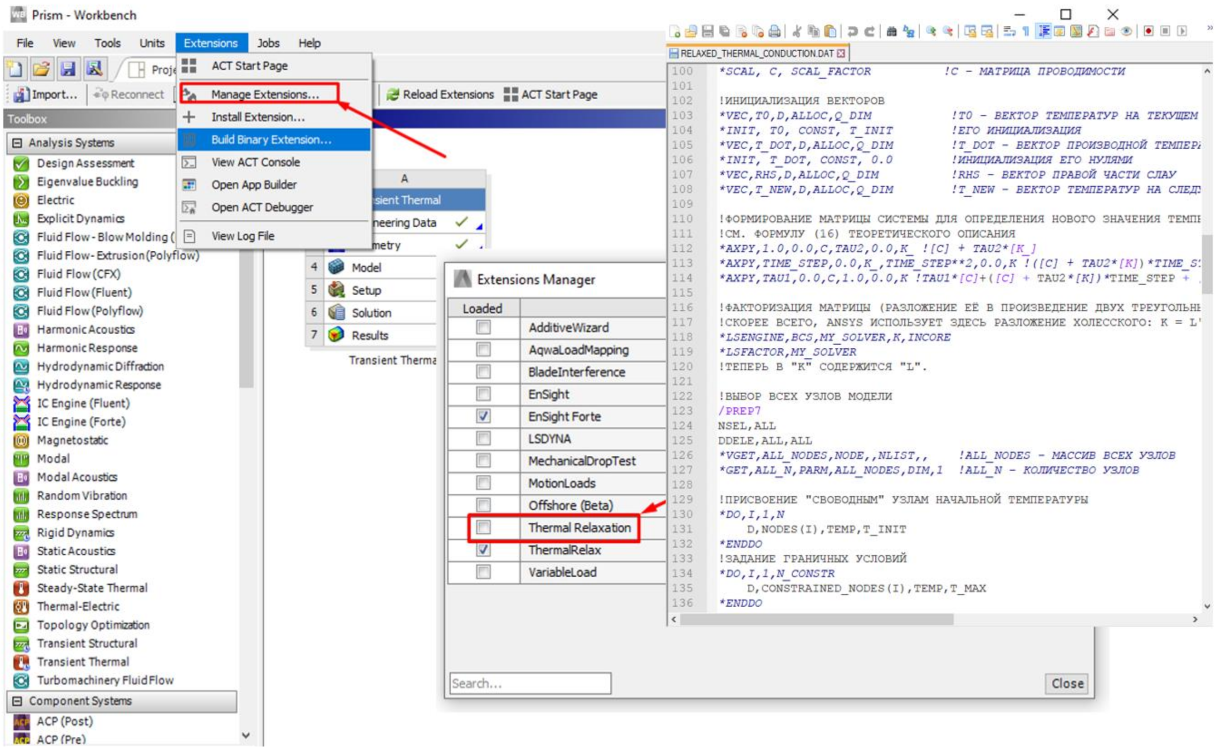


Рисунок 7.3. Графический интерфейс расширения «ThermalRelax»

7.2. Реализация метода решения задачи теплопроводности для двухслойной пластины с учетом релаксационных явлений

Математическая постановка задачи о распределении температуры в двухслойной пластине с учетом пространственно – временной нелокальности процесса выполнена в п. 2.7. диссертации. В безразмерных переменных данная задача записывается в виде (2.190) – (2.198). Получение аналитических решений данной задачи, в том числе и приближенных, крайне затруднительно. В связи с этим, в диссертации получено численное решение (2.190) – (2.198) с использованием метода конечных разностей. Для этого вводилась пространственно – временная сетка с шагами $\Delta\xi$, ΔFo по переменным ξ, Fo так, что

$$\xi_k = k\Delta\xi,\quad k=\overline{1,K};\ \ \text{Fo}_i = i\,\Delta\text{Fo},\quad i=\overline{1,I},$$

где K, I – количество шагов по переменным ξ, Fo. Тогда, используя явную схему аппроксимации, задача (2.190) – (2.198) приводится к виду

$$\frac{\Theta_{1k}^{\,i}-\Theta_{1k}^{\,i-1}}{\Delta\text{Fo}}+F_1\frac{\Theta_{1k}^{\,i+1}-2\Theta_{1k}^{\,i}+\Theta_{1k}^{\,i-1}}{\Delta\text{Fo}^2}=\frac{\Theta_{1k-1}^{\,i}-2\Theta_{1k}^{\,i}+\Theta_{1k+1}^{\,i}}{\Delta\xi^2}+$$

$$+F_1\frac{\Theta_{1k-1}^{\,i}-2\Theta_{1k}^{\,i}+\Theta_{1k+1}^{\,i}-\Theta_{1k-1}^{\,i-1}+2\Theta_{1k}^{\,i-1}-\Theta_{1k+1}^{\,i-1}}{\Delta\text{Fo}\Delta\xi^2}$$

$$\frac{\Theta_{2k}^{\,i}-\Theta_{2k}^{\,i-1}}{\Delta\text{Fo}}+F_3\frac{\Theta_{2k}^{\,i+1}-2\Theta_{2k}^{\,i}+\Theta_{2k}^{\,i-1}}{\Delta\text{Fo}^2}=\frac{a_2}{a_1}\frac{\Theta_{2k-1}^{\,i}-2\Theta_{2k}^{\,i}+\Theta_{2k+1}^{\,i}}{\Delta\xi^2}+$$

$$+F_2\frac{\Theta_{2k-1}^{\,i}-2\Theta_{2k}^{\,i}+\Theta_{2k+1}^{\,i}-\Theta_{2k-1}^{\,i-1}+2\Theta_{2k}^{\,i-1}-\Theta_{2k+1}^{\,i-1}}{\Delta\text{Fo}\Delta\xi^2}$$

$$\Theta_{1k}^{\,0}=0\ ;\qquad \Theta_{2k}^{\,0}=1\ ;\qquad \frac{\Theta_{1k}^{\,1}-\Theta_{1k}^{\,0}}{\Delta\text{Fo}}=\frac{\Theta_{2k}^{\,1}-\Theta_{2k}^{\,0}}{\Delta\text{Fo}}=0;$$

$$\Theta_{10}^{\,i}=1;\qquad \Theta_{1CP}^{\,i}=\Theta_{2CP}^{\,i};$$

$$D\left[\frac{\Theta_{1CP}^{\,i}-\Theta_{1CP-1}^{\,i}}{\Delta\xi}+F_1\frac{\Theta_{1CP}^{\,i+1}-\Theta_{1CP-1}^{\,i+1}-\Theta_{1CP}^{\,i}+\Theta_{1CP-1}^{\,i}}{\Delta\text{Fo}\Delta\xi}\right]=$$

$$=\frac{\Theta_{2CP+1}^{\,i}-\Theta_{2CP}^{\,i}}{\Delta\xi}+F_3\frac{\Theta_{2CP+1}^{\,i+1}-\Theta_{2CP}^{\,i+1}-\Theta_{2CP+1}^{\,i}+\Theta_{2CP}^{\,i}}{\Delta\text{Fo}\Delta\xi};$$

$$\Theta_{2K}^{\,i}=0,$$

где $\Theta_{1CP}^{\,i},\Theta_{2CP}^{\,i}$ – значения температурной функции на i – том временном слое в точке контакта слоев.

Рассмотрим реализацию метода решения представленной задачи в среде MathCAD 15.0.

Исходное дифференциальное уравнение представим в виде

$$\text{MEQ} := \text{A1}\cdot\left(\frac{d}{d\text{Fo}}\Theta(\xi,\text{Fo})\right)+\text{A2}\cdot\left(\frac{d^2}{d\text{Fo}^2}\Theta(\xi,\text{Fo})\right)+$$

$$+ A3\cdot\left(\frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi,Fo)\right) + A4\cdot\left(\frac{d}{dFo}\frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi,Fo)\right) + A5\cdot\Theta(\xi,Fo)$$

1) Создание пространственно – временной сетки

1.1) Величина шага по времени

$\Delta Fo := 0.000005$

1.2) Величина шага по пространственной переменной

$\Delta\xi := 0.005$

1.3) Количество шагов по времени

$I := 15000$

1.4) Область определения пространственной переменной (минимальное и максимальное значения)

$\xi min := 0 \quad \xi max := 1$

1.5) Количество шагов по пространственной переменной

$K := \frac{\xi max}{\Delta\xi} = 200$

2) Ввод исходных данных

2.1) Толщина пластины

$\delta := 0.01$

$\delta := 0.01$

2.2) Толщина 1 – го слоя

$\delta 1 := 0.005$

2.3) Толщина 2 – го слоя

$\delta 2 := \delta - \delta 1 = 5 \times 10^{-3}$

2.4) Определение относительных толщин слоев

$\Delta 1 := \frac{\delta 1}{\delta} = 0.5$

$\Delta 2 := \frac{\delta 2}{\delta} = 0.5$

2.5) Определение порядкового номера (индекса) точки контакта

$CP := Round(K\cdot\Delta 1, 1) = 100$

2.6) Ввод коэффициентов температуропроводности, теплопроводности, релаксации для 1 – го слоя

$a1 := 6\cdot 10^{-6}$

$\lambda 1 := 60$

$\tau 1 := 0.1$

2.7) Ввод коэффициентов температуропроводности, теплопроводности, релаксации для 2 – го слоя

$\tau 1 := 0.1$

$a2 := 5.5\cdot 10^{-6}$

$\lambda 2 := 55$

$\tau 2 := 0.12$

2.8) Определение безразмерных коэффициентов релаксации

$F1 := \frac{a1\cdot\tau 1}{\delta^2} \quad F2 := \frac{a2\cdot\tau 2}{\delta^2} \quad F3 := \frac{a1\cdot\tau 2}{\delta^2}$

2.9) Задание матриц коэффициентов исходного уравнения

$$\begin{pmatrix} A1 \\ A2 \\ A3 \\ A4 \\ A5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ F1 \\ -1 \\ -F1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} B1 \\ B2 \\ B3 \\ B4 \\ B5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ F3 \\ \frac{-a2}{a1} \\ -F2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.10) Определение матриц коэффициентов и новых параметров с целью упрощения вида конечно – разностной аппроксимации исходного дифференциального уравнения и краевых условий

$$\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \\ a5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{A1}{\Delta Fo} \\ \frac{A2}{\Delta Fo^2} \\ \frac{A3}{\Delta\xi^2} \\ \frac{A4}{\Delta\xi^2\cdot\Delta Fo} \\ A5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 200000.0 \\ 2.4e8 \\ -40000.0 \\ -4.8e7 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \\ b4 \\ b5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{B1}{\Delta Fo} \\ \frac{B2}{\Delta Fo^2} \\ \frac{B3}{\Delta\xi^2} \\ \frac{B4}{\Delta\xi^2\cdot\Delta Fo} \\ B5 \end{pmatrix}$$

$$l1 := \frac{\lambda 1}{\Delta\xi} \qquad l2 := \frac{\lambda 2}{\Delta\xi}$$

$$L1 := \frac{\lambda 1\cdot F1}{\Delta\xi\cdot\Delta Fo} \qquad L2 := \frac{\lambda 1\cdot F2}{\Delta\xi\cdot\Delta Fo}$$

3) Основной цикл решения задачи

3.1) Задание граничных и начальных условий. Задание температуры во всех точках пластины на первых двух временных шагах

```
Θ := | bound_1 ← 1
     | bound_2 ← 0
     | initial_1 ← 0
     | initial_2 ← 1
     | for i ∈ 0..I
     |   | for k ∈ 0..K                              if i = 0
     |   |   | Θ_{i,k} ← initial_1  if 0 ≤ k < CP
     |   |   | Θ_{i,k} ← initial_2  if CP < k ≤ K
     |   |   | Θ_{i,k} ← bound_1  if k = 0
     |   |   | Θ_{i,k} ← bound_2  if k = K
     |   |   | Θ_{i,k} ← initial_1  if k = CP
```

↓

$$
\begin{array}{l}
\text{for } k \in 0..K \qquad \text{if } i = 1 \\
\quad \Theta_{i,k} \leftarrow initial\_1 \ \text{ if } 0 \le k < CP \\
\quad \Theta_{i,k} \leftarrow initial\_2 \ \text{ if } CP < k \le K \\
\quad \Theta_{i,k} \leftarrow bound\_1 \ \text{ if } k = 0 \\
\quad \Theta_{i,k} \leftarrow bound\_2 \ \text{ if } k = K \\
\quad \Theta_{i,k} \leftarrow initial\_1 \ \text{ if } k = CP
\end{array}
$$

3.2) Задание граничных условий на каждом временном слое (кроме первых двух)

$$
\begin{array}{l}
\text{otherwise} \\
\quad \text{for } k \in 0 \\
\quad\quad \Theta_{i,k} \leftarrow bound\_1 \\
\quad \text{for } k \in K \\
\quad\quad \Theta_{i,k} \leftarrow bound\_2
\end{array}
$$

3.3) Вычисление температуры в первом слое

$$
\begin{array}{l}
\text{for } k \in 1..CP-1 \\
\quad \Theta_{i,k} \leftarrow 2\cdot\Theta_{i-1,k} - \Theta_{i-2,k} - \left(\frac{a1}{a2}\right)\cdot\left(\Theta_{i-1,k} - \Theta_{i-2,k}\right) \cdots \\
\quad\quad + \left(\frac{a3}{a2}\right)\cdot\left(\Theta_{i-1,k-1} - 2\cdot\Theta_{i-1,k} + \Theta_{i-1,k+1}\right) \cdots \\
\quad\quad + \left(\frac{a4}{a2}\right)\cdot\left[\begin{array}{l}\Theta_{i-1,k-1} - 2\cdot\Theta_{i-1,k} + \Theta_{i-1,k+1} \cdots \\ + -\left(\Theta_{i-2,k-1}\right) + 2\cdot\Theta_{i-2,k} - \Theta_{i-2,k+1}\end{array}\right] - \left(\frac{a5}{a2}\right)\cdot\Theta_{i-1,k}
\end{array}
$$

3.4) Вычисление температуры во втором слое

$$
\begin{array}{l}
\text{for } k \in CP+1..K-1 \\
\quad \Theta_{i,k} \leftarrow 2\cdot\Theta_{i-1,k} - \Theta_{i-2,k} - \left(\frac{b1}{b2}\right)\cdot\left(\Theta_{i-1,k} - \Theta_{i-2,k}\right) \cdots \\
\quad\quad + \left(\frac{b3}{b2}\right)\cdot\left(\Theta_{i-1,k-1} - 2\cdot\Theta_{i-1,k} + \Theta_{i-1,k+1}\right) \cdots \\
\quad\quad + \left(\frac{b4}{b2}\right)\cdot\left(\begin{array}{l}\Theta_{i-1,k-1} - 2\cdot\Theta_{i-1,k} + \Theta_{i-1,k+1} - \Theta_{i-2,k-1} \cdots \\ + 2\cdot\Theta_{i-2,k} - \Theta_{i-2,k+1}\end{array}\right) - \left(\frac{b5}{b2}\right)\cdot\Theta_{i-1,k}
\end{array}
$$

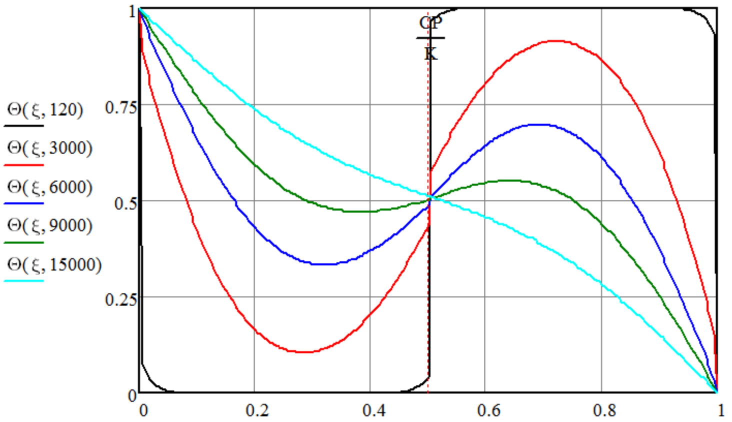
3.5) Вычисление температуры в точке контакта слоев

$$\left|\ \left|\ \left|\ \begin{array}{l} \text{for } k \in CP \\ \Theta_{i,k} \leftarrow \dfrac{\begin{bmatrix} l1\cdot\Theta_{i,k-1} - L1\cdot\left(\Theta_{i-1,k-1} - \Theta_{i,k-1} - \Theta_{i-1,k}\right) \dots \\ + l2\cdot\Theta_{i,k+1} + L2\cdot\left(\Theta_{i,k+1} - \Theta_{i-1,k+1} + \Theta_{i-1,k}\right) \end{bmatrix}}{l1 + l2 + L1 + L2} \end{array} \right.\right.\right.$$

$$\Theta$$

3.6) Графическое отображение результатов расчетов

$$\xi := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..K \\ \quad coordinate_k \leftarrow k\cdot\Delta\xi \\ coordinate \end{array} \right. \qquad \Theta(\xi,\tau) := \left| \begin{array}{l} \text{for } n \in 0..K \\ \quad b_n \leftarrow \Theta_{\tau,n} \\ b \end{array} \right.$$



7.3. Реализация метода математического моделирования сильнонеравновесных процессов тепловых возмущений, вызываемых сверхкороткими лазерными импульсами

Математическая модель локально – неравновесного нагрева пластины сверхкороткими лазерными импульсами, моделируемыми переменными во времени граничным условием второго рода (тепловой поток – ступенчатая функция времени) с учётом его локальной неравновесности разработана в п. 2.5. диссертации. Математическая постановка данной задачи в конечных разностях имеет вид (2.122) – (2.126). Рассмотрим реализацию метода решения представленной задачи в среде MathCAD 15.0.

Исходное дифференциальное уравнение представим в виде

$$MEQ := A1\cdot\left(\frac{d}{dFo}\Theta(\xi,Fo)\right) + A2\cdot\left(\frac{d^2}{dFo^2}\Theta(\xi,Fo)\right) +$$

$$+ A3\cdot\left(\frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi,Fo)\right) + A4\cdot\left(\frac{d}{dFo}\frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi,Fo)\right) + A5\cdot\Theta(\xi,Fo)$$

1) Создание пространственно – временной сетки

1.1) Величина шага по времени

$\Delta Fo := \pi\cdot 10^{-6}$

1.2) Величина шага по пространственной переменной

$\Delta\xi := 0.01$

1.3) Количество шагов по времени

$I := 15000$

1.4) Область определения пространственной переменной (минимальное и максимальное значения)

$\xi min := 0 \quad \xi max := 1$

1.5) Количество шагов по пространственной переменной

$$K := \frac{\xi max}{\Delta\xi}$$

2) Ввод исходных данных

2.1) Толщина пластины

$\delta := 0.001$

2.2) Коэффициент температуропроводности

$a := 50 \cdot 10^{-6}$

2.3) Коэффициент теплопроводности

$\lambda := 1.5$

2.4) Коэффициент релаксации

$\tau 1 := 0.000002$

2.5) Тепловая мощность (амплитуда колебаний)

$q0 := \left(10^{9}\right) \cdot 0.9$

2.6) Начальная температура

$T0 := 300$

2.7) Угловая частота

$\omega := 10^{5}$

2.8) Определение безразмерных коэффициентов релаксации, критериев Предводителева, Кирпичева

$$Fo1 := \frac{a \cdot \tau 1}{\delta^{2}} \qquad Pd := \frac{\omega \cdot \delta^{2}}{a} \qquad Ki := \frac{q0 \cdot \delta}{\lambda \cdot T0}$$

2.9) Задание матриц коэффициентов исходного уравнения

$$\begin{pmatrix} A1 \\ A2 \\ A3 \\ A4 \\ A5 \\ A6 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ Fo1 \\ -1 \\ -Fo1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0.0001 \\ -1 \\ -0.0001 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) Аппроксимация теплового потока непрерывной функцией

3.1) Точность аппроксимации (см. рисунок 2.20)

$z := 10000$

3.2) Количество тепловых импульсов (см. рисунок 2.20)

$jj := 200$

3.3) Сумма функций плотности теплового потока и производной от теплового потока по времени

$GU3(Fo) := \text{for } j \in 0..jj$

$$\left| \begin{array}{l} Ki\cdot\left[\sin\left[\left(\frac{z}{2}\right)\cdot Pd\cdot Fo\right]\right]^2 + z\cdot Fo1\cdot Pd\cdot Ki\cdot\sin(z\cdot Pd\cdot Fo) \ \ \text{if } j\cdot\frac{2\cdot\pi}{Pd} \le Fo < \frac{2\cdot\pi}{Pd}\cdot\left[\left(\frac{1}{2\cdot z}\right)+j\right] \\ Ki \ \ \text{if } \frac{2\cdot\pi}{Pd}\cdot\left[\left(\frac{1}{2\cdot z}\right)+j\right] \le Fo < \frac{2\cdot\pi}{Pd}\cdot\left[\left(\frac{z-1}{2\cdot z}\right)+j\right] \\ Ki\cdot\left[\sin\left[\left(\frac{z}{2}\right)\cdot Pd\cdot Fo\right]\right]^2 + z\cdot Fo1\cdot Pd\cdot Ki\cdot\sin(z\cdot Pd\cdot Fo) \ \ \text{if } \frac{2\cdot\pi}{Pd}\cdot\left[\left(\frac{z-1}{2\cdot z}\right)+j\right] \le Fo < \frac{2\cdot\pi}{Pd}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)+j\right] \\ 0 \ \ \text{if } \frac{2\cdot\pi}{Pd}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)+j\right] \le Fo < \frac{2\cdot\pi}{Pd}\cdot(1+j) \end{array} \right.$$

3) Основной цикл решения задачи

3.1) Задание граничных и начальных условий. Задание температуры во всех точках пластины на первых двух временных шагах

$\Theta :=$

$$\left| \begin{array}{l} initial \leftarrow 0 \\ LGUC1 \leftarrow 0 \\ LGUC2 \leftarrow 0 \\ LGUC3 \leftarrow 0 \\ LGUC4 \leftarrow 0 \\ RGUC1 \leftarrow 0 \\ RGUC2 \leftarrow 1 \\ RGUC3 \leftarrow 0 \\ RGUC4 \leftarrow 0 \end{array} \right.$$

$\downarrow$

3.2) Задание граничных условий на каждом временном слое (кроме первых двух)

$$
\begin{aligned}
&\text{otherwise}\\
&\quad \text{for } k \in 0\\
&\qquad \Theta_{i,k} \leftarrow \text{bound\_1}\\
&\quad \text{for } k \in K\\
&\qquad \Theta_{i,k} \leftarrow \text{bound\_2}
\end{aligned}
$$

3.3) Вычисление температуры внутри пластины

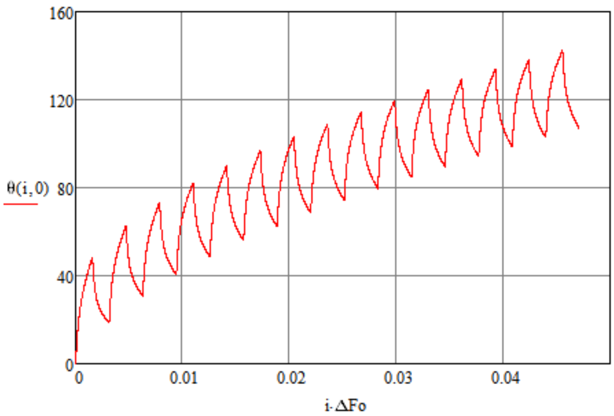
$$
\begin{aligned}
&\text{otherwise}\\
&\quad \text{for } k \in 1..K-1\\
&\qquad \Theta_{i,k} \leftarrow \left(\frac{\Delta Fo^2}{A2}\right)\cdot\left[-\left(\frac{A1}{\Delta Fo}\right)\cdot\left(\Theta_{i-1,k}-\Theta_{i-2,k}\right)-\left(\frac{A2}{\Delta Fo^2}\right)\cdot\left(-2\cdot\Theta_{i-1,k}+\Theta_{i-2,k}\right)\cdots\right.\\
&\qquad\qquad +-\left(\frac{A3}{\Delta\xi^2}\right)\cdot\left[\Theta_{i-1,k+1}-2\cdot\left(\Theta_{i-1,k}\right)+\Theta_{i-1,k-1}\right]\cdots\\
&\qquad\qquad \left.+-\left(\frac{A4}{\Delta\xi^2\cdot\Delta Fo}\right)\cdot\left[\Theta_{i-1,k+1}-2\cdot\left(\Theta_{i-1,k}\right)\cdots +\Theta_{i-1,k-1}-\Theta_{i-2,k+1}+2\cdot\left(\Theta_{i-2,k}\right)-\Theta_{i-2,k-1}\right]\right]
\end{aligned}
$$

3.4) Вычисление температуры в граничных точках

$$
\begin{aligned}
&\text{for } k \in K\\
&\quad \Theta_{i,k} \leftarrow \left(RGUC1\cdot\Delta\xi+\Theta_{i,k-1}\right)\cdot RGUC2 + RGUC3\cdot RGUC4\\
&\text{for } k \in 0\\
&\quad \Theta_{i,k} \leftarrow \left[GU3[\Delta Fo\cdot(i-2)]\cdots + \left[\left(\frac{\Theta_{i,k+1}}{\Delta\xi}\right)+\left(\frac{Fo1}{\Delta\xi\cdot\Delta Fo}\right)\cdot\left(\Theta_{i,k+1}-\Theta_{i-1,k+1}+\Theta_{i-1,k}\right)\right]\right]\cdot\frac{1}{\left[\left(\frac{1}{\Delta\xi}\right)+\frac{Fo1}{\Delta\xi\cdot\Delta Fo}\right]}
\end{aligned}
$$

3.6) Графическое отображение результатов расчетов

$$
\begin{aligned}
&i := \text{for } k \in 0..I && \theta(i,x) := \text{for } i \in 0..I\\
&\quad time_k \leftarrow k && \quad bbb_i \leftarrow \Theta_{i,\frac{x}{\Delta\xi}}\\
&\quad time && \quad bbb
\end{aligned}
$$



ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Разработана методология математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса на основе модифицированных уравнений сохранения. Используя единый подход, сформулированы и детально исследованы дифференциальные уравнения, описывающие локально – неравновесные процессы теплопроводности, конвективного теплообмена в движущихся жидкостях, взаимосвязанного тепломассопереноса, электромагнитные колебания, а также колебания упругих тел, жидкостей и газов.

2. На основе предложенной методологии разработаны и детально исследованы математические модели локально – неравновесных процессов тепломассопереноса, имеющих большое прикладное значение (высокоинтенсивный нагрев потоком лазерного излучения, тепловое воспламенения и взрыв, теплоперенос в нанокомпозитах др.). В результате комплексных исследований тепловых процессов, протекающих в условиях локальной неравновесности, установлен ряд общих закономерностей. Показано, что учет релаксационных слагаемых в уравнении теплопроводности приводит к уменьшению температурных градиентов внутри исследуемых областей; снижению интенсивности изменения температуры; ограничению величины теплового потока на поверхности тела при тепловом ударе. Сделан также вывод о необходимости учета релаксационных слагаемых высшего порядка при исследовании сильнонеравновесных процессов теплопереноса.

3. Используя единую концепцию математического моделирования локально – неравновесных процессов переноса, разработана и детально исследована математическая модель теплообмена в ламинарном потоке несжимаемой жидкости с учетом диссипации энергии. В диссертационной работе выполнена многократная релаксация искомой функции температуры, конвективной и диффузионной составляющих теплового потока.

4. Разработан класс приближенных аналитических методов решения краевых задач теплообмена в жидкостях, основанный на использовании новых искомых функций и дополнительных граничных характеристик в интегральном методе теплового баланса. В частности, разработан метод математического моделирования гидродинамики и теплообмена в турбулентном пограничном слое, основанный на определении фронта динамического и температурного возмущения. Определение фронта возмущения означает принятие допущения о конечной скорости распространения теплоты, импульса, несмотря на то, что решению подлежат параболические уравнения движения и энергии. Впервые рассмотрено влияние профиля скорости в динамическом пограничном слое, на толщину теплового пограничного слоя.

5. На основе разработанной методологии сформулированы и детально исследованы математические модели колебательных процессов (продольных и поперечных колебаний упругих тела, вынужденных колебаний сжимаемых жидкостей), протекающих в условиях локальной неравновесности. С целью проверки адекватности разработанных математических моделей выполнен комплекс экспериментальных исследований продольных и поперечных

колебаний упругого стержня. Исследования проводились на специализированных стендах АО «РКЦ «Прогресс». На основе выполненных численных и экспериментальных исследований выполнена параметрическая идентификация разработанных математических моделей. Определены такие значения коэффициентов релаксации и затухания, при которых результаты численных расчетов практически совпадают с экспериментальными данными.

6. Разработан метод математического моделирования электромагнитных колебаний на основе модифицированного телеграфного уравнения. На примере решения задачи о распространении электрического тока в проводнике с распределенными параметрами показано, что учет релаксационных слагаемых в модифицированном телеграфном уравнении позволяет устранить скачкообразное изменение силы тока и напряжения в проводнике.

7. Выполнены комплексные исследования полученного в диссертации аналитического решения уравнения Клейна – Гордона – Фока, описывающего распределение электромагнитных волн в плазме. Показано, что колебания в различных точках плазмы происходят с различной амплитудой при одинаковой частоте, что свидетельствует об их самосогласованности. Используя полученное решение, разработаны рекомендации по определению плотности электронов в плазме путем проведения экспериментально – теоретических исследований. Предложен метод математического моделирования распространения электромагнитных колебаний в плазме на основе модифицированного уравнения Клейна – Гордона – Фока, учитывающего релаксационные явления.

8. Используя полученные в диссертации критериальные уравнения конвективного теплообмена, разработан метод математического моделирования гидравлических и тепловых процессов, протекающих в сложных трубопроводных системах. Благодаря применению метода автоматизированной идентификации, разработанные компьютерные модели трубопроводных систем позволяют определять параметры теплоносителя (температура, давление, расход и др.) с погрешностью не более 5% (в сравнении с результатами натурных измерений).

9. Используя язык программирования APDL, разработан вычислительный модуль для программного комплекса ANSYS, позволяющий при решении задач теплопроводности использовать не диффузионную модель переноса, а модель двухфазного запаздывания (DPL – модель). Совместное использование встроенных функций ANSYS (построения геометрической модели, нанесения расчетной сетки, решения систем уравнений) и разработанного алгоритма, позволило исследовать локально – неравновесные процессы переноса тепла в телах произвольной геометрической формы.

10. Используя современные средства автоматизации расчетов, разработан комплекс проблемно – ориентированных программ для ЭВМ, позволяющих выполнять численные исследования разработанных в диссертации локально – неравновесных моделей переноса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов Н.Н. Теория и методика расчета систем подачи и распределения воды. Стройиздат, 1972. 286 с.
2. Аверин Б.В., Колотилкин Д.И., Кудинов В.А. Задача Штурма – Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами // ИФЖ. Т. 73. № 4, 2000. С. 748 – 753.
3. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 287 с.
4. Аполлонский С.М. Дифференциальные уравнения математической физики в электротехнике. Спб.: Питер, 2012. 352 с.
5. Бранфилева А.Н. Разработка математических и компьютерных моделей переноса тепла, массы, импульса для систем тепло – и водоснабжения. Диссертация кандидата технических наук. М.: «НИУ «МЭИ», 2015.
6. Баумейстер К., Хамилл Т. Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле // Теплопередача, 1969. № 4. С. 112 – 119.
7. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978. 328 с.
8. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена. М.: Энергия, 1975.
9. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004. 591 с.
10. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
11. Бровкин Л.А. К решению дифференциального уравнения теплопроводности // Изв. вузов СССР. Энергетика, 1984. № 8. С. 111 – 113.
12. Вилюнов В.Н. Теория зажигания конденсационных систем. Новосибирск: Наука, 1984.
13. Власов А.А. Теория вибрационных свойств электронного газа и ее приложения. М.: ЛЕНАНД, 2017. 232с.
14. Григорьев Л.Я., Маньковский О.Н. Инженерные задачи нестационарного теплообмена. Л.: Энергия, 1968. 83 с.
15. Гудмен Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена. Сб. науч. тр. М.: Атомиздат, 1967. С. 41 – 96.
16. Горохов А.В., Шайкин А.В. Квантовые фракталы // Теоретическая физика, 2002. №3. С. 32 – 52.
17. Евдокимов А.Г., Тевяшев А.Д., Дубровин В.В. Моделирование и оптимизация потокораспределения в инженерных сетях. М.: Стройиздат, 1990. 368 с.
18. Евдокимов А.Г., Тевяшев А.Д. Оперативное управление потокораспределением в инженерных сетях. Харьков: Вища школа, 1980. 144 с.
19. Ефремов В.А., Илькевич Н.И., Меренков А.П. Взаимосогласование

общеэнергетических и отраслевых решений на современном этапе развития ЕСГ // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1990. №3. С. 14 – 23.

20. Жоу Д., Касас – Баскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»: Институт компьютерных исследований, 2006. 528 с.

21. Жуковский В.С. Основы теплопередачи. М – Л.: Госэнергоиздат, 1960.

22. Зарубин В.С. Инженерные методы теплопроводности. М.: Энерго – атомиздат, 1983. 328 с.

23. Зингер Н.М., Андреева К.С., Вульман Ф.А. Расчет многокольцевых гидравлических сетей на ЭВМ «Урал» // Теплоэнергетика, 1960. №1. С. 44 – 52.

24. Зройчиков Н.А., Кудинов В.А., Коваленко А.Г., Колесников С.В., Москвин А.Г., Лисица В.И. Разработка компьютерной модели и расчет оптимальных режимов работы циркуляционной системы ТЭЦ – 23 ОАО «Мосэнерго» // Теплоэнергетика, 2007. № 12. С. 7 – 15.

25. Зыков А. А. Теория конечных графов. М.: Наука, 1969. 543с.

26. Конторович М.И. Операционное исчисление и процессы в электрический цепях. М.: Наука, 1964. 328 с.

27. Кабисов К.С., Камалов Т.Ф., Лурье В.А. Колебания и волновые процессы: Теория. Задачи с решениями. Изд. 2 – ое. М.: КомКнига, 2010. 360 с.

28. Канторович Л.В. Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Прикл. мат. и механ., 1942. №1(6). С. 31 – 40.

29. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

30. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В. Получение аналитического решения задачи Стефана с учетом абляции на основе определения фронта температурного возмущения // Инженерно – физический журнал, 2012. №6(85).

31. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твёрдых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.

32. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.

33. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 360 с.

34. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Математические модели теплопроводности и термоупругости. Самара: Самарский государственный технический университет, 2013. 877 с.

35. Картвелишвили Н.А. Динамика напорных трубопроводов. М.: Энергия, 1979.

36. Киреев В.И., Пантелеев А.П. Численные методы в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2006. 480 с.

37. Ю. А. Кирсанов, А. Ю. Кирсанов, А. Е. Юдахин, Измерение времени тепловой релаксации и демпфирования температуры в твердом теле // ТВТ, 2017. №1. С. 122 –128.

38. Коваленко А.Г., Туева К.С. Система синтеза и анализа гидравлических сетей. Вычислительный центр АН СССР, 1989. 70 с.

39. Колесников С.В., Дикоп В.В., Панамарев Ю.С., Кудинов В.А. Разработка компьютерной модели системы цирквodоснабжения Тольяттинской ТЭЦ // Тез. докл. III Всероссийской научно – практической конференции, 2002. С. 39 – 43.

40. Колесников С.В., Дикоп В.В., Томкин С.В., Кудинов В.А. Исследование гидравлических режимов работы цирксистемы Тольяттинской ТЭЦ на компьютерной модели // Изв. Вузов СНГ. Энергетика, 2002. №6. С. 90 – 95.

41. Кудинов И.В. Математическое моделирование локально – неравновесных процессов переноса теплоты, массы, импульса с учетом релаксационных явлений. Диссертация доктора технических наук. Самара. СамГТУ, 2017.

42. Кудинов И.В., Колесников С.В., Еремин А.В., Бранфилева А.Н. Компьютерные модели сложных многокольцевых разветвленных трубопроводных систем // Теплоэнергетика, 2013. №11. С. 64 – 69.

43. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В. Аналитические решения задач теплопроводности с переменным начальным условием на основе определения фронта температурного возмущения // Инженерно – физический журнал, 2007. 3(80). С. 27 – 35.

44. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Назаренко С.А. Анализ нелинейной теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения // Теплофизика высоких температур, 2006. №5(44). С. 577 – 585.

45. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В. Решения задач теплопроводности при переменных во времени граничных условиях на основе определения фронта температурного возмущения // Известия АН. Энергетика, 2007. № 1. С. 55 – 68.

46. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В. Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. Учебное пособие. М.: Высшая школа, 2008. 305 с.

47. Кудинов В.А., Карташов Э.М. Гидравлика. Учеб. пособ. для вузов. Третье издание. М.: Высшая школа, 2008. 200 с.

48. Кудинов И.В., Кудинов В.А., Еремин А.В., Колесников С.В. Математическое моделирование гидродинамики и теплообмена в движущихся жидкостях. Под ред. Э.М. Карташова. СПБ.: Издательство «Лань», 2005. 208 с.

49. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. Учеб. пос. для втузов. М.: Высшая школа, 2005. 429 с.

50. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Стефанюк Е.В. Техническая термодинамика и теплопередача. Учебник для бакалавров. 2 – ое

издание. Перераб и доп. М.: Изда-тельство «Юрайт», 2013. 566 с.

51. Кудинов И.В. Получение и исследование аналитического решения телеграфного уравнения для проводников с распределенными параметрами // Вестник Самарского государственного технического университета. Технические науки, 2017. №1(53). С. 109 – 121.

52. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Исследование теплопроводности с учётом конечной скорости распространения теплоты // Теплофизика высоких температур, 2013. №2(51). С. 301 – 310.

53. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Получение и анализ точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для плоской стенки // Теплофизика высоких температур, 2012. № 1(50). С. 118 – 125.

54. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Получение точных аналитических решений гиперболических уравнений движения при разгонном течении Куэтта // Известия АН Энергетика, 2012. № 1. С. 119 – 133.

55. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Об одном методе получения точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности на основе использования ортогональных методов // Вестник Самарского технического университета. Сер. Физ. мат. Науки, 2010. №5(21). С. 159 – 169.

56. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности. Под ред. Э.М. Карташова. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. 280 с.

57. Кудинов В.А. Метод координатных функций в нестационарных задачах теплопроводности // Изв. АН Энергетика (обзор), 2004. №3. С. 82 – 104.

58. Кудинов В.А., Стефанюк Е.В. Аналитический метод решения задач теплопроводности на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий // Инженерно – физическтй журнал, 2009. № 3(82). С. 540 – 558.

59. Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Антимонов М.С. Аналитические решения задач теплообмена при течении жидкости в плоскопараллельных каналах на основе определения фронта температурного возмущения // Инженерно – физический журнал, 2007. №4(80). С. 178 – 186.

60. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В, Жуков В.В. Исследование сильнонеравновесной модели теплового воспламенения с учетом пространственно – временной нелокальности. Физика горения и взрыва, 2018. №6(54). С. 25 – 29.

61. Кудинов В.А., Стефанюк Е.В. Задачи теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения // Известия Российской академии наук. Энергетика, 2008. №5. С. 141 – 157.

62. Кудинов И.В. Использование компьютерной модели для проектирования тепловых сетей // Вестник СамГТУ. Сер. Технические науки, 2010. №4(27). С. 174 – 181.

63. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Исследование распределения давления при гидравлическом ударе в трубопроводе с учетом релаксационных свойств

вязкой жидкости // Инженерно – физический журнал, 2014. №2(87).

64. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Исследование точного аналитического решения уравнения продольных волн в жидкости с учётом её релаксационных свойств // Инженерно – физический журнал, 2013. №5(86).

65. Кудинов И.В. Математическое моделирование процессов теплопроводности и гидравлики численно – аналитическими методами на основе использования дополнительных граничных условий. Автореферат, дисс. канд. Тех. наук Самара. СамГТУ, 2011.

66. Кудинов И. В. Построение компьютерных моделей систем теплоснабжения больших городов // Вестник СамГТУ. Сер. Технические науки, 2011. №1(29). С. 212 – 219.

67. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Учеб. для вузов. 7 – ое изд. М.: Дрофа, 2003. 840 с.

68. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло – и массопереноса. М.: Госэнергоиздат, 1963. 535 с.

69. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло – и массообмена // Инженерно – физический журнал, 1965. №3(9). С. 287 – 304.

70. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

71. Лыков А.В. Тепломассообмен (Справочник). 2 – ое изд., перераб. и доп. М.: Энергия, 1978. 480 с.

72. Меренков А.П. Дифференциация методов расчета гидравлических сетей // Журн. вычисл. математики и. мат. Физики, 1973. №5(13). С. 1237 – 1248.

73. Меренков А.П. Об автоматизированных системах программ для расчета гидравлических режимов трубопроводных сетей // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1973. №3. С. 126 – 131.

74. Меренков А.П. и др. Применение теории и методов расчета гидравлических цепей к системам с неизотермическим течением газа // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1971. №6. С. 129 – 138.

75. Меренков А.П. Применение ЭВМ для оптимизации разветвленных тепловых сетей // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1963. №4. С. 531 – 538.

76. Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В. и др. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло, – водо, – нефте, – и газоснабжения. Новосибирск: ВО «Наука». Сиб. изд. фирма, 1992. 407 с.

77. Меренков А.П., Сидлер В.Г. Идентификация трубопроводных систем // Фактор неопределенности при принятии решений в больших системах энергетики. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1974. С. 149 – 162.

78. Меренков А.П., Сидлер В.Г, Хасилев В.Я. «Математический расходомер» и его применение в тепловых сетях // Теплоэнергетика, 1971. №11. С. 70 – 71.

79. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985. 278 с.

80. Меренкова Н.Н., Сеннова Е.В., Стенников В.А. Схемно – структурная оптимизация систем централизованного теплоснабжения // Электронное моделирование, 1982. №6. С. 76 – 82.

81. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. 343 с.

82. Мержанов А.Г. Дубовицкий Ф.И. Современное состояние теории теплового взрыва. Успехи химии, 1966. №4(35). С. 656 – 682.

83. Некрасова О.А, Хасилев В.Я. Оптимальное дерево трубопроводной системы // Экономика и мат. Методы, 1970. №3(4). С. 427 – 432.

84. Новицкий Н.Н. Оценивание параметров гидравлических цепей. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1998. 214 с.

85. Новицкий Н.Н., Сеннова Е.В., Сухарев М.Г. и др. Гидравлические цепи. Развитие теории и приложения. Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН, 2000. 273 с.

86. Новицкий Н.Н., Сидлер В.Г., Шлафман В.В. Развитие методов оценивания состояния и идентификации сложных систем магистральных нефтепроводов // Современные проблемы системных исследований в энергетике. Разд.11. Управление функционированием, надежность, безопасность и риск в энергетике: современные проблемы и методы их решения. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1990. С. 115 – 122.

87. Ощепкова Т.Б. Оптимизация разветвленных и многоконтурных трубопроводных систем: Автореф. дис. канд. Техн. Наук. Новосибирск: Инс – т. математики СО АН СССР, 1983. 22 с.

88. Панкратов А.Н. Физика линейных и нелинейных волновых процессов в избранных задачах. Электромагнитные и акустические волны. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2014. 144 с.

89. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 412 с.

90. Пейн Г. Метод диагностики плазмы. В кн. Магнитогидродинамическое генерирование электроэнергии. М.: Мир, 1966. С. 85 – 129.

91. Рудобашта С.П., Карташов Э.М. Диффузия в химико – технологических процессах. М.: Химия, 1993. 209 с.

92. Соболев С.Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально – неравновесных условиях // Успехи физических наук, 1991. №3(161). С. 5 – 29.

93. Соболев С.Л. Локально – неравновесные модели процессов переноса // Успехи физических наук, 1997. №10(167). С. 1096 – 1106.

94. Сеннова Е.В., Ощепкова Т.Е., Мирошниченко В.В. Методические и практиче-ские вопросы построения надежных теплоснабжающих систем // Изв. РАН. Энергетика, 1999. №4. С. 65 – 75.

95. Сеннова Е.В., Сидлер В.Г. Математическое моделирование и оптимизация развивающихся теплоснабжающих систем. Новосибирск: Наука, 1987. 221 с.

96. Сидлер В.Г. Разработка и применение методов идентификации параметров гидравлических сетей: Автореф. дисс. Канд. Техн. Наук. Томск,

1977. 20 с.

97. Соколов Е.Я. Теплофикация и тепловые сети. М.: Энергоиздат, 1982. 360 с.

98. Стефанюк Е.В., Кудинов В.А. Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности // Теплофизика высоких температур, 2009. №2(47).

99. Стефанюк Е.В. Модельные представления аналитических решений краевых задач теории теплообмена на основе введения дополнительных граничных условий. Дисс. доктора техн. наук. Москва. МАТИ, 2010.

100. Сумароков С.В. Математическое моделирование систем водоснабжения. Новосибирск: Наука, 1983. 167 с.

101. Сумароков С.В. Метод решения многоэкстремальной сетевой задачи // Экономика и мат. методы, 1976. №5(12). С. 1016 – 1018.

102. Сухарев М.Г. Об одном методе расчета газосборных сетей на вычислительных машинах // Изв. вузов. Нефть и газ, 1965. №6. С. 48 – 52.

103. Сухарев М.Г., Ставровский Е.Р., Брянских В.Е. Оптимальное развитие систем газоснабжения. М.: Недра, 1981. 294 с.

104. Сухарев М.Г., Ставровский Е.Р. Оптимизация систем транспорта газа. М: Недра, 1975. 278 с.

105. Сухарев М.Г., Ставровский Е.Р. Расчеты систем транспорта газа с помощью вычислительных машин, 1971. 206 с.

106. Теория тепломассообмена. Учебник для вузов. Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Высшая школа, 1979. 495 с.

107. Темников А.В., Игонин И.В., Кудинов В.А. Приближенные методы решения задач теплопроводности. Куйбышев: Изд. КАИ, 1982. 89 с.

108. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Государственное издательство технико – теоретической литературы. Москва – Ленинград, 1951. 659 с.

109. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. М.: Физматлит, 2004. 400 с.

110. Формалев В.Ф. Тепломассоперенос в анизотропных телах // Теплофизика высоких температур, 2001. №5(39). С. 810 – 832.

111. Франк – Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.

112. Хасилев В.Я. Элементы теории гидравлических цепей // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1964. №1. С. 69 – 88.

113. Хасилев В.Я. Элементы теории гидравлических цепей: Авто催реф. дисс. Д – ра техн. наук. Новосибирск: Секция техн. Наук Объединенного ученого совета СО АН СССР, 1996. 98 с.

114. Храмов А.В. Программно – вычислительный комплекс СОСНА как инструмент для реализации и исследования алгоритмов оптимального синтеза многоконтурных гидравлических систем // Пакеты прикладных программ. Методы, разработки. Новосибирск: Наука, 1981. С. 174 – 182.

115. Цирельман Н.М. Прямые и обратные задачи тепломассопереноса. М: Энергоатомиздат, 2005. 392 с.

116. Цой П.В. Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса. М.: Энергия, 1971. 382 с.
117. Цой П.В. Системные методы расчета задач тепломассопереноса. М.: Издательство МЭИ, 2005. 568 с.
118. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: «Недра», 1975. 296 с.
119. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: системно – структурный подход. Изд. 2 – ое, доп. – М.: Едиториал УРСС, 2004. 296 с.
120. Швец М.Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. Прикладная математики и механика, 1949. №3(13).
121. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 472 с.
122. Шумаков Н.В. Метод последовательных интервалов в теплометрии нестационарных процессов. М.: Атомиздат, 1979. 212 с.
123. Эгильский И.С. Автоматизированные системы управления технологическими процессами подачи и распределения воды. Л.: Стройиздат, 1988. 216 с.
124. Юдаев Б.Н. Основы теплопередачи. Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1981. 319 с.
125. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1987. 195 с.
126. Aziz A. A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 14, 2009. Pp. 1064 – 1068.
127. Abbott L.F., Wise M.B. Demention of quantum – mechanical path // Am. J. Phys, 1981. №1(49). 37 p.
128. Ahmadikia H., Rismanian M. Analytical solution of non – Fourier heat conduction problem on a fin under periodic boundary conditions // Journal of Mechanical Science and Technology, 2011. №25(11). Pp. 2919 – 2926.
129. Akbarzadeh A.H., Pasini D. Phase – lag heat conduction in multilayered cellular media with imperfect bonds // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2014. №75. Pp. 656 – 667.
130. Al – Nimr M.A., Naji M., Arbaci V.S. Nonequilibrium Entropy Production under the Effect of the Dual – Phase – Lag Heat Conduction Model // Journal of Heat Transfer, 2000. №122. Pp. 217 – 223.
131. Armaghani T., Maghrebi, M.J., Chamkha, A. J., Al – Mudhaf, A. F. Forced Convection Heat Transfer of Nanofluids in a Channel Filled with Porous Media Under Local Thermal Non – Equilibrium Condition with Three New Models for Absorbed Heat Flux // Journal of Nanofluids, 2017. №2(6). Pp. 362 – 367.
132. Atefi G., Talaee M.R.: Non – Fourier temperature field in a solid homogeneous finite hollow cylinder // Arch. Appl. Mech, 2011. №81. Pp. 569 – 583.
133. Barletta A., Pulvirenti B. Hyperbolic thermal waves in a solid cylinder with a non – stationary boundary heat flux // International Journal of Heat and Mass

Transfer, 1998. №1(41). Pp. 107 – 116.

134. Bazant Z., Jirasek M. Nonlocsl Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress // J. Eng. Mech., 2002. №11(128). Pp. 1119 – 1149.

135. Berry M.V. Quantum fractals in boxes // J. Phys.A: Math.Gen, 1996. №29. Pp. 6617 – 6629.

136. Brorson S.D., Fujimoto J.G., Ippen E.P. Femtosecond electron heat – transport dynamics in thin gold film // Physical Review Letters, 1987. №59. Pp. 1962 – 1965.

137. Cai R., Gou C., Li H. Algebraically explicit analytical solutions of unsteady 3 – D nonlinear non – Fourier (hyperbolic) heat conduction // International Journal of Thermal Sciences, 2006. №45. Pp. 893 – 896.

138. Casati G., Guarneri I., Maspero G. Fractal survival probability // Phys. Rev. Lett, 2000. №84(1). 2000 p.

139. Cattaneo G. Sur une forme de l’eguation de la chaleur eliminant le paradoxe d’une propagation instantance // Comptes Rendus, 1958. №4(247), Pp. 431 – 433.

140. Dai W., Han F., Sun Z. Accurate numerical method for solving dual – phase – lagging equation with temperature jump boundary condition in nano heat conduction // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2013. №64. Pp. 966 – 975.

141. Eckhardt B. Irregular scataring // Physica D, 1984. Pp. 33 – 89.

142. Eremin A.V., Kudinov V.A., Stefanyuk E.V. Heat exchange in a cylindrical channel at stabilized fluid laminar flow // Fluid Dynamics, 2018. №82(1). Pp. 29 – 39.

143. Eremin A.V., Kudinov V.A., Stefanyuk, E.V., Kudinov I.V. Investigation of Temperature Change under Influence of Ultrashort Laser Pulses Taking into Account Relaxation Properties of Materials // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2018. №327(2). Pp. 6 – 13.

144. Eremin A.V. Study of thermal exchange with liquid flowing in a cylindrical channel // IEEE Xplore, 2019. Pp. 1 – 6.

145. Eremin A.V., Trubytsyn K.V., Kolesnikov S.V., Kudinov I.V., Tkachev V.K. Computer models of hydraulic systems of district heating // MATEC Web of Conferences, 2018. №193. Pp. 1 – 9.

146. Eremin A.V., Trubitsyn K.V., Kudinov V.A. Designing of hydraulic systems on computer models // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2018. №194. Pp. 1 – 6.

147. Espinosa – Paredes G., Espinosa – Martínez E.G. Fuel rod model based on Non – Fourier heat conduction equation // Annals of Nuclear Energy, 2009. №36. Pp. 680 – 693.

148. Fabrizio M., Giorgi C., Morro A. Modeling of heat conduction via fractional derivatives // Heat and Mass Transfer, 2017. №9(53). Pp. 2785 – 2797.

149. Fang X.Q., Hu C. Dynamic effective thermal properties of functionally graded fibrous composites using non – Fourier heat conduction // Computational Materials Science, 2008. №42. P. 194.

150. Ketzmerick R. Fractal conduntance in generic chaotic cavities //

Phys. Rev. B, 1996. № 54.
151. Körner C., Bergmann H.W. The physical defects of the hyperbolic heat conduction equation // Appl. Phys. A, 1998. № 67. Pp. 397.
152. Kroger H. Fractal geometry in quantum mechanics, field theory and spin system // Phys. Rep, 2000. №323(2). Pp. 818 – 881.
153. Kundu B. A., Lee K. Non – Fourier analysis for transmitting heat in fins with internal heat generation // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2013. № 64. Pp. 1153 – 1162.
154. Kundu B., Lee K. Fourier and non – Fourier heat conduction analysis in the absorber plates of a flat – plate solar collector // Solar Energy, 2012. № 86. Pp. 3030 – 3039.
155. Landahl H.D. An Approximation Method for the Solution of Diffusion and Related Problems // Bulletin of mathematical biophysics, 1953. № 15(1). Pp. 49 – 61.
156. Landahl H.D. On the spread of information with time and distance // Bulletin of mathematical biophysics, 1953. №15(3). Pp. 367 – 381.
157. Li Ji., Zhengfang Z., Dengying L. Difference Scheme for Hyperbolic Heat Conduction Equation with Pulsed Heating Boundary // Journal of Thermal Science, 2000. №2(9). Pp. 152 – 157.
158. Li L., Zhou L., Yang M. An Expanded Lattice Boltzmann Method for Dual Phase Lag Model // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2016. №93. Pp. 834 – 838.
159. Liu K.C., Chang P.C. Analysis of dual – phase – lag heat conduction in cylindrical system with a hybrid method // Applied Mathematical Modeling, 2007. № 31. Pp. 369 – 380.
160. Majumdar A. Microscale Heat Conduction in Dielectric Thin Films // J. Heat Transfer, 1993. №115(1). Pp. 7 – 16.
161. Mao Y., Xu M. Lattice Boltzmann numerical analysis of heat transfer in nano – scale silicon films induced by ultra – fast laser heating // International Journal of Thermal Sciences, 2015. №89. Pp. 210 – 221.
162. Miranville A. A., Quintanilla R. Phase – Field Model Based on a Three – Phase – Lag Heat Conduction // Applied Mathematics & Optimization, 2011. №63(1). Pp. 133 – 150.
163. Mishra S.C., Sahai H. Analyses of non – Fourier heat conduction in 1 – D cylindrical and spherical geometry: an application of the lattice Boltzmann method // Int. J. Heat Mass Transf, 2012. №55. Pp. 7015 – 7023.
164. Mishra S.C., Sahai H. Analysis of non – Fourier conduction and radiation in a cylindrical medium using lattice Boltzmann method and finite volume method // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2013. № 61. Pp. 41 – 55.
165. Mitra K., Kumar S., Vedevarz A., Moallemi M.K. Experimental Evidence of Hyperbolic Heat Conduction in Processed Meat // J. Heat Transfer.
166. Herwig H., Beckert K. Experimental evidence about controversy concerning Fourier or non – Fourier heat conduction in materials with nonhomogeneus inner structure // Heat and Mass Transfer, 2000. №36. Pp. 387 – 392.

167. Moosaie A.A., Atefi G. comparative study on various time integration schemes for heat wave simulation // Computational Mechanics, 2009. №43. Pp. 641 – 649.

168. Polyanin A.D., Zhurov A. Exact solutions of linear and non – linear differential – difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // International Journal of Non – Linear Mechanics, 2013. №54. Pp. 115 – 126.

169. Qiu T.Q., Tien C.L. Size effects on Nonequilibrium Laser Heating of Metal Films // ASME Journal of Heat Transfer, 1993. №115. Pp. 842 – 847.

170. Rahbari I., Mortazavi F., Rahimian M.H. High order numerical simulation of non – Fourier heat conduction: An application of numerical Laplace transform inversion // International Communications in Heat and Mass Transfer, 2014. № 51. Pp. 51 – 58.

171. Rashevsky N. Mathematical Biophysics. New York, 1960.

172. Roy Choudhuri S.K. On a thermoelastic three – phase – lag model // Journal of Thermal Stresses, 2007. № 30. Pp. 231 – 238.

173. Rukolaine S.A. Unphysical effects of the dual – phase – lag model of heat conduction // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2014. № 78. Pp. 58 – 63.

174. Sasmal A., Mishra S.C. Analysis of non – Fourier conduction and radiation in a differentially heated 2 – D square cavity // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2014. №79. Pp. 116 – 125.

175. Shen W.A., Han S. A Numerical solution of two – dimensional hyperbolic heat conduction with non – linear boundary conditions // Heat and Mass Transfer, 2003. №39. Pp. 499 – 507.

176. Shomali Z., Abbassi A. Investigation of highly non – linear dual – phase – lag model in nanoscale solid argon with temperature – dependent properties // International Journal of Thermal Sciences, 2014. № 83. Pp. 56 – 67.

177. Singh S., Kumar S. Numerical study on triple layer skin tissue freezing using dual phase lag bio – heat model // International Journal of Thermal Sciences, 2014. № 86. Pp. 12 – 20.

178. Sobolev S.L. Discrete space – time model for heat conduction: Application to size dependent thermal conductivity in nano – films // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2017. № 108. Pp. 933 – 939.

179. Sobolev S.L. Effective temperature in nonequilibrium state with heat flux using discrete variable model // Physics Letters A, 2017. № 381. Pp. 2893 – 2897.

180. Sobolev S.L. Nonlocal diffusion models: Application to rapid solidification of binary mixtures // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2014. №71. Pp. 295 – 302.

181. Torabi M., Zhang K. Multi – dimensional dual – phase – lag heat conduction in cylindrical coordinates: Analytical and numerical solutions // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2014. № 78. Pp. 960 – 966.

182. Tzou D.Y. Macro to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior 2nd Edition – West Sussex, UK: John Wiley & Sons Ltd, 2015. 1298 p.

183. V´an P., Czel B., Fulop T., Grof G.Y., Gyenis A., Verhas

J. Experimental aspects of heat conduction beyond fourier // 12th Joi[nt] European Thermodynamics Conference Brescia, 2013. Pp. 519 – 524.

184. Vernott P. Les paradoxe de la theorie continue de l'eguation de la chaleur // Comptes Rendus, 1958. №246. Pp. 3154 – 3155.

185. Wojcik D., Bialynicki – Birula I., Zyczkowski K. Time evolution of quantum fractals // Phys. Rev. Lett, 2000. №85. Pp. 5022 – 5026.

186. Wu F., Gao Q., Zhong W. Fast precise integration method for hyperbolic heat conduction problems // Applied Mathematics and Mechanics, 2013. №34. Pp. 791 – 800.

187. Xuefang L., Mingtian X., Christofer D.M. Influence of size effect and boundary conditions on temperature overshooting in nanoscale thermal conduction // Chinese Science Bulletin, 2014. №59. Pp. 1334 – 1339.

188. Yang C.Y. Estimation of the periodic thermal conditions on the non – Fourier fin problem // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2005. № 48. Pp. 3506 – 3515.

189. Ketzmerick R. Fractal conductance in generic chaotic cavities // Phys. Rev. B, 1996. № 54. 10841 p.

190. Casati G., Guarneri I., Maspero G. Fractal survival probability // Phys. Rev. Lett, 2000. №84 (1).

191. Kroger H. Fractal geometry in quantum mechanics, field theory and spin system // Phys. Rep, 2000. № 323 (2). Pp. 818 – 881.

192. Berry M.V. Quantum fractals in boxes. J, Phys.A: Math.Gen, 1996. №29. Pp. 6617 – 6629.

193. Wojcik D., Jarzynski D.K. Classical and quantum fluctuation theorems for heat exchange // Physical review letters, 2004.

Основные публикации автора диссертационной работы

194. Бранфилева А.Н., Еремин А.В., Габдушев Р.Ж., Демкова Е.М. Расчет потерь теплоты в трубопроводах подземной прокладки // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». Самара, 2018. №1. С. 108 – 117.

195. Еремин А.В. Аналитический метод исследования теплообмена при ламинарном течении жидкости в трубах // В сб. Прикладная математика и механика. Ульяновск: УлТУ, 2011. №9. С. 213 – 220.

196. Еремин А.В. Исследование процесса охлаждения многослойной пластины при несимметричных граничных условиях третьего рода // Молодежный научный вестник, 2016. №10. С. 68 – 79.

197. Еремин А.В. Нестационарный теплообмен в пластине с внутренним источником теплоты // Международный научно – технический журнал, 2016. №9.

198. Еремин А.В. Локально - нера–новесный теплообмен в стержне в условиях вынужденной конвекции // Инженерный вестник Дона, 2019. №4(55).

199. Еремин А.В., Будыльников М.Н. Об одном методе получения аналитического решения задачи Гретца – Нуссельта // Вестник Самарского

государственного технического университета. Серия «физ. – мат. науки.». Самара, 2011. №3.

200. Еремин А.В., Жуков В.В., Кудинов В.А., Кудинов И.В. Резонансные и бифуркационные колебания стержня с учетом сил сопротивления и релаксационных свойств среды // Механика твердого тела, 2018. №5. С. 124 – 132.

201. Еремин А.В., Колесников С.В., Кудинов И.В., Бранфилева А.Н., Абишева Л.С. Математическая и компьютерная модель объединенной теплосети централизованного теплоснабжениям // Проблемы энергетики. Казань, 2017. №2(19). С. 3 – 14.

202. Еремин А.В., Кудинов В.А., Кудинов И.В. Математическая модель теплообмена в жидкости с учетом ее релаксационных свойств // Известия РАН. Механика жидкости и газа. Москва, 2016. №1. С. 33 – 44.

203. Еремин А.В., Кудинов В.А., Стефанюк Е.В. Теплообмен в цилиндрическом канале при стабилизированном ламинарном течении жидкости // Прикладная математика и механика, 2018. №82(1). С. 31 – 43.

204. Еремин А.В., Кудинов И.В. Об одном методе решения нестационарных задач теплопроводности // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «техн. науки.». Самара, 2012. №2(34). С. 158 – 165.

205. Еремин А.В., Кудинов И.В., Абишева Л.С., Жуков В.В. Исследование теплообмена при течении жидкости в цилиндрическом канале // Вестник СамГТУ. Серия «техни. науки». Самара, 2015. №4(48). С.85 – 92.

206. Еремин А.В., Кудинов И.В., Бранфилева А.Н., Муравьева А.П., Скворцова М.П. Об одном методе решения задачи теплообмена при течении жидкости в цилиндрическом канале // Прикладная математика и механика: сборник научных трудов. Ульяновск: УлГТУ, 2014. С. 71 – 77.

207. Еремин А.В., Кудинов И.В., Будыльников М.Н. Теплообмен при течении Куэтта с учетом диссипации энергии при граничных условиях третьего рода // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «физ. – мат. науки.». Самара, 2012. №3(28). С. 136 – 144.

208. Еремин А.В., Кудинов И.В., Довгялло А.И. Кудинов В.А. Теплообмен в жидкости с учетом диссипации энергии // Инженерно – физический журнал. Минск, 2017. №5(90). С. 1298 – 1306.

209. Еремин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В. Об одном методе решения задач теплообмена при течении жидкостей в плоских каналах // Вестник СамГТУ. Серия «физико – математические науки». Самара, 2016. №1(20). С.109 – 120.

210. Еремин А.В., Кудинов И.В., Ларгина Е.В., Будыльников М.Н. Теплообмен в плоском канале с учетом диссипации энергии // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия математ. науки, 2009. №2. С. 38 – 47.

211. Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Абишева Л.С. Идентификация источника теплоты на основе аналитического решения задачи

теплопроводности // Известия вузов. Черная металлургия, 2016. №5(59). С. 339 – 347.

212. Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Курганова О.Ю., Ткачев В.К., Скворцова М.П. Обобщенные функции в задачах теплопроводности для многослойных конструкций с источниками теплоты // Проблемы машиностроения и надёжности машин, 2018. №3. С. 52 – 58.

213. Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Рассыпнов А.Ю., Кузнецова А.Э. Нестационарный теплообмен в цилиндрическом канале при ламинарном течении жидкости // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «физ. – мат. науки». Самара, 2013. №4(33). С. 122 – 130.

214. Колесников С.В., Еремин А.В., Бранфилва А.Н., Колесниква А.С. Исследование гидравлических режимов работы цирксистемы Тольяттинской ТЭЦ на компьютерных моделях // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «техн. науки». Самара, 2013. №2(38). С. 178 – 188.

215. Колесников С.В., Кудинов И.В., Еремин А.В., Бранфилева А.Н. Использование компьютерных моделей для проектирования сложных трубопроводных систем // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. Минск, 2014. №5. С. 72 – 84.

216. Колесников С.В., Кудинов И.В., Еремин А.В., Колесниква А.С., Бранфилева А.Н. Исследование гидравлических режимов работы циркуляционных систем ТЭЦ на компьютерных моделях // Проблемы энергетики. Известия высших учебных заведений. Казань, 2013. №7. С. 112 – 122.

217. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В., Ткачев В.К. Исследование сильнонеравновесных процессов переноса тепла, массы, импульса на мезо- и наноскопических пространственно-временных масштабах // Труды Российской национальной конференции по теплообмену. С. 244 – 247.

218. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В. Разработка и исследование сильнонеравновесной модели теплообмена в жидкости с учетом пространственно – временной нелокальности // Теплофизика и аэромеханика, 2017. №6. С. 929 – 935.

219. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В., Максименко Г.Н. Исследование плотности электронов в плазме на основе аналитического решения уравнения электромагнитных волн. // Труды Российской национальной конференции по теплообмену. С. 321 – 324.

220. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В. Критические условия теплового взрыва с учетом пространственно – временно́й нелокальности // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника, 2018. №2. С. 100 – 104.

221. Кудинов В.А., Еремин А.В., Стефанюк Е.В. Аналитические решения задач теплопроводности с переменными во времени коэффициентами теплоотдачи // Инженерно – физический журнал. Минск, 2015. №3(88). С. 663 – 673.

222. Кудинов В.А., Еремин А.В., Стефанюк Е.В. Критические условия теплового взрыва в пластине с нелинейным источником теплоты // Проблемы машиностроения и надежности машин. Москва, 2016. №1. С. 44 – 49.

223. Кудинов В.А., Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Жуков В.В., Тарабрина Т.Б. Аналитическое решение нестационарной задачи теплообмена при ламинарном течении жидкости в цилиндрическом канале // Вестник СамГТУ. Серия «Технические науки». Самара, 2017. №4(56). С.121 – 138.

224. Кудинов В.А., Еремин А.В., Стефанюк Е.Ф., Кузнецова А.Э. Температурные напряжения в многослойном полом цилиндре при тепловом ударе на его внешней поверхности // Известия высших учебных заведений «Авиационная техника». Казань, 2014. №1 С. 30 – 35.

225. Кудинов В.А., Котова Е.В., Еремин А.В., Кузнецова А.Э. Ортогональные методы в задачах теплопроводности для многослойных конструкций // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. Минск, 2013. №3. С. 44 – 59.

226. Кудинов В.А., Кузнецова А.Э., Еремин А.В., Котова Е.В. Аналитические решения задач термоупругости для многослойных конструкций с переменными свойствами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «физ. – мат. науки.». Самара, 2012. №1(30). С. 215 – 221.

227. Кудинов В.А., Кузнецова А.Э., Еремин А.В., Котова Е.В. Аналитические решения квазистатических задач термоупругости с переменными физическими свойствами среды // Вестник СамГТУ. Серия «физико – математические науки». Самара, 2014. №2(35). С.338 – 339.

228. Кудинов И.В., Бранфилева А.Н., Еремин А.В., Скворцова М.П. Моделирование теплообмена в турбулентном пограничном слое с использованием полуэмпирической теории турбулентности // Вестник СамГТУ. Серия «физико – математические науки». Самара, 2015. №4(37). С.157 – 169.

229. Кудинов И.В., Еремин А.В., Бранфилева А.Н., Колесников С.В. Определение расхода жидкости в трубопроводе на основе решения обратной задачи теплообмена // Измерительная техника. 2016. №7. С. 33 – 36.

230. Кудинов И.В., Еремин А.В., Колесников С.В, Кузнецова А.Э. Получение точного аналитического решения гиперболического уравнения при гидравлическом ударе в трубопроводе // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «техн. науки». Самара, 2013. №3(39). С. 203 – 210.

231. Кудинов И.В., Еремин А.В., Сичинава Г.В., Бранфилева А.Н., Ткачев В.К., Курганова О.Ю. Экспериментальное исследование мощности газоводяных теплообменников // Вестник СамГТУ. Серия «Технические науки». Самара, 2017. №2(54). С. 146 – 153.

232. Кудинов И.В., Кудинов В.А., Еремин А.В. Исследование распределения скорости течения вязкой жидкости в трубопроводе // Инженерно – физический журнал. Минск, 2013. №2(86). С. 387 – 393.

233. Кудинов И.В., Кудинов В.А., Еремин А.В., Жуков

B.B. Mathematical model of rod oscillations with account of material relaxation behavior // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2018. №327(4). 5 p.

234. Кудинов И.В., Кудинов В.А., Котова Е.В., Еремин А.В. Об одном методе решения нестационарных краевых задач // Инженерно – физический журнал. Минск, 2017. №6(90). С. 1387 – 1397.

235. Стефанюк Е.В., Еремин А.В., Кузнецова А.Э., Абишева Л.С. Получение аналитических решений задач теплопроводности с переменными во времени коэффициентами теплоотдачи // Тепловые процессы в технике. Москва, 2015. №4(7). С.172 – 176.

236. Eremin A.V., Kudinov I.V., Dovgallo A.I., Kudinov V.A. Heat exchange in a liquid with energy dissipation // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2017. №5(90). Pp. 1234 – 1242.

237. Eremin A.V., Kudinov V.A., Kudinov I.V. Mathematical Model of Heat Transfer in a Fluid with Account for Its Relaxation Properties // Fluid Dynamics, 2016. №1(51). Pp. 33 – 44.

238. Eremin A.V., Kudinov V.A., Trubitsyn K.V., Tkachev V.K., Kudinov I.V., Stefanyuk E.V. Study of Fast Relaxing Excitations Caused by Ultrashort Laser Pulses in Nanoscale Domain // AER – Advances in Engineering Research. 2017. №133. Pp. 202 – 208.

239. Eremin A.V., Stefanyuk E.V., Abisheva L.S. Research on Heat Conductivity with a Time – Varying Heat Source // Applied Mechanics and Materials, 2015. №698. Pp.637 – 642.

240. Eremin A.V., Stefanyuk E.V., Kurganova O.Yu., Tkachev V.K., Skvortsova M.P. A Generalized Function in Heat Conductivity Problems for Multilayer Structures with Heat Sources // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2018. №47(3). Pp. 249 – 255.

241. Kudinov I. V., Kolesnikov S.V., Eremin A.V., Branfileva A.N. The Computer Models of Complex Multiloop Branched Pipeline Systems // Thermal Engineering, 2013. №11(60). Pp. 835 – 840.

242. Kudinov I. V., Kudinov V. A., Eremin A.V. Distribution of viscous liquid flow velocity in a pipeline on hydraulic shock // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2013. №2(86). Pp. 410 – 417.

243. Kudinov I.V., Eremin A.V., Branfileva A.N., Kolesnikov S.V. Determination of fluid flow in a pipeline // MeasurementTechniques, 2016 №7(59). Pp. 728 – 733.

244. Kudinov I.V., Eremin A.V., Tkachev V.K., Kudinov V.A., Trubitsyn K.V., Stefanyuk E.V. Mathematical Modelling of Strongly Non – Equilibrium Transfer Processes at Nanoscopic Scale // AER – Advances in Engineering Research, 2017. №133. Pp. 382 – 389.

245. Kudinov I.V., Kudinov V.A., Kotova E.V., Eremin A.V. On one method of solving nonstationary boundary – value problems // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, November, 2017. №6(90). Pp. 1317 – 1327.

246. Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V. The development and investigation of a strongly non – equilibrium model of heat transfer in fluid with

allowance for the spatial and temporal non – locality and energy dissipation // Thermophysics and Aeromechanics, 2017. №6(24).

247. Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V., Dovgallo A.I. Rod resonant oscillations consideringmaterial relaxation properties // Procedia Engineering, 2017. №176. Pp. 226 – 236.

248. Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V., Zhukov V.V. Strongly nonequilibrium model of thermal ignition with account for space – time nonlocality // Combustion, explosion andshock waves, 2018. Pp. 649 – 653.

249. Kudinov V.A., Eremin A.V., Stefanyuk E.V. Critical conditions for thermal explosion in a plate with a nonlinear heat source // Journal of machinery manufacture and reliability, 2016. №1(45). Pp. 38 – 43.

250. Kudinov V.A., Eremin A.V., Zhukov V.V. Mathematical Models of Heat Ignition and Explosion Considering Local Non – Equilibrium of Processes // Journal of Physics: Conference Series, 2017. №891(1). Pp. 1 – 4.

251. Kudinov V.A., Nekrasova S.O., Eremin A.V., Kudinov I.V. Gas resonant oscillations considering gas relaxation properties // Procedia Engineering, 2017. №176. Pp. 237 – 245.

252. Kudinov V.A., Stefanyuk E.V., Kuznetsova A.E. Thermal stresses in a multilayer hollow cylinder under thermal shock on its external surface // Russian Aeronautics (Iz VUZ), 2014. №1(57). Pp 37 – 44.

253. Kudinov, V. A., Eremin A.V., Stefanyuk E.V. Analytical solutions of heat – conduction problems with time – varying heat – transfer coefficients // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2015. №88(3). Pp. 688 – 698.

254. Kudinov, V. A., Kudinov, I. V. Analytical solution of the Stefan problem with account for the ablation and the temperature – disturbance front // Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2012. №85. Pp. 1441 – 1452.

255. Kudinov I.V., Eremin A.V., Kudinov V.A., Mikheeva G.V. Theoretical research on electromagnetic wave propagation in plasma// IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.

256. Kudinov I.V., Eremin A.V., Kudinov V.A., Dovgyallo A.I., Zhukov V.V. Mathematical model of damped elastic rod oscillations with dual-phase-lag // International Journal of Solids and Structures, 2020. Pp. 231 – 241.