САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Касаткин Андрей Евгеньевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор
Астафьев Владимир Иванович

Самара – 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Актуальность темы

Задачи с подвижными границами – это задачи об отыскании закона перемещения для некоего внутреннего фронта $\Gamma(t)$, разделяющего физически различные среды Ω_1 и Ω_2. При этом поведение основной функции $F(x,t), x \in R^n$, связанной с моделируемым процессом, описывается в областях Ω_1 и Ω_2 уравнениями одного типа. Соответственно, физические различия между средами Ω_1 и Ω_2 (или, в частном случае, фазовыми состояниями одного вещества) учитываются с помощью коэффициентов в уравнениях для $F(x,t)$, терпящей сильный и/или слабый разрыв на внутренней границе раздела $\Gamma(t)$. Мониторинг подвижной границы широко используется при моделировании динамических процессов в вопросах теплопроводности, диффузии, фильтрации, горения и т.д. Так, проблемы таяния льда и, наоборот - замерзания воды, плавления твердого вещества, протаивания или промерзания грунта и т.д. часто рассматриваются в рамках известной задачи Стефана [29][95]. Похожая постановка, имеющая, впрочем, ряд существенных различий, используется при исследовании перераспределения концентрации в бинарной металлической системе в процессе диффузионного отжига. Мониторинг подвижной границы также применяется в задачах совместной фильтрации, в частности – заводнения нефтяных и газовых месторождений: здесь $\Gamma(t)$ выступает в качестве фронта вытеснения, разделяющего физически различные фазы. Кроме того, подобный подход также используются в вопросах о распространении загрязнения от источника в грунте. Наконец, мониторинг подвижного фронта применяется и при исследовании процесса горения жидких или твердых веществ, например – ракетного топлива: соответствующие задачи и связанные с ними математические модели актуальны для области ракетостроения.

Таким образом, идея о мониторинге внутренней подвижной границы находит широкое применение при моделировании процессов в системах из нескольких физически различных веществ. При этом соответствующие модели, как правило, включают в себя уравнения в частных производных с нелинейной зависимостью функции $F(x,t)$ от времени t. Так, изменение концентрации в компонентах бинарной металлической системы описывается вторым законом Фика. В свою очередь, поведение температуры при теплопереносе или давления в ходе совместной фильтрации задается с помощью уравнений теплопроводности и пьезопроводности соответственно. Ввиду нестационарности рассматриваемых процессов поиск общего решения весьма затруднителен: нелинейная зависимость $F(x,t)$ от времени t, как правило, приводит к необходимости численного интегрирования исходных уравнений. В связи с этим актуальными остаются исследования, посвященные поиску общих решений для задач с подвижной границей. При этом вопрос о мониторинге подвижного фронта рассматривается в рамках различных подходов, основанных на специфичных для них исходных допущениях. Данное обстоятельство приводит к появлению новых математических моделей и связанных с ними методов решения соответствующих уравнений.

2. Цель работы

Целью настоящей работы является разработка общего метода решения плоских квазистационарных задач с подвижной границей с последующей апробацией на примере внутриконтурного заводнения в двоякопериодической области. При этом общее представление формируется не для основной функции $F(x,t)$, а ее производных. В свою очередь, мониторинг подвижного фронта осуществляется посредством трассировки конечного множества точек, определяющих его (фронта) форму. Разработка нового метода также включает в себя создание алгоритмов для аппроксимации исходных уравнений и их последующего численного решения.

3. Задачи и методы исследования

Создание представления для производных функции $F(x,t)$, применимого для всей исследуемой области, включая физически различные среды и подвижную границу;

Построение системы сингулярных интегральных и дифференциальных уравнений (СИДУ) для мониторинга подвижного фронта;

Разработка алгоритмов численного решения СИДУ и их последующая программная реализация на примере внутриконтурного заводнения в двоякопериодической области;

Проведение сравнительного качественного и количественного анализа различных схем заводнения в рамках моделей однофазной фильтрации («разноцветных жидкостей» и «поршневого вытеснения»).

4. Научная новизна

1. Разработаны новые математические модели и методы решения плоских квазистационарных задач параболического типа с подвижной границей.

2. Предложен новый метод решения плоских квазистационарных задач заводнения в двоякопериодической области. В его основе – использование представления для поля скоростей: при этом в состав соответствующего выражения включены дзета-функция Вейерштрасса и обобщенный сингулярный интеграл с ядром типа Коши.
3. Построена новая математическая модель для мониторинга подвижной границы (фронта заводнения). В основе предлагаемого математического описания лежит связанная система сингулярного интегрального (СИУ) и дифференциального уравнений (ДУ). При этом СИУ используется для определения скорости фильтрации на подвижной границе. Результат решения сингулярного интегрального уравнения используется для определения правой части ДУ: последнее используется непосредственно для мониторинга фронта заводнения методом трассировки.
4. Предложены новые методы численного решения для сингулярного интегрального и дифференциального уравнений: предлагаемые подходы используются при мониторинге подвижной границы. К настоящему моменту известен способ решения СИУ, основанный на использовании формулы прямоугольников, а также – исключении отрезка интегрирования с сингулярной составляющей. Предлагаемый в работе метод основан на применении формулы трапеции, а также – рассмотрении сингулярной части в смысле главного значения по Коши, что приводит к повышению точности. В свою очередь, для решения ДУ предложено использовать методы Рунге-Кутты в комплексной плоскости: при этом переменная интегрирования остается вещественной, что обеспечивает применимость классических разностных схем.
5. Разработан и реализован алгоритм подсчета коэффициента $К_{охв}$ охвата заводнением по площади. Предлагаемый подход основан на построении и последующем интегро-дифференциальной системы (СИДУ): данные о мониторинге фронта заводнения используются для аппроксимации заводненной области выпуклыми четырехугольниками, чьи размеры далее оцениваются с помощью векторного произведения.
6. Разработан программный комплекс для оценки характеристик заводнения (времени $t_{waterbreak}$ начала обводнения и коэффициента $K_{охв}$ охвата по площади) при различных способах взаимной расстановки скважин. В основе программы – реализация предлагаемых в работе математических моделей и метода решения.

5. Практическая ценность

Теоретически значимый результат, полученный в диссертации – новые математические модели и методы решения для плоских квазистационарных задач параболического типа с подвижной границей. Практическая значимость работа связана с апробацией разработанного программного комплекса. Сфера применения программы - предварительное проектирование систем разработки месторождений с использованием заводнения. Возможности программного комплекса обеспечивают проведение качественного и количественного анализа различных способов расстановки скважин. Результаты сравнения могут использоваться в качестве рекомендаций к выбору конечной схемы заводнения.

6. Основные положения, выносимые на защиту

1. Математическая модель и метод решения плоских квазистационарных задач заводнения в двоякопериодической области.
2. Математическая модель мониторинга подвижной границы, основанная на построении связанной системы из сингулярного интегрального и дифференциального уравнений.
3. Методы численного решения интегро-дифференциальной системы.
4. Алгоритм численного нахождения коэффициента $К_{охв}$ охвата по площади.
5. Программный комплекс, предназначенный для проведения качественного и количественного анализа процесса заводнения при различных способах взаимной расстановки скважин.

7. Достоверность результатов

Достоверность результатов, полученных в настоящей диссертационной работе, обеспечивается за счет построения математической модели течения жидкостей на основе общих законов и уравнений механики сплошной среды; тщательностью анализа физических процессов моделируемых явлений; справедливостью используемых упрощений и приближений; сопоставлением результатов проводимых расчетов с известными аналитическими решениями соответствующей задачи, а также - с опубликованными экспериментальными данными сторонних авторов.

8.Апробация работы

Основные результаты проведенного исследования были представлены на XII Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (Сочи-Адлер, 10.2011); XIX международной молодежной научной конференции «Ломоносов-2012» (Москва, МГУ, 04.2012); XIII Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике

(Петрозаводск, 06.2012); IX Международной научно-практической конференции «Ашировские чтения» (Туапсе, 08.2012); XIII европейской конференции по математике в нефтедобыче ECMOR-XIII (Биарритц, 09.2012); Всероссийской молодежной конференции «Лобачевские чтения, 2012» (Казань, 11.2012); Всероссийской научной конференции, посвященной 75-летию д.ф-м. н., проф. Г.И. Быковцева (Самара, 04.2013); 75 конференции EAGE & SPE выставке EUROPEC-2013 (Лондон, 06.2013); XVI Международном симпозиуме МДОЗМФ-2013 (Херсон, 06.2013); X Международной научно-практической конференции «Ашировские чтения» (10.2013); XIX Зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 02.2015) и VI международной конференции по связанным задачам в естественных науках и технике COUPLED PROBLEMS 2015 (Венеция,05.2015). Тексты соответствующих докладов были опубликованы в материалах конференций. Результаты диссертационной работы были представлены в 5 выпусках журналов из перечня ВАК. В ходе исследования был разработан программный комплекс, прошедший регистрацию в Федеральной службе по интеллектуальной собственности. Выполненное диссертационное исследование было поддержано 2 грантами РФФИ 13-01-97008-р_поволжье_а, 14-01-97041-р_поволжье_а.

9. Внедрение

Результаты, полученные в рамках диссертационного исследования, используются в учебном процессе кафедры «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений» ФГБОУ ВПО «СамГТУ», а также - в практике работы ООО «НефтеСтройПроект». Разработанный программный комплекс зарегистрирован в реестре программ для ЭВМ, в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, с получением свидетельства о регистрации №2015610136 от 12.01.2015.

10. Структура и объем работы

Нижеприведенный текст диссертации состоит из введения, 3 глав, заключения и приложений, включающих основные результаты проведенных расчетов. Первая глава носит обзорный характер и включает в себя материалы, посвященные математическим моделям, методам и технологиям, задействованным в проведенном исследовании. Первый параграф включает в себя обзор основных свойств и подробное описание задач с подвижной границей: в частности, здесь указаны их общие черты, а также – представлен пример, на основе которого далее демонстрируется метод их (задач) общего решения, предлагаемый в работе. Второй пункт посвящен двум моделям однофазной совместной фильтрации – «разноцветным жидкостям» и «поршневому вытеснению». Содержание третьего параграфа связано с основными аспектами неустойчивости фронта вытеснения, обусловленной физическими различиями жидкостей: в частности, здесь рассматриваются особенности вязкостной и гравитационной неустойчивостей, а также – опыт их изучения в работах сторонних авторов. Четвертый параграф посвящен обзору сингулярных интегралов (СИ) и опыту их применения: СИ используются в рамках предлагаемого в работе метода общего решения для учета скачка значений $V(z,\bar{z})$ на подвижной границе. Содержание пятого параграфа включает в себя обзор исследований, проведенных с использованием двоякопериодических решеток: первый раздел посвящен решению задач теории упругости, механики композиционных материалов и гидродинамики, второй - применению аппарата двоякой периодичности в задачах заводнения. Наконец, в шестом параграфе представлена технология заводнения, история ее развития, а также – основные свойства и особенности применения: в частности, в данном пункте рассматривается классификация, достоинства и недостатки различных способов расстановки скважин.

Вторая глава посвящена описанию метода общего решения для плоских квазистационарных задач с подвижной границей: при этом предлагаемый в работе подход демонстрируется на примере заводнения в двоякопериодической области, в условиях однофазной фильтрации. В первом параграфе рассматривается аналитическое представление для функции скорости: благодаря свойству слабой сжимаемости, плоской постановке задачи, условиям квазистационарного режима и т.д. было получено выражение, применимое сразу для обеих областей, занятых нефтью и водой. В то же время построенное представление для $V(z,\bar{z})$ не может использоваться на подвижной границе ввиду скачка касательной компоненты вектора скорости. Вопрос об учете данной особенности рассматривается во втором параграфе: здесь же представлена схема построения системы сингулярных интегральных и дифференциальных уравнений (СИДУ) для мониторинга фронта вытеснения. Выражение для $V(z,\bar{z})$ представлено в первом параграфе в общем виде. Для его уточнения при заводнении в двоякопериодической области использовались функции Вейерштрасса. В подробностях данный вопрос рассматривается в третьем параграфе. Четвертый пункт посвящен численным методам решения СИДУ: в частности, сингулярное интегральное уравнение было сведено к системе линейных алгебраических уравнений, а дифференциальное – интегрировалось методами Рунге-Кутты в комплексной плоскости.

Содержание Третьей Главы включает в себя постановку и решение конкретных задач заводнения посредством предложенного в работе метода. При этом рассматриваемые примеры соответствуют двум моделям однофазной фильтрации – «разноцветным жидкостям» и «поршневому вытеснению». Первый параграф посвящен вопросам построения СИДУ в рамках обеих задач, а также - особенностям мониторинга фронта вытеснения в рассматриваемых случаях. Так, благодаря неучету физических различий между водой и нефтью, модель «разноцветных жидкостей» позволяет свести исходную интегро-дифференциальную систему к простой задаче Коши. В то же время, при «поршневом вытеснении» СИДУ сохраняет свой вид, представленный во втором параграфе второй главы. Данные о мониторинге фронта вытеснения используются впоследствии для подсчета числовых характеристик заводнения – таких как время $t_{waterbreak}$ начала обводнения и коэффициент $K_{охв}$ охвата по площади. Способы подсчета $t_{waterbreak}$ и $K_{охв}$ рассматривается во втором параграфе. Третий пункт посвящен подробному описанию созданного в работе программного комплекса: помимо общей характеристики и назначения программы, здесь также рассматриваются ее основные модули и порядок их выполнения. Содержание четвертого параграфа включает в себя анализ используемых в работе численных методов: здесь рассматривается вопрос о сходимости и устойчивости метода решения сингулярного интегрального уравнения, а также - приведена оценка точности для алгоритма подсчета площади, используемого при вычислении $K_{охв.}$ Пятый параграф посвящен проверке достоверности результатов, получаемых при решении обеих задач заводнения: в рамках сравнительного анализа результаты расчетов сопоставлялись с известными аналитическими решениями и данными физических экспериментов из работ сторонних авторов. Последние два параграфа посвящены материалам, полученным в ходе оценки различных способов расстановки скважин при заводнении: расчеты проводились с помощью указанного выше программного комплекса. Шестой и седьмой параграфы включают в себя данные двух вычислительных экспериментов, проведенных в рамках моделей «разноцветных жидкостей» и «поршневого вытеснения».

Текст диссертации содержит 195 страниц машинописного текста, список литературы из 181 наименования, а также – 69 рисунков и 23 графика.

ГЛАВА I

ОБЗОР МАТЕРИАЛОВ, СВЯЗАННЫХ С РЕШЕНИЕМ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ НА ПРИМЕРЕ СОВМЕСТНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

1. Задачи с подвижной границей: основные свойства и примеры

Вопрос об отыскании некоего фронта, разделяющего две физически различные области и перемещающегося со временем, возникает при описании различных динамических процессов: примеры подобных задач можно найти в термодинамике, механике сплошных сред, гидродинамике и т.д. Отличительной особенностью соответствующих математических описаний является наличие некоторой линии, разделяющей исследуемую область Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с различными физическими свойствами: при этом изучаемый процесс описывается уравнениями одного типа, но с различными коэффициентами. Расположенный внутри Ω «фронт» $\Gamma(t)$, разделяющий подобласти Ω_1 и Ω_2, является внутренней подвижной границей, положение которой в каждый момент времени неизвестно: наличие $\Gamma(t)$ предполагает задание не только внешних, но и внутренних граничных условий. Нахождение $\Gamma(t)$ – одна из целей решения задач с подвижной границей, помимо определения некой искомой функции Φ, поведение которой внутри Ω задается известными уравнениями. При этом, ввиду различия физических свойств в подобластях Ω_1 и Ω_2, имеет место скачок значений Φ либо ее производной на $\Gamma(t)$. Ниже представлены три вида задач с подвижной границей, посвящённые вопросам плавления/кристаллизации, диффузии и поршневого вытеснения. Несмотря на различную природу, рассматриваемые процессы во многом схожи, что наглядно демонстрируют их математические описания. Так, во всех трех случаях перемещение подвижного фронта $\Gamma(t)$ обусловлено разницей значений искомой функции (температуры, концентрации или давления) в подобластях Ω_1 и Ω_2. При этом рассматриваемые физические процессы, протекающие внутри Ω, описываются уравнениями параболического типа, а условия на внешней границе задаются в форме Дирихле, Неймана, или смешанного типа. Основное отличие заключается в форме равенств, определяемых на $\Gamma(t)$: тем не менее, как будет показано далее, во всех трех случаях речь идет об условиях с разрывными коэффициентами.

Задача теплопроводности (задача Стефана)

Процесс плавления/кристаллизации под действием притока/оттока тепла может быть описан как фазовый переход с четко выраженной межфазной границей. При этом необходимо отметить ряд важных предположений, используемых в представленной ниже постановке Стефана. Прежде всего, отметим, что исследуемая область представляет собой чистое вещество, без примесей. При этом его агрегатное состояние изменяется только на основе теплопроводности и теплоемкости среды. Наконец, источники тепла, воздействующие на исследуемую область, могут быть как внешними, так и внутренними.

Рассмотрим далее общую постановку классической задачи Стефана для произвольной многомерной области Ω с известной внешней границей S, как показано на рисунке 1. Как можно видеть, внутренний «фронт» $\Gamma(t)$ плавления/кристаллизации разбивает Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2, представляющие, соответственно, твердую низкотемпературную и жидкую высокотемпературную среды.

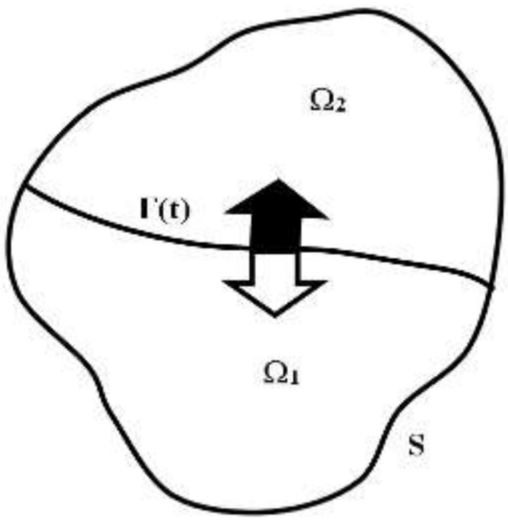


Рисунок 1. Графическая постановка задачи Стефана в общем случае: здесь, в качестве примера, процесс теплопереноса представлен в плоском пространстве, а Ω_1 и Ω_2 указывают, соответственно, на твердую и жидкую среды. Направление движения границы $\Gamma(t)$ обозначено черной стрелкой при кристаллизации и белой – при плавлении.

Математическая постановка задачи включает в себя уравнения для описания теплопереноса, начальные условия для функции температуры, а также - две группы граничных условий, заданных на внутренней и внешней границах. В общем случае процесс плавления/кристаллизации является нестационарным: в связи с этим для его описания используется уравнение теплопроводности с ненулевой и непостоянной производной температуры *T* по времени. Учет физических различий твердой и жидкой фаз осуществляется с помощью характеристик плотности ρ, удельной теплоемкости *c* и коэффициента теплопроводности λ. В результате получаем следующую систему уравнений [95]:

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 c_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial t} = div[\lambda_1(T_1)\nabla T_1], x \in \Omega_1 \\ \rho_2 c_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial t} = div[\lambda_2(T_2)\nabla T_2], x \in \Omega_2 \end{aligned}\right\}.$$

Здесь $x \in R^n$, $T = T(x,t)$, а параметры *c* и λ, в общем случае, предполагаются зависимыми от температуры.

Далее необходимо описать граничные условия, задаваемые на подвижной *Γ(t)*. Физика процесса плавления/кристаллизации предполагает равенство температур на границе обеих фаз некоторой известной температуре фазового перехода. Вторым условием, выполняемым на подвижной границе, является баланс энергии, описываемый т.н. «дифференциальным условием Стефана» [31][145]. Оба указанных равенства представлены ниже:

$$\left.\begin{aligned} & T_1 = T_2 = T_{critical}, x \in \varGamma(t) \\ & -\rho L V_n = [\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}], x \in \varGamma(t) \end{aligned}\right\}.$$

Здесь $T_{critical}$ обозначает температуру фазового перехода, *L* – скрытую теплоту плавления/кристаллизации, а V_n - нормальную компоненту скорости перемещения границы Γ(t).

Говоря об условиях на внешней границе *S*, можно выделить три вида возможных равенств, используемых при постановке конкретных задах:

1. Задание температуры на *S* (условие Дирихле): $T(x,t) = T_{ext}\big|_{x \in s}$;
2. Задание потока тепла, проходящего через внешнюю границу (условие Неймана): $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = g(x), x \in S$;
3. Задание конвективного теплообмена с внешней средой: $-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha\left[T_{ext} - T_s\right], x \in S$.

Отметим, что в последнем случае α указывает на коэффициент конвективного теплообмена, а T_{ext} и T_s, соответственно, - на температуры внешней среды и поверхности, совершающей теплообмен, причем величина T_s полагается неизвестной на момент решения задачи [95]. Также необходимо заметить, что в большинстве случаев граница *S* не является сплошной и может быть разделена на несколько отдельных участков, на каждом из которых используется какое-либо из вышеперечисленных равенств.

Задача диффузии

Описания процессов диффузии и теплопроводности во многом схожи: в обоих случаях можно говорить о фазовом переходе с внутренней подвижной границей, разделяющей физически различимые области. Основное отличие заключается, как было сказано ранее, в постановке граничных условий на подвижном фронте, что будет продемонстрировано далее.

Рассмотрим процесс взаимной диффузии в бинарной системе из двух различных твердых фаз Ω_1 и Ω_2. Здесь, как и в случае с задачей Стефана, будем обозначать неизвестную подвижную границу как *Г(t)*, а известную внешнюю - как *S*. Отметим, что для сохранения общности размерность пространства не конкретизируется. Представленная геометрия процесса во многом схожа с описанием, использованным ранее, при общей постановке задачи Стефана: таким образом, для схематического изображения области Ω, объединяющей фазы Ω_1 и Ω_2, можно использовать рисунок 1.

Аналогично задаче Стефана, для математического представления совместной диффузии необходимо описать поведение искомой функции концентрации в областях Ω_1 и Ω_2, а также – задать условия на подвижной *Г(t)* и внешней *S* границах. Поскольку в общем случае диффузионный процесс не является стационарным, для его описания следует использовать уравнения параболического типа. Изменение концентрации в областях, занятых различными твердыми фазами, может быть представлено вторым уравнением Фика [29]:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial t} &= D_1 div[\nabla C_1], x \in \Omega_1 \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} &= D_2 div[\nabla C_2], x \in \Omega_2 \end{aligned}\right\}.$$

Здесь D_1 и D_2 обозначают коэффициенты диффузии, различные для Ω_1 и Ω_2, а C_1 и C_2 – концентрацию атомов, участвующих в процессе диффузии, в соответствующих фазах. Отметим, что по аналогии с предыдущей задачей, $x \in R^n$, $C_1 = C_1(x,t)$, $C_2 = C_2(x,t)$.

Рассмотрим далее граничные условия, выполняемые на подвижном фронте *Г(t)*. Основное отличие процесса диффузии от теплопереноса заключается в потере непрерывности функции концентрации при прохождении через неизвестную подвижную границу. В результате *C(x,t)* испытывает скачок значений на *Г(t)*, что выражается нижеприведенными равенствами [29][157]:

$$\left.\begin{aligned} &C(x,t) = C_a, x \in \Gamma(t) - 0 \\ &C(x,t) = C_b, x \in \Gamma(t) + 0 \\ &[C_b - C_a]V_n = [D_1 \frac{\partial C_1}{\partial n} - D_2 \frac{\partial C_2}{\partial n}], x \in \Gamma(t) \end{aligned}\right\}.$$

Аналогично задаче Стефана, V_n указывает на нормальную компоненту скорости перемещения *Г(t)*.

В довершение требуется указать граничные условия, выполняемые на *S*. В случае с задачей диффузии необходимо указать отсутствие притока вещества извне рассматриваемой бинарной системы. Для этих целей следует использовать условия Неймана:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial C_1}{\partial n} = 0, x \in S \\ \dfrac{\partial C_2}{\partial n} = 0, x \in S \end{array}\right\}.$$

Задача о поршневом вытеснении

Вопрос о совместной фильтрации жидкостей и газов также предполагает существование некоторого фронта, разделяющего движущиеся фазы: при этом в общем случае граница раздела различных сред не является четкой. Основным допущением, принятым в поршневой модели, является отсутствие области смешанных жидкостей/газов на стыке движущихся фаз. В результате фронт вытеснения представляется четким, а процесс совместной фильтрации может рассматриваться в качестве задачи с подвижной границей.

Рассмотрим в общем виде совместное течение двух физически различных фаз в твердой пористой среде, в рамках поршневой модели. Аналогично предыдущим случаям будем полагать внешнюю границу *S* исследуемой области Ω известной. При этом подобласти Ω_1 и Ω_2, соответственно, представляют собой физически различные фазы, контактирующие друг с другом через внутренний подвижный фронт *Г(t)*. Отметим, что в случае совместной фильтрации источником движения служит разность давлений в Ω_1 и Ω_2, порождаемая либо притоком жидкости/газа извне, либо – работой добывающих и нагнетательных скважин. Исходя из всего вышесказанного, можно заключить, что графическая постановка задачи принципиально не отличается от таковой для рассмотренных ранее примеров: таким образом, для представления геометрии исследуемой области Ω можно воспользоваться рисунком 1.

Аналогично предыдущим задачам, для описания процесса фильтрации, в общем случае нестационарного, используется уравнение параболического типа. Отметим также, что в рассматриваемой постановке жидкости/газы и твердая пористая среда полагаются сжимаемыми, что и обеспечивает не стационарность процесса. Изменение давления *P* в подобластях Ω_1 и Ω_2 описывается уравнениями пъезопроводности, как показано ниже [45]:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P_1}{\partial t} = \chi_1 \Delta P_1, x \in \Omega_1 \\ \frac{\partial P_2}{\partial t} = \chi_2 \Delta P_2, x \in \Omega_2\end{aligned}\right\}.$$

Здесь $\chi = \dfrac{k}{\mu(\beta_s + \beta_l m)}$ - коэффициент пьезопроводности, k – проницаемость исследуемой области *Ω*, μ - вязкость выбранной фазы, β_s и β_l – коэффициенты сжимаемости твердой породы и жидкостей (газов) соответственно, m – пористость *Ω*. Также отметим, аналогично предыдущим случаям, что $x \in R^n$, $P = P(x,t)$. Представленные выше уравнения пьезопроводности были получены на основе условия неразрывности и линейного закона фильтрации Дарси, а также – зависимости давления от плотности. Отметим, что в постановках некоторых задач о поршневом вытеснении сжимаемость жидкостей/газов и твердой породы игнорируется, что приводит к стационарному характеру фильтрации: в таком случае представленная выше система будет составлена однородными уравнениями Лапласа, записанными для подобластей Ω_1 и Ω_2.

Далее следует обратить внимание на условия, задаваемые на подвижном фронте вытеснения *Г(t)*. Прежде всего, необходимо обеспечить сплошность потока через *Г(t)*, что можно выразить равенством нормальных компонент скорости фильтрации: последние представляются через производные давления по нормали с сомножителями, определяемыми из линейного закона Дарси. Второе условие зависит от исходных допущений, принимаемых в задаче: при учете поверхностного натяжения давление терпит разрыв на подвижной границе и сохраняет непрерывность в противном случае. Рассмотренные варианты условий представлены ниже:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial P_1}{\partial n} = \frac{k}{\mu_2}\frac{\partial P_2}{\partial n}, x \in \Gamma(t) \\ &P_1 = P_2, x \in \Gamma(t) \\ &\text{или} \\ &P_1 - P_2 = \sigma\left|\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right|, x\Gamma(t)\end{aligned}\right\}.$$

Здесь σ обозначает коэффициент поверхностного натяжения, а $\left|\dfrac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right|$- кривизну поверхности фронта *Г(t)*.

В довершение требуется также указать условия, выполняемые на внешней границе *S*. Заметим, что в общем случае область *Ω* может моделировать как открытый, так и замкнутый резервуар: в зависимости от исходных предположений приток жидкости/газа извне может отсутствовать или, наоборот - иметь место и оказывать влияние на давление. Наконец, само *P* на внешней границе может быть принято постоянным и известным. Таким образом, аналогично задаче Стефана, при поршневом вытеснении возможны несколько вариантов граничных условий, определяемых на *S*:

1. Задание давления (условие Дирихле): $P(x,t) = P_{ext}\big|_{x\in S}$;
2. Задание притока жидкости/газа через внешнюю границу или указание на его (притока) отсутствие (условия Неймана):

$$\left.\begin{aligned} \frac{k}{\mu_1}\frac{\partial P_1}{\partial n} = V_n^{(1)}, x\in S \\ \frac{k}{\mu_2}\frac{\partial P_2}{\partial n} = V_n^{(2)}, x\in S \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial n} = 0, x\in S \\ \frac{\partial P_2}{\partial n} = 0, x\in S \end{aligned}\right\}.$$

Здесь P_{ext} указывает на постоянное значение давления, действующего на внешней границе, а $V_n^{(1)}$ и $V_n^{(2)}$ - на нормальные компоненты вектора скорости, с которой жидкости/газы поступают через *S* в соответствующие подобласти или покидают их. Напоследок также отметим, что возможно задание смешанных условий на границе *S*.

Рассмотренные в параграфе задачи имеют много общего в своих математических постановках и могут быть решены с использованием предлагаемого в настоящей работе метода, с учетом основных допущений:

1. Область Ω представляется в двумерном пространстве $x \in R^2$;
2. Процесс теплопереноса, диффузии, фильтрации и т.д. рассматривается при квазистационарном режиме, т.е. $\frac{\partial F}{\partial t} = Const$, где *F(x,y,t)* – искомая функция.

Отметим, что в рамках настоящей работы предлагаемый метод решения плоских квазистационарных задач с подвижной границей демонстрировался на примере совместной фильтрации жидкостей с различными, в общем случае, вязкостями. При этом исследуемая область *Ω* полагалась однородной и бесконечной, разрабатываемой сложной системой добывающих и нагнетательных скважин: геометрия взаимного расположения последних являлась одним из основных варьируемых параметров.

2. Однофазные модели совместной фильтрации нефти и воды

2.1. Модель «разноцветных жидкостей»

Модель «разноцветных жидкостей» - идеализированное представление о совместном течении нефти и воды, обеспечивающее простоту и аналитичность решений задач, посвященных совместной фильтрации. Основателем указанной модели является С.П.Герольд: в начале 30-х гг. XX в. ученый предложил считать физические свойства нефти и воды равными, что позволяло сильно упростить решение, вообще говоря, математически сложных задач и получить некоторое представление о виде границы водонефтяного контакта[1] (ВНК) и ее эволюции в процессе течения.

Подобными исследованиями занимались М.Маскет [83], О.В.Голубева [38] [103], В.Н.Щелкачев [131], А.М.Пирвердян [100], К.С.Басниев [23] и др. Ими были рассмотрены различные задачи о совместной фильтрации нефти и воды, среди которых: приток нефти к единичной скважине под напором воды в случае, когда границы фаз являются концентрическими окружностями или имеют произвольную форму; продвижение линейного водяного контура к единичной скважине; течение между двумя разнонаправленными скважинами и т.д. В своих исследованиях авторы смогли избежать численного решения поставленных вопросов: отказываясь от учета физических свойств жидкостей, исследователи получили решения задач в конечном виде, добившись аналитического представления «выходных» формул для расчета различных характеристик процесса, таких как дебит[2] добывающей скважины, время безводного периода эксплуатации[3] и т.д.

Идея «разноцветных жидкостей» описывалась и применялась рядом исследователей [39] [71] [96] [124] в качестве первичного и простейшего модельного представления при изучении вопросов о вытеснении нефти. В то же время данная модель использовалась в качестве полноценного описания совместной фильтрации при решении ряда задач в искривленных и наклонных пластах [57] [58]. Наконец, представление о «разноцветных жидкостях» использовалось при проведении численного [150] и физического [101] экспериментов.

---

[1] ВНК - поверхность, разделяющая в залежи нефть и пластовую воду. Как правило, данная поверхность является горизонтальной, но может быть и наклонной (см. [36]).

[2] Под дебитом обозначается объём жидкости (воды, нефти) или газа, поступающий в единицу времени из естественного или искусственного источника: под последним в данной работе следует понимать скважину (см. [42]).

[3] Период эксплуатации месторождения, при котором через добывающие скважины получают практически чистую нефть: в дальнейшем, по мере увеличения объема закачанной в пласт воды, последняя извлекается на поверхность вместе с нефтью (см. [50]).

Рассмотрим основные особенности указанной модели, а также точные выражения для определения ряда важных характеристик процесса фильтрации на примере простейших видов течения: прямолинейного одномерного и плоского радиального. Допущения о физической неразличимости нефти и воды [97] и отсутствие области смешанных жидкостей предполагает резкость водонефтяного контакта, а также – непрерывность линий тока, указывающих направление течения. В действительности, вопрос о совместной фильтрации воды и нефти сводится к отслеживанию перемещений первоначальной границы их раздела в области, занятой фактически только одной жидкостью (например, водой): следовательно, функции скорости и давления сохраняют непрерывность (что обеспечивает и непрерывность линий тока) на протяжении всего процесса вытеснения. Совокупность условий, выполняющихся на водонефтяном контакте (совпадающем в данном случае с фронтом заводнения и границей раздела вода-нефть), представлена ниже:

$$\left.\begin{aligned} V_t^{oil} &= V_t^{water}; \\ V_n^{oil} &= V_n^{water}; \\ P^{oil} &= P^{water}. \end{aligned}\right\}$$

Здесь V_t^{oil}, V_n^{oil} и P^{oil} указывают на касательную и нормальную компоненты скорости фильтрации, а также на давление со стороны нефти (*oil*): аналогичные обозначения используются и для указанных характеристик со стороны воды (*water*).

Рассмотрим случай плоского одномерного течения к галерее скважин в горизонтальном пласте мощности (толщины) h и протяженности L: при этом совместная фильтрация воды и нефти подчиняется линейному закону Дарси и описывается моделью «разноцветных жидкостей». Положение границы раздела вода-нефть отмечено переменной x. Способ вытеснения нефти будем считать водонапорным, что соответствует условиям одного из первичных (рассмотрены в предыдущем параграфе) режимов эксплуатации месторождения или же - применению заводнения: мощность (дебит) потока Q примем постоянной, как и депрессию давлений $\Delta P = P_1 - P_2$, причем $P_1 > P_2$, где P_1 и P_2 – давления на контуре питания и на галерее скважин соответственно. Рисунок 2 демонстрирует графическую постановку задачи: на изображении представлено горизонтальное сечение одномерного плоского потока плоскостью XY. Отметим также, что пласт полагается однородным и изотропным, с пористостью m, а жидкость – однородной несжимаемой. Совместное течение нефти и воды направлено от контура области питания к галерее скважин: при этом x_0 указывает на начальное положение границы раздела жидкостей.

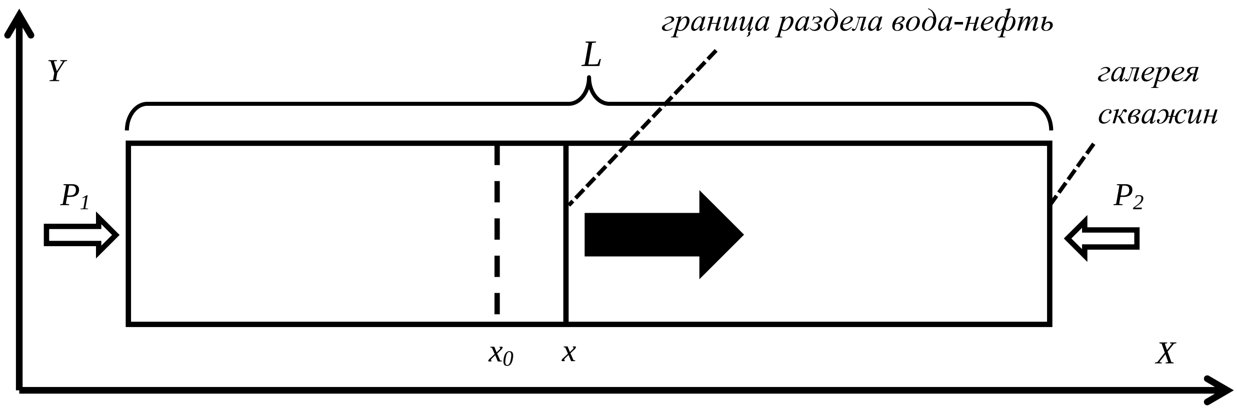


Рисунок 2. Графическая постановка задачи о плоском одномерном течении воды и нефти в рамках модели «разноцветных жидкостей».

Отметим также, что приведенные ниже формулы для расчета давления и скорости фильтрации справедливы для любой точки области, занятой водой и «нефтью», ввиду их физической неразличимости.

Ниже представлены выражения для функций скорости V и давления P на границе раздела вода-нефть (ВНК), выведенные на основе закона Дарси при постоянных значениях дебита и депрессии ΔP [131]:

$$P = P_1 - \frac{\Delta P}{L} x; \quad V = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta P}{L}.$$

Здесь k и μ обозначают проницаемость[4] пласта и вязкость[5] жидкости соответственно. Используя вышеприведенные формулы [124], получим уравнение для отслеживания перемещений частиц жидкости на границе раздела вода-нефть:

$$x = x_0 + \frac{k}{m\mu} \frac{\Delta P}{L} t.$$

Аналогичным образом можно описать основные характеристики радиального плоского течения: графическое изображение (вид сверху) новой задачи приведено на рисунке 3.

---

[4] Проницаемость - способность горных пород пропускать через себя жидкости и газы. Отметим, что здесь и далее под k понимается коэффициент проницаемости пористой среды, входящий в линейный закон фильтрации Дарси (см. [131]).

[5] Вязкость - внутреннее трение, свойство текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление перемещению одной их части относительно другой (см. [30]). Здесь и далее под μ обозначен коэффициент динамической вязкости - показатель, равный отношению напряжения, вызывающего сдвиг соседних слоев жидкости или газа, к скорости этого сдвига (см. [133]).

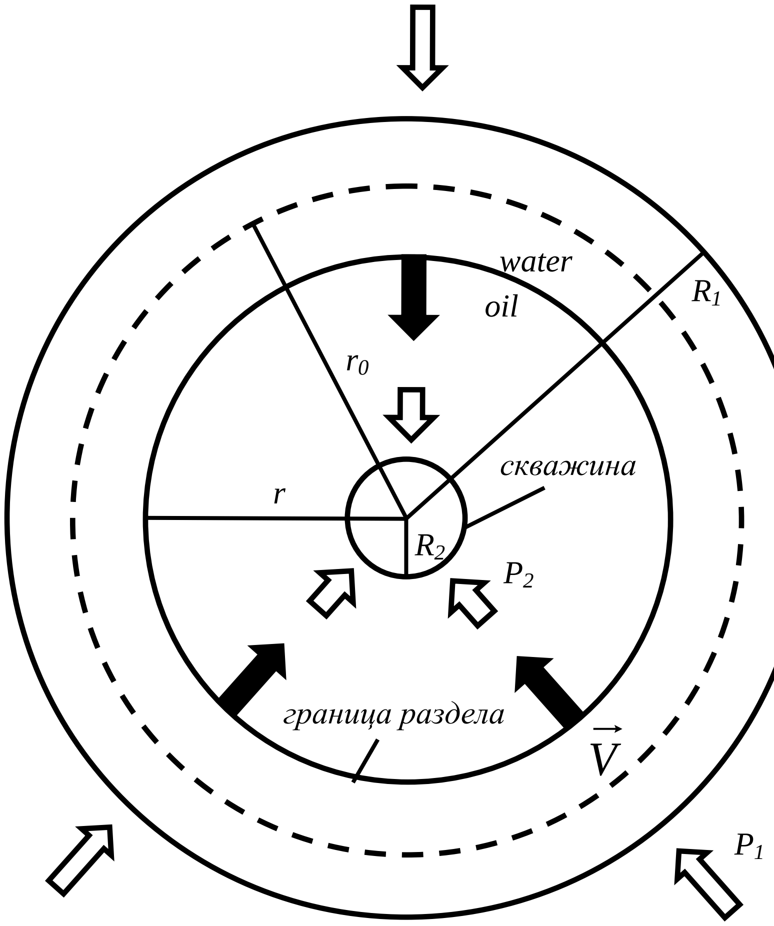


Рисунок 3. Графическая постановка задачи о плоском радиальном течении воды и нефти в рамках модели «разноцветных жидкостей».

Здесь R_1 и R_2 обозначают, соответственно, радиусы области питания добывающей скважины (с дебитом Q) и ее призабойной зоны. Переменная r указывает на радиус всех точек, образующих границу раздела вода-нефть. Все прочие условия и обозначения рассмотрены выше для предыдущего случая. С учетом видоизмененной постановки задачи некоторые изменения также затрагивают выражения для определения скорости фильтрации и давления [131]:

$$P = P_1 - \frac{\Delta P}{\ln\frac{R_1}{R_2}} \ln\frac{R_1}{r}; \qquad V = \frac{k}{\mu} \frac{\Delta P}{\ln\frac{R_1}{R_2}} \frac{1}{r}.$$

Для отслеживания перемещений границы раздела вода-нефть в исследуемой области можно воспользоваться следующим уравнением, аналогично случаю горизонтального плоского одномерного течения:

$$t = \frac{m\mu \ln\frac{R_1}{R_2}}{2k\Delta P} (r^2 - r_0^2).$$

Как было сказано ранее, рассматриваемая модель вытеснения нефти водой применялась в ряде работ в качестве как «первого приближения» и простейшего примера, так и средства описания совместной фильтрации при решении некоторых задач. В своих публикациях О.В.Голубева [38] [103] решала проблему отслеживания ВНК во времени посредством решения обыкновенных дифференциальных уравнений относительно физических координат точек на границе раздела вода-нефть: при этом исследователь использовала метод первых интегралов для еще большего упрощения конечных формул. В результате исследователями было получено параметрическое представление границы раздела жидкостей, проведен сравнительный анализ стационарного и квазистационарного случаев, а также рассмотрены задачи вытеснения нефти законтурной водой к одиночной скважине при круговом и произвольном ВНК (совпадающим с границей раздела и фронтом вытеснения, как было сказано ранее). В своих работах Б.Э.Казарновская и П.Я.Полубаринова-Кочина также использовали представление о «разноцветных жидкостях»: при этом авторами рассматривались вопросы вытеснения нефти водой в изогнутых пластах, в промежутках между концентрически расположенными цилиндрами и полусферами [58], а также - в плоской полосе, слабо наклоненной к горизонту [57].

Модель «Разноцветных жидкостей» применялась некоторыми исследователями при проведении физических и численных экспериментов. Так, в работе [101] авторы изучали поведение ВНК при стягивании изначально круговой области, занятой «нефтью» (в качестве которой использовалась вода), к расположенной в центре скважине при водонапорном режиме. В рамках описанного эксперимента также изучалось влияние неоднородности пласта на характер течения: область модели, первоначально занятая «нефтью», разбивалась на две зоны различной проницаемости, соотношения которых варьировались в рамках серии опытов, после чего результаты обрабатывались статистическими методами. Работа [150] посвящена применению численных методов к решению задачи о плоской совместной фильтрации нефти и воды: в качестве области исследования авторы использовали пятиточечную схему заводнения. Для описания совместной фильтрации воды и нефти использовались как одно- («разноцветные жидкости») так и двухжидкостные (двухфазные) системы: при этом численные методы применяются для расчета параметров в обоих видах моделей.

В довершение отметим исследование вопроса о влиянии вязкостей воды и нефти на процесс их совместного течения. Одним из первых этой проблемой занялся В.Н.Щелкачев [129]: вводя физические параметры жидкостей в основные уравнения задачи о продвижении ВНК, автор получил более точное представление о процессе совместного течения нефти и воды. Итоговые выражения сравнивались исследователем с формулами, полученными М.Маскетом [84] с применением модели «разноцветных жидкостей»: в результате Щелкачев установил ошибочность оценок своего предшественника о влиянии различия в вязкостях нефти и воды на время безводной эксплуатации добывающей скважины.

2.2. Модель «поршневого вытеснения»

Модель поршневого вытеснения – следующий этап после «разноцветных жидкостей» на пути к усложнению представления о совместной фильтрации нефти и воды, а также его приближения к реалиям нефтедобычи: несмотря на сохранение большинства особенностей и допущений «предшественницы», данная модель позволяет учесть физические различия фильтрующихся фаз и, таким образом, исследовать влияние этих различий на процесс совместного течения. Аналогично «разноцветным жидкостям» в основе идеи поршневого вытеснения лежит предположение о полном вытеснении нефти водой [97], в результате чего граница раздела Γ представляется резкой [93] [121]: также в неизменном виде сохраняются условия равенства давления и нормальных компонент скорости фильтрации для нефти и воды на Γ. В то же время модель поршневого вытеснения отличается особенностью, заметно усложняющей решение задач о продвижении границы раздела во времени. Учет физических различий жидкостей приводит к разрыву касательной компоненты скорости фильтрации на Γ: в результате линии тока, вдоль которых движутся частицы воды и нефти, терпят излом на границе раздела [125], из-за чего предсказать их вид заранее невозможно. Таким образом, вопрос о продвижении Γ во времени и пространстве сводится к задаче с неизвестной границей, решение которой в большинстве случаев невозможно аналитически. Тем не менее, к настоящему моменту широко известны две возможные постановки, допускающие точное определение закона движения Γ: плоскопараллельное и радиальное вытеснение нефти водой. Малая размерность пространства, в котором ведется поиск решения, позволяет исключить влияние разрыва касательной компоненты скорости, в результате чего возможно аналитическое определение всех требуемых характеристик процесса фильтрации, включая давление, скорость, дебит, а также – закон движения границы раздела вода-нефть. Плоскопараллельное и радиальное вытеснение нефти водой описано многими авторами (см., например, [22] [24] [50] [131]) и может быть использовано в познавательных целях, а также в качестве «эталонов» при оценке точности приближенных методов решения более сложных задач, неразрешимых аналитически. Указанные виды совместного движения жидкостей рассмотрены ниже: аналогично предыдущему параграфу 2.1 в данном случае будут приведены выражения для оценки величин давления и скорости фильтрации на ВНК, а также – закон его (ВНК) продвижения во времени.

При плоском одномерном горизонтальном течении условия задачи во многом аналогичны рассмотренным в предыдущем параграфе. Нефтеносный пласт также полагается однородным и изотропным, толщины h и протяженности L, с пористостью m и проницаемостью k: при этом фильтрующиеся жидкости считаются однородными и несжимаемыми, а их течение подчиняется линейному закону Дарси. Давления P_1 и P_2 на контуре питания и на галерее скважин примем постоянными, как и депрессию $\Delta P = P_1 - P_2$. Поставленная задача графически изображена на рисунке 2: напомним, что рамках модели «поршневого вытеснения» нефть и вода представляют собой физически различимые жидкости, причем в данном случае учет этого различия обеспечивается через величину вязкости μ.

Основываясь на ранее выведенной формуле для давления P и применяя ее раздельно для областей, занятых нефтью (oil) и водой (water), в результате можно получить выражение для давления P_{wo} на границе раздела вода-нефть [131]:

$$P_{wo} = \frac{P_1 \mu^{oil}(L-x) + P_2 \mu^{water} x}{\mu^{oil}(L-x) + \mu^{water} x}.$$

Отсюда, применяя линейный закон фильтрации и принимая во внимание равенство $V^{water} = V^{oil}$ для плоского горизонтального одномерного случая, получим выражение для скорости фильтрации на границе раздела вода-нефть:

$$V = \frac{k \Delta P}{\mu^{oil}(L-x) + \mu^{water} x}.$$

Здесь μ^{water} μ^{oil} обозначают вязкости воды и нефти соответственно. Применяя далее вышеприведенные формулы и соотношение Кельвина, получим уравнение для отслеживания перемещений частиц жидкости на границе раздела вода-нефть:

$$x = \frac{\mu^{oil}}{\mu^{oil} - \mu^{water}} L - \sqrt{\left(\frac{\mu^{oil}}{\mu^{oil} - \mu^{water}} L - x_0\right)^2 + \frac{2k\Delta P}{m(\mu^{oil} - \mu^{water})} t}.$$

Рассмотрим далее плоское радиальное вытеснение нефти водой, также в аналогии с предыдущим параграфом. Подобно предыдущему случаю, применение модели «поршневого вытеснения» приводит к необходимости учета физических различий нефти и воды (в данном случае через значения вязкостей μ^{water} и μ^{oil}). При этом все прочие условия задачи остаются неизменными: ее графическая постановка изображена на рисунке 3.

Пользуясь формулами, выведенными ранее для случая «разноцветных жидкостей», и рассматривая в отдельности течение в областях, занятых нефтью и водой, можно получить (основываясь на равенстве скоростей нефти и воды на ВНК или границе их раздела) следующее выражение для давления P_{wo} на границе раздела вода-нефть [131]:

$$P_{wo} = \frac{P_1 \mu^{oil} \ln \dfrac{r}{R_2} + P_2 \mu^{water} \ln \dfrac{R_1}{r}}{\mu^{oil} \ln \dfrac{r}{R_2} + \mu^{water} \ln \dfrac{R_1}{r}}.$$

Пользуясь ходом рассуждений, аналогичным предыдущему случаю, нетрудно получить и выражение для скорости фильтрации *V*:

$$V = \frac{k\Delta P}{\mu^{oil} \ln \dfrac{r}{R_2} + \mu^{water} \ln \dfrac{R_1}{r}} \frac{1}{r}.$$

Наконец, для отслеживания перемещений границы раздела вода-нефть (через переменную *r* ее радиуса) можно воспользоваться следующим уравнением:

$$t = \frac{m}{2k\Delta P}\left[(\mu^{water} \ln R_1 - \mu^{oil} \ln R_2 - \frac{\mu^{oil} - \mu^{water}}{2})(r_0^2 - r^2) + (\mu^{oil} - \mu^{water})(r_0^2 \ln r_0 - r^2 \ln r)\right].$$

Несмотря на то, что в рассмотренных простейших случаях значения скорости воды и нефти совпадали на границе раздела жидкостей, в общем случае это свойство не выполняется: при более сложном характере совместного течения касательные компоненты V_t^{oil} и V_t^{water} скорости терпят разрыв на ВНК [110], в результате чего функция *V* теряет непрерывность. В то же время значения давления P^{water} и P^{oil} со стороны нефти и воды, а также нормальные компоненты V_n^{oil} и V_n^{water} скорости остаются равными на границе раздела жидкостей. Совокупность перечисленных условий представлена ниже:

$$\left.\begin{aligned} V_n^{oil} &= V_n^{water}; \\ P^{oil} &= P^{water}. \end{aligned}\right\}$$

Далее следует также указать равенство, выполняющееся для касательных компонент скорости. Используя закон Дарси, записанный для величин V_t^{water} и V_t^{oil}, а также непрерывность функции давления на границе раздела жидкостей, получим:

$$\mu^{oil} V_t^{oil} = \mu^{water} V_t^{water}.$$

Модель поршневого вытеснения находит широкое практическое применение, прежде всего, в вопросах о продвижении границы раздела вода-нефть [70] [112] [127] и оценке эффективности процессов заводнения нефтяных месторождений [148] [153] [168] [180]: при этом исследователей интересуют влияние коэффициента подвижности M[6] на значения различных показателей разработки месторождения ($K_{охв}$ [7], история нагнетания воды, время начала обводнения добывающих скважин и пр.) сравнение эффективности заводнения для различных способов расстановки скважин, влияние межфазного натяжения и т.д. Тем не менее, необходимо отметить известный недостаток модели поршневого вытеснения: ввиду предположения о резкости границы раздела вода-нефть, в данном представлении невозможно учесть смешанную область, в которой одновременно движутся обе жидкости [104]. Модели, учитывающие присутствие нефте-водосодержащего участка, называются моделями многофазной фильтрации: их использование предполагает значительные сложности при постановке и решении задач, часто исключая возможность точного решения.

Помимо решения задачи о продвижении границы раздела вода-нефть некоторые авторы рассматривают вопрос ее (границы) устойчивости и указывают на ряд факторов, влияющих на искривление фронта вытеснения. Так, в своей книге [22] К.С.Басниев исследует совместное движение нефти и воды в наклонном пласте: указывая на искривление границы раздела, обусловленное действием силы тяжести, автор представляет формулы для оценки устойчивости фронта вытеснения, основанные на связи разности скоростей фильтрации жидкостей с углом наклона пласта и рядом других величин. Также в своей работе [24] К.С.Басниев исследует вопрос об образовании конуса подошвенной воды и оценке безводного дебита скважины для предельного состояния этого конуса. Проблема устойчивости границы раздела вода-нефть также была вкратце рассмотрена В.Н.Щелкачевым [131]: в своей работе автор описал влияние разницы в вязкостях нефти и воды на вид фронта вытеснения, указав при этом на эффект образования «водных языков», которые, после формирования, стремительно продвигаются вперед, опережая соседние участки фронта.

За исключением рассмотренных простейших случаев, в которых все необходимые характеристики процесса фильтрации определяются аналитически, модель поршневого вытеснения применялась и для представления совместного движения нефти и воды при более сложных условиях. Так, в работе [127] рассматривалась задача о продвижении нефти к цепочке часто расположенных равноудаленных скважин, приближенно считаемых галереей, в

---

[6] В общем случае данный коэффициент определяется как отношение подвижности одного флюида (воды, нефти и т.д.) относительно другого. Соответствующая формула выглядит так: $M = \dfrac{\mu^{oil} k^{water}}{\mu^{water} k^{oil}}$, где k^{water} и k^{oil} – эффективные (фазовые) проницаемости воды и нефти соответственно – проницаемости отдельно взятых флюидов, когда число фаз, присутствующих в породе, больше единицы (см. [119]).

[7] $К_{охв}$ или E_a – коэффициент охвата по площади: данный параметр представляет собой отношение площади, охваченной воздействием заводнения, к площади всего заводняемого участка (см. [119]).

однородном горизонтальном пласте: при этом вытеснение осуществлялось законтурной водой и происходило согласно поршневому принципу. Основной целью автора стало определение формы комплексного потенциала скорости фильтрации в зонах, занятых водой и нефтью, для ряда возможных положений границы раздела жидкостей: случая расположения $Г$ на определенном расстоянии от галереи скважин; соприкосновения $Г$ с каждой из скважин в одной точке; а также – случай прорыва законтурной воды в скважины галереи с последующим отбором водонефтяной смеси. Используя методику П.Я.Полубариновой-Кочиной, включающей конформные отображения, автор разрешил поставленную задачу в комплексной плоскости: при этом исследователь учитывал размеры скважин галереи.

Другая работа [112] также относится к группе задач об определении положения границы раздела в произвольный момент времени: полагая нефтеносный пласт плоским и бесконечным и используя модель поршневого вытеснения, авторы осуществляли мониторинг фронта вытеснения, учитывая при этом разницу в удельных весах жидкостей и межфазное натяжение. В своих изысканиях исследователи использовали технику интегро-дифференциальных уравнений, а итоговое решение искали в виде ряда. При этом авторы смогли аналитически описать закон перемещения границы раздела жидкостей для случая ее (границы) выравнивания, близкой к прямой, под действием различия удельных весов и межфазного натяжения.

Пространственная осесимметрическая задача мониторинга фронта вытеснения [70] исследовалась в работе при стягивании нефтенасыщенной области к точечному стоку: для ее (задачи) решения вначале строилось нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, а итоговые формулы для определения положения границы раздела в произвольный момент времени выводились посредством эвристических приемов (неполная индукция, аналогия). Для проверки точности авторы сравнивали полученные результаты с данными известных точных решений и итогами численных расчетов, основанных на использовании метода конечных разностей.

Применению поршневой модели в задачах заводнения месторождений также посвящен ряд работ. Так, в [153] авторы описали и предложили метод оценки коэффициента охвата по площади и истории закачки воды при заводнении пластов, разрабатываемых различными схемами расстановки скважин: коэффициент подвижности при этом полагался отличным от единицы, а неоднородность по проницаемости пласта предполагалось учитывать посредством принципа слоистой суперпозиции М.Пратса. Для оценки точности авторы использовали данные численных расчетов, выполненных для многофазных систем.

Вопрос о влиянии коэффициента подвижности, отличного от единицы, на эффективность процесса заводнения, рассматривался и в работе [180]. Для сравнительной оценки эффективности пятиточечной и шахматной схем расстановки скважин авторы проели компьютерную симуляцию экспериментов, ранее проведенных А.Диесом [149]: при этом исследователи использовали модель поршневого вытеснения, а нефтеносный пласт полагали однородным. Результатами вычислений стали серии картин заводненной области и линий тока, а также графики изменения $K_{охв}$, на основе которых авторы и обсуждали вопрос о влиянии коэффициента подвижности на эффективность процесса заводнения для выбранных схем расстановки скважин.

Пятиточечная схема стала объектом исследования и в работе [168]: здесь авторами была предложена новая модель продвижения границы раздела воды и нефти, основанная на идее о трубках тока с одинаковыми проницаемостями, но различной геометрией. Вопрос о мониторинге фронта вытеснения разрешается для каждой трубки независимо от других, после чего все результаты суммируются: граница раздела образуется положением частиц жидкостей во всех трубках токах в один момент времени. Модель, предложенная авторами, может быть использована для оценки таких характеристик заводнения, как $K_{охв}$ и время прорыва воды в добывающие скважины: при этом исследователи задействовали модели как однофазного (поршневая), так и двухфазного вытеснения.

Наконец, вопрос мониторинга фронта вытеснения рассматривался в работе [148]: полагая нефтеносный пласт плоским и однородным, а вытеснение – происходящим по поршневому принципу, автор исследовал продвижение границы раздела воды и нефти для различных конфигураций скважин, включая т.н. «задачу Маскета» для одной и четырех добывающих скважин, а также – элемент пятиточечной схемы заводнения. Отличительной особенностью предлагаемого подхода является использование метода дискретных вихрей для учета разрыва касательной компоненты скорости на фронте вытеснения: результаты расчетов сравнивались с аналитическими решениями и итогами физических экспериментов.

3. Проблема неустойчивости фронта вытеснения нефти водой

Проблема возникновения «вязких пальцев» на границе раздела двух совместно фильтрующихся фаз – многогранная и сложная задача: впервые поставленная в середине XX в., она «прошла» долгий путь становления и развития, обзаведясь собственной теоретической и экспериментальной базой исследований. Задача о нарушении гладкости фронта вытеснения неразрывно связана с вопросом о совместной фильтрации двух фаз и также остается актуальной в наше время. В частности, «пальцы», возникающие на границе фронта заводнения изучаются с целью повышения нефтеотдачи при разработке пластов, содержащих высоковязкую нефть. Однако различия в вязкости вытесняемого и вытесняющего веществ далеко не исчерпывают возможные источники нестабильности: в действительности т.н. «вязкие пальцы» представляют лишь частный случай более общей проблемы.

Вопрос о неустойчивости границы раздела двух фильтрующихся фаз имеет богатую историю исследований: на протяжении более чем полувека исследователи изучали природу «пальцев», определяли характер поведения и выискивали зависимость геометрических параметров от различных характеристик самого процесса течения. Теоретические исследования (к примеру, [142] [143]), рассматривавшие в качестве области фильтрации в первую очередь ячейку Хеле-Шоу, чередовались с численным моделированием [52] [144] [171], а также физическими экспериментами [136] [167] [154]. В результате сопоставления результатов из разных источников были неоднократно замечены серьезные расхождения в итоговых данных [166] [172]: последнее обстоятельство стимулировало исследователей создавать более сложные и детальные представления о совместной фильтрации двух фаз в попытках предсказать поведение «пальцев». Исследовательский материал, накопленный за годы изучения вопроса, включает в себя множество возможных «конфигураций» решаемых задач. Так, помимо исследуемой многими неустойчивости вида «Сафмана -Тэйлора» [142] [158] [166], обусловленной разницей в вязкостях фильтрующихся фаз, интерес у авторов также вызывает и нестабильность вида «Рэйли-Тэйлора» [151], порождаемая действием гравитационных сил. Что же касается области течения, в этом качестве, как правило, рассматривается ячейка Хеле-Шоу, имеющая геометрию круга (см. например [83]) или полосы [52] [172], а также четвертинка одиночного элемента пятиточечной схемы заводнения [155]. Наконец, помимо широко распространенных допущений об однородности зоны фильтрации, изучению подвергаются также и анизотропные случаи [134] [154]. Кроме того, в своих исследованиях авторы полагают фильтрующиеся жидкости как смешиваемыми (например, [151]), так и несмешиваемыми [147], сжимаемыми [171] и несжимаемыми [146]. Графическое представление обсуждаемого вида неустойчивости приведено на рисунке 4: изображения a) – b) наглядно демонстрируют нарушение гладкости границы раздела двух жидкостей; картины c) – d) представляют «пальцы» «Саффмана-Тэйлора» и «Рйэли-Тэйлора» соответственно.

Неустойчивость вида «Саффмана-Тэйлора» - явление, при котором граница фронта вытеснения «ощетинивается» единичным или многочисленными выступами. Причиной подобного поведения жидкостей является разница в их вязкостях при условии, когда менее вязкая фаза вытесняет более вязкую. Данный вид неустойчивости впервые был описан в знаменитой работе Саффмана-Тэйлора 1958-го года [173]: впоследствии экспериментальные исследования выявили заметное расхождение с выводами авторов. Вопрос о нестабильности границы фронта вытеснения в условиях различий в вязкостях веществ сохраняет актуальность, о чем свидетельствует ряд «свежих» работ, посвященных указанной задаче. Нововведения, сделанные современными авторами, включают в себя применение новых математических методов с целью компенсировать недостатки ранних представлений [166] [142]; учет доселе не рассмотренных факторов, влияющих на характер течения [158], введение анизотропной проницаемости в область течения [134] и т.д.

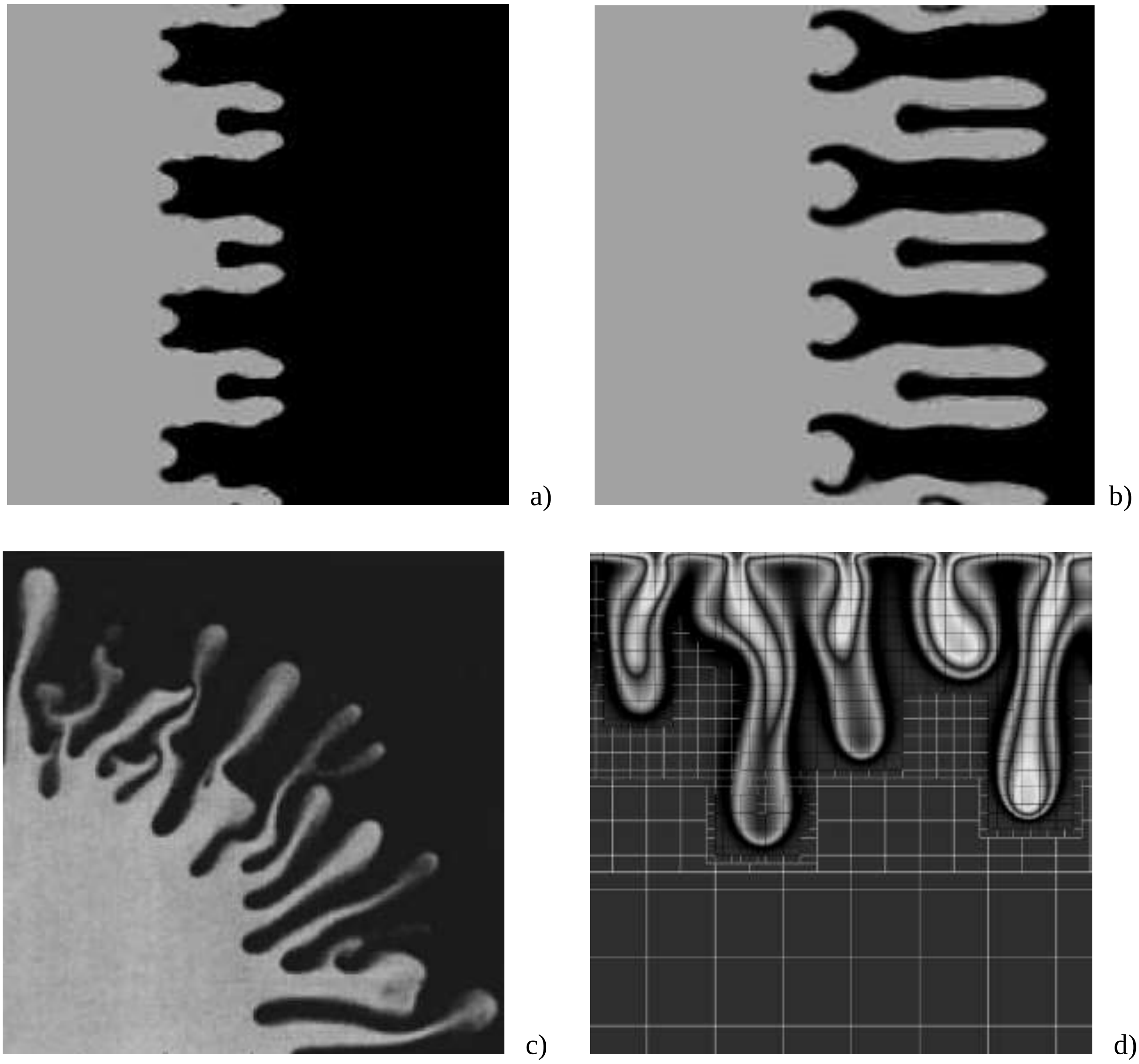


Рисунок 4. Схема неустойчивости фронта вытеснения с образованием «пальцев».

Нестабильность границы раздела, обусловленная гравитационным воздействием, была названа неустойчивостью вида «Рэйли-Тэйлор». Независимо от различий в вязкостях жидкостей фронт вытеснения «изгибается» под действием вертикальных сил. Подобно нестабильности «Саффмана-Тэйлора» в данном случае также возможно установить взаимосвязь между величиной искривления фронта и силой воздействия, вызывающего неустойчивость: подобная задача решалась в работе [151], в которой были получены оценки средней длины «пальцев», связанные с толщиной зазора между пластинами в ячейке Хеле-Шоу, т.е. с толщиной моделируемого пласта. Неустойчивость «Рэйли-Тэйлора» также рассматривалась в совокупности с «вязкими пальцами» [171]: при этом возмущения представлялись вихревыми полями, раздельно влиявшими на искривление фронта вытеснения в вертикальной и горизонтальной плоскости соответственно. Наконец, в работе [169] нестабильность, вызванная гравитацией, рассматривалась в задаче об изоляции углекислого газа в пропластках морской воды, в недрах горной породы.

Не в последнюю очередь исследователей интересует и задача об устранении неустойчивости фронта вытеснения: изучая природу языкообразования на границе раздела фильтрующихся сред, авторы принимают во внимание различные эффекты, присутствующие в процессе реального подземного течения, в поисках движущих сил, способных ослабить степень нестабильности. Многие из подобных исследований преследуют практико-значимые цели, например, - увеличение коэффициента нефтеотдачи при вторичной или третичной разработке нефтяных месторождений. Так, работа [147] посвящена попытке уменьшить рост «вязких пальцев» посредством капиллярных сил. Иной подход к ослаблению нестабильности был предложен [144]: согласно заключению авторов, контролируемое изменение во времени скорости фильтрации способно ослабить неустойчивость границы ВНК и «отсрочить» прорыв языков воды в добывающие скважины, что в конечном итоге позволит повысить нефтеотдачу пластов за счет более позднего обводнения. Вопрос о повышении эффективности третичных методов добычи нефти был поставлен в работе [146], в которой рассматривалось последовательное нагнетание в пласт слоев вязкого полимера и воды: при этом авторы исследовали как неустойчивость на границе раздела между нефтью и полимером, так и нестабильность фронта вытеснения «полимер-вода».

Наряду с теоретическими исследованиями и численным моделированием вопросу о неустойчивости вытеснения одной фазы другой также посвящен целый блок физических экспериментов: рассматривая различные конфигурации задачи о совместной фильтрации исследователи оценивали поведение образующихся «пальцев», высматривали взаимосвязь в изменениях их (пальцев) форм под влиянием числовых параметров, отмечали закономерное влияние некоторых условий опыта на картину роста неустойчивости. Экспериментальные исследования по-прежнему привлекают внимание авторов, о чем свидетельствует ряд современных работ: помимо моделирования вязкого языкообразования в плоском неоднородном пласте [154], исследователи также рассматривают трещины в горной породе [167], круговую ячейку Хеле-Шоу, вращающуюся с некоторой угловой скоростью [136], и т.д. Помимо чисто экспериментальных исследований существуют также и «смешанные», сочетающие в себе теоретическое обоснование и физический опыт [28]: особенностью указанной работы является также учет конечности границ рассматриваемой в ней круговой ячейки Хеле-Шоу и аналитические формулы для определения «критического радиуса», при котором нарушается устойчивость фронта вытеснения. При этом теоретические выводы автора подвергались экспериментальной проверке путем физического воссоздания условий задачи.

За время существования задачи о нестабильности фронта вытеснения экспериментаторами был накоплен достаточный материал, при этом некоторые из явлений, наблюдаемых исследователями, не согласовались с выводами теоретиков. Указанные расхождения требовали совершенствования теорий о «пальцах», что побуждало авторов пересматривать существующие формулировки задач, учитывать влияние прежде игнорируемых сил и факторов. Вопрос устранения несогласованности между теоретическими и опытными данными привлекал внимание исследователей, как прошлого, так и нынешнего веков: при этом предлагаемые ими нововведения касались как пересмотра ранних формулировок задач [172], так и учета новых факторов [158] или же модификации основополагающих уравнений в описании процесса течения с тем, чтобы расширить границы их применимости [166].

4. Сингулярные интегральные уравнения и их применение

Сингулярные интегральные уравнения – широко распространенный и действенный механизм для решения краевых задач механики. «Прочно закрепившись» к середине 60-х гг. прошлого века в теории упругости [78], этот подход в дальнейшем был перенесен исследователями в другие области и в особенности хорошо «обосновался» в работах по гидро- и аэродинамике. Техника построения сингулярных интегральных уравнений сохраняет актуальность и в наше время: применяемые совместно с широко распространенными методами граничных элементов и дискретных вихрей (примеры можно увидеть в работах [14] и [1] соответственно) в практико-значимых аналитически неразрешимых задачах, СИУ заменяют исходные дифференциальные соотношения интегральными, включающими в себя границу области.

Как и в теории упругости, сингулярные интегральные уравнения используются в гидро и аэродинамике для определения коэффициентов полей, вид и свойства которых зависят от постановки исходной краевой задачи. Так, в вопросах об обтекании предметов идеальной жидкостью СИУ применяются для задания потенциалов течения, как жидкого (см., например, [16] [41] [80]), так и воздушного ([1]). Кроме того, СИУ могут быть задействованы для описания течений с образованием полей завихренности: примером могут служить работы [3] [49] по определению гидродинамических характеристик обтекания тел вязкой несжимаемой жидкостью. Область применения сингулярных интегралов (СИ) в современной науке не ограничивается только модельными задачами механики. Среди множества работ, связанных с техникой построения СИ, присутствуют и теоретико-математические исследования: как правило, в текстах последних сингулярные интегралы рассматриваются в качестве операторов, действующих в различных пространствах и на поверхностях, в том числе и двоякопериодических [126]. Вопросы, интересующие исследователей, затрагивают различные аспекты СИ, включая внутреннюю структуру, способы вычисления и т.д.: среди теоретических задач, посвященных сингулярным интегралам, можно отметить поиск аналогов знаменитого ядра типа Коши (см., к примеру, [46] [53]), построение обратных операторов ([26] [34]) и методов численного решения ([81] [105] [107] [128]) и т.д. Наконец, СИУ применяются в таких областях физики и математики, как теория дифракции волн (см., к примеру, [35]) или задачи о полупроводниках ([74]).

«Малый возраст» большинства перечисленных работ указывает на сохраняющуюся актуальность сингулярных интегральных уравнений как способа решения краевых задач механики в различных ее областях: применяемые в практико-значимых численных расчетах в качестве граничных интегральных уравнений, СИУ остаются «привлекательным» средством, позволяющим связать искомые функции-потенциалы с границами рассматриваемой области [78].

Сингулярные интегралы достаточно широко распространены в разделах механики: помимо множества примеров использования в теории крыла, СИУ способствуют разрешению вопросов об обтекании объектов в бесконечной (поток) или частично ограниченной (бассейн) области, определению ЭМ полей в задачах дифракции волны или пропусканию тока через проводник, заданию движения вихрей в нестационарных течениях и воздушных потоков в системах вентиляции и т.д. Как было отмечено ранее, часто сингулярные интегральные уравнения применятся для описания функций-потенциалов полей, связывая их с границами исследуемой области: кроме того, СИУ также используются для учета влияния вихрей в нестационарных течениях. Так, в работе [80] сингулярный интеграл с ядром типа Коши был применен для описания поля скоростей при решении вопроса об обтекании крыла идеальной несжимаемой жидкостью: поставленная задача решалась автором методом дискретных вихрей для случаев циркуляционного, бесциркуляционного и безударного течения. Особый вид крылового профиля рассматривался в статье [41], в которой обтекающая объект жидкость также полагалась идеальной и несжимаемой: моделируя сильную искривленность передней кромки крыла, исследователь свел исходную задачу к СИУ для скорости течения и далее предложил квадратурную формулу для численного решения полученного интегрального уравнения. Вопрос об обтекании объектов в частично ограниченной области, с верхней свободной границей над погруженными в жидкость телами, был рассмотрен в ряде работ [14] [15] [16]: при этом исследуемые конфигурации задачи различаются между собой и включают течения в бассейне с открытым верхом, «возмущенные» наклонной стенкой или полукруговым цилиндром на дне, а также «проточные» плоскопараллельные потоки, обтекающие «руль Жуковского» и круговой цилиндр, помещенные между плоским дном и свободной границей водной глади. В своих работах автор прибегал к т.н. комплексному методу граничных элементов, используя при этом интегральную формулу Коши для преобразования исходных соотношений к граничному сингулярному интегральному уравнению для потенциала скорости.

Нестационарные течения, сопровождающиеся вихревыми образованиями на границе обтекаемых тел, рассматривались в работах [3] [49]: здесь сингулярные интегралы использовались для учета завихренности поля скоростей, а решение т.н. сопряженных задач движения обтекаемых тел и термогидравлики обеспечивается разработанным и описанным в текстах авторов методом «Вязких вихревых доменов». Наконец, СИУ были применены и в аэродинамике вентиляций для моделирования воздушного течения [1]: при этом исследуемая зона представляла собой сложную многосвязную область, включающую в себя вращающиеся цилиндры, как обычные, так и отсосы, а также систему щелей для впуска/выпуска наблюдаемых пылевых частиц.

Помимо вопросов аэро- и гидродинамики, СИУ использовались при решении таких вопросов, как прохождение плоской монохроматической волны сквозь двумерную дифракционную решетку из бесконечно тонких проводящих лент [35]: в поисках функции, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца в «пустотах» между лентами, а также серии граничных условий, автор сперва сводит исходную задачу к двойному ряду Фурье, и далее преобразует его к интегральному уравнению - сингулярному на системе интервалов или же к гиперсингулярному на отрезках. В статье [74] СИУ применялись для описания поля в проводнике с подведенным к нему электродом: поставленная задача решалась с помощью теории потенциала, а искомая функция определялась исходя из уравнения Лапласа и смешанных краевых условий.

Теоретико-математические исследования сингулярных интегральных уравнений также представлены рядом работ, затрагивающими как внутреннюю структуру СИ, так и вопросы их обращения и приближенного вычисления. Задача о построении квадратурных формул для численного расчета СИУ решалась в статье [128]: при этом автор рассматривала неоднородные сингулярные интегральные уравнения в смысле главного значения Коши. Для решения последних исследователь прибегла к методу механических квадратур, предложив в рамках своей работы две вычислительные схемы, представляющие искомую функцию в виде суммы полиномов Чебышева первого рода и фундаментальных многочленов Лагранжа соответственно. Вопрос приближенного вычисления СИ подробно рассматривается в [79] [81]: здесь автор исследует вопросы об устройстве и особенностях различных сингулярных интегралов и уравнений, включая СИУ с ядром Гильберта, логарифмической особенностью, ядром Коши, а также гиперсингулярностью. При этом в качестве области задания функций исследователь рассматривал различного рода отрезки, замкнутые и незамкнутые кривые. Для численного решения СИУ автор предлагал к использованию метод дискретных вихрей, подробно описывая детали его применения к сингулярным интегралам с различными видами ядра, а также для нескольких вариантов правой части в уравнениях, - с предопределенным видом или произвольной формой. Работа [107] посвящена численному решению сингулярных интегральных уравнений второго рода с обобщенным ядром типа Коши: в своей статье автор предлагает к использованию метод дискретных особенностей, точность которого оценивается сравнением приближенного и аналитического решений задачи об отыскании напряжений в области трещины на полуплоскости.

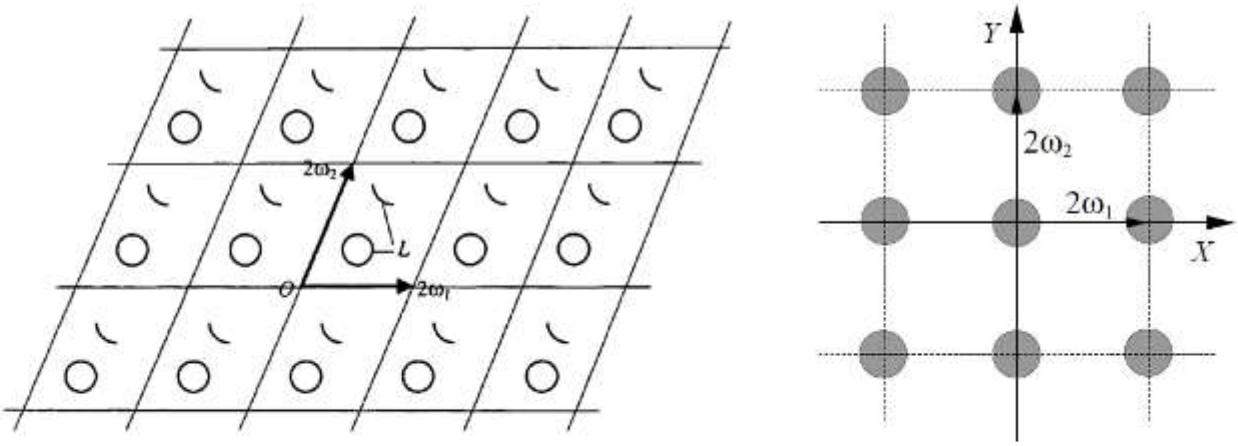
Вопрос об обращении СИ рассматривался в [26] [34]: авторы первой статьи исследовали различные аналоги ядра типа Коши на римановых поверхностях, изучая несколько областей и контуров интегрирования, в то время как вторая работа посвящена именно сингулярному интегралу типа Коши, который был выражен вместе с обратным ему через полиномы Чебышева первого и второго рода. Указанный способ разложения СИ также был использован в [105]: ставя своей целью построить механизм для приближенного вычисления сингулярных интегралов, автор использовал полиномы Чебышева для создания т.н. «квазиспектральных» соотношений. Результаты, полученные автором, могут быть применены для вычисления СИ первого рода со специальной правой частью.

Наконец, необходимо отметить исследования [46] [53], посвященные построению аналогов ядра Коши для сингулярных интегралов. Первое исследование носит более общий характер и рассматривает ряд вопросов о постановке и решении краевых задач на Римановых поверхностях: историческому обзору вопроса посвящена первая часть статьи, отмечающая особенный вклад идеи применить интеграл с ядром Коши для построения решений. Один из вопросов, разрешаемых в тексте – построение аналогов указанного ядра Коши на римановых поверхностях: при этом автор предлагает механизм формирования альтернативных вариантов, выделяя ряд свойств «первоисточника» и видоизменяя их, чтобы определить вид итоговой функции, которая может быть дополнена из соображений удобства при решении конкретной задачи. Построение аналогов ядра Коши в двоякопериодической области является основной целью, поставленной в работе [46]: прежде всего автор отмечает возможность разрешить проблему с использованием дзета-функции Вейерштрасса, однако указывает на квазипериодичность итогового оператора. В своей работе исследователь предлагает к использованию аналог ядра Коши, построенный с помощью сигма-функции Вейерштрасса, и далее демонстрирует пример его применения для решения сингулярного интегрального уравнения первого рода.

5. Двоякопериодические решетки и их применение

5.1. Двоякопериодические решетки в задачах механики

Периодические и двоякопериодические решетки представляют собой средство моделирования бесконечной области, упорядоченной определенным образом: в данном случае ее (области) отличительной особенностью является повторяемость в пространстве отдельных участков (повторяющиеся элементы), процессы в пределах которых протекают идентичным образом [21]. Важной составляющей формируемой решетки является геометрия и форма ее ячеек, имеющих вид параллелограмма (для однопериодического случая – бесконечной полосы). Применение аппарата периодичности позволяет заметно упростить исследовательскую задачу: благодаря идентичности моделируемых процессов, протекающих в периодических элементах, область исследования может быть сужена до одной ячейки периодичности. Примеры построения двоякопериодических решеток для задач теории упругости и механики композиционных материалов представлены на рисунке 5.



a) b)

Рисунок 5. Пример построения двоякопериодической решетки с периодами ($2\omega_1$, $2\omega_2$) для решения задач теории упругости и механики композиционных материалов. Изображение a) демонстрирует выделение ячеек (границы выделены сплошной линией), включающих в себя криволинейные трещины и круговые отверстия (Fig.1 в [78]). В случае b) двоякопериодическая решетка покрывает композитный материал с включениями в виде круговых цилиндров (Fig.2 в [152]).

История применения периодических и двоякопериодических решеток в различных областях механики имеет богатую биографию и далекое начало. Так, работы, посвящённые вопросам механики деформируемого твердого тела в областях с периодической структурой, появились в печати уже в 30-ые гг. XX в. Среди них можно отметить труды Р.Хаулэнда, Г.Н.Савина [43], В.Я.Натанзона [91] по решению задач теории упругости о растяжении перфорированных пластин: в качестве средства решения указанные авторы применяли, соответственно, бигармоническую функцию Хаулэнда, интегральные уравнения, а также разложение функций потенциала в ряды по степеням производных $\wp$ функции Вейерштрасса. Весьма значительное влияние на развитие решений двоякопериодических задач в механике оказал аппарат функций комплексного переменного, введенный в работах Г.В.Колосова и Н.И.Мусхелишвили [89]: идея авторов о представлении потенциала напряжений в виде двух связанных аналитических функций, определяемых на комплексной плоскости, впоследствии была опробована и успешно использована множеством исследователей, таких как В.Я.Натанзон, В.Т.Койтер, Н.Иоакимидис, Л.А.Фильштинский и т.д. [78].

Впоследствии изучением вопросов теории упругости с применением периодических решеток занимались такие исследователи, как К.Шульц (см. [175]-[179]), Д.И.Шерман, И.И.Ворович и А.С.Космодамианский [43] и т.д.: при этом авторы решали задачи о растяжении и изгибе перфорированных пластин с круговыми и некруговыми отверстиями и вырезами. Периодические решетки также применялись рядом исследователей в вопросах механики композиционных материалов [21] [113], гидродинамики [59][90], механики разрушения [86] и т.д.: здесь авторы исследовали, соответственно, задачи упругости, вязко-упругости, упруго-пластичности, теплопроводности, термо- и электроупругости для композитов, обтекание профилей, а также - растяжение и изгиб пластин, ослабленных системой трещин.

Помимо указанной ранее работы В.Я.Натанзона, задачи теории упругости в двоякопериодических областях рассматривались в [43] [156] [159] [160] [161] [181], а также в ряде современных исследований ([56] [87] [88]). При этом авторами рассматривались вопросы о растяжении и изгибе пластин, ослабленных системами трещин и отверстий различной формы (прямолинейные, криволинейные, круговые). Также двоякопериодические решетки использовались в ряде работ, посвященных задачам гидродинамики [116], проводимости [20] [152] и намагниченности [115] композитных материалов и т.д. При этом в качестве областей исследования выступали, соответственно, система профилей, обтекаемая идеальной несжимаемой жидкостью, бесконечная плоская пластина с инородными включениями, а также - намагниченная система полых круговых цилиндров.

Одной из первых работ, посвященных вопросам теории упругости в двоякопериодической области, стало исследование В.Я.Натанзона [91]: здесь автор решал задачу о растяжении бесконечной упругой пластинки, ослабленной круговыми отверстиями, размещенными в шахматном порядке. В основе решения, построенного исследователем, лежит аппарат аналитических функций комплексного переменного, разработанный Колосовым-

Мусхелишвили для представления потенциала напряжений. Используя соответствующие соотношения, В.Я.Натанзон представил определяющие потенциал функции в виде рядов по степеням производных $\wp$- функции Вейерштрасса. Также задачами теории упругости в перфорированной двоякопериодической области занимался В.Т.Койтер [160]: в своей работе автор определял поле напряжений в бесконечной плоской пластине, ослабленной системой круговых отверстий. Решение указанной задачи ищется В.Т.Койтером с помощью интегрального уравнения Фредгольма второго рода: при этом в состав последнего входит сингулярный интеграл типа Коши с ядром в виде ζ-функции Вейерштрасса. Далее следует отметить метод мультипольных разложений, примененный В.В.Мокряковым для решения ряда задач теории упругости [87] [88]: при этом область исследования также полагалась плоской и бесконечной, покрытой двоякопериодической системой круговых отверстий. В основе метода, представленного автором, лежит теория комплексного потенциала Колосова-Мусхелишвили, а также техника сингулярных интегральных уравнений: помимо построенного нового представления для общего решения задач теории упругости, исследователь также предложил численный метод, выгодно отличающийся от широко распространенного метода граничных элементов в первую очередь, «иммунитетом» к «парадоксу симметрии» [88]. Также мультипольные разложения использовались автором для отыскания и исследования зависимостей между некоторыми упругими характеристиками (связей средних напряжений с эффективными деформациями) перфорированной пластины и геометрией отверстий [87].

Помимо рассмотренных выше круговых отверстий периодические и двоякопериодические решетки неоднократно применялись для представления системы трещин: при этом последние могут иметь как прямолинейную, так и криволинейную форму, или же комбинироваться с отверстиями. Так, прямолинейные трещины изучались в работе [174]. Используя идею Колосова-Мусхелишвили, а также метод «pseudo-traction», исследователи строили потенциал напряжений в виде суперпозиции решений для однородного прямоугольного тв.тела и для его «копии», содержащей все трещины: при этом в первом случае учитываются напряжения, растягивающие предмет в бесконечность, а во втором – силы, действующие на поверхности самих «разломов». Криволинейные трещины рассматривались в работах [56] [156] [181]: при этом в своих изысканиях авторы прибегали к технике сингулярных интегральных уравнений, к которым сводили исходные краевые задачи. Указанный метод был несколько видоизменен в работах [78] [161] с тем, чтобы устранить недостатки идеи В.Т.Койтера: предложенные А.М.Линьковым гиперсингулярные уравнения имеют более тесную связь с физическими величинами – усилиями и смещениями – и более удобны в решениях смешанных и контактных задач. Одной из современных работ, посвященных механике трещин в периодической области, является исследование М.В.Мир-Салим-заде [86].

Здесь автор рассматривает вопрос о раскрытии трещины в изотропной упругой пластине, усиленной системой т.н. стрингеров: последние представляются инородными поперечными включениями в форме узких прямоугольников, размещенными периодически и закрепленными в конечном числе точек, через которые и осуществляется взаимодействие двух материалов. Основная задача, поставленная автором, заключается в оценке параметров области предразрушения (предельные нагрузки, длина полосы), а также - влияния, которое оказывает геометрия и свойства стрингеров на ход образования трещины. Опираясь на теорию комплексного потенциала Колосова-Мусхелишвили, М.В.Мир-Салим-заде сводит исходную задачу к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению с ядром типа Коши. В довершение автором также рассматривается вопрос о периодическом расположении полос предразрушения в пластине.

В довершение расстроим вкратце ряд работ, посвященных применению периодических и двоякопериодических решеток в задачах механики композиционных материалов и гидродинамики. Вопросы проводимости в бесконечной плоской пластине с инородными включениями рассматривался в работах [20][152]: при этом потенциал поля напряжений строился авторами в виде ряда по степеням производных дзета-функции Вейерштрасса. Инородным включениям также посвящена часть книги [32], где рассматривается упаковка из нескольких волокон кругового сечения, чьи поперечные срезы включаются в ячейке двоякопериодической решетки. Задача об определении поля напряжений решалась автором для каждого отдельного волокна в повторяющемся элементе путем представления потенциала в виде ряда по степеням эллиптических функций Вейерштрасса. Работа [115] посвящена отысканию поля намагниченности для двоякопериодической системы полых круговых цилиндров: применяя ранее разработанный метод мультиполей, автор сравнивал полученные им результаты с численным решением соответствующего задаче интегрального уравнения, учитывающего двоякую периодичность, отмечая удовлетворительное сходство выходных данных в обоих случаях.

Вопросу об обтекании двоякопериодической системы профилей идеальной несжимаемой жидкостью посвящена работа [116]: рассматривая обратную задачу о восстановлении двоякопериодической решетки по распределению скоростей, автор выделял повторяющийся элемент и далее использовал технику конформных отображений. Рассматривая прямоугольный параллелограмм периодов с заключенным в нем отрезком – прообразом симметричного профиля на физической плоскости, исследователь вначале переносил указанную зону на полуплоскость (с помощью функций Якоби), а затем – на единичный круг, после чего строил функцию, соответствующую этому отображению. Исследованием обтекания профилей в периодических системах занимались А.М.Казбан [59] и Ф.М.Мухаметзянов [90]: при этом решаемые ими задачи являются обратными и заключаются в восстановлении решетки по известному распределению скоростей течения. Размещая обтекаемые объекты в периодически повторяющихся областях, исследователи «выстраивали» их вертикально вдоль «оси решетки», после чего «направляли» сквозь полученную конструкцию бесконечный поток идеальной несжимаемой жидкости: последний представлял собой систему одинаковых полос ввиду идентичности ячеек с профилями. Основные отличия между указанными работами заключаются в количестве обтекаемых объектов в повторяющемся элементе, а также в методе решения задачи: при этом в обоих случаях авторы прибегали к конформному отображению профилей на вспомогательную плоскость, где последние (точнее говоря, область течения за концами профилей) заменялись вырезами.

5.2. Двоякопериодические решетки в задачах заводнения

Рассмотренный выше аппарат двоякопериодических решеток может быть также использован и для решения задач, посвященных вопросам заводнения нефтяных месторождений. Так, в работах [120] [164] [165] было изучено влияние способов взаимного размещения добывающих и нагнетательных скважин на показатели нефтедобычи: при этом моделируемый нефтеносный пласт полагался однородным, плоским и бесконечным, а построение решения осуществлялось в комплексной плоскости. Для учета геометрии расположения скважин использовался аппарат двоякопериодических решеток и определяемых на них эллиптических функций: при этом в обоих случаях для определения характеристик заводнения использовались функции давления и скорости фильтрации, построенные на основе комплексного потенциала, что предполагает несжимаемость фильтрующейся жидкости. Также необходимо отметить, что в своих работах авторы исследовали различные схемы внутриконтурного заводнения, включая лобовую рядную, шахматную, пяти-, семи- и девятиточечную и др.: при этом повторяющиеся элементы указанных способов размещения скважин помещались в прямоугольные ячейки соответствующих двоякопериодических решеток.

Основной целью, поставленной в работах [164] [165], стала разработка аналитического и численного методов для оценки таких характеристик процесса заводнения, как нефтеотдача и коэффициент охвата по площади, при различных способах размещения добывающих и нагнетательных скважин на площади месторождения. При этом совместная фильтрация воды и нефти описывалась моделью поршневого вытеснения и ее частным случаем – «разноцветными жидкостями» при единичном коэффициенте подвижности. Моделируемый однородный бесконечный пласт покрывался двоякопериодической решеткой с прямоугольными ячейками: при этом фильтрующиеся жидкости полагались несжимаемыми, а капиллярные и гравитационные эффекты не учитывались. В данных условиях фильтрационное течение является плоскими и потенциальным, благодаря чему возможно построение комплексного потенциала, что и было сделано в обсуждаемых работах. Комплексный потенциал $W(z)$ в общем виде определялся формулой:

$$W(z) = \frac{q}{2\pi} \ln\{ f(z)\},$$

где q – мощность нагнетательной скважины, входящей в параллелограмм периодов, а *f(z)* - некоторая аналитическая функция, обладающая известными особенностями (нулями или полюсами) в точках размещения скважин. Вид комплексного потенциала изменялся в зависимости от выбранной схемы заводнения: при этом его (потенциала) вещественная часть $\mathrm{Re}[W(z)]$ использовалась для построения функции давления, а мнимая $\mathrm{Im}[W(z)]$ – в качестве функции тока. Для описания комплексного потенциала использовались эллиптические синусы и косинусы. Момент начала обводнения $t_{waterbreak}$ определялся с помощью значений функции $\mathrm{Re}[W(z)]$ для кратчайшего пути от нагнетательной скважины к добывающей по следующей формуле:

$$t_{waterbreak} = \int_0^L \frac{dx}{\left(\frac{\partial \mathrm{Re}[W(z)]}{\partial x}\right)_{(y=0)}}.$$

Здесь L – длина кратчайшей линии тока, соединяющей добывающую и нагнетательную скважины; а x – переменная интегрирования (предполагается, что линия тока параллельна оси OX). Для аналитического определения коэффициента охвата по площади E_A использовалась следующая формула:

$$E_A = \frac{q t_{waterbreak}}{A},$$

где A указывает на некоторую характерную площадь, связанную с повторяющимся элементом выбранной схемы заводнения. Так, для лобовой рядной схемы расстановки скважин в работе [165] был получен следующий вид комплексного потенциала, выраженного через эллиптический синус:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi} \ln[sn(z,k)],$$

где k определяется как $\frac{d}{a} = \frac{K'}{2K}$ (см. рисунок 6), а $sn(z,k) = \sin(\phi(z,k))$ - эллиптический синус от т.н. «амплитуды» $\phi(z,k)$, полученной обращением эллиптического интеграла первого рода:

$$z(\phi,k)=\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

Касательно определения величины коэффициента охвата по площади, его значение включено в состав таблицы 1, приведенной ниже: строки таблицы соответствуют значениям E_A, найденным аналитически для ряда схем заводнения в работах [164] [165].

Таблица 1. Результаты вычисления коэффициента E_A охвата по площади

Схема размещения скважин	Величина коэффициента E_A
Лобовая рядная (d/a=1)	58%
Шахматная ($d/a = 1/2\sqrt{3}$)	76%
Пятиточечная обращенная	71.8%
Семиточечная обращенная	74.4%

На рисунке 6 (справа) представлена схема выделения прямоугольной ячейки (выделена пунктиром), включающей в себя повторяющийся элемент лобовой рядной схемы: соответствующая геометрия размещения скважин и характерные размеры d и a представлены на изображении 6 (слева).

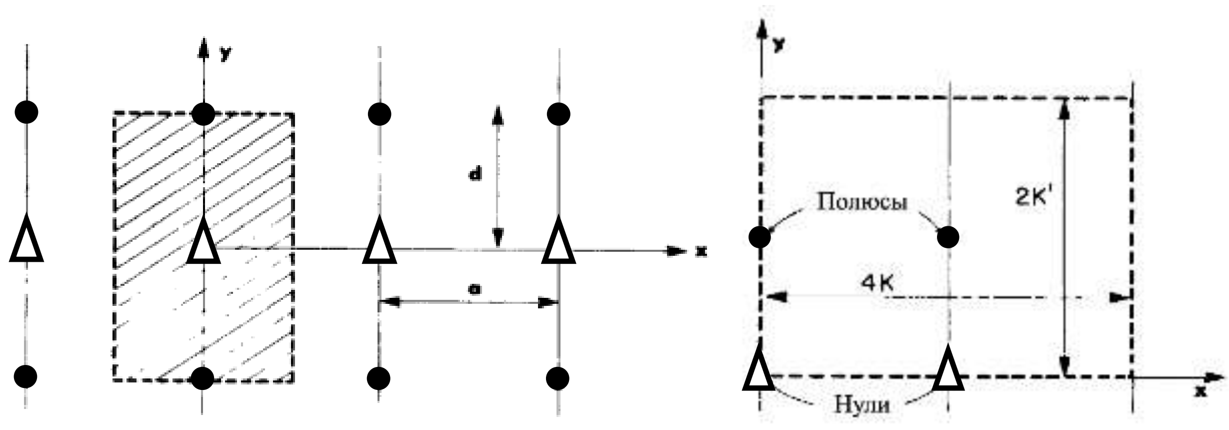


Рисунок 6. Схема выделения повторяющегося элемента и характерных размеров (слева), а также – ячейки прямоугольной решетки (справа). Добывающие скважины выделены черными кругами, нагнетательные – белыми треугольниками.

Помимо рассмотренных выше формул и выражений, входящих в состав аналитического метода определения характеристик заводнения, автор также предлагает к использованию численный метод с применением конечно-разностной аппроксимации. При этом в случае приближенного решения коэффициент подвижности предполагается отличным от единицы, а аналитически полученные данные надлежит использовать для оценки точности результатов расчетов на ЭВМ.

Подход к определению характеристик заводнения, предложенный в [120], также основан на построении комплексного потенциала с последующим выделением вещественной и мнимой частей, которые, соответственно, определяют давление и функцию тока. В своей работе автор также рассматривает однородный бесконечный горизонтальный пласт, используя для этих целей комплексную плоскость: течение также полагается несжимаемым, гравитационные и капиллярные эффекты не учитываются. Как в рассмотренном выше случае, исследователь использует аппарат двоякопериодических решеток для представления геометрии системы разработки месторождения: при этом добывающие и нагнетательные скважины повторяющегося элемента, соответствующего той или иной системе внутриконтурного заводнения, помещаются также в прямоугольные ячейки. В общем виде, комплексный потенциал $W(z)$ определяется в работе [120] путем интегрирования выражения для комплексно-сопряженной скорости $\overline{V}(z)$:

$$\overline{V}(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{2\pi} \zeta(z - z_i) + C,$$

где q_i – дебиты добывающих и нагнетательных скважин общим числом в N штук, размещенных внутри ячейки двоякопериодической решетки, $\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{i,j=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right)$ - дзета-функция Вейерштрасса (штрих перед знаком суммы означает исключение из нее слагаемого при $\omega=0$), $\omega = 2\omega_1 i + 2\omega_2 j$ - узел двоякопериодической решетки с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_2$, а C – произвольная константа.

В результате интегрирования выражения для $\overline{V}(z)$, с учетом известного соотношения между дзета- ($\zeta(z)$) и сигма- ($\sigma(z)$) функциями Вейерштрасса - $\zeta(z) = \sigma'(z)/\sigma(z)$, комплексный потенциал $W(z)$ примет вид:

$$W(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{2\pi} \ln \sigma(z - z_i) + z \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{2\pi} \left[\frac{\zeta(\omega_1)}{\omega_1} \mathrm{Re}[z_i] + i \frac{\zeta(\omega_2)}{\omega_2} \mathrm{Im}[z_i] \right] + G .$$

Здесь $\ln(\sigma(z)) = \ln z + \sum_{i,j=-\infty}^{\infty}{}' \left[\ln\left(\frac{z-\omega}{\omega}\right) + \frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2} \right]$ - логарифм сигма-функции Вейерштрасса, а G – комплексная постоянная интегрирования.

Напоследок приведем вид комплексного потенциала $W(z)$ для рассмотренного выше случая расстановки скважин в соответствии с лобовой рядной схемой (см. рисунок 6.слева):

$$W(z) = \frac{q}{2\pi}\left[\ln\frac{\sigma(z)}{\sigma(z-\omega_2)} + \zeta(\omega_2)z\right] + G.$$

6. Заводнение как технология повышения нефтеотдачи пластов: история, основные особенности и аспекты применения

Зарубежная история заводнения берет свое начало во второй половине XIX в., на территории месторождения Питхоул-Сити, штат Пенсильвания [75]. В действительности, эффект нагнетания поверхностной воды в пласт был обнаружен случайно. К 1865 г. многие скважины на территории указанного месторождения были закрыты ввиду завершения периода первичной эксплуатации (т.н. добычи при естественном режиме): однако часть из них не была законсервирована должным образом ввиду сильной коррозии обсадки колонны. В результате подобные скважины стали путями, через которые в пласт поступала поверхностная вода. «Утечка» была обнаружена операторами штата Пенсильвания в том же 1865 г., а спустя несколько месяцев было зафиксировано увеличение добычи нефти в соседних действующих скважинах, причем в некоторых из них значительно [119]. В 1880 Дж.Ф.Карл пришел к выводу, что именно поверхностная вода, просочившаяся сквозь нарушенную обсадку колонн в закрытых ранее скважинах, способствовала увеличению нефтеотдачи. Первые опыты по исследованию заводнения были связаны с наблюдениями за этими «утечками»: было установлено, что нагнетание поверхностной воды способствует повышению пластового давления[8], ранее упавшего вследствие первичной добычи при естественном режиме эксплуатации, что, в конечном итоге, позволяет продлить продуктивный период работы скважин и увеличить конечный объем добытой нефти [75].

Следующим этапом на пути развития заводнения стала искусственная закачка поверхностной жидкости через скважину. Первый подобный опыт был проведен на месторождении Брэдфорд, штат Пенсильвания: при этом заводнение осуществлялось по т.н. «круговой» схеме. Поверхностная вода вначале нагнеталась в пласт через одну скважину, до полного обводнения окружающих ее соседей, после чего последние также переводились в

[8] Пластовое давление (ПД) - давление, оказываемое пластовыми флюидами (вода, нефть и т.д.) на вмещающие их породы. ПД характеризует энергию нефтегазоносных и водоносных пластов и формируется гидростатическим давлением, избыточным давлением залежей нефти или газа, давлением, возникающим в результате изменения объёма резервуара, а также - за счёт расширения (или сжатия) флюидов и изменения их массы (см. [42]).

режим закачки, расширяя тем самым радиус воздействия заводнением на пласт. Применение данной технологии возымело эффект уже к 1907 г. [117], однако дальнейшее ее развитие замедлялось рядом трудностей, в том числе – законодательного характера: закон штата Пенсильвания, требовавший установки пробок в закрытых скважинах, именно с целью предотвращения попадания поверхностной воды в нефтеносные песчаники, фактически запрещал применение заводнения, в связи с чем метод повышения нефтеотдачи использовался втайне. Лишь в 1921 г. указанный запрет был изменен для месторождения Брэдфорд, после чего новая технология начала развиваться с новой силой. Результат благотворного воздействия нагнетаемой воды на объемы добытой нефти для указанного месторождения наглядно демонстрирует график на рисунке 7 [117]: как видно из представленного изображения, технология повышения нефтеотдачи заметно продлила срок эксплуатации Пенсильванских песков, «исчерпав себя» примерно к началу 1970-х гг.

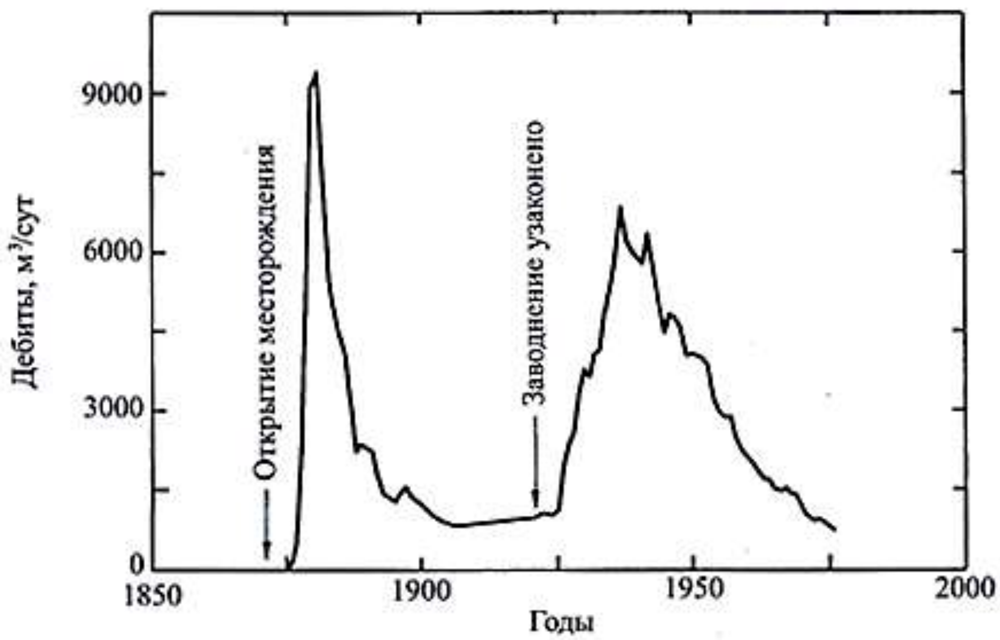


Рисунок 7. Динамика изменения темпов добычи нефти для месторождения Брэдфорд, Пенсильвания.

В скором времени после 1921 г. первоначальное круговое заводнение было заменено линейным: при данном подходе первоначально нагнетание воды осуществляет не одна, а целый ряд скважин, размещенных параллельно рядам добывающих [75]. Наконец, к 1928 г. была разработана первая площадная схема заводнения, названная пятиточечной, поскольку ее форма напоминала рисунок «пятерки» на игральной кости.

Технология повышения нефтеотдачи путем нагнетания поверхностной воды с самого начала позиционировалась как вторичный метод, что предполагало ее применение лишь по завершению периода первичной эксплуатации месторождения, при котором добыча нефти осуществляется за счет внутренней энергии пластов. Именно в таком качестве заводнение начало распространяться по территории других штатов, начиная с 1930-х гг. Имеются упоминания об использовании указанной технологии на месторождении Бартлсвиль в Новата Каунти, штат Оклахома, в 1931 г.; на площади Фрай в Браун Каунти, штат Техас, в 1936 г. [74]: впоследствии заводнение было распространено и на соседних месторождениях указанных районов. Однако в начале 1930-х гг. повсеместное применение технологии сдерживалось как ее недостаточной изученностью, так и законодательно установленным искусственным ограничением темпов нефтедобычи, введенным с тем, чтобы предотвратить превышение предложения над спросом [117]. Большие объемы добываемой нефти, превышающие потребности общества, неизбежно вели к снижению стоимости продукта, в связи с чем период первичной эксплуатации месторождений растягивался. Таблица 1 в Приложениях [130] содержит сводные данные об объемах мировой добычи нефти за период с 1860-х до конца 1980-х гг.: используя данные столбцов, можно оценить динамику изменений в темпах нефтедобычи. Обращает на себя внимание резкое изменение значений в строках, соответствующих данным для периода с 1950-го по 1960-ый гг.: при этом «скачок» данных заметен как в величине общего объема добытой нефти, так и доли США в этом показателе.

Согласно [117], потребность в применении заводнения проявила себя в конце 1940-х - начале 1950-х гг.: к этому моменту многие месторождения разрабатывались на границе рентабельности, в связи с чем и возникла необходимость в повышении их уровня нефтеотдачи посредством методов поддержания пластового давления. С тех пор технология заводнения была освоена и применена на месторождениях в различных нефтеносных регионах планеты, заработав репутацию самого известного и широко распространенного вторичного метода нефтедобычи: считается, что к концу XX в. половина всего «черного золота» в США была добыта посредством применения заводнения [117] [119].

История промышленного применения рассматриваемой технологии в России ведет свои корни от 1948 г., с территории Туймазинского месторождения [50] [113]. Используя знания и опыт, полученные нефтедобытчиками других стран к середине XX в., советские нефтяники организовали разработку нефтеносных пластов, также используя закачку поверхностной воды через скважины в качестве средства повышения нефтеотдачи, т.е. применяя заводнение после первичной эксплуатации нефтесодержащих участков при естественном режиме. Первоначально нагнетание воды осуществлялось по «законтурной» схеме: нагнетательные скважины размещались вдоль границы т.н. внешнего контура нефтеносности[9], за его пределами, также располагая вдоль него и добывающие, но с внутренней стороны границы. По итогам

[9] Под контуром нефтеносности (КН) следует понимать замкнутую границу распространения залежи нефти. Положение КН в плане определяется проекцией линии пересечения водонефтяного контакта (см. определение ниже, на стр. 19) с кровлей (внешний КН) или подошвой (внутренний КН) пласта (см. [36]).

применения заводнения нефтедобытчиками был сделан ряд важных выводов, содержавших перечень основных преимуществ и недостатков использованной схемы расстановки скважин. Так, было установлено, что применение законтурной закачки воды позволяет восстанавливать и даже превышать первоначальный уровень пластового давления. В то же время, «законтурная схема» оказывалась неэффективной для числа рядов добывающих скважин больше пяти, поскольку заводнение оказывало слабое воздействие на центральные участки пласта, наиболее удаленные от нагнетательных скважин. Также исследователями была отмечена невозможность воздействия на процесс извлечения нефти на отдельных локальных участках месторождения. Указанные выводы привели к дальнейшему совершенствованию технологии заводнения и, прежде всего, к переходу к более интенсивным схемам расстановки скважин: так, на смену законтурному заводнению пришло блоковое рядное, при котором площадь месторождения «разрезалась» рядами нагнетательных и добывающих скважин на отдельные «блоки». Подобные схемы впервые были применены на территории Самарской области, а впоследствии были распространены на месторождения Западной Сибири и в других нефтедобывающих регионах страны [50]. Помимо упорядоченных способов расстановки скважин, применяемых, в первую очередь, на больших площадях, распространение получили очаговое и избирательное заводнение, впервые примененные в Татарии: при таком подходе скважины располагаются на отдельных малых участках пласта с целью повышения объемов добываемой нефти при недостаточной продуктивности последних на фоне соседних территорий.

Следуя мировой тенденции, заводнение завоевало популярность среди российских нефтедобытчиков [113], заработав статус самого широко распространенного метода повышения нефтеотдачи [40]: ближе к концу XX в. данная технология обеспечивала 90% нефти, добываемой в России [50]. Так, к 1980 г. объем добытой в СССР нефти вместе с газовым конденсатом[10] достиг 603,2 млн. т. [132], причем порядка 90% от этой величины приходилось на долю месторождений, разрабатывавшихся с применением заводнения: к 1983 г. ежегодный объем закачиваемой в пласты поверхностной воды превысил показатель в 1,5 млрд. $м^3$/ год, причем из 100 тыс. действовавших на тот момент скважин 15 тыс. составляли нагнетательные.

В довершение исторического обзора следует привести сведения о мировой добыче нефти за период с 1990 по 2000 гг.: соответствующие данные представлены в таблице 2 Приложений. Отметим, что для некоторых лет в табличных строках приведены сведения о нефти вместе с газовым конденсатом (ГК) [130].

[10] Газовый конденсат – газ, попутно добываемый вместе с сырой нефтью в процессе ее извлечения на поверхность (см. [120]).

Заводнение – наиболее популярный и общепризнанный вторичный метод добычи нефти. Его широкая распространенность объясняется рядом неоспоримых преимуществ [113] [75]:

1. Общедоступность и дешевизна воды;
2. Относительная простота процесса нагнетания поверхностных вод в нефтеносные пласты;
3. Относительно высокая эффективность вытеснения нефти водой.

Как было сказано выше, заводнение представляет собой вторичный метод, используемый, прежде всего, для повышения показателей нефтеотдачи месторождений, разрабатывавшихся ранее при т.н. естественном режиме [47]: в подобных условиях нефть движется в сторону добывающих скважин за счет внутренней энергии пласта, запасы которой уменьшаются со временем, что также сопровождается понижением уровня пластового давления. Однако эффективность заводнения ощутимо зависит от геофизических особенностей месторождения, в том числе, и от характера естественного режима, при котором оно (месторождение) разрабатывалось ранее. Различают несколько типов нефтеносных залежей, в зависимости от источника внутрипластовой энергии [117] [72], используемой на первом этапе нефтедобычи, и, соответственно, несколько видов первичных методов разработки. Краткое описание последних и данные об извлекаемых объемах нефти (по отношению к изначальным геологическим запасам) [119] приведено ниже, в таблице 2: схематичные изображения первичных способов разработки месторождений представлены на рисунках 1-4 в Приложениях.

Помимо применения на материковых месторождениях, заводнение также широко используется и при разработках морских нефтяных запасов: при этом технология закачки воды в пласт, как правило, реализуется на самых первых этапах нефтедобычи «на воде». Так, месторождения Северного моря отличаются широким масштабом применения заводнения [47]: оборудование, необходимое для обеспечения закачки поверхностной воды в нефтеносные залежи, монтируется на буровую платформу еще до начала процесса нефтедобычи, поскольку, ввиду большой (до 150 м) глубины погружения ее (платформы) стальных и бетонных конструкций, проведение подобной модернизации впоследствии весьма затруднительно.

Организация заводнения рассматривается нефтедобытчиками Северного моря также и в качестве «страховки» на случай недостаточного притока природных вод при естественном водонапорном режиме (к примеру, при наличии непроницаемого барьера между нефтеносным и водоносным слоем): благодаря возможности реализовать вытеснение нефти за счет нагнетания поверхностной воды, на случай нехватки энергии естественного водоносного слоя, операторы буровых платформ получают действенное средство для контроля над процессом разработки.

Таблица 2. Характеристика первичных режимов эксплуатации месторождения

Первичный режим	Краткое описание	Объемы извлекаемой нефти (% от изнач. зап.)
Водонапорный	Источник энергии – вода в сжатом состоянии. При вскрытии пласта скважинами происходит вытеснение нефти за счет расширения объема законтурной воды.	70-80%
Растворенного газа	Вытеснение нефти при вскрытии пласта обеспечивается газом, растворенным в ней (нефти) под высоким давлением.	10-15%
Расширения флюидов	Источник пластовой энергии – расширение горных пород и флюидов, возникающее при падении пластового давления вследствие вскрытия залежи скважинами.	3-10%
Газовой шапки	Особенность залежи данного типа - наличие т.н. «газовой шапки» или области сжатого газа над нефтеносной зоной. В этом случае именно газ обеспечивает вытеснение нефти при вскрытии пласта.	18-30%
Гравитационный	Данный режим возможен в крутопадающих пластах. Разработка залежи осуществляется за счет «стекания» нефти под действием силы тяжести в сторону добывающих скважин.	5-15%

Способ первичной нефтедобычи является одним из факторов, учитываемых при проектировании разработки месторождения с применением вторичного метода. Организация заводнения – сложный многоэтапный процесс, включающий в себя как технический, так и экономический анализ будущего применения технологии: помимо детального исследования геофизических свойств нефтеносных пластов, требуется провести сравнительную оценку эффективности различных схем расстановки скважин с точки зрения наиболее важных экономических факторов. Ниже представлен список из пяти основных этапов проектирования заводнения [117]:

1. Оценка физических особенностей нефтеносного пласта и пластовых флюидов, включая характер первичной разработки;
2. Выбор схем заводнения;

3. Оценка дебитов скважин;
4. Прогнозирование добычи нефти на планируемый период разработки месторождения и сравнительная оценка выбранных схем заводнения;
5. Выявление параметров, связанных с неопределенностью в расчетах технологических показателей.

Составление перечня возможных к применению способов расстановки скважин во многом определяется данными о разрабатываемом месторождении, получаемыми на первом этапе. Ниже представлен список параметров, составляющих описание нефтеносных пластов [117] [163], включая факторы экономического характера, влияние которых может также сыграть решающую роль при выборе схем заводнения [119]:

1. Геометрия пласта: данные о площади месторождения и его геометрии влияют на возможное количество и расположение добывающих и нагнетательных скважин;
2. Свойства пластовых флюидов: для описания жидкостей, фильтрующихся в недрах горной породы, используют, в первую очередь, данные об их плотности, объемном коэффициенте и вязкости (как функциях пластового давления);
3. Глубина залежи: высокая глубина залегания нефти неизбежно приводит к увеличению максимальной величины давления нагнетания и, соответственно, повышает стоимость проекта заводнения;
4. Свойства флюидосодержащей породы: среди параметров пласта, влияющих на продвижение фильтрующихся в нем жидкостей, учету подвергаются пористость и проницаемость, а также – их изменения по площади;
5. Флюидонасыщенность: высокий показатель начальной (на момент начала заводнения) нефтенасыщенности обеспечивает достаточный запас извлекаемой нефти, поскольку повышает ее подвижность и, в конечном итоге, эффективность заводнения;
6. Однородность пласта: зачастую реальные месторождения отличаются неоднородностью пропластков, которыми они сложены, в связи с чем возникает необходимость в учете неоднородностей пласта, в первую очередь – изменений проницаемости по его (пласта) толщине и площади;
7. Использованный на месторождении первичный способ нефтедобычи: помимо определения вида первичного метода, посредством которого ранее эксплуатировалась залежь, необходимо оценить остаточные запасы нефти, неизлеченной при естественном режиме, а также – распределение давления по пласту;

8. Положения договора об аренде разрабатываемых территорий: данный фактор оказывает ощутимое влияние на процесс проектирования, поскольку естественным образом ограничивает возможную разрабатываемую площадь месторождения, а также - продолжительность разработки.
9. Динамика цен на нефть: исходя из примера, приведенного в историческом обзоре, очевидно значительное влияние указанного фактора на темпы нефтедобычи, которые могут либо интенсифицироваться, либо замедляться, в зависимости от величины объемов добываемой нефти, требуемых для поддержания приемлемого уровня предложения на рынке.

Подробнее о геофизических свойствах пластов и содержащихся в них флюидов можно узнать из [75] [113] [117] [119] и т.д.

Выбор схем расстановки скважин (СРС) напрямую связан с определением одного из видов заводнения, посредством которых классифицируются СРС: каждый из видов отличается своими достоинствами, направленными на учет геофизических особенностей разрабатываемого пласта. Различают следующие виды заводнения [50] [72]:

1. Законтурное. Пример подобной организации нагнетания воды описан в историческом обзоре, в истории разработки Туймазинского месторождения в 1948 г.: при законтурном заводнении нагнетательные скважины располагаются за внешним контуром нефтеносности (КН) на расстоянии 100 м. и более; добывающие размещаются внутри внутреннего КН, как правило, рядами (см. рисунок 5 в Приложениях). Данный способ разработки скважин применяется, как правило, при разработке сравнительно небольших месторождений.
2. Внутриконтурное. В отличие от рассмотренного выше, данный метод применяется при разработке больших месторождений.

   При использовании внутриконтурного заводнения разрабатываемая площадь «разрезается» на отдельные участки, на территории которых и обеспечивается искусственный водонапорный режим. В зависимости от способа «разрезания» месторождения различают рядные и площадные схемы внутриконтурного заводнения. В первом случае территория нефтеносного участка покрывается рядами добывающих и нагнетательных скважин (скважины в одном ряду принадлежат к одному типу): наиболее распространёнными являются одно-, трех- и пятирядные схемы, названные по числу рядов добывающих скважин между рядами нагнетательных (см. рисунок 6 в Приложениях).

При площадном заводнении территория месторождения покрывается повторяющимися геометрически упорядоченными наборами из добывающих и нагнетательных скважин. При этом, как правило, число нагнетательных скважин в отдельно взятом повторяющемся элементе превышает число добывающих: тем не менее, для большинства широко распространенных площадных схем заводнения существуют «обращенные», при которых добывающие и нагнетательные скважины «меняют» режим работы на противоположный. Наиболее распространенными примерами можно назвать пяти-, семи- и девятиточечную схемы (см. рисунок 7 в Приложениях).

Рядные схемы обладают большой гибкостью и «отказоустойчивостью» благодаря наличию большого числа скважин в рядах: так, в случае выхода из строя нагнетательной скважины ее может заменить соседняя в ряду. В свою очередь схемы площадного заводнения отличаются большой «жесткостью» размещения скважин: в связи с этим выход из строя какой-либо из нагнетательных скважин неизбежно влечет за собой нарушение ранее установившихся фильтрационных потоков. С другой стороны, площадные схемы обеспечивают более рассредоточенное воздействие на пласт.

3. Очаговое и избирательное. Данные способы расстановки скважин используют в качестве средства регулирования процесса заводнения, например, на поздних стадиях разработки месторождения: на данном этапе большая часть нефтесодержащих пластов заполнена водой, за исключением зон повышенной нефтенасыщенности[11], близкой к начальной. Указанные участки, ранее не охваченные воздействием заводнения, называются целиками нефти: для их разработки целесообразно применять очаговый и избирательный подходы, при которых происходит изменение первоначальной упорядоченной схемы за счет бурения дополнительных скважин (см. пример на рисунке 9 в Приложениях).

[11] Нефтенасыщенность пласта - содержание нефти в породе-коллекторе. Данный параметр выражается в долях или процентах от объёма порового пространства ввиду присутствия в поровом пространстве пласта остаточной или связанной воды, а также – газа в свободном состоянии (см. [42]).

ГЛАВА II

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ В ПЛОСКОЙ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

1. Общее представление для скорости фильтрации

Настоящая Глава посвящена методу решения плоских квазистационарных задач с подвижной границей, предлагаемому в диссертационной работе. При этом представляемый подход демонстрируется на примере внутриконтурного заводнения - одного из случаев совместной фильтрации жидкостей. В отличие от традиционного способа, применяемого при решении задач с подвижной границей, предлагаемый метод подразумевает формулировку основных уравнений не для искомой функции F (температуры, концентрации, давления и т.д.), а ее производной. Таким образом, в случае совместной фильтрации объектом интереса станет не давление P, а вектор скорости $\vec{\upsilon}$. Рассмотрим далее способ представления функции $\vec{\upsilon}$ в одножидкостной системе: полученное выражение для скорости фильтрации будет обобщено на случай заводнения в последующих параграфах.

Рассмотрим пример извлечения нефти одиночной скважиной из замкнутого резервуара Ω. Будем полагать нефтеносный пласт плоским и горизонтальным, фиксированной толщины h. Внешняя граница S резервуара является фиксированной, известной и непротекаемой, в связи с чем в рассматриваемой системе отсутствует приток жидкости извне. Также предположим однородность пласта и изотропность по проницаемости: таким образом, коэффициенты пористости m и проницаемости k полагаются фиксированными и известными. Ввиду отсутствия притока жидкости извне движение нефти внутри Ω порождается исключительно действием одиночной добывающей скважины мощности Q: обозначим границу ее призабойной зоны как S_0. Наконец, будем полагать извлекаемую нефть и твердую породу слабосжимаемыми, а фильтрацию - подчиняющейся линейному закону Дарси и условиям квазистационарного режима. Графическая постановка задачи приведена ниже, на рисунке 1.

Продемонстрируем далее способ представления функции $\vec{\upsilon}$, предлагаемый в диссертационной работе. Исходная система уравнений, описывающая фильтрацию в резервуаре *Ω*, включает в себя условия неразрывности и сжимаемости, а также – закон Дарси в линейной форме [24]. Отметим, что в общем случае процесс извлечения нефти рассматривается в пространственных координатах. Таким образом, исходная задача фильтрации имеет следующий вид:

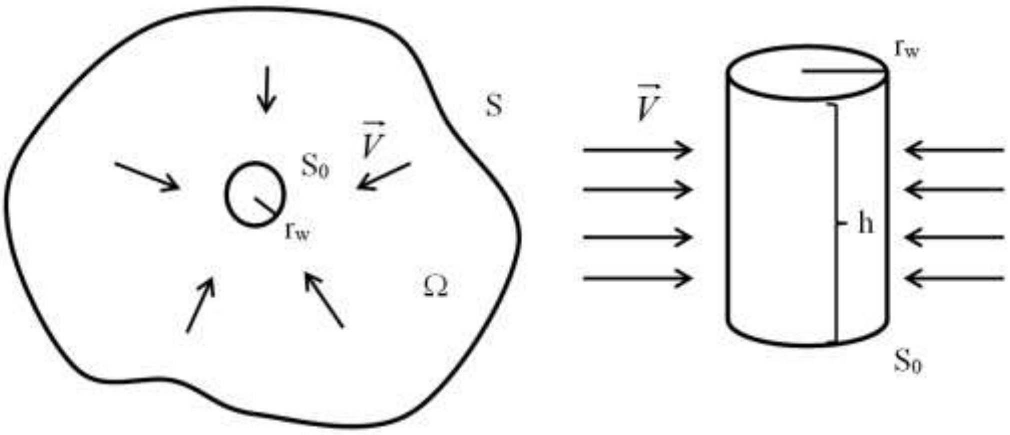


Рисунок 1. Схема извлечения нефти из замкнутого резервуара Ω. Слева изображен приток жидкости к призабойной зоне с границей S_0 добывающей скважины радиуса r_w. Вектор скорости обозначен как $\vec{\upsilon}$. Изображение справа демонстрирует схему отбора жидкости сквозь перфорацию в призабойной зоне скважины.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + div(\rho\vec{\upsilon}) = 0 \\ &\vec{\upsilon} = -\frac{k}{\mu} gradP \\ &\rho = \rho(P) \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

Здесь ρ обозначает плотность жидкости, μ - ее вязкость, $\vec{\upsilon}$ – вектор скорости фильтрации; k – проницаемость пласта, а P – пластовое давление. Представим решение системы (2.1) в виде функции скорости, последовательно используя ключевые допущения задачи.

Прежде всего, обратим внимание на особенности, присущие случаю слабосжимаемых жидкости и твердой породы. Известно [24], что изменение плотности нефтеносного пласта и залегающих в нем флюидов обусловлены изменениями пластового давления. Указанная зависимость может быть выражена посредством т.н. коэффициента сжимаемости жидкости (β_l):

$$\beta_l = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dP}.$$

Вводя начальные значения для плотности ρ_0 и давления P_0, запишем уравнение слабой сжимаемости, связывающее функции ρ и P:

$$\rho = \rho_0(1+\beta_l(P-P_0)) . \tag{2.2}$$

Далее рассмотрим особенности квазистационарной фильтрации, оказывающие влияние на производную по времени в уравнении неразрывности. Различают три основных режима эксплуатации скважины, сменяющих друг друга в определенном порядке. Соответствующая схема приведена ниже, на рисунке 2: здесь представлен характер зависимости пластового давления $\overline{P}(t)$ от времени для каждого отдельно взятого состояния.

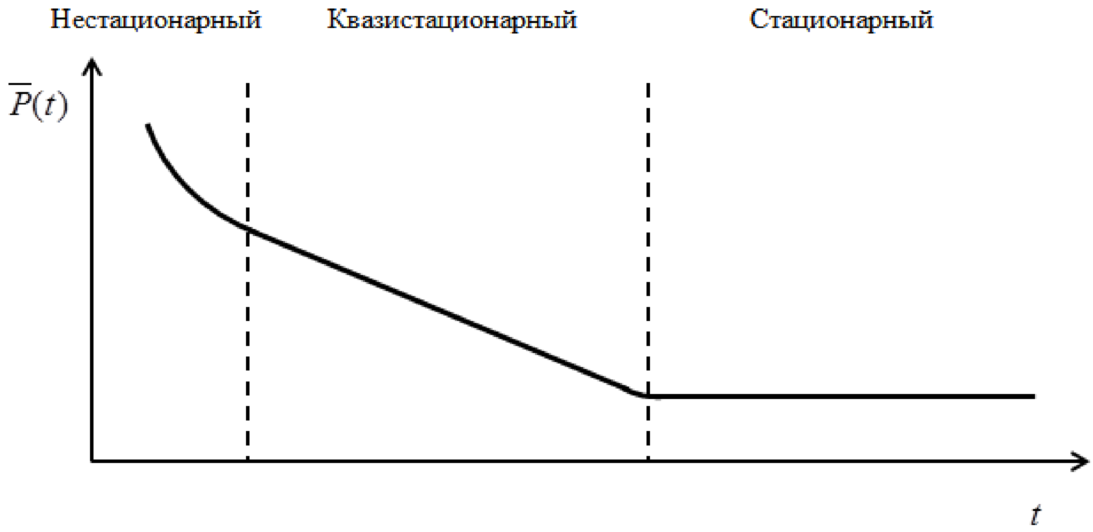


Рисунок 2. Графическое изображение зависимости пластового давления ($\overline{P}$) от времени (t) при различных режимах фильтрации.

В зависимости от текущего режима работы скважины изменение претерпевает и процесс фильтрации: в частности, различают три основных вида производной $m\rho$ по времени t.

1. Нестационарный (неустановившийся или переходный) режим: $\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = F(x,y,t)$;
2. Квазистационарный (псевдоустановившийся) режим: $\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = Const$;
3. Стационарный (установившийся) режим: $\frac{\partial(m\rho)}{\partial t} = 0$.

Согласно принятому в решаемой задаче условию квазистационарности, изменение давления во времени носит постоянный характер. Воспользуемся указанным свойством, а также слабой сжимаемостью, для преобразования уравнения неразрывности в системе (2.1). Наконец, далее будем рассматривать задачу в плоской постановке, при $x \in R^2$ или $x = (x, y)$.

Представим функцию *P(x,y,t)* в виде: $P(x,y,t)=\overline{P}(t)+\partial P(x,y)$.

Здесь $\overline{P}(t)=\frac{1}{\Delta}\iint\limits_{\Delta}P(x,y,t)dxdy$ обозначает среднее пластовое давление в резервуаре Ω с площадью Δ; а $\delta P(x,y)$ не является времязависимой и представляет собой отклонения величины давления в точке (x,y) от значения $\overline{P}(t)$ во всем резервуаре. Рассмотрим далее первое слагаемое $\frac{\partial(m\rho)}{\partial t}$ в уравнении неразрывности, помня о том, что $m=m_0$, исходя из условий задачи. Принимая во внимание равенство (2.2), получим:

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t}=\rho_0 C_p\frac{\partial P}{\partial t}. \tag{2.3}$$

Воспользуемся условием материального баланса для жидкости в замкнутом резервуаре объема $h\Delta$, разрабатываемом одиночной добывающей скважиной мощности (дебита) Q. Представляя функцию давления в виде $P(x,y,t)=\overline{P}(t)+\partial P(x,y)$, придем к следующему равенству:

$$C_p\frac{\partial\overline{P}}{\partial t}=\frac{Q}{h\Delta}. \tag{2.4}$$

Объединяя равенства (2.3) и (2.4), с учетом $\frac{\partial\overline{P}}{\partial t}=\frac{\partial P}{\partial t}$, получим итоговый вид первого слагаемого в уравнении неразрывности:

$$\frac{\partial(m\rho)}{\partial t}=\rho_0 C_p\frac{\partial\overline{P}}{\partial t}=\rho_0\frac{Q}{h\Delta}. \tag{2.5}$$

Далее обратим внимание на вид $div(\rho\vec{\upsilon})$. Одной из ключевых особенностей слабой сжимаемости является следующее требование: $\beta_l(P-P_0)<<1$. Таким образом, второе слагаемое уравнения неразрывности можно записать в следующей форме:

$$div(\rho\vec{\upsilon})=\rho_0 div(\vec{\upsilon}).$$

На основании всех вышеприведенных рассуждений исходную систему (2.1) можно привести к виду, исключающему из рассмотрения функцию ρ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}=-\frac{Q}{h\Delta}\\&\upsilon_x=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\\&\upsilon_y=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial y}\end{aligned}\right\}. \tag{2.6}$$

Используя (2.6), необходимо представить решение исходной задачи в виде функции скорости. Прежде всего, продолжим преобразование системы (2.6) дабы исключить из рассмотрения функцию *P*. Заменим последние два уравнения в (2.6) следующим условием:

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} = \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x}. \tag{2.7}$$

Таким образом, исходная задача фильтрации была сведена к поиску выражения для скорости $\vec{\upsilon}$. Построим итоговое представление для $\vec{\upsilon}$, используя комплексные переменные. Для этих целей введем комплексную и комплексно-сопряженную функции $V = \upsilon_x + i\upsilon_y$ и $\overline{V} = \upsilon_x - i\upsilon_y$. Ниже представлена связь между компонентами скорости в физической и комплексной плоскостях:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_x &= \frac{V(z,\bar{z}) + \overline{V}(z,\bar{z})}{2} \\ \upsilon_y &= \frac{V(z,\bar{z}) - \overline{V}(z,\bar{z})}{2i} \end{aligned}\right\}.$$

Используя операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right]$ и $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2i}\left[\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right]$, представим равенство (2.7) и верхнее уравнение из системы (2.6) в комплексной форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V(z,\bar{z})}{\partial z} + \frac{\partial \overline{V}(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}} &= -\frac{Q}{h\Delta} \\ \frac{\partial V(z,\bar{z})}{\partial z} &= \frac{\partial \overline{V}(z,\bar{z})}{\partial \bar{z}} \end{aligned}\right\}. \tag{2.8}$$

Как можно видеть, итоговая задача (2.8) имеет весьма простое общее решение в комплексных переменных:

$$\left.\begin{aligned} V(z,\bar{z}) &= \overline{F(z)} - \frac{Q}{2h\Delta} z \\ \overline{V}(z,\bar{z}) &= F(z) - \frac{Q}{2h\Delta} \bar{z} \end{aligned}\right\}. \tag{2.9}$$

Напоследок, отметим, что конечный вид функции *F(z)* определяется из граничных условий, определяемых на границах *S* и S_0. Пример соответствующих равенств, задаваемых на *S* и S_0, представлен ниже:

1. Непрерывность давления при переходе от контура скважины к ее призабойной зоне: $P\big|_{z=r_w e^{i\theta}} = P_w$, где P_w - давление в призабойной зоне;

2. Равенство дебита Q суммарному потоку жидкости, проходящему сквозь круговой контур с границей S_0: $h\int_0^{2\pi}\upsilon_n r_w d\theta = -Q$;

3. Непротекание внешней границы S (условие Неймана): $\upsilon_n\big|_S = 0$.

2. Построение системы интегро-дифференциальных уравнений (СИДУ) для мониторинга фронта вытеснения

Решение, полученное в предыдущем параграфе, далее может быть обобщено на случай совместного течения жидкостей при заводнении: при этом ключевые преобразования в выражении для функции $\overline{V}(z,\overline{z})$ вызваны появлением подвижного фронта, разделяющего вытесняемую и вытесняющую фазы. Далее опишем изменения в условиях задачи, связанные с переходом от извлечения нефти одиночной скважиной в замкнутом резервуаре к площадному заводнению. Отметим, что жидкости и твердая порода по-прежнему полагаются слабосжимаемыми, а фильтрация – протекающей по линейному закону Дарси при квазистационарном режиме.

В настоящей работе рассматривается внутриконтурное заводнение крупных месторождений, разрабатываемых сотнями разнопрофильных скважин. При этом нефтеносный пласт считается горизонтальным и плоским, с известной и неизменной мощностью (толщиной) h. Аналогично примеру, рассмотренному в предыдущем параграфе, моделируемое месторождение полагается однородным и изотропным по проницаемости: следовательно, коэффициенты m и k также считаются постоянными и известными. При этом, в отличие от предыдущего случая, внешняя граница пласта располагается на бесконечности: таким образом, краевые эффекты, возникающие на окраине месторождения, не учитываются. Наконец, отметим использование комплексных переменных для описания исследуемой области и построения решения. Говоря о системе разработки месторождения, следует обратить внимание на особенность ее геометрии: согласно схемам площадного заводнения, добывающие и нагнетательные скважины размещаются на территории пласта геометрически упорядоченными наборами. Таким образом, месторождение покрывается «сеткой» из смежных повторяющихся элементов. Для учета указанной особенности в настоящей работе использовался аппарат двоякопериодических решеток - аналогично идее, представленной в работах Р.Фазлыева [120] и Х.Морэя-Сьютоукса [164][165]: в то же время следует отметить, что предлагаемый подход несколько отличается от метода указанных авторов. Способ выделения ячеек двоякой периодичности из повторяющихся элементов схем площадного заводнения рассмотрен в следующем параграфе.

Как видно из всего вышесказанного, ключевые допущения предыдущего параграфа не претерпели изменений при переходе к новой задаче: таким образом, предложенный ранее способ представления функции $\overline{V}(z,\overline{z})$ применим и в случае заводнения, но с учетом ряда изменений, вызванных особенностями совместной фильтрации. Рассмотрим далее процесс вытеснения нефти водой в окрестности подвижного фронта: при этом воспользуемся допущениями, указанными в конце первого параграфа первой главы. Согласно предположениям модели однофазной фильтрации, каждая отдельно взятая точка пространства в любой момент времени может быть занята лишь одной жидкостью – нефтью или водой, что исключает наличие примесей по обе стороны от границы раздела. В свою очередь, представление о поршневом характере вытеснения обеспечивает резкость движущегося фронта: в итоге последний может быть представлен подвижной границей, разделяющей подобласти с двумя однородными по составу, физически различными жидкостями. Далее обратим внимание на геометрию рассматриваемой области. Отличительной особенностью двоякопериодических решеток, использованных в настоящей работе для моделирования системы разработки месторождения, является повторяемость физических процессов при переходе от ячейки к ячейке: таким образом, исследуемая область может быть сужена до одного повторяющегося элемента. Будем рассматривать процесс вытеснения нефти водой в пределах выделенной ячейки двоякой периодичности Ω. Отметим, что внешняя граница Ω, подобно замкнутому резервуару, полагается непротекаемой, что исключает приток жидкостей извне: таким образом, совместное течение воды и нефти в пределах ячейки двоякой периодичности обеспечивается исключительно действием добывающих и нагнетательных скважин, размещенных в порядке, соответствующем выбранной схеме заводнения.

Рассмотрим положение выбранной частицы жидкости $z(x,y)$ на фронте вытеснения, как показано на рисунке 3. Отметим, что в дальнейшем, для удобства, все рассуждения будут выполняться в системе координат $(\vec{t},\vec{n})$, связанной с векторами касательной $\vec{t}$ и нормали $\vec{n}$ к выбранной точке z: взаимное расположение систем $(\vec{t},\vec{n})$ и $(\vec{x},\vec{y})$ также представлено на рисунке 3.

Как видно из изображения, подвижная граница $\Gamma(t)$ разделяет обводненную зону (WATER), окружающую некоторую нагнетательную скважину (INJECTION WELL), и область, в настоящий момент не охваченную заводнением (OIL). Будем рассматривать процесс совместной фильтрации непосредственно в окрестности фронта вытеснения, опоясывающего INJECTION WELL: таким образом, на данном этапе геометрия ячейки Ω двоякой периодичности и способ взаимной расстановки скважин внутри нее не существенны.

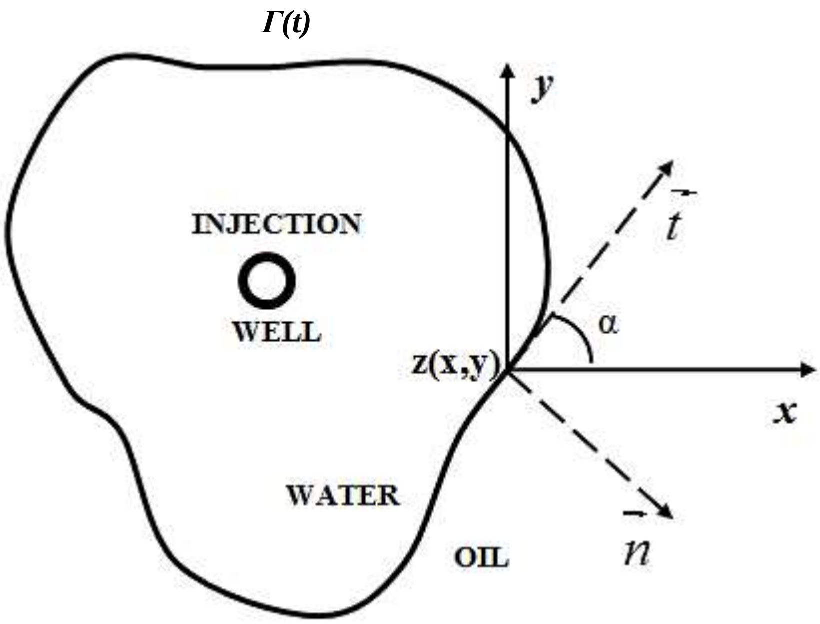


Рисунок 3. Положение частицы жидкости z(x,y) на фронте вытеснения *Г(t)* в выбранный момент времени.

Сосредоточимся далее на поведении функции скорости $V(z)$ в обводненной (WATER) и заводняемой (OIL) зонах, а также - на *Г(t)*. Ниже представлены условия, выполняемые на подвижной границе. Отметим, что в рамках предлагаемой постановки действие поверхностного натяжения не учитывается. Следовательно, по аналогии с задачей фильтрации, рассмотренной в первом параграфе первой главы, необходимо потребовать непрерывность функции давления P и нормальной компоненты скорости $V_n(z)$ на фронте вытеснения. В то же время, ввиду представления решения в виде функции $V(z)$ (см. предыдущий параграф), для большего удобства следует задать дополнительное условие, выполняемое для касательной компоненты $V_t(z)$. Используя линейный закон Дарси в форме $V_t(z) = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial t}$ и принимая во внимание непрерывность давления при прохождении через *Г(t),* получим равенство для $V_t(z)$. Условия, задаваемые для касательной и нормальной компонент скорости $V(z)$ на подвижной границе, представлены ниже:

$$\begin{cases} V_n^{water} = V_n^{oil}; \\ \mu_{water} V_t^{water} = \mu_{oil} V_t^{oil}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Заметим, что в дальнейших рассуждениях, по аналогии с предыдущим параграфом, будем рассматривать комплексно-сопряженную скорость $\overline{V}(z,\overline{z})$, обозначаемую как $\overline{V}(z)$, для удобства записи.

Зафиксируем некоторый момент времени t и, соответственно - положение фронта вытеснения *Г(t)*, как показано на рисунке 3. Рассмотрим функцию скорости фильтрации $\overline{V}(z)$ в некоторой выбранной точке *Z(x,y)*, выполнив при этом переход в систему координат $(\vec{t},\vec{n})$. Значения касательной $V_t(z)$ и нормальной $V_n(z)$ компонент связаны с величинами $V_x(z)$, $V_y(z)$ следующим образом:

$$\begin{cases} V_x = V_t\cos\alpha + V_n\sin\alpha; \\ V_y = V_t\sin\alpha - V_n\cos\alpha. \end{cases} \tag{2.11}$$

Исходя из определения сопряженной скорости $\overline{V}(z) = V_x(z) - iV_y(z)$, используя формулы (2.2), получаем:

$$\overline{V}(z) = V_x - iV_y = V_t(\cos\alpha - i\sin\alpha) + iV_n(\cos\alpha - i\sin\alpha) = (V_t(z) + iV_n(z))e^{-i\alpha}. \tag{2.12}$$

Как было сказано выше, для описания функции $V(z)$ и, соответственно, $\overline{V}(z)$, возможно использование выражения для $\Phi(z,\overline{z})$, полученного в предыдущем параграфе, но только – для областей WATER и OIL. При переходе к фронту вытеснения *Г(t)* необходимо учесть скачок значений касательной компоненты скорости, выраженный через второе равенство в условии (2.10). Согласно методу решения плоских квазистационарных задач с подвижной границей, предлагаемому в настоящей работе, для этих целей функция $\overline{V}(z)$ может быть записана в виде [59][62]:

$$\overline{V}(z) = \Phi(z,\overline{z}) + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma(t)} \gamma(\tau)\varsigma(\tau - z)d\tau. \tag{2.13}$$

Здесь $\Phi(z,\overline{z})$ представляет собой функцию скорости, построенную ранее в рамках задачи об извлечении нефти одиночной скважиной из замкнутого резервуара: конечный вид $\Phi(z,\overline{z})$, обобщенной на случай двоякой периодичности, будет представлен в следующем параграфе. Второе слагаемое в правой части формулы (2.13) представляет собой сингулярный интеграл с ядром типа Коши, позволяющий учесть скачок значений $\overline{V}(z)$ при прохождении через *Г(t)*: здесь γ(z) обозначает некоторую функцию, определенную на подвижной границе, а ζ(z) – дзета-функцию Вейерштрасса.

Выражение, аналогичное (2.13), было использовано В.Т.Койтером [159] [160] в его работе, посвященной задачам теории упругости. Разрешая вопрос о растяжении и изгибе упругих перфорированных пластин, автор свел исходную краевую задачу к сингулярному интегральному уравнению (СИУ), включив в него также двоякопериодические функции, построенные на базе $\zeta(z)$. Заметим, что в более общем случае, при решении плоской квазистационарной задачи с подвижной границей в непериодической области, слагаемое $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma(t)}\gamma(\tau)\varsigma(\tau - z)d\tau$ следует заменить классическим интегралом типа Коши - $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma(t)}\frac{\gamma(\tau)}{\tau - z}d\tau$.

Воспользуемся далее введенным представлением (2.13) для определения скорости со стороны нефти $\overline{V}^{oil}(z)$ и воды $\overline{V}^{water}(z)$ на *Γ(t)*. Важно отметить требование гладкости для границы раздела вода-нефть: указанное условие является необходимым для существования предлагаемого решения. Задавая естественную параметризацию для контура *Γ(t)*, основанную на параметре длине дуги *s* (см. рисунок 4), и применяя далее формулы Сохоцкого-Племеля [77], получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \overline{V}^{water}(z(s)) = \Phi(z(s), \overline{z}(s)) + \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma(t)}\varsigma(\tau - z(s))\gamma(\tau)d\tau + \dfrac{\gamma(z(s))}{2}; \\ \overline{V}^{oil}(z(s)) = \Phi(z(s), \overline{z}(s)) + \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma(t)}\varsigma(\tau - z(s))\gamma(\tau)d\tau - \dfrac{\gamma(z(s))}{2}. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Здесь *z=z(s)* , а переменная интегрирования *τ* связана с точками контура *Γ(t)* и имеет тот же смысл, что и *z* вне интегральной части.

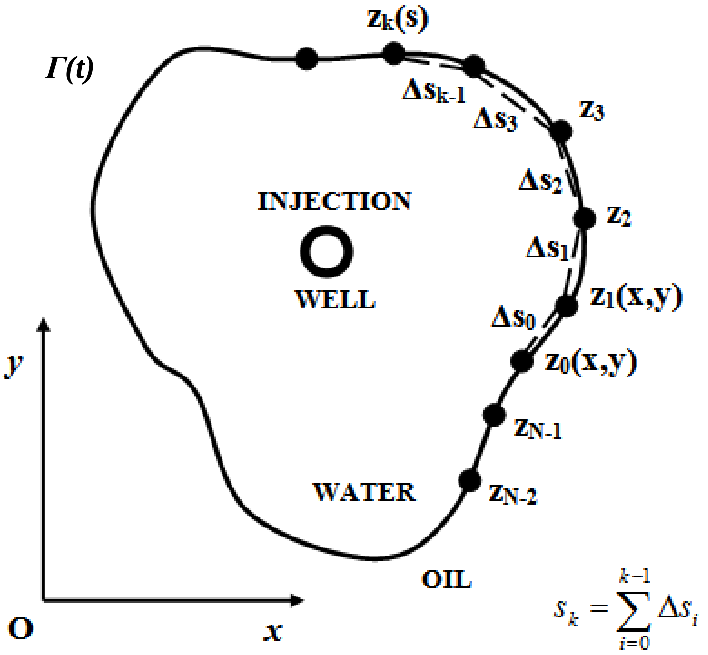


Рисунок 4. Схема параметризации фронта вытеснения *Γ(t)* и его разбиения на $z_j \,/\, j = \overline{0..N-1}$ – положения отслеживаемых точек на подвижной границе.

Используя полученную систему, можно определить вид неизвестной подынтегральной функции $\gamma(z)$. Для этих целей необходимо вычесть одно уравнение из другого в (2.14), а затем – воспользоваться определением функций $\overline{V}^{water}(z)$ и $\overline{V}^{oil}(z)$ через касательные и нормальные компоненты, согласно (2.12). В результате получим:

$$\gamma(z) = \overline{V}^{water}(z) - \overline{V}^{oil}(z) = \{[V_t^{water}(z) - V_t^{oil}(z)] + i[V_n^{water}(z) - V_n^{oil}(z)]\}e^{-i\alpha},$$

откуда, принимая во внимание условия (2.10), приходим к следующему выражению:

$$\gamma(z) = \left\{V_t^{water}(z) - V_t^{oil}(z)\right\}e^{-i\alpha} = V_t^{water}(z)[1 - \frac{\mu^{water}}{\mu^{oil}}]e^{-i\alpha}. \qquad (2.15)$$

Ввиду потери непрерывности на *Г(t)*, функция скорости фильтрации должна быть доопределена в каждой точке на фронте вытеснения, с использованием $\overline{V}^{water}(z)$ и $\overline{V}^{oil}(z)$. Следовательно, далее необходимо определить касательные и нормальные компоненты скорости для воды и нефти на подвижной границе. Благодаря особенностям задач с подвижной границей, в каждой отдельно взятой точке исследуемой области располагается только одна жидкость: таким образом, значения функций $\overline{V}^{water}(z)$ и $\overline{V}^{oil}(z)$ могут быть определены последовательно и независимо друг от друга. Исходя из условий (2.1) видна простая связь между касательными и нормальными компонентами скорости со стороны нефти и воды. Следовательно, используя систему (2.14), необходимо составит уравнение для определения компонент V_t, V_n лишь для одной жидкости, после чего значение $\overline{V}(z)$ можно легко получить и для второй, с помощью равенств (2.10). Для определенности сосредоточим далее внимание на комплексно-сопряженной скорости со стороны воды - $\overline{V}^{water}(z)$.

Обозначим отношение вязкостей через параметр $\kappa = \dfrac{\mu^{water}}{\mu^{oil}}$, а касательную и нормальную компоненты, соответственно, как $T(s) = V_t^{water}(z(s))$ и $N(s) = V_n^{water}(z(s))$. Последние представляют собой вещественные функции от вещественного аргумента s – параметра длины дуги. Соответствующую ему переменную интегрирования обозначим как σ. Таким образом, справедлива следующая взаимосвязь между комплексными и вещественными параметрами внутри и вне интеграла: $z = z(s); \tau = z(\sigma)$.

Используя введенные обозначения, перепишем выражение для функции $\overline{V}^{water}(z(s))$ в выбранной точке *z(s)* на подвижной границе. Для перехода к касательным и нормальным компонентам $T(s)$ и $N(s)$ следует воспользоваться формулой (2.12). Отметим, что, в результате параметризации, контурный интеграл будет преобразован в определенный, с переменной интегрирования *σ*. Принимая в расчет выражение (2.15) для $\gamma(z)$, получим интегральное уравнение, описывающее скорость продвижения фронта *Г(t)* со стороны воды:

$$\begin{aligned}&\overline{V}^{water}(z(s)) = [V_t^{water}(z(s)) + iV_n^{water}(z(s))]e^{-i\alpha} = \\ &= \Phi(z(s)) + \frac{1-\kappa}{2\pi i}\int_0^S \left[\zeta(z(\sigma) - z(s))T(\sigma)e^{-i\alpha'}\right]\frac{d\tau}{d\sigma}d\sigma + \frac{1-\kappa}{2}T(s)e^{-i\alpha}.\end{aligned} \qquad (2.16)$$

Здесь переменная σ связана с параметром длины дуги s, а предел интегрирования S определяется по формуле: $S=\sum_{i=0}^{N-1}\Delta s_i$, где N – число отслеживаемых точек (см. Рисунок 4), в которых определяются значения $\overline{V}(z)$. Известно, что вектор касательной $\vec{t}$, проведенной через z(s), напрямую связан с производной по параметру s. Исходя из рисунка 3, эту взаимосвязь можно представить следующим выражением: $e^{i\alpha}=\frac{dz}{ds}$. Отсюда легко получить определения для аналогичных множителей, входящих в состав формулы (2.16):

$$e^{-i\alpha}=\frac{d\overline{z}}{ds};\ e^{-i\alpha'}=\frac{d\overline{\tau}}{d\sigma}.$$

Наконец, после группировки слагаемых в выражении (2.7) и с учетом приведенных выше формул, получаем окончательный вид сингулярного интегрального уравнения (СИУ) для касательной и нормальной компонент скорости $\overline{V}^{water}$ на фронте вытеснения.

$$\frac{1+\kappa}{2}T(s)+iN(s)=[\Phi(z(s))+\frac{1-\kappa}{2\pi i}\int_0^S\zeta(z(\sigma)-z(s))T(\sigma)d\sigma]\frac{dz}{ds}. \qquad (2.17)$$

Используя решение (2.17) и применяя далее условия (2.10), можно получить и значения $\overline{V}_t^{oil}(z(s))$ и $\overline{V}_n^{oil}(z(s))$ в каждой отдельно взятой точке s. Таким образом, уравнение (2.17) позволяет определить значения скорости фильтрации со стороны нефти и воды на подвижной границе. Однако для нахождения перемещения самой границы следует воспользоваться иным равенством, связывающим перемещение *Г(t)* и функцию $\overline{V}(z)$. Представляя скорость перемещения выделенных точек z(s) на фронте вытеснения как $\frac{\partial\overline{z(s)}}{\partial t}$ и принимая во внимание пористый характер исследуемой области, приходим к следующему уравнению:

$$m\frac{d\overline{z(s(t))}}{dt}=\overline{V}(z(s(t))). \qquad (2.18)$$

Здесь m обозначает пористость нефтеносного пласта, полагаемую постоянной и известной - согласно исходным допущениям задачи.

Далее необходимо доопределить функцию скорости фильтрации на подвижной границе: согласно [34], $\overline{V}(z)$ может быть представлена в виде полусуммы известных значений $\overline{V}^{oil}(z)$ и $\overline{V}^{water}(z)$, что видно из формул Сохоцкого-Племеля. Напомним, что, ввиду принятой параметризации, здесь и далее подразумевается зависимость z=z(s) для точек подвижной границы. Обозначим через $T^{water}(s)=V_t^{water}(z(s))$ и $N^{water}(s)=V_n^{water}(z(s))$, соответственно, касательную и нормальную компоненты скорости течения воды. Аналогичным образом представим составляющие $\overline{V}^{oil}(z(s))$ через $T^{oil}(s) = V_t^{oil}(z(s))$ и $N^{oil}(s) = V_n^{oil}(z(s))$. Тогда, с учетом условий (2.1), выражение для скорости фильтрации $\overline{V}(z)_{\Gamma(t)}$ на подвижной границе *Г(t)* примет вид:

$$\overline{V}(z)_{\Gamma(t)} = \frac{1}{2}\left(\overline{V}^{oil}(z) + \overline{V}^{water}(z)\right) = \frac{1}{2}\left(V_t^{water}(z) + iV_n^{water}(z) + V_t^{oil}(z) + iV_n^{oil}(z)\right)e^{-i\alpha} = \tag{2.19}$$

$$= \left(\frac{(1+\kappa)}{2}T^{water}(s) + iN^{water}(s)\right)e^{-i\alpha}.$$

Наконец, подставляя полученное определение (2.19) для $\overline{V}(z)_{\Gamma(t)}$ в (2.18) , приходим к дифференциальному уравнению, описывающему перемещение фронта вытеснения во времени. Специфика проведенных рассуждений предполагает решение интегро-дифференциальных систем типа (2.17)-(2.18) в окрестностях каждой отдельно взятой нагнетательной скважины, входящей в ячейку двоякой периодичности. Таким образом, дифференциальное уравнение (2.18), преобразованное с учетом (2.19), следует дополнить начальными условиями, задаваемыми для отслеживаемых точек z(s) вблизи INJECTION WELL. В результате получим систему из *N* однотипных задач Коши вида:

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{d\overline{z_j(s(t))}}{dt} = \left[\frac{(1+\kappa)}{2}T_j^{water}(s(t)) + iN_j^{water}(s(t))\right]e^{-i\alpha_j}; \\ & z_j(0) = z_0 + r_w e^{i\theta_j} \ / \ j = \overline{0..N-1}. \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

Здесь z_0 – центр призабойной зоны радиуса r_w нагнетательной скважины INJECTION WELL, сквозь которую в месторождение поступает вода. Изначально все отслеживаемые точки z_j размещаются вокруг ствола INJECTION WELL и равноудалены от него: угол $\theta_j = j\Delta\theta$, соответствующий каждой z_j , указывает на ее точное местоположение относительно центра z_0 колонны, а величина $\Delta\theta$ определяется на основе их (точек) суммарного числа N как $\Delta\theta = \frac{360}{N}$. Таким образом, система (2.17), (2.20), фактически, представляет собой задачу трассировки, решение которой позволяет отслеживать перемещения фронта вытеснения *Г(t)* во времени.

3. Представление функции скорости в двоякопериодической области

Интегро-дифференциальная система (2.17), (2.20), позволяющая отслеживать перемещение подвижной границы в задаче заводнения, была построена для некоторой произвольной ячейки двоякой периодичности. При этом вид функции $\Phi(z,\overline{z})$, входящей в состав сингулярного интегрального уравнения (СИУ), остался неопределенным. В настоящем параграфе рассматривается способ построения двоякопериодической решетки на площади моделируемого месторождения, и далее – представление функции скорости $\Phi(z,\bar{z})$ с учетом двоякой периодичности исследуемой области.

Как уже было сказано ранее, использование схем внутриконтурного заводнения предполагает упорядоченное размещение добывающих и нагнетательных скважин на территории нефтеносного пласта с образованием т.н. повторяющихся элементов. Последние подразумевают определенную периодичность, присущую системе разработки месторождения. Существует несколько классификаций способов расстановки скважин. Так, в работе [50] схемы внутриконтурного заводнения подразделяют на рядные и площадные, в зависимости от их достоинств и недостатков при эксплуатации на реальных месторождениях: указанная классификация описана в шестом параграфе первой главы. В свою очередь, в работе [40] схемы расстановки скважин группируют по типу регулярной сетки, на основе которой формируются повторяющиеся элементы – квадратной или треугольной. К настоящему времени известно порядка 30 различных способов расстановки скважин при внутриконтурном заводнении. Некоторые из наиболее распространенных схем представлены на рисунке 5.

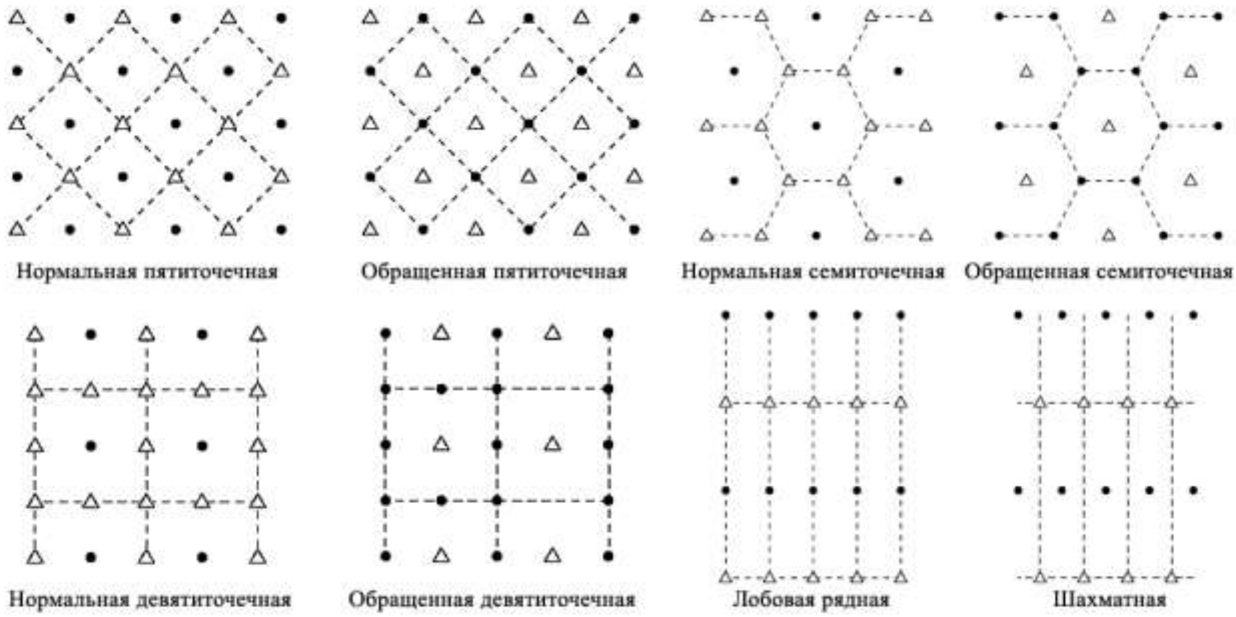


Рисунок 5. Примеры нескольких способов расстановки скважин при внутриконтурном заводнении. Граница, разделяющая смежные повторяющиеся элементы, выделена пунктиром. Аналогично пятому параграфу первой Главы, добывающие скважины обозначены черными кругами, добывающие – белыми треугольниками. Отметим, что некоторые из представленных выше схем заводнения приведены в паре с соответствующими им обращенными версиями: при использовании «обратного» варианта расстановки скважин направление их действия (добыча/закачка) меняется на противоположное.

Далее рассмотрим пример системы разработки для месторождения, описанного в предыдущем параграфе. Благодаря идеализированному представлению, принятому для нефтеносного пласта, размещенная на его площади сетка повторяющимся элементов будет сохранять регулярность – ввиду отсутствия каких-либо неоднородностей и зон повышенной или пониженной проницаемости. Воспользуемся, к примеру, широко распространенной пятиточечной обращенной схемой расстановки скважин: в таком случае система разработки месторождения будет иметь вид, представленный на рисунке 6.

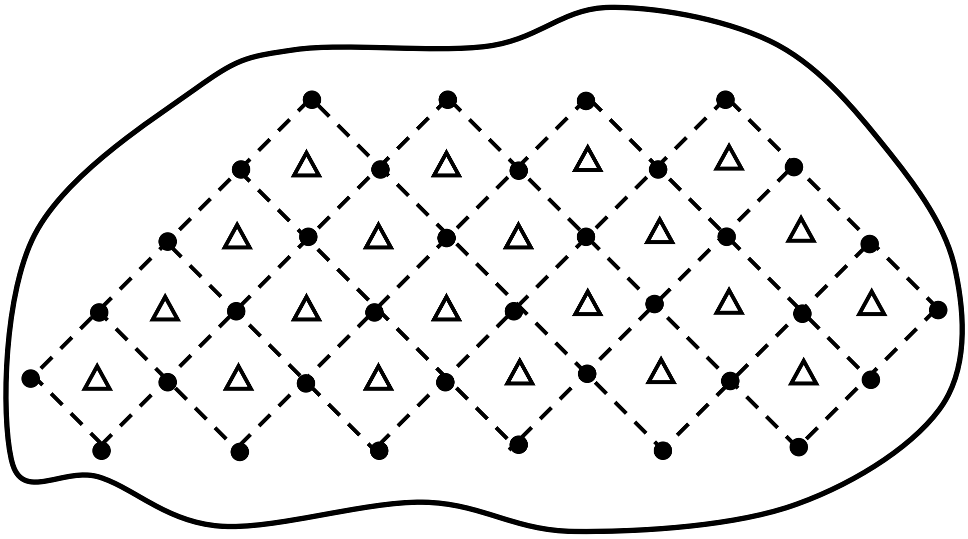


Рисунок 6. Пример системы разработки месторождения, построенной на основе пятиточечной обращенной схемы заводнения. Внешняя граница пласта выделена черной сплошной линией. Все прочие использованные обозначения аналогичны таковым из рисунка 5.

Упорядоченность и периодичность, присущие схемам расстановки скважин, делают удобным применение двоякопериодических решеток для представления системы разработки пласта. Обзор данного математического аппарата выполнен в пятом параграфе первой Главы. В частности, конец указанного параграфа посвящен способу построения двоякопериодических решеток, примененному в работах Х.Морэя-Сьютоукса и Р.Фазлыева: следует отметить, что в своих трудах исследователи использовали исключительно прямоугольные сетки при моделировании системы разработки месторождения. В свою очередь подход, примененный в настоящей работе, предполагает использование как прямоугольных, так и ромбических решеток, что позволяет во многих случаях уменьшить число скважин, включаемых в ячейки двоякой периодичности. Данный метод демонстрируется на рисунках 7 и 8, на примере нормальной пятиточечной и обращенной семиточечной схем заводнения. Как видно из представленных изображений, в общем случае ячейка двоякой периодичности имеют вид параллелограмма, форма и размер которого определяются параметром $\psi = \lambda e^{i\varphi}$, где

$\lambda = {|\omega_1|}/{|\omega_2|}$ представляет собой отношение длин базисных векторов $(\overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_2}), \mathrm{Im}[\omega_1/\omega_2] \neq 0$, а φ – угол между ними.

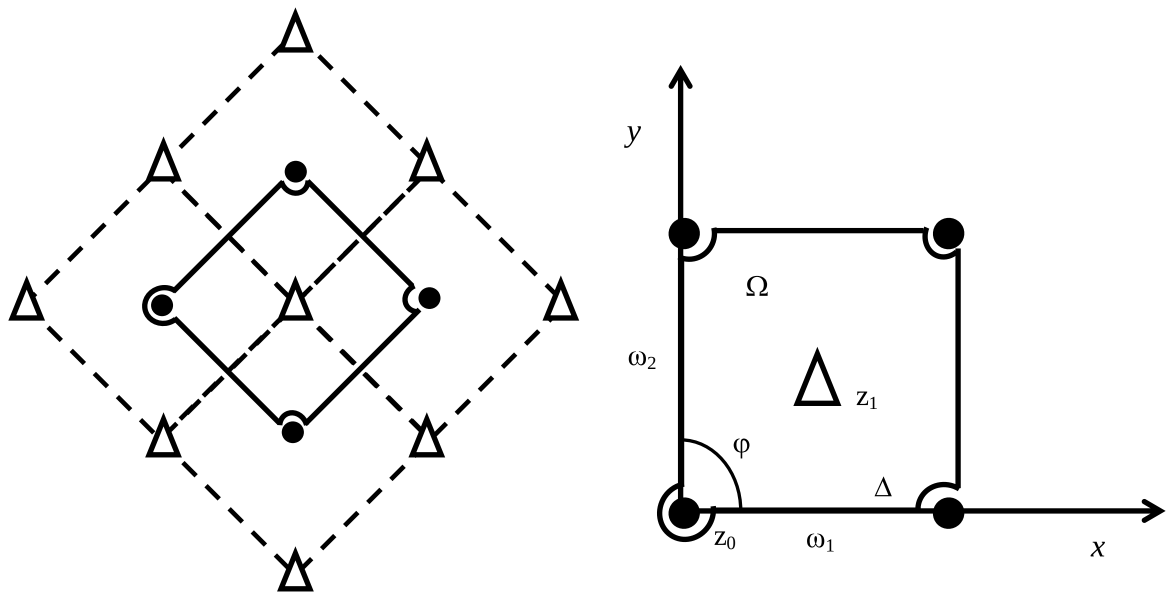


Рисунок 7. Пример построения двоякопериодической решетки на основе системы разработки при внутриконтурном заводнении. Слева представлена группа смежных повторяющихся элементов, соответствующих нормальной пятиточечной схеме расстановки скважин. Используемые обозначения аналогичны таковым на рисунках 5 и 6. При этом границы элемента (ячейки) двоякопериодической решетки выделены сплошной линией. Изображение справа демонстрирует геометрию ячейки двоякой периодичности. Точки размещения скважин обозначены как z_i.

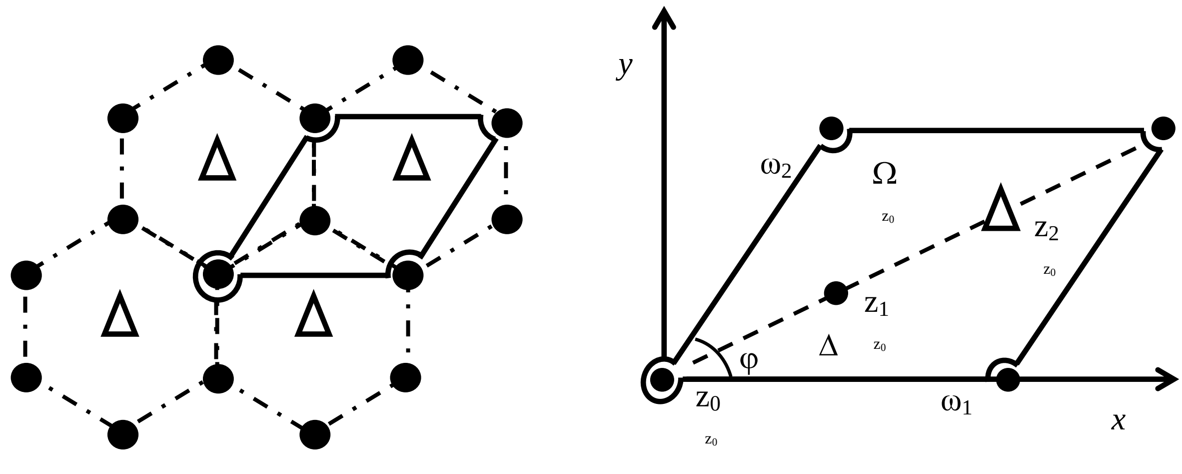


Рисунок 8. Способ выделения ячейки двоякой периодичности из элементов обращенной семиточечной схемы заводнения. Структура изображения и используемые обозначения полностью аналогичны таковым на рисунке 7.

Заметим, что изображения на рисунках 7 и 8 соответствуют т.н. каноническому случаю, при котором базисный вектор ω_1 сонаправлен с осью абсцисс *Ox*. Подробное описание двоякопериодических решеток и некоторых определяемых на них функций приведено в Приложении.

Повторяемость физических процессов внутри двоякопериодической решетки позволяет сузить область исследования до одной ячейки, что и было сделано в предыдущем параграфе. При этом граница рассматриваемого элемента Ω (см. второй параграф) полагается замкнутой и непротекаемой, что подразумевает отсутствие притока жидкости извне. В отличие от задач с подвижной границей, рассмотренных ранее, в первом параграфе первой главы, в случае двоякопериодической области условие на внешней границе задается неявно – посредством метода мнимых источников. В действительности, каждая рассматриваемая ячейка двоякой периодичности окружается рядом соседних, построенных по принципу «повторения». Ниже, на рисунке 9, приведен пример использования метода мнимых источников для элемента двоякопериодической решетки, соответствующего пятиточечной обращенной схеме заводнения. Стрелками обозначены направления встречных потоков нагнетаемой воды.

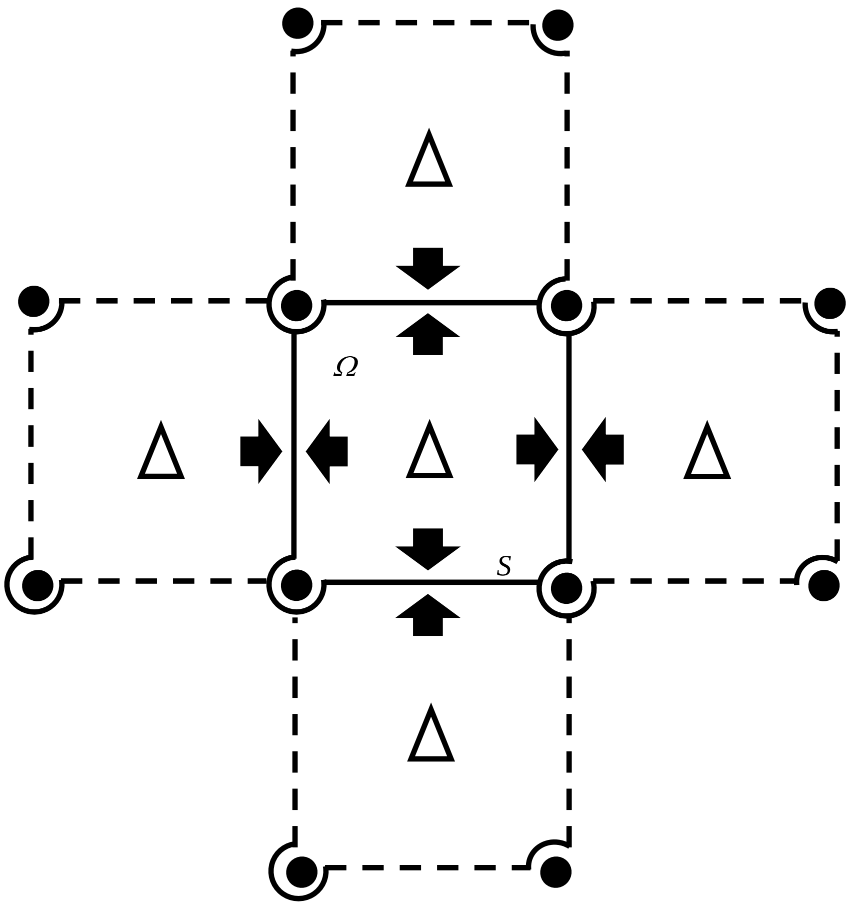


Рисунок 9. Схема применения метода мнимых источников для формирования внешней границы S исследуемой области Ω. Форма ячейки двоякой периодичности соответствует таковой из рисунка 7. Границы «отраженных» элементов выделены пунктиром. Черными стрелками обозначены встречные потоки нагнетаемой воды.

Принимая во внимание равную мощность нагнетательных скважин во всех пяти представленных ячейках, очевидно, что нормальная компонента скорости на внешней границе S окажется равной нулю. Таким образом, для исследуемой области Ω неявным образом задается условие Неймана на S: $\left.\frac{\partial V}{\partial n}=0\right|_{z\in S}$. В свою очередь, применение метода мнимых источников предполагает построение «отражений» для каждой ячейки двоякой периодичности: таким образом, невозможно существование «приграничных» элементов двоякопериодической решетки, располагающихся на границе резервуара. Таким образом, моделируемое месторождение должно иметь бесконечную границу, что и было сделано в предыдущем параграфе.

Далее следует уточнить вид пока неопределенной $\Phi(z,\bar{z})$, входящей в состав построенной ранее интегро-дифференциальной системы (2.17), (2.20). Отметим, что использование двоякопериодических решеток накладывает определенные условия на поведение функций, определяемых в соответствующей области. Примерами подобных операторов являются эллиптические функции Вейерштрасса, использованные П.В.Ротерсом и В.И. Астафьевым [4] [140] в задачах о разработке месторождения двоякопериодическими кластерами, составленными из добывающих скважин. Рассматривая фильтрацию жидкости в пределах отдельно взятой ячейки двоякой периодичности Ω, авторы представили функцию скорости $\overline{V}(z,\bar{z})$ в следующем виде:

$$\overline{V}(z,\bar{z})=-\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i^{product}}{2\pi h}\left[\zeta(z-z_i)+\alpha(z-z_i)-\frac{\pi}{\Delta}(\overline{z-z_i})\right]. \qquad (2.21)$$

Здесь $i=\overline{1,n}$ - число добывающих скважин мощностей Q_i, включенных в состав ячейки Ω и расположенных в точках z_i. В свою очередь h указывает на толщину пласта, $\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum_{i,j=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}\right)$ обозначает дзета-функцию Вейерштрасса, $\alpha=\left[\frac{\pi}{\Delta}-\frac{2}{\omega_1}\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right]$ - числовой параметр, обеспечивающий двоякую периодичность $\overline{V}(z,\bar{z})$, ввиду квазипериодичности $\zeta(z)$, Δ - площадь ячейки.

Выражение (2.21), построенное для $\overline{V}(z,\bar{z})$, в действительности может быть легко обобщено на случай внутриконтурного заводнения. Отметим, что в рамках решаемой задачи, как и в работах [4][140], все скважины, составляющие систему разработки месторождения, представляются точечными источниками при закачке и стоками при извлечении жидкости. При этом единственным различием процессов нагнетания и добычи является направление потока соответствующей фазы (воды или нефти). Таким образом, слагаемые, соответствующие действию нагнетательных скважин, будут включаться в формулу (2.21) с противоположным знаком [64] [68]. В результате, искомая функция $\Phi(z,\bar{z})$ примет следующий общий вид:

$$\Phi(z,\bar{z}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i^{inject}}{2\pi h}\left[\zeta(z-z_i)+\alpha(z-z_i)-\frac{\pi}{\Delta}(\overline{z-z_i})\right]-$$

$$-\sum_{j=1}^{m} \frac{Q_j^{product}}{2\pi h}\left[\zeta(z-z_i)+\alpha(z-z_i)-\frac{\pi}{\Delta}(\overline{z-z_i})\right]. \qquad (2.22)$$

Формула (2.22) описывает скорость течения, порождаемого действием m добывающих (с мощностями Q_j) и n нагнетательных (с мощностями Q_i) скважин, включенных в состав исследуемой ячейки Ω двоякой периодичности. Все прочие обозначения аналогичны таковым из выражения (2.21). Отметим важную особенность, связанную с соотношением суммарных мощностей добычи и закачки: благодаря предположению о квазистационарной фильтрации, $\sum_{i=1}^{n} Q_i^{inject}$ и $\sum_{j=1}^{m} Q_j^{product}$ не обязаны быть равными друг другу, в отличие от случая несжимаемых жидкостей и твердой породы. Напоследок, приведем, в качестве примера, вид функции скорости $\Phi(z,\bar{z})$ для ячеек двоякой периодичности, изображенных на рисунках 7 и 8: естественно, в обоих случаях представленные выражения справедливы для всей области Ω за исключением подвижной границы.

При построении ячейки двоякой периодичности на основе нормальной пятиточечной схемы заводнения (рисунок 7) параметр τ, определяющий форму Ω, имеет вид: $\tau = e^{i\frac{\pi}{2}}$. Соответствующее выражение для $\Phi(z,\bar{z})$ приведено ниже: заметим, что в обоих рассматриваемых случаях начало координат перенесено в точку z_0, для удобства.

$$\Phi(z,\bar{z}) = \frac{Q_1^{inject}}{2\pi h}\left[\zeta(z-z_1)+\alpha(z-z_1)-\frac{\pi}{\Delta}(\overline{z-z_1})\right]-\frac{Q_1^{product}}{2\pi h}\left[\zeta(z)+\alpha z-\frac{\pi}{\Delta}\bar{z}\right].$$

При рассмотрении ячейки двоякой периодичности, построенной на основе семиточечной обращенной схемы, выражение для параметра τ примет вид: $\tau = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Соответствующая формула для $\Phi(z,\bar{z})$ представлена ниже:

$$\Phi(z,\bar{z}) = \frac{Q_1^{inject}}{2\pi h}\left[\zeta(z-z_2)+\alpha(z-z_2)-\frac{\pi}{\Delta}(\overline{z-z_2})\right]-$$

$$-\frac{Q_1^{product}}{2\pi h}\left[\zeta(z)+\alpha z-\frac{\pi}{\Delta}\bar{z}\right]-\frac{Q_2^{product}}{2\pi h}\left[\zeta(z-z_1)+\alpha(z-z_1)-\frac{\pi}{\Delta}(\overline{z-z_1})\right].$$

4. Методы численного решения СИДУ

Выражение (2.21) дополняет интегро-дифференциальную систему (2.17), (2.20), ранее построенную во втором параграфе для отслеживания перемещений фронта вытеснения *Г(t)*. Настоящий раздел посвящен численным методам, применяемым для решения сингулярного интегрального (2.17) и дифференциального (2.20) уравнений на каждом временном шаге, в процессе заводнения. Отметим важную особенность построенной системы (2.17), (2.20): ввиду ограничений, накладываемых формулами Сохоцкого-Племеля на гладкость подвижной границы *Г(t)*, решение сингулярного интегрального уравнения корректно вплоть до момента образования т.н. угловых точек – в частности, до начала обводнения добывающих скважин. В общем виде процедуру мониторинга *Г(t)* можно разбить на два основных этапа. Прежде всего, необходимо определить скорость фильтрации $\overline{V}^{water}(z(s)) = \left[V_t^{water}(z(s)) + iV_n^{water}(z(s))\right]e^{-i\alpha}$ со стороны воды в каждой из N отслеживаемых точек (трассеров) на фронте вытеснения, для выбранного момента времени t: для этих целей требуется решить систему матричных уравнений, построенную на основе (2.17) – ввиду невозможности вычислить все N значений $V_t^{water}(z(s))$ и $V_n^{water}(z(s))$ последовательно. Далее, после нахождения касательных и нормальных компонент скорости $\overline{V}^{water}(z(s))$ на всем фронте вытеснения, можно определить перемещения трассеров $z_j(s)/\, j = \overline{0..N-1}$ к моменту времени $t+\Delta t$. Для этих целей требуется решить задачу трассировки (2.20) для каждой отдельно взятой $z_j(s)$, используя соответствующее значение $\overline{V}^{water}(z_j(s))$.

Ниже рассмотрены численные методы, используемые в настоящей работе для решения интегро-дифференциальной системы (2.17), (2.20): отметим, что соответствующий анализ устойчивости и сходимости вычислительных схем приведен на примере конкретных задач заводнения, в следующей главе. Следуя указанному выше порядку, представим вначале метод решения сингулярного интегрального уравнения (СИУ) и, прежде всего, – способ вычисления сингулярного интеграла (СИ).

4.1. Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения

Обратимся к разбиению *Г(t)*, предложенному на рисунке 4: при этом будем рассматривать некоторый фиксированный момент времени *t*. Как видно из изображения, контур *Г(t)* разбит конечным дискретным множеством выделенных точек – позиций трассеров, совокупность которых, построенная для конкретного момента времени, и образует фронт вытеснения. Каждой из z_j соответствует значение s_j, имеющее смысл параметра длины дуги: формула для вычисления s_j представлена на рисунке 4.

Рассмотрим отдельно интеграл $\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s))T(\sigma)d\sigma$: согласно введенной ранее параметризации, $z_j = z(s_j)$, а переменная интегрирования σ имеет тот же смысл, что и s, и напрямую связана с точками на контуре *Г(t)*. Представим исследуемый СИ в виде совокупности интегралов на отрезках $[s_j, s_{j+1}]$ разбиения:

$$\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s))T(\sigma)d\sigma = \sum_{j=0}^{N-1}\int_{s_j}^{s_{j+1}} \zeta(z(\sigma)-z(s))T(\sigma)d\sigma .$$

Выберем и зафиксируем некоторую точку $z_k = z(s_k)$ на рисунке 4: указанная точка представляет положение частицы-трассера, скорость которой необходимо вычислить, найдя значения известной функции $\Phi(z(s_k),\bar{z}(s_k))$ и исследуемого интеграла $\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma$. Далее, для удобства записи, будем использовать следующее обозначение для Ф: $\Phi(z(s_k)) = \Phi(z(s_k),\bar{z}(s_k))$. Перепишем указанную выше сумму интегралов, используя в качестве «точки отчета» z_k:

$$\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma = \sum_{i=k}^{N+k-1}\int_{s_i}^{s_{i+1}} \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma . \tag{2.23}$$

Как следует из ранних рассуждений, сингулярные интегралы, входящие в сумму (2.23), имеют ядро типа Коши, что предполагает особенность вида $\dfrac{1}{z-z_k}$ при прохождении через точку z_k контура *Г(t)*. В то же время, исходя из определения (2.23), ясно, что подобной особенностью обладают только два интеграла, включающие в свою область z_k: при этом все остальные слагаемые суммы сохраняют регулярность на всей границе *Г(t)*. Для дальнейших рассуждений удобно объединить интегралы $\int_{s_{k-1}}^{s_k} \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma$ и $\int_{s_k}^{s_{k+1}} \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma$ в один, используя закон аддитивности, и далее рассмотреть его в смысле главного значения Коши для устранения особенности. Таким образом, сумма (2.23) примет следующий вид:

$$\sum_{j=k}^{N+k-1}\int_{s_j}^{s_{j+1}} \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma = \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma \tag{2.24}$$

$$+\sum_{i=k+1}^{N+k-2}\int_{s_i}^{s_{i+1}} \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma.$$

Рассмотрим подробнее первое слагаемое, включающее в себя особенность вида $\dfrac{1}{z-z_k}$.

Как было сказано ранее, сингулярная составляющая изучаемого интеграла включена в состав дзета-функции Вейерштрасса, которая, как известно, представляется абсолютно сходящимся рядом и вынесенным за его пределы сингулярным слагаемым:

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}\right),$$

где $\omega = m\omega_1 + n\omega_2 / m,n \in Z$, - узел двоякопериодической решетки, на которой определена $\zeta(z)$.

Как следует из определения дзета-функции, особенностью $\dfrac{1}{z-z_k}$ обладает только первое слагаемое в определении: в свою очередь бесконечный ряд сохраняет регулярность и обращается в ноль при $z=0$. Воспользуемся этим свойством $\zeta(z)$ для выделения особенности в интеграле $\int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}}\zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma$. Разделяя сингулярную и регулярную составляющие, получим следующий вид исследуемого СИ:

$$\int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}}\zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma=\int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}}\left[\frac{1}{z(\sigma)-z(s_k)}+\zeta_*(z(\sigma)-z(s_k))\right]T(\sigma)d\sigma, \tag{2.25}$$

где $\zeta_*(z(\sigma)-z(s_k))=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\left[\dfrac{1}{(z(\sigma)-z(s_k))-\omega}+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{(z(\sigma)-z(s_k))}{\omega^2}\right]$ - регулярная часть дзета-функции.

Следующим шагом стало упрощение подынтегральной суммы, которое в дальнейшем позволило устранить особенность в точке z_k. Рассмотрим в отдельности интеграл $\int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}}\left[\dfrac{T(\sigma)}{z(\sigma)-z(s_k)}\right]d\sigma$, включающий в себя сингулярную составляющую. Используя разложение функций $z(\sigma)$ и $T(\sigma)$ по формуле Тейлора в точке $z_k=z(s_k)$, перемножая и перегруппировывая слагаемые, получим новый вид подынтегральной функции:

$$\int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}}\left[\frac{1}{z_k+z'_k(\sigma-s_k)-z_k}\right][T_k+T'_k(\sigma-s_k)]d\sigma=\int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}}\left[\frac{T_k}{z'_k(\sigma-s_k)}+\frac{T'_k}{z'_k}\right]d\sigma, \tag{2.26}$$

где $T_k=T(s_k)$, $T'_k=T'(s_k)$, $z'_k=z'(s_k)$.

Далее следует рассмотреть отдельно сингулярное и регулярное слагаемые подынтегральной суммы: для устранения особенности интеграла (2.26) в точке z_k следует определить его в смысле главного значения Коши. При этом, для повышения точности итоговой формулы, целесообразно разбить отрезок интегрирования $[s_{k-1}, s_{k+1}]$ на два, включив в каждый из них точку z_k. Благодаря тому факту, что значения T_k, T'_k, и z'_k не зависят от переменной интегрирования σ, после преобразования получаем достаточно компактное выражение для интеграла (2.26):

$$\int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \frac{T_k}{z'_k(\sigma - s_k)} d\sigma + \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \frac{T'_k}{z'_k} d\sigma = \frac{T_k}{z'_k} \ln\left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}}\right) + \frac{T'_k}{z'_k}\left(s_{k+1} - s_{k-1}\right).$$

Здесь $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$: из анализа формулы для s_k, приведенной на рисунке 5, очевидно, что применение разности Δs предпочтительнее «обращения» напрямую к значению параметра s. В связи с этим удобно преобразовать второе слагаемое приведенной выше суммы. Используя формулу Лагранжа для конечных приращений, получим:

$$\frac{T_k}{z'_k} \ln\left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}}\right) + \frac{T'_k}{z'_k}\left(s_{k+1} - s_{k-1}\right) = \frac{1}{z'_k}\left[T_k \ln\left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}}\right) + T_{k+1} - T_{k-1}\right].$$

После рассмотрения сингулярной составляющей интеграла (2.25), можно перейти к регулярному слагаемому подынтегральной функции. Поскольку вид $T(\sigma)$ остается неизвестным, произведение $\zeta_*(z(\sigma) - z(s_k))T(\sigma)$ не может быть упрощено, а потому далее следует перейти к использованию квадратурных сумм: при этом, для соблюдения порядка точности, заданного при взятии сингулярной составляющей в смысле главного значения Коши, целесообразно воспользоваться формулой трапеций. Кроме того, участок интегрирования $[s_{k-1}, s_{k+1}]$ также следует разбить точкой z_k, которая, очевидно, уже не является особой. Наконец, необходимо помнить о том, что бесконечный ряд $\zeta_*(z(\sigma) - z(s_k))$ обращается в ноль при $\sigma = s_k$. Принимая в расчет все вышесказанное, получаем:

$$\int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \zeta_*(z(\sigma) - z(s_k))T(\sigma)d\sigma = \int_{s_{k-1}}^{s_k} \zeta_*(z(\sigma) - z(s_k))T(\sigma)d\sigma + \int_{s_k}^{s_{k+1}} \zeta_*(z(\sigma) - z(s_k))T(\sigma)d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\zeta_*(z_{k-1} - z_k)T_{k-1} + \zeta_*(0)T_k\right]\Delta s_{k-1} + \frac{1}{2}\left[\zeta_*(0)T_k + \zeta_*(z_{k+1} - z_k)T_{k+1}\right]\Delta s_k =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\zeta_*(z_{k-1} - z_k)T_{k-1}\Delta s_{k-1} + \zeta_*(z_{k+1} - z_k)T_{k+1}\Delta s_k\right].$$

Таким образом, приближенная формула для вычисления искомого интеграла (2.25) имеет вид:

$$\int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} \zeta(z(\sigma) - z(s_k))T(\sigma)d\sigma = \frac{1}{z'_k}\left[T_k \ln\left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}}\right) + T_{k+1} - T_{k-1}\right] + \\ + \frac{1}{2}\left[\zeta_*(z_{k-1} - z_k)T_{k-1}\Delta s_{k-1} + \zeta_*(z_{k+1} - z_k)T_{k+1}\Delta s_k\right]. \tag{2.27}$$

Далее вернемся к сумме интегралов (2.24) и обратим внимание на неопределенную вторую часть. После приближенного вычисления первого слагаемого следует также разрешить в квадратурах основную интегральную сумму: для этих целей также будет применена формула трапеций, использованная ранее, на предыдущем этапе.

Рассмотрим второе слагаемое суммы (2.24): $\sum_{j=k+1}^{N+k-2}\int_{s_j}^{s_{j+1}}\zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma$. Из анализа участков интегрирования [s_j, s_{j+1}] видно, что ни один из интегралов, входящих в сумму, не является особым: таким образом, в данном случае возможно «немедленное» применение квадратурных формул. Используя формулу трапеций, каждый из интегралов суммы можно вычислить следующим образом:

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}}\zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma=\frac{1}{2}\left[\zeta(z_j-z_k)T_j+\zeta(z_{j+1}-z_k)T_{j+1}\right]\Delta s_j,$$

откуда получаем следующую схему приближенного вычисления для всей суммы

$$\sum_{j=k+1}^{N+k-2}\int_{s_j}^{s_{j+1}}\zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma=\frac{1}{2}\sum_{j=k+1}^{N+k-2}\left[\zeta(z_j-z_k)T_j+\zeta(z_{j+1}-z_k)T_{j+1}\right]\Delta s_j. \qquad (2.28)$$

Объединяя формулы (2.27) и (2.28), приходим к итоговому выражению для сингулярного интеграла (2.23):

$$\begin{aligned}\int_0^S\zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma&=\frac{1}{z'_k}\left[T_k\ln\left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}}\right)+T_{k+1}-T_{k-1}\right]+\\&+\frac{1}{2}\left[\zeta_*(z_{k-1}-z_k)T_{k-1}\Delta s_{k-1}+\zeta_*(z_{k+1}-z_k)T_{k+1}\Delta s_k\right]+\\&+\frac{1}{2}\sum_{j=k+1}^{N+k-2}\left[\zeta(z_j-z_k)T_j+\zeta(z_{j+1}-z_k)T_{j+1}\right]\Delta s_j.\end{aligned} \qquad (2.29)$$

Далее вернемся к сингулярному интегральному уравнению (2.17), описывающему скорость фильтрации $\overline{V}^{water}(z(s))$ на фронте вытеснения *Γ(t)*. Благодаря удобному виду СИУ, для нахождения касательной и нормальной компонент $\overline{V}^{water}(z(s))$ достаточно разделить вещественную и мнимую часть (2.17). В результате получим следующую систему, позволяющую определить значения *T(s)* и *N(s)* в выбранной точке $z_k=z(s_k)$:

$$\begin{cases}\dfrac{1+\kappa}{2}T(s_k)=\mathrm{Re}\left\{[\Phi(z(s_k))+\dfrac{1-\kappa}{2\pi i}\int_0^S\zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma]\dfrac{dz_k}{ds}\right\};\\ N(s_k)=\mathrm{Im}\left\{[\Phi(z(s_k))+\dfrac{1-\kappa}{2\pi i}\int_0^S\zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma]\dfrac{dz_k}{ds}\right\}.\end{cases} \qquad (2.30)$$

Как можно видеть, основное различие в правой части уравнений (3.18) заключается во взятии вещественной или мнимой составляющей произведения $[\Phi(z(s_k))+\frac{1-\kappa}{2\pi i}\int_0^S\zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma]\frac{dz_k}{ds}$.

Присутствие неизвестной функции $T(s)$ в составе СИ делает невозможным нахождение значений $T(s_k)$ и $N(s_k)$ с использованием только одной системы (2.30). С другой стороны, компоненты скорости $\overline{V}^{water}(z(s))$ могут быть вычислены сразу для всех точек $z_j = z(s_j)$ подвижной границы *Г(t).* Для этих целей необходимо составить матричные уравнения, основываясь на выражениях для $T(s_k)$ и $N(s_k)$ из (2.30). Выписывая систему (2.30) для каждой отдельно взятой точки z_j и вслед за тем – группируя выражения для $T(s_j)$, получим:

$$\begin{cases} \frac{1+\kappa}{2}T(s_0) = \mathrm{Re}\left\{[\Phi(z(s_0)) + \frac{1-\kappa}{2\pi i}\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s_0))T(\sigma)d\sigma]\frac{dz_0}{ds}\right\} \\ \frac{1+\kappa}{2}T(s_1) = \mathrm{Re}\left\{[\Phi(z(s_1)) + \frac{1-\kappa}{2\pi i}\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s_1))T(\sigma)d\sigma]\frac{dz_1}{ds}\right\} \\ \ldots \\ \frac{1+\kappa}{2}T(s_{N-1}) = \mathrm{Re}\left\{[\Phi(z(s_{N-1})) + \frac{1-\kappa}{2\pi i}\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s_{N-1}))T(\sigma)d\sigma]\frac{dz_{N-1}}{ds}\right\} \end{cases}. \quad (2.31)$$

Аналогичным образом строится система матричных уравнений и для нормальной компоненты $N(s)$. Для большего удобства следует переписать (2.31), перенеся СИ в левую часть и вынеся отдельно $T_k = T(s_k)$ в выражении (2.29). В результате получим следующий вид системы (2.31) в матричной форме:

$$\left(T_{matrix}\right)\vec{T} = \vec{T_r}\ , \quad (2.32)$$

где T_{matrix} указывает на матрицу коэффициентов для вектора значений касательной компоненты скорости $\vec{T}$, а вектор $\overline{T}_r$ обозначает известную правую часть и определяется по формуле:

$$\overline{T}_r = \mathrm{Re}\left\{\begin{pmatrix} \Phi(z(s_0))\frac{dz_0}{ds} \\ \ldots \\ \Phi(z(s_{N-1}))\frac{dz_{N-1}}{ds} \end{pmatrix}\right\}.$$

После нахождения вектора $\vec{T}$ из системы (2.32), его значение можно использовать для определения вектора нормальных компонент скорости $\vec{N}$ с помощью соответствующего матричного уравнения, построенного способом, аналогичным (2.32):

$$\vec{N} = \left(N_{matrix}\right)\vec{T} + \vec{N_r}\,, \quad (2.33)$$

где N_{matrix} обозначает матрицу коэффициентов, построенную на основе выражения для $N(s_k)$ из системы (2.30) с учетом (2.29), а вектор $\overrightarrow{N_r}$ определяется аналогично $\overline{T}_r$:

$$\overline{N}_r = \mathrm{Im}\left\{\begin{pmatrix} \Phi(z(s_0))\dfrac{dz_0}{ds} \\ \dots \\ \Phi(z(s_{N-1}))\dfrac{dz_{N-1}}{ds} \end{pmatrix}\right\}.$$

Объединяя уравнения (2.32) и (2.33) в систему и решая их последовательно, получаем искомые значения для касательной и нормальной компонент скорости $\overline{V}^{water}(z(s))$, которые далее используется при решении задачи трассировки (2.33).

В довершение следует рассмотреть вопрос группировки слагаемых, входящих в состав выражения для сингулярного интеграла (2.29): путем ряда преобразований содержимое указанной формулы может быть упрощено и представлено в виде, более удобном к использованию в уравнениях (2.32-2.33).

Прежде всего, рассмотрим квадратурную сумму $\frac{1}{2}\sum_{j=k+1}^{N+k-2}\left[\zeta(z_j - z_k)T_j + \zeta(z_{j+1} - z_k)T_{j+1}\right]\Delta s_j$ - последнее слагаемое из формулы (2.29). Поскольку для удобного ее использования в уравнениях (2.32-2.33) необходима группировка слагаемых по значениям функции $T(s_k)$, необходимо видоизменить сумму по индексу *j*: для этой цели разобьем последнюю (сумму) на две составляющие, а после объединим, меняя индекс суммирования и вынося слагаемые, не участвующие в общем сложении. Выполняя последовательно все указанные операции, получим:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{N+k-2}\left[\zeta(z_i - z_k)T_i + \zeta(z_{i+1} - z_k)T_{i+1}\right]\Delta s_i = \frac{1}{2}\sum_{j=k+1}^{N+k-2}\left[\zeta(z_j - z_k)T_j\right]\Delta s_j + \frac{1}{2}\sum_{j=k+1}^{N+k-2}\left[\zeta(z_{j+1} - z_k)T_{j+1}\right]\Delta s_j =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=k+2}^{N+k-2}\left[\zeta(z_j - z_k)T_j\right]\Delta s_j + \frac{1}{2}\zeta(z_{k+1} - z_k)T_{k+1}\Delta s_{k+1} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{l=k+2}^{N+k-2}\left[\zeta(z_l - z_k)T_l\right]\Delta s_{l-1} + \frac{1}{2}\zeta(z_{N+k-1} - z_k)T_{N+k-1}\Delta s_{N+k-2},$$

где *l=j+1*, а номера вида *N+k-2* совпадают с индексами *k-2* и т.д., благодаря замкнутости контура *Г(t)*. Объединяя далее суммы по индексам *j* и *l*, и учитывая приведенное выше замечание, получаем итоговый вид исследуемой квадратурной суммы, сгруппированной по значениям искомой функции $T(s_k)$:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=k+1}^{N+k-2}\left[\zeta(z_j - z_k)T_j + \zeta(z_{j+1} - z_k)T_{j+1}\right]\Delta s_j = \frac{1}{2}\sum_{j=k-2}^{N+k-2}\zeta(z_j - z_k)T_j(\Delta s_j + \Delta s_{j-1}) +$$
$$+ \frac{1}{2}\zeta(z_{k+1} - z_k)T_{k+1}\Delta s_{k+1} + \frac{1}{2}\zeta(z_{k-1} - z_k)T_{k-1}\Delta s_{k-2}.$$

Подставив далее полученные результаты в формулу (2.29), рассмотрим слагаемые при значениях T_{k-1} и T_{k+1}:

$$\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma = \frac{1}{z'_k}T_k \ln\left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}}\right) + T_{k+1}\left[\frac{1}{z'_k}+\frac{1}{2}\zeta(z_{k+1}-z_k)\Delta s_{k+1}+\frac{1}{2}\zeta_*(z_{k+1}-z_k)\Delta s_k\right]+$$
$$+T_{k-1}\left[-\frac{1}{z'_k}+\frac{1}{2}\zeta(z_{k-1}-z_k)T_{k-1}\Delta s_{k-2}+\frac{1}{2}\zeta_*(z_{k-1}-z_k)\Delta s_{k-1}\right]+\frac{1}{2}\sum_{j=k-2}^{N+k-2}\zeta(z_j-z_k)T_j(\Delta s_j+\Delta s_{j-1}).$$

Здесь $\zeta_*(z-z_k)=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-z_k)-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{(z-z_k)}{\omega^2}\right]$ представляет собой бесконечный ряд, входящий в определение дзета-функции Вейрештрасса $\zeta(z-z_k)$: как можно видеть из содержимого квадратных скобок, представляется удобным дополнить $\zeta_*(z_{k+1}-z_k)$ и $\zeta_*(z_{k-1}-z_k)$ до $\zeta(z_{k+1}-z_k)$ и $\zeta(z_{k-1}-z_k)$ соответственно. Полученные значения дзета-функции и соответствующие им множители образуют очередные слагаемые суммы по индексу i для компонент T_{k+1} и T_{k-1}: результат описанной перегруппировки приведен ниже.

$$\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma = \frac{1}{z'_k}T_k \ln\left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}}\right) + T_{k+1}\left[\frac{1}{z'_k}-\frac{1}{2}\frac{\Delta s_k}{z_{k+1}-z_k}\right]+$$
$$+T_{k-1}\left[-\frac{1}{z'_k}-\frac{1}{2}\frac{\Delta s_{k-1}}{z_{k-1}-z_k}\right]+\frac{1}{2}\sum_{j=k-1}^{N+k-1}\zeta(z_j-z_k)T_j(\Delta s_j+\Delta s_{j-1}).$$

В довершение следует обратить внимание на слагаемые $\frac{\Delta s_k}{z_{k+1}-z_k}$ и $\frac{\Delta s_{k-1}}{z_{k-1}-z_k}$: исходя из определения для $\Delta s_k = s_{k+1}-s_k$, легко видеть, что указанные дроби представляют собой право- и леворазностную аппроксимации производной, обратной z', в точке z_k. С учетом сделанного замечания, выражение для СИ, сгруппированное по значениям функции $T(s_k)$, примет следующий вид:

$$\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s_k))T(\sigma)d\sigma = \frac{1}{2z'_k}[2T_k \ln\left(\frac{\Delta s_k}{\Delta s_{k-1}}\right)+T_{k+1}-T_{k-1}+ \\ +\sum_{j=k-1}^{N+k-1}\zeta(z_j-z_k)T_j(\Delta s_j+\Delta s_{j-1})z'_k]. \quad (2.34)$$

Используя формулу (2.34) и систему алгебраических уравнений (2.31), удобно сформировать матрицу T_{matrix} коэффициентов для значений вектора $\vec{T}$ касательных компонент скорости $\overline{V}^{water}(z(s))$: аналогичным способом формируется и матрица N_{matrix}, фигурирующая в уравнении (2.33) для вектора $\vec{N}$ нормальных компонент функции $\overline{V}^{water}(z(s))$.

4.2. Приближенное решение дифференциального уравнения трассировки

Решение системы (2.32) - (2.33) позволяет определить значения касательной $T(s)$ и нормальной $N(s)$ компонент скорости во всех отслеживаемых точках $z_j = z(s_j) \,/\, j = \overline{0..N-1}$ на границе *Г(t)*. Таким образом, правая часть $\overline{V}(z(s))_{\Gamma(t)} = \left[\frac{(1+\kappa)}{2}T^{water}(s) + iN^{water}(s)\right]e^{-i\alpha}$ в уравнении (2.20) является известной к выбранному моменту времени *t*. Следующим этапом решения интегро-дифференциальной системы (2.17)-(2.20), является нахождение перемещений трассеров z_j за время *t+Δt*. Для этих целей необходимо проинтегрировать уравнения трассировки (2.20). Напомним, что (2.20) фактически представляет собой систему однотипных задач Коши, каждой из которых соответствует начальное условие вида: $z_j(0) = z_0 + r_w e^{i\theta_j} \,/\, \theta_j = j\Delta\theta, j = \overline{0..N-1}$. Для большего удобства проведем последующие рассуждения для выбранной точки z_k на фронте *Г(t)*, зафиксировав значения параметров α_k и θ_k. Таким образом, будем рассматривать следующую задачу Коши для функции $z_k(s(t))$:

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{d\overline{z_k(s(t))}}{dt} = \left[\frac{(1+\kappa)}{2}T_k^{\;water}(s(t)) + iN_k^{\;water}(s(t))\right]e^{-i\alpha_k}; \\ & z_k(0) = z_0 + r_w e^{i\theta_k} \end{aligned}\right\}. \tag{2.35}$$

Как правило, приближенное решение дифференциальных уравнений осуществляется в вещественных переменных. Следуя данному подходу, требуется переписать задачу (2.35) в координатах *x* и *y*, перейдя в физическую плоскость с соответствующими векторами $(\vec{x}, \vec{y})$. Прежде всего, представим уравнение (2.35) в виде, более удобном для теоретических рассуждений. Считая правую часть известной благодаря решению СИУ (2.17) и не конкретизируя выражение для $\overline{V}(z, \overline{z})_{\Gamma(t)}$, а также - зависимость $z = z(s)$, получим:

$$m\frac{d\overline{z_k(t)}}{dt} = \overline{V}(z_k(t), \overline{z_k(t)})_{\Gamma(t)}\,. \tag{2.36}$$

При переходе к координатам $(\vec{x}, \vec{y})$ необходимо явным образом выделить вещественную и мнимую части из функции $\overline{V}(z_k, \overline{z_k})_{\Gamma(t)}$. Фактически, уравнение (2.36) эквивалентно следующей системе:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{dx}{dt} = F(x,y) = \mathrm{Re}[\overline{V}(z_k, \overline{z_k})_{\Gamma(t)}] \\ & \frac{dy}{dt} = G(x,y) = \mathrm{Im}[\overline{V}(z_k, \overline{z_k})_{\Gamma(t)}] \end{aligned}\right\}. \tag{2.37}$$

В то же время необходимо заметить, что выделение функций F(x,y) и G(x,y) в (2.37) сопряжено со значительными трудностями. Напомним, что в простейшем случае присутствия двух скважин в ячейке двоякой периодичности (см. параграф 3) $\Phi(z,\bar{z}) = \frac{Q_1^{inject}}{2\pi h}\left[\zeta(z-z_1)+\alpha(z-z_1)-\frac{\pi}{\Delta}\overline{(z-z_1)}\right]-\frac{Q_1^{product}}{2\pi h}\left[\zeta(z)+\alpha z-\frac{\pi}{\Delta}\bar{z}\right]$, т.е. включает в себя две дзета-функции Вейерштрасса, каждая из которых определяется как $\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum_{i,j=-\infty}^{\infty}{}'(\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2})$, где $\omega = i\omega_1 + j\omega_2, (i,j\in Z)$. Наличие двойного ряда с комплексными переменными существенно затрудняет выделение вещественной и мнимой составляющей функции $\Phi(z,\bar{z})$ и, следовательно - $\bar{V}(z_k,\overline{z_k})_{\Gamma(t)}$. Таким образом, более удобным представляется интегрировать уравнение (2.36) непосредственно в комплексной плоскости. Формально, (2.36) является частью системы, составленной для переменных z и $\bar{z}$:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d\overline{z_k(t)}}{dt} &= \bar{V}(z_k(t),\overline{z_k(t)})_{\Gamma(t)} \\ m\frac{dz_k(t)}{dt} &= V(\overline{z_k(t)},z_k(t),)_{\Gamma(t)} \end{aligned}\right\}. \tag{2.38}$$

В то же время необходимо заметить, что (2.38), фактически, состоит лишь из одного уравнения (2.36) и его комплексно-сопряженной формы, что также связано с простой связью между z и $\bar{z}$: $z = x+iy; \bar{z} = x-iy$. Далее, для сокращения записи, воспользуемся ранее введенным обозначением $\bar{V}(z,\bar{z}) = \bar{V}(z)$, предполагая зависимость от $\bar{z}$. Для большего удобства будем рассматривать задачу Коши для уравнения, сопряженного к (2.36):

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dz_k(t)}{dt} &= V(z_k(t))_{\Gamma(t)} \\ z_k(0) &= z_o + r_w e^{i\theta_k} \end{aligned}\right\}. \tag{2.39}$$

Как можно видеть, (2.39) представляет собой задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения: при этом, несмотря на то, что искомая функция и правая часть определены на комплексной плоскости, переменная интегрирования *t* является вещественной. В настоящей работе для интегрирования задачи (2.39) использовались одношаговые методы семейства Рунге-Кутты. Рассмотрим далее основную идею, на которой строятся указанные разностные схемы.

Прежде всего, введем равномерную сетку W по переменной интегрирования *t* с шагом Δt: $W = \{t_i \setminus (\forall i = \overline{1,N})(t_i = i\cdot\Delta t)\}$, где t_i – узлы сетки, на которых определяется сеточная функция $y = \{y_i \setminus (\forall t_i \in W)(y_i = y(t_i))\}$ – приближение для некоторой искомой $u(t_i)$. В свою очередь, $u(t)$

является решением уравнения $\frac{du(t)}{dt} = F(t,u)$. В основе методов Рунге-Кутты лежит идея о разложении функции *u(t)* в ряд Тейлора в окрестности $t_i + \Delta t$ (при условии, что Δt – достаточно малое) точки t_i[55]:

$$u(t_i + \Delta t) = u(t_i) + \frac{du(t_i)}{dt}\Delta t + \frac{d^2u(t_i)}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{2!} + O(\Delta t^3)... \cdot$$

В ходе приближенного решения производные $\frac{d^n u(t)}{dt^n}$ определяются путем вычисления правой части $F(t,u)$ в нескольких промежуточных точках на рассматриваемом отрезке $[t_i, t_i + \Delta t]$. Фактически, выражения для $y(t_i + \Delta t)$ в методах Рунге-Кутты отличаются количеством вычисляемых производных и, соответственно - порядком отбрасываемого члена ряда. При этом во всех случаях разностные схемы составляются по одному и тому же принципу. Продемонстрируем способ вычисления $y = \{y_i \setminus (\forall t_i \in W)(y_i = y(t_i))\}$ применительно к задаче (2.39): в таком случае $y_{i+1} \approx z_k(s(t_{i+1}))$. Будем считать, что значения $z_k(t_i)$ и $V(z_k(t_i))_{\Gamma(t)}$ известны. Независимо от выбираемого порядка аппроксимации, методы Рунге-Кутты имеет следующий вид [107]:

$$\begin{aligned}
&K_1 = V(y_i) \\
&K_2 = V(y_i + b_{21}K_1) \\
&... \\
&K_m = V(y_i + b_{m1}K_1\Delta t + ...b_{mm-1}K_{m-1}\Delta t) \\
&y_{i+1} = \Delta t\sum_{j=1}^{m}\sigma_j K_j + y_i. \\
&j = \overline{1,m}; m = \overline{1,4}; b_{ml}, (l = \overline{1,m-1}); \sum\sigma_j = 1.
\end{aligned}$$

Отметим также, что значения коэффициентов *b* и *σ* определяются конкретными разностными схемами. Ниже приведены примеры методов Рунге-Кутты для $m = \overline{1..4}$.

Схема Эйлера (m=1)	Метод второго порядка (m=2)	Метод третьего порядка (m=3)	Метод четвертого порядка (m=4)
$\left.\begin{aligned}&K_1 = V(y_i)\\ &\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} = K_1.\end{aligned}\right\}$	$\left.\begin{aligned}&K_1 = V(y_i)\\ &K_2 = V(y_i + \frac{\Delta t}{2}K_1)\\ &\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} = K_2.\end{aligned}\right\}$	$\left.\begin{aligned}&K_1 = V(y_i)\\ &K_2 = V(y_i + \frac{\Delta t}{2}K_1)\\ &K_3 = V(y_i - \Delta tK_1 + 2\Delta tK_2)\\ &\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} = \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3).\end{aligned}\right\}$	$\left.\begin{aligned}&K_1 = V(y_i)\\ &K_2 = V(y_i + \frac{\Delta t}{4}K_1)\\ &K_3 = V(y_i + \frac{\Delta t}{2}K_2)\\ &K_4 = V(y_i + \Delta tK_1 - 2\Delta tK_2 + 2\Delta tK_3)\\ &\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} = \frac{1}{6}(K_1 + 4K_3 + K_4).\end{aligned}\right\}$

ГЛАВА III

МОНИТОРИНГ ФРОНТА ВЫТЕСНЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

1. Построение СИДУ в рамках моделей «разноцветных жидкостей» и «поршневого вытеснения»

Настоящий раздел посвящен задачам об отслеживании фронта заводнения, для решения которых применяется предлагаемый в работе метод, ранее представленный во второй главе. Здесь и далее рассматриваются два случая однофазной фильтрации, описываемые моделями «Разноцветных жидкостей» и «Поршневого вытеснения». Заметим, что условия решаемых задач совпадают с таковыми из предыдущего раздела. В настоящей главе рассматривается внутриконтурное заводнение с двоякопериодической системой скважин, разрабатывающих плоское однородное и изотропное по проницаемости месторождение, с известными и фиксированными значениями пористости m и проницаемости k. В свою очередь фильтрующиеся жидкости полагаются слабосжимаемыми, а фильтрация – квазистационарной, протекающей по линейному закону Дарси. Содержание настоящей главы включает в себя построение интегро-дифференциальных систем (СИДУ) для обеих задач, в соответствии с представленным ранее подходом, а также – анализ используемых численных методов, оценку достоверности результатов и, наконец – описание проведенных вычислительных экспериментов.

Рассмотрим далее процесс вытеснения нефти водой в условиях «разноцветных жидкостей»: в подробностях данная модель рассматривалась в первой главе. Ранее было показано, что ключевыми особенностями фильтрации при «разноцветных жидкостях» является как наличие резкой границы раздела вода-нефть, так и отсутствие физических различий между фильтрующимися фазами. Таким образом, вся исследуемая область Ω фактически заполняется одной жидкостью с едиными физическими свойствами. В результате функция скорости остается непрерывной во всей Ω, включая подвижный фронт $\Gamma(t)$. Совокупность граничных условий, задаваемых на $\Gamma(t)$, представлена ниже:

$$\left.\begin{aligned} V_n^{oil} &= V_n^{water} \\ V_t^{oil} &= V_t^{water} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.1)$$

Здесь V_n и V_t указывают на касательные и нормальные компоненты скорости для нефти (oil) и воды (water) - в соответствии с обозначениями, принятыми во Второй Главе. Отметим, что будем и далее проводить все рассуждения, рассматривая функцию $V(z,\bar{z})$ в комплексной плоскости.

Непрерывность скорости $V(z,\bar{z})$, обусловленная физической неразличимостью нефти и воды, приводит к существенному упрощению ранее представленной интегро-дифференциальной системы (СИДУ). Так, ввиду отсутствия разрыва касательной компоненты V_t на границе раздела вода-нефть (см. 3.1), отпадает необходимость в решении сингулярного интегрального уравнения (СИУ), а правая часть дифференциального (ДУ) задается аналитически. Рассмотрим далее изменения, которые претерпевает вид СИДУ при переходе к модели «разноцветных жидкостях».

Ранее, во второй главе, было показано, что интегро-дифференциальная система, описывающая перемещение подвижного фронта *Г(t)*, может быть представлена следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1+\kappa}{2}T(s)+iN(s)=[\Phi(z(s))+\frac{1-\kappa}{2\pi i}\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s))T(\sigma)d\sigma]\frac{dz}{ds} \\ &m\frac{\partial\overline{z(s)}}{\partial t}=\left[\frac{(1+\kappa)}{2}T^{water}(s)+iN^{water}(s)\right]e^{-i\alpha} \\ &z_{t=0}=z_0+r_w e^{i\theta}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

Заметим, что используемые обозначения полностью аналогичны таковым, использованным в уравнениях (2.17) и (2.20) Второй Главы.

Ввиду физической неразличимости нефти и воды значения их вязкостей, μ_{water} и μ_{oil}, также полагаются равными: следовательно, параметр $\kappa=\dfrac{\mu_{water}}{\mu_{oil}}$ принимается равным единице, в связи с чем множитель перед сингулярным интегралом $\int_0^S \zeta(z(\sigma)-z(s))T(\sigma)d\sigma$ становится нулевым. Таким образом, исходное сингулярное интегральное уравнение в (3.2) принимает простой вид (с учетом $T(s)=V_t\ (z(s))$ и $N(s)=V_n\ (z(s))$):

$$V_t\ (z)+iV_n\ (z)=\Phi(z)\frac{dz}{ds}.$$

Отсюда, с учетом $\overline{V}(z) = (V_t(z) + iV_n(z))e^{-i\alpha}$ (см. второй параграф второй главы) и связи между касательной и производной по параметру - $e^{i\alpha} = \frac{dz}{ds}$, приходим к: $\overline{V}\ (z) = \Phi(z)$.

Заметим, что представленное выше выражение предполагает зависимость не только от переменной z, но также и от $\overline{z}$.

Таким образом, в случае «разноцветных жидкостей» функция скорости определяется во всей исследуемой области Ω в единой форме, имеющей, согласно (2.22), следующий вид:

$$\Phi(z,\overline{z}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i^{inject}}{2\pi h}\left[\zeta(z - z_i) + \alpha(z - z_i) - \frac{\pi}{\Delta}(\overline{z - z_i})\right] -$$
$$-\sum_{j=1}^{m} \frac{Q_j^{product}}{2\pi h}\left[\zeta(z - z_i) + \alpha(z - z_i) - \frac{\pi}{\Delta}(\overline{z - z_i})\right].$$

Соответствующие изменения затрагивают и дифференциальное уравнение из (3.2), правая часть которого также будет определяться через $\Phi(z,\overline{z})$:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\partial \overline{z}}{\partial t} &= \Phi(z,\overline{z}) \\ z_{t=0} &= z_0 + r_w e^{i\theta} \end{aligned}\right\}. \tag{3.3}$$

В действительности, система (3.3) представляет собой задачу трассировки, используемую для отслеживания перемещений подвижного фронта *Г(t)* в рамках модели «разноцветных жидкостей». При этом конечный вид $\Phi(z,\overline{z})$ определяется исходя из геометрии ячейки двоякой периодичности (см. третий параграф второй главы). Таким образом, исходная СИДУ (3.2) была сведена к простой задаче Коши (3.3), для решения которой можно применить ранее представленные модифицированные методы Рунге-Кутты (см. четвертый параграф второй главы).

Рассмотрим подробнее процесс трассировки при «разноцветных жидкостях». Соответствующая графическая схема представлена ниже, на рисунке 1. Параметры θ, r_w и z_0 связаны с выбранной нагнетательной скважиной (INJECTION WELL) в ячейке двоякой периодичности и используются для задания начального положения трассеров. Изначально все отслеживаемые частицы z_j размещаются вокруг ствола INJECTION WELL, на равном расстоянии от центра ее призабойной зоны: для точного задания позиции z_j используется значение $\theta_j = \theta_0 + j\Delta\theta, (j = \overline{1, N_{tracers}})$ угла θ, шаг которого $\Delta\theta$ является фиксированной величиной и определяется общим числом трассеров $N_{tracers}$. Таким образом, каждой наблюдаемой частице z_j соответствует собственная задача Коши (3.3), решение которой позволяет отследить перемещение z_j во времени, причем – независимо от позиций остальных. Фактически, интегрирование систем (3.3) осуществляется вдоль линий тока, остающихся непрерывными на протяжении всего процесса заводнения. При этом положение и вид подвижного фронта *Г(t)* в выбранный момент времени t_i определяется исходя из позиций всех $N_{tracers}$ трассеров при $t=t_i$.

Рисунок 1. Мониторинг фронта вытеснения при «разноцветных жидкостях». На изображении представлена часть траекторий, образуемых наблюдаемыми трассерами. Первоначально все отслеживаемые частицы размещаются вокруг ствола нагнетательной скважины: при этом точное положение отдельно взятого трассера определяется значениями угла θ. Совокупность всех $N_{tracers}$ траекторий, построенных к выбранному моменту времени, образует заводненную область: при этом ее граница, составленная из конечных положений трассеров, представляет собой фронт заводнения.

Совместная фильтрация в условиях «разноцветных жидкостей» представляет собой простейший пример внутриконтурного заводнения: решение задачи (3.2) является эталонным и может быть использовано для проверки результатов, получаемых в рамках более сложных модельных представлений. Более реалистичное описание для процесса заводнения предлагает т.н. «поршневая модель»: ее подробному рассмотрению посвящен второй параграф первой главы. Ключевым отличием «поршневого вытеснения» от случая «разноцветных жидкостей» является учет физических различий нефти и воды. Данная особенность является определяющей при задании условий на подвижном фронте *Г(t)*. Поскольку физические свойства жидкости меняются при прохождении через границу раздела вода-нефть при «поршневом вытеснении», функция скорости, а именно – ее касательная компонента, - терпит разрыв на *Г(t)*. Заметим, что давление, в свою очередь, остается непрерывным во всей области *Ω*, включая и подвижную границу. Соответствующие граничные условия для функции скорости, задаваемые на *Г(t)*, представлены ниже:

$$\left.\begin{array}{l} V_n^{oil} = V_n^{water} \\ V_t^{oil}\mu_{oil} = V_t^{water}\mu_{water} \end{array}\right\}. \qquad (3.4)$$

Заметим, что нижнее равенство в (3.4) может быть получено из линейного закона Дарси $V = -\frac{k}{\mu} gradP$, записанного для касательных компонент V_t^{oil} и V_t^{water}, а также условия непрерывности давления.

При рассмотрении условий (3.4) можно заметить, что случай «поршневого вытеснения» фактически ничем не отличается от примера, представленного во Второй Главе в рамках демонстрации метода решения плоских квазистационарных задач с подвижной границей. Таким образом, исходная СИДУ (3.2) может быть задействована для отслеживания фронта заводнения в первичном виде, без каких-либо изменений. Соответственно, остаются справедливым и все выводы о порядке решения (3.2), сделанные ранее, во второй главе. Рассмотрим далее в подробностях процедуру трассировки в условиях «поршневого вытеснения». Рисунок 2 демонстрирует графическую схему решения СИДУ (3.2).

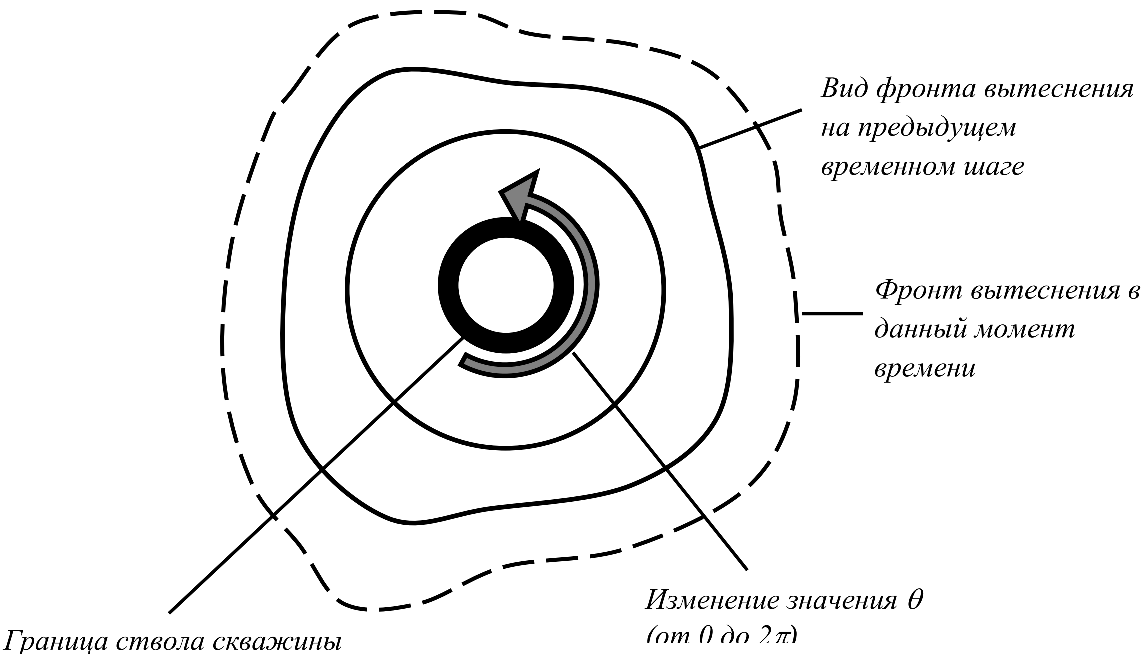


Рисунок 2. Схема трассировки фронта вытеснения при «поршневом вытеснении». На изображении представлена эволюция подвижной границы в процессе закачки воды через нагнетательную скважину. Изначальное размещение трассеров и схема их распределения по контуру фронта аналогичны случаю «разноцветных жидкостей». Особенность трассировки при «поршневом вытеснении» заключается в невозможности отслеживать отдельно взятые траектории течения. В результате перемещения трассеров вычисляются в рамках единой задачи: при этом текущее положение подвижного фронта (выделено пунктиром) определяется на основе его формы на предыдущем временном шаге.

Как можно видеть, исходное расположение трассеров z_j совпадает с таковым для рассмотренного ранее случая «разноцветных жидкостей»: при этом способ задания начальных позиций z_j также не претерпел изменений. Ключевым отличием является способ определения текущих позиций трассеров. Так, в случае «поршневого вытеснения» особенности СИДУ не позволяют выполнять трассировку отдельно взятых частиц z_j независимо друг от друга, что также объясняется изломом, который терпят линии тока – ввиду разрыва касательной компоненты скорости на $\Gamma(t)$. Фактически, отслеживание передвижений фронта $\Gamma(t)$ на каждом временном шаге сводится к последовательному решению сингулярного интегрального, а затем - дифференциального уравнения: при этом правая часть ДУ формируется на основе значений касательной и нормальной компонент скорости, получаемых из СИУ (см. четвертый параграф второй главы). Таким образом, текущие координаты всех $N_{tracers}$ трассеров определяются в рамках решения одной задачи, на основе положения подвижного фронта в предыдущий момент времени. В довершение, отметим также существенное ограничение, связанное с процессом трассировки при «поршневом вытеснении»: ввиду особенности, связанной с применением формул Сохоцкого-Племеля (см. четвертый параграф второй главы), решение СИДУ существует до тех пор, пока подвижный фронт $\Gamma(t)$ сохраняет гладкость, т.е. – до начала обводнения добывающих скважин. Заметим, что в свою очередь, система (3.3), используемая в задаче трассировки при «разноцветных жидкостях», может применяться вплоть до гипотетического окончания процесса заводнения, при котором вся исследуемая область окажется заполнена нагнетаемой водой.

2. Схема подсчета числовых характеристик заводнения: время начала обводнения добывающих скважин и коэффициент охвата по площади

Как было сказано ранее, СИДУ (3.2) и задача Коши (3.3), позволяют отслеживать перемещения подвижного фронта $\Gamma(t)$ в рамках моделей «поршневого вытеснения» и «разноцветных жидкостей» соответственно. В свою очередь, результаты решения систем (3.2) и (3.4) могут использоваться для оценки таких показателей заводнения, как время $t_{waterbreak}$ начала обводнения скважин и коэффициент $K_{охв}$ охвата по площади. Настоящий параграф посвящен алгоритмам, используемым для подсчета указанных характеристик.

Рассмотрим далее способ, применяемый в настоящей работе для оценки величины $t_{waterbreak}$. Данный показатель может быть определен исходя из анализа времени, затрачиваемого трассерами на достижение границ добывающей скважины по кратчайшему пути. Напомним, что непосредственное отслеживание перемещений наблюдаемых частиц осуществляется с помощью дифференциального уравнения (ДУ) в СИДУ (3.2) и задаче Коши (3.3). В свою очередь, интегрирование ДУ осуществляется с помощью разностных методов Рунге-Кутты, что подразумевает введение некоторого шага дискретизации, а также – многократное применение вычислительной схемы в рамках итерационного процесса. Таким образом, величина $t_{waterbreak}$ может быть определена на основе числа итераций, выполненных в процессе трассировки вплоть до момента, при котором наблюдаемые частицы достигают ствола добывающей скважины по кратчайшему пути. Рассмотрим далее вид переменной интегрирования τ, используемой при решении ДУ в системах (3.2) и (3.3): отметим, что $t_{waterbreak} = N\Delta\tau$, где N – число шагов, выполняемых вдоль кратчайшей траектории до момента достижения трассером добывающей скважины.

Обратимся к дифференциальному уравнению задачи Коши (3.3), с учетом выражения (2.22) для функции $\Phi(z,\bar{z})$ правой части. При анализе развернутой формы ДУ можно заметить достаточно большое число различных числовых коэффициентов:

$$\begin{aligned} m\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i^{inject}}{2\pi h}\left[\zeta(z-z_i)+\alpha(z-z_i)-\frac{\pi}{\Delta}(\overline{z-z_i})\right]- \\ -\sum_{j=1}^{m}\frac{Q_m^{product}}{2\pi h}\left[\zeta(z-z_i)+\alpha(z-z_i)-\frac{\pi}{\Delta}(\overline{z-z_i})\right] \end{aligned} \tag{3.5}$$

Разная размерность таких коэффициентов, как пористость, толщина (мощность) пласта, дебиты добывающих и нагнетательных скважин, негативно влияет на сложность решаемой задачи: в связи с этим разумно использовать в качестве переменной интегрирования некую безразмерную величину. Из анализа уравнения (3.5) видны размерности параметров, задаваемых в исходной задаче фильтрации, а также - входящих в ДУ переменных: $Q = Q(м^3/c)$, $h = h(м)$, $z = z(м)$, $t = t(c)$. Таким образом, общее число независимых размерных величин равно трем, при четырех независимых параметрах *Q/h, m, α и Δ*: число последних может быть уменьшено до трех, согласно теореме об обезразмеривании (П-теореме) [110]. Далее перенесем в левую часть все множители общей суммы, не зависящие от переменной интегрирования *t*:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi hm}{Q_{\max}^{inject}}\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\chi_i\left[\zeta(z-z_i,\overline{z-z_i})+\alpha(z-z_i)-\frac{\pi}{\Delta}(\overline{z-z_i})\right]- \\ -\sum_{j=1}^{m}\psi_j\left[\zeta(z-z_i,\overline{z-z_i})+\alpha(z-z_i)-\frac{\pi}{\Delta}(\overline{z-z_i})\right]. \end{aligned}$$

Здесь $Q_{\max}^{inject}$ представляет собой величину наибольшего из дебитов нагнетательных скважин, включенных в параллелограмм периодов: именно параметр $Q_{\max}^{inject}$ используется в качестве единицы масштабирования при оценке мощностей скважин. Соответственно, коэффициенты χ и Ψ имеют вид: $\chi_i = \frac{Q_i^{product}}{Q_{\max}^{inject}}$, $\psi_j = \frac{Q_j^{inject}}{Q_{\max}^{inject}}$. Таким образом, искомый безразмерный параметр, используемый в качестве переменной интегрирования, примет вид:

$$\tau = \frac{Q_{\max}^{inject} t}{2\pi m h |\omega_1|^2}. \tag{3.6}$$

Здесь $|\omega_1|$ указывает на длину одного из базисных векторов, образующих параллелограмм периодов (см. Приложения): таким образом, масштаб времени также определяется размерами двоякопериодической решетки.

Рассмотрим далее способ вычисления коэффициента $K_{охв}$ охвата по площади. Его величина определяется по следующей формуле [119]: $K_{охв} = S_w / S$, где S_w - площадь, охваченная заводнением, а S - площадь всего исследуемого повторяющегося элемента. Отметим, что, как правило, в качестве участка с площадью S используется т.н. контур нагнетания (КН) - область, обслуживаемая отдельно взятой нагнетательной скважиной. Исходя из анализа различных схем заводнения [19] [40] [170] можно заключить, что в общем случае контур нагнетания совпадает с повторяющимся элементом системы разработки. Из анализа формулы для $K_{охв}$ видно, что данный коэффициент, в общем случае, является функцией времени, поскольку область, охваченная заводнением, расширяется в процессе нагнетания воды в пласт: при этом контур, ограничивающий площадь S_w, совпадает с положением фронта вытеснения в каждый отдельно взятый момент времени.

Далее обратим внимание на величину S в формуле для подсчета коэффициента $K_{охв}$. Как было сказано выше, часто S имеет смысл площади контура нагнетания, ограничивающего область действия выбранной нагнетательной скважины. Заметим, что в большинстве случаев размеры КН могут быть оценены на основе картин линий тока – до начала процесса трассировки. При этом, как правило, контур нагнетания имеет простую форму, соответствующую какой-либо распространенной геометрической фигуре (квадрат, прямоугольник, шестиугольник): в подобных случаях площадь S может быть легко оценена на основе картин линий тока. В то же время для ряда схем заводнения КН представляется криволинейным: в подобных ситуациях простой способ оценки площади S невозможен, в связи с чем для ее подсчета необходимо использовать численный метод. Здесь важно заметить, что по своему смыслу величина S является предельным значением для площади S_w, определяемой на различных этапах заводнения. Таким образом, справедливо следующее выражение: $S = \lim_{t\to\infty} S_w(t)$.

В настоящей работе для определения компонент S_w и S (при криволинейном КН) в формуле для $K_{охв}$ использовался специальный алгоритм, основанный на применении векторного произведения. Ниже представлена схема предлагаемого способа подсчета площади. В общем случае заводненная область с гладкой границей раздела «вода-нефть» может быть аппроксимирована набором четырехугольников, построенных на парах соседних следов трассеров, как показано на рисунке 3. Черные кривые на изображении соответствуют положению фронта вытеснения в соседние моменты времени t_k, t_{k+1}. Индексы i, $i+1$ указывают на номера соседних трассеров, положения которых на k-ом и $k+1$-ом временных шагах обозначены через точки z_i^k. Из рисунка 3 видно, что четырехугольники вида $\{z_{i+1}^k z_{i+1}^{k+1} z_i^{k+1} z_i^k\}$ включают в себя по два смежных треугольника произвольной формы (в частных случаях последние могут вырождаться в прямые линии нулевой толщины, что, естественно, обеспечивает нулевой прирост площади). Площади S_1 и S_2 треугольников определяются по правилу векторного произведения: соответствующая формула выделена рамкой на рисунке 3.

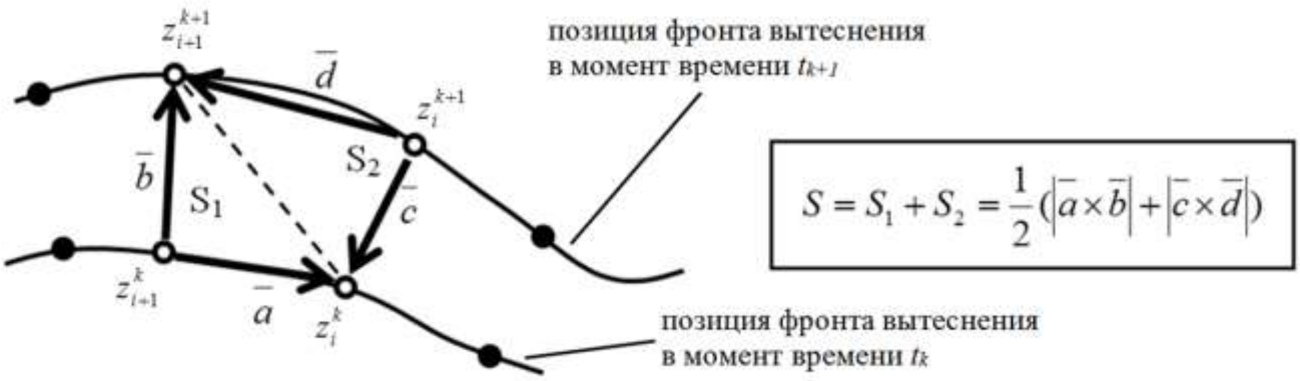


Рисунок 3. Схема подсчета площади заводненной области для произвольного момента времени. Область, занятая водой, разбивается на множество четырехугольников, образуемых парами точек соседних трассеров в соседние моменты времени: площади получаемых фигур вычисляются с помощью векторного произведения.

Далее необходимо в отдельности рассмотреть особые случаи некорректного формирования четырехугольников, которые были выявлены при анализе ряда схем заводнения, преимущественно для периодов времени, следующих за прорывом воды в ближайшие добывающие скважины. Помимо наиболее распространенного варианта взаимного расположения треугольников S_1 и S_2, представленного на рисунке 3, также существуют и «критические ситуации», при которых применение алгоритма в представленной выше форме некорректно.

Рисунок 4 демонстрирует общий вид описываемых особых случаев: как видно из изображения, четырехугольник, построенный для последнего отраженного на картине временного шага (аналогично шагу $[t_k, t_{k+1}]$), покрывает собой площадь, подсчитываемую между соседними парами траекторий. Подобные погрешности оказывают негативное влияние на результат подсчета коэффициента $K_{охв}$, приводя к завышению данного показателя для некоторых схем заводнения: особенно сильно данный эффект проявляет себя, в первую очередью, при исследовании блоковых схем расстановки скважин.

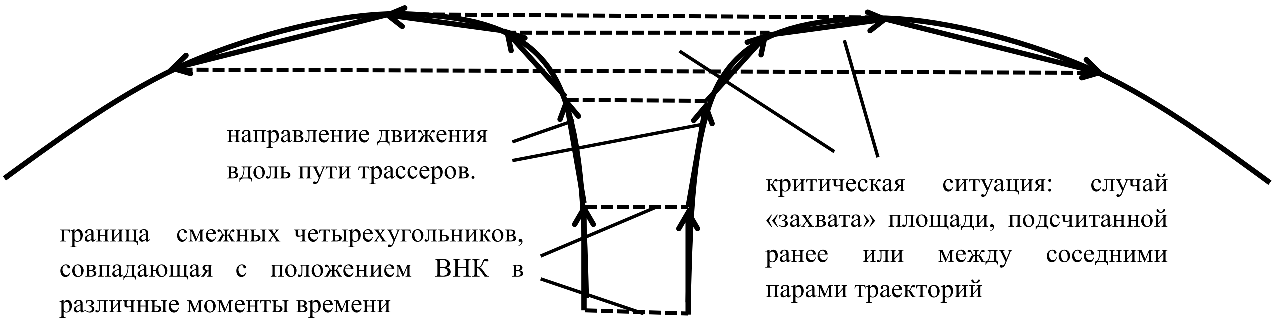


Рисунок 4. Графическое изображение особого случая, при котором стандартный алгоритм подсчета площади неприменим.

В случае использования одно-, трех- и пятирядной схем наблюдается несколько иная форма особого случая, представленная на рисунке 5: в данной ситуации причиной покрытия площади, подсчитываемой между соседней парой траекторий, является остановка правого трассера вследствие его попадания в область нулевой скорости, на границе раздела двух соседних контуров нагнетания.

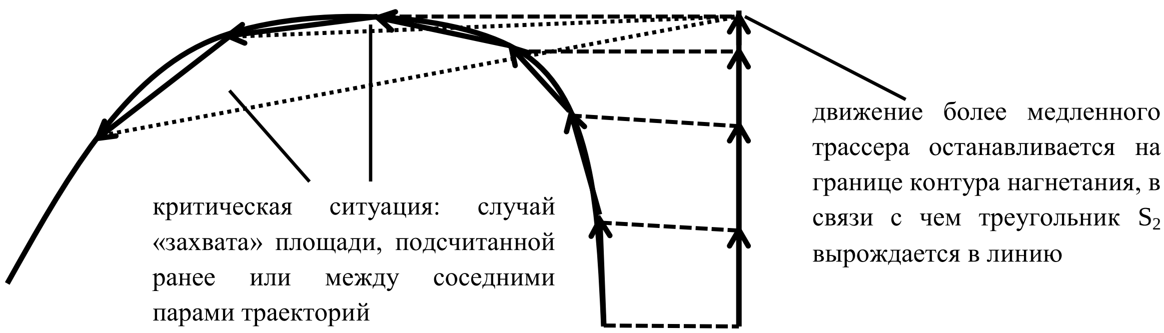


Рисунок 5. Графическое изображение особого случая, наиболее характерного для блоковых рядных схем заводнения.

В результате один из треугольников, S_2, вырождается в линию нулевой толщины: при этом вторая фигура, S_1, покрывает площадь, подсчитываемую между соседней парой траекторий. При этом необходимо отметить, что причиной неприменимости алгоритма в обоих особых случаях является «выгибание» обоих (рисунок 4) или одного (рисунок 5) трассера из рассматриваемой пары.

Критические ситуации, описанные выше, могут быть устранены без значительной модификации алгоритма: для учета подобных «особых» случаев и их исключения из процесса подсчета площади достаточно отслеживать знак обоих векторных произведений для каждой пары трассеров, которые (вектора) также являются нормалями к формируемым треугольникам. Таким образом, смена направления нормали однозначно указывает на «выгибание» траектории трассера, в связи с чем подсчет площади в соответствующей паре на данном временном шаге следует исключить. Обновленная версия алгоритма обеспечивает сохранение прежней точности расчетов, исключая при этом значительные погрешности, возникающие, как правило, при подсчете значения $K_{охв}$ для периода заводнения, следующего после начала обводнения добывающих скважин.

3. Программный комплекс «Двоякопериодические схемы заводнения: качественный и количественный анализ»

3.1. Общее описание

Способ мониторинга подвижного фронта в условиях «разноцветных жидкостей» и «поршневого вытеснения» (см. первый параграф) был программно реализован и дополнен алгоритмами подсчета характеристик заводнения – времени прорыва воды и коэффициента охвата по площади (см. второй параграф). При создании программы использовалась среда разработки и исполнения Wolfram Mathematica. Полученный программный комплекс «Двоякопериодические схемы заводнения: качественный и количественный анализ» предназначен для анализа процесса вытеснения нефти водой при различных способах взаимной расстановки добывающих и нагнетательных скважин.

В основу программы положен метод решения, представленный во второй главе настоящей работы, а также – его апробация на случай заводнения (см. первый параграф настоящей главы). Для задания геометрии взаимной расстановки скважин используются параметры, определяющие соответствующую двоякопериодическую решетку (см. третий параграф второй главы). Отметим, что посредством программного комплекса было исследовано порядка 30 схем заводнения, описанных различными авторами: помимо «классических» рядных и площадных схем, представленных, к примеру, в [75] [84] [119] [163], изучению подвергались также менее известные и более сложные в построении схемы [19] [40] [170]. Сведения о точках размещения скважин и их мощностях используются для задания функции $\Phi(z,\bar{z})$ (см.

параграфы 2-3 второй главы), играющей важную роль при мониторинге фронта вытеснения Waterfloodfront. Сама процедура отслеживания Waterfloodfront напрямую связана с решением интегро-дифференциальной системы (СИДУ) методами, описанными в четвертом параграфе второй главы: конечный вид СИДУ, использовавшихся в рамках программного комплекса, представлен в первом параграфе настоящей Главы. Выходные данные программы включают в себя картины заводненной области, построенные для различных этапов процесса, а также – показатели времени $t_{waterbreak}$ прорыва воды и коэффициента $K_{охв}$ охвата по площади. Ниже, на рисунке 6, приведена блок-схема, демонстрирующая работу программного комплекса.

Фактически, выполнение программы включает в себя этап ввода исходных данных в форме, удобной для решения СИДУ, и далее – запуск одного из двух основных блоков, соответствующего выбранной модели – «разноцветным жидкостям» или «поршневому вытеснению». В обоих случаях выходные данные включают в себя результаты качественного и количественного анализа процесса заводнения и его характеристик: тем не менее, форма представления результатов зависит от выбираемого блока. Особенности работы программного комплекса и различия между решениями для «разноцветных жидкостей» и «поршневого вытеснения» будут продемонстрированы далее. Отметим, что помимо анализа характеристик заводнения при различных способах расстановки скважин, программа также предоставляет возможность для проведения ряда вычислительных экспериментов: соответствующие описания приведены в параграфах 6 и 7 настоящей главы.

Рассмотрим далее структуру программного комплекса, его основные составляющие и их назначение. Как было сказано ранее, программа «Двоякопериодические схемы заводнения: качественный и количественный анализ» создана в среде разработки и выполнения Wolfram Mathematica. Таким образом, программа, фактически, представляет собой файл .nb с авторскими функциями и структурами данных, условно разделенный на законченные секции. Последние, в свою очередь, сгруппированы в виду двух крупных блоков: «БЛОК I: СЛУЧАЙ РАЗНОЦВЕТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ» и «БЛОК II: СЛУЧАЙ ПОРШНЕВОГО ВЫТЕСНЕНИЯ». Заметим, что, несмотря на реализацию решения для различных задач, оба блока связаны между собой: в частности, параметры для хранения данных о геометрии расстановки скважин и их мощностях, а также – алгоритм подсчета коэффициента $К_{охв}$, реализованы в «БЛОК I: СЛУЧАЙ РАЗНОЦВЕТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ», но используются обеими частями программы. В то же время блоки отличаются друг от друга как алгоритмами решения СИДУ, так и структурами данных для хранения промежуточных и итоговых данных – в связи с различиями в подходе к мониторингу фронта Waterfloodfront. Рассмотрим далее содержание отдельных секций, составляющих программный комплекс, а также – главные вызываемые функции.

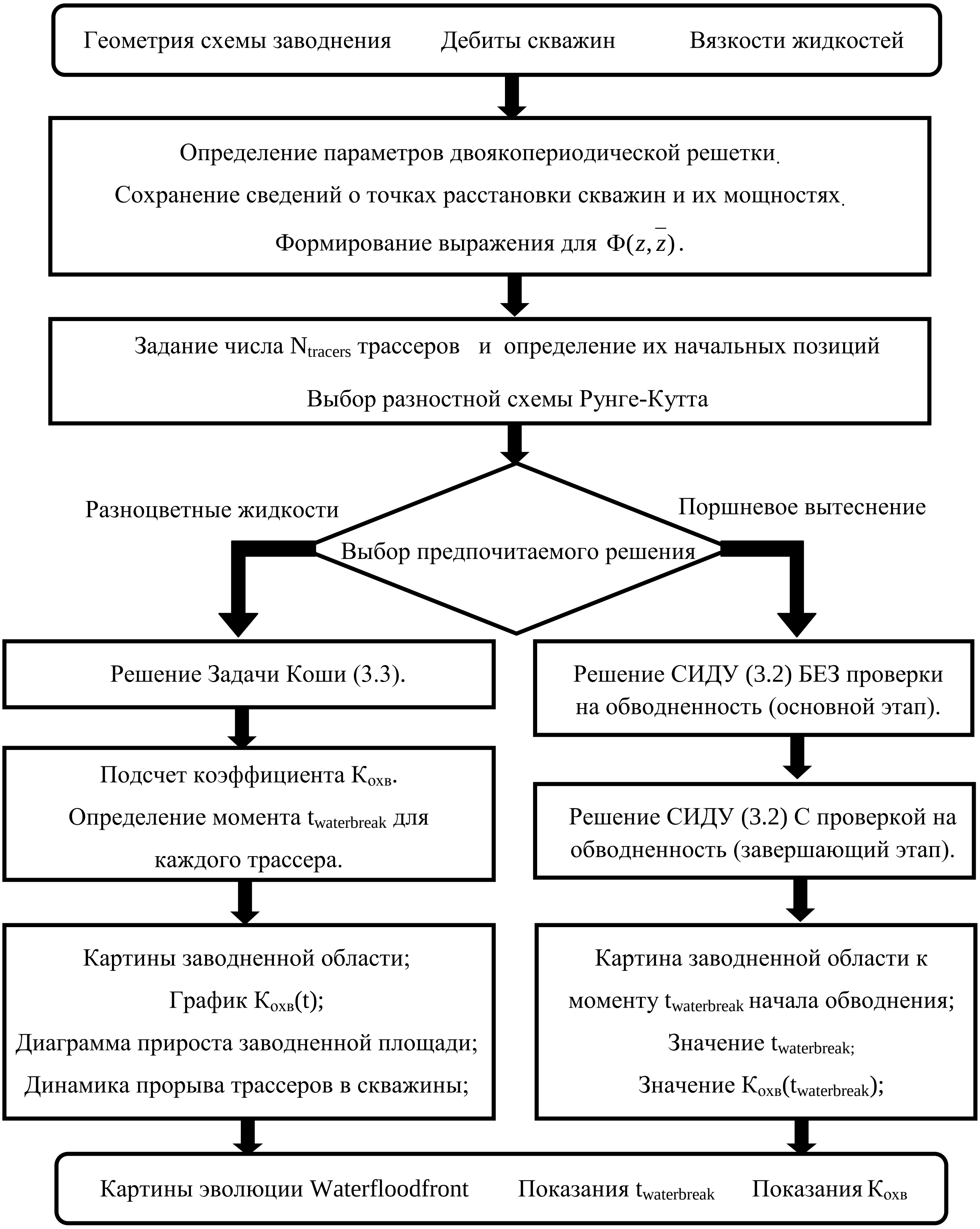


Рисунок 6. Схема работы программного комплекса «Двоякопериодические схемы заводнения: качественный и количественный анализ».

3.2. «БЛОК I: СЛУЧАЙ РАЗНОЦВЕТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ»

Как следует из названия, первая часть программы реализует решение задачи о мониторинге Waterfloodfront в рамках модели «разноцветных жидкостей». Данный блок включает в себя следующие секции:

1. ПАРАМЕТРЫ ЯЧЕЙКИ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ. Здесь представлены параметры λ, φ, Δ, ω_1 и ω_2 (см. третий параграф второй главы), определяющие форму и размер двоякопериодической ячейки, соответствующей выбранной схеме расстановки скважин. Таким образом, данная секция предназначена для хранения сведений о взаимной расстановке скважин, что влияет на конечный вид функции $\Phi(z,\bar{z})$.
2. ПАРАМЕТРЫ СКВАЖИН В ЯЧЕЙКЕ. В этом разделе собраны сведения о точках z_i расположения добывающих (products) и нагнетательных (injects) скважин, а также – информация об отношении дебитов $\chi = \dfrac{Q^{product}}{Q^{inject}}$ и радиусе призабойной зоны r_w. Параметр χ был введен из предположения, что $\forall(i,j) \in (INJECTS), Q_i = Q_j$ и $\forall(i,j) \in (PRODUCTS), Q_i = Q_j$: таким образом, дебиты однонаправленных скважин (добыча/закачка) были приняты равными между собой. Заметим, что данное условие не является обязательным для работы программы и имеет смысл частного случая.
3. ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ ТРАССИРОВКИ. В данной секции представлены основные структуры данных, используемые в процессе решения СИДУ при «Разноцветных жидкостях». Наибольшее значение для представления результатов имеет структура Tracers, содержащая историю движения каждого отдельно взятого трассера, в том числе – время прорыва в добывающую скважину и ее номер. В свою очередь, в этой секции также определены параметры, связанные с точностью решения СИДУ, а именно: величина шага по времени Δt, число трассеров $N_{tracers.}$ Данные характеристики, фактически, выступают параметрами дискретизации при решении сингулярного интегрального и дифференциального уравнений СИДУ (см. четвертый параграф второй главы). Наконец, в данной секции также указывается точка размещения выбранной нагнетательной скважины, в окрестностях которой производится мониторинг фронта Waterfloodfront.
4. ФУНКЦИЯ СКОРОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ. Здесь задается итоговое выражение spfunc(z) для функции $\Phi(z,\bar{z})$, основанное на точках z_i размещения скважин и соотношении χ их мощностей. При этом зависимость от переменной $\bar{z}$ в spfunc предполагается. Также, в данной секции представлено выражение, описывающее каждое отдельно взятое слагаемое в функции $\Phi(z,\bar{z})$. Таким образом, в рамках программного комплекса возможно

исследование и более простых случаев совместной фильтрации, исключающих двоякую периодичность. В качестве примера можно указать постановку Маскета (см. четвертый параграф настоящей главы), при которой $\Phi(z,\bar{z}) = \frac{Q_1}{z-z_1} - \frac{Q_2}{z-z_2}$.

5. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРАССИРОВКИ. Здесь представлены разностные схемы Рунге-Кутты различных порядков, реализованные для уравнения (3.3). Соответствующие примеры представлены в четвертом параграфе второй главы: здесь же приведен общий вид разностной схемы при аппроксимации уравнения $m\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = \Phi(z(t),\bar{z}(t))$.
6. ЗАПОЛНЕНИЕ СТРУКТУРЫ TRACERS. В данной секции описаны функции, обеспечивающие процесс трассировки – вплоть до момента прорыва в добывающую скважину или же до момента достижения заданной максимальной длины или времени процесса, выраженного в количестве итераций. Здесь же определен параметр *iterfunc*, хранящий сведения о выбранной схеме Рунге-Кутты из числа реализованных в «МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРАССИРОВКИ». Данная секция содержит три ключевых функции, запускаемые командой пользователя (см. далее секцию «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТРАССИРОВКИ»). Так, Trajectinitialize[*tracerscount*] выполняет инициализацию структуры Tracers, создавая массив с записями, соответствующими выбранному числу *tracerscount* трассеров. Далее, для определения начальных условий в Задаче Коши (3.3) используется функция Startcurve*[startpoint, rw,tracerscount]*: используя данные о точке *startpoint* размещения выбранной нагнетательной скважины, ее радиусе *rw*, а также – числе *tracerscount* трассеров, Startcurve создает начальный круговой контур, сохраняя координаты в структуре Tracers. Наконец, процесс трассировки запускается вызовом функции Buildtrajectories[*iterations*], обеспечивающей решение *tracerscount* задач Коши вида (3.3). При этом процесс вычисления траекторий прерывается по достижению заданного числа итераций *iterations*, или же при определении прорыва трассера в добывающую скважину, для чего используется специальная функция проверки.
7. ОБРАБОТКА ДАННЫХ ИЗ СТРУКТУРЫ TRACERS. Данная секция посвящена построению вспомогательных структур данных на основе содержимого из Tracers: далее вспомогательные массивы, списки и записи используются при построении графиков, диаграмм, картин заводненной области и т.д. Из-за значительного объема и разнонаправленности решаемых задач данная секция фактически была разбита на подсекции. Рассмотрим вкратце основные функции описываемого раздела:
   - Waystocurves[*wayssource*] – Формирование списка контуров фронта вытеснения из структуры *wayssource* вида Tracers.

- Graphiccurves[*curveslist*,*color*] – построение картины заводненной области, представляемой списком *curveslist*: последний может представлять как множество траекторий трассеров, так и контуры фронта вытеснения. Параметр *color* указывает на цвет итогового изображения.
- BuildASEgraphiclists[*curvesource,timepointlist,area,diff*] – формирование сложной структуры данных для последующего построения графиков вида Кохв(t) и диаграмм прироста заводненной площади для отдельных этапов заводнения. В основе работы функции лежит алгоритм подсчета площади, охваченной заводнением. Используя информацию *curvesource* о положениях фронта Waterfloodfront в различные моменты времени (результат работы Waystocurves), сведения $timepointlist=\{t_{waterbreak1},t_{waterbreak2},\ldots t_{fullwaterflood}\}$ о моментах начала обводнения различных групп добывающих скважин, площадь *area* контура нагнетания, BuildASEgraphiclists вычисляет значение $К_{охв}$ в нескольких временных точках на отрезке $[t_{waterbreak1}, t_{fullwaterflood}]$. При этом число точек определяется параметром *diff*.
- Buildwwhpoints[*wwhsource,wellnum*] – создание списка точек для графика, отражающего динамику прорыва трассеров в добывающие скважины различных групп, обводняющихся одновременно. В качестве примера можно рассмотреть девятиточечную обращенную схему: последняя включает в себя две группы скважин, обводнение которых происходит на различных этапах заводнения – центральные и угловые (см. Приложения). Для составления истории обводнения скважин *wwhsource* на основе структуры Tracers требуется специальная обработка данных, выполняемая в рамках отдельной функции. После этого необходимо составить перечень точек для построения графика, отражающего динамику прорыва трассеров в скважину с номером *wellnum*. Для этих целей и используется Buildwwhpoints. Результатом ее работы является список точек (t_i,n_i), где n_i – нормированное число трассеров, достигших скважины *wellnum* к моменту t_i. Отметим, что нормирование осуществляется по общему количеству частиц, прорвавшихся в выбранную скважину.

8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТРАССИРОВКИ. Первый этап вычислений. Данная секция обеспечивает запуск мониторинга фронта Waterfloodfront, а также – необходимый уровень взаимодействия с пользователем. Именно в этом разделе определен вызов функций Trajectinitialize, Startcurve и Buildtrajectories (см. пункт 6 настоящего списка): при этом все входные параметры являются настраиваемыми и могут быть определены пользователем посредством ручного ввода с клавиатуры.

9. ОБРАБОТКА ДАННЫХ. Второй этап вычислений. Здесь осуществляется подготовка к построению графиков и диаграмм на основе данных из структуры Tracers, заполненной на предыдущем этапе. Для обработки содержимого Tracers используются главные вызываемые функции из секции 7.
10. ВЫВОД ГРАФИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ. Заключительный этап вычислений. Данная секция разбита на четыре подсекции, посвященные отображению результатов в различной форме, включая динамику N(t) прорыва трассеров в добывающие скважины, круговые диаграммы прироста заводненной площади, зависимость вида $K_{охв}(t)$, а также - эволюцию фронта Waterfloodfront во времени.

Рассмотрим далее алгоритм работы БЛОКА I после запуска на выполнение секции 8: соответствующая блок-схема приведена ниже, на рисунке 7. Фактически, процедуру анализа задаваемой схемы расстановки скважин можно разбить на следующие этапы:

1. ПОДГОТОВКА И ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ. Данный этап включает в себя сохранение информации о конечном виде $\Phi(z,\bar{z})$, выбранной разностной схеме Рунге-Кутты, и далее – числе $N_{tracers}$ отслеживаемых трассеров и величине шага по времени Δt. После этого производится инициализация структуры Tracres - для сохранения результатов трассировки. Для этих целей вызывается функция Trajectinitialize. Завершающим шагом является определение начальных позиций всех $N_{tracers}$ трассеров с помощью Startcurve.
2. ТРАССИРОВКА. Один из двух основных этапов анализа: здесь осуществляется решение Дифференциальных уравнений вида (3.3) последовательно для каждого из $N_{tracers}$ трассеров: при этом расчеты выполняются с использованием выбранной схемы Рунге-Кутты, на отрезке [Δt,iterations*Δt] с шагом Δt (индекс итераций – j). Благодаря непрерывности функции скорости при «разноцветных жидкостях» процесс трассировки может выполняться вплоть до полного обводнения исследуемой области, т.е. - контура нагнетания выбранной скважины. В связи с этим процесс вычислений следует продолжать вплоть до момента достижения добывающих скважин всеми наблюдаемыми трассерами. В то же время опыт исследования некоторых схем заводнения показывает, что в ряде случаев часть наблюдаемых частиц останавливается возле границы контура нагнетания, на которой действует условие непротекания, т.е. нормальная компонента скорости равна нулю. Таким образом, помимо проверки на обводненность, процедура решения ДУ (3.3) для каждого отдельно взятого трассера z_i сопровождается проверкой текущего момента времени t, который не должен превышать значения iterations*Δt. Заметим, что целочисленная величина iterations задается пользователем.

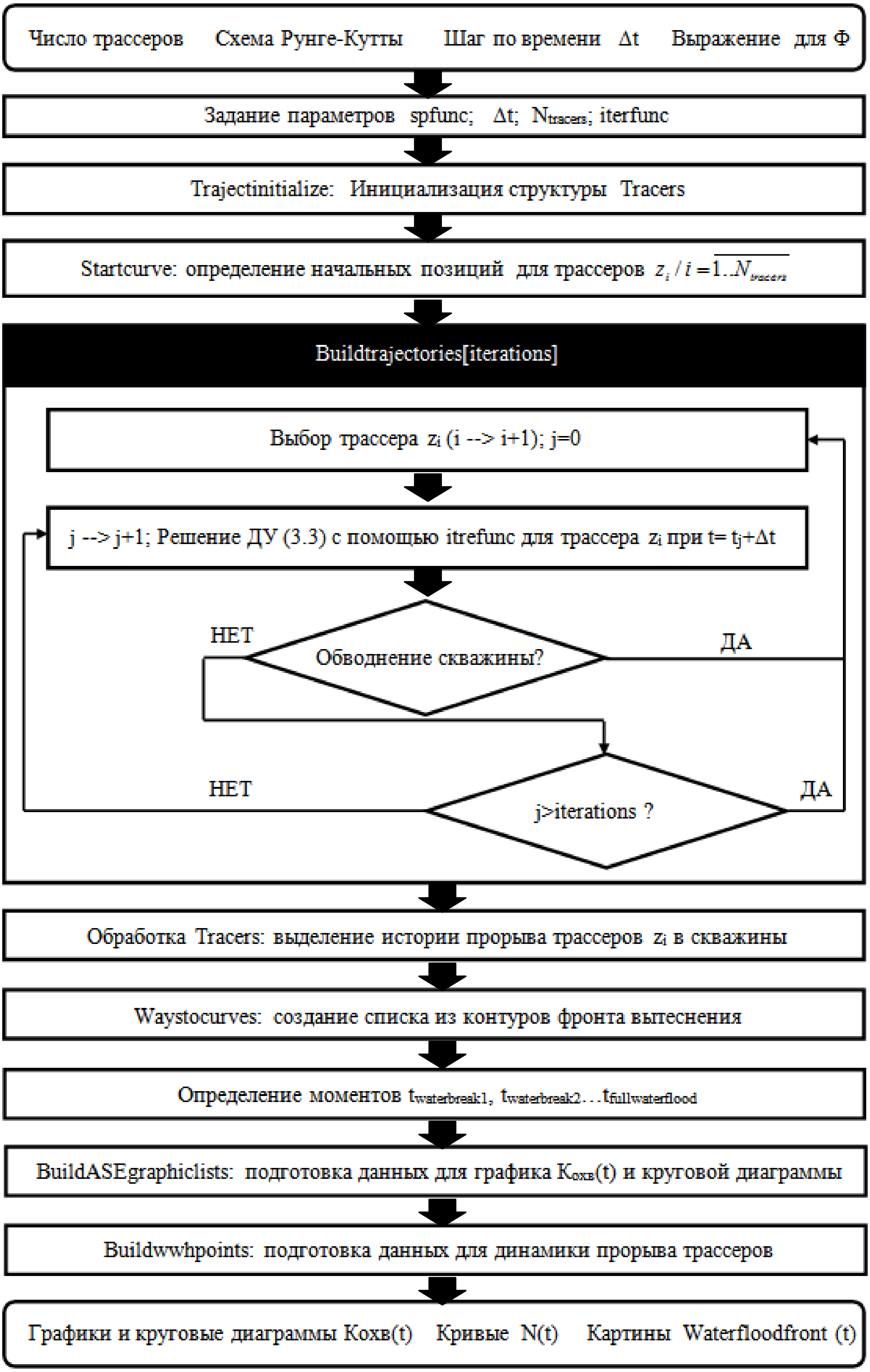


Рисунок 7. Схема работы БЛОКА I: СЛУЧАЙ РАЗНОЦВЕТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ.

3. ПОСТОБРАБОТКА. Второй основной этап вычислений: здесь производится анализ промежуточных результатов, сохраненных в структуре Tracers. Для этих целей используются функции из секции 7: основываясь исключительно на содержимом Tracers, Waystocurves, BuildASEgraphiclists, Buildwwhpoints и т.д. создают четыре новые структуры данных, используемые далее для графического отображения. Отметим, что работа каждой из названых функций производится в несколько этапов и включает в себя вызов множества вспомогательных подпрограмм, не упомянутых выше.
4. ВЫДАЧА РЕЗУЛЬТАТОВ. Заключительный этап работы БЛОКА I, представленный в секции 10. Здесь, на основе библиотечных функций Mathematica, выходные данные Waystocurves, BuildASEgraphiclists, Buildwwhpoints и т.д. отображаются в виде кривых, диаграмм, а также – картин, демонстрирующих эволюцию фронта вытеснения во времени.

Результатом работы БЛОКА I являются материалы качественного и количественного анализа заданной схемы расстановки скважин. Как было сказано ранее, в рамках настоящей работы исследовались порядка 30 различных схем заводнения. Выходные данные программы были сгруппированы по способам расстановки скважин и оформлены в виде специального атласа. Ниже представлено подробное описание изображений, графиков и диаграмм, составляющих законченный анализ выбранной схемы заводнения. В данном случае рассматривается пятиточечная обращенная схема расстановки скважин. Отметим также, что результаты анализа для еще четырех схем представлены в Приложениях.

Рисунок 8 демонстрирует способ расстановки добывающих и нагнетательных скважин в соответствии с пятиточечной обращенной схемой заводнения.

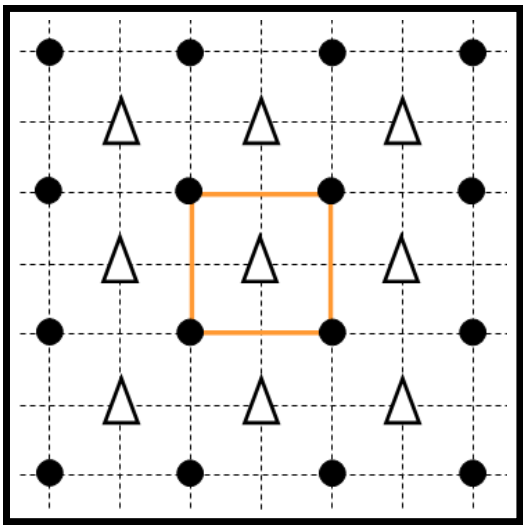


Рисунок 8. Геометрия размещения добывающих (черные круги) и нагнетательных (белые треугольники) скважин при пятиточечной обращенной схеме заводнения: повторяющийся элемент выделен желтым.

Заметим, что добывающие скважины обозначены черными кругами, а нагнетательные – белыми треугольниками: подобные обозначения будут использованы далее, вплоть до конца настоящей главы. Пунктирные линии очерчивают границы элемента, на котором построена рассматриваемая схема: в данном случае речь идет о квадрате. Таким образом, пятиточечная схема построена на квадратной сетке. Желтым выделены границы повторяющегося элемента схемы заводнения. Как было отмечено во втором параграфе, для оценки формы и площади контура нагнетания нагнетательной скважины следует использовать картины линий тока, характеризующих фильтрацию жидкостей в пласте. Подобный анализ для выбранной и любой иной схемы заводнения может быть проведен с помощью рисунка вида 9, представленного ниже.

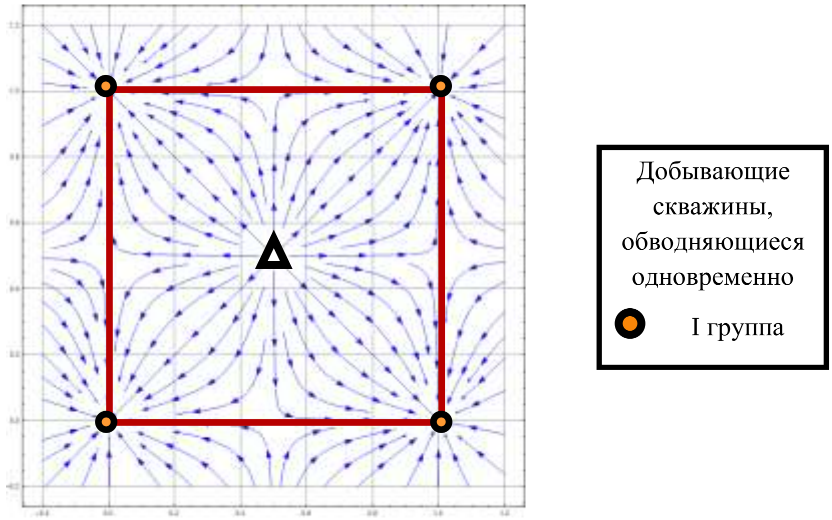


Рисунок 9. Схема выделения контура нагнетания (выделен красным) и групп добывающих скважин, обводняющихся одновременно (выделены желтым), для пятиточечной обращенной схемы заводнения. Синим обозначены линии тока, характеризующие течение нагнетаемой воды.

Здесь синим выделены линии тока, изображающие течение нагнетаемой воды. Границы контура нагнетания очерчены красным: отметим, что в данном случае контур нагнетания и повторяющийся элемент совпадают. Добывающие скважины, «обслуживаемые» нагнетательной, как правило, обводняются в различные моменты времени, в зависимости от способа размещения относительно источника нагнетания: в связи с этим их можно объединить в отдельные группы, как показано на рисунке 9. В случае пятиточечной обращенной схемы заводнения все добывающие скважины в пределах контура нагнетания равноудалены от нагнетательной, а потому образуют одну единственную группу.

Одним из наиболее наглядных результатов решения задачи Коши (3.3) являются картины заводненной области, построенные для различных этапов процесса заводнения. Ниже, на рисунке 10, представлен процесс расширения области, занятой водой, для нескольких моментов времени, каждому из которых соответствует свое цветовое обозначение: соответствующая «маркировка» приведена в таблице 1. Отметим, что этапы заводнения указаны в величинах безразмерного времени τ. Как можно видеть, обозначения, принятые в рисунках 9-10 совпадают, поскольку мониторинг фронта вытеснения осуществляется в пределах КН выбранной нагнетательной скважины.

Таблица 1. Цветовые обозначения для рисунка 10

Значение времени τ, выраженное в долях момента прорыва воды $t_{waterbreak}$ в первую группу скважин.	Цветовое обозначение области, занятой нагнетаемой водой.
$1/2t_{waterbreak}$	Оранжевый
$3/4t_{waterbreak}$	Красный
$t_{waterbreak}$	Светло-голубой
Полное обводнение всех трассеров	Синий

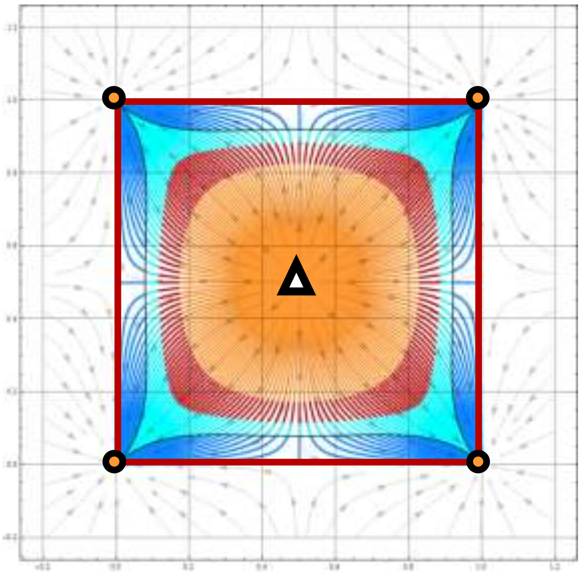


Рисунок 10. Картины заводненной области для пятиточечной обращенной схемы заводнения: обозначения контура нагнетания и групп добывающих скважин аналогичны рисунку 9. Цветовая легенда представлена в таблице 1.

Как было сказано ранее, во втором параграфе, коэффициент $K_{охв}$ охвата по площади, вообще говоря, является времязависимой характеристикой. Пример графика $K_{охв}(t)$, отражающего изменения коэффициента $K_{охв}$ во времени, представлен на рисунке 11. Нижняя координатная ось размечена в единицах безразмерного времени τ, а верхняя – в значениях $K_{охв}$, указанных в долях единицы, где единица составляет 100%. Черными точками на кривой обозначены моменты прорыва воды в различные группы добывающих скважин: как было сказано ранее, при исследовании пятиточечной обращенной схемы все добывающие скважины объединены в одну группу. Пунктирная часть графика соответствует асимптотическому поведению зависимости $K_{охв}(t)$ после последнего прорыва воды в наиболее удаленную группу скважин от источника нагнетания. Из описания структуры выражения для $K_{охв}$, представленного во втором параграфе, очевидно, что данный коэффициент станет равным единице за бесконечное время: поэтому поведение последней части графика $K_{охв}(t)$ и представляется асимптотическим.

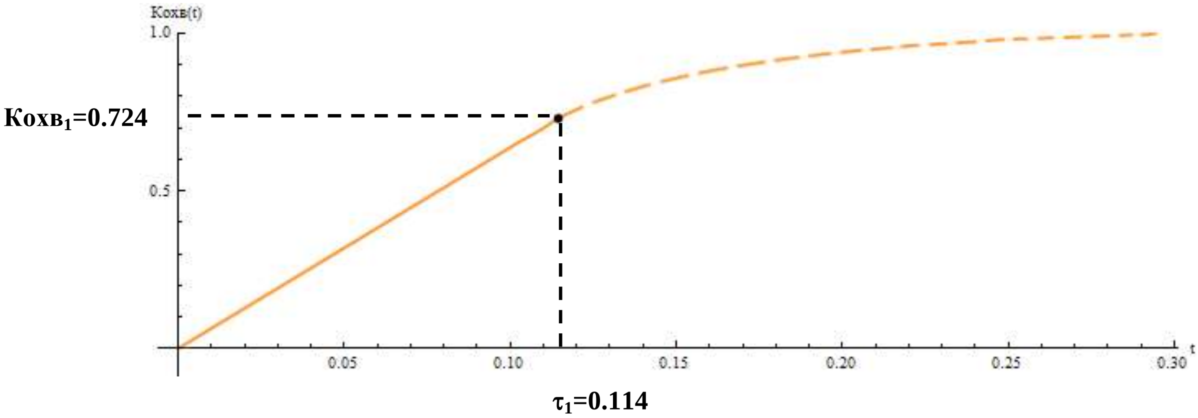


Рисунок 11. График зависимости $K_{охв}$(t), построенный на основе данных для пятиточечной обращенной схемы заводнения: пунктир указывает на асимптотическое поведение кривой, черная точка – на момент прорыва воды τ_1 в группу добывающих скважин. Исходя из анализа графика можно сделать вывод, что к моменту начала обводнения заводненная область составляла порядка 72.4% от площади контура нагнетания.

Из анализа кривой на рисунке 11 можно сделать вывод, что на момент начала обводнения $\tau = 0.114$ коэффициент $K_{охв}$ составлял порядка 72.4%. Таким образом, оставшиеся 27.6% от площади контура нагнетания (КН) были заполнены нагнетаемой водой в последующий период.

Подобный анализ удобно оформить в виде цветной диаграммы, аналогично изображению на рисунке 12. Для большего удобства, цветовые обозначения соответствуют легенде, представленной в таблице 1. Отметим, что нижеприведенная диаграмма позволяет наглядно оценить распределение объемов «промытой» нефти во времени процесса заводнения: в то же время ее вид может быть более сложным в зависимости от числа групп добывающих скважин, обводняющихся одновременно.

Наконец, отдельный интерес представляет динамика прорыва отслеживаемых трассеров в различные группы добывающих скважин. Подобные графики являются результатами решения задачи трассировки в одной из возможных ее постановок. Ниже, на рисунке 13, представлено распределение во времени прорыва отдельных частиц нагнетаемой воды в скважины каждой из групп, обозначенных на рисунках 9-10.

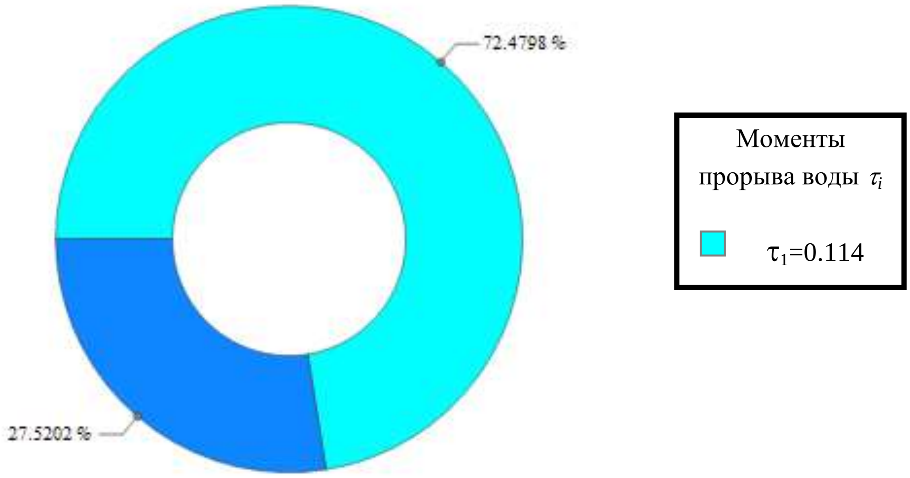


Рисунок 12. Диаграмма распределения площади заводненной области (в долях от площади контура нагнетания) во времени, от начала процесса заводнения до момента полного обводнения контура нагнетания. Цветовые обозначения аналогичны рисунку 10 и таблице 1. Результаты представлены для пятиточечной обращенной схемы заводнения.

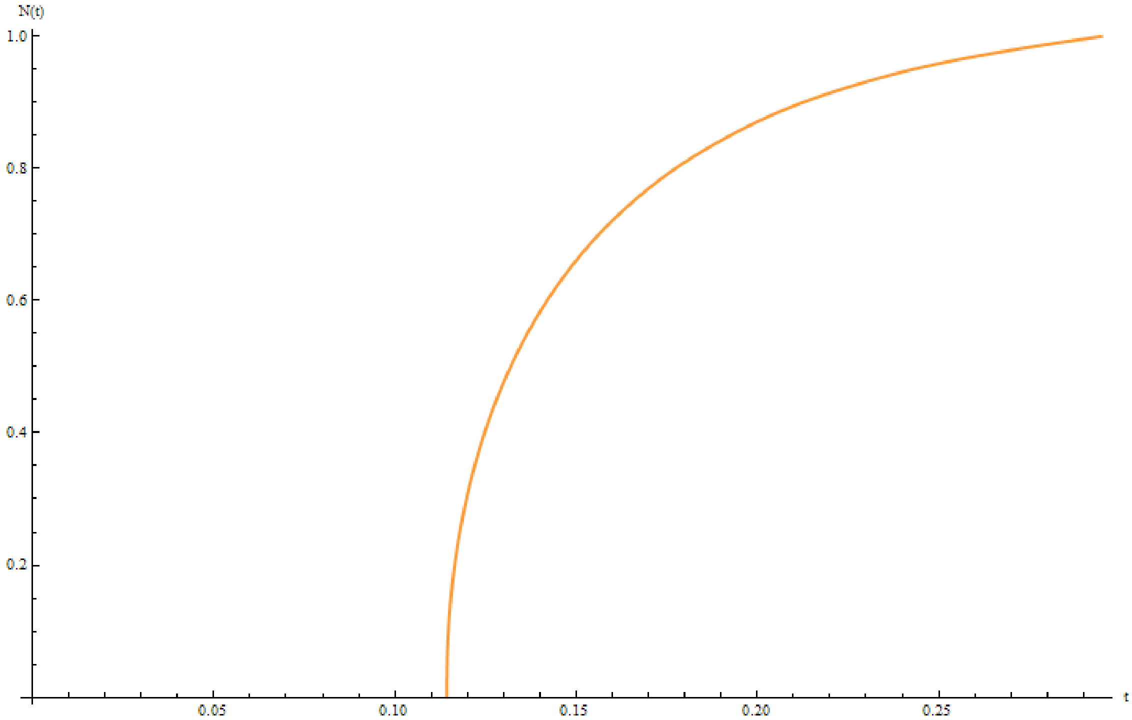


Рисунок 13. График зависимости числа трассеров, прорывающихся в скважины каждой из групп, представленных на рисунке 9, от времени процесса заводнения. Для удобства восприятия данных в случае наличия нескольких групп точки изображаемых кривых нормированы по общему числу частиц воды, прорвавшихся в скважины соответствующей группы.

Из анализа изображения на рисунке 10, построенного для обсуждаемой пятиточечной обращенной схемы, видно, что из 180 наблюдаемых трассеров 176 в конечном итоге прорвались в скважины единственной группы, равномерно распределившись между ними (скважинами): при этом 4 отслеживаемые частицы остановились на границе контура нагнетания, попав в точки нулевой скорости.

Равномерное распределение числа прорвавшихся трассеров между добывающими скважинами одной группы – характерное явление для всех исследованных схем заводнения: таким образом, для построения графика динамики прорыва частиц воды, аналогичного рисунку 13, достаточно рассмотреть одну скважину из группы. В то же время необходимо отметить, что при наличии нескольких групп добывающих скважин в пределах одного контура нагнетания, каждая из них (групп) «насыщается» различным числом трассеров. В связи с этим необходимо нормировать точки N(t) по числу отслеживаемых частиц, прорывающихся в каждую отдельно взятую скважину из каждой группы (благодаря симметрии, скважины в пределах одной группы насыщаются одинаковым числом трассеров).

3.3. «БЛОК II: СЛУЧАЙ ПОРШНЕВОГО ВЫТЕСНЕНИЯ»

Вторая часть программы представляет собой «модуль», реализующий мониторинг фронта вытеснения в условиях «поршневой» модели. Аналогично своему «предшественнику» «БЛОК II: СЛУЧАЙ ПОРШНЕВОГО ВЫТЕСНЕНИЯ» разбит на отдельные секции с различным назначением. В то же время, как отмечалось ранее, между обоими блоками имеется тесная связь. Фактически, функции, определенные в пределах «БЛОКА II: СЛУЧАЙ ПОРШНЕВОГО ВЫТЕСНЕНИЯ» используют часть подпрограмм из секции 7 «БЛОКА I»: при этом исходные данные задачи задаются при «поршневой модели» с помощью параметров, определенных в секциях 1-5. Далее рассмотрим подробнее структуру «БЛОКА II: СЛУЧАЙ ПОРШНЕВОГО ВЫТЕСНЕНИЯ». Данный раздел включает в себя следующие секции и основные вызываемые функции:

1. ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ ТРАССИРОВКИ. Здесь представлены основные структуры данных, используемые для хранения промежуточных и итоговых результатов при мониторинге фронта вытеснения. Наибольшее значение имеет массив Waterfloodfront, сохраняющий положение и форму подвижного фронта для каждого момента времени при трассировке. Фактически, Waterfloodfront совпадает по своему устройству с результатом работы функции Waystocurves (см. секцию 7 БЛОКА I). Также, в данной секции представлены параметры, хранящие значения вязкостей для нефти и воды - μ_{water} и μ_{oil}.
2. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРАССИРОВКИ. Здесь представлены методы численного решения интегро-дифференциальной системы (3.2), используемой в рамках «поршневой» модели. Фактически, данная секция разбита на подсекции, посвященные сингулярному интегральному и далее – дифференциальному уравнению. При

этом в основе используемых функций лежит программная реализация методов, описанных в четвертом параграфе второй главы. Ниже приведено описание главных вызываемых функций:

- FormTmatrix[*cnumber*] – построение матрицы T_{matrix} для уравнения $(T_{matrix})\vec{T} = \vec{T_r}$ (см. пункт 4.1 второй главы). В основе работы данной функции лежит построение системы вида (2.31) для выбранного $N_{tracers}$ числа трассеров. В качестве входного параметра FormTmatrix выступает номер контура, представляющего форму и положение фронта вытеснения для некоторого момента времени.
- FormNmatrix[*cnumber*] – формирование матрицы N_{matrix} для уравнения $\vec{N} = (N_{matrix})\vec{T} + \vec{N_r}$ (см. пункт 4.1 второй главы). Схема работы FormNmatrix во многом аналогична FormTmatrix. При этом входные данные также представлены номером контура – позицией фронта вытеснения в выбранный момент времени.
- Eq1vec[*cnumber*] и Eq2vec[*cnumber*] – функции, реализующие построение векторов $\vec{T_r}$ и $\vec{N_r}$ в матричных уравнениях (2.32) и (2.33). Входные параметры аналогичны таковым для FormTmatrix и FormNmatrix.
- Calccurvevelocity[*cnumber*] – Решение системы (2.32)-(2.33) с целью определить вектора $\vec{T}$ касательной и $\vec{N}$ нормальной компонент скорости. Как и в предыдущих случаях, входным параметром функции является номер контура, в точках которого вычисляется комплексно-сопряженная скорость. Работа Calccurvevelocity также включает в себя преобразование $\bar{V}(z(s))_{\Gamma(t)} = \left[\frac{(1+\kappa)}{2}T(s) + iN(s)\right]e^{-i\alpha}$ с тем, чтобы получить в качестве выходных данных значения правой части для дифференциальных уравнений вида $\left.\begin{aligned} m\frac{\partial \overline{z(s)}}{\partial t} &= \left[\frac{(1+\kappa)}{2}T^{water}(s) + iN^{water}(s)\right]e^{-i\alpha} \\ z_{t=0} &= z_0 + r_w e^{i\theta}. \end{aligned}\right\}$ (см. пункт 4.2 второй главы).

3. ЗАПОЛНЕНИЕ СТРУКТУРЫ WATERFLOODFRONT. В данной секции определены функции для запуска и управления мониторингом подвижного фронта. Подобно БЛОКУ I, в данном случае решению задачи предшествует определение начальных позиций трассеров: для этих целей используется функция Startcurve2[*startpoint,rw,tracerscount*], работа которой аналогична Startcurve (см. секцию 6 БЛОКА I). Используя данные о точке *startpoint* размещения выбранной нагнетательной скважины, ее радиусе *rw* и числе трассеров, Startcurve2 распределяет отслеживаемые частицы вокруг призабойной зоны, на удалении *rw* вокруг *startpoint*, после чего – сохраняет форму фронта вытеснения в массиве

Waterfloodfront. Далее следует запуск процесса мониторинга, для чего вызывается функция Wateroilfrontcapture[*iterations*]. Основанная на решении СИДУ (3.3), Wateroilfrontcapture определяет положение фронта вытеснения для каждой последующей итерации, вплоть до момента достижения шага с номером *iterations*. Отметим, что в случае использования Wateroilfrontcapture проверка на обводнение добывающих скважин не осуществляется, для экономии временных затрат. Для фиксации момента прорыва воды в добывающие скважины может быть задействована функция Wateroilfrontcapturewithcheck[*iterations*]. Действуя аналогично Wateroilfrontcapture, Wateroilfrontcapturewithcheck в то же время оценивает позиции каждого отслеживаемого трассера на фронте вытеснения, определяя момент достижения окрестностей добывающей скважины хотя бы одной наблюдаемой точкой. Таким образом, расчеты останавливаются сразу после того, как будет зафиксирован момент начала обводнения.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТРАССИРОВКИ. Основной этап вычислений. В данной секции производится инициализация и дальнейшее заполнение структуры Waterfloodfront посредством мониторинга фронта вытеснения. При этом пользователем осуществляется настройка таких параметров, как выбор точки размещения нагнетательной скважины, а также - число итераций БЕЗ и С проверкой на обводненность добывающих скважин. В целях уменьшения времязатрат рекомендуется использовать Wateroilfrontcapturewithcheck на завершающем этапе заводнения, при приближении фронта к окрестностям добывающих скважин.
5. ВЫВОД ГРАФИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ. Заключительный этап вычислений. Здесь обеспечивается вывод картины заводненной области (с помощью функции Graphiccurves) к моменту $t_{waterbreak}$, а также – значений $t_{waterbreak}$ и $К_{охв}|_{t=twaterbreak}$.Пример выходных данных будет представлен ниже.

По аналогии с первой частью программы, «БЛОК II: СЛУЧАЙ ПОРШНЕВОГО ВЫТЕСНЕНИЯ» начинает работу с запуска функций из секции 4. Блок-схема, демонстрирующая работу рассматриваемого блока, представлена ниже, на рисунке 14. Как можно видеть, порядок проведения анализа при «поршневом вытеснении» во многом схож с соответствующей процедурой при «разноцветных жидкостях»: фактически, работу БЛОКА II можно также представить виде четырех последовательно сменяющих друг друга этапов. Рассмотрим далее содержание каждого из них:

1. ПОДГОТОВКА И ИНИЦИАЛИЗАЦИЯ. Данный этап включает в себя сохранение информации о конечном виде $\Phi(z, \bar{z})$, выбранной разностной схеме Рунге-Кутты, и далее – числе $N_{tracers}$ отслеживаемых трассеров, величине шага по времени Δt, а также – показателях вязкости для нефти и воды. После этого производится инициализация

массива Waterfloodfront, посредством которого осуществляется хранение положений и формы фронта вытеснения для отдельных моментов времени. В довершение требуется определить начальные положения трассеров, и, следовательно – вид подвижного фронта при t=0: для этих целей используется функция Startcurve2.

2. ТРАССИРОВКА. Основной этап анализа: мониторинг фронта вытеснения на каждом временном шаге j осуществляется путем последовательного решения сингулярного интегрального (СИУ), а затем – дифференциального (ДУ) уравнений из системы (3.2). В основе работы Wateroilfrontcapture (и, соответственно, Wateroilfrontcapturewithcheck) лежат численные методы, описанные в параграфе 4 главы II. Так, для решения СИУ требуется построить систему матричных уравнений, составленных для каждого из $N_{tracers}$ трассеров: для этих целей используются главные вызываемые функции из секции 2. Результатом решения СИУ (с помощью функции Calccurvevelocity) являются вектора касательных и нормальных компонент скорости, определенные в точках z_i на фронте вытеснения в момент времени $t=j\Delta t$. По завершению работы Calccurvevelocity, с помощью специального преобразования осуществляется подготовка правой части для ДУ системы (3.2). Аналогично БЛОКУ I решение дифференциального уравнения осуществляется с помощью методов Рунге-Кутты. Однако, в данном случае, из-за специфики процесса мониторинга, интегрирование ДУ выполняется на отрезке $[j\Delta t, \Delta t(j+1)]$. Далее, процесс решения СИУ и ДУ повторяется для следующего временного шага j+1. Отметим также, что мониторинг фронта вытеснения условно можно разделить на две стадии. Большую часть временного отрезка *iterations**Δt трассировка выполняется с помощью Wateroilfrontcapture - БЕЗ проверки на обводненность добывающих скважин, для экономии вычислительных ресурсов. Наконец, для определения момента $t_{waterbreak}$, на последних итерациях запускается функция Wateroilfrontcapturewithcheck, останавливающая вычисления по достижению добывающей скважины хотя бы одним из трассеров, или же – по окончанию процесса (достижению заявленного момента времени, вводимого в виде параметра для Wateroilfrontcapture и Wateroilfrontcapturewithcheck).

3. ПОСТОБРАБОТКА. В данном случае на этом этапе осуществляется оценка параметров $t_{waterbreak}$ и $K_{охв}|t=t_{waterbreak}$.

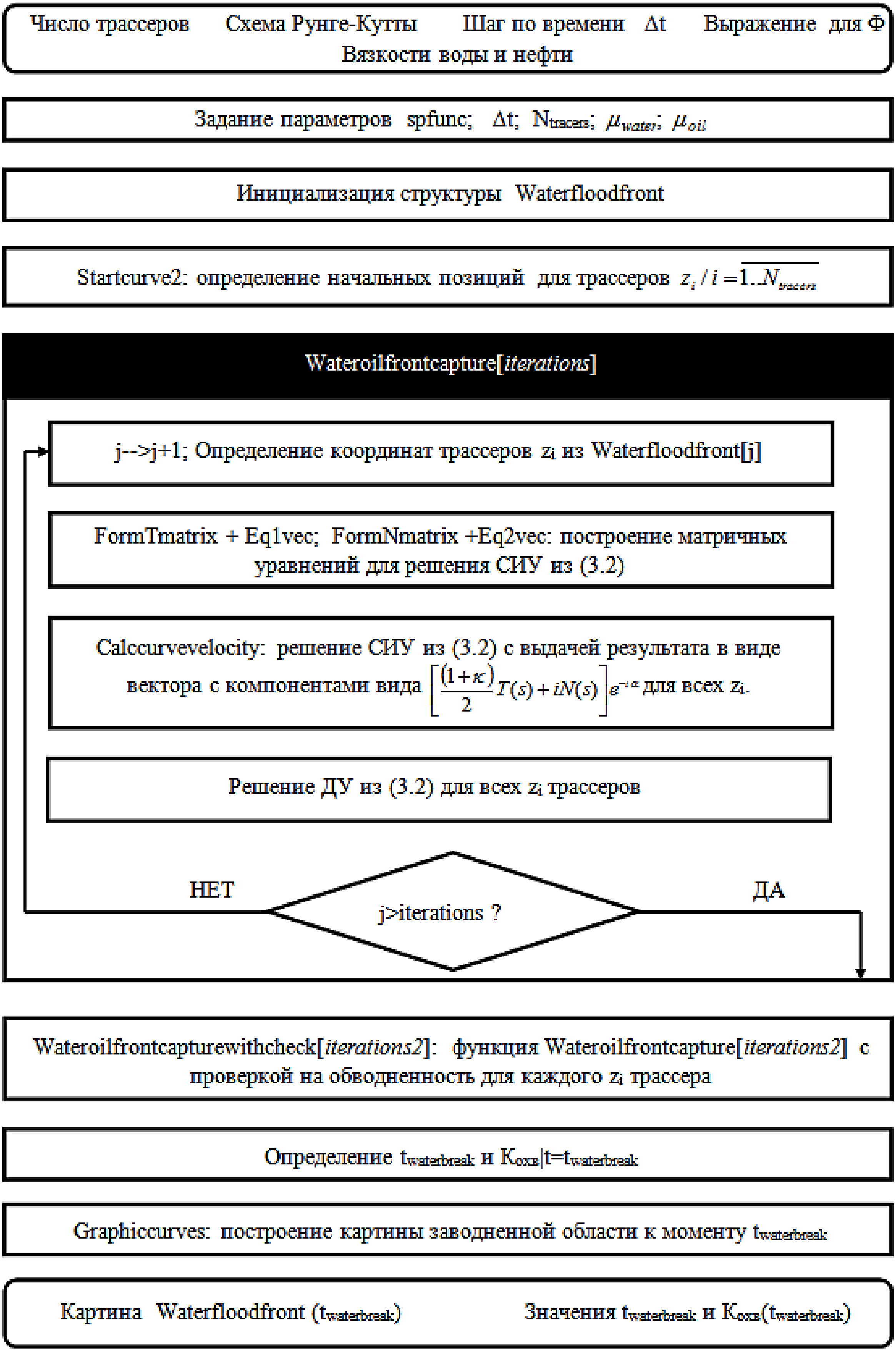
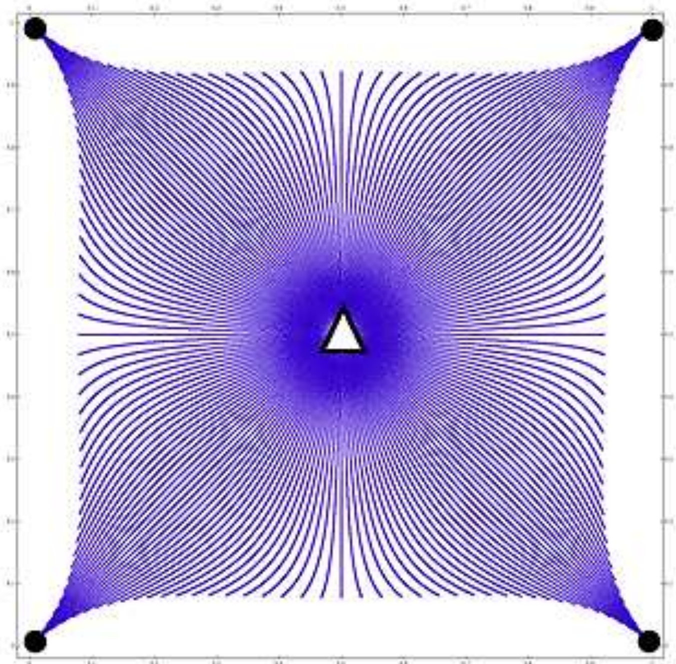


Рисунок 14. Блок-схема работы БЛОКА II: СЛУЧАЙ ПОРШНЕВОГО ВЫТЕСНЕНИЯ.

4. ВЫДАЧА РЕЗУЛЬТАТОВ. Заключительный этап работы БЛОКА II. Фактически, здесь выполняется построение картины заводненной области к моменту начала обводнения (с помощью функции Graphiccurves) , и далее - вывод значений $t_{waterbreak}$ и $K_{охв}|t=t_{waterbreak}$. Несмотря на то, что выходные данные уступают по объему таковым в БЛОКЕ I, анализ, предоставляемый БЛОКОМ II, оказывается вполне достаточным при проведении вычислительных экспериментов (см. седьмой параграф настоящей Главы).

В довершение приведем пример результатов (см. рисунок 15), получаемых при исследовании пятиточечной обращенной схемы с помощью данного блока. Отметим, что, по аналогии с БЛОКОМ I, материалы анализа для еще четырех схем расстановки скважин представлены в Приложениях.



Время начала обводнения $t_{waterbreak}$

0.1152

Коэффициент охвата по площади $K_{охв}$ к моменту $t_{waterbreak}$

0.72485

Рисунок 15. Пример результатов анализа, проведенного с помощью БЛОКА II:СЛУЧАЙ ПОРШНЕВОГО ВЫТЕСНЕНИЯ. Сверху представлена картина заводненной области к моменту времени $t_{waterbreak:}$ добывающие скважины обозначены черными кругами, нагнетательная – белым треугольником, траектории трассеров – синими кривыми. Ниже приведены показатели числовых характеристик заводнения – времени прорыва воды в добывающие скважины и коэффициента охвата по площади к этому моменту.

4. Анализ алгоритмов решения СИДУ и подсчета характеристик заводнения

Приближенное решение СИДУ (3.2) и задача Коши (3.3) предполагает оценку точности получаемых результатов. То же можно сказать и об алгоритме подсчета площади, используемого для вычисления коэффициента $K_{охв}$. Данному вопросу посвящен настоящий параграф. Ниже представлен анализ для численных методов, описанных в четвертом параграфе второй главы и используемых для решения сингулярного интегрального и дифференциального уравнений, а также – для алгоритма подсчета площади, представленного в предыдущем пункте.

Рассмотрим далее приближенное решение сингулярного интегрального уравнения (СИУ), используемого для нахождения векторов касательных $\vec{T}(s)$ и нормальных $\vec{N}(s)$ компонент скорости в отслеживаемых точках z_j на подвижной границе. Соответствующую процедуру можно разбить на три основных этапа, как показано ниже. Для определения компонент скорости $V(z(s)) = \left(\frac{(1+\kappa)}{2} T^{water}(s) + iN^{water}(s)\right) e^{-i\alpha}$ в точках $z_j \,/\, j = \overline{1, N}$ фронта вытеснения в текущий момент времени t_i требуется:

1. Выписать уравнения системы (2.30) для всех N отслеживаемых трассеров z_j на фронте вытеснения;
2. Используя систему алгебраических уравнений (2.31) и формулу приближенного вычисления сингулярного интеграла (2.34), построить матрицу T_{matrix} для вектора касательных компонент скорости и, аналогичным путем, N_{matrix} для вектора нормальных компонент;
3. Последовательно решить системы (2.32) и (2.33) с тем, чтобы получить значения векторов $\vec{T}(s)$ и $\vec{N}(s)$.

Построенный алгоритм был протестирован на устойчивость и сходимость на примере задачи о заводнении элемента девятиточечной обращенной схемы. Отметим, что расчеты проводились в условиях «поршневого вытеснения» при отношении вязкостей нефти и воды к=1/2: как было сказано ранее, СИДУ при «разноцветных жидкостях» вырождается в задачу Коши, в связи с чем подробный анализ невозможен. Ввиду симметрии девятиточечной обращенной схемы заводнения, при тестировании рассматривалась только верхняя левая четвертинка (первая четверть) формируемого фронта вытеснения. Как можно видеть, работа представленного выше алгоритма заключается в отыскании значений скорости в заданных точках z_j, координаты которых выступают в качестве входных данных. При этом общее число N

наблюдаемых частиц может быть использовано в качестве параметра дискретизации, ввиду равномерного распределения трассеров по фронту вытеснения.

Сходимость исследуемого метода может быть показана стремлением получаемых значений скорости $V(z(s))$ к некоторому конечному пределу при возрастании числа трассеров. Для этих целей был выбран круговой контур L, демонстрирующий положение подвижного фронта в начальный момент времени – вблизи нагнетательной скважины: отметим, что, ввиду симметрии девятиточечной обращенной схемы, достаточно рассмотреть одну четверть L, т.е. – первые N/4 трассеров. В качестве выходных данных алгоритма фиксировались значения скорости $V(z(s))$ для отслеживаемых точек $z_j \,/\, j=\overline{1..N/4}$. Поскольку величина $V(z(s))$ является комплексной, для оценки результатов использовалась следующая норма: $\|z\|=\|x+iy\|=\sqrt{|x|^2+|y|^2}$. Фактически, речь идет о модуле комплексного числа $|z|=\sqrt{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}$, где Re и Im – соответственно, его вещественная и мнимая части. Таким образом, осредненную скорость можно выразить следующей формулой: $V_{average}=\sum_{i=1}^{N/4}|V_i(z(s))|$. В процессе исследования параметр N изменялся от 72 до 800. Результаты выполненных расчетов представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты подсчета скорости V(z(s)) при увеличении числа N точек разбиения.

Номер опыта i	Число N	Осредненное значение скорости $V(z(s))$	Относительная погрешность $\frac{\left|V_{average}^{i}-V_{average}^{i-1}\right|}{\left|V_{average}^{i-1}\right|}, i>1$
1	72	299.714	-
2	120	299.897	$6.1058\cdot10^{-4}$
3	180	299.954	$1.9006\cdot10^{-4}$
4	240	299.974	$0.6667\cdot10^{-4}$
5	360	299.989	$0.5000\cdot10^{-4}$
6	720	299.997	$0.2666\cdot10^{-4}$
7	800	299.998	$0.0333\cdot10^{-4}$

Устойчивость метода по входным данным можно оценить, сравнивая изменение $\Delta V(z(s))$ значений скорости вдоль выбранных направлений при перемещении Δz_j

соответствующих трассеров «вглубь» исследуемой области. Известно, что в начале процесса заводнения течение вблизи нагнетательной скважины имеет радиальный характер. Таким образом, продвижение трассеров можно представить увеличением радиуса r кругового контура L. В ходе исследования параметр r планомерно увеличивался от величины r=0.01 на 0.1, 0.5, 1, 5, 10, и 50 процентов от первоначального значения. Аналогично предыдущему случаю, в качестве выходных данных фиксировались значения $V(z(s))$, после чего – проводилось осреднение по формуле: $V_{average} = \sum_{i=1}^{N/4} \left| V_i(z(s)) \right|$. Заметим, что в рамках данного исследования общее число N трассеров было принято равным 360. Результаты расчетов приведены в таблице 3.

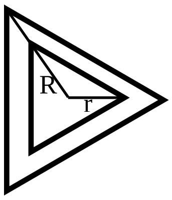
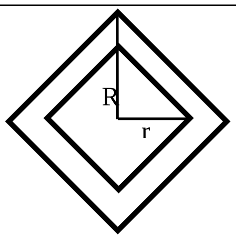
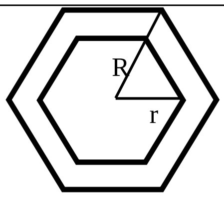
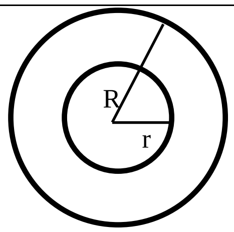
Таблица 3. Результаты подсчета скорости при увеличении радиуса r кругового контура L.

Номер опыта i	Радиус r	Осредненное значение скорости $V_{average}$	Относительная погрешность $\frac{\left|V^i_{average} - V^{i-1}_{average}\right|}{\left|V^{i-1}_{average}\right|}, i > 1$
1	0.01	299.989	-
2	0.01001	299.906	0.0002
3	0.01005	298.886	0.0036
4	0.0101	290.018	0.0296
5	0.0105	279.703	0.0355
6	0.011	266.717	0.0464
7	0.015	199.992	0.2501

На основе данных, представленных в колонках таблиц 2-3, можно сделать вывод об устойчивости и сходимости рассматриваемого метода решения сингулярного интегрального уравнения.

Оценка точности алгоритма, построенного для подсчета площади заводненной области, проводилась путем сопоставления с точными решениями подобной задачи: результаты сравнения представлены в таблице 4. Согласно описанию из параграфа 2, в основе работы метода лежит аппроксимация исследуемой области, имеющей заранее неизвестную форму и размеры, множеством смежных четырехугольников с последующим подсчетом их площади с помощью векторного произволения. Для оценки точности алгоритма последний испытывался на ряде простых примеров, площадь которых определяется точно: для этих целей использовался ряд двусвязных областей, имеющих вид колец различной формы. Фактически, использованные тестовые фигуры можно представить аппроксимациями колеса различной степени точности: число точек, составляющих обод колеса, бралось равным трем (фигура представлена в виде вложенных треугольников), четырем, шести и 180-ти. При этом внешний R и внутренний r радиусы фигур оставались неизменными для всех случаев: для каждой фигуры параметры R и r были взяты равными, соответственно, 1 и 0.5. Отметим, что в процессе оценки площадей фигур аналитически и численно значения сохранялись с точностью до пяти знаков после запятой. Как видно из содержания таблицы 4, наибольшая величина относительной погрешности не превышает 0.0005, что можно считать хорошим приближением к точному значению площади.

Таблица 4. Оценка точности для алгоритма подсчета $K_{охв}$

Вид исследуемой двусвязной области	Значения подсчитанной площади S		Относительная погрешность $\frac{\lvert Sabs - Saprox \rvert}{\lvert Sabs \rvert}$
	Точное S_{abs}	Приближенное S_{aprox}	
	0.97427	0.97427	0
	1.50000	1.50000	0
	1.94855	1.94856	0.000005
	2.35619	2.35572	0.0002

5. Задача об отслеживании фронта вытеснения: достоверность результатов

Алгоритмы приближенного решения, рассмотренные в предыдущем параграфе, впоследствии были программно реализованы с целью обеспечить мониторинг фронта вытеснения при «разноцветных жидкостях» и «поршневом вытеснении». При этом данные о перемещениях подвижной границы используются в разработанном программном комплексе для подсчета характеристик заводнения при различных схемах расстановки скважин. Результаты работы программы включают в себя как картины заводненной области, построенные для различных этапов процесса, так и значения времени прорыва воды в добывающие скважины и коэффициента охвата по площади. В процессе тестирования программного комплекса естественным образом возникла необходимость в оценке достоверности получаемых данных – как графических, так и числовых. Прежде всего, для этих целей была поставлена и решена простейшая задача Маскета о течении нагнетаемой воды между двумя одиночными скважинами в бесконечном пласте: данные о времени $t_{waterbreak}$ и форме заводненной области, полученные с помощью программного комплекса, сопоставлялись с результатами сторонних авторов. Проверка достоверности также проводилась на основе значений $K_{охв}$, подсчитанных для нескольких схем заводнения при единичном коэффициенте подвижности, что соответствует условиям «разноцветных жидкостей»: результаты расчетов сопоставлялись с данными сторонних авторов, полученными в рамках аналитического решения и физических экспериментов. Подробной оценке достоверности посвящен настоящий параграф. Здесь также рассматривается подборка ряда входных параметров, используемых при программном мониторинге фронта вытеснения, а именно – число отслеживаемых трассеров $N_{tracers}$, порядок методов Рунге-Кутты $P_{accuracy}$ и величина шага по времени $\Delta\tau$. Очевидно, что совокупность значений ($P_{accuracy}, N_{tracers}, \Delta\tau$) напрямую влияет на результаты решения СИДУ (3.2) и задачи Коши (3.3).

Рассмотрим далее вопрос о задании входных параметров $P_{accuracy}$, $N_{tracers}$ и $\Delta\tau$. В настоящем исследовании для составления набора ($P_{accuracy}, N_{tracers}, \Delta\tau$) использовался принцип «от простого к сложному»: изначально для всех исследуемых параметров устанавливались некоторые минимальные значения ($P_{accuracy}$=1, $N_{tracers}$=60, $\Delta\tau$=10^{-3}), после чего их величины варьировались для удовлетворения критерию отбора. В качестве последнего использовалась достоверность получаемых данных в сравнении с решениями сторонних авторов. Прежде всего, для этих целей требовалось соблюдение дополнительного условия – возможности фиксации момента прорыва воды в добывающие скважины.

Первым из варьируемых параметров стало число $N_{tracers}$ трассеров, определяющих вид фронта вытеснения. В качестве опоры, при подборке его значения использовались картины заводненной области, полученные из сторонних источников. Ниже, на рисунке 16, представлена группа из четырех изображений для фрагмента (четвертинки) пятиточечной обращенной схемы заводнения, включающая в себя результаты физических (a), численных (b,c) экспериментов, а также - схематичную картину (d) эволюции фронта вытеснения во времени.

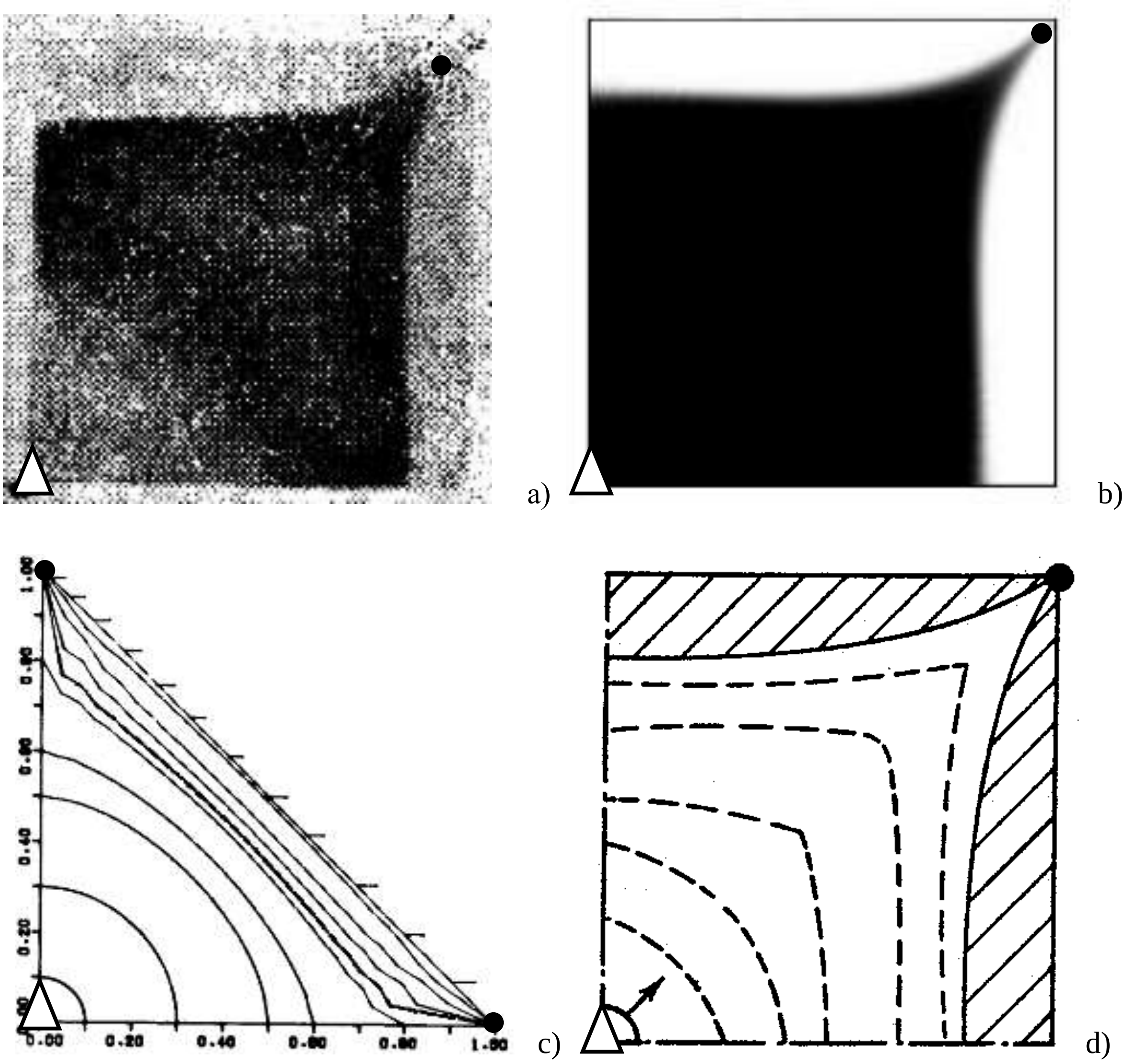
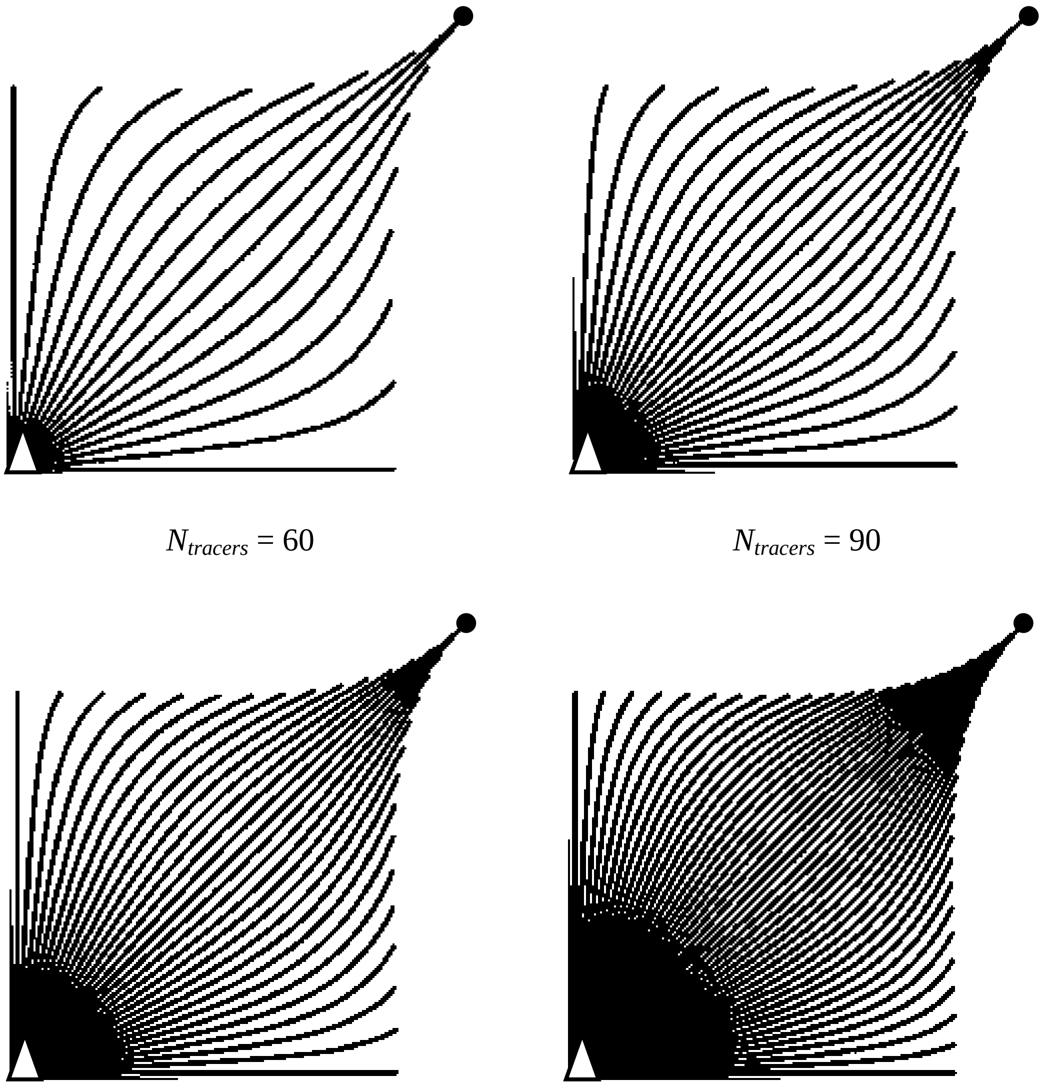


Рисунок 16. Примеры картины заводненной области и эволюции фронта вытеснения к моменту прорыва воды в добывающие скважины для четвертинки пятиточечной обращенной схемы заводнения. Изображение a) – фотография, полученная в рамках физического эксперимента на электролитической модели [84]; b) –картина, полученная при численном моделировании процесса заводнения с помощью программного симулятора [180]; c) - результат численного решения задачи о продвижении фронта вытеснения [148]; d) – схема расширения заводненной области [135].

Все изображения, приведенные на рисунке 16, соответствуют случаю однородного пласта и единичного коэффициента подвижности M (см. определение в Главе I), при котором вода и нефть полагаются физически неразличимыми. Данные условия соответствуют постановке задачи о заводнении в рамках модели «разноцветных жидкостей». В процессе первичного перебора возможные значения $N_{tracers}$ брались кратными максимальной величине центрального угла (360°), вершина которого располагалась в центре нагнетательной скважины.

Ниже, на рисунке 17, приведены картины заводненной области к моменту $t_{waterbreak}$ начала обводнения добывающих скважин для четверти элемента пятиточечной обращенной схемы заводнения: представленные изображения соответствуют различным значениям параметра $N_{tracers}$.



$N_{tracers}$ = 60 $N_{tracers}$ = 90

$N_{tracers}$ = 120 $N_{tracers}$ = 180

Рисунок 17. Примеры картины заводненной области и к моменту прорыва воды в добывающие скважины для четвертинки пятиточечной обращенной схемы заводнения, построенные в рамках данного исследования. Представленные изображения соответствуют различному числу трассеров, задействованных для представления подвижного фронта.

Следующим шагом при выборе возможного числа трассеров стала оценка числовых характеристик заводнения - времени $t_{waterbreak}$ прорыва воды в добывающие скважины и коэффициента $K_{охв}$ охвата по площади.

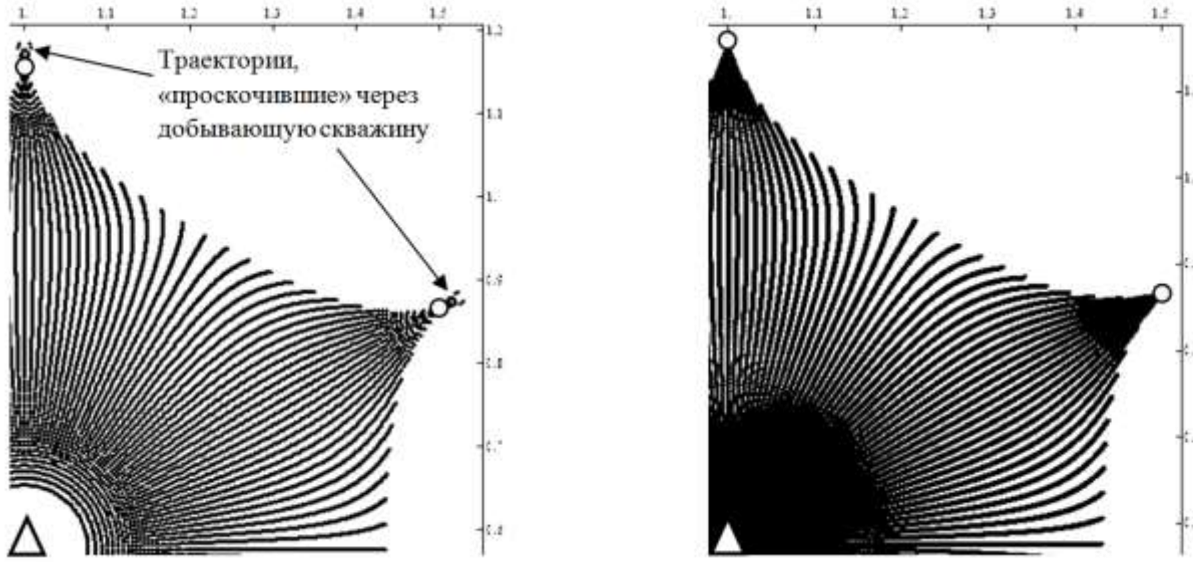
Результаты расчетов приведены ниже, в таблице 5: как можно видеть из анализа ее столбцов, разница в значениях $t_{waterbreak}$ и $K_{охв}$ оказалась достаточно мала при переходе от 120-ти к 180-ти трассерам. Данный вывод подтверждается и качественным анализом: использование значения $N_{tracers}$=120 обеспечивает достаточную подробность картины заводненной области, особенно в направлении добывающей скважины. Таким образом, в результате было принято решение установить используемое число трассеров равным 120-ти.

В то же время последующий сравнительный анализ ряда более сложных схем внутриконтурного заводнения, предполагающих значительное число скважин в ячейке двоякопериодической решетки, продемонстрировал недостаточность выбранного количества трассеров. В результате было принято решение увеличить число отслеживаемых частиц еще на 60 единиц: таким образом, итоговое значение параметра $N_{tracers}$ было принято равным 180-ти.

Таблица 5. Сравнение показателей $t_{waterbreak}$ и $K_{охв}$ заводнения для различного числа трассеров.

Число трассеров $N_{tracers}$	Значения $t_{waterbreak}$	Значения $K_{охв}$
60	0.1146	0.72804
90	0.1144	0.72532
120	0.1144	0.72481
180	0.1144	0.72480

Далее требовалось установить значения остальных двух параметров из набора ($P_{accuracy}$, $N_{tracers}$, $\Delta\tau$). Исходя из назначения $P_{accuracy}$ и $\Delta\tau$ очевидна их тесная связь. Отметим, что, в соответствии с принципом «от простого к сложному», первоначально значение параметра $P_{accuracy}$ точности методов Рунге-Кутты было принято равным единице. Таким образом, требовалось определить величину шага по времени $\Delta\tau$, при котором возможен программный мониторинг фронта вытеснения. Необходимым условием применимости набора ($P_{accuracy}$, $N_{tracers}$, $\Delta\tau$) является возможность фиксировать момент достижения трассером добывающей скважины - с тем, чтобы оценивать время $t_{waterbreak}$ начала обводнения. Известно, что по мере приближения к точечному стоку (в данном случае, к добывающей скважине) скорость жидкости резко возрастает. Данный эффект неизбежно проявляется и при решении уравнения трассировки в СИДУ (3.2) или задаче Коши (3.3). Таким образом, требовалось установить достаточно малое значение шага $\Delta\tau$ с тем, чтобы зафиксировать момент достижения трассером добывающей скважины и не допустить «проскакивания» через точку ее (скважины) размещения. Для этих целей параметр $\Delta\tau$ определялся путем вычислительного эксперимента, проведенного на примере семиточечной обращенной схемы заводнения. Полученные картины заводненной области для некоторых значений $\Delta\tau$ приведены ниже, на рисунке 18. Отметим, что величина шага $\Delta\tau$ определялась из отрезка [10^{-3}, $10^{-4}/3$].



$\Delta\tau=10^{-3}/3$ $\Delta\tau=10^{-4}/3$

Рисунок 18. Примеры картины заводненной области к моменту прорыва воды в добывающие скважины для фрагмента семиточечной обращенной схемы заводнения, построенные для значений $\Delta\tau=10^{-3}/3$ (слева) и $\Delta\tau=10^{-4}/3$.

На изображении слева отчетливо видны траектории течения трассеров, «проскочивших» через места размещения добывающих скважин (белые круги с черной окантовкой). В то же время подобная ситуация не замечается на картине справа: в данном случае малый шаг $\Delta\tau$ обеспечил возможность фиксации момента прорыва воды в добывающие скважины.

Таким образом, изначальный набор параметров ($P_{accuracy}$, $N_{tracers}$, $\Delta\tau$) был установлен в следующей форме:

$$P_{accuracy}=1; N_{tracers}=180; \Delta\tau=10^{-4}\big/3. \tag{3.7}$$

Далее требовалось оценить работу программного комплекса при заданной конфигурации (3.7). Для этих целей была выполнена проверка достоверности получаемых результатов: выходные данные программы сопоставлялись с материалами сторонних авторов, полученными при решении простейших задач заводнения, а также – в рамках численных и физических экспериментов.

Рассмотрим далее вопрос о мониторинге фронта вытеснения в постановке Маскета. Ввиду своей простоты, данная задача имеет аналитическое решение, которое может использоваться при оценке достоверности. Согласно постановке Маскета, процесс вытеснения нефти водой рассматривается в бесконечном плоском однородном резервуаре фиксированной толщины h. При этом система разработки месторождения ограничена двумя разнопрофильными скважинами, расположенными на расстоянии a=2 друг от друга, в точках x=-1 и x=1. Отметим, также, что процесс заводнения рассматривается в условиях «разноцветных жидкостей» и при равных суммарных мощностях добычи и закачки: таким образом, дебиты скважин Q^{inject} и $Q^{product}$ полагаются равными. Соответствующая графическая постановка задачи приведена ниже, на рисунке 19.

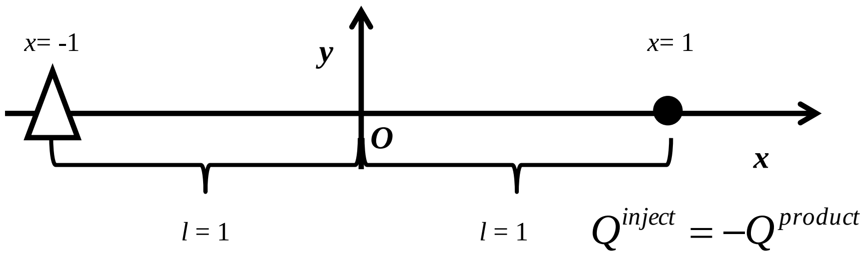


Рисунок 19. Графическая постановка задачи Маскета для двух скважин.

Далее рассмотрим уравнение трассировки для задачи Маскета: при этом выполним перенос начала координат в точку размещения нагнетательной скважины, а также переход в комплексную плоскость. В результате получим:

$$m\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = \frac{Q^{inject}}{2\pi h}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z-2}\right]. \tag{3.8}$$

Далее выполним обезразмеривание представленного выше уравнения для удобства интегрирования. Введем вспомогательные обозначения $\varsigma = z/2$ и $\tau = \dfrac{Q^{inject}t}{2\pi m h|l|^2}$: последний параметр имеет смысл «безразмерного времени» и используется в качестве переменной интегрирования, как было показано во втором параграфе настоящей главы. После соответствующих преобразований уравнение (3.8) примет вид:

$$2\frac{\partial \bar{\varsigma}}{\partial \tau} = -\frac{1}{\varsigma(\varsigma - 1)}. \tag{3.9}$$

Как уже было сказано выше, задача Маскета является аналитически разрешимой, благодаря чему интересующие нас характеристики заводнения могут быть вычислены точно. Так, время $t_{waterbreak}$ начала обводнения добывающей скважины может быть найдено путем решения уравнения (3.9) для кратчайшей траектории течения, параллельной оси *Ox*. В результате получим, что моменту прорыва воды в безразмерной форме соответствует значение $\tau = 2/3$.

В ходе программного мониторинга фронта вытеснения задача Маскета решалась с помощью системы (3.3): при этом $\Phi(z,\bar{z}) = \dfrac{1}{z+1} - \dfrac{1}{z-1}$, ввиду отсутствия двоякой периодичности в схеме расстановки скважин. Для оценки времени начала обводнения также было выбрано кратчайшее направление, соответствующее $y = 0$ на рисунке 19. При этом значения входных параметров ($P_{accuracy}$, $N_{tracers}$, $\Delta\tau$) были установлены в соответствии с конфигурацией (3.7). В результате подсчитанное время прорыва составило 0.6666. Ниже, на рисунке 20, приведены данные качественного анализа точного и приближенного решений задачи Маскета. Слева представлена картина заводненной области, построенная с помощью программного комплекса на основе данных о мониторинге фронта вытеснения. Черные кривые соответствуют траекториям трассеров к моменту начала обводнения добывающей скважины. Картина справа была представлена в работе М.Маскета [84]: здесь изображены положения фронта вытеснения для различных моментов времени, в том числе и для $t > t_{waterbreak}$.

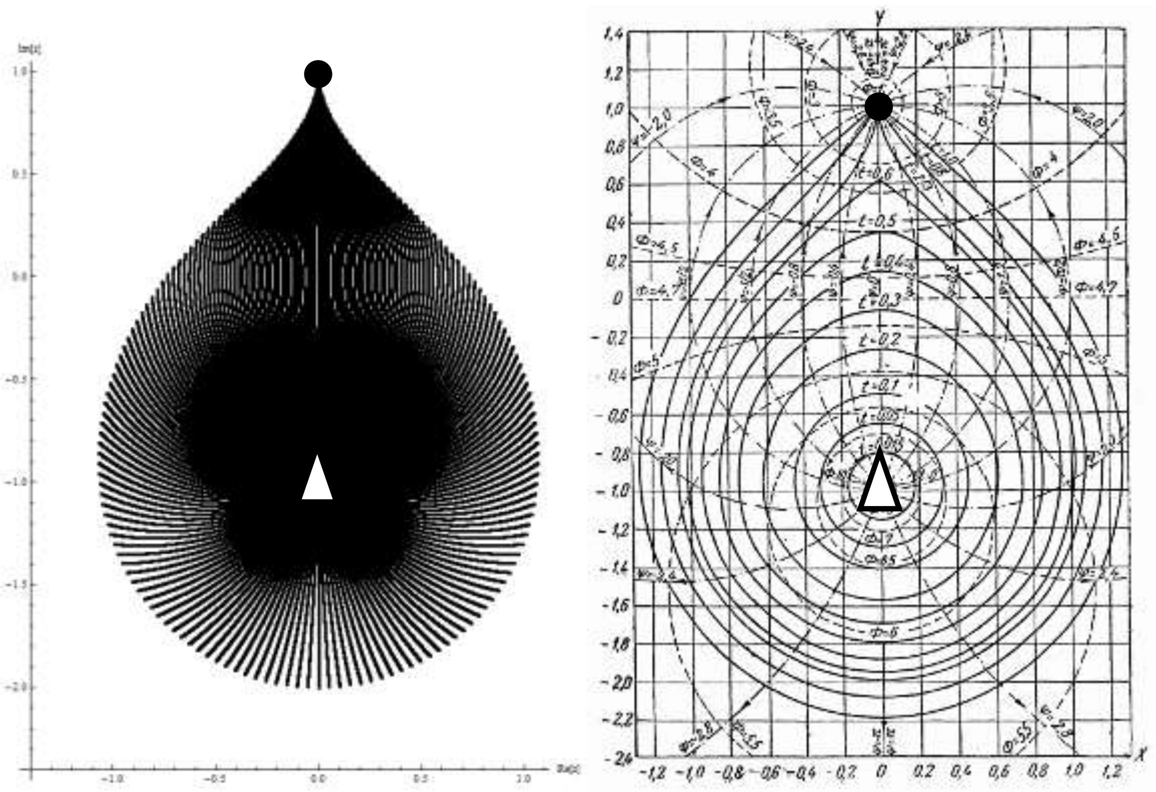


Рисунок 20. Качественная оценка результатов расчетов, проведенных в настоящем исследовании для задачи М.Маскета. Слева представлена картина заводненной области, составленная из 180 траекторий трассеров, продвигавшихся от нагнетательной (белый треугольник) к добывающей (черный круг) скважине. Справа изображена эволюция фронта вытеснения, приведенная в работе М.Маскета.

Несмотря на некоторое различие в форме представления данных, картины слева и справа могут использоваться для демонстрации заводненной области к моменту прорыва воды в добывающие скважины.

Сравнительный анализ демонстрирует удовлетворительное качественное сходство результатов, полученных в настоящем исследовании и представленных в работе М.Маскета. Заметим, что в связи с бесконечностью нефтеносного пласта и единственностью нагнетательной скважины ее область действия, или контур нагнетания (КН) также является бесконечным. Таким образом, подсчет коэффициента $K_{охв}$ охвата по площади в рамках постановки Маскета нецелесообразен.

Вторым этапом при проверке достоверности стал анализ значений $K_{охв}$, получаемых при различных способах расстановки скважин. Для этих целей был выполнен программный мониторинг фронта вытеснения вплоть до момента $t = t_{waterbreak}$, после чего полученные данные использовались для подсчета коэффициента охвата по площади и далее – сопоставления с материалами сторонних авторов. Значения $K_{охв}$, найденные с помощью программного комплекса, сравнивались с аналитическими решениями из работ Х.Морэя-Сьютокса [164] [165] и материалами физических экспериментов, представленными в монографии Ф.Крэйга [75]. Отметим, что во всех случаях процесс заводнения рассматривался при единичном коэффициенте подвижности *M*, что соответствует условиям «разноцветных жидкостей». Результаты сравнительного анализа приведены в Таблице 6. Поскольку столбец, соответствующий монографии Ф.Крэйга, был составлен при визуальном анализе графиков из работы исследователя, значения $K_{охв}$ были округлены до целого.

Таблица 6. Сопоставление результатов подсчета $K_{охв}$ при M=1.

Схема заводнения	Результаты подсчетов $K_{охв}$ при M=1		
	Предлагаемый алгоритм	Ф.Крэйг	Х.Морэй-Сьютокс
Пятиточечная обращенная	72%	70%	72%
Семиточечная обращенная	75%	73%	74%
Девятиточечная обращенная	53%	55%	
Лобовая рядная	57%	58%	58%
Шахматная	77%	76%	76%

Как можно видеть из анализа вышеприведенной таблицы, значения $K_{охв}$, полученные с помощью программного комплекса, достаточно близки к результатам Ф.Крэйга и Х.Морэя-Сьютокса.

Рассмотренное решение задачи Маскета и материалы подсчета коэффициента $K_{охв}$ позволяют эффективно оценить достоверность результатов, получаемых с помощью системы (3.3) в условиях «разноцветных жидкостей». С другой стороны, принятие коэффициента подвижности M равным единице затрудняет анализ алгоритмов, построенных для «поршневой» модели: тем не менее, работа последних (алгоритмов) может быть проверена и в случае равенства вязкостей нефти и воды. Таким образом, оценка достоверности была также проведена и для программно реализованного решения, соответствующего «поршневому вытеснению». При этом постановка задачи Маскета, а также схемы заводнения, при которых оценивался коэффициент $K_{охв}$, не претерпели изменений по сравнению с рассмотренным выше случаем. Отметим также, что для задания входных параметров ($P_{accuracy}$, $N_{tracers}$, $\Delta\tau$) вновь использовалась испытываемая конфигурация (3.7). Анализ, проведенный для программно реализованного решения СИДУ (3.2), показал удовлетворительное соответствие результатам сторонних авторов в случае равенства вязкостей нефти и воды. Выходные данные программы также сравнивались и с материалами, полученными при «разноцветных жидкостях». Сравнительный анализ обоих решений приведен ниже.

Таблица 7 содержит данные о времени прорыва воды в добывающую скважину при постановке Маскета: содержательная строка таблицы включает в себя как результаты численных расчетов, так и аналитическое решение.

В таблице 8 приведены данные $K_{охв}$, полученные в рамках решений для «разноцветных жидкостей» и «поршневого вытеснения»: при этом значения коэффициента нормированы по единице и представлены с точностью до пятого знака после запятой. Последний столбец таблицы содержит оценку абсолютной погрешности для результатов, полученных с помощью сравниваемых решений.

На основе содержимого таблиц 7 и 8 можно сделать вывод о высоком уровне согласованности результатов, полученных при использовании обоих решений для идентичного набора исходных данных. Напоследок отметим, что сравнительный анализ показал почти идентичный вид картин заводненной области для задачи Маскета, построенных в процессе трассировки при «разноцветных жидкостях» и «поршневом вытеснении».

Таблица 7. Оценка времени начала обводнения для задачи Маскета

Источник данных	Аналитическое решение	Предлагаемый алгоритм	
		Разноцветные жидкости	Поршневое вытеснение
Значение $t_{waterbreak}$	2/3	0.6666	0.6667

Таблица 8. Сопоставление значений $K_{охв}$ при M=1, подсчитанных в рамках решений для «разноцветных жидкостей» и «поршневого вытеснения».

Схемы заводнения	Разноцветные жидкости	Поршневое вытеснение	$\Delta_{abs} = \lvert Val_1 - Val_2 \rvert 100\%$
Пятиточечная обращенная	0.72479	0.72485	0.006%
Семиточечная обращенная	0.75204	0.75178	0.026%
Девятиточечная обращенная	0.52547	0.52699	0.152%
Лобовая рядная	0.56966	0.57214	0.248%
Шахматная	0.77134	0.77007	0.127%

6. Задача об отслеживании фронта вытеснения при «разноцветных жидкостях»: влияние сжимаемости

Анализ, представленный на рисунках 8-13 для пятиточечной обращенной схемы (см. третий параграф настоящей главы), был проведен при равных суммарных мощностях добычи и закачки. Подобные условия соответствуют случаю несжимаемых жидкостей. В то же время одной из основных особенностей предлагаемого решения является учет сжимаемости фильтрующихся фаз: таким образом, при проведении сравнительного анализа возможно несоблюдение равенства $\sum Q^{inject} = -\sum Q^{product}$. Для оценки влияния, оказываемого разницей мощностей добычи и закачки на показатели заводнения, был проведен численный эксперимент. При этом геометрия расположения скважин по-прежнему оставалась одним из основных варьируемых параметров: в рамках указанного эксперимента были задействованы пятиточечная обращенная, семиточечная обращенная, девятиточечная обращенная, лобовая рядная и шахматная схемы. Настоящий параграф демонстрирует результаты, полученные при исследовании пятиточечной обращенной схемы заводнения: для остальных способов расстановки скважин характер изменений характеристик ($t_{waterbreak}$, $K_{охв}$) аналогичен представленному ниже. Отметим также, что расчеты выполнялись при значениях параметров ($P_{accuracy}$, $N_{tracers}$, $\Delta\tau$), установленных в соответствии с (3.7). При этом дебиты добывающих и нагнетательных скважин задавались исходя из следующих условий:

$$Q_i^{product} = Q_j^{product}, \forall i, j \,; \;\; Q_i^{inject} = Q_j^{inject}, \forall i, j \,; \; \sum Q^{inject} = -\chi \sum Q^{product}.$$

Здесь χ представляет собой отношение суммарных дебитов скважин с различным режимом работы (добывающие/нагнетательные): безразмерная величина χ стала основным варьируемым параметром при проведении эксперимента (в условиях заданной геометрии расположения скважин). В процессе исследования каждой из рассмотренных схем внутриконтурного заводнения использовались следующие значения χ: χ=1 (случай несжимаемой жидкости); χ=2 (суммарная закачка жидкости превосходит добычу вдвое); χ=5 и χ=10. Результаты эксперимента оформлены в виде графиков и диаграмм, подробно рассмотренных в предыдущем параграфе: соответственно, все использованные ниже обозначения описаны в пятом пункте.

Ниже, на рисунке 21, представлены картины линий тока, полученные для пятиточечной обращенной схемы заводнения при различном отношении χ.

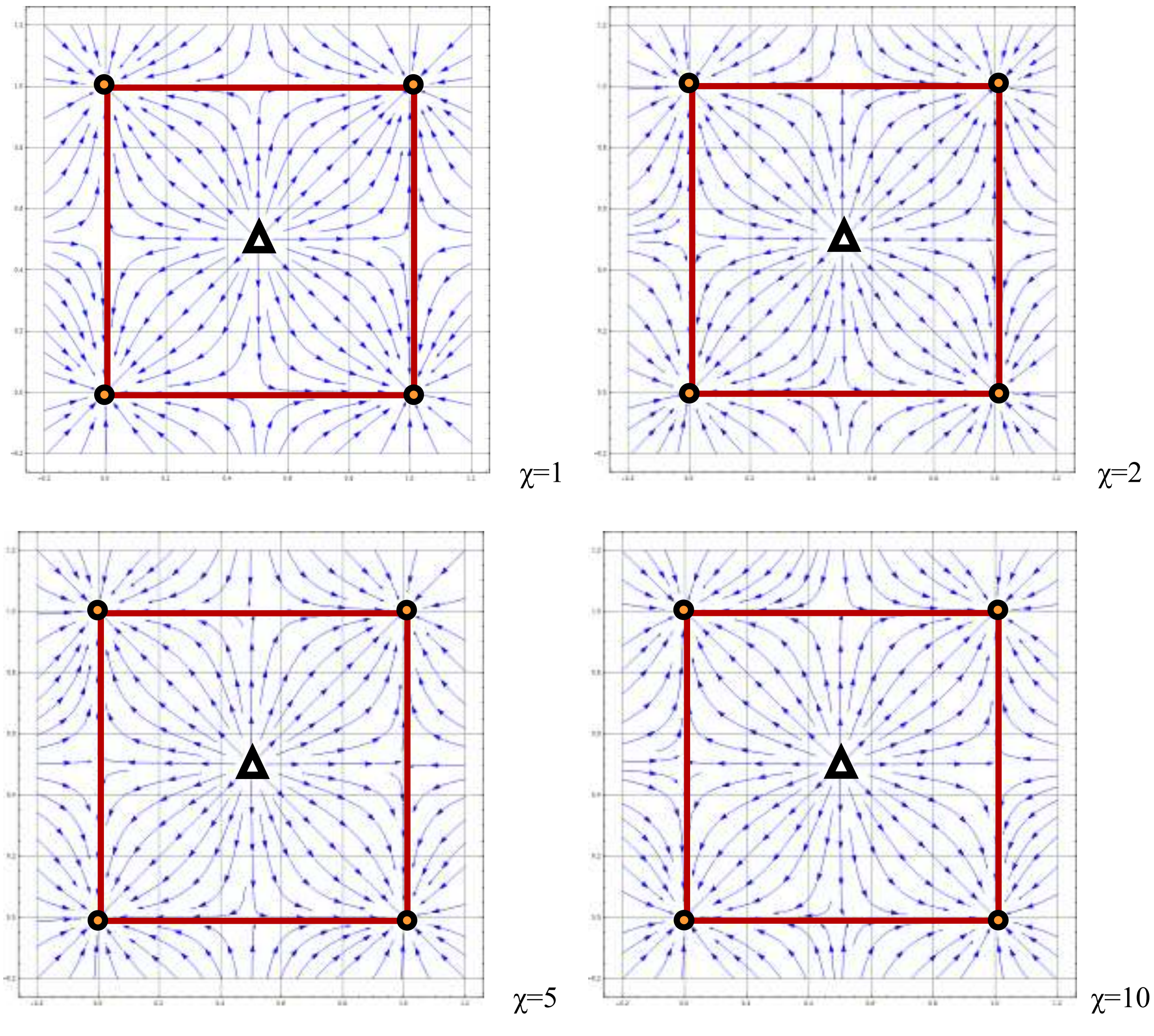


Рисунок 21. Картины линий тока для пятиточечной обращенной схемы заводнения при различном отношении мощностей добычи и закачки жидкости. Использованные обозначения аналогичны таковым на рисунке 9. Как можно видеть из представленных изображений, геометрия и размеры контура нагнетания не зависят от отношения суммарных дебитов добывающих и нагнетательных скважин.

Как можно видеть из анализа изображений, картины линий остались неизменными при всех рассмотренных значениях параметра χ: таким образом, геометрия контура нагнетания не зависит от суммарных дебитов добывающих и нагнетательных скважин, включенных в ячейку двоякопериодической решетки.

Ниже, на рисунке 22, изображены картины заводненной области в различные моменты времени (см. подробнее таблицу 1) при различном отношении мощностей добычи и закачки.

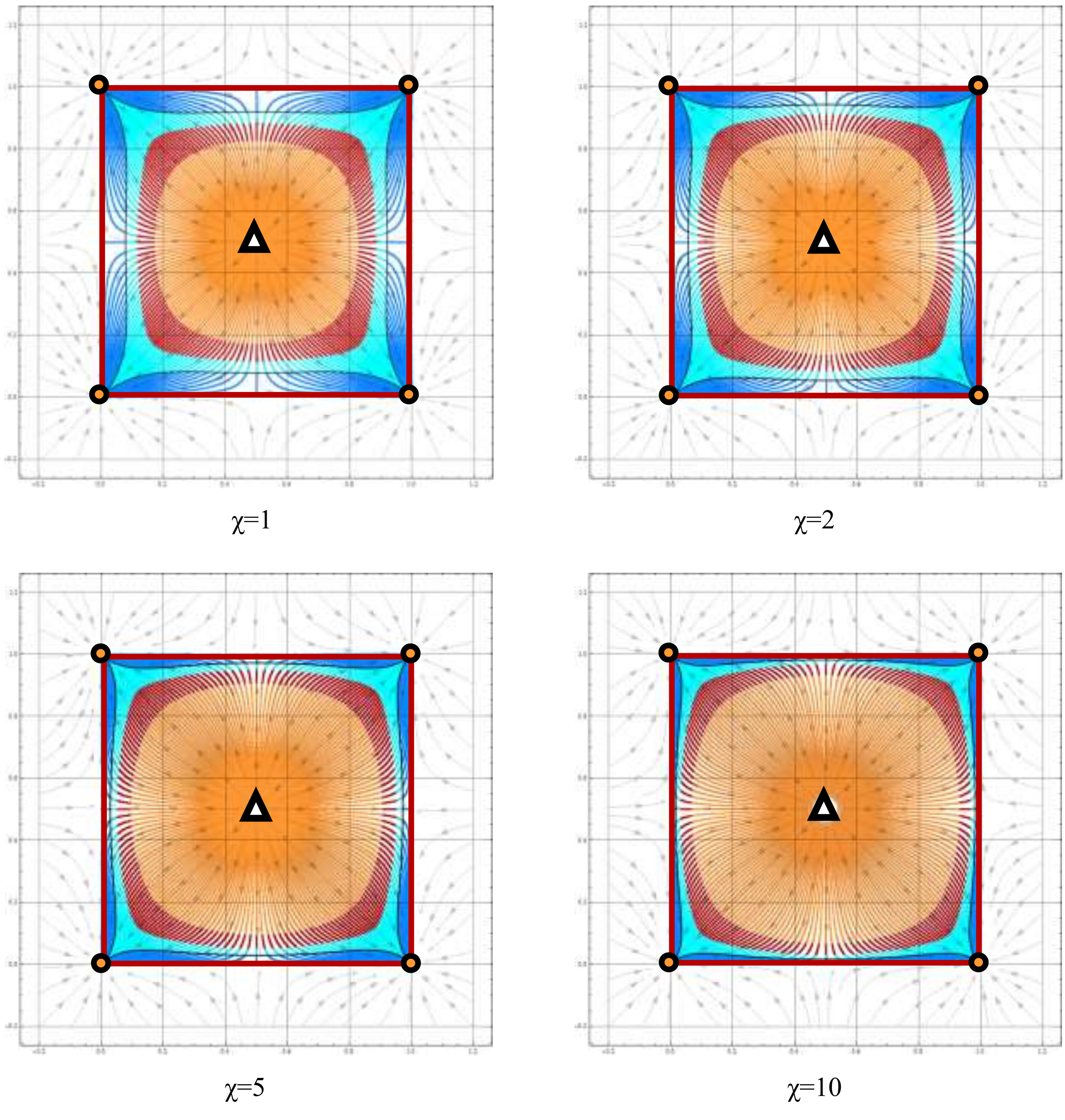


Рисунок 22. Картины заводненной области для пятиточечной обращенной схемы заводнения: обозначения контура нагнетания и групп добывающих скважин аналогичны рисунку 10. Цветовая легенда представлена в таблице 1. Представленные изображения наглядно демонстрируют зависимость площади, охваченной заводнением, от интенсивности закачки воды.

Представленная группа изображений наглядно демонстрирует изменения, вносимые увеличением объемов нагнетаемой воды при неизменном уровне добычи жидкости: с увеличением параметра χ наблюдается расширение области, охватываемой заводнением к моменту времени $t_{waterbreak}$, что положительно сказывается на показателе коэффициента охвата по площади.

Рисунок 23 демонстрирует сравнительный анализ графиков зависимости коэффициента $K_{охв}$ от времени при различном соотношении мощностей добычи и закачки.

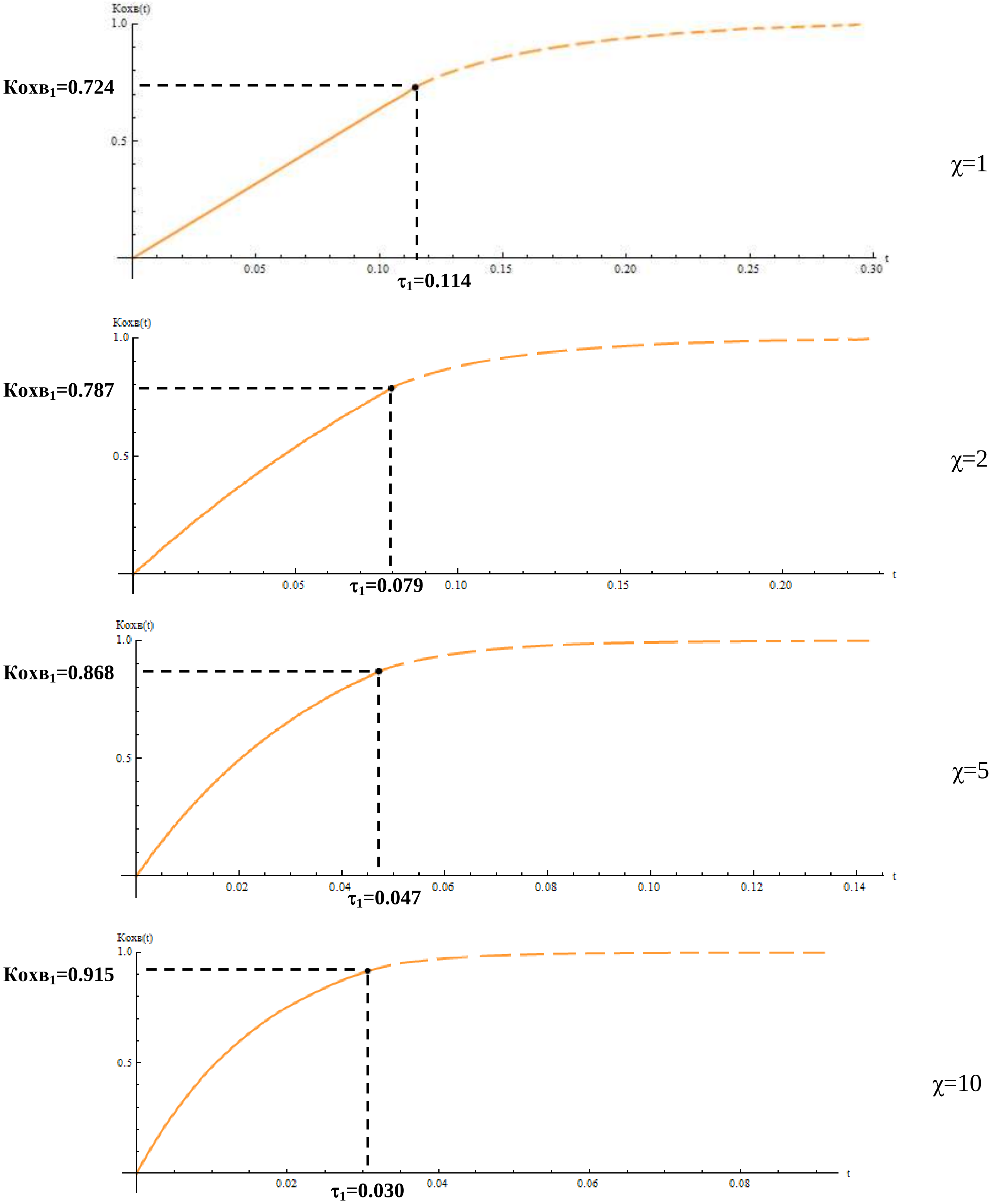
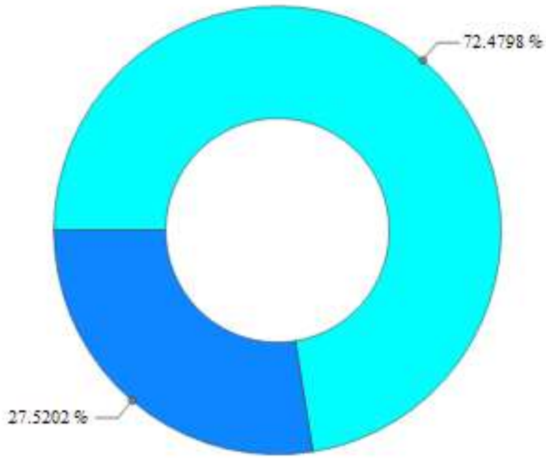
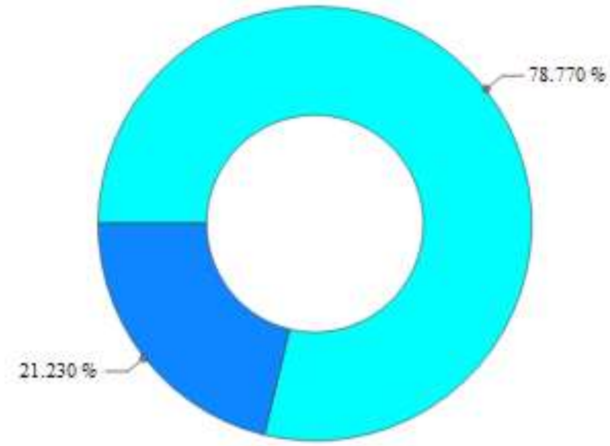


Рисунок 23. Графики зависимости $K_{охв}$(t), построенные для пятиточечной обращенной схемы заводнения при различных соотношениях мощностей добычи и закачки.

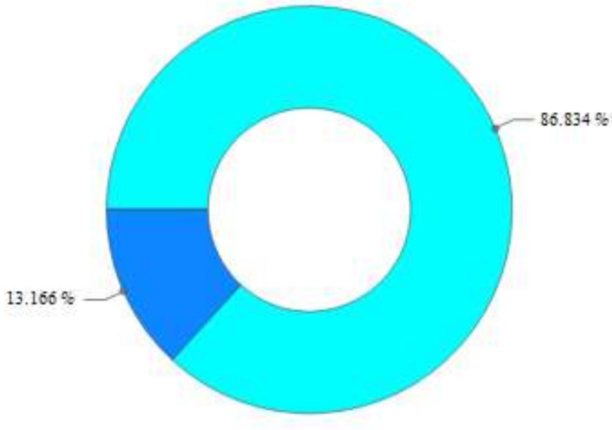
Следующая группа изображений также наглядно представляет разницу в оцениваемых показателях заводнения, возникающую при увеличении объемов закачки при неизменном уровне добычи. На Рисунке 24 изображены круговые диаграммы, отражающие доли площадей, охватываемых заводнением к различным моментам времени, от первичного прорыва и до полного обводнения территории контура нагнетания. Из анализа представленных изображений видна тенденция к уменьшению доли нефти, извлекаемой после первичного прорыва воды в добывающие скважины.



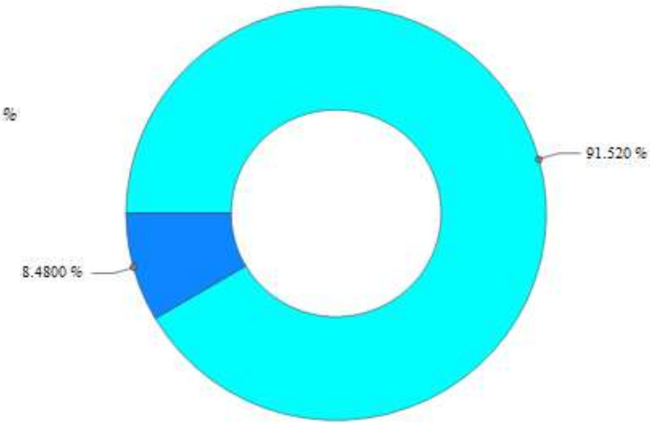
χ=1; $t_{waterbreak}$ = 0.114



χ=2; $t_{waterbreak}$ = 0.079



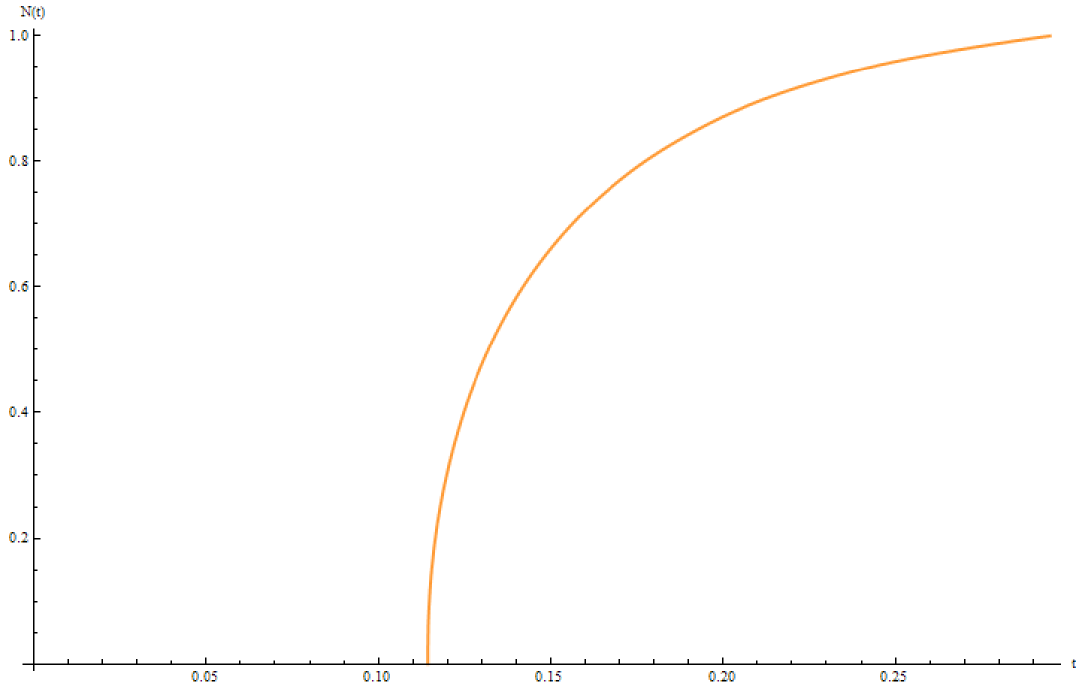
χ=5; $t_{waterbreak}$ = 0.047



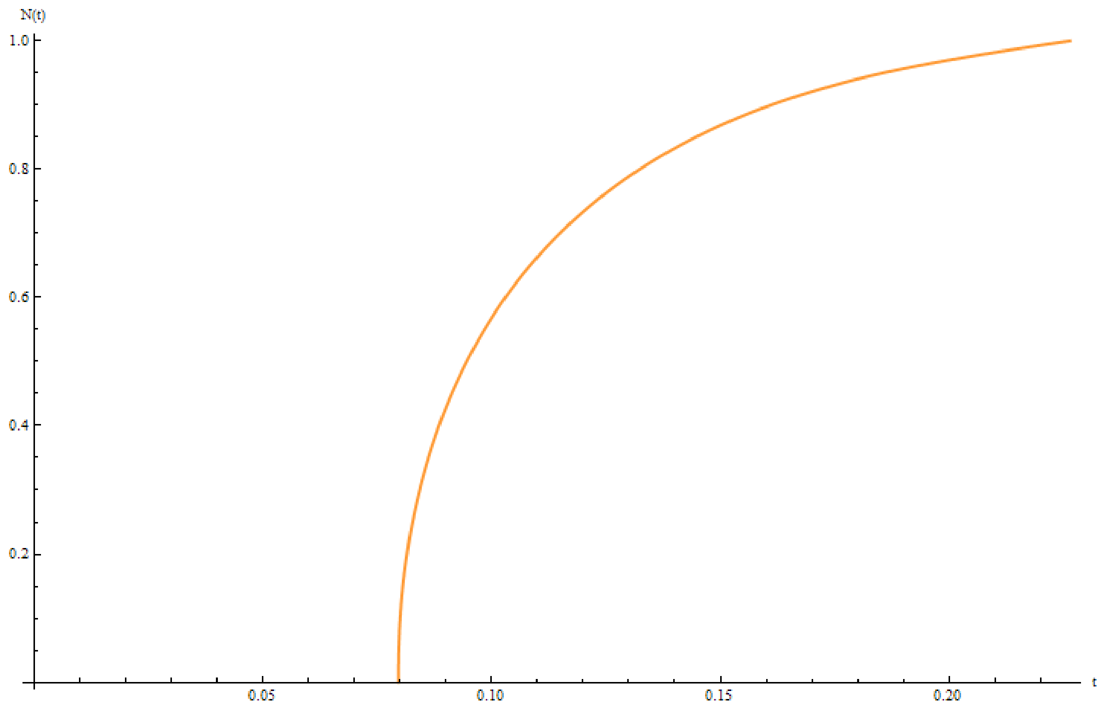
χ=10; $t_{waterbreak}$ = 0.030

Рисунок 24. Диаграммы распределения площади заводненной области (в долях от площади контура нагнетания) во времени для пятиточечной обращенной схемы при различных значениях параметра χ. Цветовые обозначения аналогичны таблице 1. Данные, представленные на диаграммах, подтверждают выводы, сделанные выше для графиков $K_{охв}$(t).

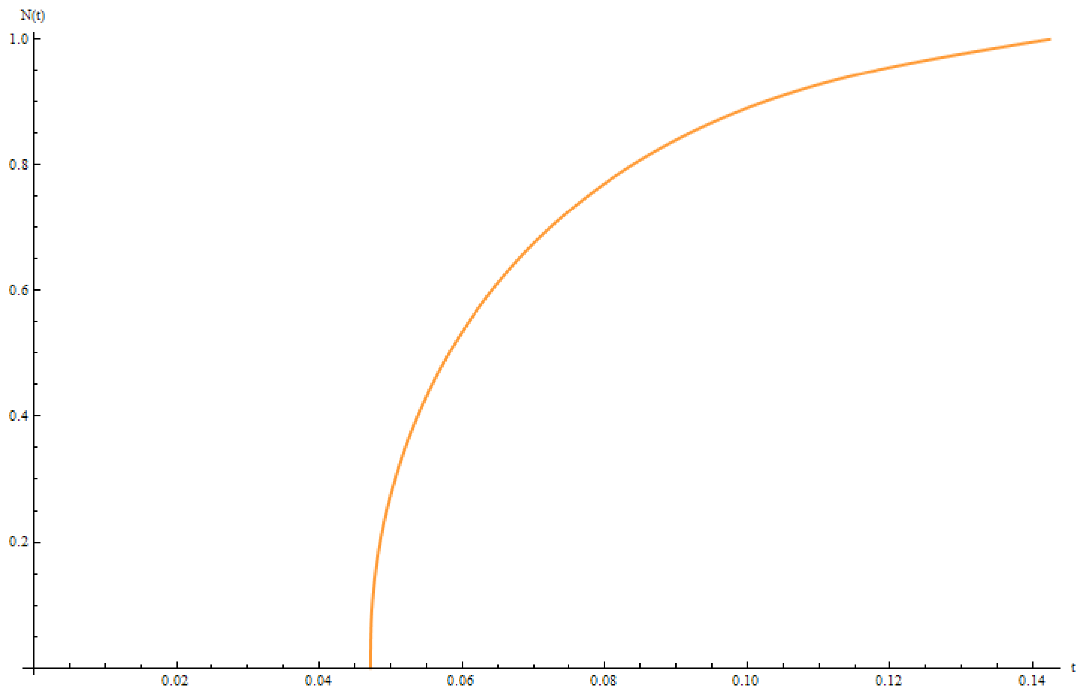
Последней составляющей проводимого сравнения является динамика прорыва отслеживаемых частиц (трассеров) в добывающие скважины при различном отношении добычи и закачки жидкости. Соответствующие графики приведены ниже, на рисунке 25. Из анализа изображений можно сделать вывод о слабом влиянии параметра χ на характер прорыва частиц нагнетаемой воды в добывающие скважины. Несмотря на изменения показателей абсцисс на представленных графиках, кривые *N(t)* остались практически неизменными, поскольку порядок прорыва трассеров определяется расположением линий тока, вид которых, как было отмечено ранее, остался неизменным в процессе увеличения параметра χ.



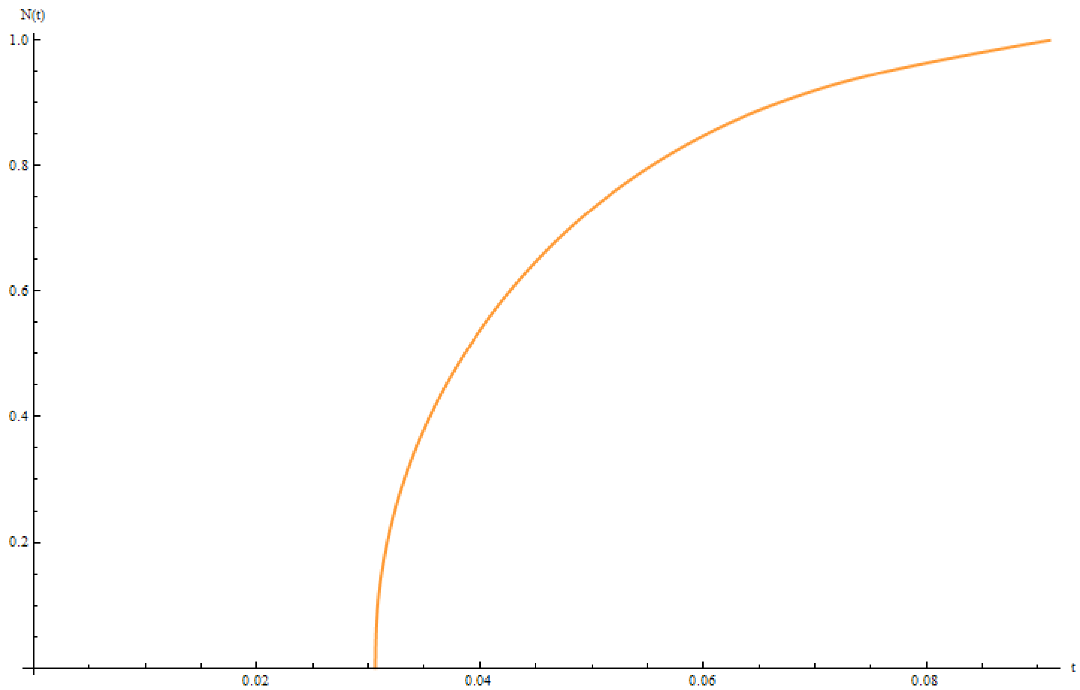
χ=1



χ=2



$\chi=5$



$\chi=10$

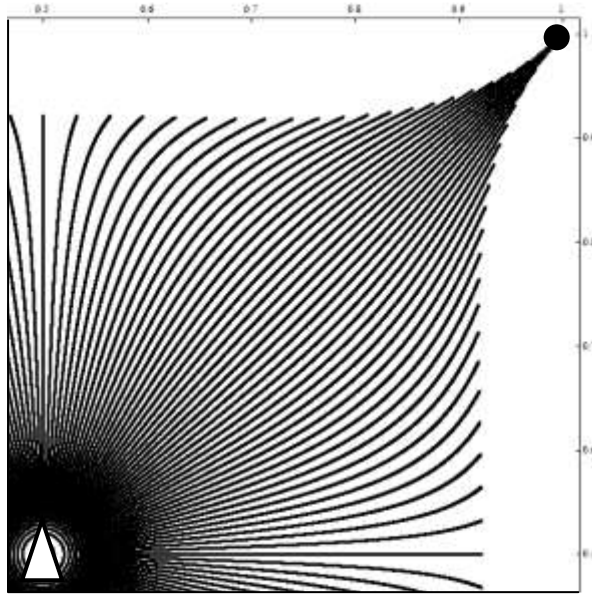
Рисунок 25. Кривые, отражающие динамику прорыва трассеров в добывающие скважины пятиточечной обращенной схемы при различных значениях параметра χ.

7. Задача об отслеживании фронта вытеснения при «поршневой» модели: влияние вязкости

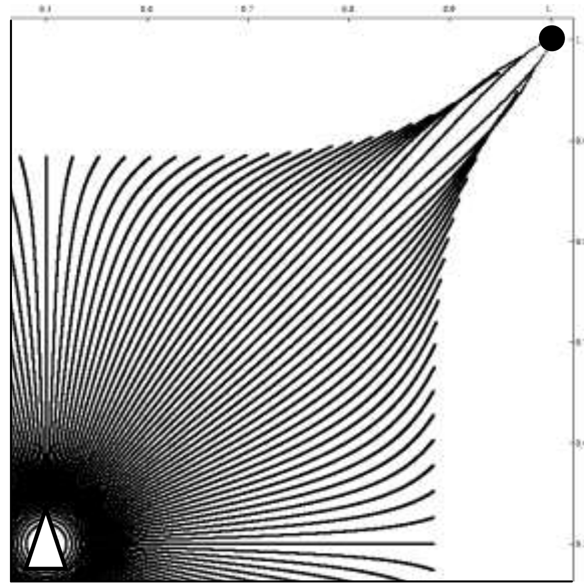
Ранее, в предыдущих двух параграфах, были продемонстрированы возможности решения, построенного в рамках модели «разноцветных жидкостей»: результаты расчетов, оформленные в виде графиков и диаграмм, удобно использовать при проведении сравнительного анализа различных схем расстановки скважин с тем, чтобы оценить их потенциал. В свою очередь, введение физически различных фаз позволяет представить совместную фильтрацию более реалистичным образом. Так, с применением «поршневой» модели появляется возможность оценить влияние физических свойств жидкостей на эффективность процесса заводнения. Напомним, что в настоящей работе учет физических различий между водой и нефтью осуществлялся через их вязкости и далее – с помощью параметра $\kappa = \dfrac{\mu_{water}}{\mu_{oil}}$. Решение СИДУ (3.2) использовалось в рамках разработанного программного комплекса для проведения вычислительного эксперимента с целью оценить влияние κ на эффективность заводнения. При этом в качестве критериев сравнения использовались время $t_{waterbreak}$ начала обводнения добывающих скважин, а также – коэффициент $K_{охв}$ охвата по площади, подсчитанный к моменту $t_{waterbreak}$. Для исследования были пятиточечная, семиточечная и девятиточечная обращенные, а также – лобовая рядная и шахматная схемы заводнения. Учет геометрии расстановки скважин осуществлялся с помощью параметра ψ - аналогично решению для «разноцветных жидкостей». Мониторинг фронта вытеснения осуществлялся путем последовательного решения сингулярного интегрального и далее – дифференциального уравнения СИДУ (3.2) на каждом временном шаге. Результаты расчетов включали в себя картины заводненной области, построенные к моменту прорыва воды в добывающие скважины, а также – показания $t_{waterbreak}$ и $K_{охв}$. Основным варьируемым параметром при проведении эксперимента стало отношение вязкостей κ. Для задания значений ($P_{accuracy}$, $N_{tracers}$, $\Delta\tau$) использовалась ранее протестированная конфигурация (3.7). Наконец, дебиты однотипных скважин полагались равными между собой, как и суммарная мощность добычи и закачки: $\sum_w Q_w^{inject} = \sum_u Q_u^{product}$.

Итоговые графические данные, сгруппированные по способам расстановки скважин, приведены в Приложениях: в настоящем параграфе рассматриваются картины заводненной области, построенные для пятиточечной обращенной схемы заводнения. В свою очередь, численные результаты эксперимента представлены в данном пункте в полном объеме.

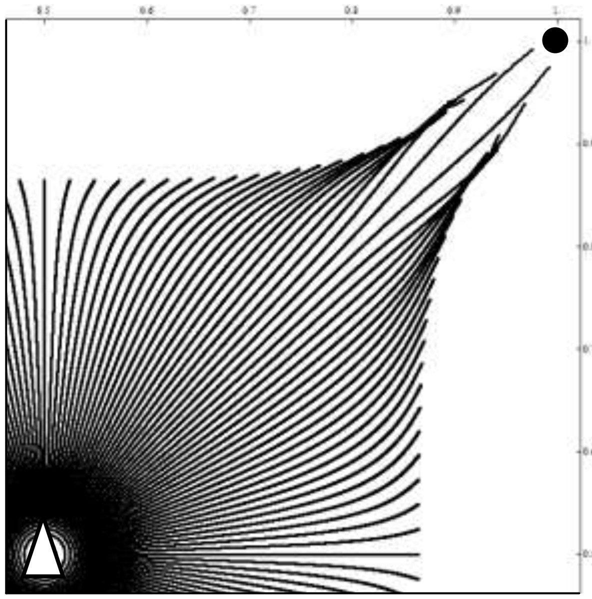
Как известно [45][70], ненулевая разница в вязкостях оказывает негативное влияние на эффективность процесса заводнения, что и было подтверждено при проведении эксперимента. Ниже, на рисунке 26, представлена серия картин заводненной области, построенных для различных значений κ: отметим, что на изображениях показаны четвертинки повторяющегося элемента, соответствующего рассматриваемой схеме.



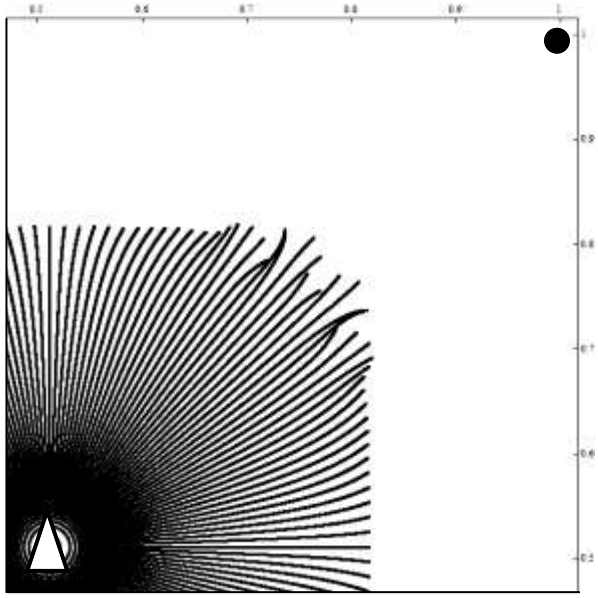
$\kappa = 1$; $t_{waterbreak} = 0.115$



$\kappa = 1/2$; $t_{waterbreak} = 0.101$



$\kappa = 1/3$; $t_{waterbreak} = 0.096$



$\kappa = 1/4$; $t_{waterbreak} = 0.006$

Рисунок 26. Картины заводненной области для пятиточечной обращенной схемы заводнения при различных значениях параметра *κ*. Траектории движения трассеров выделены черным, нагнетательная скважина обозначена белым треугольником, добывающая – черным кругом. Момент прорыва $t_{waterbreak}$ представлен в единицах безразмерного времени *τ*.

Каждое изображение подписано как значением параметра κ, так и величиной времени $t_{waterbreak}$ начала обводнения добывающих скважин. Черным обозначены траектории движения трассеров, попавшие в область наблюдения.

Из визуального анализа заметны изменения «водного мыса», направленного от нагнетательной скважины (белый треугольник) в сторону добывающей (черный круг). Первоначально «сжатый с боков» при нулевой разницы в вязкостях, поток воды, направленный в сторону добывающей скважины, заметно расширяется при увеличении вязкости нефти: при этом соседние области, занятые водой, также уменьшаются с уменьшением параметра κ.

Наконец, при определенном значении отношения вязкостей проявляется эффект, подробно рассмотренный в третьем параграфе первой главы. С увеличением разницы в вязкостях фильтрующихся фаз фронт вытеснения теряет устойчивость: в результате вода «пронзает» область, занятую нефтью, острыми мысами (пальцами), прорываясь к добывающей скважине по кратчайшему пути. Таким образом, появление «пальцев» приводит к нестабильности процесса заводнения, и далее – к сокращению безводного периода добычи нефти и образованию областей с неосвоенными нефтяными запасами - позади фронта вытеснения. Данный эффект, названный «вязким пальцеобразованием», был также обнаружен и в рамках проведенного численного эксперимента.

Ниже, на рисунке 27, представлены примеры образования «вязких пальцев» для пятиточечной обращенной схемы заводнения: левый столбец соответствует картинам заводненной области, полученным в предлагаемой работе в рамках описываемого численного эксперимента, при отношении вязкостей $\kappa = 1/2$ (сверху) и $\kappa = 1/5$ (снизу). В столбце справа приведены изображения «вязких пальцев» из работы [144]: картина сверху соответствует *Figure 4.a* в цитируемой работе, снизу - *Figure 6.a*. Как можно видеть, демонстрация неустойчивости подвижного фронта при качественном сравнении весьма схожа.

В действительности, проявление эффекта «вязкого пальцеобразования» в рамках описываемого эксперимента весьма ожидаемо и закономерно. Ранее в работе [82] была показана абсолютная неустойчивость фронта вытеснения в рамках «поршневой» модели: фактически, появление «вязких пальцев» возможно при любом отношении вязкостей, не равным единице. Иная особенность, связанная с нестабильностью подвижного фронта, была продемонстрирована в работе [27]: занимаясь исследованием радиальных течений, автор указала на существование некоего критического радиуса, с достижением которого и происходит потеря устойчивости. Отметим, что в своих работах исследователи рассматривали течение жидкости в ячейке Хеле-Шоу: тем не менее, несмотря на разницу в геометрии исследуемой области, эффекты, отмеченные в [27][82], были зафиксированы в рамках проведенного численного эксперимента. В то же время необходимо заметить, что проблема «вязкого пальцеобразования» не является предметом настоящего исследования: вопрос о неустойчивости фронта вытеснения при «поршневой» модели требует большего внимания и может быть рассмотрена в будущем.

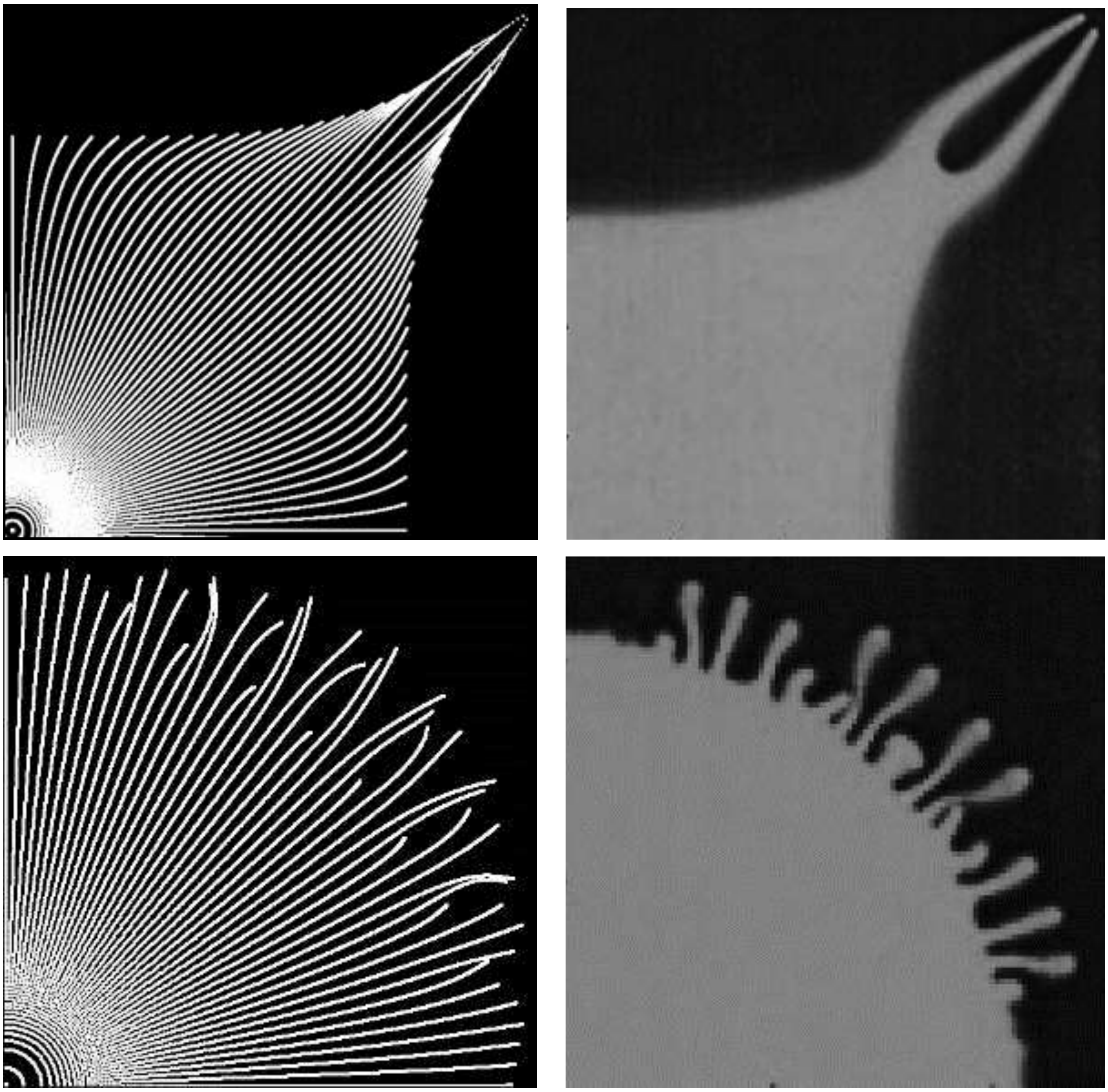


Рисунок 27. Нарушение устойчивости фронта заводнения для пятиточечной обращенной схемы расстановки скважин. Траектории движения трассеров (столбец слева) и область, занятая водой (столбец справа), обозначены белым и светло-серым соответственно.

В довершение рассмотрим результаты численных расчетов, проведенных в рамках описываемого эксперимента. Как можно заметить из анализа значений $t_{waterbreak}$, приведенных на рисунке 26, с увеличением вязкости нефти наблюдается также сокращение периода ее безводной добычи. Подобный эффект был также обнаружен и для остальных четырех исследованных схем заводнения – равно как и визуальные изменения в поведении подвижного фронта, описанные выше. Данные о времени $t_{waterbreak}$, подсчитанном в рамках проведенного численного эксперимента, приведены в таблице 9: здесь представлены значения $t_{waterbreak}$ для пяти исследуемых схем заводнения при различном отношении вязкостей – от единицы до ¼. Далее следует обратить внимание на ячейки, помеченные аббревиатурой **VF:** соответствующие случаи отмечены появлением «вязких пальцев» по всему фронту вытеснения – как показано на рисунке 27, внизу слева, в связи с чем подсчет времени прорыва воды в добывающие скважины оказался невозможен.

Аналогичным образом построена Таблица 10: здесь представлены результаты подсчета коэффициента $K_{охв}$ при различных отношениях вязкостей. Заметим, что значения параметра к аналогичны таковым из таблицы 9. Для большей наглядности результаты проведенного эксперимента дополнены данными из монографии Ф.Крэйга для случая $\kappa = 1$.

Таблица 9. Изменения времени начала обводнения с увеличением разницы в вязкостях

Схема заводнения	Значения $t_{waterbreak}$ при различном отношении вязкостей κ			
	$\kappa=1$	$\kappa=1/2$	$\kappa=1/3$	$\kappa=1/4$
Пятиточечная обращенная	0.1152	0.1017	0.0960	**VF**
Семиточечная обращенная	0.0516	0.0472	0.0452	0.0439
Девятиточечная обращенная	0.0277	0.0252	0.0240	0.0232
Лобовая рядная	0.1820	0.1500	**VF**	**VF**
Шахматная	0.2124	0.1858	**VF**	**VF**

Таблица 10. Изменения коэффициента $K_{охв}$ с увеличением разницы в вязкостях

Схема заводнения	Значения $K_{охв}$ при различном отношении вязкостей κ				
	$\boldsymbol{\kappa}$=1(Ф.Крэйг)	$\boldsymbol{\kappa}$=1	$\boldsymbol{\kappa}$=1/2	$\boldsymbol{\kappa}$=1/3	$\boldsymbol{\kappa}$=1/4
Пятиточечная обращенная	70%	72,5%	63,5%	60%	**VF**
Семиточечная обращенная	73%	75,2%	68,5%	65,3%	63,3%
Девятиточечная обращенная	55%	52,7%	48%	45,5%	44%
Лобовая рядная	58%	57,2%	47%	**VF**	**VF**
Шахматная	76%	77%	67%	**VF**	**VF**

Результаты проведенного эксперимента подтверждают выводы, сделанные ранее другими авторами, об отрицательном влиянии высокой разницы в вязкостях воды и нефти на эффективность процесса заводнения: с уменьшением параметра κ наблюдается сокращение «безводного» периода добычи, а также уменьшение площади, охватываемой заводнением, что негативно сказывается на величине $K_{охв}$ и, следовательно, на объеме извлекаемых запасов нефти.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработан метод построения общего решения для задач с подвижной границей в плоской квазистационарной постановке. В его основе лежит представление для производной искомой функции, применимое во всей исследуемой области, включая подвижную границу.

2. Поставлена и решена задача заводнения в условиях слабосжимаемой жидкости в двоякопериодической области. Поиск решения осуществлялся посредством разработанного в диссертации метода, в рамках моделей однофазной фильтрации и при квазистационарном режиме работы скважин.

3. Сформулирована в общем виде система сингулярных интегральных и дифференциальных уравнений (СИДУ) для отслеживания перемещений подвижной границы методом трассировки. Представлен алгоритм численного решения СИДУ, а также – ее конечный вид для задачи заводнения в условиях двух моделей однофазной фильтрации – «разноцветных жидкостей» и «поршневого вытеснения».

4. Разработан способ подсчета числовых характеристик заводнения – времени $t_{waterbreak}$ прорыва воды в добывающие скважины и коэффициента $K_{охв}$ охвата по площади. В основе предлагаемого метода лежит предварительное решение СИДУ и использование результатов трассировки фронта вытеснения. Достоверность результатов оценена путем сравнения с известными аналитическими решениями и данными физических экспериментов, представленными в работах сторонних авторов.

5. Создан программный комплекс, обеспечивающий качественный и количественный анализ процесса заводнения при различных способах расстановки добывающих и нагнетательных скважин. В основе работы программы лежит мониторинг фронта вытеснения, данные которого используются при оценке показателей ($t_{waterbreak}$, $K_{охв}$), а также – при построении картин заводненной области. Результаты расчетов оформлены в виде графиков и диаграмм. Программный комплекс прошел регистрацию в Федеральной службе по интеллектуальной собственности, с выдачей свидетельства о регистрации программы для ЭВМ №2015610136 (заявлено: 23.09.14; опубликовано: 12.01.15). В настоящий момент программа внедрена в рабочий процесс ООО «Нефтестройпроект» и используется при проектировании систем разработки нефтяных месторождений.

6. Для равных вязкостей нефти и воды проведен качественный и количественный анализ порядка тридцати схем внутриконтурного заводнения. Результаты расчетов

представлены в виде атласа, который планируется использовать в качестве наглядного пособия в рамках учебного процесса на кафедре Разработки и Эксплуатации Нефтяных и Газовых Месторождений СамГТУ.

7. В условиях различных вязкостей нефти μ_{oil} и воды μ_{water} проведен вычислительный эксперимент с целью оценить влияние параметра $\kappa = \frac{\mu_{water}}{\mu_{oil}}$ на эффективность процесса заводнения. В качестве критериев сравнения использовались $t_{waterbreak}$ и $K_{охв}$. Было установлено, что высокая разница в вязкостях воды и нефти приводит к уменьшению площади, охватываемой воздействием заводнения, с уменьшением безводного периода нефтедобычи. Также при проведении расчетов был обнаружен эффект нарушения устойчивости фронта вытеснения с образованием «вязких пальцев» при определенном соотношении вязкостей фильтрующихся жидкостей. Сделанные выводы согласуются с заключениями сторонних авторов, рассматривавших проблему влияния разницы в вязкостях на эффективность процесса заводнения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аверкова, О.А., Закутский, А.Н., Зоря, В.Ю., Логачев, К.И., Михайлов, И.В., Михайлова, Л.А. Применение метода сингулярных интегральных уравнений к задачам аэродинамики вентиляции / О.А. Аверкова, А.Н. Закутский, В.Ю. Зоря, К.И. Логачев, И.В. Михайлов, Л.А. Михайлова // Научные ведомости БелГУ, 2008. - № 10(50). – С. 19 – 28.
2. Алвеш, Е.В. Теоретические основы физико-математической модели нестационарного процесса горения твердого ракетного топлива и разработка методов расчета нестационарной скорости горения: дисс. … канд. ф-м. наук: 05.13.18 / Алвеш Е.В. – Пермь, 2001. – 127 с.
3. Андронов, П.Р., Гувернюк, С.В., Дынникова, Г.Я. вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок / П.Р. Андронов, С.В. Гувернюк, Г.Я. Дынникова. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006. - 184 с.
4. Астафьев В.И., Ротерс П.В. Моделирование и оптимизация разработки месторождений многоскважинными двоякопериодическими кластерами / В.И, Астафьев, П.В. Ротерс // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия, 2013. – №9/2 (110). – С.170-183.
5. Астафьев В.И., Ротерс П.В. Моделирование двоякопериодических систем добывающих скважин/ В.И, Астафьев, П.В. Ротерс // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия, 2010. – №4 (78). – С.5-11.
6. Астафьев В.И., Ротерс П.В. Моделирование двоякопериодических систем добывающих скважин. 2. Коэффициент продуктивности / В.И, Астафьев, П.В. Ротерс // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия, 2011.– №8 (89) – С.118-127.
7. Астафьев, В.И., Ротерс, П.В. Эллиптические функции в задачах моделирования разработки нефтяных месторождений: монография / В.И. Астафьев, П.В. Ротерс. – Самара: изд-во «Самарский университет», 2014. – 162 с.
8. Астафьев, В.И., Касаткин, А.Е. Задача о продвижении водонефтяного контакта при поршневом вытеснении нефти водой в двоякопериодической области / В.И. Астафьев, А.Е. Касаткин // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия, 2014. – №10 (121). – С. 109 – 122.
9. Астафьев, В.И., Касаткин, А.Е. Моделирование взаимодействия добывающих и нагнетательных скважин в рамках теории нелинейных динамических систем / В.И. Астафьев, А.Е. Касаткин // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2011. - Т.18. - вып.6. - С. 408.
10. Астафьев, В.И., Касаткин, А.Е. Моделирование и численный расчет поршневого вытеснения нефти для двоякопериодических систем разработки месторождений / В.И.

Астафьев, А.Е. Касаткин // Вычислительная механика сплошных сред, 2015. – Т.8. - № 1. – С. 81-92. DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.1.7

11. Астафьев, В.И., Касаткин, А.Е. Моделирование и численный расчет поршневого вытеснения нефти для двоякопериодических систем разработки месторождений/ В.И. Астафьев, А.Е. Касаткин // Тезисы докладов на конференции «XIX Зимняя школа по механике сплошных сред», Пермь, 2015. – С. 28.
12. Астафьев, В.И., Касаткин, А.Е. Моделирование и численный расчет поршневого вытеснения нефти для двоякопериодических систем разработки месторождений/ В.И. Астафьев, А.Е. Касаткин // Сборник статей «XIX Зимняя школа по механике сплошных сред», Пермь, 2015. – С. 19-26.
13. Аубакиров, Т.О., Белоцекровский, С.М., Желанников, А.И., Ништ, М.И. Нелинейная теория крыла и ее приложения / Т.О.Аубакиров, С.М. Белоцекровский, А.И. Желанников, М.И.Ништ. – Алматы: Гылым, 1997. – 448 с.
14. Афанасьев, К.Е., Коротков, Г.Г., Долаев, Р.Р. Разработка пакета прикладных программ «AKORD» для решения задач со свободными границами / К.Е. Афанасьев, Г.Г. Коротков, Р.Р. Долаев // Вычислительные технологии, 2000. – Т. 5. - № 1. – С. 5- 18.
15. Афанасьев, К.Е., Стуколов, С.В. Численное моделирование взаимодействий уединенных волн с препятствиями / К.Е. Афанасьев, С.В. Стуколов // Вычислительные технологии, 1999. – Т. 4. - № 6. – С. 3 - 16.
16. Афанасьев, К.Е., Стуколов, С.В. Циркуляционное обтекание профилей стационарным плоскопараллельным потоком тяжелой жидкости конечной глубины со свободной поверхностью / К.Е. Афанасьев, С.В. Стуколов // Прикладная механика и техническая физика, 2000. – Т. 41. - № 3. – С. 101 – 110.
17. Ахиезер, Н.И. Элементы теории эллиптических функций / Н.И. Ахиезер. - 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1970. – 304 с.
18. Бабенко, К.И. Основы численного анализа / К.И. Бабенко. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 848 с.
19. Байков, В.А., Жданов, Р.М., Муллагалиев, Т.И., Усманов, Т.С. Выбор оптимальной системы разработки для месторождений с низкопроницаемыми коллекторами / В.А. Байков, Р.М. Жданов, Т.И. Муллагалиев, Т.С. Усманов // Нефтегазовое дело, 2011. - №1. – С. 84 – 98.
20. Балагуров, Б.Я., Кашин, В.А. О проводимости двумерной системы с двоякопериодическим расположением круговых включений / Б.Я. Балагуров, В.А. Кашин // Журнал технической физики, 2001. – Т.71. – Вып. 1. – С. 106–111.

21. Бардзокас, Д.И., Зобнин, А.И. Математическое моделирование физических процессов в композиционных материалах периодической структуры / Д.И. Бардзокас, А.И. Зобнин. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 376 с.
22. Басниев, К.С., Власов, А.М., Кочина, И.Н., Максимов, В.М. Подземная гидравлика: учебник для ВУЗов / К.С. Басниев, А.М. Власов, И.Н. Кочина, В.М. Максимов. – М.: Недра, 1986. – 303 с.
23. Басниев, К.С., Дмитриев, Н.М., Розенберг, Г.Д. Нефтегазовая гидромеханика: учебник для ВУЗов / К.С. Басниев, Н.М. Дмитриев, Г.Д. Розенберг. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 544 с.
24. Басниев, К.С., Кочина, И.Н., Максимов, В.М. Подземная гидромеханика: учебник для ВУЗов / К.С. Басниев, И.Н. Кочина, В.М. Максимов. – М.: Недра, 1993. – 416 с.
25. Бахвалов, Н. С., Жидков, Н. П., Кобельков, Г. М. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. — М.: Бином, 2001. — 632 с.
26. Бикчантаев, И.А. формулы обращения сингулярных интегралов на римановых поверхностях / И.А. Бикчантаев // Известия высших учебных заведений. Математика, 1992. - № 12 (367). – С. 3 - 10.
27. Бирзина, А.И. Морфологическая устойчивость фазовой границы при радиальном вытеснении жидкости в ячейке Хеле-Шоу: дис. ... канд. ф-м. наук: 01.02.05 / Бирзина А.И. - Пермь, 2009. - 118 с.
28. Бирзина, А.И. Морфологическая устойчивость фазовой границы при радиальном вытеснении жидкости в ячейке Хеле-Шоу: автореф. дисс. ... канд. ф-м. наук: 01.02.05 / Бирзина А.И. - Пермь, 2009. - 16 с.
29. Богатырёв, А.О., Красношлык, Н.А. Численное решение задач с подвижными межфазными границами / А.О. Богатырев, Н.А. Красношлык // Вестник Черкасского университета. Серия прикладная математика и информатика, 2011. – Выпуск 194. - С. 16 – 31.
30. Большая советская энциклопедия: в 30-ти томах. – М.: "Советская энциклопедия", 1969-1978.
31. Бреславский, П. В., Мажукин, В. И. Алгоритм численного решения гидродинамического варианта задачи Стефана при помощи динамически адаптирующихся сеток / П.В. Бреславский, В. И. Мажукин // Математическое моделирование. Вычислительные алгоритмы и методы, 19991. – Т. 3. - № 10. – С. 104 – 115.
32. Ванин, Г.А. Микромеханика композиционных материалов / Г.А. Ванин. – Киев: Наукова думка, 1985. – 302 с.

33. Васильевский, В.Н., Петров, А.И. Исследование нефтяных пластов и скважин / В.Н. Васильевский, А.И. Петров. – М.: Недра, 1973. – 344 с.
34. Гандель, Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов: учебное пособие / Ю.В. Гандель. – 2-е изд., испр. - Харьков: ХНУ, 2002. – 92 с.
35. Гандель, Ю.В. краевые задачи для уравнения гельмгольца и их дискретные математические модели / Ю.В. Гандель // Современная математика. Фундаментальные направления, 2010. - Т. 36. - С. 36–49.
36. Геологический словарь: в 2-х томах [под ред. К. Н. Паффенгольца]. – 2-е изд., испр. – М.: Недра, 1978.
37. Гетц, И. Г., Мейрманов, А. М. Обобщенное решение задачи Стефана с кинетическим переохлаждением / И.Г. Гетц, А.М. Мейрманов // Сибирский журнал индустриальной математики, 2000. – ТIII . - № 1(5). – С. 66 – 86.
38. Голубева, О.В. Курс механики сплошных сред: Учебное пособие для педвузов / О.В.Голубева. – М., Высшая школа, 1972. – 368 с.
39. Голубева, О.В., Пивень, В.Ф. О продвижении границы раздела жидкостей при нелинейной фильтрации/ О.В. Голубева, В.Ф. Пивень // ПММ, 1977. - Вып. 4. - С. 754-758.
40. Горбатиков, В.А., Костюченко, С.В., Пальянов, А.П. Технология дискретных закачек – основа для модернизации систем ППД и совершенствования методов заводнения нефтяных залежей / В.А. Горбатиков, С.В. Костюченко, А.П. Пальянов // Вестник инжинирингового центра ЮКОС. - 2001. - N 2. - С. 45-53.
41. Горелов, Д.Н., Редреев, Д. Г. Построение квадратурной формулы для сингулярного интеграла с ядром коши по контуру крылового профиля / Д.Н.Горелов, Д. Г. Редреев // Вычислительные технологии, 2006. - Т. 11. - № 4. – С. 29 – 36.
42. Горная энциклопедия: в 5-ти томах [под ред. Е. А. Козловского]. – М.: Советская энциклопедия, 1984-1991.
43. Григолюк, Э.И., Фильштинский, Л.А. Перфорированные пластины и оболочки / Э.И. Григолюк, Л.А. Фильштинский. – М.: Наука, 1970. – 556 с.
44. Гурвиц, А., Курант, Р. Теория функций / А. Гурвиц, Р.Курант; [пер. М.А.Евграфова]. – М.: Наука, 1968. – 648 с.
45. Данилов, В.Л. Вариационный принцип наименьшей скорости рассеяния энергии при фильтрации жидкостей в пористой среде и его приложения / В.Л. Данилов. – М.-И.: Институт компьютерных исследований, 2003. – 108 С.

46. Дегтяренко, Н.А. Двоякопериодический мероморфный аналог ядра Коши и некоторые его применения / Н.А. Дегтяренко // Известия высших учебных заведений. Математика, 1999. - № 8 (447). – С. 11 - 19.
47. Дейк, Л.П. Практический инжиниринг резервуаров / Л.П.Дейк; [пер. с англ. Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск]. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 668 с.
48. Демидович, Б. П., Марон, И. А., Шувалова, Э. З. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – 3-е изд. – М.: Наука, 1967 – 368 с.
49. Дынникова, Г. Я. Вихревые методы исследования нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости: автрореф. дисс. … д. ф-м. н.: 05.13.18 / Г. Я. Дынникова. – М., 2011. – 31 с.
50. Желтов, Ю.П. Разработка нефтяных месторождений: учебник для ВУЗов / Ю.П.Желтов. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ОАО «Издательство Недра», 1998. – 365 с.
51. Журавский, А.М. Справочник по эллиптическим функциям / А.М.Журавский. – М.-Л.: изд-во АН СССР, 1941. – 235 с.
52. Заславский, М.Ю., Пергамент, А.Х. Исследование неустойчивости типа «fingers» в фильтрационных течениях / М.Ю. Заславский, А.Х. Пергамент // М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, РАН, 2002. – 24 с.
53. Зверович, Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях / Э. И.Зверович // Успехи математических наук, 1971. – Т. 26. – Вып. 1 (157). – С. 113 – 179.
54. Ильина, В. А., Силаев, П. К. Численные методы для физиков-теоретиков. т. 1 / В.А. Ильина, П.К. Силаев. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 132 с.
55. Ильина, В. А., Силаев, П. К. Численные методы для физиков-теоретиков. т. 2 / В.А. Ильина, П.К. Силаев. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 118 с.
56. Исаев, А. Г. Двоякопериодическая система прямолинейных трещин со связями между берегами / А.Г. Исаев// Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Механика предельного состояния, 2008. - № 2. – С. 72 – 77.
57. Казарновская, Б.Э. Перемещение водо-нефтяного контакта и обводнение скважин при водонапорном режиме месторождения / Б.Э. Казарновская // Докл. АН СССР, 1945. - Т. 55. - № 8. - С.639 -696.

58. Казарновская, Б.Э., Полубаринова-Кочина, П.Я. О движении подошвенных вод в нефтяных пластах/ Б.Э. Казарновская, П.Я. Полубаринова-Кочина // ПММ, 1943. - Т. 7. - Вып. 6. - С. 439 - 454.
59. Казбан, А.М. Построение многорядной решетки профилей по заданному на них распределению скорости /А.М. Казбан // КГУ, 1964. - № 1. – С. 65–71.
60. Касаткин, А.Е. Коэффициент извлечения нефти для двоякопериодических систем заводнения / А.Е. Касаткин // Всероссийская научная конференция, посвященная 75-летию д.ф-м.н., проф. Г.И.Быковцева. Самара, 2013. - С. 80-81.
61. Касаткин, А.Е. Моделирование процессов заводнения в двоякопериодической области: случай поршневого вытеснения нефти водой / А.Е. Касаткин // Вестник СамГТУ. Серия технические науки, 2014. - № 1(41). – С. 165–173.
62. Касаткин, А.Е. Моделирование процессов заводнения с помощью эллиптических функций Вейерштрасса / А.Е. Касаткин // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2012. - Т.19. - Вып.2. - С. 261-263.
63. Касаткин, А.Е. Моделирование процессов заводнения с помощью эллиптических функций Вейерштрасса [Электронный ресурс] / А.Е. Касаткин - XIX международная молодежная научная конференция «Ломоносов-2012», Москва, 2012. - Режим доступа: http://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2012/1791/43066_8585.pdf
64. Касаткин, А.Е. Моделирование процессов заводнения с помощью эллиптических функций Вейерштрасса / А.Е. Касаткин // IX Международная научно-практическая конференция «Ашировские чтения», 2012. - Т. I. - Разд. II. - С. 94-102.
65. Касаткин, А.Е. Моделирование процессов заводнения с помощью эллиптических функций Вейерштрасса / А.Е. Касаткин // Всероссийская молодежная конференция «Лобачевские чтения, 2012», 2012. - С. 96-100.
66. Касаткин, А.Е. Моделирование процессов заводнения с помощью эллиптических функций Вейерштрасса/ А.Е. Касаткин // Вестник СамГТУ. Серия технические науки, 2013. - №3 (39). - С. 43-49.
67. Касаткин, А.Е. Моделирование процессов заводнения с помощью эллиптических функций Вейерштрасса / А.Е. Касаткин // XVI Международный симпозиум МДОЗМФ-2013, Украина, 2013. - С. 189-193.
68. Касаткин, А.Е. Продвижение фронта заводнения в двоякопериодической области / А.Е. Касаткин // X Международная научно-практическая конференция «Ашировские чтения», Туапсе, 2013. – Т. 2. – Разд. 2. – С. 179-191.
69. Касаткин, А.Е. Сравнительный анализ схем расстановки скважин при заводнении / А.Е. Касаткин // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия, 2013. - №9/2 (110) . - С. 197-208.

70. Кац, Р.М., Скворцов, Э.В. К задаче о движении границы раздела двух жидкостей в пористой среде / Р.М.Кац, Э.В.Скворцов // Ученые записки КГУ, 1969. – Том 129. – Кн. 2. – С. 92-99.
71. Коллинз, Р. Течения жидкостей через пористые материалы / Р.Коллинз; [пер.с.англ. Р.Л.Салганика]. – М.: Мир, 1964. – 353 с.
72. Коршак, А.А., Шаммазов, А.М. Основы нефтегазового дела: учебник для ВУЗов /А.А. Коршак, А.М.Шаммазов. - 3-е изд., испр. и доп. – Уфа: ООО «ДизайнПолиграфСервис», 2007. – 528 с.
73. Косторной, А.С., Мартынова, Н.С. Расчет нестационарного обтекания плохообтекаемых тел методом гидродинамических особенностей / А.С. Косторной, Н.С. Мартынова // Вестник СумДУ: технические науки, 2007. - № 2. – С. 42 – 51.
74. Крутицкий, П. А., Сгибнев, А. И. Метод интегральных уравнений в смешанной задаче с косой производной для гармонических функций вне разрезов на плоскости / П. А.Крутицкий, А. И.Сгибнев // Фундаментальная и прикладная математика, 2006. - Т. 12. - № 6. - С. 115—135.
75. Крэйг, Ф.Ф. Разработка нефтяных месторождений при заводнении / Ф.Ф.Крэйг; [пер. с нагл. под ред. д. ф-м. н., проф. В.Л.Данилова]. - М.: Недра, 1974. – 192 с.
76. Крянев, Д.Ю., Жданов, С.А. Методы увеличения нефтеотдачи: опыт и перспективы применения / Д.Ю. Крянев, С.А, Жданов // Нефтегазовая вертикаль, 2011. - №5. – С. 30 - 33.
77. Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В. Методы теории функций комплексного переменного / М.А, Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Физматгиз, 1958. – 677 с.
78. Линьков, А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А.М. Линьков. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
79. Лифанов, И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн) / И. К. Лифанов. - М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
80. Лифанов, И. К. О методе дискретных вихрей для крыла бесконечного размаха и уравнении прандтля для крыла конечного размаха / И. К. Лифанов // Известия высших учебных заведений. Математика, 1980. - № 6 (217). – С. 44 - 51.
81. Лифанов, И.К. Особые интегральные уравнения и методы их численного решения: Учебное пособие / И.К. Лифанов. – М.:МАКС-Пресс, 2006. – 68 с.
82. Логвинов, О.А. Особенности неустойчивого вытеснения вязкой жидкости из ячейки Хеле-Шоу при больших числах Пекле: дисс. … канд. ф-м. наук: 01.02.05 / Логвинов О.А. – Москва, 2011. – 117 с.

83. Мартюшев, Л.М., Бирзина А.И. Морфологическая устойчивость межфазной границы при вытеснении жидкости в конечной ячейке Хеле-Шоу / Л.М. Мартюшев, А.И. Бирзина // Письма в ЖТФ, 2008. – Том 34. – Вып. 5. – С. 71 - 78.
84. Маскет, М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М.Маскет; [пер.с.англ. М.А.Геймана]. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. – 628 с.
85. Математическая энциклопедия: в 5-ти томах [под ред. И. М. Виноградова]. – М.: Советская энциклопедия, 1977—1985.
86. Мир-Салим-заде, М. В. Зарождение трещины в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров / М.В. Мир-Салим-заде // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Механика Предельного Состояния, 2008. - № 2. – С. 115-128.
87. Мокряков, В.В. Исследование зависимости эффективных податливостей плоскости с решеткой круговых отверстий от параметров решетки / В.В. Мокряков // Вычислительная механика сплошных сред, 2010. – Т. 3. - № 3. – С. 90-101.
88. Мокряков, В.В. Метод мультипольных разложений в задачах теории упругости для плоскости с круговыми отверстиями: автореф. дисс. …канд. ф-м.н.: 01.02.04 / В.В. Мокряков. – М., 2008. – 21 с.
89. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости: основные уравнения, плоская теория упругости, кручение и изгиб/ Н.И. Мусхелишвили. – 5-е изд., испр. и доп. – М.:Наука, 1966. – 708 с.
90. Мухаметзянов, Ф.М. К задаче построения трехрядной гидродинамической решетки / Ф.М. Мухаметзянов // КГУ, 1964. - № 1. – С. 96-103.
91. Натанзон, В.Я. О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке / В.Я. Натанзон // Математический сборник, 1935. – Т. 42. - № 5. – С. 617–636.
92. Никольский, Д. Н. Математическое моделирование процесса эволюции границы раздела различных жидкостей в кусочно-неоднородных слоях сложной геологической структуры / Д.Н. Никольский // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2013. – Т. 53. - № 6. - С. 1041–1048.
93. Никольский, Д.Н. Математическое моделирование работы системы скважин в однородных и неоднородных слоях с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости: дис. ... канд. ф-м. наук: 05.13.18 / Никольский Д.Н. - Орел, 2001. - 191 с.
94. Ортега, Дж., Пул, У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул [пер. с анг. под. ред. А.А.Абрамова]. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

95. Павлов, А.В., Перльштейн, Г.З., Типенко, Г.С. Актуальные аспекты моделирования и прогноза термического состояния криолитозоны в условиях меняющегося климата / А.В. Павлов, Г.З. Перльштейн, Г.С. Типенко // Криосфера Земли, 2010. – Т. XIV. - № 1. - С. 3–12.
96. Парк, Дж.Джонс. Механика нефтяного пласта / Дж.Джонс Парк; [пер.с.англ. Г.К.Максимовича]. – М.-Л.: Гостоптехиздат, 1947. – 181 с.
97. Пергамент, А.Х., Попов, С.Б., Шилович, Н.Н. Асимптотические задачи фильтрации при наличии фазовых переходов: препринт [Электронный ресурс] / А.Х.Пергамент, С.Б.Попов, Н.Н.Шилович. – М.: ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2003. – Режим доступа: http://www.keldysh.ru/papers/2003/prep77/prep2003_77.html.
98. Пивень, В.Ф. Метод обобщённого интеграла типа Коши для двумерных задач фильтрации в анизотропно-неоднородном слое пористой среды / В.Ф. Пивень // Труды международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», 2010. – Выпуск 8. – С. 81 - 89.
99. Пивень, В.Ф., Костин, О.В. Исследование плоскопараллельной задачи эволюции границы раздела жидкостей в анизотропной однородной пористой среде / В.Ф. Пивень, О.В. Костин // Ученые записки Орловского государственного университета. Серия Физика, 2012. - № 6. - Ч. I . - С. 64-72.
100. Пирвердян, А.М. Физика и гидравлика нефтяного пласта / А.М. Пирвердян. – М.: Недра, 1982. – 192 с.
101. Плещинский, Б.И., Кандалова, Н.С. Экспериментальное исследование фильтрационного потока разноцветных жидкостей в модели кусочно-неоднородного пласта / Б.И.Плещинский, Н.С.Кандалова. // Ученые записки КГУ, 1965. – том 125. – кн. 8 . – с. 88-91.
102. Победря, Б.Е. Механика композиционных материалов / Б.Е. Победря. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. - 336 с.
103. Радыгин, В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники: учебное пособие для педвузов / В.М.Радыгин, О.В. Голубева. – М.: Высшая школа, 1983. – 160 с.
104. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917 – 1967). – М.: Наука, 1969. – 548 с.
105. Расолько, Г.А. Квазиспектральные соотношения для сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью на концах отрезка / Г.А. Расолько // Вести национальной академии наук Белоруссии. Серия физико-математических наук, 2012. - № 3. – С. 26 – 30.

106. Ротерс П.В. Анализ продуктивности двоякопериодических систем скважин / П.В. Ротерс // Вестник СамГТУ. Серия Физико-математические науки, 2012. -№ 1 (26). – С. 268–270.

107. Саакян, А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью / А.В. Саакян // Известия национальной академии наук Армении. Механика, 2000. – Т. 53. - № 3. – С. 12 – 19.

108. Самарский, А.А., Гулин, А.В. Численные методы: учебник для ВУЗов / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

109. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015610136. Двоякопериодические схемы заводнения: качественный и количественный анализ/ Касаткин А.Е.; заявлено: 23.09.14; опубликовано: 12.01.15.

110. Седов, Л.И. Механика сплошной среды: том I / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1970. – 492 с.

111. Сикорский, Ю.С. Элементы теории эллиптических функций: с приложениями к механике / Ю.С. Сикорский. - 2-е изд., испр. – М.: КомКнига, 2006. – 368 с.

112. Скворцов, Э.В. О движении границы раздела двух жидкостей в бесконечном пласте / Э.В. Скворцов // Ученые записки КГУ, 1969. – Том 127. – Кн. 5. – С. 44-48.

113.Сургучев, М.Л. Вторичные и третичные методы увеличения нефтеотдачи пластов / М.Л.Сургучев. – М.: Недра, 1985. – 308 с.

114. Теряева, Н.Ю. Моделирование двухфазной среды и метод дискретных вихрей: автореф. дисс. …канд. ф-м. н.: 05.13.18 / Н.Ю. Теряева. – Дубна, 2004. – 24 с.

115. Толмачев, С.Т., Юхимович, Д.Л., Бондаревский, С.Л. Двоякопериодическая задача для полых круговых цилиндров / С.Т. Толмачев, Д.Л. Юхимович, С.Л. Бондаревский // Электротехника и Электромеханика, 2010. - № 2. – С. 42–45.

116. Тумашев, Г. Г. Задача о построении двоякопериодической гидродинамической решетки по распределению скорости / Г.Г. Тумашев // Известия высших учебных заведений. Математика, 1974. - № 5(144). – С. 194 – 197.

117. Уиллхайт, Г. Пол. Заводнение пластов / Г.Пол. Уиллхайт; [пер.с.англ. Н.В.Романенко] - М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009. – 788 с.

118.Уиттэкер, Э.Т., Ватсон, Дж., Н. Курс современного анализа: часть вторая, трансцендентные функции / Э.Т. Уиттэкер, Дж. Н. Ватсон; [пер. с анг. под ред. Ф.В.Широкова]. - 2-е изд. – М.: Гос. изд-во ф-м литературы, 1963. – 500 с.

119. Уолкотт, Д. Разработка и управление месторождениями при заводнении/ Д.Уолкотт; [пер. с англ. Ю.А.Наумов] - 2-е изд., доп. – М.: ЮКОС-Schlumberger, 2001. – 144 с.

120. Фазлыев Р.Т. Площадное заводнение нефтяных месторождений / Р.Т.Фазлыев. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 256 с.

121. Федяев, Ю.С. Математическое моделирование эволюции двумерной границы раздела жидкостей различной вязкости в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях грунта: дис. ... канд. ф-м. наук: 05.13.18 / Федяев Ю.С. - Орел, 2005. - 191 с.

122. Халимов, Э.М. Высокая нефтеотдача с применением традиционного заводнения реальна при соблюдении проектного режима разработки [Электронный ресурс] / Э.М. Халимов. - Нефтегазовая геология. Теория и практика, 2007. – Т.2 – Режим доступа: http://www.ngtp.ru/rub/9/001.pdf.

123. Чаплыгин, С. А. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая / С.А. Чаплыгин // Матем. сб., 1897. - Т. 20. - Вып. 1. - С. 115 - 170.

124. Чарный, И.А. Подземная гидрогазодинамика / И.А.Чарный. - М.: Гостоптехиздат, 1963. – 396 с.

125. Чарный, И.А. Подземная гидромеханика / И.А.Чарный. - М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 197 с.

126. Чибрикова, Л. И. О краевой задаче римана для автоморфных функций / Л. И. Чибрикова // Ученые записки КГУ. Математика, 1956. – Т. 116. – Кн. 4. – С. 59 – 110.

127. Чилап, А.Я. К задаче о прорыве законтурной воды к галерее скважин / А.Я.Чилап // Известия высших учебных заведений (Математика), 1960. - №3(16). – С. 241 – 255.

128. Шувалова, Л.Е. Квадратурные методы решения нелинейного сингулярного интегрального уравнения / Л.Е. Шувалова // Известия высших учебных заведений. Математика: краткие сообщения, 2007. - № 6 (541). – С. 77 – 81.

129. Щелкачев, В.Н. Избранные труды / В.Н.Щелкачев – М.: Недра, 1990. – 232 с.

130. Щелкачев, В.Н. Отечественная и мировая нефтедобыча: история развития, современное состояние и прогнозы / В.Н. Щелкачев. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 132 с.

131. Щелкачев, В.Н., Лапук, Б.Б. Подземная гидравлика / В.Н.Щелкачев, Б.Б.Лапук. – Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 736 с.

132. Щуров, В.И. Технология и техника добычи нефти: учебник для ВУЗов / В.И.Щуров. – М.: Недра, 1983. – 510 с.

133. Энциклопедический словарь по металлургии: в 2-х томах [под ред. Н.П.Лякишева]. – М.: Интермет Инжиниринг, 2000. – 821 с.

134. Alimov, M.M. The reducibility of the anisotropic Hele-Show problem to the isotropic case / M.M. Alimov //Journal of Applied Mathematics and mechanics, 2007. - № 71. – P. 408-414.

135. Altamira, A. F, Hoyt, D.L. Interface advance control in pattern floods by retarding cusp formation: patent US3393734 A / A.F. Altamira, D.L. Hoyt. – US Patent Office, 1968. – 4 P.
136. Alvarez-Lacalle E., Ortin, J., Casademunt, J. Low viscosity contrast fingering in a rotating Hele-Shaw cell / E. Alvarez-Lacalle, J. Ortin, J. Casademunt // Physics of fluids, 2004. – Vol. 16. - № 4. - P. 908 – 924.
137. Astafiev, V.I., Kasatkin A.E. Elliptic functions in the modeling of waterflooding [Электронный ресурс] / V.I. Astafiev, A.E. Kasatkin. – 75th EAGE Conference & Exhibition incorporating SPE EUROPEC 2013. London,2013. - DOI: 10.3997/2214-4609.20130892.
138. Astafiev, V.I., Kasatkin A.E. Modeling and numerical calculation of piston-like oil displacement for doubly-periodic systems of oil fields development/ V.I. Astafiev, A.E. Kasatkin. – VI International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering. Venice, 2015. – International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), 2015. – P. 734-743.
139.Astafiev, V.I., Kasatkin A.E., Roters, P.V. Elliptic functions in modeling of oil Recovery [Электронный ресурс]/ V.I. Astafiev, A.E. Kasatkin, P.V. Roters. - ECMOR XIII, France, 2012. – DOI: 10.3997/2214-4609.20143268.
140. Astafiev, V.I., Roters, P.V. Analytical Solution for a Double-periodic Multiwells Reservoir System /V.I. Astafiev, P.V. Roters // Tyumen 2013 - New Geotechnology for the Old Oil Provinces, 2013. – 5 P.
141. Astafiev, V.I., Roters, P.V. Simulation of oil recovery using the Weierstrass elliptic functions /V.I. Astafiev, P.V. Roters // International Journal of Mechanics, 2014. - Vol. 8. - P.357-364.
142. Ben Amar, M., Rice, J.R. Exact results with the j-integral applied to free-boundary flows / M. Ben Amar, J.R. Rice // J. Fluid Mech., 2002. – Vol. 461. – P. 321 – 341.
143. Chang, S. Hele-Shaw flow near cusp singularities / S. Chang // California institute of technology, Pasadena, California, 2013. – 53 P.
144. Chen, C., Meiburg, E. Miscible porous media displacements in the quarter five-spot configuration. Part I. The homogeneous case / C.Chen, E.Meiburg // J. Fluid Mech., 1998. – Vol. 371. – P. 233 – 268.
145.Crank, J. Free and moving boundary problems/ J. Crank. - Clarendon press. Oxford, 1984. – 434 P.
146. Daripa, P., Glimm, J., Lindquist, B., McBryan, O. Polymer floods: a case study of nonlinear wave analysis and of instability control in tertiary oil recovery /P. Daripa, J. Glimm, B. Lindquist, O. McBryan // Journal on applied mathematics, 1988. – Vol. 48. - № 2. – P. 353 – 373.

147. Daripa, P., Pasa, G. On capillary slowdown of viscous fingering in immiscible displacement in porous media / P. Daripa, G. Pasa // Transport in porous media, 2008. – Vol. 75. P. 1- 16.

148. Dillip, M.Kale. Dynamics of moving interfaces in porous media: II Pistonlike displacement / M.Kale Dillip // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, Louisiana, 1982. – 9 P.

149. Dyes, A.B., Caudle, B.H., Erickson, R.A. Oil Production after Breakthrough as Influenced by Mobility Ratio / A.B. Dyes, B.H. Caudle, R.A. Erickson // Petroleum Transactions AIME, 1954. – Vol. 6. – P. 27-32.

150. Fay, C. H., Prats, M. The Application of Numerical Methods to Cycling and Flooding Problems / C.H. Fay, M.Prats //3rd World Petroleum Congress, Netherlands, 1951. – P. 555-562.

151. Fernandez, J., Kurowski, P., Limat, L., Petitjeans, P. Wavelength selection of fingering instability inside Hele-Shaw cells / J. Fernandez, P. Kurowski, L. Limat, P. Petitjeans // Physics of fluids, 2001. – Vol. 13. - № 11. – P. 3120 – 3125.

152. Godin, Y. A. The effective conductivity of a periodic lattice of circular inclusions [Электронный ресурс]/ Y.A. Godin. – Cornell University Library, 2012. - Режим доступа: http://arxiv.org/pdf/1201.1419.pdf

153. Hauber, W.C. Prediction of Waterflood performance for arbitrary well patterns and mobility ratios / W.C.Hauber // Shell development CO, Texas, 1964. – P. 95 – 103.

154. Hernandez, J., Al-Housseiny, T., Aristoff, J. Capillary instability driven by a permeability gradient [Электронный ресурс] / J. Hernandez, T. Al-Housseiny, J. Aristoff // American Physical Society, 2010. – Режим доступа: http://www.princeton.edu/pccmeducation/undergrad/reu/researchprojects/REU2010Presentations/Hernandez.pdf.

155. Homsy, G.M. Viscous fingering in porous media / G.M. Homsy// Annual reviews fluid mechanics, 1987. – Vol. 19. - P. 271 – 311.

156. Ioakimidis, N. I., Theocaris, P. S. Doubly-periodic array of cracks in an infinite isotropic medium / N.I. Ioakimidis, P.S. Theocaris // Journal of Elasticity, 1978. - Vol. 8. - No. 2. – P. 157 – 169.

157. Javierre-Perez, E. Literature Study. Numerical Methods for solving Stefan problems: report 03-16 / E. Javierre-Perez. - Department of Applied Mathematical Analysis, Delft, The Netherlands, 2003 – 94 P.

158. Kim, H., Funada, T., Joseph, D.D., Homsy, G.M. Viscous potential flow analysis of radial fingering in a Hele-Shaw cell / H. Kim, T. Funada, D.D. Joseph, G.M. Homsy // Physics Of Fluids, 2009. – Vol. 21. - 9 P.

159. Koiter, W.T. Some general theorems on doubly-periodic and quasi-periodic functions / W.T. Koiter // Amsterdam: Proc. Koninkl. Nederl. Akademie Wetenschappen, 1959. – Vol. 62. – № 2. – P. 120 -128.

160. Koiter, W.T. Stress distribution in an infinite elastic sheet with a double-periodic set of equal holes / W.T. Koiter // Boundary problems different. equat., Medison Univ.: Wisconsin Press, 1960. – P. 191 – 213.

161. Linkov, A. M., Koshelev, V.F. Complex variables BIE and BEM for a plane of a doubly periodic system of flaws / A.M. Linkov, V.F. Koshelev // Journal of the Chinese institute of engineers, 1999. – Vol. 22. - № 6. – P. 709–720.

162. Meijers, P. Doubly-periodic stress distribution in perforated plates: dissertation / P.Meijers. – Technische Hochschule, Delft, Netherlands, 1967. - 187 P.

163. Mizbauddin, M. Waterflooding [Электронный ресурс] / M.Mizbauddin. – Электронная библиотека Scribd, 2012. - Режим доступа: http://ru.scribd.com/doc/91182839/Water-Flooding.

164. Morel-Seytoux, H. J. Analytical-numerical method in waterflooding predictions / H.J. Morel-Seytoux // SPE journal, 1965. – P. 247 – 258.

165. Morel-Seytoux, H. J. Unit mobility ration displacement calculations for pattern floods in homogeneous medium / H.J. Morel-Seytoux // SPE journal, 1966. – P. 217 – 227.

166. Nagel, M., Gallaire, F. New prediction for wave length selection of radial fingering in a Hele-Shaw cell / M. Nagel, F. Gallaire // 20th Congress Francais de Mecanique, 2011. – 6 P.

167. Nicholl, M. J., Glass, R. J. Infiltration into an Analog Fracture: Experimental observations of Gravity-Driven Fingering / M. J. Nicholl, R. J. Glass // Vadose Zone Journal 4, 2005. – Vol. 4. - P. 1123–1151.

168. Noaman, A.F. El-Khatib. A new stream-tube model for waterflooding performance in 5-spot patterns / A.F. El – Khatib Noaman // SPE Middle East Oil Show, Bahrain, 1999. – 11 P.

169. Pau, G. S. H., Bell, J. B., Pruess, K., Almgren, A. S., Lijewski, M. J., Zhang, K. Numerical studies of density-driven flow in CO_2 storage in saline aquifers / G. S. H. Pau, J. B. Bell, K.Pruess, A. S.Almgren, M. J. Lijewski, K. Zhang // Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, California, 2009. – 8 P.

170. Renard, G., Morgan, R., Delamaide, E., Fossey, J.P. Complex Well Architecture, IOR and Heavy Oils: conference paper/ G. Renard, R. Morgan, E. Delamaide, J.P. Fossey // proceedings of the 15th World Petroleum Congress,12-17 October, Beijing, China,1997. – Vol.2 – P. 485-494.

171. Riaz, A., Meiburg, E. Three-dimensional miscible displacement simulations in homogeneous porous media with gravity override / A. Riaz, E. Meiburg // J. Fluid Mech, 2003. - Vol. 494. – P. 95–117.
172. Saffman, P. G. Viscous fingering in Hele-Shaw cells / P.G. Saffman // J . Fluid Mech, 1986. - Vo1. 173. - P. 73-94.
173. Saffman, P. G., Taylor, G. I. Cavity flows of viscous liquids in narrow spaces / P. G. Saffman, G. I. Taylor // Proc. 2nd Symp. on Naval Hydrodynamics, 1958. – P. 277 – 291.
174. Sahasakmontri, K., Horii, H., Hasegawa, A., Nishino, F. Mechanical properties of solids containing a doubly-periodic rectangular array of cracks / K. Sahasakmontri, H. Horii, A. Hasegawa, F. Nishino // Structural Eng. / Earthquake Eng., 1987. – Vol. 4. - № 1. – P. 125 – 135.
175. Schulz, K. J. On the state of stress in perforated strips and plates / K.J. Schultz// Amsterdam: Proc. Koninkl. Nederl. Akademie Wetenschappen, 1942. – Vol. 45. – № 3. - P. 233–239.
176. Schulz, K. J. On the state of stress in perforated strips and plates: 2nd communication / K.J. Schultz// Amsterdam: Proc. Koninkl. Nederl. Akademie Wetenschappen, 1942. – Vol. 45. – № 4. - P. 341–346.
177. Schulz, K. J. On the state of stress in perforated strips and plates: 3d communication / K.J. Schultz// Amsterdam: Proc. Koninkl. Nederl. Akademie Wetenschappen, 1942. – Vol. 45. – № 5. - P. 455–461.
178. Schulz, K. J. On the state of stress in perforated strips and plates: 4th communication / K.J. Schultz// Amsterdam: Proc. Koninkl. Nederl. Akademie Wetenschappen, 1942. – Vol. 45. – № 6. - P. 524–532.
179. Schulz, K. J. On the state of stress in perforated strips and plates / K.J. Schultz// Amsterdam: Proc. Koninkl. Nederl. Akademie Wetenschappen, 1945. – Vol. 48. – P. 282–291.
180. Wang, Y., Kovscek, A.R., Brigham, W.E. Effect of mobility ratio on pattern behavior of a homogeneous porous medium / Y. Wang, A.R. Kovscek, W.E.Brigham //Department of petroleum engineering, Stanford, 1998. – 17 P.
181. Xing, L. On the mathematical problems of composite materials with a doubly periodic set of cracks / L. Xing // Applied Mathematics and Mechanics, 1993. – Vol. 14. - № 12. – P. 1143 – 1150.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ЗАВОДНЕНИЕ КАК ТЕХНОЛОГИЯ ДОБЫЧИ НЕФТИ

1. Виды режимов первичной разработки месторождений

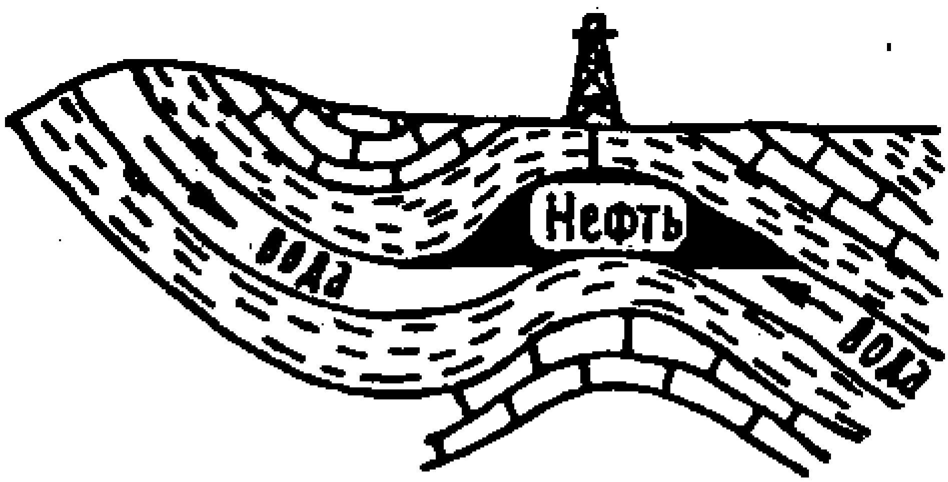


Рисунок 1. Схема вытеснения нефти из залежи при водонапорном режиме.

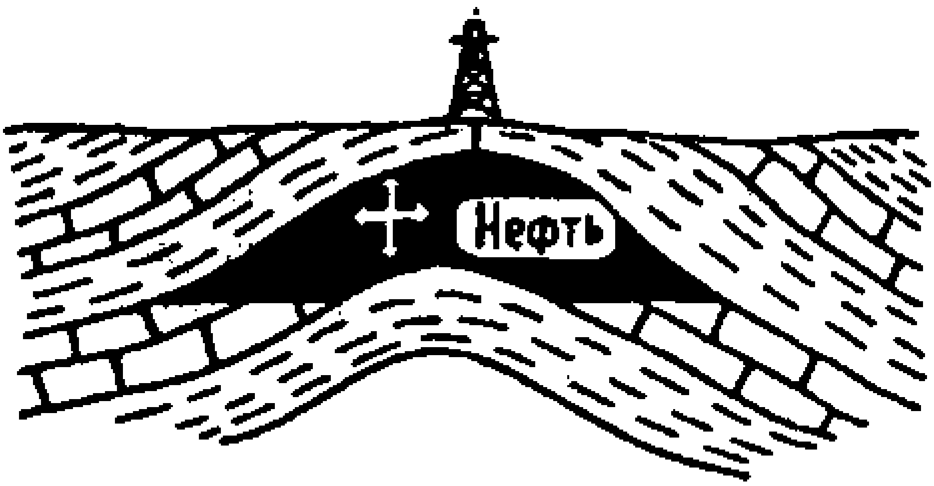


Рисунок 2. Схема извлечения нефти при режиме растворенного газа.

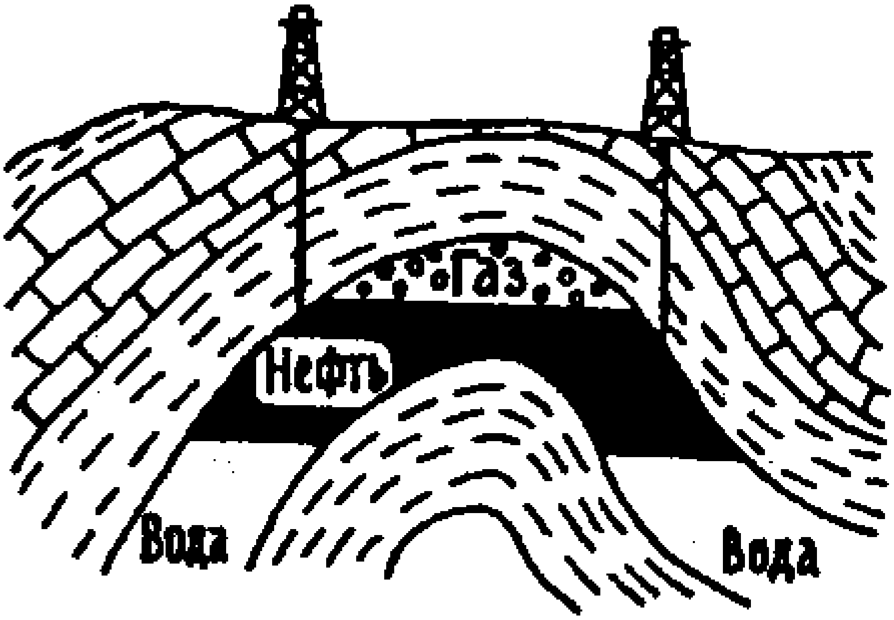


Рисунок 3. Вытеснение нефти за счет энергии газовой шапки.

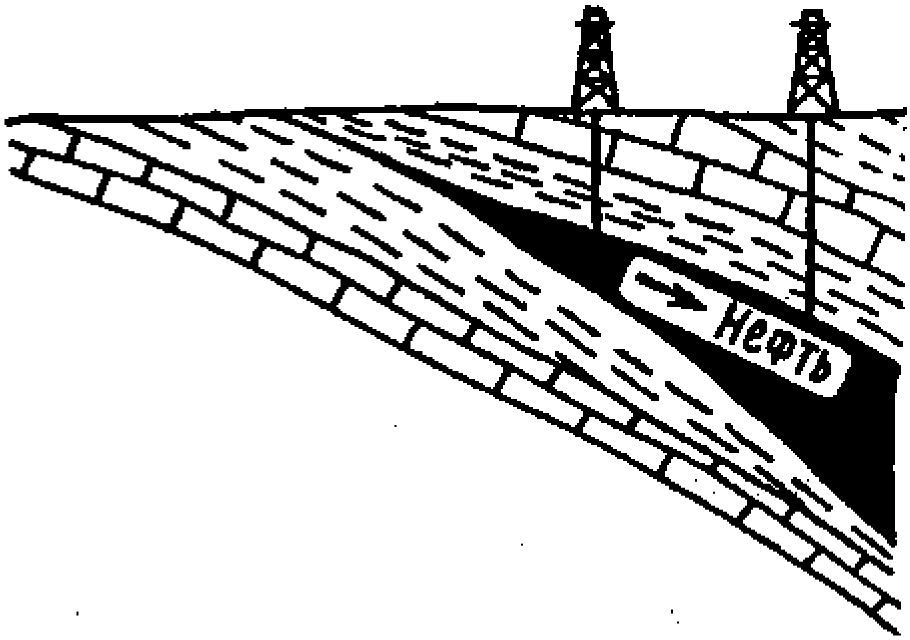


Рисунок 4. Процесс извлечения нефти при гравитационном режиме.

2. Сводные данные о мировой добыче нефти

Таблица 1. Данные о мировой добыче нефти (сырой) в млн. т. и долях США и России (СССР) в этой величине.

Годы	Добыча нефти в мире, млн. т.	Доля нефти в % от мирового объема	
		Россия	США
1860	0,001	0	100
1870	0,794	4,2	89,3
1880	4,11	9,3	86,2
1890	10,5	36,8	58,8
1900	19,8	54	43,3
1910	44,9	25,1	68,9
1920	94,3	4,1	63,3
1930	193	9,6	62,7
1940	294	10,6	62
1950	521	7,3	51,1
1960	1051	14,1	33
1970	2290	15,4	20,7
1980	2975	20,3	14,3
1989	2980	20,4	12,6

Таблица 2. Сводные данные о мировой добыче нефти в млрд. т. за период 1990-2000 гг.

Годы	Объемы мировой добычи в млрд. т.	
	Сырая нефть	Нефть с ГК
1990	2,995	-
1991	2,956	3,021
1992	2,986	3,035
1993	2,968	-
1994	3,001	3,069
1995	3,022	3,128
1996	3,081	3,122
1997	3,150	3,320
1998	-	3,359
1999	-	3,296
2000	-	3,390

3. Виды заводнения: схемы размещения скважин

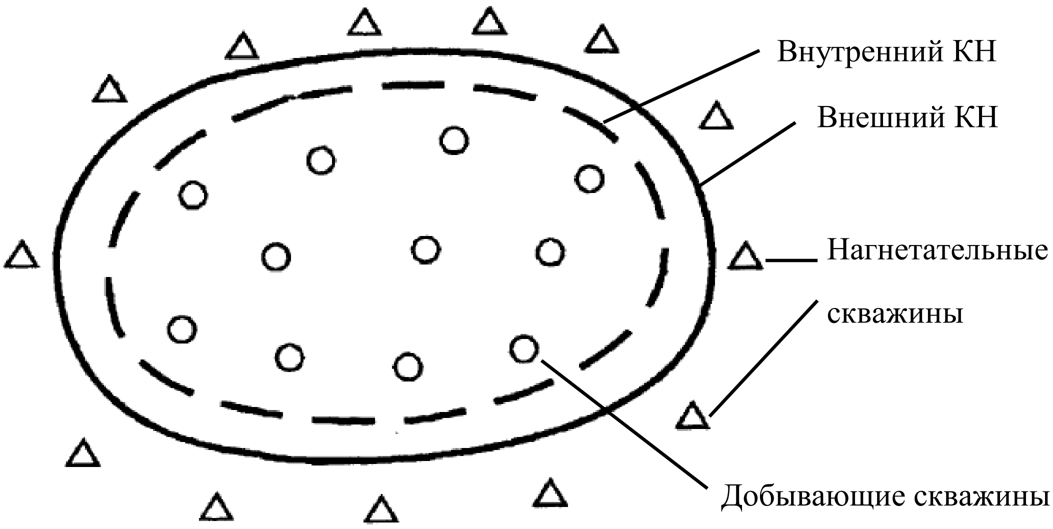


Рисунок 5. Схема законтурного заводнения[12]

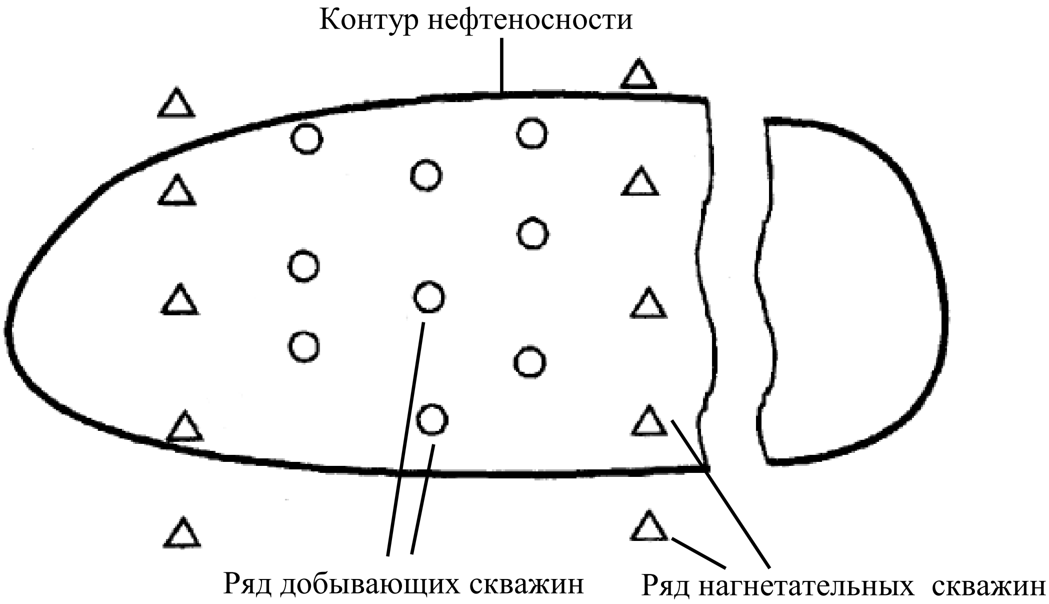


Рисунок 6. Размещение скважин при трехрядной схеме

[12] Под КН следует понимать контур нефтеносности

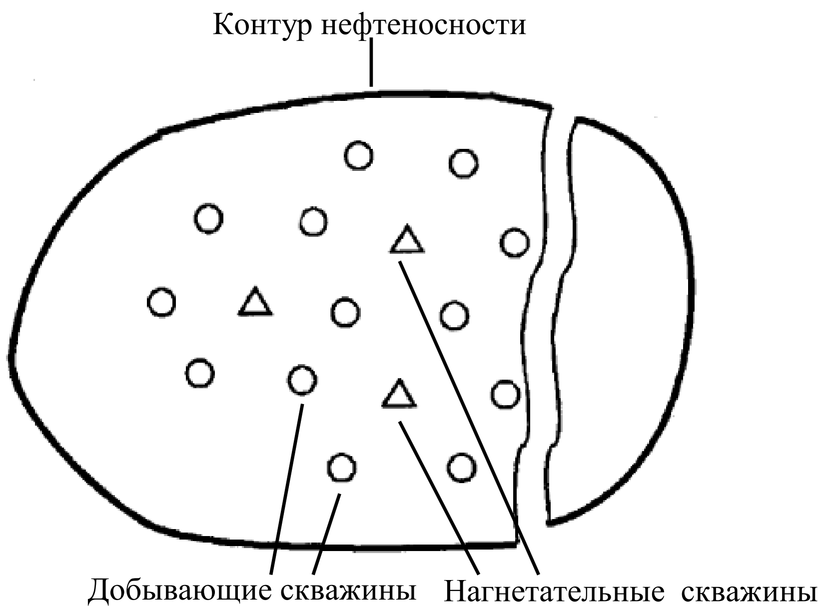


Рисунок 7. Размещение скважин при семиточечной схеме

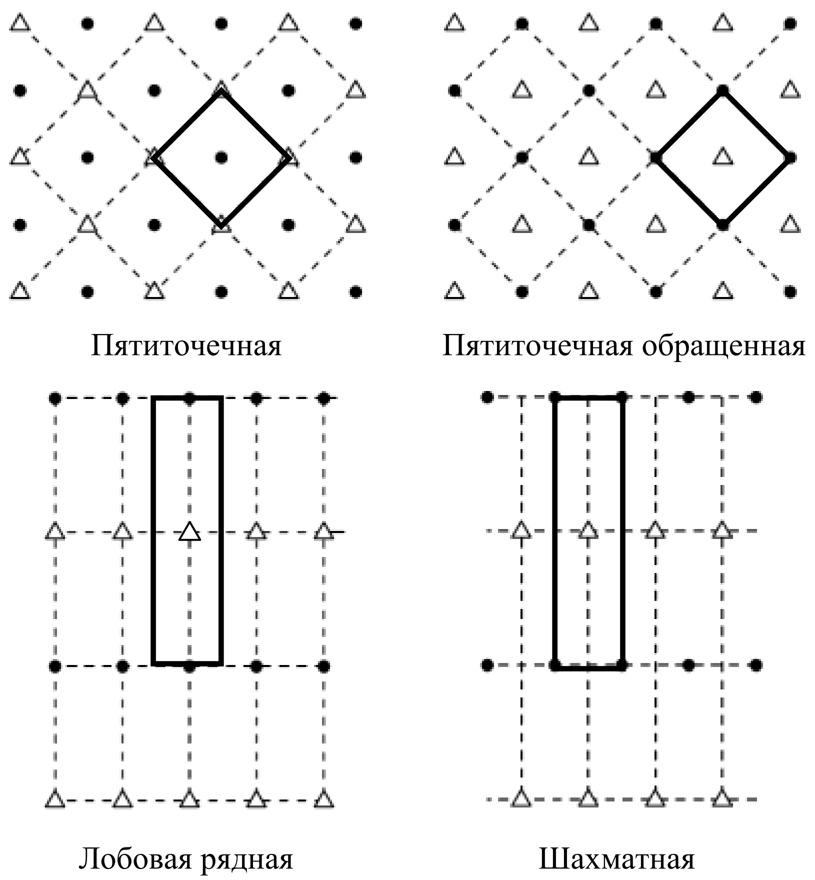


Рисунок 8. Примеры площадных (сверху) и рядных (снизу) схем заводнения: границы повторяющегося элемента выделены черной сплошной линией

Рисунок 9. Пример комбинирования очагового (часть добывающих скважин переведена в режим нагнетательных) и законтурного заводнения

ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА: ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ПОНЯТИЕ ДВОЯКОЙ ПЕРИОДИЧНОСТИ

1. Понятие двоякой периодичности

Свойство двоякой периодичности предполагает периодическое поведение некоторого процесса в двух направлениях: в связи с этим всякая ***двоякопериодическая функция*** должна обладать двумя независимыми ***периодами*** ω_1 и ω_2 с наименьшим модулем, называемыми ***основными***. При этом их отношение не может быть вещественным [118][44]: $\mathrm{Im}(\frac{\omega_1}{\omega_2}) \neq 0$.

Если представить совокупность периодов двоякопериодической функции (с основными периодами ω_1 и ω_2) в виде некоторого множества $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_m, \ldots\}$, то для всякого $\omega_m (m >= 3)$ справедливо следующее выражение [77]: $\omega_m = i\omega_1 + j\omega_2$, где i и j - целые числа $(i, j \in Z)$.

Отметим, что согласно теореме Якоби [17], непостоянная аналитическая функция не может иметь более двух независимых периодов, причем их отношение должно быть комплексным числом.

Основные периоды ω_1 и ω_2 формируют векторный базис на комплексной плоскости: данная пара векторов с началом координат в точке z_0 и углом φ между ними образует ***двоякопериодическую решетку***, состоящую из ячеек с формой параллелограмма, как показано на рисунке 10. На изображении слева представлена схема ее (решетки) построения: черные круги обозначают расположение узлов z_{ij}, связанных с началом координат выбранного векторного базиса $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2)$ следующим образом: $z_{ij} = z_0 + \omega_m = z_0 + i\omega_1 + j\omega_2$.

Вид двоякопериодической решетки L определяется геометрией составляющих ее ячеек: форма последних задается параметрами Δ (площадь ячейки) и $\psi = \lambda e^{i\varphi}$, где $\lambda = {|\omega_2|}/{|\omega_1|}$. Узлы на границах двух смежных ячеек могут относиться только к одной из них: черные дуги на рисунке 10 слева демонстрируют способ «распределения» узловых точек $\{z_0, z_{01}, z_{11}, z_{10}\}$ в вершинах основной ячейки, также называемой ***основным параллелограммом периодов*** [44]. В общем случае ориентация двоякопериодической решетки L в комплексной плоскости может быть произвольной: при этом всегда возможно (преобразованием поворота) приведение L к ***каноническому случаю***, когда вектор $\vec{\omega_1}$ совпадает по направлению с осью OX (см. рисунок 10, справа).

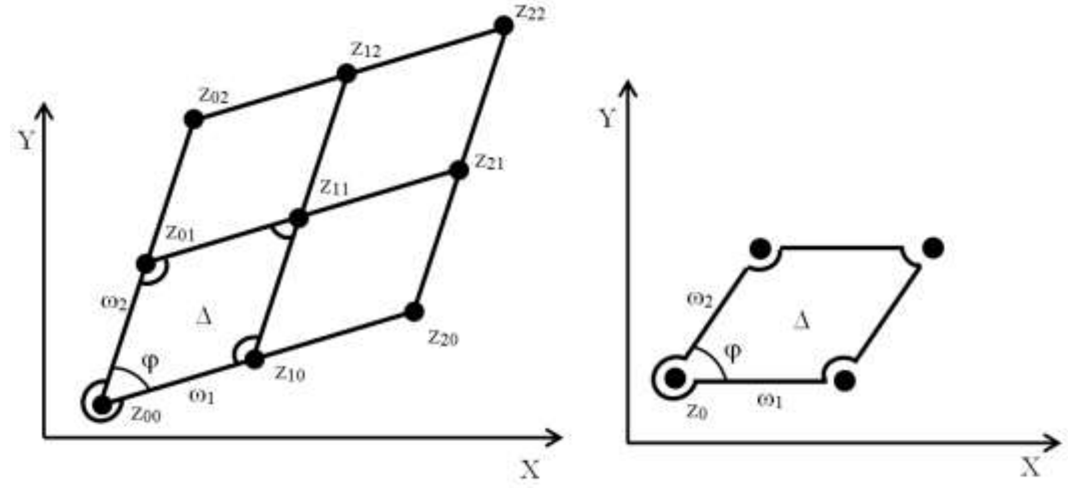


Рисунок 10. Пример построения двоякопериодической решетки L с помощью векторов $\overrightarrow{\omega_1}$ и $\overrightarrow{\omega_2}$. Слева представлен фрагмент из четырех смежных ячеек при произвольном расположении векторного базиса ($\overrightarrow{\omega_1}$, $\overrightarrow{\omega_2}$) относительно (OX,OY): справа изображен параллелограмм периодов при каноническом случае, при котором вектор $\overrightarrow{\omega_1}$ параллелен оси OX. Черные круги обозначают узловые точки, включение/исключение которых из состава ячеек обозначено черными дугами.

2. Функции Вейерштрасса

Семейство специальных функций Вейерштрасса представлено $\wp$ («Пэ»), ζ («Дзета») и σ («Сигма») – функциями. Необходимо отметить их (функций) тесную связь через операцию интегрирования (см. ниже): при этом лишь $\wp$- функция является эллиптической [77], обладая свойством двоякой периодичности.

Как известно [77] [111], ***Эллиптической*** называют мероморфную ***двоякопериодическую*** функцию, порядок которой определяется числом полюсов (с учетом кратности) в основном параллелограмме периодов: при этом, исходя из теоремы Лиувилля и теории вычетов, минимальный порядок эллиптической функции равен двум.

Ниже представлены основные свойства функций Вейерштрасса, их выражение через бесконечные ряды, а также – связь между собой.

Пэ-функция или $\wp(z)$ определяется следующим образом [44]:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{i,j=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{(z - z_{ij})^2} - \frac{1}{z_{ij}^{\ 2}}\right).$$

Здесь знак ' указывает на исключение из суммы слагаемого $z_{ij}=0$, а z_{ij} представляют описанные ранее узловые точки ячеек двоякопериодической решетки. Необходимо отметить, что ряд, входящий в определение пэ-функции, сходится абсолютно и равномерно всюду, за исключением окрестностей z_{ij} [44]. Кроме того, $\wp(z)$ является двоякопериодической, а также обладает свойством четности [17]. Указанные свойства, сформулированные математически, представлены ниже:

1. $\begin{cases} \wp(z+\omega_1)=\wp(z) \\ \wp(z+\omega_2)=\wp(z) \end{cases}$;

2. $\wp(-z)=\wp(z)$.

Здесь ω_1 и ω_2 являются основными периодами пэ-функции. Свойство двоякой периодичности также распространяется и на производную функции $\wp$: известно, что всякая эллиптическая функция может быть выражена через $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ [44].

Дзета-функция или $\zeta(z)$ выражается через $\wp(z)$ путем интегрирования, как показано ниже [17][44]:

$$\zeta(z)=-\int\wp(z)dz=\frac{1}{z}+\sum_{i,j=-\infty}^{\infty}{}'\left(\frac{1}{z-z_{ij}}+\frac{1}{z_{ij}}+\frac{z}{z_{ij}^{2}}\right).$$

Сигма-функция или $\sigma(z)$ также связана с дзета-функцией операцией интегрирования:

$$\ln(\sigma(z))=\int\zeta(z)dz=\ln z+\sum_{i,j=-\infty}^{\infty}{}'\left[\ln\left(\frac{z-z_{ij}}{z_{ij}}\right)+\frac{z}{z_{ij}}+\frac{z^2}{2z_{ij}^{2}}\right].$$

Функции $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ являются квазипериодическими, удовлетворяют соотношению Лежандра и обладают нечетностью [44] [51]. Указанные свойства представлены ниже в перечисленном порядке:

1. $\begin{cases} \zeta(z+\omega_1)=\zeta(z)+2\eta_1 \\ \zeta(z+\omega_2)=\zeta(z)+2\eta_2 \end{cases}$; $\begin{cases} \ln(\sigma(z+\omega_1))=\ln(\sigma(z))+\eta_1(2z-\omega_1) \\ \ln(\sigma(z+\omega_2))=\ln(\sigma(z))+\eta_2(2z-\omega_2) \end{cases}$;

2. $\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1=\pi i$, где $\eta_1=\zeta(\frac{\omega_1}{2})$; $\eta_2=\zeta(\frac{\omega_2}{2})$;

3. $\zeta(-z)=-\zeta(z)$; $\sigma(-z)=-\sigma(z)$.

В довершение отметим, что ζ(z) и σ(z) также могут использоваться для представления произвольной эллиптической функции [17][118].

РЕЗУЛЬТАТЫ КАЧЕСТВЕННОГО И КОЛИЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СХЕМ ЗАВОДНЕНИЯ: СЛУЧАЙ «РАЗНОЦВЕТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ»

1. ПЯТИТОЧЕЧНАЯ ОБРАЩЕННАЯ

ГЕОМЕТРИЯ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ ЭЛЕМЕНТОВ И РАЗМЕЩЕНИЯ СКВАЖИН

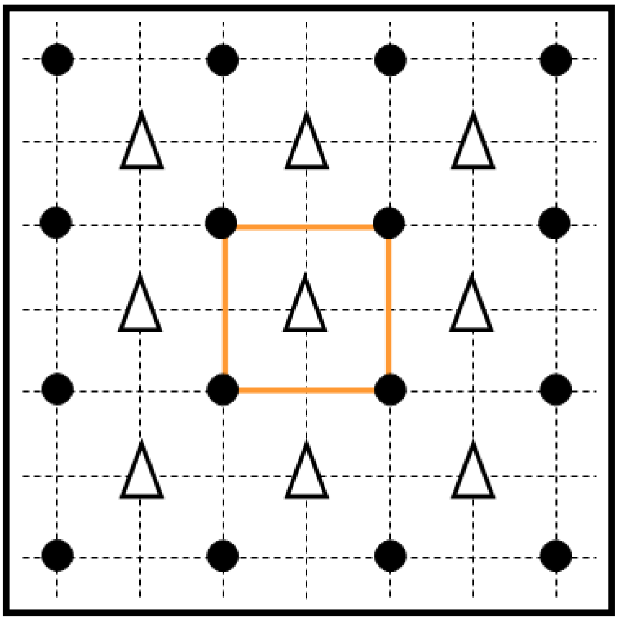


Рисунок 11. Схема выделения повторяющегося элемента (выделен желтым) схемы заводнения.

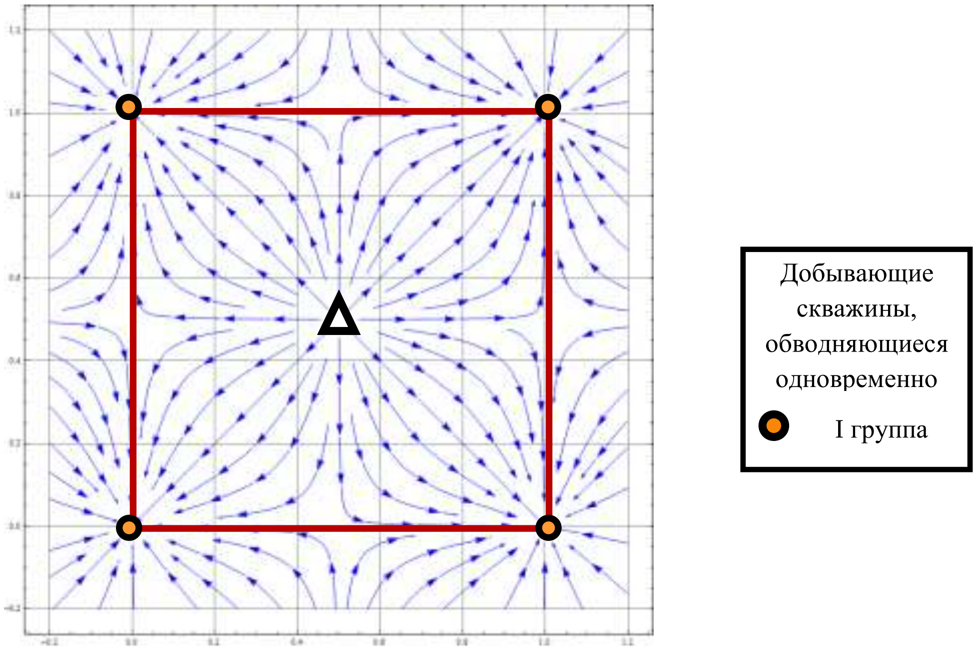


Рисунок 12. Схема линий тока и группировки скважин, обводняющихся одновременно. Повторяющийся элемент схемы заводнения обозначен желтым, а контур нагнетания нагнетательной скважины – красным: в случае их совпадения отображаются только границы контура нагнетания.

ЭВОЛЮЦИЯ ВНК ВО ВРЕМЕНИ И ДАННЫЕ О КОЭФФИЦИЕНТЕ $К_{ОХВ}$

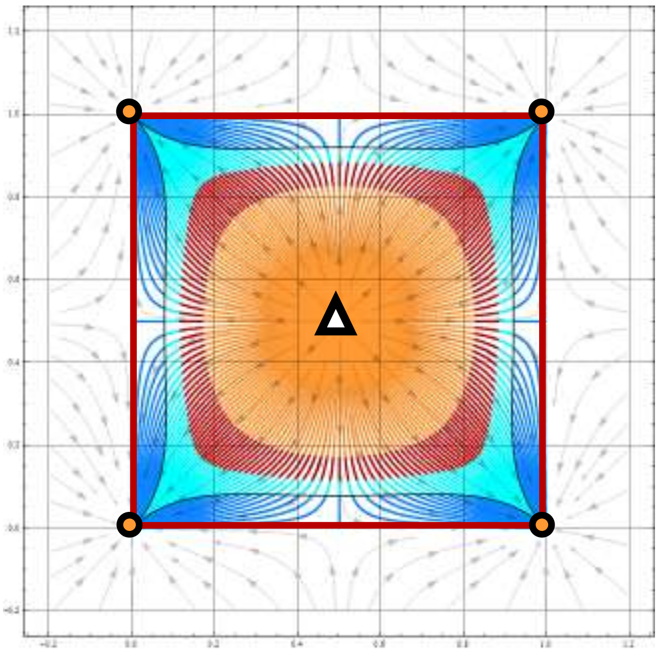


Рисунок 13. Картины положения ВНК на различных этапах заводнения – от половины момента первого прорыва τ_1 до полного обводнения всех добывающих скважин. Границы заводненной области в различные моменты прорыва τ_i воды выделены черным. Обозначения групп скважин, а также контура нагнетания, аналогичны рисунку 12.

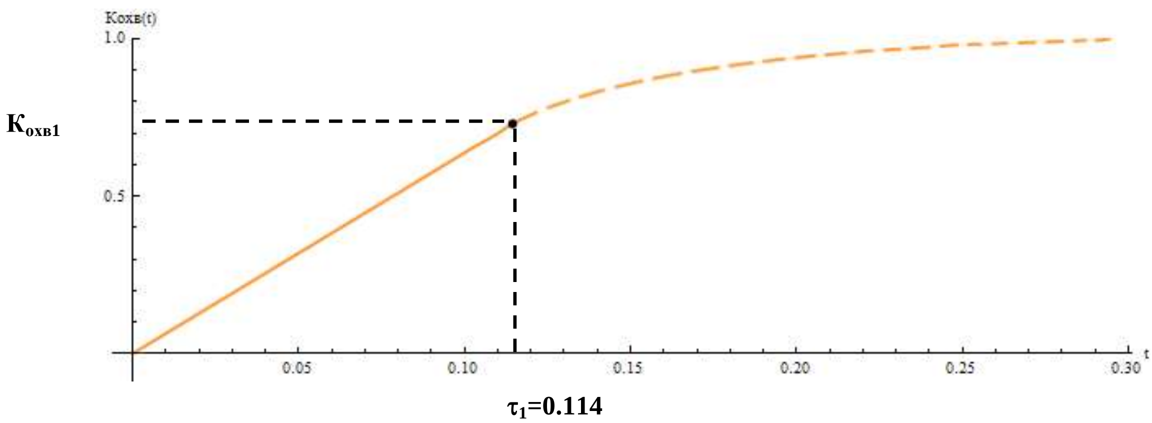


Рисунок 14. Динамика изменений $К_{охв}$ во времени (t). τ_1 соответствует моменту прорыва воды в скважины I-ой группы.

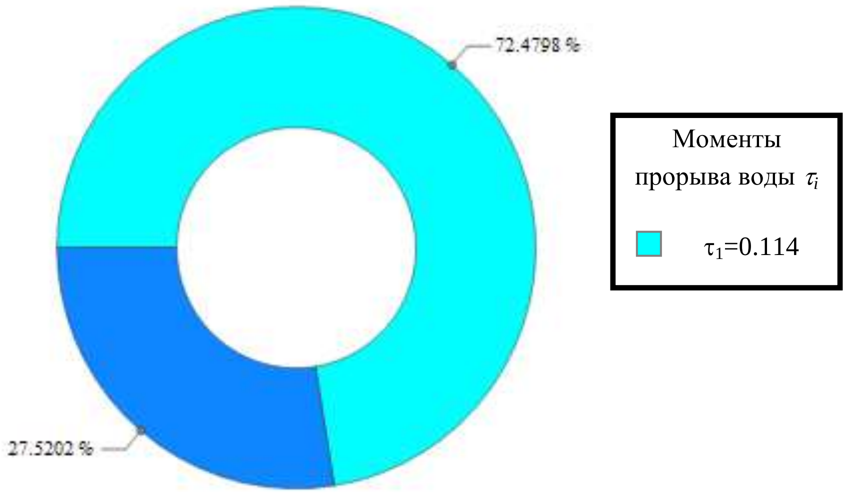


Рисунок 15. Диаграмма увеличения $K_{охв}$ к моментам первичного, вторичного и т.д. прорывов. Сектор, не обозначенный в легенде, соответствует доле, получаемой к моменту полного обводнения.

ДАННЫЕ ОБ ОБВОДНЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ ГРУПП ДОБЫВАЮЩИХ СКВАЖИН

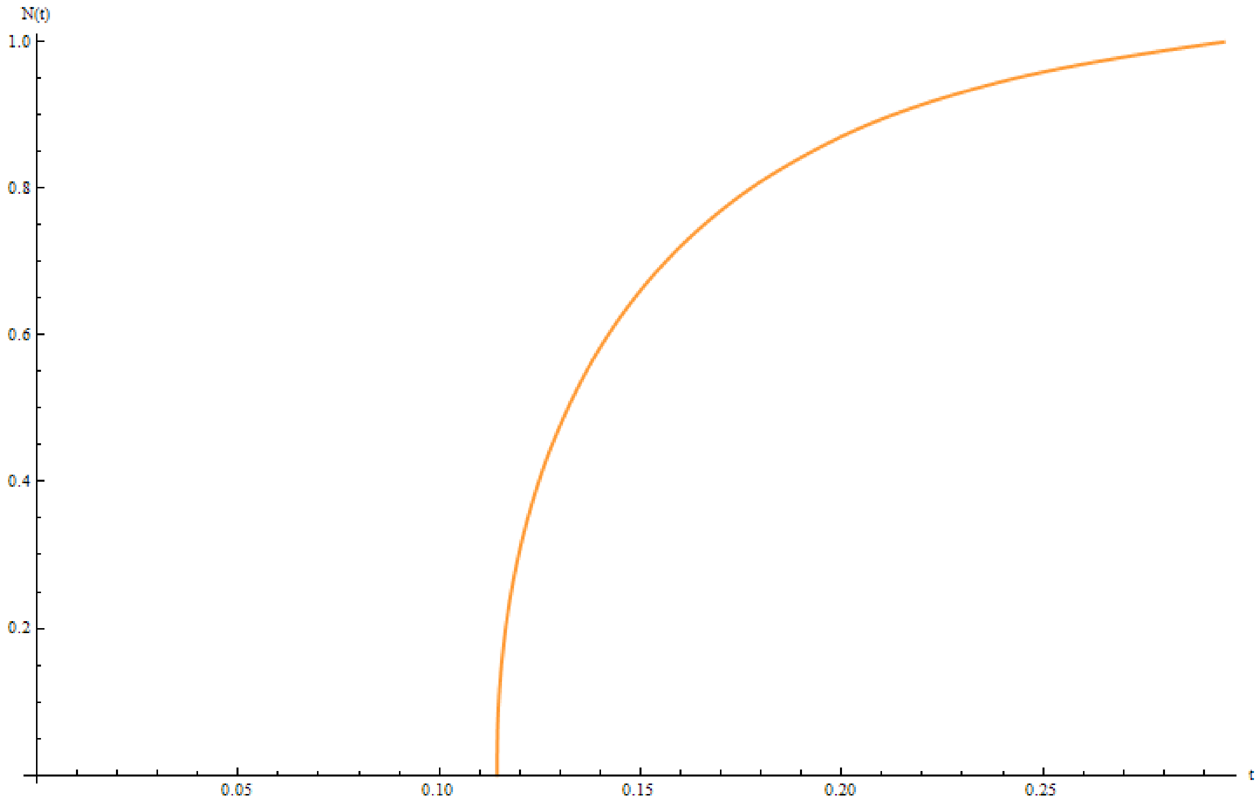


Рисунок 16. Динамика прорыва частиц воды в добывающие скважины различных групп (см. цветовые обозначения на рисунке 12): число трассеров N нормировано по общему количеству частиц, попавших в выбранную скважину за все время заводнения.

2. СЕМИТОЧЕЧНАЯ ОБРАЩЕННАЯ

ГЕОМЕТРИЯ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ ЭЛЕМЕНТОВ И РАЗМЕЩЕНИЯ СКВАЖИН

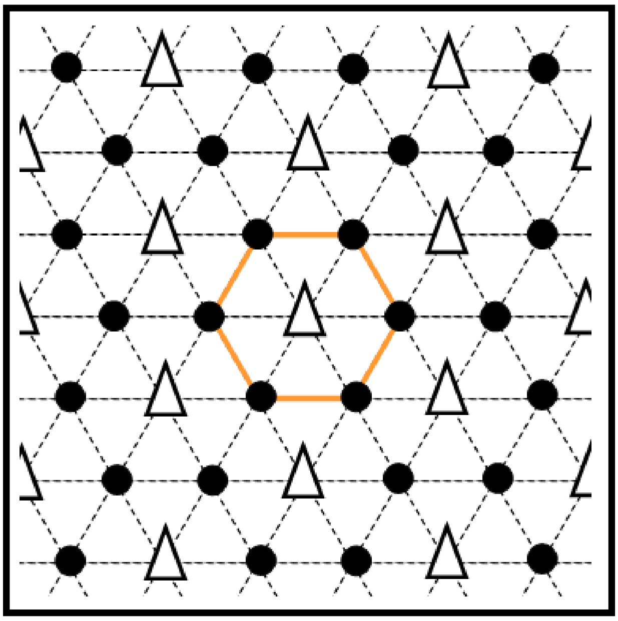


Рисунок 17. Схема выделения повторяющегося элемента (выделен желтым) схемы заводнения.

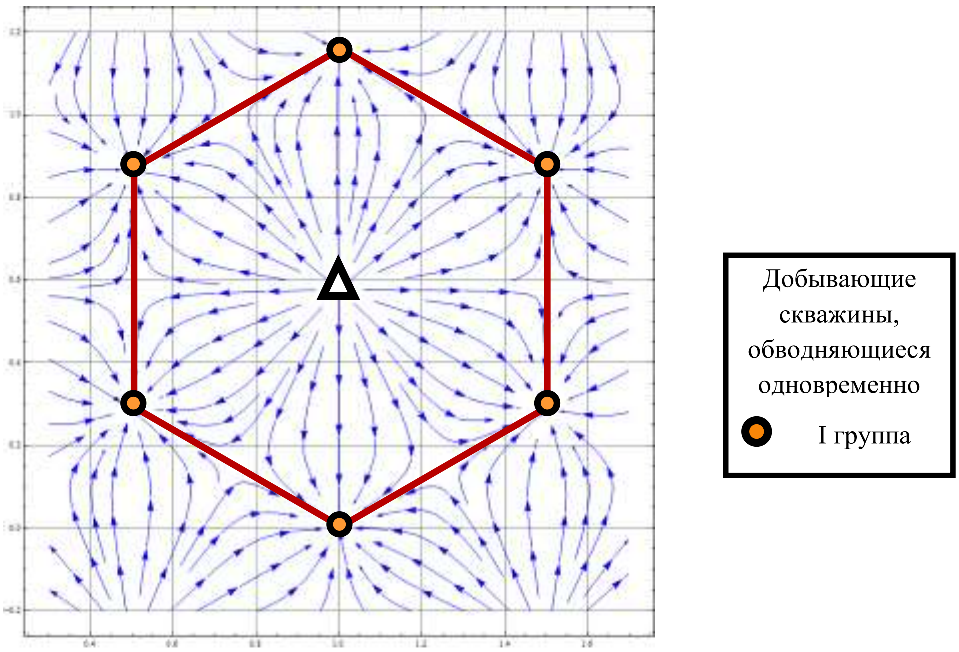


Рисунок 18. Схема линий тока и группировки скважин, обводняющихся одновременно. Повторяющийся элемент схемы заводнения обозначен желтым, а контур нагнетания нагнетательной скважины – красным: в случае их совпадения отображаются только границы контура нагнетания.

ЭВОЛЮЦИЯ ВНК ВО ВРЕМЕНИ И ДАННЫЕ О КОЭФФИЦИЕНТЕ $К_{ОХВ}$

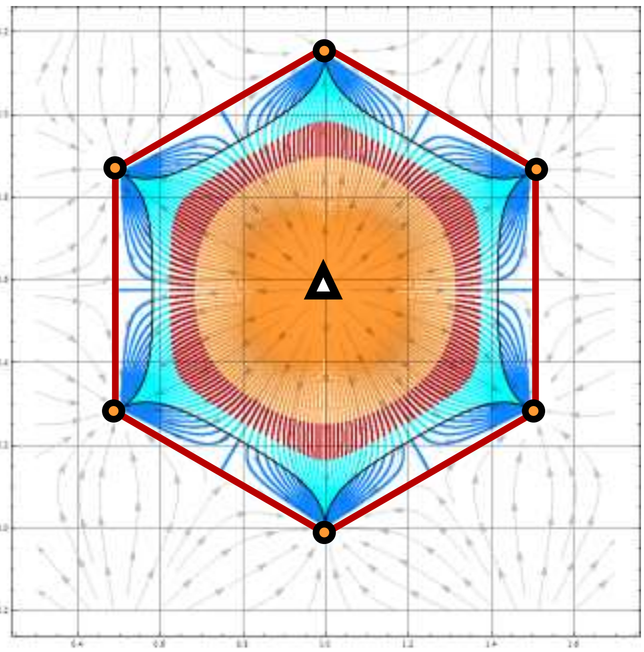


Рисунок 19. Картины положения ВНК на различных этапах заводнения – от половины момента первого прорыва τ_1 до полного обводнения всех добывающих скважин. Границы заводненной области в различные моменты прорыва τ_i воды выделены черным.

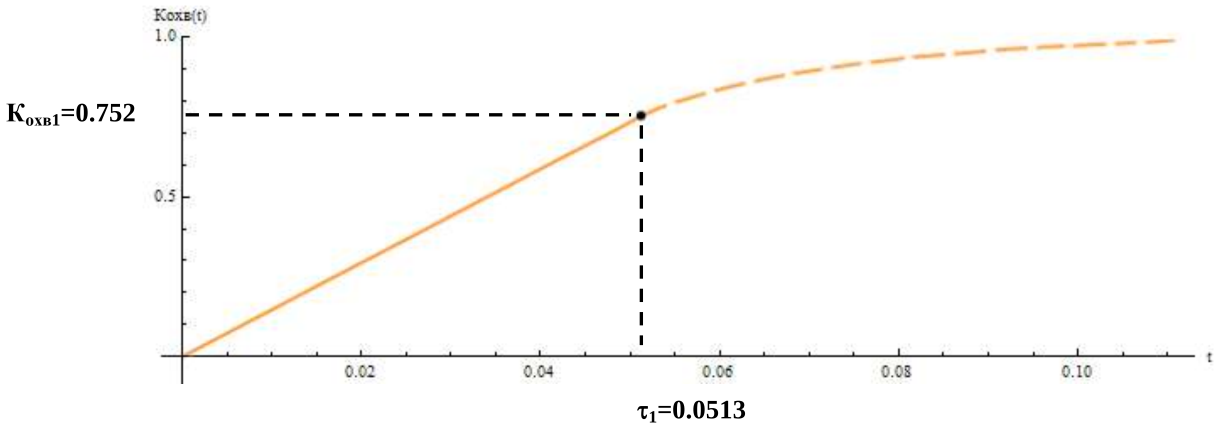


Рисунок 20. Динамика изменений $К_{охв}$ во времени (t). τ_1 соответствует моменту прорыва воды в скважины I-ой группы.

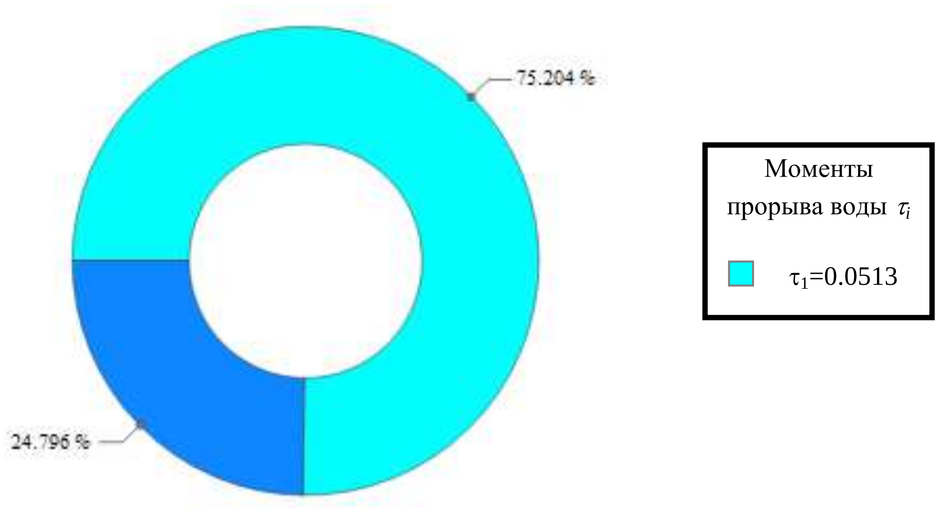


Рисунок 21. Диаграмма увеличения $К_{охв}$ к моментам первичного, вторичного и т.д. прорывов. Сектор, не обозначенный в легенде, соответствует доле, получаемой к моменту полного обводнения.

ДАННЫЕ ОБ ОБВОДНЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ ГРУПП ДОБЫВАЮЩИХ СКВАЖИН

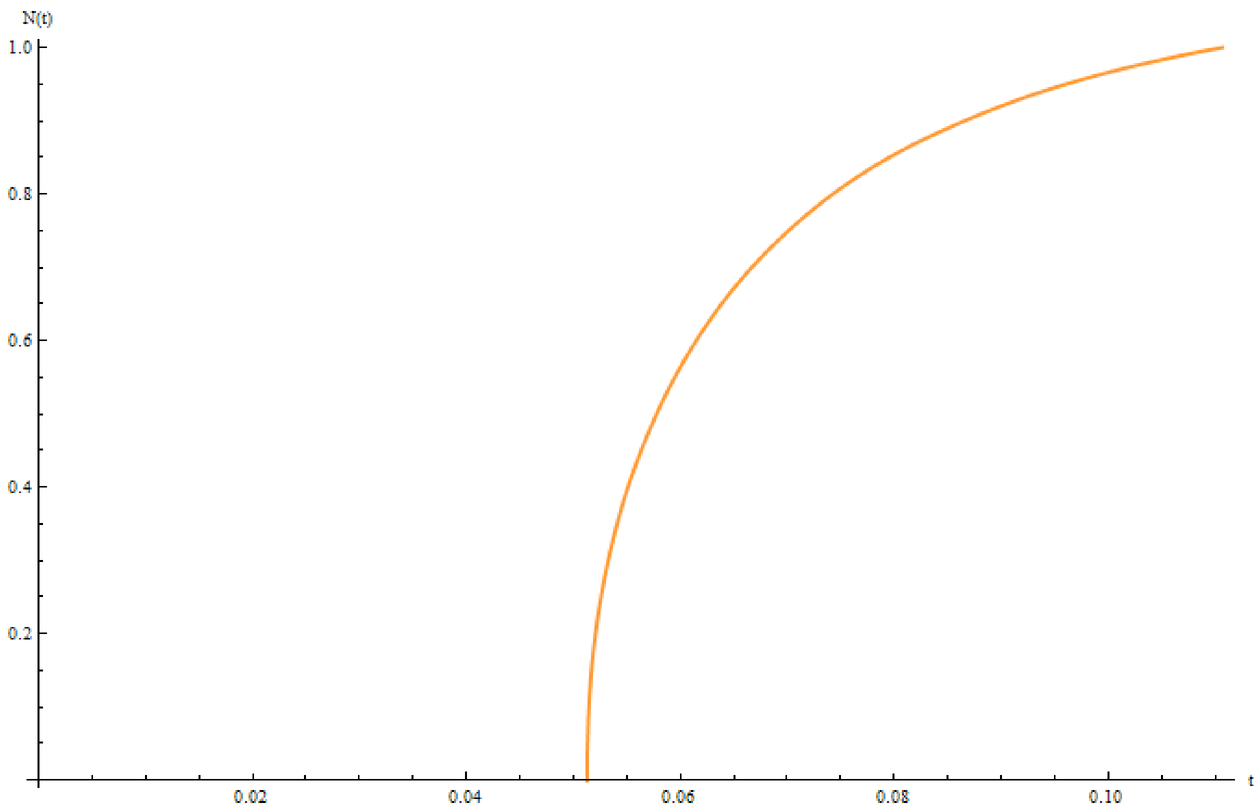


Рисунок 22. Динамика прорыва частиц воды в добывающие скважины различных групп: число трассеров N нормировано по общему количеству частиц, попавших в выбранную скважину за все время заводнения.

3. ДЕВЯТИТОЧЕЧНАЯ ОБРАЩЕННАЯ

ГЕОМЕТРИЯ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ ЭЛЕМЕНТОВ И РАЗМЕЩЕНИЯ СКВАЖИН

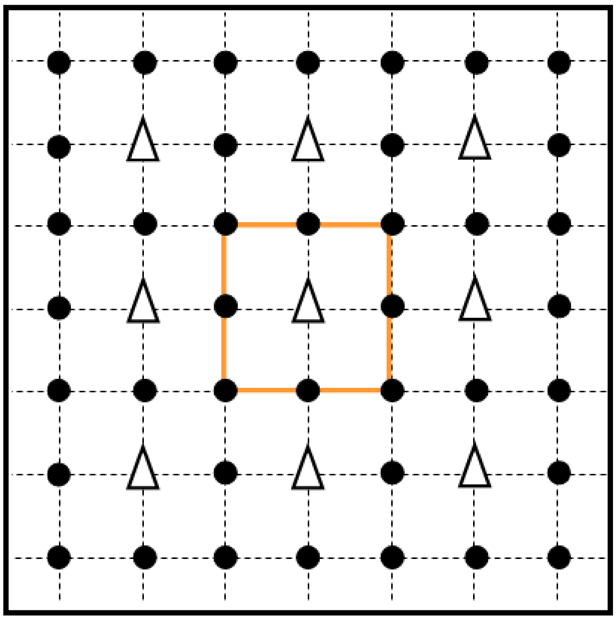


Рисунок 23. Схема выделения повторяющегося элемента (выделен желтым) схемы заводнения.

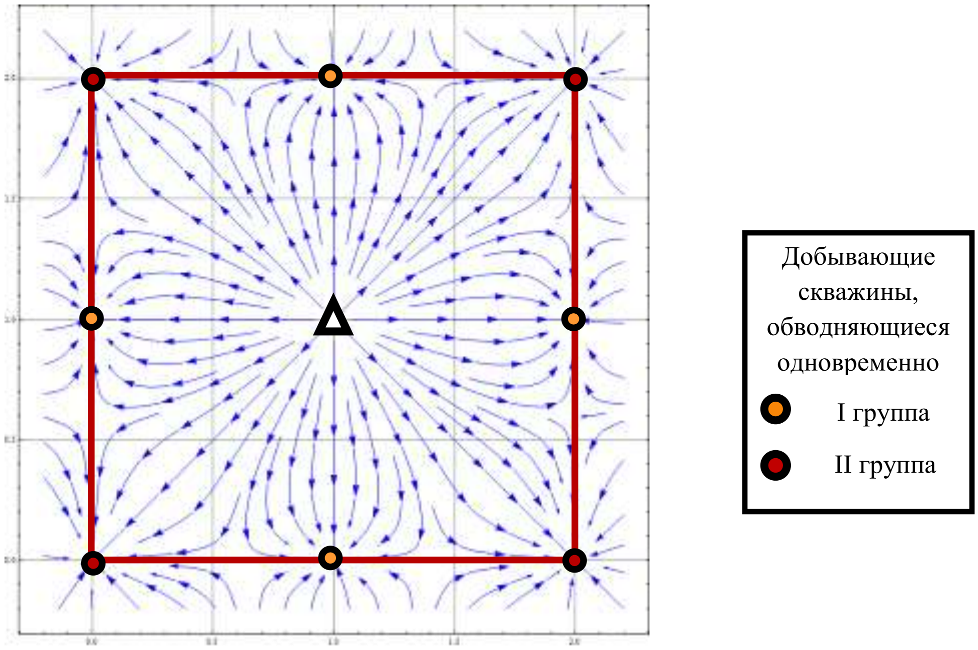


Рисунок 24. Схема линий тока и группировки скважин, обводняющихся одновременно. Повторяющийся элемент схемы заводнения обозначен желтым, а контур нагнетания нагнетательной скважины – красным: в случае их совпадения отображаются только границы контура нагнетания.

ЭВОЛЮЦИЯ ВНК ВО ВРЕМЕНИ И ДАННЫЕ О КОЭФФИЦИЕНТЕ $К_{ОХВ}$

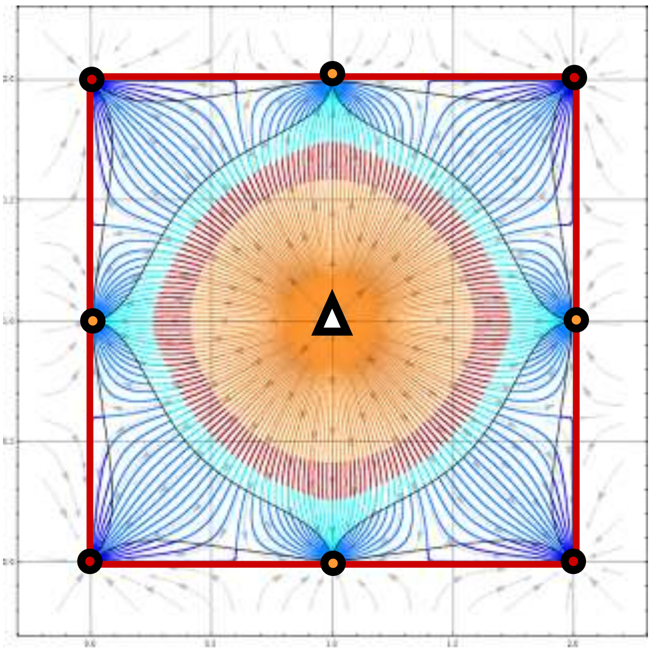


Рисунок 25. Картины положения ВНК на различных этапах заводнения – от половины момента первого прорыва τ_1 до полного обводнения всех добывающих скважин. Границы заводненной области в различные моменты прорыва τ_i воды выделены черным. Обозначения групп скважин, а также контура нагнетания, аналогичны рисунку 24.

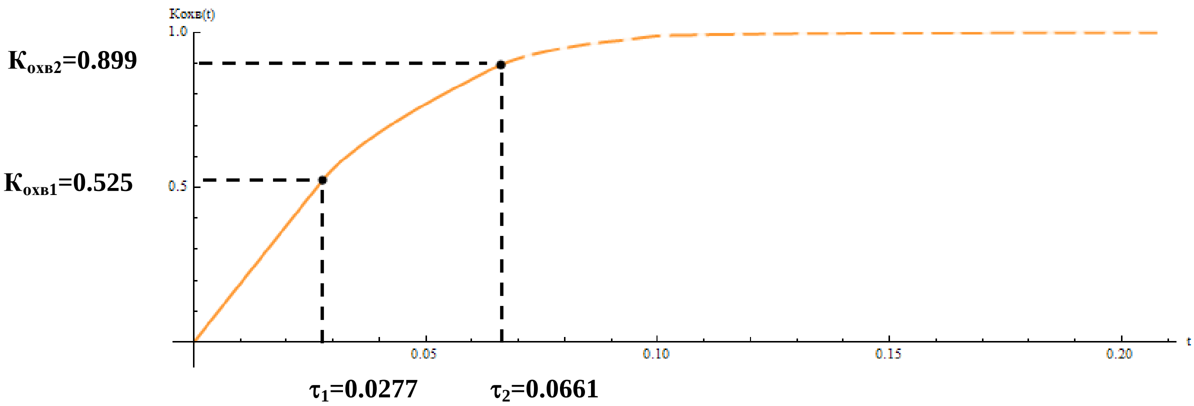


Рисунок 26. Динамика изменений $К_{охв}$ во времени (t). τ_1 и τ_2 обозначают моменты прорыва воды в скважины I-ой и II-ой групп соответственно.

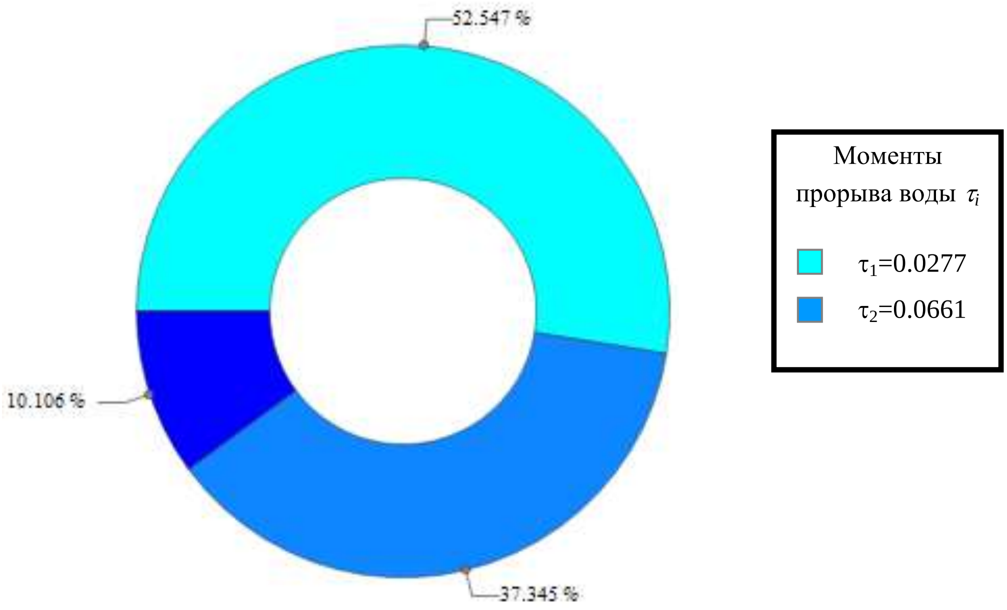


Рисунок 27. Диаграмма увеличения $К_{охв}$ к моментам первичного, вторичного и т.д. прорывов. Сектор, не обозначенный в легенде, соответствует доле, получаемой к моменту полного обводнения.

ДАННЫЕ ОБ ОБВОДНЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ ГРУПП ДОБЫВАЮЩИХ СКВАЖИН

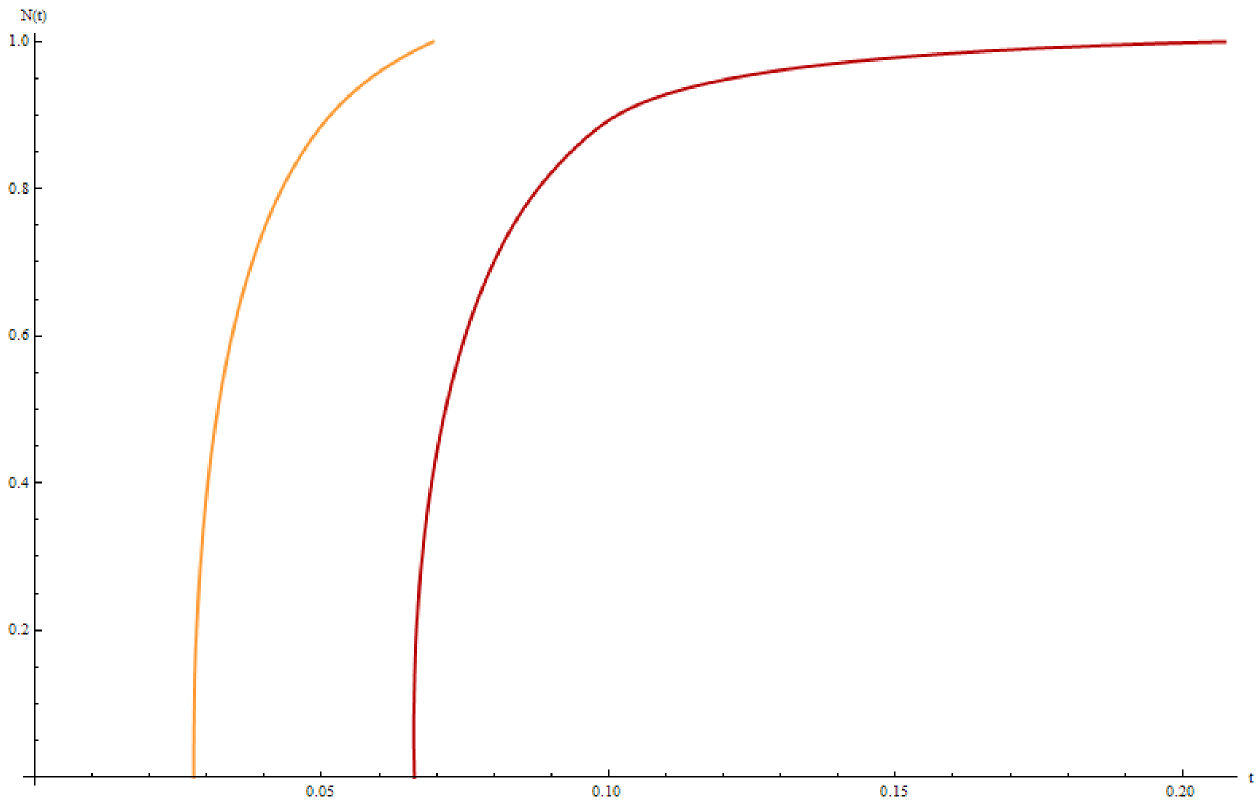


Рисунок 28. Динамика прорыва частиц воды в добывающие скважины различных групп (см. цветовые обозначения на рисунке 24): число трассеров N нормировано по общему количеству частиц, попавших в выбранную скважину за все время заводнения.

4. ЛИНЕЙНАЯ ОДНОРЯДНАЯ ЛОБОВАЯ

ГЕОМЕТРИЯ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ ЭЛЕМЕНТОВ И РАЗМЕЩЕНИЯ СКВАЖИН

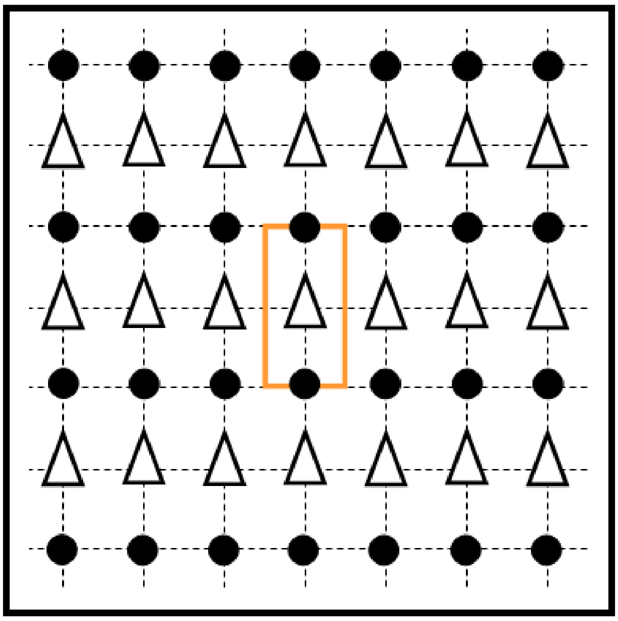


Рисунок 29. Схема выделения повторяющегося элемента (выделен желтым) схемы заводнения.

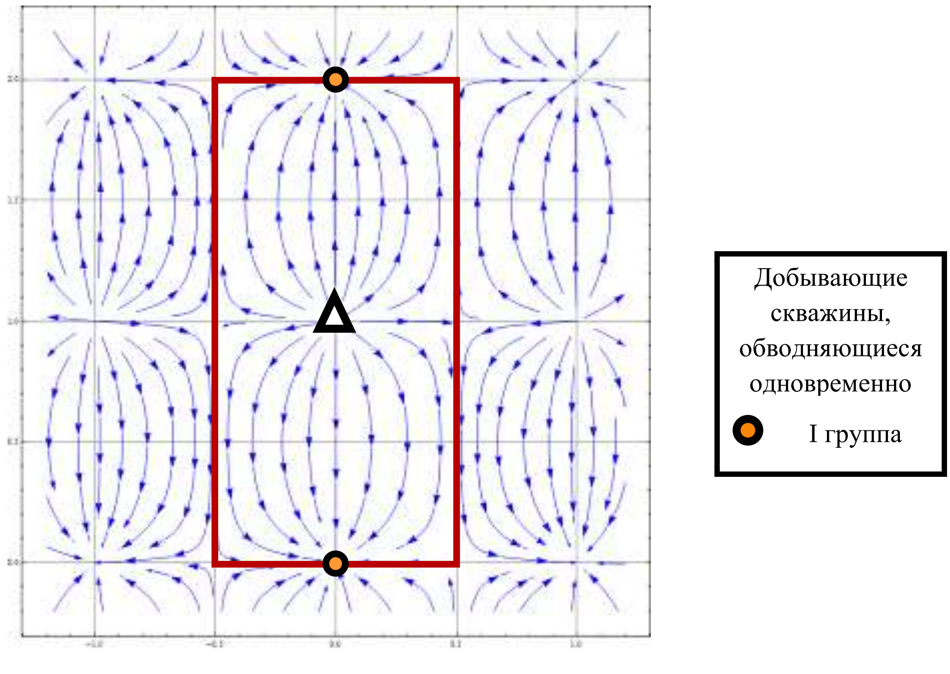


Рисунок 30. Схема линий тока и группировки скважин, обводняющихся одновременно. Повторяющийся элемент схемы заводнения обозначен желтым, а контур нагнетания нагнетательной скважины – красным: в случае их совпадения отображаются только границы контура нагнетания.

ЭВОЛЮЦИЯ ВНК ВО ВРЕМЕНИ И ДАННЫЕ О КОЭФФИЦИЕНТЕ $К_{ОХВ}$

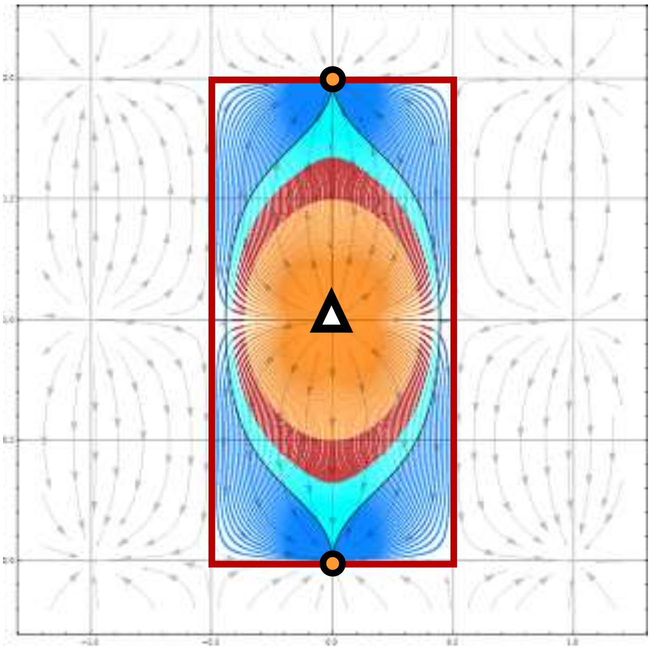


Рисунок 31. Картины положения ВНК на различных этапах заводнения – от половины момента первого прорыва τ_1 до полного обводнения всех добывающих скважин. Границы заводненной области в различные моменты прорыва τ_i воды выделены черным.

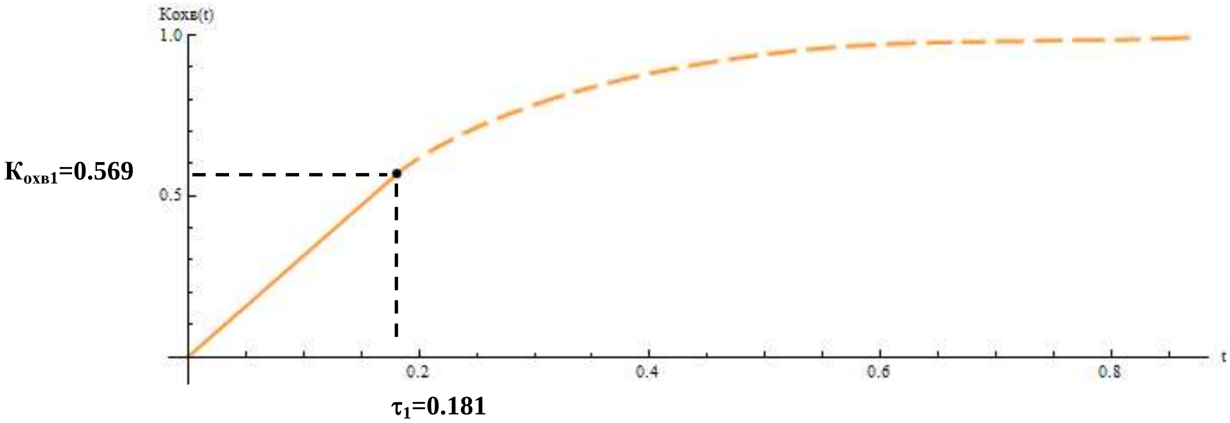


Рисунок 32. Динамика изменений $К_{охв}$ во времени (t). τ_1 соответствует моменту прорыва воды в скважины I-ой группы.

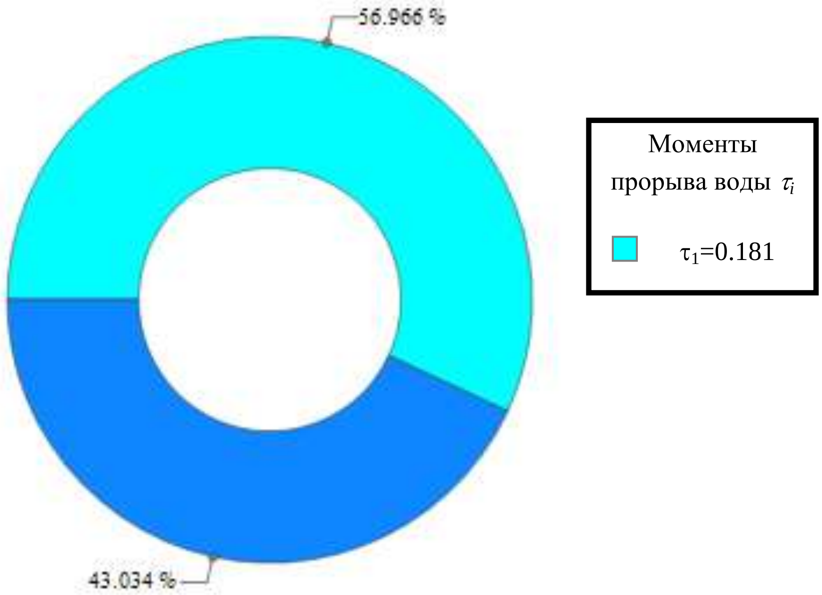


Рисунок 33. Диаграмма увеличения $К_{охв}$ к моментам первичного, вторичного и т.д. прорывов. Сектор, не обозначенный в легенде, соответствует доле, получаемой к моменту полного обводнения.

ДАННЫЕ ОБ ОБВОДНЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ ГРУПП ДОБЫВАЮЩИХ СКВАЖИН

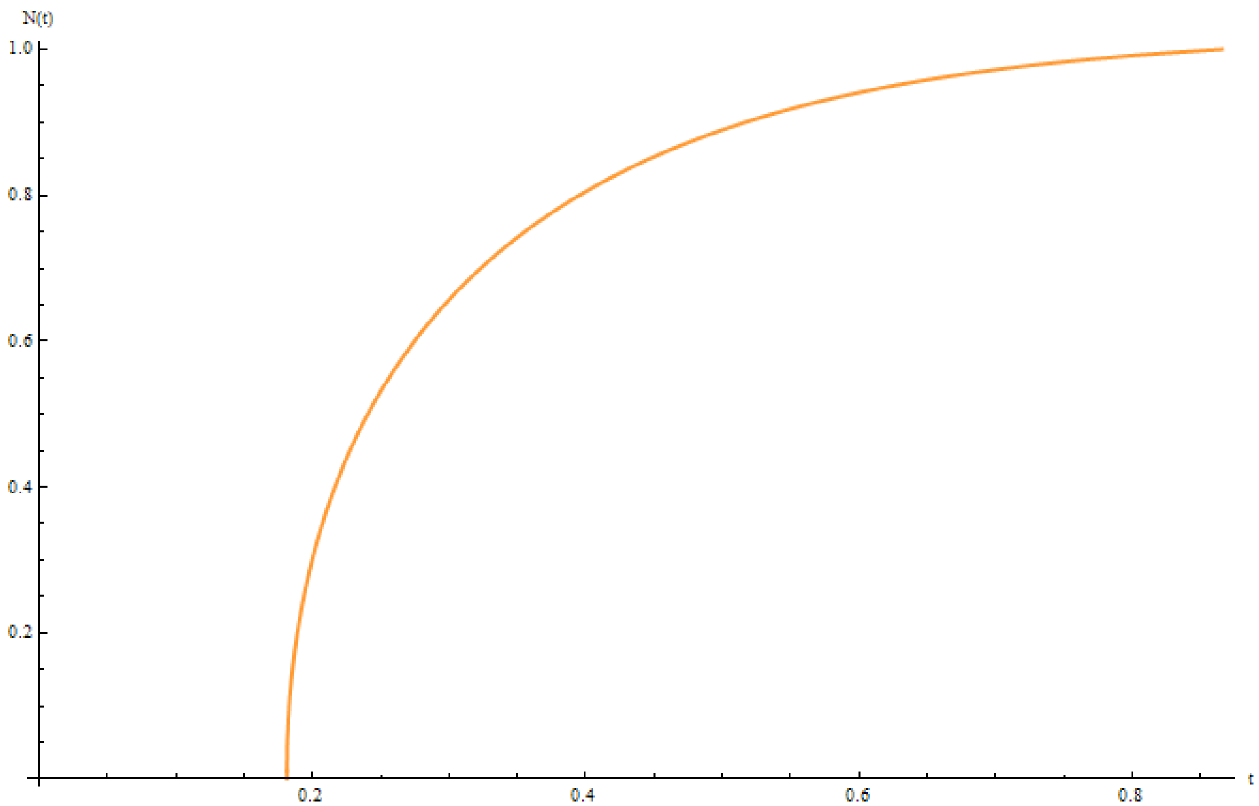


Рисунок 34. Динамика прорыва частиц воды в добывающие скважины различных групп: число трассеров N нормировано по общему количеству частиц, попавших в выбранную скважину за все время заводнения.

5. ШАХМАТНАЯ

ГЕОМЕТРИЯ ПОВТОРЯЮЩИХСЯ ЭЛЕМЕНТОВ И РАЗМЕЩЕНИЯ СКВАЖИН

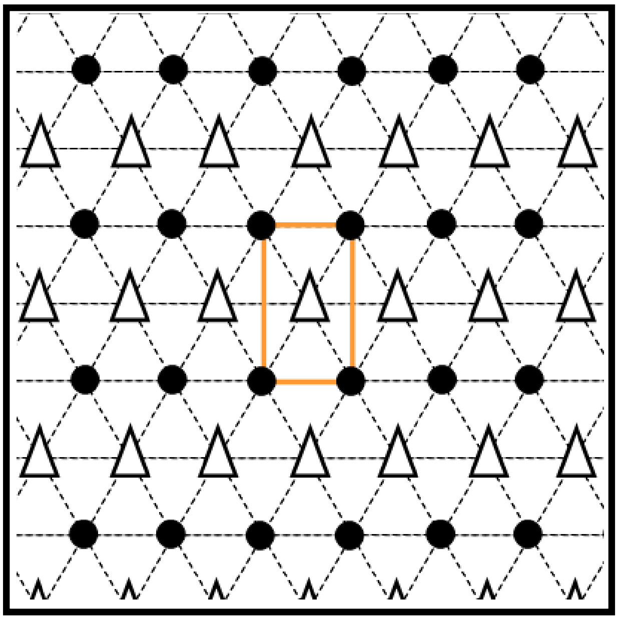


Рисунок 35. Схема выделения повторяющегося элемента (выделен желтым) схемы заводнения.

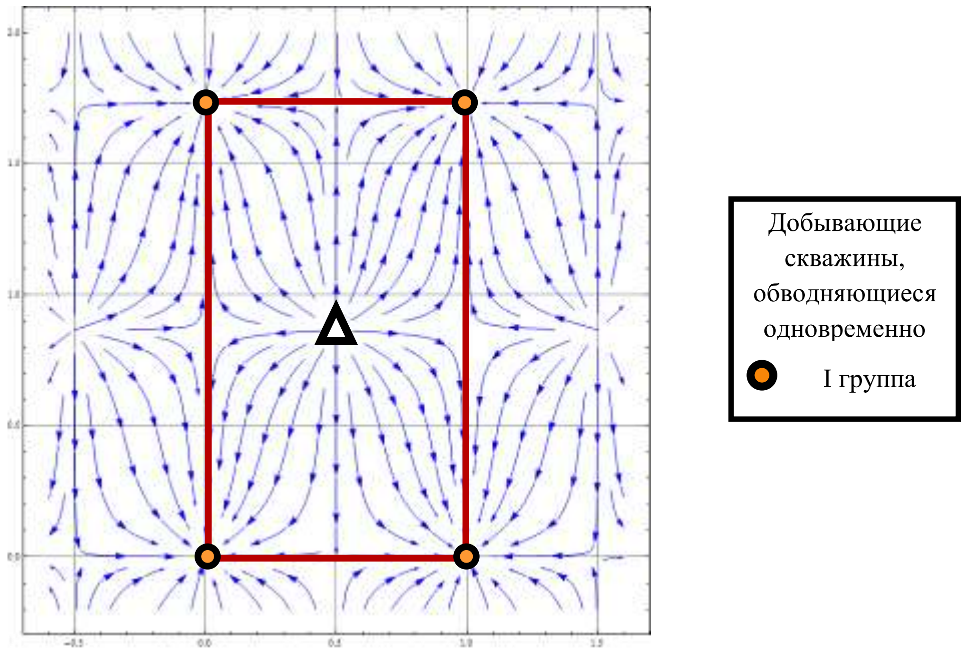


Рисунок 36. Схема линий тока и группировки скважин, обводняющихся одновременно. Повторяющийся элемент схемы заводнения обозначен желтым, а контур нагнетания нагнетательной скважины – красным: в случае их совпадения отображаются только границы контура нагнетания.

ЭВОЛЮЦИЯ ВНК ВО ВРЕМЕНИ И ДАННЫЕ О КОЭФФИЦИЕНТЕ $K_{ОХВ}$

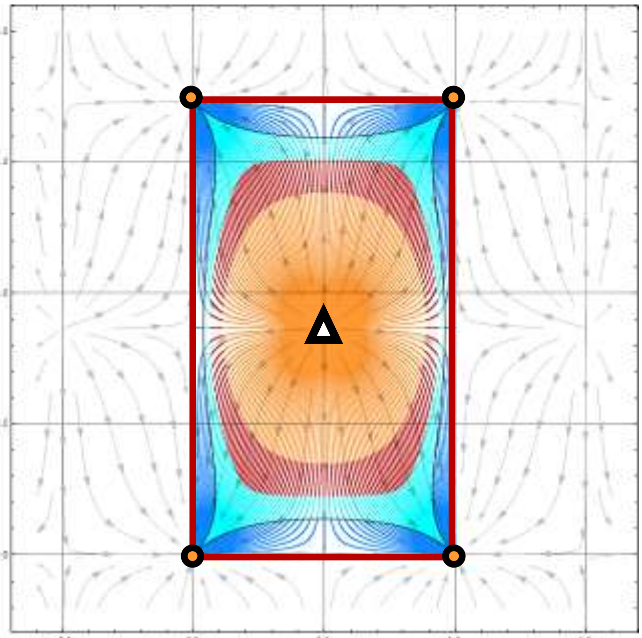


Рисунок 37. Картины положения ВНК на различных этапах заводнения – от половины момента первого прорыва τ_1 до полного обводнения всех добывающих скважин. Границы заводненной области в различные моменты прорыва τ_i воды выделены черным.

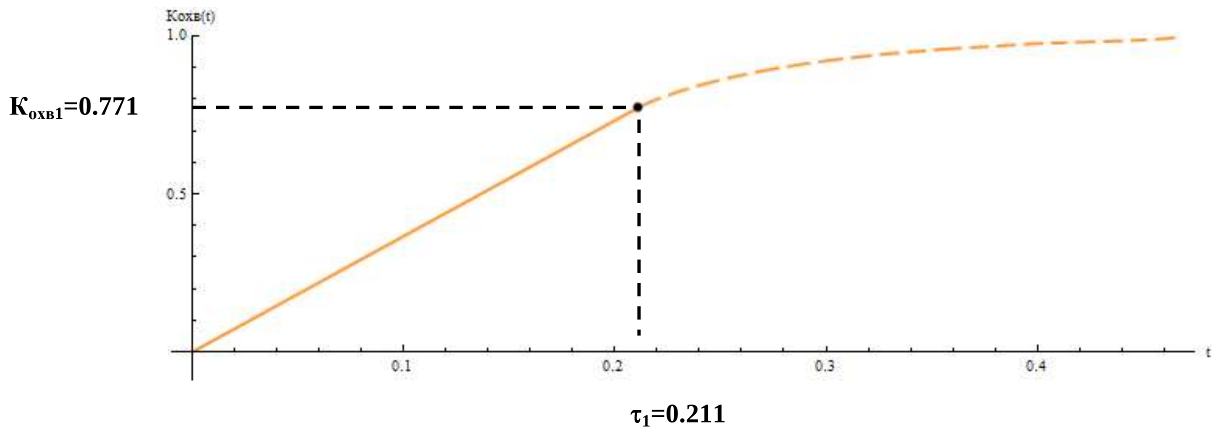


Рисунок 38. Динамика изменений $K_{охв}$ во времени (t). τ_1 соответствует моменту прорыва воды в скважины I-ой группы.

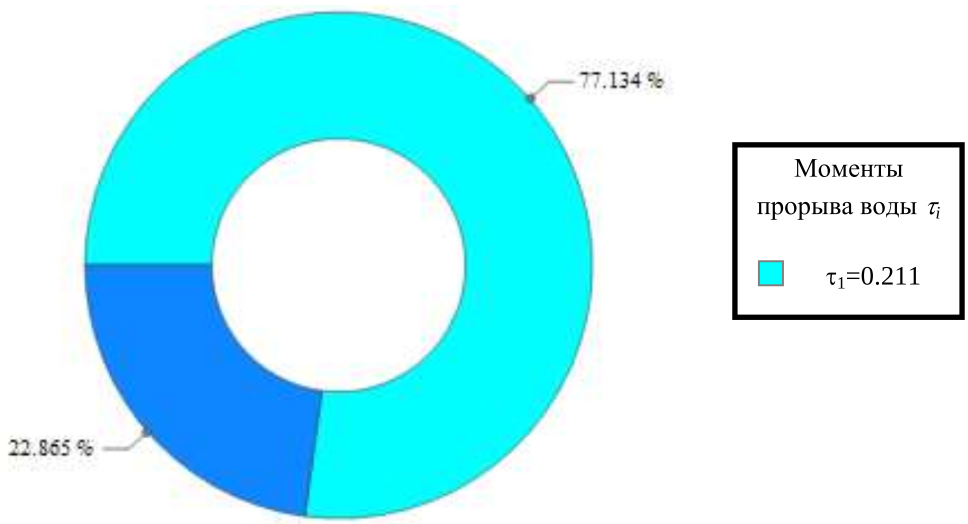


Рисунок 39. Диаграмма увеличения $К_{охв}$ к моментам первичного, вторичного и т.д. прорывов. Сектор, не обозначенный в легенде, соответствует доле, получаемой к моменту полного обводнения.

ДАННЫЕ ОБ ОБВОДНЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ ГРУПП ДОБЫВАЮЩИХ СКВАЖИН

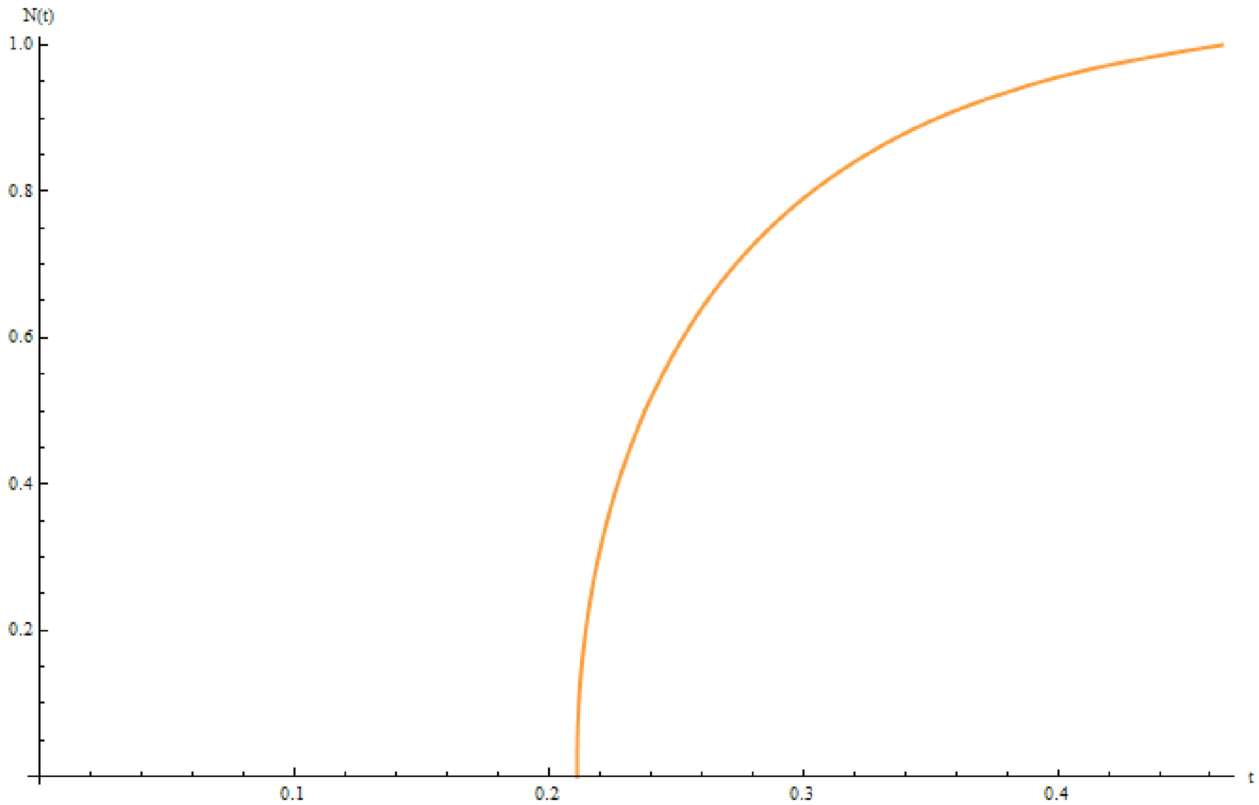
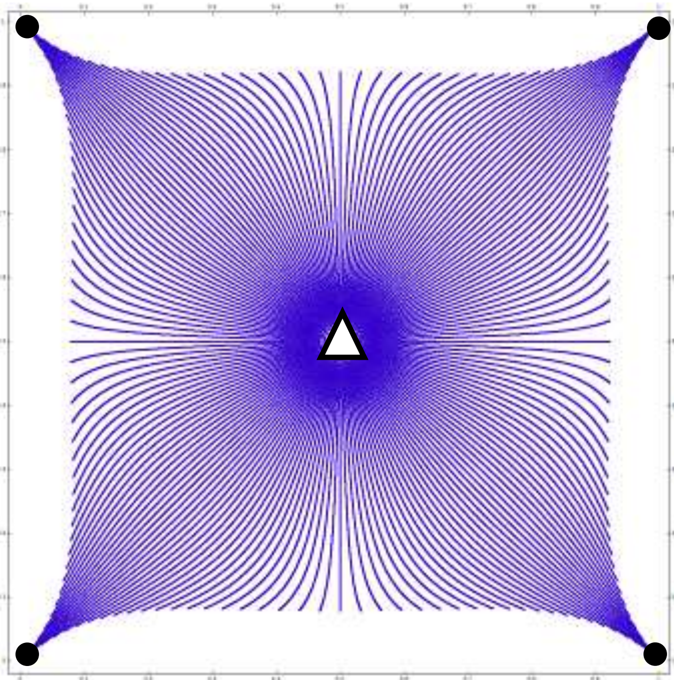


Рисунок 40. Динамика прорыва частиц воды в добывающие скважины различных групп: число трассеров N нормировано по общему количеству частиц, попавших в выбранную скважину за все время заводнения.

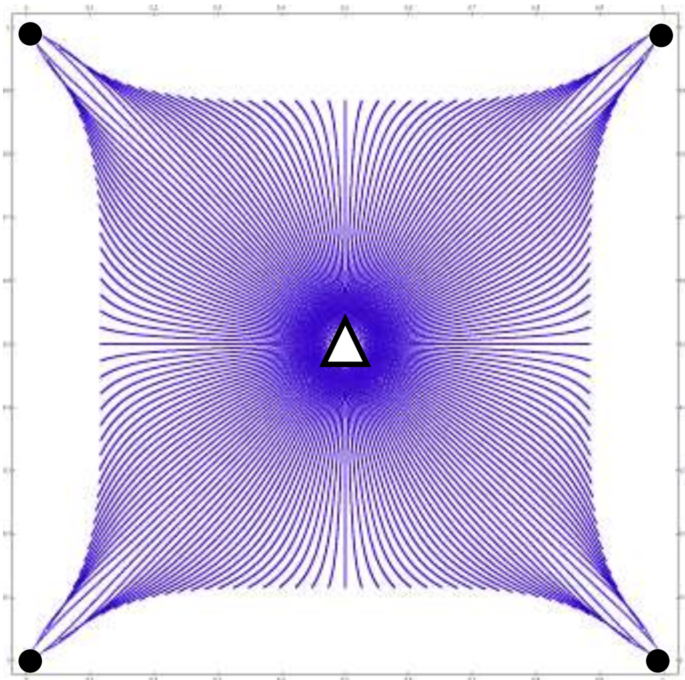
РЕЗУЛЬТАТЫ КАЧЕСТВЕННОГО И КОЛИЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СХЕМ ЗАВОДНЕНИЯ: СЛУЧАЙ «ПОРШНЕВОГО ВЫТЕСНЕНИЯ»

1. ПЯТИТОЧЕЧНАЯ ОБРАЩЕННАЯ



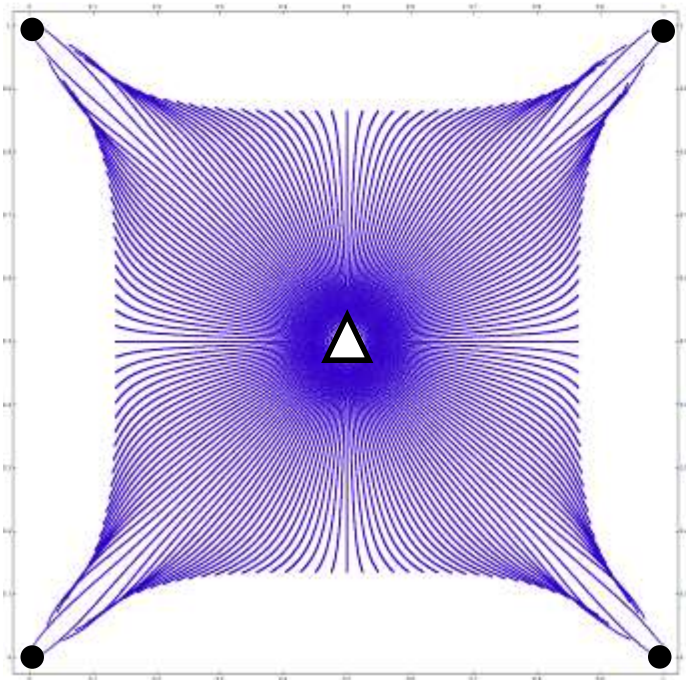
a)

κ=1 $t_{waterbreak}$= 0.1152



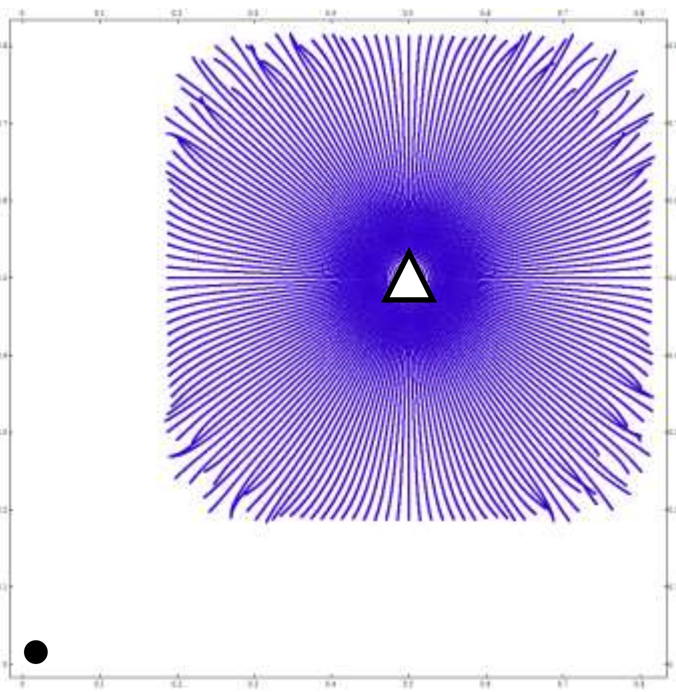
b)

κ=1/2 $t_{waterbreak}$= 0.1017



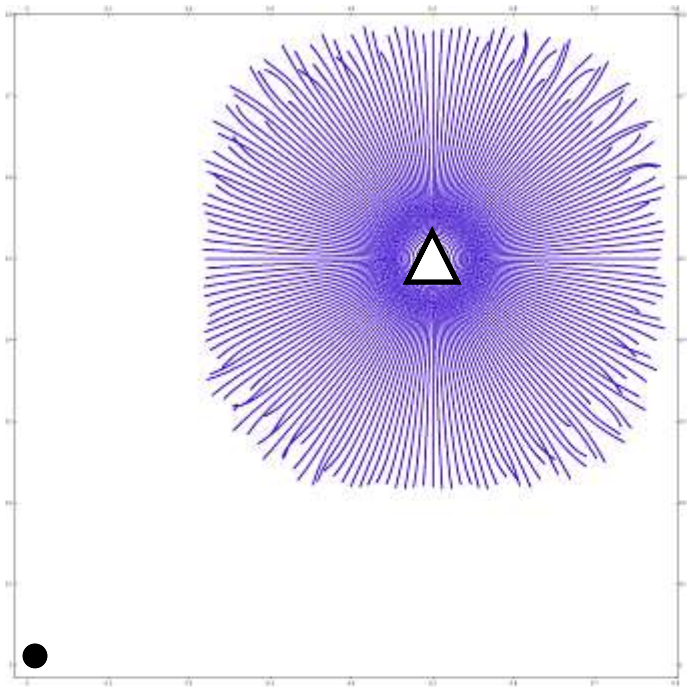
κ=1/3 $t_{waterbreak}$= 0.0960

c)



κ=1/4 t= 0.0600

d)

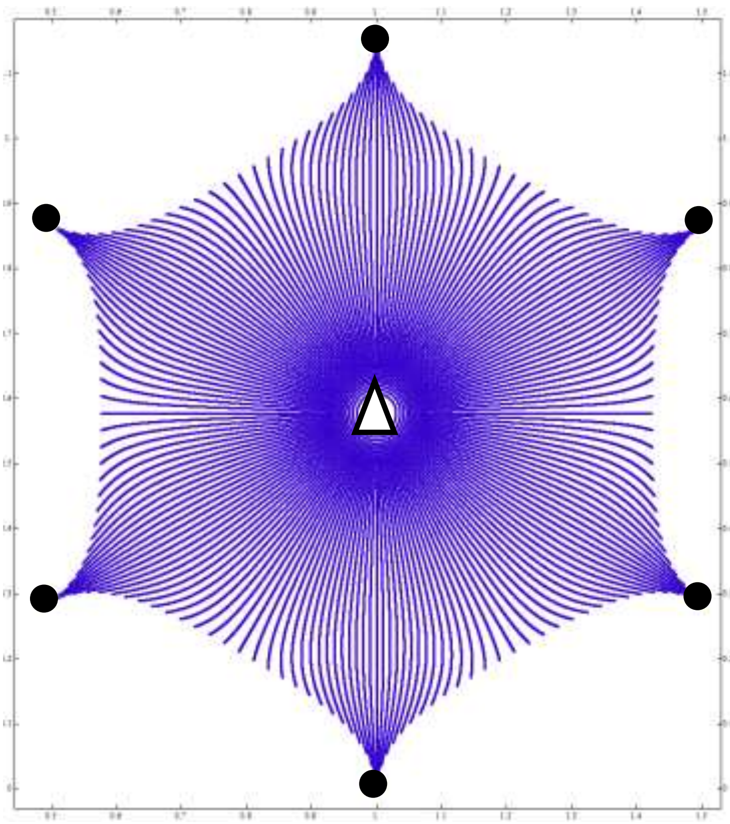


e)

к=1/5 t= 0.0450

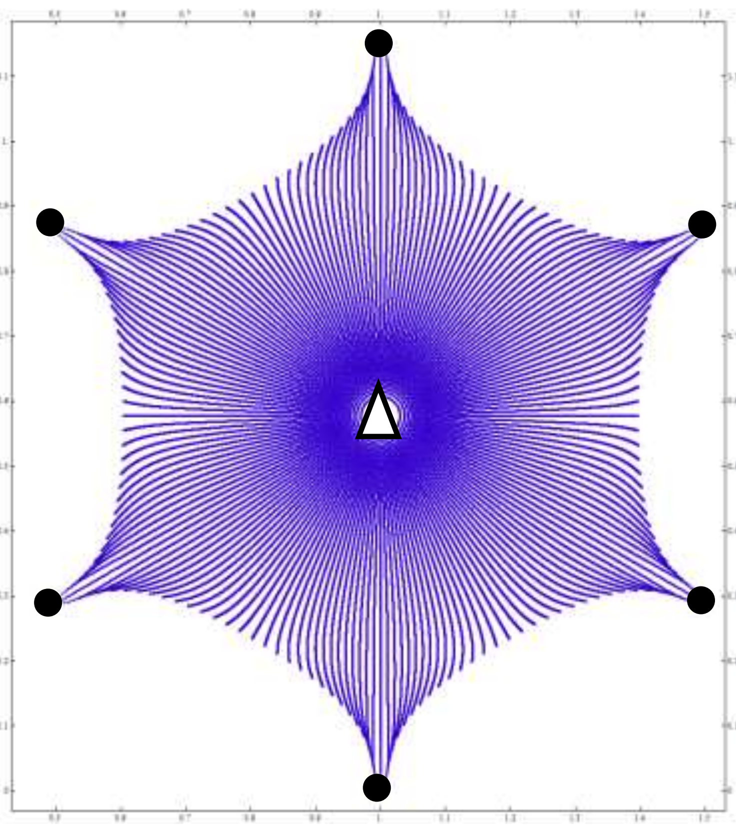
Рисунок 41. Картины заводненной области в момент $t_{waterbreak}$ начала обводнения добывающих скважин при пятиточечной обращенной схеме (способ расстановки скважин см. выше). Траектории движения трассеров выделены синим; добывающие скважины обозначены черными кругами, нагнетательные – белыми треугольниками. Вышеприведенные изображения демонстрируют негативное влияние высокой разницы в вязкостях (параметр к): с увеличением вязкости нефти (при неизменной вязкости воды) наблюдается уменьшение площади, охватываемой заводнением (изображения a – c), а также – нарушение устойчивости водонефтяного контакта с образованием «вязких пальцев» по всему фронту вытеснения (изображения d - e). Время начала обводнения не было подсчитано для последних двух значений параметра к.

2. СЕМИТОЧЕЧНАЯ ОБРАЩЕННАЯ



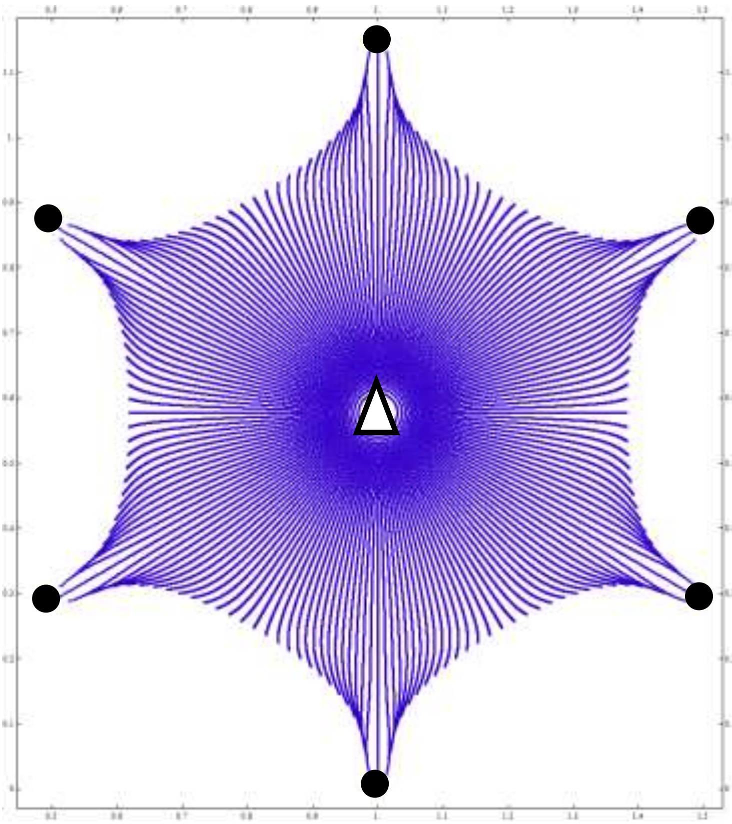
a)

κ=1 $t_{waterbreak}$= 0.0516



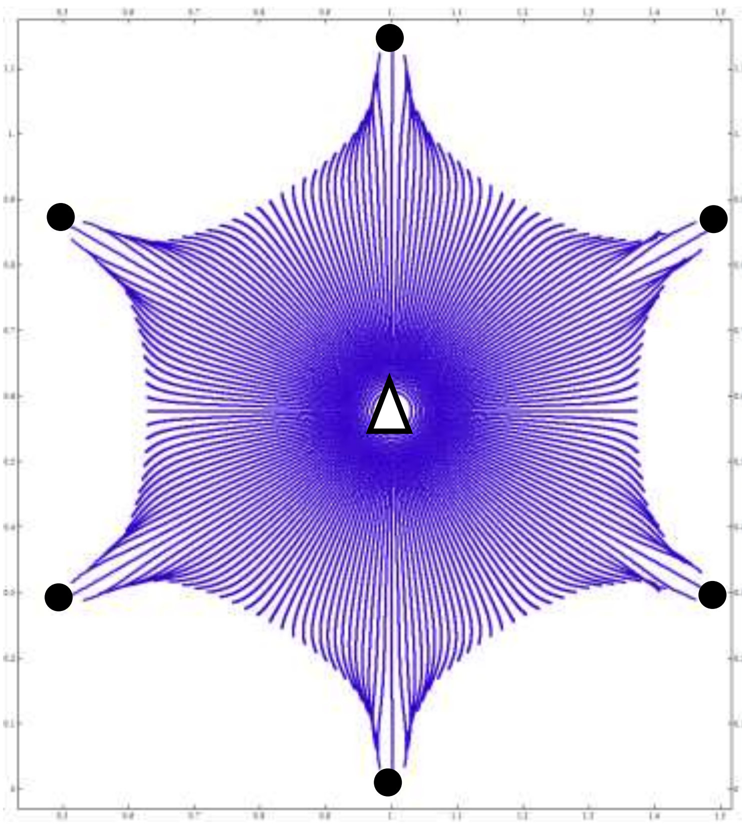
b)

κ=1/2 $t_{waterbreak}$= 0.0472



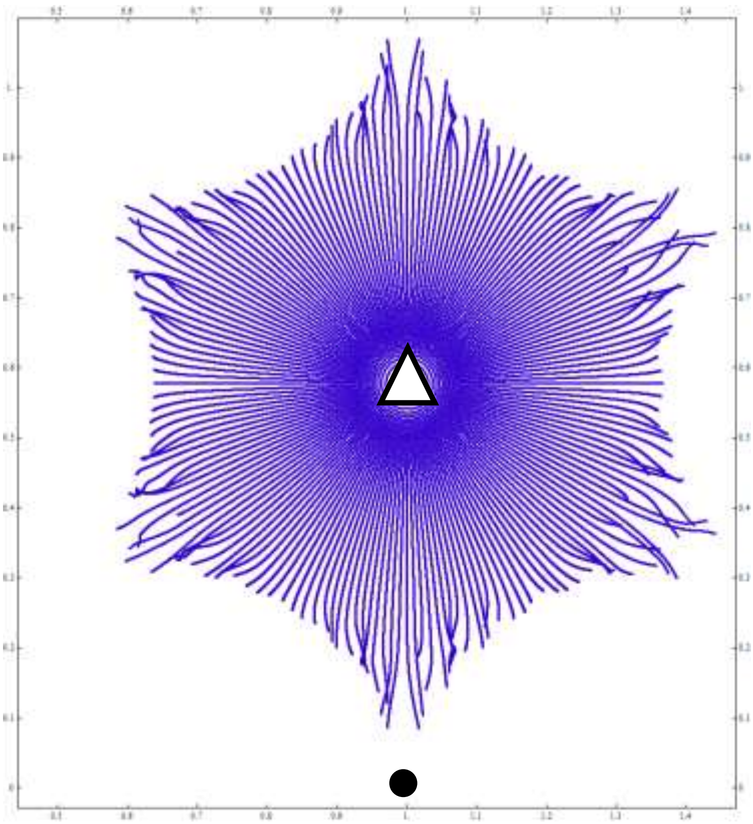
c)

κ=1/3 $t_{waterbreak}$= 0.0452



d)

κ=1/4 $t_{waterbreak}$= 0.0439

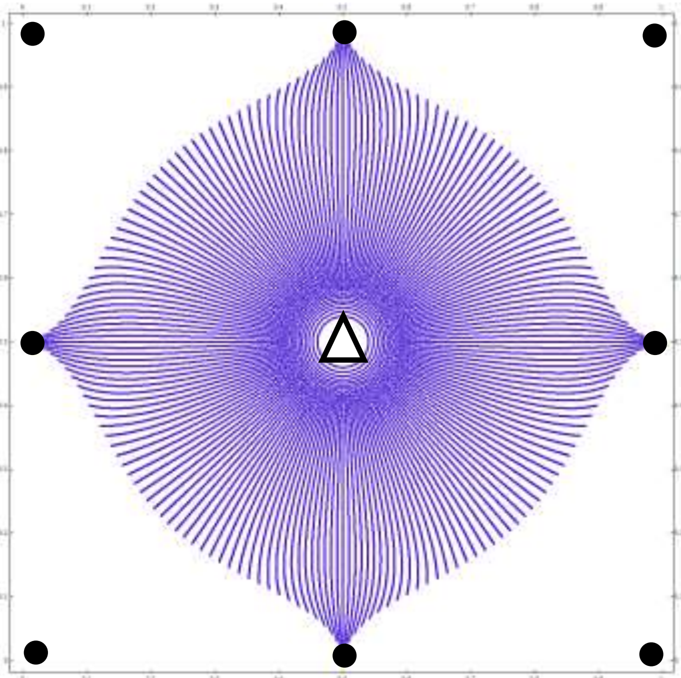


е)

κ=1/5 t= 0.0410

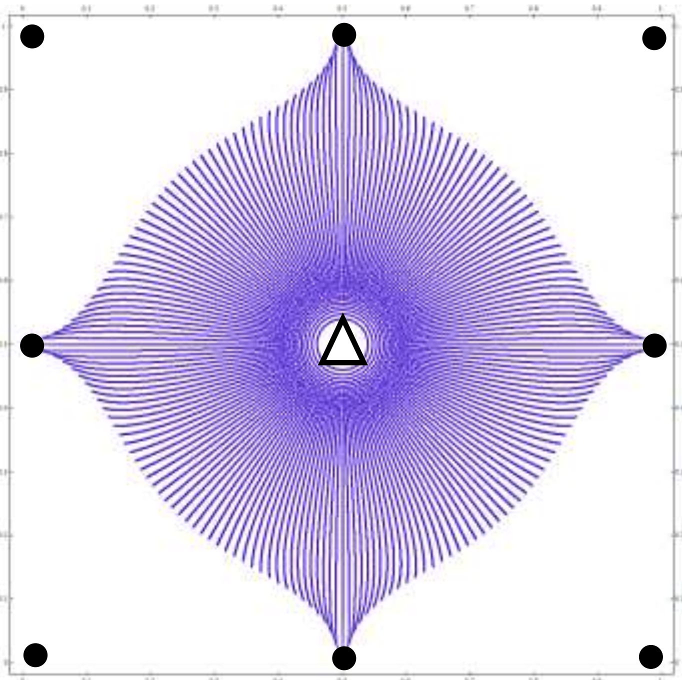
Рисунок 42. Картины заводненной области в момент $t_{waterbreak}$ начала обводнения добывающих скважин при семиточечной обращенной схеме. Способ обозначения траекторий трассеров, добывающих и нагнетательных скважин аналогичен Рисунку 41. Характер зависимости площади охвата заводнением и величины времени начала обводнения добывающих скважин от параметра κ также аналогичен рассмотренному выше случаю. Изображение е) соответствует ситуации образования «вязких пальцев» на фронте вытеснения для семиточечной обращенной схемы.

3. ДЕВЯТИТОЧЕЧНАЯ ОБРАЩЕННАЯ



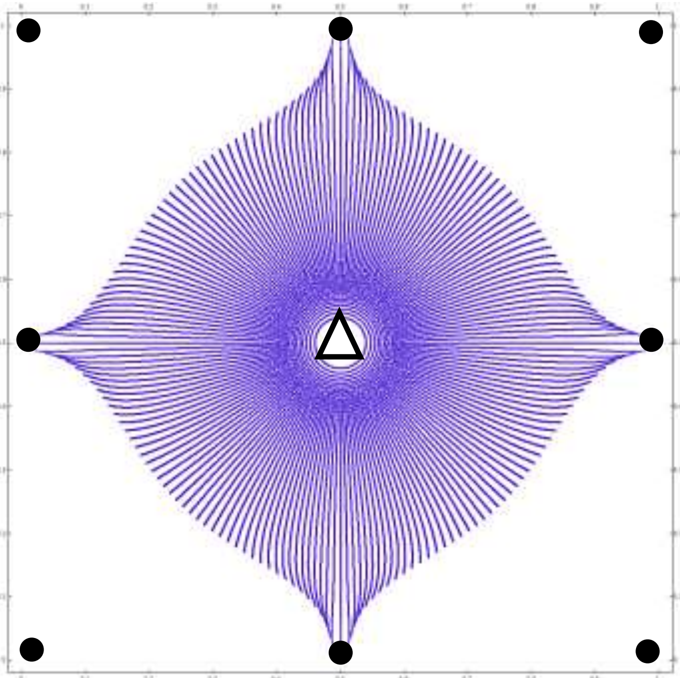
$\kappa=1$ $t_{waterbreak} = 0.0277$

a)



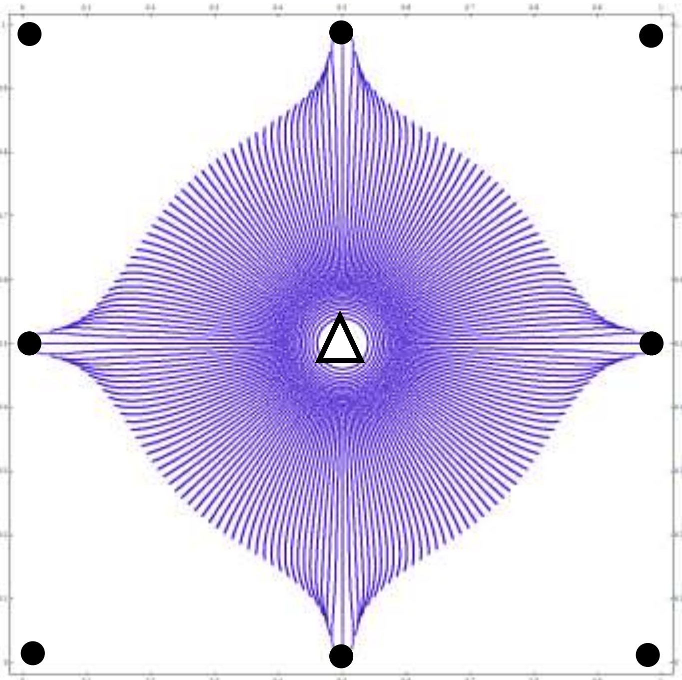
$\kappa=1/2$ $t_{waterbreak} = 0.0252$

b)



c)

κ=1/3 $t_{waterbreak}$= 0.0240

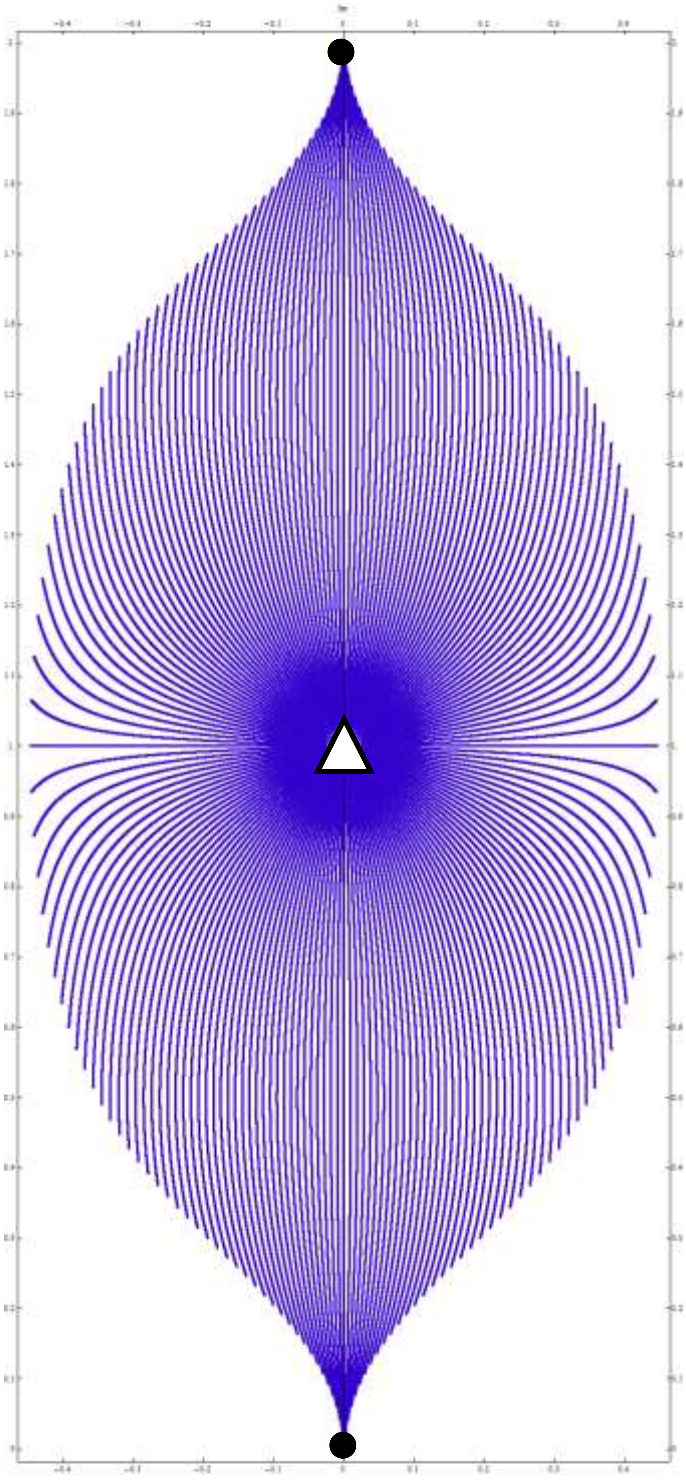


d)

κ=1/4 $t_{waterbreak}$= 0.0232

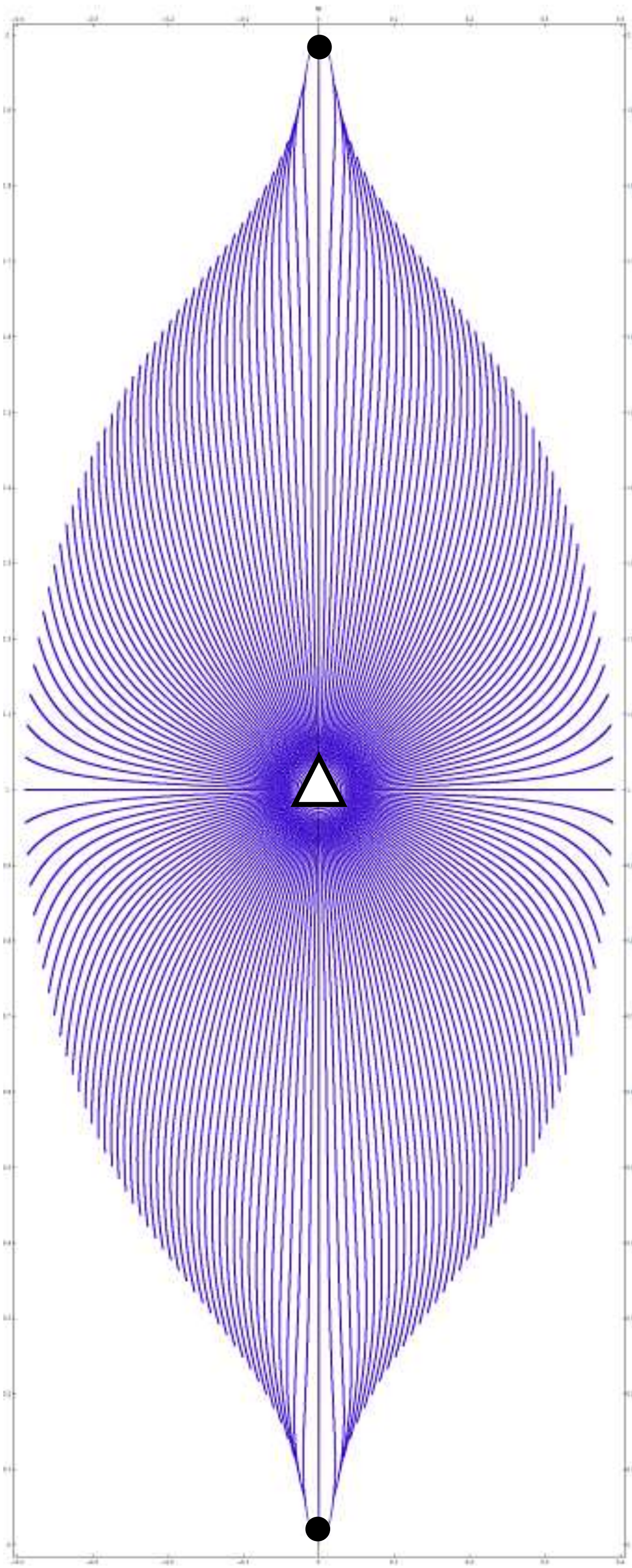
Рисунок 43. Картины заводненной области в момент $t_{waterbreak}$ начала обводнения при девятиточечной обращенной схеме. Подобно рассмотренным выше способам расстановки скважин в данном случае наблюдается закономерное ухудшение характеристик заводнения (уменьшение площади охвата и продолжительности безводного периода добычи нефти) при увеличении вязкости нефти.

4. ЛИНЕЙНАЯ ОДНОРЯДНАЯ ЛОБОВАЯ



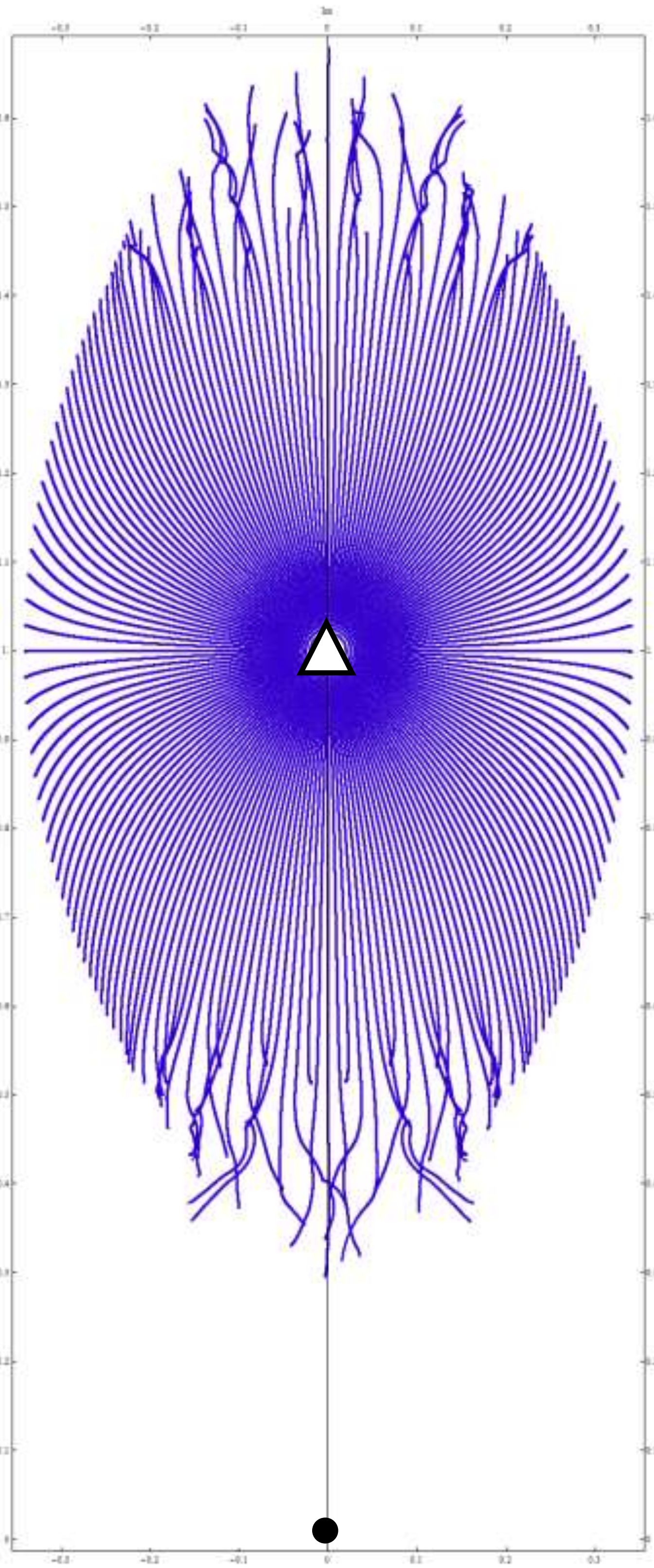
κ=1 $t_{waterbreak}$= 0.1820

а)



b)

κ=1/2 $t_{waterbreak}$= 0.1500

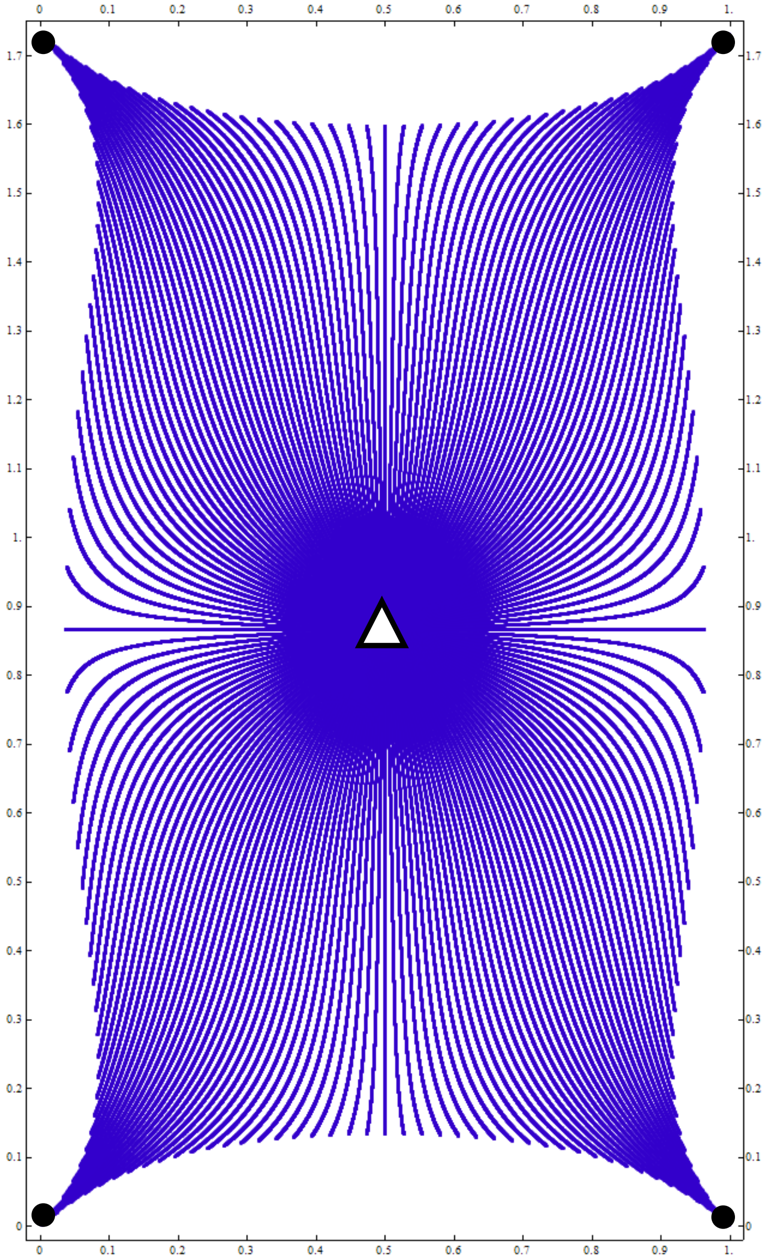


c)

κ=1/3 t= 0.1100

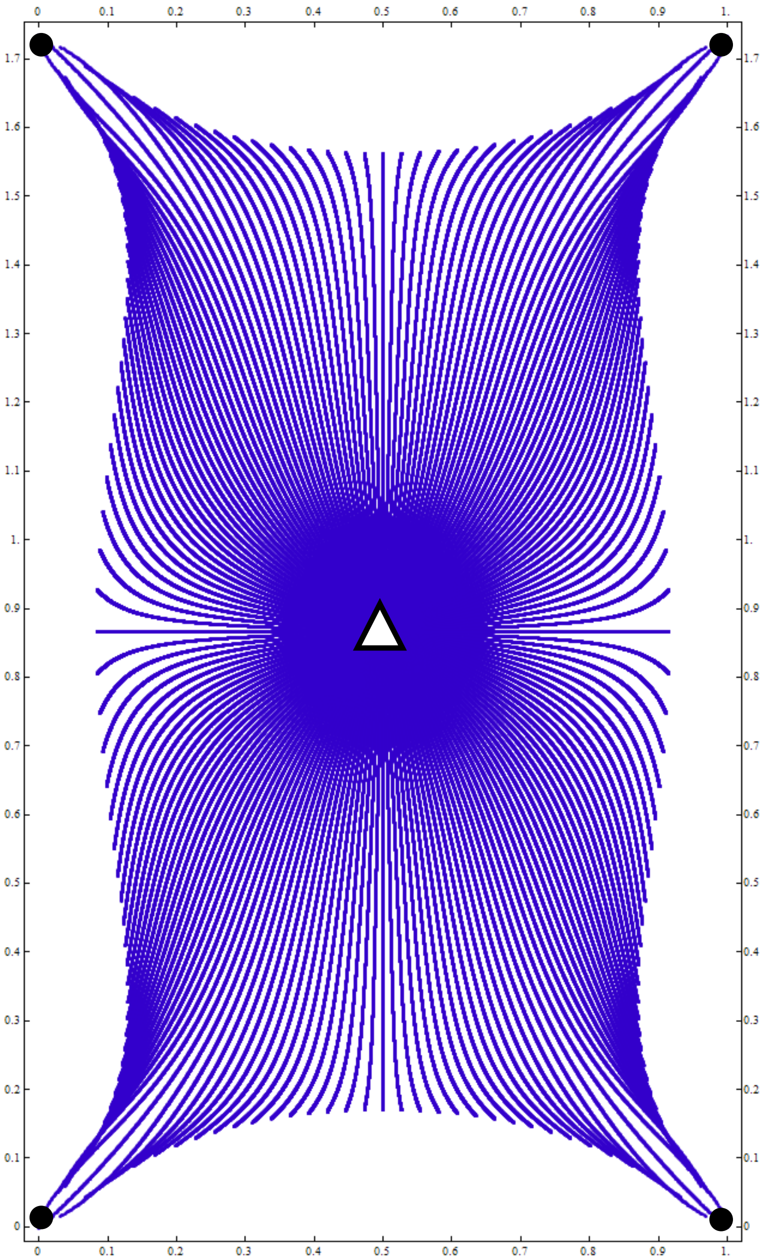
Рисунок 44. Картины заводненной области в момент $t_{waterbreak}$ при лобовой рядной схеме. Аналогично рассмотренным выше случаям, увеличение вязкости нефти приводит к уменьшению площади охвата заводнением, времени начала обводнения добывающих скважин, а также - к появлению «вязких пальцев» на фронте вытеснения при определенном значении параметра к.

5. ШАХМАТНАЯ



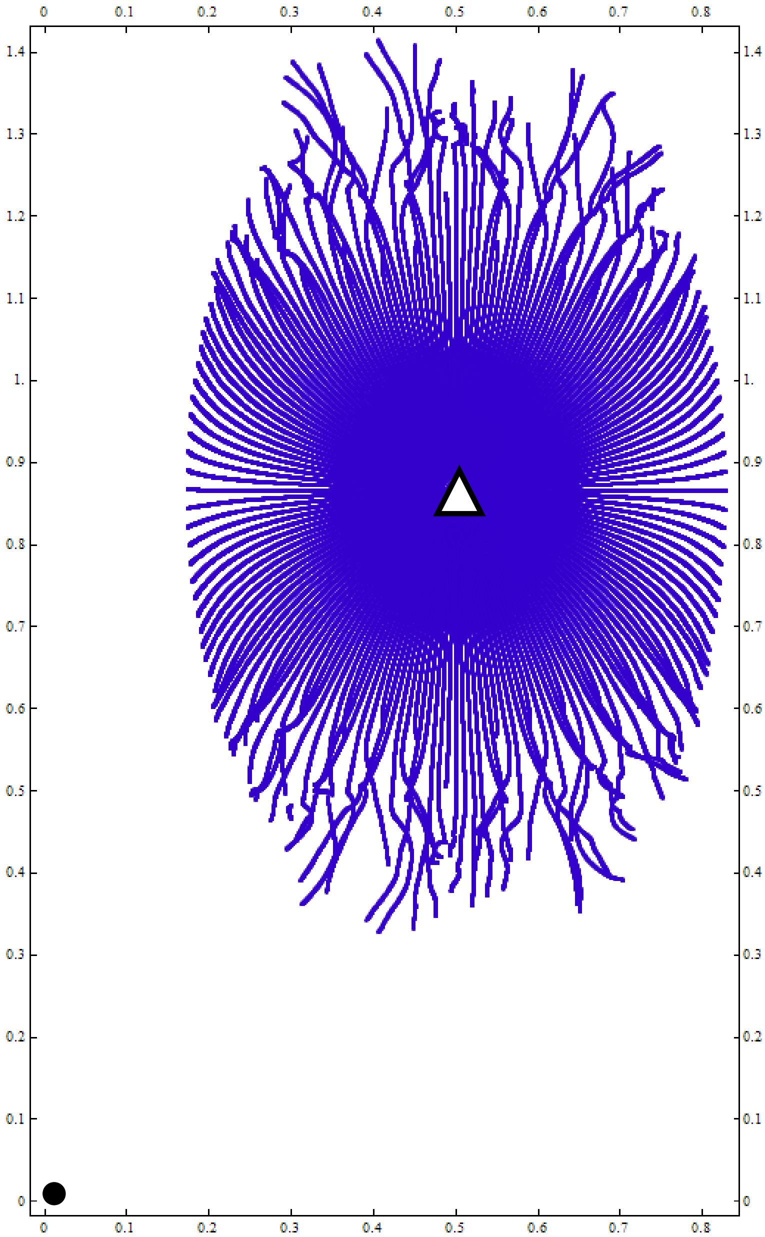
κ=1 $t_{waterbreak}$= 0.2124

а)



κ=1/2 $t_{waterbreak}$= 0.1858

b)



κ=1/3 t= 0.0900

c)

Рисунок 45. Картины заводненной области в момент $t_{waterbreak}$ при шахматной расстановке скважин. В данном случае также наблюдается ранее указанная закономерность: с уменьшением величины κ при переходе от а) к с) наблюдается снижении показателей заводнения с последующим нарушение устойчивости фронта вытеснения и образованием «вязких пальцев».

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015610136

«ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ЗАВОДНЕНИЯ: КАЧЕСТВЕННЫЙ И КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ»

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный университет» (RU)***

Автор: ***Касаткин Андрей Евгеньевич (RU)***

Заявка № **2014619585**

Дата поступления **23 сентября 2014 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***12 января 2015 г.***

Врио руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий

Форма № 43 ПР, БД, ТП-2011

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ
(РОСПАТЕНТ)

Бережковская наб., 30, корп. 1, Москва, Г-59, ГСП-3, 125993. Телефон (8-499) 240-60-15. Факс (8-495) 531-63-18

На № 104-2515-15 от 04.12.2014
Наш № 2014Э11352

При переписке следует ссылаться на наш № и сообщать дату получения настоящей корреспонденции от 12.01.2015

443011,
Самарская обл., г. Самара,
ул. Академика Павлова, 1, ФГБОУ ВПО
СамГУ, И.о. ректора И.К.Андрончеву

УВЕДОМЛЕНИЕ
о государственной регистрации

Ставим Вас в известность о том, что программа для ЭВМ: «ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ЗАВОДНЕНИЯ: КАЧЕСТВЕННЫЙ И КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ»

(21) по заявке № 2014619585/69

(22) Дата поступления заявки 23.09.2014

(71) Заявитель(и) Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный университет»

внесена в Реестр программ для ЭВМ, регистрационный № 2015610136 от 12.01.2015

Заявка рассмотрена с учетом поступивших 10.12.2014 дополнительных материалов.

Приложение: свидетельство о государственной регистрации на 1 л. в 1 экз.

Врио руководителя Кирий Л.Л.

Губкин Я.В. (499)240-33-42

«УТВЕРЖДАЮ»
Генеральный директор
ООО «НефтеСтрой Проект»
_____________ С.В. Сутягин
«_____»_____________ 2015 г.

АКТ О ВНЕДРЕНИИ
результатов диссертационного исследования
Касаткина Андрея Евгеньевича

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ»

Мы, нижеподписавшиеся, представители ООО «Нефтестройпроект» - заместитель директора по НИР, к.т.н., с.н.с. Н.Б. Сопронюк и ГИП отдела «Проектирование разработки» Н.Н. Пахмелкина составили настоящий акт о том, что программный комплекс «ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ЗАВОДНЕНИЯ: КАЧЕСТВЕННЫЙ И КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ», созданный при выполнении данного диссертационного исследования и зарегистрированный в Реестре программ для ЭВМ (регистрационный номер 2015610136 от 12.01.2015 г.), используется в практике работы ООО «НефтеСтрой Проект» при проектировании систем разработки нефтяных месторождений.

Заместитель Директора
по Научно-Исследовательской Работе
_____________ Н.Б. Сопронюк
«_____»_____________ 2015 г.

ГИП отдела «Проектирование разработки»
_____________ Н.Н. Пахмелкина
«_____»_____________ 2015 г.

«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по учебной работе
ФГБОУ ВПО «СамГТУ»
__________ Д.А. Деморецкий
«_____»__________ 2015 г.

АКТ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ
результатов диссертационного исследования
Касаткина Андрея Евгеньевича

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ»

Мы, нижеподписавшиеся, представители ФГБОУ ВПО «Самарский государственный технический университет» - декан нефтетехнологического факультета д.т.н. профессор Тян В.К. и заведующий кафедрой «Разработка и эксплуатация нефтяных и газовых месторождений» к.х.н., доцент Коновалов В.В. составили настоящий акт о том, что программный комплекс «ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ЗАВОДНЕНИЯ: КАЧЕСТВЕННЫЙ И КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ», созданный при выполнении диссертационного исследования, используется в учебном процессе кафедры РиЭНиГМ СамГТУ при подготовке специалистов по направлению 21.03.01 — Нефтегазовое дело.
Указанный программный комплекс включен в курс «Компьютерные методы моделирования месторождений углеводородов» данного направления и используется в нем при выполнении курсовых работ по моделированию и расчету процессов заводнения при различных схемах расположения нагнетательных и добывающих скважин.

Декан НТФ
__________ Тян В.К.
«19» июня 2015 г.

Заведующий кафедрой РиЭНиГМ
__________ Коновалов В.В.
«_____»__________ 2015 г.