

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи

Крюков Юрий Александрович

**РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
В СЛОЕ С МЕЖФАЗНОЙ ГРАНИЦЕЙ**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:

Клюев Николай Ильич

доктор технических наук, профессор

Самара – 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1 Аналитический обзор	10
Глава 2 Разработка методов математического моделирования для анализа колебаний свободной поверхности жидкости в цилиндрическом канале	28
2.1 Методы математического моделирования для вертикального цилиндрического канала	29
2.1.1 Постановка задачи	29
2.1.2 Задача Коши как модель для приближенного метода	31
2.1.3 Математическая модель для базового метода	32
2.1.4 Численное решение.....	33
2.1.5 Решение в Ansys Fluent	38
2.1.6 Результаты	43
2.2 Метод для вертикального цилиндрического канала с удлиннителями. 48	48
2.2.1 Постановка задачи	48
2.2.2 Постановка задачи для Ansys Fluent	50
2.2.3 Результаты решения для канала с удлиннителями	51
2.3 Выводы по второй главе.....	54
Глава 3 Метод математического моделирования двухсредного пограничного слоя на плоской пластине	55
3.1 Приближенный аналитический метод решения для задачи внутреннего пограничного слоя.....	56
3.1.1 Нулевое приближение	57
3.1.2 Первое приближение	59

3.2	Метод для решения внешнего пограничного слоя.....	63
3.2.1	Постановка задачи и преобразование расчетной области.....	63
3.2.2	Численное решение.....	66
3.3	Сопряженная задача и программа для её решения.....	74
3.4	Решение в Ansys Fluent.....	76
3.5	Результаты вычислительного эксперимента.....	79
3.6	Выводы по третьей главе	82
Глава 4	Метод математического моделирования движения частицы в ламинарном пограничном слое плоской пластины.....	83
4.1	Метод с выбором активно действующих сил	83
4.2	Моделирование движения частицы в Ansys Fluent.....	86
4.3	Сравнение расчетов и результаты решения.....	89
4.4	Выводы по четвертой главе	93
	Заключение.....	94
	Список литературы.....	96
	ПРИЛОЖЕНИЕ А Код программы для базовой модели в среде Maple	115
	ПРИЛОЖЕНИЕ Б Код программы для двухсредного пограничного слоя на пластине в среде Maple.....	118
	ПРИЛОЖЕНИЕ В Код программы для задачи о движении частицы в пограничном слое в среде Maple	126
	ПРИЛОЖЕНИЕ Г Код UDF , необходимый для инициализации граничных условий в пакете Ansys Fluent	135
	ПРИЛОЖЕНИЕ Д Акт о внедрении	140
	ПРИЛОЖЕНИЕ Е Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.....	142
	ПРИЛОЖЕНИЕ Ж Акт о внедрении в учебный процесс	143

Введение

Актуальность работы. К задачам с межфазной границей приводят довольно многие физические явления или процессы, сопровождающие эксплуатацию техники. Среди методов исследования таких задач особо выделяется математическое моделирование.

До недавнего времени математическое моделирование в полной постановке (с использованием уравнений Навье-Стокса) сдерживалось скромными возможностями вычислительной техники, связанными с необходимостью выполнения трудоемких вычислений на «тяжелых» (больших по объему, подвижных, деформируемых, неструктурированных и т.д.) сетках и недостаточно развитыми численными методами решения этих уравнений. С развитием супер-ЭВМ эти ограничения во многом снимаются. Так, в настоящее время активно развиваются универсальные вычислительные пакеты для моделирования физических процессов, позволяющие в самой общей математической постановке ставить начально-краевые задачи в произвольной области сплошной среды и успешно решать их. Например, это зарубежный Ansys Fluent или отечественный Логос и мн. др. К достоинствам пакетов относится то, что они обеспечивают моделирование самой подробной физической картины. Недостаток заключается в отсутствии исчерпывающих методических подходов к решению новых задач и необходимости использования ресурсов супер-ЭВМ и дорогостоящего программного обеспечения.

Альтернативный (традиционный) подход в математическом моделировании основан на принятии в постановку задачи некоторых допущений, определяемых физикой процесса, которые ведут к упрощению исходных уравнений Навье-Стокса. Это является преимуществом подхода, поскольку численное решение упрощенных уравнений вполне доступно на современных персональных ЭВМ за довольно короткое время. Сложность заключается в том, что заранее неизвестно, как отразятся принятые допущения на общей характеристике течения.

В современных исследованиях, как правило, придерживаются одного из двух указанных подходов. Между тем, при решении новых задач подходы взаимосвязаны (решение уравнений Навье-Стокса предполагает в качестве тестирования решение упрощенных уравнений) и дополняют друг друга (анализ результатов, очевидно, упрощается в случае приближенного моделирования, тогда как в полной постановке виден вклад принятых допущений в общую картину течения).

Таким образом, актуальность исследований диссертации заключается в интеграции обозначенных подходов моделирования при решении новых задач с межфазной границей и ламинарным течением вязкой несжимаемой жидкости, имеющих практическое значение для авиационно-космической техники.

Цель диссертационной работы состоит в разработке методов математического моделирования ламинарных течений в слое вязкой несжимаемой жидкости с межфазной границей с применением приближенного аналитического метода разложения решения в ряд по малому параметру, конечно-разностного метода и метода конечных объемов; создании программного обеспечения для проведения вычислительных экспериментов и анализа характеристик течений.

Научная новизна диссертационной работы состоит в следующем:

1. Разработан и исследован метод математического моделирования неустановившегося и квазистационарного течений в цилиндрическом канале с расходом массы, позволяющий прогнозировать рассогласование уровня свободной поверхности жидкости в канале системы управления расходом топлива относительно уровня в баке ракеты-носителя и обосновать расположение датчиков уровня свободной поверхности в канале системы управления с целью минимизации ошибки при определении реального уровня топлива в баке.
2. Разработан и исследован метод математического моделирования двухсредного неперемешивающегося пограничного слоя со скользящей межфазной границей, позволяющий находить его характеристики в зависимости от нескольких параметров - чисел Рейнольдса внутреннего и внешнего

пограничных слоев и угла наклона плоской полубесконечной пластины, что отличает его от известных методов.

3. Модифицирован алгоритм разностного решения квазилинейного одномерного параболического уравнения с постоянными коэффициентами, в который введен итерационный процесс, позволяющий определить неизвестную функцию источника.

4. Предложена нелинейная неявная конечно-разностная схема для системы интегро-дифференциальных уравнений пограничного слоя, позволяющая определить функцию толщины пограничного слоя из отдельного уравнения и отказаться от итерационных процедур наращивания сетки на каждом маршевом слое до неизвестной границы пограничного слоя в поперечном направлении (как в известном алгоритме). Получена оценка аппроксимации, проведено исследование устойчивости и сходимости для разностной схемы.

5. В среде Maple создана программа для ЭВМ «Lambola plate wilifi», в которой впервые получены характеристики двухсредного пограничного слоя со скользящей межфазной границей в зависимости от трех параметров - чисел Рейнольдса внутреннего и внешнего пограничных слоев и угла наклона плоской поверхности. В основе программы – реализация разработанных в диссертационной работе методов математического моделирования двухсредного пограничного слоя со скользящей межфазной границей. Преимуществом и особенностью программы является простота использования и более быстрое получение результатов (за счет решения упрощенных уравнений) по сравнению с программным комплексом Ansys Fluent.

На защиту выносятся:

1. Метод математического моделирования неустановившегося и квазистационарного течений в цилиндрическом канале с расходом массы для определения уровня свободной поверхности жидкости в канале системы управления расходом топлива ракеты-носителя.

2. Метод математического моделирования двухсредного неперемешивающегося пограничного слоя со скользящей межфазной границей на

плоской полубесконечной пластине, построенный в рамках теории пограничного слоя.

3. Приближенный аналитический метод разложения решения в ряд по малому параметру для математической модели внутреннего пограничного слоя.
4. Метод разностного решения второй краевой задачи для квазилинейного одномерного параболического уравнения с постоянными коэффициентами.
5. Метод разностного решения системы из трех нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.
6. Разработанная программа «Lambola plate wilifi», предназначенная для проведения вычислительного эксперимента по определению характеристик двухсредного пограничного слоя со скользящей межфазной границей в зависимости от трех параметров - чисел Рейнольдса внутреннего и внешнего пограничных слоев и угла наклона плоской пластины.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Теоретически значимыми результатами, полученными в диссертации, являются новые методы математического моделирования ламинарных течений вязкой несжимаемой жидкости в слое с межфазной границей для актуальных задач авиационно-космической техники.

Прикладная значимость результатов работы связана с использованием программного обеспечения, разработанного на основе предложенных в диссертации методов математического моделирования. Программы позволяют прогнозировать гидродинамические процессы и оптимальное расположение емкостных датчиков уровня (с позиции минимизации ошибки их показаний) в уровнемере системы управления расходом топлива ракеты-носителя, а также оценивать аэродинамические характеристики плоских элементов корпуса летательного аппарата в случае появления на них жидкой пленки (при выпадении осадков).

Связь диссертационной работы с планами научных исследований.

Работа выполнялась в рамках тематического плана НИР Самарского государственного университета по теме «Разработка методов исследования

гидродинамики топлива в баках перспективных ракет-носителей» (гос. Рег. № 01200961335) и по теме «Влияние атмосферной влаги на сопротивление трения элементов корпуса ракет-носителей» (гос. Рег. № 01201277996).

Внедрение. Результаты работы использовались в проектных расчетах профильных отделов АО «РКЦ «Прогресс» и внедрены в учебный процесс кафедры «Математического моделирования в механике» Самарского университета в курсе «Математического моделирования процессов взаимодействия потоков жидкости и газа», читаемом для магистров по профессиональной образовательной программе направления 010800 Механика и математическое моделирование (акты об использовании в приложении диссертации прилагаются).

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается корректностью применяемых моделей механики сплошной среды и используемых допущений при разработке методов математического моделирования, а также хорошим согласованием численных результатов, полученных с помощью разных методов математического моделирования и сравнением численных решений рассматриваемых краевых задач с известными аналитическими результатами в частных случаях.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на российских, международных конференциях, семинарах и симпозиумах: симпозиум с международным участием «Самолетостроение России. Проблемы и перспективы». Самара, СГАУ, 2-5 июня 2012г.; XVI Всероссийский семинар по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара, СГАУ, 18-20 июня 2013г.; III Всероссийская научно-техническая конференция «Актуальные проблемы ракетно-космической техники» (III Козловские чтения). 16-20 сентября 2013 года, ФГУП ГНП РКЦ «ЦСКБ-Прогресс», г. Самара; XVIII Всероссийский семинар по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара, СГАУ, 15-17 июня 2015г.; IV Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные проблемы ракетно-космической техники» (IV Козловские чтения). АО «РКЦ

«Прогресс», Самара, 14 – 18 сентября 2015 г.; 4th International Symposium on Energy Challenges & Mechanics – working on small scales. 11-13 August 2015, Aberdeen, Scotland, United Kindom; XIX Всероссийский семинар по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара, СГАУ, 15-17 июня 2016г.; III Международная научно-техническая конференция «Динамика и виброакустика машин». Россия, Самара, Самарский университет, 29 июня – 1 июля 2016 г.; Всероссийская молодежная научно-практическая конференция «Орбита молодежи» и перспективы развития российской космонавтики». 8-9 сентября 2016 г., Москва-Самара. Работа докладывалась на научных семинарах «Механика и прикладная математика» Самарского государственного технического университета (рук. д.ф.-м.н., проф. В.П. Радченко, 2017-2018 г.г.) и на научных семинарах кафедры «Математического моделирования в механике» Самарского университета (рук. д.т.н., проф. Н.И. Ключев, 2012-2016 г.г.).

Публикации. По материалам диссертационного исследования опубликовано 14 работ, в том числе 4 в изданиях, рекомендованных ВАК РФ. Получено 1 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложений. В конце каждой главы сформулированы выводы. Диссертация изложена на 142 страницах, содержит 39 рисунков, 1 таблицу и 166 единиц библиографии.

Личный вклад автора. Работы [155], [156], [158], [160], [161], [164], [166] выполнены диссертантом самостоятельно. В [154] автору принадлежит совместная постановка задачи и анализ расчетов, в [153], [157], [159], [162], [163], [165] – совместная постановка задач, проведение численного решения и его исследование, анализ и систематизация результатов расчетов.

Глава 1

Аналитический обзор

В разделе приведен обзор современной научной литературы, посвященной исследованию течений в замкнутых полостях, частично или полностью заполненных жидкостью, и течений в тонких слоях. Непрерывающиеся публикации по обозначенным проблемам свидетельствуют о востребованности таких исследований.

Задачи, связанные с течениями в замкнутых полостях, активно изучаются, начиная со времени первых космических полетов. Они напрямую связаны с отдельным направлением теоретической механики - динамикой твердого тела с внутренними полостями, частично или полностью заполненными жидкостью. Обзор таких задач и методов их решения до 1990-х годов подробно представлены в [1], [2], [3], [4], [5].

Обзор исследований, представленных в литературе за последнее время, начнем с задач в полостях с наиболее распространенной и простой формой - без внутренних перегородок и элементов.

Теоретические исследования движения жидкости и колебаний свободной поверхности в полостях прямоугольной формы приведены в [6], [7], [8]. В [6] построена подтвержденная экспериментально математическая модель для полости с относительным заполнением, учитывающая постоянную горизонтальную возмущающую силу. В [7] исследуется волновое движение полости при её внезапном столкновении с препятствием, в [8] – срыв колебаний.

В [9], [10] представлены результаты экспериментального исследования прямоугольной полости с жидкостью, колеблющейся горизонтально по гармоническому закону. Установлено, что при частотах колебаний полости, совпадающих с четными собственными частотами колебаний жидкости, амплитуды волн и поступающая в них энергия минимальны. В [11] описывается экспериментальное исследование эволюции однородной завихренности в

прямоугольной полости с наклонным дном после резкого замедления её вращения. Выявлено, что вертикальные вторичные течения, индуцируемые наиболее сильным вихрем, проникают до дна полости, а завихренность существенно увеличивается в отдельных вихрях, на которые распадается начальный вихрь. Приводятся аналитическое исследование задачи, которое позволяет качественно описать вихревую структуру, и вычислительный эксперимент, который позволяет прогнозировать свободную поверхность. В [12] описан лабораторный эксперимент о параметрическом возбуждении гравитационных поверхностных волн в прямоугольной полости при сохранении её горизонтальной степени свободы.

В [13] представлены результаты вычисленного эксперимента, показывающие затухающие свободные осесимметричные колебания вязкой несжимаемой жидкости частично заполняющей полость в виде прямого круглого цилиндра. Анализ расчетов указывает на два демпфирующих фактора, являющихся причиной затуханий: сопротивление движению жидкости вследствие вязкого трения на твердых границах и расход энергии колебаний на вихреобразование под свободной поверхностью. В [14] изучаются дисперсионные характеристики гироскопических волн в полости быстровращающегося цилиндра.

Колебания тяжелой идеальной жидкости в полостях с криволинейными поверхностями рассматриваются в [15], [16]. В [15] представлен разработанный авторами численно-аналитический метод, с помощью которого изучаются колебания в вертикальном эллиптическом сосуде, в [16] получен класс точных аналитических решений колебаний в полости, имеющей форму параболоида вращения.

Собственные гармонические колебания для полостей сложной формы рассматриваются в [17]. Выявлены особенности мод, связанные с числом осей симметрии полости и её конфигурацией. Обсуждается возможность аппроксимации амплитуд некоторых классов мод вращающихся полостей функциями Бесселя.

В [18] рассматриваются конечно-разностные методы для исследования движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами. Математическое моделирование основано на подвижных адаптивных сетках с учетом приближенных длинноволновых моделей и потенциального течения жидкости. Даны экономичные методы построения сеток, приведены результаты расчетов для полостей различной формы.

Некоторые вопросы устойчивости колебаний в полостях исследуются в [19], [20]. В [19] рассматривается гармоническая неустойчивость (естественная частота взволнованных волн близка к частоте колебания полости) трехмерных стоячих волн на свободной поверхности жидкости малой вязкости в полости произвольной формы, подверженной вертикальным колебаниям. В [20] рассматриваются малые колебания свободной поверхности в жесткой цилиндрической оболочке в зависимости от высоты над земной поверхностью, определена критическая высота подъема полости, при которой устойчивость колебаний жидкости сохраняется.

Теоретическое исследование пространственных бесконечно малых колебаний тяжелой вязкой жидкости в сосуде произвольной формы с двумя слоями приведено в [21], непрерывной многослойной жидкости в - [22]. В задачах применяются метод усреднения Крылов-Боголюбова и идеи теории пограничного слоя.

Процессы в полостях усложняются, если их конструкция предполагает наличие дополнительных элементов (например, мембран, перегородок), посторонних предметов (например, шар-баллонов), если происходит истечение жидкости из полости, перераспределение жидкости между полостями, если жидкость неоднородна.

В [23], [24], [25] рассматривается горизонтальное гармоническое движение полости, имеющей одну упругую вставку. Затухание колебаний в гидроупругой системе «сосуд-жидкость-упругая вставка» определяется геометрическими параметрами сосуда и характеристиками упругой вставки.

Теоретические исследования о колебаниях двухслойной жидкости с упругим разделителем или проницаемой перегородкой между слоями в цилиндрической полости рассматривались в [26], [27], [28], [29], [30]. В [31] приведено решение задачи с несколькими перфорированными перегородками, в [32] - с упругой мембраной и упругим дном, получены условия устойчивости плоского равновесного положения упругого дна. В [33] представлены результаты экспериментального исследования по определению коэффициента демпфирования упругого разделителя. Получено аналитическое выражение для определения коэффициента сопротивления пористой проницаемой перегородки, разделяющей вертикальный столб жидкости на два слоя. Экспериментально получено значение коэффициента затухания гидромеханической системы.

Численное моделирование динамики жидкости, частично или полностью заполняющей вращающуюся цилиндрическую полость со встроенными упругими радиальными ребрами, приведено в [34]. В [35] дается решение неклассических задач о колебаниях жидкости в сферических емкостях с выпуклым дном или содержащим шар-баллоны, в [36] выполнен конечноэлементный расчет перетекания жидкости в полости при торможении, рассмотрено влияние размеров внутренней перегородки на значения гидродинамических давлений на элементы конструкции полости.

Исследование движения идеальной несжимаемой жидкости, вытекающей из полости сферической формы, представлено в [37]; вытекающей из цилиндрической и конической полостей – в [38]; вытекающей из полостей произвольной формы – в [39], [40]. В представленных работах получено, что спектр нормальных движений несжимаемой жидкости обладает двумя ветвями собственных значений: дискретного множества вещественных чисел, и дискретного множества комплексно-сопряженных чисел, расположенных вблизи мнимой оси. случаем отрицательных вещественных корней является апериодическая устойчивость собственных колебаний. случаем отрицательных вещественных составляющих решений является колебательная составляющая устойчивости.

В [41] в приближении ползущего течения ньютоновской жидкости проведено математическое моделирование и анализ плоского медленного течения вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, реализующегося при сливе из объемных смесителей с заданным расходом, а в [42] - реализующегося при сливе жидкости из смесителя с одновременным заполнением вертикально установленной пресс-формы.

Численное решение нестационарного истечения вязкой несжимаемой жидкости из цилиндрической полости, вращающейся вместе с ней при постоянной угловой скорости через центральное сливное отверстие в дне, приведено в [43], проведен анализ основных факторов, от которых зависит течение, а именно угловая скорость, вязкость, начальная глубина.

Экспериментальное исследование гидравлических остатков, образующихся при вытекании вращающейся жидкости из конструктивно подобных моделей специальных полостей, приведено в [44]. В [45] описывается экспериментальное исследование изменения расхода при истечении жидкости из предварительно заполненной цилиндрической емкости через сливные отверстия, определены зависимости расхода от времени при различной начальной высоте и искусственно создаваемой закрутке жидкости. Выявлены четыре различных стадии истечения.

В [46] получены экспериментальные оценки основных параметров торнадоподобных вихрей, возникающих при возбуждении осесимметричных инерционных колебаний большой амплитуды в твердотельно вращающейся жидкости.

В [47] представлены результаты экспериментального анализа и численного решения модели для процесса воронкообразования при нестационарном истечении под действием силы тяжести первоначально покоившейся воды через одно или два круглых отверстия в дне призматического сосуда. Изучены случаи с разным расположением сливных отверстий, с неодинаковой степенью шероховатости отдельных участков дна и стенок сосуда, для нескольких значений начальной глубины жидкости. Сформулировано достаточное, но не необходимое условие отсутствия вихревых воронок. На основе предложенного способа

определения направления вращения жидкости в вихревых воронках указаны области, при расположении в которых сливных отверстий над ними формируются вихревые воронки с заданным направлением вращения, а также линии размещения центров сливных отверстий, при истечении через которые устойчивые вихревые воронки не образуются. Установлено, что глубина жидкости в сосуде, при которой начинается формирование вихревой воронки, слабо зависит от начальной глубины воды в сосуде.

В [48] выполнено экспериментальное исследование влияния положения сливных отверстий на формирование нестационарных вихревых воронок при истечении жидкости из емкости, диаметр которой значительно больше диаметра сливного отверстия, получен вывод о сильном влиянии симметрии на формирование вихревых воронок.

Сложность и разнообразность процессов в полостях вынуждает уделять особое внимание контролю за расходом жидкости и её уровнем. В открытой литературе приведено совсем немного публикаций по этому вопросу. В [49] приведена математическая модель процесса измерения уровня жидкости в полостях, в [50] - в движущихся полостях, в [51] рассмотрены некоторые технические решения, принятые при разработке системы управления расходом топлива.

Далее представлен обзор литературы, посвященной течениям в тонких слоях – различного рода пленочным течениям.

В [52] на основе уравнения баланса сил и выражения для функции скорости в тонком слое, свободно стекающем по плоской поверхности, получены формулы для вычисления средней толщины и других характеристик.

В [53] изучено развитие теплообмена тонкого слоя жидкости при действии гравитационных сил, проведено аналитическое исследование стабилизированного теплообмена при ламинарном течении тонкого слоя жидкости. Установлено влияние поперечной кривизны тонкого слоя жидкости и наружного теплообмена на изменение толщины слоя жидкости.

При исследовании волновых течений тонких слоев распространен подход, когда длину волны принимают много больше амплитуды колебания (так называемое, длинноволновое приближение). С учетом длинноволнового предположения, задача о волновом стекании тонких слоев и исследование их устойчивости на плоской наклонной поверхности рассматривалась в работах [54], [55], [56].

Стеkanie тонкой слоев вязкой жидкости по пористой наклонной пластине с учетом условия малости толщины слоя по сравнению с характерным размером пористой среды рассмотрено в [57]. Показано, что тонкий слой на пористой пластине менее устойчив, чем на непроницаемой, а увеличение проницаемости является дестабилизирующим фактором, форма и амплитуда волн определяются проницаемостью.

В [58] рассмотрено течение тонкого слоя жидкости по наклонной гофрированной поверхности. Выполнен расчет периода гофра, который при заданных параметрах жидкости и газа увеличивает коэффициент массоотдачи максимальным образом.

В [59] предложена математическая модель течения тонкого слоя жидкости в каналах с крупномасштабной регулярной шероховатостью, основанная на исследованиях отрывных течений за плохо обтекаемыми выступами. На основе рассмотренной модели разработан метод расчёта касательных напряжений для случая движения тонкого слоя жидкости по шероховатой поверхности.

Течение тонких слоев, стекающих по волнистой вертикальной стенке, описано в [60] и в [61]. В [60] установлено, что устойчивый режим течения возможен при малой длине волны поверхности и при больших амплитудах волнистости. В [61] получено интегральное уравнение, которое позволяет, в частности, описывать вихри во впадинах волнистой стенки. В [62] рассмотрено ламинарное течение по нагретой волнистой наклонной поверхности, представлен анализ устойчивости и влияния рельефа поверхности, переменного поверхностного натяжения и нагрева на течение.

Свободное течение тонкого слоя жидкости под действием сил тяжести на цилиндрической поверхности приведено в работах [63], [64], [65], [66]. Показано, что волновой режим течения является более устойчивым, чем ламинарный, а большой наклон поверхности не сказывается на устойчивости волнового режима.

Медленное течение сильновязких тонких слоев рассмотрено в [67], [68], [69]. В [67] получена и подтверждена экспериментально математическая модель течения на цилиндре и сфере, позволяющая определить закон изменения толщины течения. В [68] представлено трёхмерное течение около полусферического препятствия на наклонной плоскости. В [69] предложена математическая модель растекания объема вязкой жидкости по горизонтальной поверхности и показано, что силами межмолекулярного взаимодействия на линии трехфазного контакта (стенка – жидкость – газ) можно пренебречь.

Исследование течения тонких слоев на вращающемся плоском диске и по криволинейной поверхности приведено в [70]. В [71] приводятся результаты исследования течения жидкости, стекающей по неравномерно обогреваемой вращающейся наклонной плоскости. Получено, что при малом вращении доминирует сила Кориолиса, а при большом - центробежная сила.

Течение тонкого слоя с учетом его взаимодействия с каплями исследовано в работах [72], [73]. В [72] предложены методы расчёта нелинейного взаимодействия газового потока с волновым тонким слоем жидкости с учётом различных механизмов срыва (осаждения) капель с поверхности жидкости. Получены формулы для расчёта амплитуды волны, толщины в условиях срыва (осаждения) капель. В [73] проведены экспериментальные исследования по взаимодействию капель, движущихся под различными углами к поверхности, с тонким слоем той же жидкости. Получены эмпирические формулы для параметра коагуляции (доли массы "снарядов", коагулирующих с тонким слоем) и функций распределения осколков по размерам, скоростям и углам отскока.

В [74] на основе численных расчетов и подтверждающих их экспериментальных данных представлено подробное изучение возвратного течения в капиллярной волновой области ламинарно стекающих тонких жидких

слоев. Показано, что возвратный поток образуется в результате отрыва вихря около граничной стенки, аналогично классическому случаю отрыва потока. Обратный градиент давления, вызывающий отрыв потока в области капиллярных волн, индуцируется сильным изменением кривизны свободной поверхности между газом и жидкостью. Эта деформация, в результате поверхностных сил натяжения, оказывает воздействие на скачок давления на поверхности раздела и создает распределение давления. Показано, что только капиллярные волны, благодаря их коротковолновости и большой кривизне, образуют распределение давления, удовлетворяющее условию отрыва потока.

В [75], [76] представлено волновое стекание тонких вязких слоев в рамках полных уравнений Навье-Стокса в широком диапазоне чисел Рейнольдса и Капицы. Определены границы области применимости асимптотического и интегрального подхода к описанию волн на стекающих тонких слоях. Показано, что при малых числах Капицы результаты асимптотического подхода становятся неприменимыми практически для всех чисел Рейнольдса. При больших числах Капицы существенное различие между решением, полученным с использованием асимптотического метода, и расчётом с помощью уравнений Навье-Стокса наблюдается, начиная с умеренных чисел Рейнольдса.

В [77] изложены методы и основные результаты теории нелинейных волн, описывающих широкий класс течений с тонкими слоями и связанных с ними технологическими проблемами.

Среди экспериментальных исследований последнего времени о течении тонких жидких слоев можно выделить [78], [79], [80], [81].

В [78], [79] исследуются основные закономерности взаимодействия между трёхмерными уединенными и двумерными возбужденными регулярными волнами на вертикально стекающих тонких слоях жидкости в широком диапазоне параметров. В [80] оптическим методом измерена зависимость толщины тонкого слоя жидкости, стекающего по поверхности шара в поле силы тяжести, от расхода жидкости и полярной координаты. В [81] проведено исследование тонких жидких слоев, стекающих по нагреваемой или охлаждаемой пластине. Опыты показали,

что течение чувствительно к условиям нагревания. Когда тонкий слой охлаждается подложкой, площадь его поверхности увеличивается. Когда он нагревается, поверхность уменьшается. Анализ указал на связь изменения течения с эффектом Марангони, т. е. влиянием градиента поверхностного натяжения на течение. Также рассматривалось влияние изменения вязкости на неизотермичное течение. Было найдено, что градиент поверхностного натяжения имеет преобладающее влияние.

Исследования, посвящённые изучению влияния тонких слоев на сопротивление обтекаемого тела, представлены в литературе немногочисленными публикациями. Первыми, кто обратил внимание на возможность снижения сопротивления благодаря введению в пограничный слой веществ, отличающихся по своим физическим свойствам от основного потока, были Федяевский и Лойцянский [82], [83], [84]. Им же принадлежат и первые теоретические оценки.

Далее следует отметить работы Черного Г.Г., обобщение которых дано в [85]. В работах представлены автомодельные и близкие к ним решения модели ламинарного тонкого слоя. В [86] получено автомодельное решение для модели ламинарного тонкого течения на пластине, помещенной в турбулентный пограничный слой.

Более поздние работы - [87], [88], [89], [90], [91]. В [90] показано, что при определенных значениях параметров тонкого слоя сопротивление движению можно уменьшить. В [91] проведено исследование влияния тонкого слоя, покрывающего сферическое тело, на величину силового воздействия набегающего потока. В [87] и [88] рассматривается двухсредный пограничный слой, когда среды не перемешиваются. Считается, что подводящая через обтекаемую поверхность среда заключена в тонкую область, где распределение продольной скорости можно считать линейным. В [87] используется метод интегральных соотношений для случая обтекания плоской пластины, в [88] развит метод конечных разностей для произвольного тела. В [89] устанавливаются условия автомодельности для ламинарного пограничного слоя с тонким слоем на плоской пластине.

Математическое моделирование течений - движения частиц в тонких слоях, в пограничный слой, в градиентных потоках, методов их решения можно найти в [92], [93].

Основными вопросами и задачами при построении математической модели таких течений являются: выбор системы активных сил, действующих на частицы, учет возможного изменения их формы и массы, разрушение частицы, взаимодействие с другими частицами, влияние движения частицы на несущую фазу и т.д. Все эти вопросы являются обширными, довольно сложными и до конца не исследованы. Далее представлен обзор сил, действующих в однофазном потоке на сферическую частицу [94].

Доминирующей силой в большинстве систем жидкость-частица является сила сопротивления. Это сила, действующая на частицу в поле скоростей, когда ускорение относительной скорости между потоком и частицей отсутствует. Для того чтобы количественно описать эту силу при различных режимах в относительном движении вводят коэффициент сопротивления

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{\rho_3}{2} (\vec{u}_3 - \vec{u}_1) |\vec{u}_3 - \vec{u}_1| S_M}, \quad (1.1)$$

который может быть выражен корреляционными зависимостями от относительного числа Рейнольдса частицы $Re_3 = \frac{D_1 |\vec{u}_3 - \vec{u}_1|}{\nu_3}$, где $S_M = \pi \frac{D_1^2}{4}$ - площадь миделя сферы, D - диаметр, ρ - плотность, \vec{u} - скорость, ν - кинематическая вязкость; индекс «1» относится к жидкости, индекс «3» - к газу.

Для малых чисел Рейнольдса эффекты вязкости являются преобладающими, отрыва потока не происходит, течение ламинарное, и коэффициент сопротивления может быть определен по формуле Стокса $C_D = \frac{24}{Re_3}$; $Re_3 < 0,1$

(соответствующий режим называют Стоксовым); В диапазоне $Re_3 \leq 5$ используют

ряд Озеена-Голдстейна $C_D = \frac{24}{Re_3} \left(1 + \frac{3}{16} Re_3 - \frac{19}{1280} Re_3^2 \right)$ [95].

В переходной области ($0,5 \leq Re_3 \leq 800$) роль инерционных эффектов усиливается. В ней отличают несколько режимов обтекания [96]. При $Re_3 < 24$ формируется ламинарное безотрывное обтекание ($Re_3 \approx 24$ соответствует точке отрыва). При $24 \leq Re_3 \leq 210$ наблюдается стационарное осесимметричное течение с циркулирующим по замкнутому циклу следом в форме вихревого кольца. При $210 \leq Re_3 \leq 270$ за сферой образуется устойчивое присоединенное течение, состоящее из двух вихревых колец равной длины и разных знаков, обтекание стационарное и плоско-симметричное. Диапазон $270 \leq Re_3 \leq 300$ соответствует переходу к нестационарному следу за сферой, состоящей из серии периодически сходящихся связанных вихревых колец. Обтекание все еще обладает плоской симметрией. При $400 \leq Re_3 \leq 800$ вихревые кольца продолжают сходиться с поверхности сферы, но азимутальный угол, в котором они формируются, начинает неравномерно изменяться, и обтекание утрачивает свойство плоской симметрии. Для указанной области имеется корреляция [97]

$$C_D = \frac{24}{Re_3} \left(1 + 0,15 Re_3^{0,687} \right). \quad (1.2)$$

В диапазоне $800 < Re_3 \leq 3 \cdot 10^5$ вихревые кольца продолжают сходиться, но с большей нерегулярностью, хотя стойкие периодические колебания все еще остаются в следе, $C_D \approx 0,44$;

При критическом числе Рейнольдса ($Re_{кр} \approx 2,5 \cdot 10^5$), соответствующему переходу от ламинарного к турбулентному пограничный слой на сфере, происходит резкое снижение C_D . След за сферой уменьшается.

В закритической области ($Re_3 > 4,0 \cdot 10^5$) C_D снова непрерывно растет.

На коэффициент сопротивления могут оказывать влияние различные факторы: турбулентность и сжимаемость набегающего потока, шероховатость поверхности, пристеночные эффекты, эффекты разреженности и др. Все они

учитываются через эмпирические поправочные коэффициенты или функции, полученные из экспериментов.

Для определения влияния переносимой потоком турбулентности на сопротивление сферы используются две величины: отношение масштаба турбулентности к диаметру сферы L_x/D_1 и интенсивность относительной турбулентности I_r - отношение осредненной во времени амплитуды пульсаций скорости в набегающем потоке к средней относительной скорости. Первая величина была предметом экспериментальных исследований [98]. Хотя результаты не всегда согласуются между собой, общая тенденция заключается в следующем: при фиксированном значении I_r с увеличением L_x/D_1 растет и C_D .

Хорошо известно, что турбулентность набегающего потока уменьшает значение $Re_{кр}$. Причиной этого является преждевременный переход к турбулентному пограничный слой. В [99] представлены экспериментальные исследования о влиянии I_r на C_D . Выявлено, что рост величины I_r снижает $Re_{кр}$. Например, при величине $I_r \approx 40\%$ $Re_{кр}$ уменьшается до 500 (на стандартной кривой $Re_{кр} \approx 2,5 \cdot 10^5$). В работе [100] показано, что после быстрого уменьшения C_D при достижении $Re_{кр}$, C_D снова возрастает в закритической области чисел Re_3 и проходит через максимальное значение.

В докритическом диапазоне чисел Re_3 исследования о влиянии турбулентности на C_D проводились в работах [101], [98], [102], [103], [104], [105]. Сравнение работ показывает некоторое несоответствие результатов. Поэтому в указанном диапазоне представляется разумным использовать стандартную зависимость C_D от Re_3 .

Влияние сжимаемости потока на сопротивление сферы рассматривалось несколькими авторами [106], [107], [108], [109]. В соответствующих работах они предложили свои аппроксимации для C_D в диапазоне числа Рейнольдса $0 < Re_3 \leq 10^5$ и числа Маха $0 < M_3 = \frac{|\bar{u}_3 - \bar{u}_1|}{a_3} \leq 4$ (a - скорость звука). Общими

являются следующие закономерности: для малых чисел Re_3 C_D уменьшается с увеличением M_3 , и, наоборот, при больших Re_3 C_D увеличивается с увеличением M_3 .

Для изучения влияния вращения сферы на C_D используют безразмерный параметр $\bar{\Omega}$, равный отношению её линейной скорости к относительной в потоке. Среди немногочисленных публикаций в литературе можно выделить экспериментальное исследование [110], теоретическую работу [111] и численные расчеты [112], [113]. Из анализа работ следует общее заключение о незначительном влиянии $\bar{\Omega}$ на C_D . Этот вывод, однако, ограничен числами $Re_3 = 2 \cdot 10^3$, которые находятся за пределами диапазона для многих практически важных задач.

Движение сферы в окрестности твердой стенки приводит к повышению C_D и связано дополнительно с поперечной подъемной силой. Аналитические решения для пристеночных эффектов представлены в литературе для малых Re_3 . Нормальное движение сферы к стенке рассматривалось в [114], а параллельное стенке – в [115], [116].

При ускорении сферы в потоке, в некоторой её окрестности происходит соответствующее этому ускорению определенной массы жидкости, омываемой сферу (это, так называемая, присоединенная масса). Изменение скорости жидкости происходит за счет потерь совершаемой сферой работы, которые определяют одноименную силу \vec{F}_A - силу присоединенной массы. \vec{F}_A эквивалентна добавлению массы к сфере и есть сила, оказываемая сферой на жидкость, поэтому \vec{F}_A имеет обратный смысл \vec{F}_D .

В [117] показано, что выражение для силы присоединенной массы имеет вид:
$$\vec{F}_A = \frac{\rho_3}{2} \frac{m_1}{\rho_1} \left(\frac{D\vec{u}_1}{Dt} - \frac{d\vec{u}_3}{dt} \right).$$
 Эксперименты для сферической частицы [118] указывают на то, что это выражение может зависеть еще и от параметра C_A , уточняющего величину \vec{F}_A . В [119] предложена эмпирическая корреляция C_A , как

функция параметра $A_C = \frac{|\bar{u}_1 - \bar{u}_3|^2}{D_1 \left| \frac{d|\bar{u}_1 - \bar{u}_3|}{dt} \right|}$. Достоверность этой корреляции

продемонстрирована в [119] на примере сферы, падающей под действием сил тяжести в заполненной жидкостью полости, и в [120], где рассчитывается скорость падения частиц в полости с колеблющейся жидкостью. Последние исследования [121] показывают, что C_A близко к единице.

Если при ускорении силу присоединенной массы учитывают как добавку к сопротивлению формы, то силу Бассе – как добавку к вязкому сопротивлению. Эта сила связана с временной задержкой в развитии пограничный слой при изменении относительной скорости со временем.

Выражение для силы Бассе с учетом начальной скорости имеет вид [122]:

$$\bar{F}_B = \frac{3}{2} D_1^2 \sqrt{\pi \rho_1 \mu_1} \left[\int_0^t \frac{d(\bar{u}_1 - \bar{u}_3)}{\sqrt{t-t'}} dt' + \frac{(\bar{u}_1 - \bar{u}_3)_0}{\sqrt{t}} \right],$$

где $Sl = \frac{1}{2\pi f \tau_V}$ - число Струхала, f - частота колебаний, τ_V - время отклика скорости сферы, μ - динамическая вязкость, индекс «0» относится к начальному моменту времени.

Как и для силы \bar{F}_A , в [118] предложен множитель C_B для \bar{F}_B . В [121] этот множитель имеет вид:

$$C_B = 1 - 0,527 \left[1 - \exp(-0,14 Re_3 Sl^{0,82}) \right]^{2,5}.$$

Движение сферы в градиентном потоке приводит к неравномерному распределению нормального и касательного напряжений по её поверхности, и, как следствие, к возникновению силы Сэффмана \bar{F}_{Saf} . При малых Re_3 выражение для этой силы дается в [123], [124]. Позже в [125] анализ Сэффмана был расширен, и обнаружено быстрое уменьшение \bar{F}_{Saf} при росте Re_3 . В [126] на

основе численных расчетов [127] получена корреляция для \vec{F}_{Saf} для произвольных чисел Re_3 :

$$\vec{F}_{Saf} = \frac{\rho_3}{2} \frac{\pi}{4} D_1^3 C_{Saf} ((\vec{u}_3 - \vec{u}_1) \times \vec{\omega}_3), \quad (1.3)$$

где $C_{Saf} = \frac{4,1126}{Re_S^{0,5}} f(Re_3, Re_S)$, $Re_S = \frac{\rho_3 D_1^2 |\vec{\omega}_3|}{\mu_3}$, $\omega_3 = \nabla \times \vec{u}_3$,

$$f(Re_3, Re_S) = \begin{cases} (1 - 0,3314 \beta^{0,5}) \exp(-0,1 Re_3) + 0,3314 \beta^{0,5}, & Re_3 \leq 40 \\ 0,0524 (\beta Re_3)^{0,5}, & Re_3 > 40 \end{cases}, \quad \beta = 0,5 \frac{Re_S}{Re_3}.$$

Заметим, что если относительная скорость положительная, то \vec{F}_{Saf} направлена к большей скорости непрерывной фазы, и, напротив, если относительная скорость отрицательная, то \vec{F}_{Saf} направлена к меньшей скорости непрерывной фазы.

Вследствие вращения сферы на нее действует подъемная сила Магнуса \vec{F}_M . Эта сила вызвана перепадом давления на противоположных сторонах сферы, складывающимся в результате разницы скоростей при её вращении. Выражение для \vec{F}_M может быть представлено в виде:

$$\vec{F}_M = \frac{\rho_3}{2} \frac{\pi}{4} D_1^2 C_M |\vec{u}_3 - \vec{u}_1| \frac{\vec{\Omega} \times (\vec{u}_3 - \vec{u}_1)}{|\vec{\Omega}|}, \quad \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{u}_3 - \vec{\omega}_1.$$

Для малых чисел Re_3 коэффициент силы Магнуса C_M вычисляется по формуле [111] $C_M = \frac{D_1 |\vec{\Omega}|}{|\vec{u}_3 - \vec{u}_1|} = \frac{Re_R}{Re_3}$, $Re_R = \frac{\rho_3 D_3^2 |\vec{\Omega}|}{\mu_3}$, а при $10 < Re_3 < 140$ - в соответствии с выражением, приведенным в [128]

$$C_M = 0,45 + \left(\frac{Re_R}{Re_3} - 0,45 \right) \exp(-0,05684 \cdot Re_R^{0,4} \cdot Re_3^{0,3}).$$

Момент, действующий на вращающуюся сферу, вследствие её взаимодействия с жидкостью можно представить как $\vec{T} = \frac{\rho_3}{2} \left(\frac{D_1}{2} \right)^5 C_T |\vec{\Omega}| \vec{\Omega}$. На основе экспериментальных исследований [129] и численного моделирования [130]

выражение для коэффициента момента C_T может быть представлено в виде

$$C_T = \frac{12,9}{Re_R^{0,5}} + \frac{128,4}{Re_R}, \quad 32 < Re_R < 10^3, \text{ а при меньших } Re_R - \text{ в соответствии с [111]}$$

$$C_T = \frac{64\pi}{Re_R}, \quad Re_R < 32.$$

Анализ публикаций показывает, что математическое моделирование ограничивается построением и исследованием, как правило, одной математической модели процесса или явления, достаточно мало уделяется внимание возможности комплексного использования методов математического моделирования, доступному в настоящее время (особенно, с бурным развитием супер-ЭВМ и прикладного программного обеспечения для моделирования физических процессов) и позволяющему расширить преимущества математического моделирования для описания и анализа исследуемых течений. В этой связи сформулированы **цели диссертационной работы**: разработка методов математического моделирования ламинарных течений в слое вязкой несжимаемой жидкости с межфазной границей с применением приближенного аналитического метода разложения решения в ряд по малому параметру, конечно-разностного метода и метода конечных объемов; создании программного обеспечения для проведения вычислительных экспериментов и анализа характеристик течений.

Для достижения поставленных целей решались следующие **задачи**:

1. На основе модифицированных уравнений Навье-Стокса, описывающих течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрическом канале, разработать метод математического моделирования для определения уровня свободной поверхности жидкости в канале системы управления расходом топлива ракеты-носителя: сформулировать новые краевые задачи для расчета неустановившегося и квазистационарного течений с расходом массы, разработать и исследовать разностные схемы для численного решения краевых задач и построить алгоритмы их решения.

2. Провести анализ и сопоставление решений по разработанному методу с решением по вычислительному методу конечных объемов, реализованному в программном комплексе Ansys Fluent с применением уравнений Навье-Стокса.
3. В рамках теории пограничного слоя разработать метод математического моделирования двухсредного (внутреннего - жидкость и внешнего - газ) неперемешивающегося пограничного слоя со скользящей межфазной границей на плоской пластине. Для решения краевой задачи внутреннего пограничного слоя разработать приближенный аналитический метод разложения решения в ряд по малому параметру. Для численного решения краевой задачи внешнего пограничного слоя разработать и исследовать разностную схему, провести её тестирование и построить алгоритм решения.
4. Разработка алгоритма решения сопряженной краевой задачи двухсредного пограничного слоя со скользящей межфазной границей и создание на его основе в среде Maple программы для проведения вычислительного эксперимента. Проанализировать и сравнить результаты расчетов по предложенному методу моделирования с результатами, полученными по методу математического моделирования, развитому в пакете Ansys Fluent и основанному на применении уравнений Навье-Стокса.
5. Разработать и исследовать метод математического моделирования для сферической частицы (среда – жидкость), основанный на уравнении движения центра масс, заранее определенных активно действующих сил на частицу – инерции, тяжести, аэродинамического сопротивления и силы Сэфмана – и позволяющий прогнозировать её движение в односредном пограничном слое (среда – газ) плоской полубесконечной пластины.
6. Провести сравнение результатов расчетов по предложенному методу для сферической частицы с результатами, полученными в программном комплексе Ansys Fluent по методу, основанному на решении уравнений Навье-Стокса и на совместном решении задач динамики (уравнений движения центра масс) и аэродинамики (заранее неизвестных, определяемых по ходу решения, поверхностных сил, действующих на частицу).

Глава 2

Разработка методов математического моделирования для анализа колебаний свободной поверхности жидкости в цилиндрическом канале

В главе рассматривается гидродинамический процесс, сопровождающий работу элементов системы управления расходом топлива в баке ракеты-носителя. Для контроля уровня жидкости в баке ракеты-носителя применяется гидростатический метод: в бак устанавливают уровнемер – вертикальный цилиндрический канал, внутри которого помещают дискретно расположенные по длине уровнемера емкостные датчики уровня (рис. 2.1).

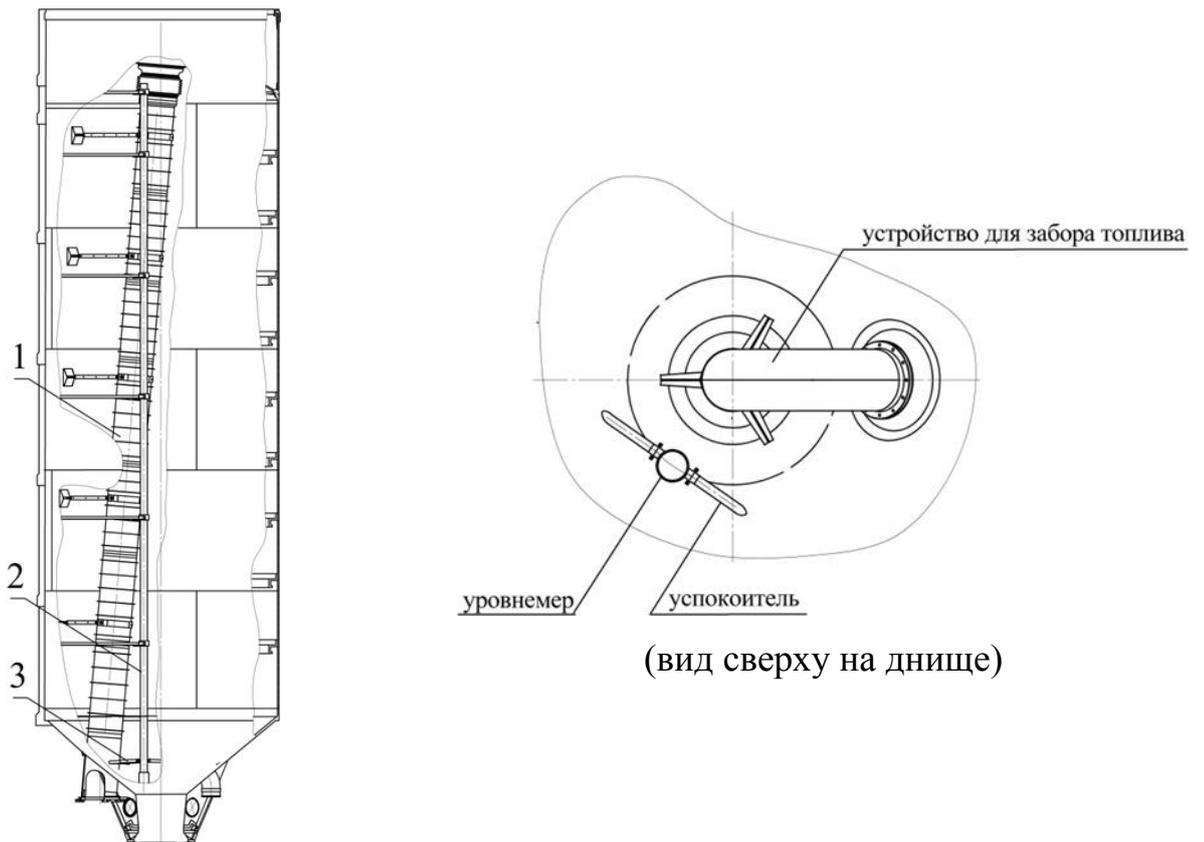


Рис. 2.1. Топливный бак: 1 – расходная магистраль, 2 – уровнемер,
3 –успокоитель

На активном участке полета ракеты-носителя топливо свободно сообщается между баком и уровнемером через успокоители, которые имеют цилиндрическую

форму и расположены в плоскости, нормальной к продольной оси уровнемера. При расходовании топлива по показаниям датчиков в уровнемере определяют уровень свободной поверхности и в баке. Далее сигнал с датчиков передается в систему управления, регулирующую расход топлива.

Достоверно известно, что уровни свободной поверхности жидкости в баке и уровнемере отличаются. Актуальным является вопрос, в каком месте должны быть расположены датчики в уровнемере, чтобы их показания соответствовали реальному уровню свободной поверхности в баке?

В главе на основе модифицированного уравнения Навье-Стокса, описывающего течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрическом канале, разрабатываются методы математического моделирования гидродинамического процесса, сопровождающего работу элементов системы управления расходом топлива в баке ракеты-носителя. Также в главе описывается решение задачи с применением метода, реализованного в программном комплексе Ansys Fluent на основе уравнений Навье-Стокса. Приводится анализ течений.

2.1 Методы математического моделирования для вертикального цилиндрического канала

2.1.1 Постановка задачи

Рассматривается упрощенная конструкция – без успокоителей. Топливный бак с уровнемером представляется в виде двусвязной области (рис. 2.2) трех пространственных переменных Ω (двусвязная полость). Внутри двусвязной полости, частично заполненной жидкостью, имеется ограниченный цилиндрический канал радиуса $R > 0$. Вводятся связанные с этим каналом цилиндрические координаты (r, θ, x) , начало – на уровне нижнего среза. Обозначения: $G = \{(r, \theta, x) : r \leq R, 0 \leq x\}$ – внутренняя область, $\xi(t)$ – межфазная граница внутренней области; $G_T = \Omega \setminus G$ – внешняя область, $H(t)$ – межфазная граница внешней области.

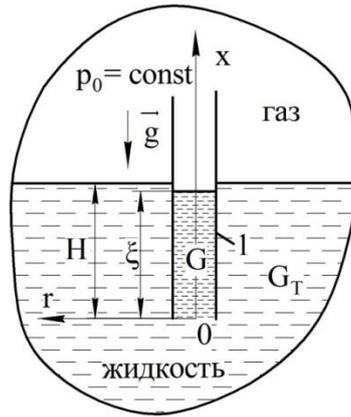


Рис. 2.2. Двусвязная полость: 1 – цилиндрический канал; Oxr – система координат, p_0 – давление, \bar{g} – ускорение свободного падения; ξ, H – уровень жидкости во внутренней и во внешней областях соответственно, G, G_T – внутренняя и внешняя области соответственно.

Из полости предусмотрен забор жидкости, при этом над свободной поверхностью жидкости во внутренней и внешней областях поддерживается постоянное давление p_0 . Между внутренней и внешней областями жидкость свободно сообщается через нижний срез на уровне $x=0$. В начальный момент времени уровень жидкости во внутренней области $\xi(t)$ совпадает с уровнем во внешней области $H(t)$. Целью является определение уровня свободной поверхности жидкости во внутренней области (в цилиндрическом канале) относительно уровня во внешней области (в баке).

Предположим, что у вектора скорости жидкости во внутренней области $\vec{U} = (u_r, u_\theta, u_x)$ компоненты $u_r = 0, u_\theta = 0$. Для краткости введем обозначение $u_x = u_x(r, t) = u$. Теплофизические характеристики сред считаются постоянными. Тогда в качестве модели для течения жидкости во внутренней области будем использовать одномерное уравнение параболического типа с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}(x, t), \quad (2.1)$$

где ν – кинематическая вязкость, ρ – плотность.

Из литературы известно, что уравнение (2.1) используется для моделирования ламинарных течений в цилиндрических каналах. Классическими можно назвать задачи, рассмотренные в [131], [95], [132], [133]. В [131] исследуется развитие ламинарного движения на начальном участке и из состояния покоя, в [95], [133] – пульсирующее движение, в [132] – периодическое.

Упростим уравнение (2.1). Для этого определим функцию градиента давления. Функция давления при $x = 0$ имеет значение

$$p = p_0 + \rho g H + \frac{\rho V_T |V_T|}{2}, \quad (2.2)$$

где V_T – скорость жидкости во внешней области (направление V_T совпадает с осью $0x$). В правой части выражения (2.2) первые два слагаемых определяют гидростатическое давление, а третье – динамическое. При $x = \xi$ функция давления принимает значение p_0 . Тогда, считая функцию давления линейной, найдем градиент

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-\rho g H - \frac{\rho}{2} V_T |V_T|}{\xi} \quad \text{или} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-\rho g \left(H + \frac{V_T |V_T|}{2g} \right)}{\xi}. \quad (2.3)$$

С учетом (2.3) уравнение (2.1) перепишется

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - g \left[1 - \frac{\left(H + \frac{V_T |V_T|}{2g} \right)}{\xi} \right]. \quad (2.4)$$

2.1.2 Задача Коши как модель для приближенного метода

Введем в рассмотрение функцию средней скорости $\bar{u} = \frac{2}{R^2} \int_0^R r u dr$. Умножим

левую и правую части уравнения (2.4) на r и проинтегрируем каждое слагаемое от 0 до R . Выпишем слагаемые уравнения (2.4), учитывая, что сила трения направлена против движения жидкости

$$\int_0^R r \frac{\partial u}{\partial t} dr = \frac{d}{dt} \int_0^R r u dr = \frac{R^2}{2} \frac{d\bar{u}}{dt}, \quad \int_0^R v \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr = \frac{1}{\rho} \left(r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_0^R \right) = -\frac{R\tau_w}{\rho}. \quad (2.5)$$

С учетом формул (2.5) уравнение (2.4) переписывается в виде

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -g \left[1 - \frac{\left(H + \frac{V_T |V_T|}{2g} \right)}{\xi} \right] - \frac{2\tau_w}{R\rho}. \quad (2.6)$$

Для функции касательного напряжения на стенке τ_w используем выражение для ламинарного установившегося течения [104] $\tau_w = \frac{4\mu\bar{u}}{R}$ и с учетом $\bar{u} = \frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi}$ из (2.6) получим [134]

$$\ddot{\xi} + \frac{8\nu}{R^2} \dot{\xi} = -g \left[1 - \frac{\left(H + \frac{V_T |V_T|}{2g} \right)}{\xi} \right], \quad 0 < t < T, \quad (2.7)$$

$$\xi(0) = H_0, \quad \dot{\xi}(0) = 0.$$

Таким образом, математическая модель для приближенного метода является задачей Коши (2.7), решение которой выполняется численным методом Рунге-Кутты 4 порядка точности.

2.1.3 Математическая модель для базового метода

В математической модели (2.7) для приближенного метода использовалась функция напряжения трения, справедливая при установившемся течении (в каждый момент времени течение считалось установившемся, или квазистационарным). В общей постановке задачи течение предполагается неустановившемся. Выполним интегрирование (2.4) без упрощений.

Уравнение (2.4) содержит 2 неизвестные функции – u и ξ . Для замыкания системы добавим соотношение для определения уровня свободной поверхности во внутренней области

$$\xi = H_0 - \int_0^t \bar{u} dt. \quad (2.8)$$

Таким образом, (2.4) и (2.8) образуют математическую модель для базового метода – вторую краевую задачу для одномерного квазилинейного уравнения (с нелинейным интегральным источником) с постоянными коэффициентами параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - g \left[1 - \frac{\left(H + \frac{V_T |V_T|}{2g} \right)}{\xi} \right], \xi = H_0 - \frac{2}{R^2} \int_0^t \int_0^R r \cdot u dr dt, 0 < r < R, 0 < t \leq T, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0; u(R, t) = 0, u(r, 0) = 0.$$

Базовый и приближенный методы ограничены по числу Рейнольда $Re = \frac{2RV}{\nu} \leq 2400$.

Случай, когда течение рассматривается из состояния равновесия при внезапном заборе жидкости, соответствует переходному процессу, вызванному резким изменением функции давления, или «гидравлическим ударом» [135]. Для исследования этого процесса необходимо учитывать упругость жидкости, что выходит за рамки рассмотрения настоящей работы.

Решение уравнений параболического типа (2.1) методами операционного исчисления дается в [136], [137], [131], [95], [132], [133]. Далее приводится численное решение методом конечных разностей.

2.1.4 Численное решение

В прямоугольной области $G_{in} = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq t \leq T\}$ введем сетку с равномерными шагами h_r по r и h_t по t (рис. 2.3): $\omega_{rt} = \{(r_j, t_n) : r_j = j h_r, t_n = n h_t, j = 0, 1, \dots, M, h_r = R/M, n = 0, 1, \dots, L, h_t = T/L\}$. На введенной сетке будем использовать шеститочечный шаблон и схему с весами

($0 \leq \sigma = \text{const} \leq 1$) [138]. Обозначим через u_j^n значение в узле (r_j, t_n) сеточной функции (обозначения сеточных функций совпадают), определенной на ω_{rt} .

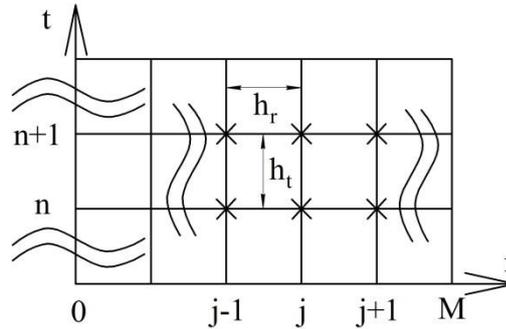


Рис. 2.3. Разностная сетка и шаблон

Разностная схема для уравнения из (2.9) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{h_t} = & \frac{\nu \sigma}{h_r^2} (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + \frac{\nu(1-\sigma)}{h_r^2} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) + \frac{\nu \sigma (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})}{(j \cdot h_r) \cdot 2 \cdot h_r} + \\ & + \frac{\nu(1-\sigma)(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{(j \cdot h_r) \cdot 2 \cdot h_r} + g \left(\frac{H^{n+\sigma} + \frac{(V_T |V_T|)^{n+\sigma}}{2g}}{\xi^{n+\sigma}} - 1 \right), j = \overline{1, M-1}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

Найдем аппроксимацию граничных условий симметрии из (2.9) на обозначенном шаблоне по методу уменьшения невязки. Для этого выразим приближенно $u(h_r, t + \sigma h_t)$ при помощи формулы Тейлора

$$u(h_r, t + \sigma h_t) \approx u(0, t + \sigma h_t) + h_r \frac{\partial u(0, t + \sigma h_t)}{\partial r} + \frac{h_r^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u(0, t + \sigma h_t)}{\partial r^2} \right).$$

Во втором слагаемом правой части уравнения (2.9) неопределенность раскрывается по правилу Лопиталя $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} = \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial r^2}$. На основании этого из уравнения (2.9) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{2\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + g \left[1 - \frac{\left(H + \frac{V_T |V_T|}{2g} \right)}{\xi} \right] \right), r = 0, 0 < t \leq T.$$

Подставив последнее равенство в формулу Тейлора, найдем

$$u(h_r; t + \sigma h_t) - u(0; t + \sigma h_t) - \frac{h_r^2}{4\nu} \left[\frac{\partial u(0, t + \sigma h_t)}{\partial t} + g \left[1 - \frac{\left(H + \frac{V_T |V_T|}{2g} \right)}{\xi} \right] \right]_{t+\sigma h_t} \approx 0.$$

Откуда получим выражение, аппроксимирующее краевое условие симметрии

$$\begin{aligned} & \sigma(u_1^{n+1} - u_0^{n+1}) + (1 - \sigma)(u_1^n - u_0^n) - \\ & + \frac{(h_r)^2}{4\nu} \left[\frac{(u_0^{n+1} - u_0^n)}{h_t} + g \left[1 - \frac{\left(H^{n+\sigma} + \left(\frac{V_T |V_T|}{2g} \right)^{n+\sigma} \right)}{\xi^{n+\sigma}} \right] \right] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Аппроксимация остальных условий из (2.9) записывается точно.

Таким образом, разностную схему для (2.9) представим в следующем виде

$$\begin{aligned} a_j u_{j-1}^{n+1} - c_j u_j^{n+1} + b_j u_{j+1}^{n+1} &= -f_j^{n+1} + \tilde{f}_j^{n+\sigma}, \quad j = \overline{1, M-1}, \\ u_0^{n+1} &= \lambda_1 u_1^{n+1} + \mu_1, \quad u_M^{n+1} = 0, \quad u_j^0 = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\text{где } a_j = \frac{\nu \sigma}{h_r} \left(\frac{1}{h_r} - \frac{1}{2(j \cdot h_r)} \right), \quad c_j = \frac{2\nu \sigma}{h_r^2} + \frac{1}{h_t}, \quad b_j = \frac{\nu \sigma}{h_r} \left(\frac{1}{h_r} + \frac{1}{2(j \cdot h_r)} \right),$$

$$f_j = \frac{\nu(1-\sigma)}{h_r} \left(\frac{1}{h_r} - \frac{1}{2(j \cdot hr)} \right) u_{j-1}^n + \left(\frac{1}{h_t} - \frac{2\nu(1-\sigma)}{h_r^2} \right) u_j^n + \frac{\nu(1-\sigma)}{h_r} \left(\frac{1}{h_r} + \frac{1}{2(j \cdot hr)} \right) u_{j+1}^n,$$

$$\tilde{f}_j^{n+\sigma} = g \left[\frac{H^{n+\sigma} + \left(\frac{V_T |V_T|}{2g} \right)^{n+\sigma}}{\xi^{n+\sigma}} - 1 \right], \quad \xi^{n+\sigma} = \xi^n + \frac{h_t}{2} \cdot \bar{u}^{n+\sigma}, \quad \xi^n = \xi^{n-1} + h_t \cdot (\sigma \bar{u}^n + (1-\sigma) \bar{u}^{n-1}),$$

$$\bar{u}^{n+\sigma} = \sigma \bar{u}^{n+1} + (1-\sigma) \bar{u}^n, \quad \bar{u}^n = \frac{2}{R^2} \left(4 \sum_{j=1}^{\frac{M}{2}} (2j-1) h_r u_{2j-1}^n + 2 \sum_{j=1}^{\frac{M-1}{2}} (2j) h_r u_{2j}^n \right), \quad \lambda_1 = \frac{\sigma}{\sigma + \frac{h_r^2}{4\nu h_t}},$$

$$\mu_1 = \frac{(1-\sigma)}{\sigma + \frac{h_r^2}{4\nu h_t}} u_1^n + \frac{\left(\frac{h_r^2}{4\nu h_t} - (1-\sigma) \right)}{\sigma + \frac{h_r^2}{4\nu h_t}} u_0^n + \frac{h_r^2}{4\nu \left(\sigma + \frac{h_r^2}{4\nu h_t} \right)} \tilde{f}_1^{n+\sigma}.$$

Во втором слагаемом правой части уравнения (2.12) величина $\bar{u}_j^{n+\sigma}$ определяется итерационным методом [139] с заданной точностью. Раскладывая решение в узлах шаблона по формуле Тейлора с центром в точке $\left(r_j, t_{n+\frac{1}{2}}\right)$ и подставляя эти разложения в невязку уравнения (2.10), получим:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}^1 \Big|_j^{n+1/2} &= g \left(1 - \frac{\left(H \left(t + \frac{1}{2} \right) + \frac{V_T |V_T|}{2g} \right)}{\xi \left(t + \frac{1}{2} \right)} \right) - g \left(1 - \frac{\left(H^{n+\sigma} + \frac{V_T |V_T|}{2g} \right)}{\xi^{n+\sigma}} \right) + \frac{\nu h_t}{r_j} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} + \\ &+ \nu h_t \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial r^2} + \frac{(h_t)^2}{8} \left(\nu \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial r^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\nu}{r_j} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial r} \right) + \frac{\nu (h_r)^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + \frac{2}{r_j} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} \right) + \\ &+ \frac{\nu (h_r)^2 h_t}{6 r_j} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial t \partial r^3} + \frac{\nu (h_t)^3}{24 r_j} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial t^3 \partial r} + o \left((h_t)^2 + (h_r)^2 \right), \quad j = \overline{1, M-1}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Невязка для (2.11) имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}^2 \Big|_{j=0}^{n+1/2} &= h_t h_r \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} + \frac{(h_r)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{(h_t)^2 h_r}{8} \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial t^2} + \frac{h_t (h_r)^2}{2} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial r^2} + \frac{(h_r)^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \\ &+ \frac{(h_t)^3 h_r}{24} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{(h_t)^2 (h_r)^2}{16} \frac{\partial^4 u}{\partial r^2 \partial t^2} + \frac{(h_r)^3 h_t}{6} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial r^3 \partial t} + \frac{(h_r)^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} - \\ &- \frac{(h_r)^2}{4\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(h_t)^2}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right) - \frac{(h_r)^2}{4\nu} g \left(1 - \frac{\left(H^{n+\sigma} + \frac{V_T |V_T|}{2g} \right)}{\xi^{n+\sigma}} \right) + o \left((h_t)^2 + (h_r)^2 \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Очевидно, что невязки $\delta \mathcal{F}^3 \Big|_{j=M}^{n+1} = 0, n = 0, 1, 2, \dots, \delta \mathcal{F}^4 \Big|_j^{n=0} = 0, j = \overline{0, M}$. Если ввести сеточную норму $\|\delta \mathcal{F}\| = \max_{n,j} \left\{ \max \left| \delta \mathcal{F}^1 \Big|_j^{n+1/2} \right|, \max \left| \delta \mathcal{F}^2 \Big|_{j=0}^{n+1/2} \right|, \max \left| \delta \mathcal{F}^3 \Big|_{j=M}^{n+1} \right|, \max \left| \delta \mathcal{F}^4 \Big|_j^{n=0} \right| \right\}$, то при $\sigma = \frac{1}{2}$ схема имеет погрешность аппроксимации $\|\delta \mathcal{F}\|_c = O \left((h_t)^2 + (h_r)^2 \right)$, при $\sigma \neq \frac{1}{2} - \|\delta \mathcal{F}\|_c = O \left(h_t + (h_r)^2 \right)$.

Исследование устойчивости линеаризованной схемы (3.12) покажем, используя принцип максимума. Он позволяет доказывать устойчивость в равномерной норме [138]. Введем обозначения

$$\alpha_{-1} = a_j, \quad \alpha_1 = b_j, \quad \alpha_0 = c_j, \quad \beta_{-1} = \frac{\nu(1-\sigma)}{h_r} \left(\frac{1}{h_r} - \frac{1}{2(j \cdot hr)} \right), \quad \beta_0 = \left(\frac{1}{h_t} - \frac{2\nu(1-\sigma)}{h_r^2} \right),$$

$$\beta_1 = \frac{\nu(1-\sigma)}{h_r} \left(\frac{1}{h_r} + \frac{1}{2(j \cdot hr)} \right) \text{ для } j = \overline{1, M-1}; \text{ и}$$

$$\alpha_{-1} = 0, \quad \alpha_1 = \lambda_1, \quad \alpha_0 = 1, \quad \beta_{-1} = 0, \quad \beta_0 = \frac{\left(\frac{h_r^2}{4\nu h_t} - (1-\sigma) \right)}{\sigma + \frac{h_r^2}{4\nu h_t}}, \quad \beta_1 = \frac{(1-\sigma)}{\sigma + \frac{h_r^2}{4\nu h_t}} \text{ для } j = 0.$$

Для устойчивости по начальным данным необходимо выполнение неравенства

$$(1 + Ch_t) |a_0| \geq \sum_{k \neq 0} |a_k| + \sum_l |\beta_l|, \quad C = \text{const}. \quad (2.13)$$

Распишем правую часть (2.13) для $j = \overline{1, M-1}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq 0} |a_k| + \sum_l |\beta_l| &= \frac{\nu\sigma}{h_r} \left(\frac{1}{h_r} - \frac{1}{2(j \cdot hr)} \right) + \frac{\nu\sigma}{h_r} \left(\frac{1}{h_r} + \frac{1}{2(j \cdot hr)} \right) + \frac{\nu(1-\sigma)}{h_r} \left(\frac{1}{h_r} - \frac{1}{2(j \cdot hr)} \right) + \\ &+ \left| \frac{1}{h_t} - \frac{2\nu(1-\sigma)}{h_r^2} \right| + \frac{\nu(1-\sigma)}{h_r} \left(\frac{1}{h_r} + \frac{1}{2(j \cdot hr)} \right) = \frac{2\nu\sigma}{h_r^2} + \frac{2\nu(1-\sigma)}{h_r^2} + \left| \frac{1}{h_t} - \frac{2\nu(1-\sigma)}{h_r^2} \right|. \end{aligned}$$

$$\text{Условие (2.13) примет вид } (1 + Ch_t) \left(\frac{2\nu\sigma}{h_r^2} + \frac{1}{h_t} \right) \geq \frac{2\nu\sigma}{h_r^2} + \frac{2\nu(1-\sigma)}{h_r^2} + \left| \frac{1}{h_t} - \frac{2\nu(1-\sigma)}{h_r^2} \right|$$

и выполняется при

$$\frac{h_r^2}{2\nu} \geq h_t(1-\sigma). \quad (2.14)$$

Отметим, что условие (2.14) совпадает с условием устойчивости схемы с весами для уравнения в декартовой системе координат, полученным с помощью принципа максимума [138]. Правая часть (2.13) для $j = 0$ имеет вид

$$\sum_{k \neq 0} |a_k| + \sum_l |\beta_l| = \frac{1}{\sigma + \frac{h_r^2}{4\nu h_t}} + \left| \frac{\left(\frac{h_r^2}{4\nu h_t} - (1-\sigma) \right)}{\sigma + \frac{h_r^2}{4\nu h_t}} \right|. \quad \text{Тогда условие (2.13) для } j = 0$$

$$(1 + Ch_t) \geq \frac{1}{\sigma + \frac{h_r^2}{4\nu h_t}} + \left| \frac{\left(\frac{h_r^2}{4\nu h_t} - (1 - \sigma) \right)}{\sigma + \frac{h_r^2}{4\nu h_t}} \right| \quad \text{выполняется} \quad \text{при}$$

$$\frac{h_r^2}{4\nu} \geq h_t (1 - \sigma) \quad (2.15).$$

Условие устойчивости схемы по правой части $|a_0| - \sum_{k \neq 0} |a_k| \geq \frac{\chi}{h_t}$, $\chi = \text{const} > 0$ для $j = \overline{0, M-1}$ выполняется безусловно.

Таким образом, линеаризованная схема (2.12) является условно устойчивой с условием (2.15) по начальным данным, правой части и краевым условиям.

Отметим, что оценка (2.15) для явной схемы ($\sigma = 0$) совпадает с оценкой в [139], полученной методом операторных неравенств.

Разностное граничное условие симметрии ухудшает условие устойчивости линеаризованной схемы (2.12).

Код программы для вычислительного эксперимента, реализующий предложенный алгоритм разностного решения, написанный в среде Maple, приведен в Приложении А. Расчеты по программе на современной персональной ЭВМ (8 ядер/ 1 процессор Intel Core 3.4 GHz с 16 Gb оперативной памяти) занимает несколько минут.

2.1.5 Решение в Ansys Fluent

Геометрическая модель. Решим представленную задачу, применив уравнения Навье-Стокса для описания ламинарного движения вязкой несжимаемой жидкости в топливном баке, упрощенная модель которого показана на рис. 2.4. В нем имеется цилиндрический канал, а через нижнюю границу бака принудительно забирается жидкость.

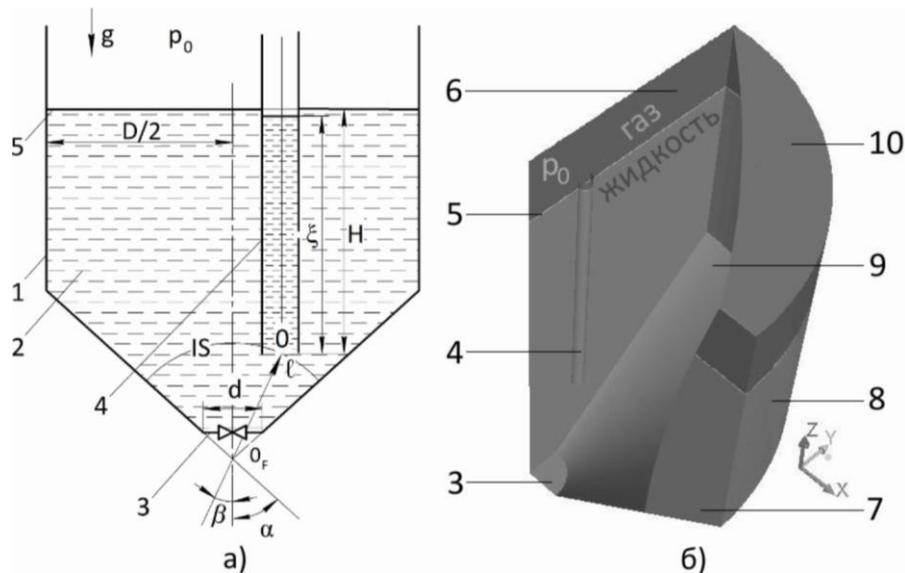


Рис. 2.4. Топливный бак: а) Схема; б) геометрическая модель (для решения в Ansys Fluent); 1 – бак; 2 – жидкость; 3 – нижняя граница бака; 4 – цилиндрический канал; 5 – межфазная граница; 6, 7 – плоскости симметрии; 8, 9 – цилиндрическая и коническая обечайки бака соответственно, 10 – верхняя граница бака, D – диаметр бака, 0 – центр внутренней области; 0_F – теоретический центр, d – диаметр нижней границы бака, ℓ – радиус-вектор точки 0 относительно центра 0_F , α – угол между осью симметрии бака и конической обечайкой бака, β – угол между осью симметрии бака и радиус-вектором ℓ , IS – изотаха.

На рис. 2.4 а) обозначены все необходимые размеры, по которым можно построить геометрическую модель для решения в программном комплексе Ansys Fluent. Высота цилиндрического канала и вертикальных поверхностей бака выше начального уровня свободной поверхности.

При решении задачи в программном комплексе Ansys Fluent нет необходимости строить полную геометрическую модель бака. На рис. 2.4 б) в аксонометрической проекции показаны граничные поверхности расчетной области (геометрическая модель). Наличие плоскостей симметрии у цилиндрического канала (цифра 6 на рис. 2.4) и бака (цифра 7) позволяет оптимизировать расчетную область и ограничиться рассмотрением только четверти от полной геометрии. Плоскость симметрии канала проходит через его

ось и через ось бака, а плоскость 7 выбрана ортогонально плоскости 6. Благодаря использованию геометрической симметрии существенно уменьшаются размеры расчётной области и, как следствие, объем сеточной модели, а, в конечном итоге, укорачивается и время расчета задачи. Для видимости всех поверхностей плоскости симметрии бака и верхнего его основания усечены. На рис. 2.4 б) светлым оттенком изображена тяжелая фаза (жидкость), а тёмным – лёгкая (газ).

Блочная сетка. Для построения сетки используется сеточный генератор ICEM CFD [140].

Поскольку трехмерная геометрическая область рассматриваемой задачи является относительно простой, в которой, очевидно, течение следует преимущественно вдоль поверхностей, а движение предполагается нестационарным, то, согласно [141], решение задачи целесообразно производить на структурированной сетке с гексаэдрическими ячейками. Это экономит расчетное время, поскольку при использовании структурированных сеток оно меньше, чем при использовании неструктурированных (при равенстве количества ячеек сеток).

На рис. 2.5 показаны виды сверху и на плоскость 7 блочной структуры и ячеек сетки, сгенерированных на ней (видны только ближайшие блоки). Вся структура состоит из отдельных блоков, сгруппированных на рис. 2.5 по очередности разбиения исходного блока (на рисунке не показан). На рис. 2.5 а) изображено разбиение, выполненное в плоскости XU с помощью техники «Ogrid Block», на рис. 2.5 б) – последующее разбиение, выполненное нормально к оси Z с помощью техники «Split Block».

Первыми получают блоки (обозначены B_1), грани которых отображаются на плоскости 6 и 7 и на поверхности 8 и 9. Блоки B_2 созданы внутри одного из блоков B_1 , а блоки B_3 – внутри одного из блоков B_2 . Грани блоков B_2 , B_3 отображаются на плоскость 6, а также на внешнюю поверхность цилиндрического канала (обозначена цифрой 11) и на внутреннюю его поверхность (цифра 12) соответственно. Блоки B_4 – B_7 получают разбиением блоков B_1 – B_3

параллельными плоскости XU сечениями. Блоки B_4, B_5 разграничивает сечение, проходящее через нижнее основание цилиндрического канала (цифра 13), блоки B_5, B_6 – сечение через линию стыка конической и цилиндрической обечаек бака (цифра 14), а блоки B_6, B_7 – сечение через верхнее основание цилиндрического канала (цифра 15). Полученное разбиение позволяет отобразить вершины, грани и поверхности блоков на геометрические элементы поверхностей расчетной области, учитывая её особенности.

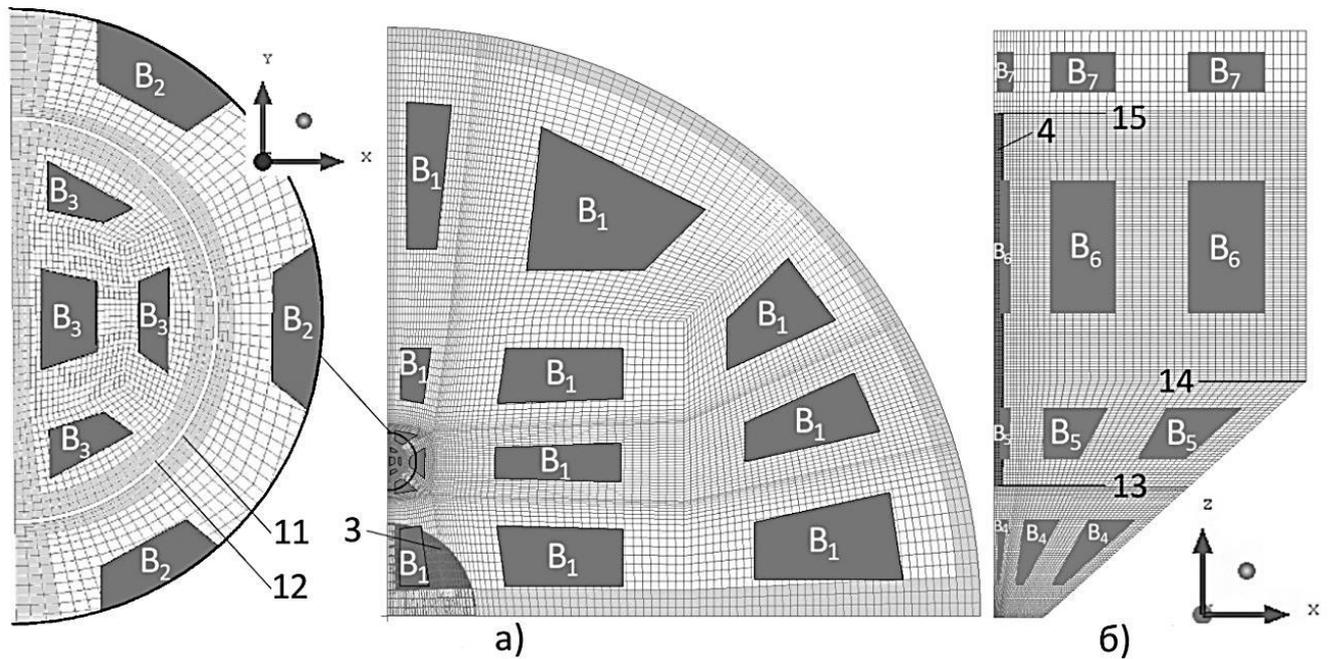


Рис. 2.5. Блочная структура и сетка: а) – вид сверху; б) – вид на плоскость 7;

11, 12 – внешняя и внутренняя поверхности цилиндрического канала соответственно; 13, 15 – нижнее и верхнее основания цилиндрического канала соответственно; 14 – линия стыка конической и цилиндрической обечаек бака;

$B_1 - B_7$ – блоки.

По рис. 2.5 видно, что углы между гранями ячеек (ячейки выделены в три ряда), примыкающих к границам бака и цилиндрического канала, близки к прямым. Таким образом, использование техники «Ogrid Block» позволяет избежать излишней скошенности [141] ячеек сетки, которая иногда приводит к чрезмерной ошибке аппроксимации [142].

Верхняя часть блочной структуры отображается на поверхность 10, а нижняя – на меньшую по площади поверхность 3, что автоматически обеспечивает сгущение сетки к поверхности 3 в отрицательном направлении оси Z (за счет одинакового числа ячеек в любом параллельном плоскости XY сечении). Варьируя число ячеек в блоках B_2 и B_3 , можно добиться необходимого сгущения сетки и в окрестности цилиндрического канала (без потерь на скошенность). Таким образом, может быть получено сгущение сетки в тех местах области (около цилиндрического канала, вниз по течению), где ожидаются большие градиенты скорости течения и, как следствие, могут возникнуть, большие численные ошибки. За счет выбора числа ячеек в блоках $B_4 - B_7$ можно варьировать общее число ячеек во всей расчетной области.

Метод решения. Решение задачи в программном комплексе Ansys Fluent ищется с использованием модели «Volume of Fluid» (VOF) [141]. Эта модель специально разработана для двух или более несмешивающихся жидкостей или газов, поверхность раздела между которыми представляет интерес. Модель основана на решении уравнения Навье-Стокса и уравнения неразрывности, которые решаются во всей области методом контрольных объемов. Уравнение движения является общим для всех рассматриваемых фаз и зависит от их объемных долей через теплофизические свойства (плотность ρ и коэффициент динамической вязкости μ), а уравнение неразрывности записывается отдельно для каждой фазы. Результирующее поле скоростей получается общим для фаз, а межфазную границу определим по равенству объемных долей фаз в ячейке [141].

Поставим граничные условия. На поверхностях 4 (включая 11 – 13, 15), 8 и 9 зададим условия прилипания и непротекания (типа «wall»); на 6 и 7 – условия симметрии (типа «symmetry»); на 10 – величину постоянного статического давления p_0 (типа «pressure outlet»); на 3 – постоянную по направлению z и величине скорость истечения V_F . На поверхности 3 граничное условие имеет тип «velocity-inlet». С помощью процедуры «Solution Initialization» и «Region Adaption» задаём начальный уровень свободной поверхности жидкости (равный в

баке и цилиндрическом канале) и невозмущенное поле скоростей. В меню «Operating Conditions» определяем внешние условия (атмосферное давление, ускорение свободного падения).

В Ansys Fluent начальные поля скорости и давления инициализируются решением в расчетной области уравнения Лапласа с заданными граничными условиями. Поэтому невозмущенные начальные условия по приближенным моделям будут несколько отличаться от начальных условий в Ansys Fluent. Далее в разделе при сравнении результатов расчетов начальные условия соответствуют начальным условиям по Ansys Fluent.

В Ansys Fluent необходимо задать параметры численного решения задачи (схему, метод и порядок дискретизации уравнений, параметров релаксации), параметры, контролирующие численный счет (точность решения уравнений, выбор временного шага и их количество), параметры вывода результатов и статистики расчета и прочие. Эти параметры установим такими, как в руководствах [143], [144].

2.1.6 Результаты

Для контроля сходимости решение в Ansys Fluent выполнено на трёх разных по количеству ячеек сетках: $0,5 \cdot 10^6$; $4,5 \cdot 10^6$; $10,8 \cdot 10^6$ шт. Время решения задачи зависит от объема сетки и варьируется от 2 до 8 суток при использовании 64 процессоров на кластере для 15 секунд процесса (характеристики кластера: 64 ядра/16 процессоров Intel Xeon 2.7 GHz/4 узла с 120 Gb оперативной памяти и 836 Gb дисковой памяти на узел).

Течение в баке. Поскольку истечение из бака происходит через поверхность 3 с постоянной скоростью, то поле скоростей под свободным уровнем межфазной поверхности в нем можно считать установившимся. Тогда для определения поля скоростей во внешней области применим свойство течения при пространственном стоке – точке. Оно заключается в том, что скорость жидкости во внешней области в любом месте, находящемся на расстоянии l от

теоретического центра – точки 0_F (рис. 2.4), одинакова по величине и направлена к 0_F . При этом краевыми эффектами на границах пренебрегаем. Тогда изотахи будут представлять собой боковые поверхности шаровых сегментов.

Проведем через точку 0 (рис. 2.4) изотаху IS и составим уравнение расхода через поверхность 3 и IS : $S_\ell \cdot V_\ell = S_F \cdot V_F$, откуда найдем неизвестную скорость

$$V_\ell = \frac{V_F d^2}{8 \ell^2 (1 - \cos \alpha)}, \quad V_T = V_\ell \cdot \cos \beta. \quad (2.16)$$

Выпишем входные данные задачи: $R = 0,039$ м, $H_0 = 1,55$ м, $V = -0,04$ м/с, $d = 0,42$ м, $\ell = 0,757$ м, $\alpha = \frac{12}{45}\pi$, $\beta = \frac{25}{180}\pi$, $g = -9,81$ м/с², $D = 2,66$ м. У жидкости $\rho = 780$ кг/м³, $\mu = 0,0024$ кг/(м·с), у газа $\rho = 1,225$ кг/м³, $\mu = 1,79 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с). Вычисления по формуле (2.16) дают $V_T = -0,14$ м/с, в Ansys Fluent – $V_T \approx -0,16$ м/с (данные Ansys Fluent будем использовать в вычислительном эксперименте).

На рис. 2.6 представлены изотахи во внешней области на поверхности 7 – а) и на поверхности 6 – б), полученные в Ansys Fluent (изображены тонкой линией) и рассчитанные по формуле (2.16) (жирная кривая). На изотахах цифрами обозначена соответствующая скорость.

По рис. 2.6 видно, что кривые, полученные в Ansys Fluent, близки с теоретическими дугами (2.16). Как и следовало ожидать, наибольшее расхождение заметно у линий со скоростями $V = 1,00; 0,05$ м/с, поскольку эти кривые ближе других находятся к границам, где нарушаются условия пространственного стока (плоская линия для скорости $V = 1,60$ м/с и изменение геометрии бака при переходе конической в цилиндрическую границу). Таким образом, по формуле (2.16) можно приближенно определить поле скоростей жидкости во внешней области при принудительном истечении из неё.

Течение в цилиндрическом канале. На рис. 2.7 показана функция давления в цилиндрическом канале в разные моменты времени, полученная в Ansys Fluent. По рисунку видно, что функция является линейной, и предположение (2.3) подтверждается.

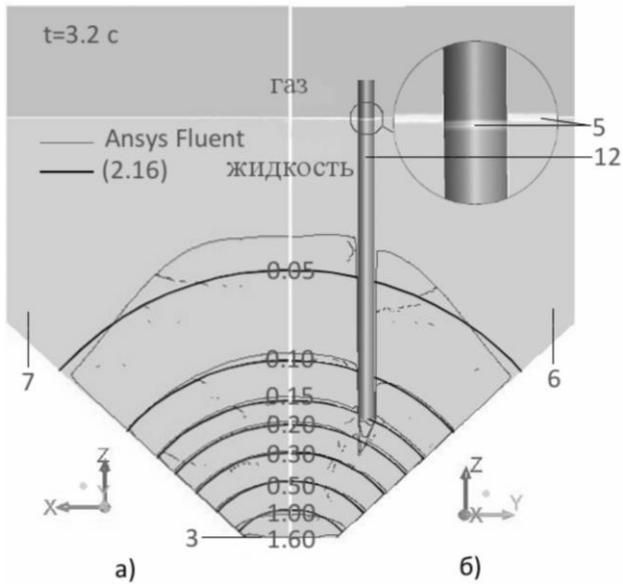


Рис. 2.6. Изоахи в баке: на поверхностях 7 – а) и 6 – б).

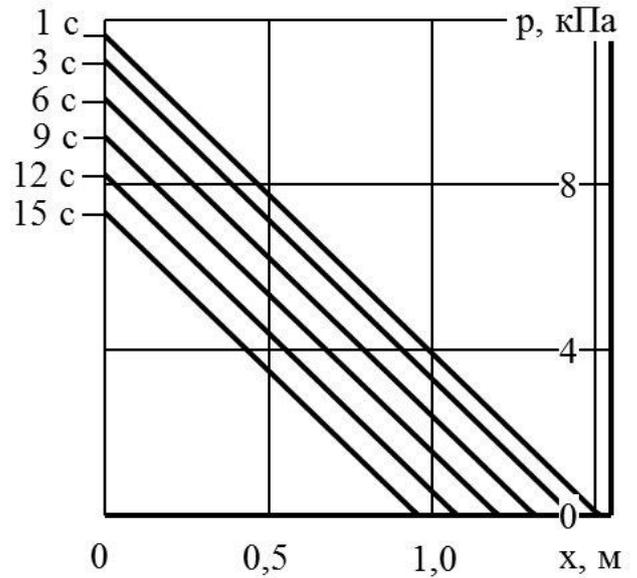


Рис. 2.7. Функция давления на оси цилиндрического канала в разные моменты времени (Ansys Fluent)

На рис. 2.8 показан профиль скорости в цилиндрическом канале в разные моменты времени (значения времени обозначены цифрами на соответствующих кривых), полученный по базовому методу. Можно видеть, что расход жидкости в канале является неустановившемся и изменяется периодически: то увеличиваясь (при t от 3,8 до 7,4 с или при t от 8,5 до 14,0 с), то уменьшаясь (при t от 2,5 до 3,8 с или при t от 7,4 до 8,5 с). Наибольшее изменение функция скорости имеет при $r \rightarrow R$, принимая то отрицательные значения (при $t = 2,5; 7,4; 14,0; 25,0$ с), то положительные (при $t = 3,8; 8,5; 14,9; 25,5$ с). Начиная с некоторого момента времени, функция скорости принимает значения только одного знака, наибольшее её изменение происходит уже при $r \rightarrow 0$. Максимальная скорость приближается к скорости при установившемся режиме ($t \approx 31,5$ с), когда она равна удвоенному значению средней скорости, равной скорости опускания уровня свободной поверхности жидкости в баке ($V = -0,04$ м/с).

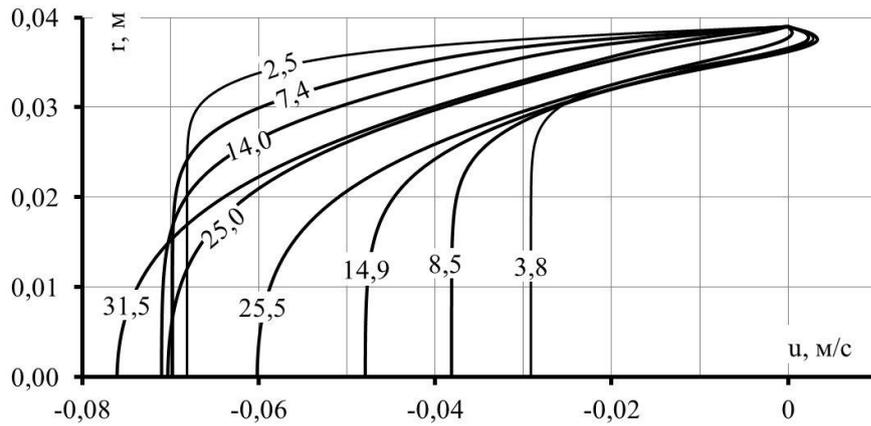


Рис. 2.8. Профиль скорости в канале при различных значениях t

Выделим в цилиндрическом канале столб жидкости высотой ξ и проанализируем силы, действующие на него. По уравнению движения (2.4) видно, что движущей силой является градиент давления, который возникает по причине инерционности жидкого столба. Демпфирующей является сила трения о стенки. На рис. 2.9 и 2.10 приведены силы трения и инерции, действующие на столб, в зависимости от времени, полученные по приближенному и базовому методам.

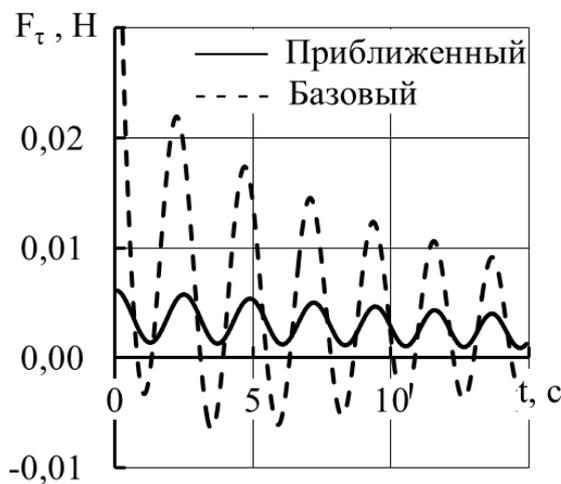


Рис. 2.9. Силы трения

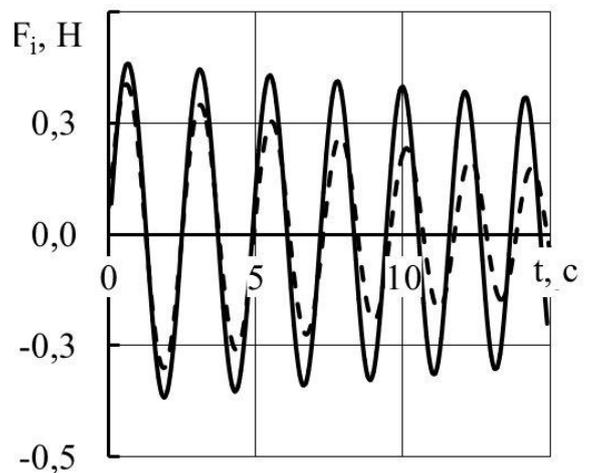


Рис. 2.10. Силы инерции

Поскольку всякая нестационарность приводит к увеличению сопротивления, силы трения по базовому методу превосходят соответствующие силы по приближенному методу. Как следует из сравнения величин сил трения и инерции ($F_\tau \ll F_i$), общий вклад сил трения на движение столба является незначительным, а преимущественное значение имеют силы инерции. С течением

времени масса столба уменьшается, следовательно, уменьшается и его инерционность.

На рис. 2.11 приведены функции $\Delta = H - \zeta$ (разница уровней свободной поверхности в цилиндрическом канале и баке) в зависимости от времени, полученные по различным методам. Падение инерционности столба сопровождается затуханием колебаний уровня свободной поверхности с течением времени. Оценим функции по отношению $\frac{\max|\Delta_1(x) - \Delta_2(x)|}{\max(|\Delta_1(x)|, |\Delta_2(x)|)}$: отличие функций, полученных по базовому методу (Δ_B) и в Ansys Fluent (Δ_{AF}) – менее 15 %, а функций Δ_B и Δ_{II} (полученной по приближенному методу) – 40 %. По рисунку видно, что данные, полученные в пакете Ansys Fluent, хорошо согласуются с результатами, полученными по базовому методу, что подтверждает адекватность результатов. Базовый метод лучше, чем приближенный описывает инерционность процесса, и, его результаты, как следствие, лучше согласуются с результатами, полученными в Ansys Fluent.

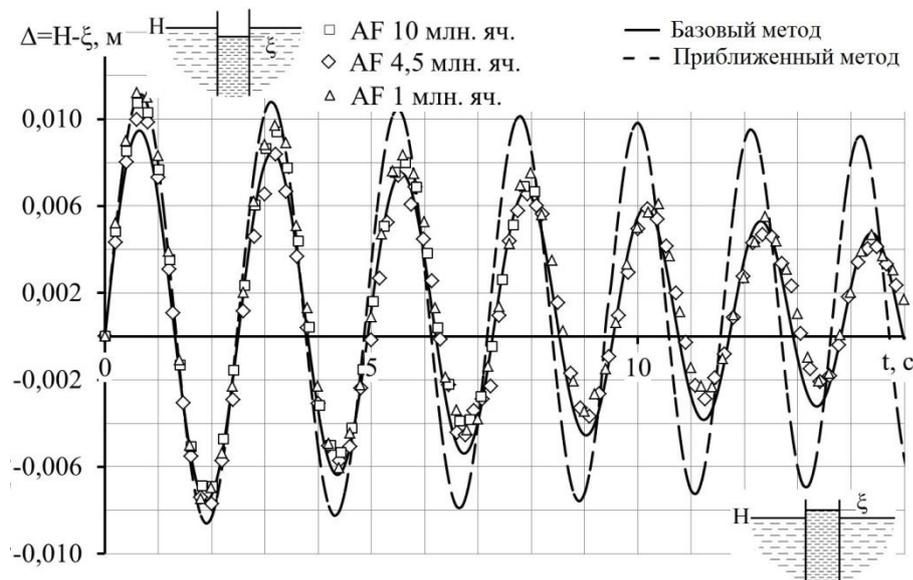


Рис. 2.11. Зависимость функций Δ от времени

На рис. 2.12 показаны функции Δ при различных значениях R и g (базовый метод). Как и следовало ожидать, с уменьшением радиуса цилиндрического канала, масса столба, а, следовательно, и его инерционность уменьшаются,

колебания затухают быстрее. С повышением ускорения g период и амплитуда колебаний уменьшаются.

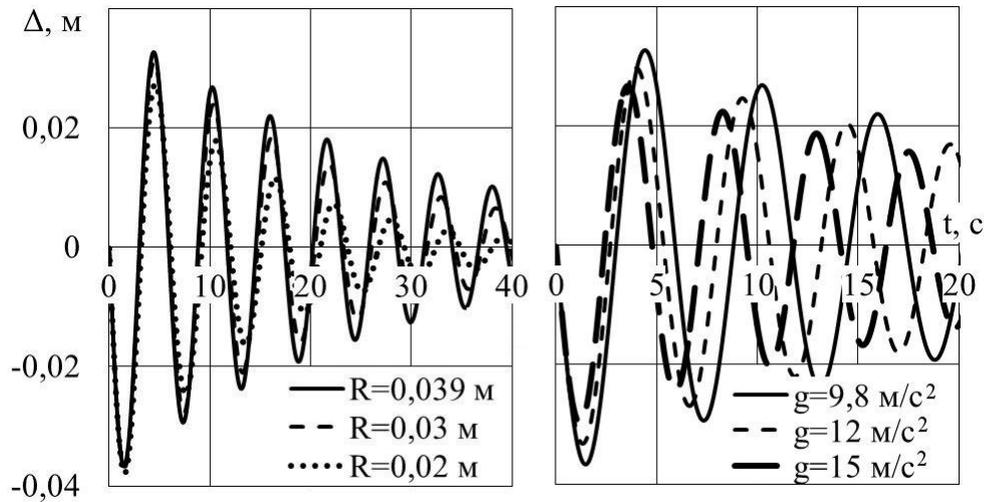


Рис. 2.12. Функции Δ при различных значениях R и g

2.2 Метод для вертикального цилиндрического канала с удлиннителями

2.2.1 Постановка задачи

Введем две локальные системы координат (r, θ, x) (обозначения с системой координат, введенной в п. 2.1.1, совпадают), каждую из которых свяжем с областью $G_{us} = \{(r, \theta, x) : r \leq R_{us}, 0 \leq x \leq \ell_{us}\}$ (рис. 2.13). На рис. 2.13 обозначение области и соответствующая система координат показаны только для одной из двух областей. Тогда $\bar{G} = G \bigcup_{i=1,2} G_{us}^i$ – внутренняя область, $\bar{G}_T = \Omega \setminus \bar{G}$ – внешняя область. Через области $G_{us}^i, i = \overline{1,2}$ жидкость свободно сообщается между внутренней и внешней областями.

Поскольку вектор \bar{g} нормален к оси Ox , для описания движения жидкости в области G_{us} используем уравнение (2.1) без учета массовой силы. Функция давления предполагается линейной.

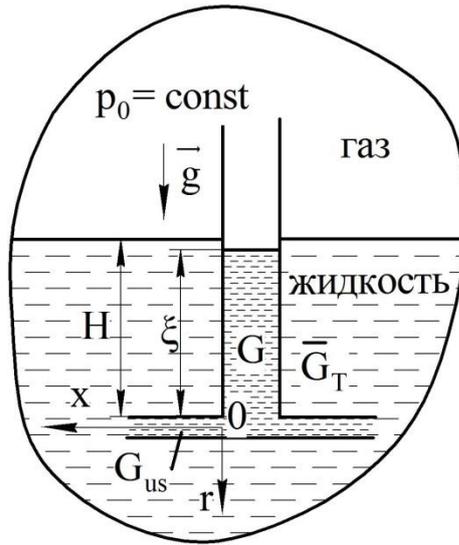


Рис. 2.13. Двусвязная полость с цилиндрическим каналом и удлинителями

При $x = \ell_{us}$ функция давления принимает значение $p = p_0 + \rho g H$ (динамическое давление не учитывается), а при $x = 0$ — значение $p = p_0 + \rho g \xi$.

Тогда градиент давления будет $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{g(H - \xi)}{\ell_{us}}$. С учетом принятых допущений

уравнение движения в области G_{us} примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{g(H - \xi)}{\ell_{us}}. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) «закрывается» соотношением для определения уровня в вертикальном канале, в котором учитывается изменение расхода жидкости в $k = 2$

областях G_{us} (удлинителях) $\xi = H_0 - \frac{2 \cdot k}{R^2} \int_0^t \int_0^{R_{us}} r u dr dt$.

Таким образом, математическая модель для описания движения жидкости в области G_{us} и для определения уровня свободной поверхности в области \bar{G} имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{g(H - \xi)}{\ell_{us}}, \quad \xi = H_0 - \frac{2 \cdot k}{R^2} \int_0^t \int_0^{R_{us}} r u dr dt, \quad 0 < r < R, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(0, t) = 0; \quad u(R_{us}, t) = 0, \quad u(r, 0) = 0.$$

Поскольку математическая модель (2.9) отличается от модели (2.18) только по внешнему виду, разностные схемы и алгоритмы их решения совпадают.

2.2.2 Постановка задачи для Ansys Fluent

Геометрическая модель представлена на рис. 2.14. Для того чтобы уменьшить расчетную область, предположим, что течение во внутренней и внешней областях симметрично относительно плоскости симметрии областей G_{us} (II-IV на рис. 2.14). Ассиметричное положение внутренней области относительно плоскости I-III учитывать не будем. Тогда, геометрическую модель можно представить лишь четвертью от полной геометрии. Таким образом, геометрическая модель, представленная на рис. 2.14 справа, повторяет геометрическую модель, представленную на рис. 2.4 справа, отличаясь наличием областей G_{us} . Следовательно, блочная структура, предложенная разделе 2.1 (рис. 2.5) сохраняется.

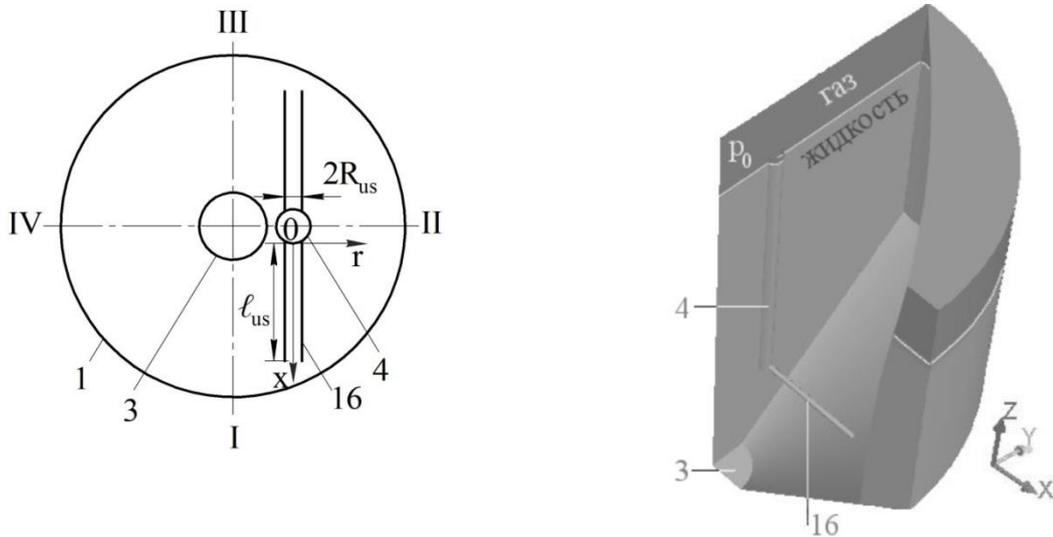


Рис. 2.14. Бак с цилиндрическим каналом и удлиннителями: 1 – бак; 3 – нижнее основание бака; 4 – область G ; 16 – область G_{us}

Для создания блочной структуры около области G_{us} необходимо разбить блоки $B_4 - B_7$ параллельными плоскостям XY и XZ сечениями на блоки B_8 – рис. 2.15 (показана только часть блоков B_8 , находящихся на одной высоте z с

областью G_{us}). Блоки B_8 созданы так, чтобы в тех из них, внутри которых находится область G_{us} , можно было создать блочную круговую структуру над внешней поверхностью области G_{us} (блоки B_9) и под внутренней её поверхностью (блоки B_{10}). Такая структура позволяет избежать скошенности ячеек сетки вокруг области G_{us} , как это видно на рис. 2.15, где углы между гранями ячеек, примыкающих к области G_{us} , почти прямые.

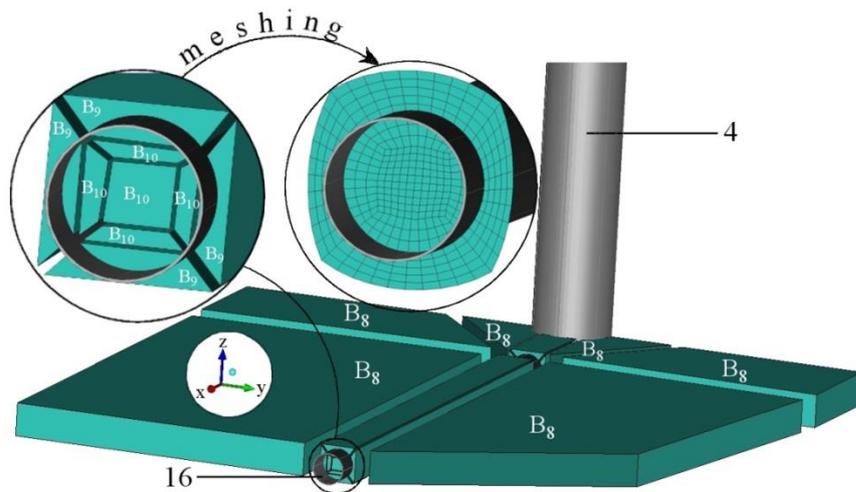


Рис. 2.15. Блочная структура и сетка около области G_{us} : 4 – область G ;
16 – область G_{us}

Метод решения задачи в Ansys Fluent совпадает с методом, рассмотренном в предыдущем разделе.

2.2.3 Результаты решения для канала с удлинительями

Входные данные по геометрии и физическим величинам сохраняются. Для области G_{us} примем $R_{us} = 0,015$ м, $l_{us} = 0,6$ м. На рис. 2.16 и 2.17 представлены полученные в Ansys Fluent в разные моменты времени функции давления в области G_{us} и скорости в различных её сечениях соответственно.

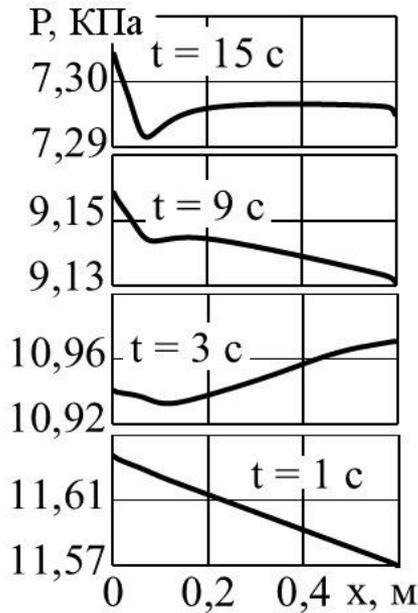


Рис. 2.16. Функция давления в области G_{us} в разные моменты времени

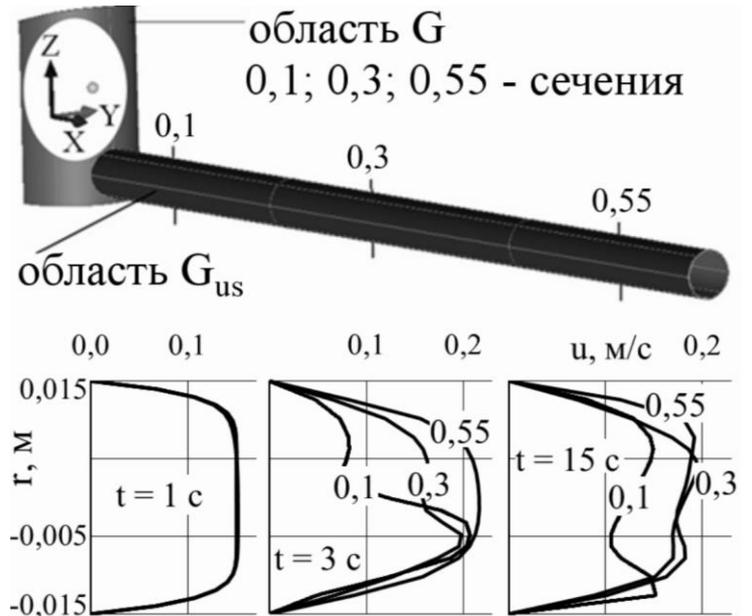


Рис. 2.17. Профили скорости в области G_{us} в разные моменты времени и в различных сечениях

В начальный момент времени ($t=1$ с) функция давления в области G_{us} является линейной, профиль скорости симметричен относительно оси Ox и не зависит от координаты x . Затем ($t \geq 3$ с) функция давления становится нелинейной, и симметрия профиля скорости нарушается, функция изменяется по координате x . Таким образом, в общем случае функция давления в области G_{us} является нелинейной, а течение – трехмерным, то есть более сложным, чем предполагалось при построении математической модели (2.18), что объясняет отличие в функциях Δ , полученных по представленному методу (Модель) и в Ansys Fluent и представленное на рис. 2.18: отличие по значениям функций – 50 %. Уровень свободной поверхности во внутренней области может быть описан методом на основе (2.18) только при малых значениях t ($t \approx 1$ с). При больших значениях t необходимо использовать уравнения Навье-Стокса.

На рис. 2.19 и 2.20 показана функция Δ , полученная по предложенному методу (Модель) и в Ansys Fluent (AF) при $R_{us} = 0.015$ м, $\ell_{us} = 0.3$ м и при $R_{us} = 0.025$ м, $\ell_{us} = 0.6$ м соответственно. По рис. 3.18 – 3.20 видно, что решение

слабо зависит от количества ячеек сетки и, следовательно, свидетельствует о его сходимости.

Результаты работы использованы в проектных расчетах профильного отдела АО «РКЦ «Прогресс», что отражено в акте (Приложение Д).

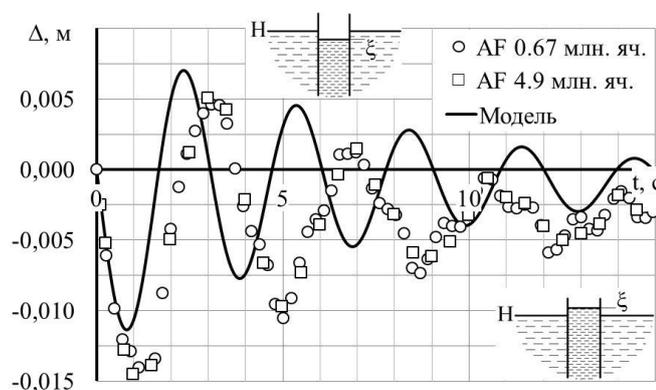


Рис. 2.18. Зависимость функции Δ от времени для канала с удлиннителями ($R_{us} = 0,015$ м, $\ell_{us} = 0,6$ м)

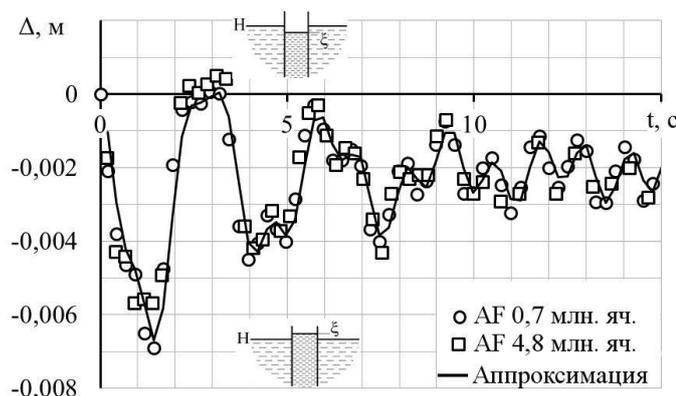


Рис. 2.19. Зависимость функции Δ от времени для канала с удлиннителями ($R_{us} = 0,015$ м, $\ell_{us} = 0,3$ м)

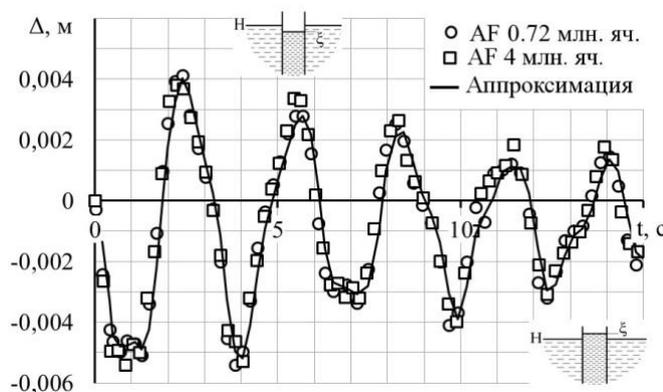


Рис. 2.20 – Зависимость функции Δ от времени для канала с удлиннителями ($R_{us} = 0,025$ м, $\ell_{us} = 0,6$ м)

2.3 Выводы по второй главе

1. На основе модифицированных уравнений Навье-Стокса, описывающих течение вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрическом канале, предложен метод математического моделирования, позволяющий прогнозировать рассогласование уровня свободной поверхности жидкости в канале системы управления расходом топлива относительно уровня в баке ракеты-носителя. Решение получено с помощью предложенного в диссертации разностного метода. Получено решение по методу, реализованному в программном комплексе Ansys Fluent на основе уравнений Навье-Стокса.
2. Установлено, что уровень свободной поверхности в канале совершает затухающие колебания относительно уровня в баке. Показано, что причиной колебаний является инерционность вязкой жидкости. Результаты, полученные с помощью различных методов математического моделирования, имеют удовлетворительное совпадение (от 15 до 40 %).
3. Программы, реализующие алгоритмы численного решения по предложенному методу, позволяют получать результаты на три порядка быстрее программы Ansys Fluent. Тогда как решение в программе Ansys Fluent (в рамках уравнений Навье-Стокса) позволяет контролировать решение этих программ.

Глава 3

Метод математического моделирования двухсредного пограничного слоя на плоской пластине

В главе разрабатывается метод математического моделирования двухсредного стационарного ламинарного пограничного слоя со скользящей границей на полубесконечной пластине (рис. 3.1). К двухсредному пограничному слою относятся, например, задачи о пограничном слое и движущейся по пластине тонкой пленке жидкости. Пластина расположена под углом α к горизонту в поле силы тяжести и помещена в поток воздуха, вектор которого совпадает с плоскостью пластины. Задача рассматривается в плоской постановке.

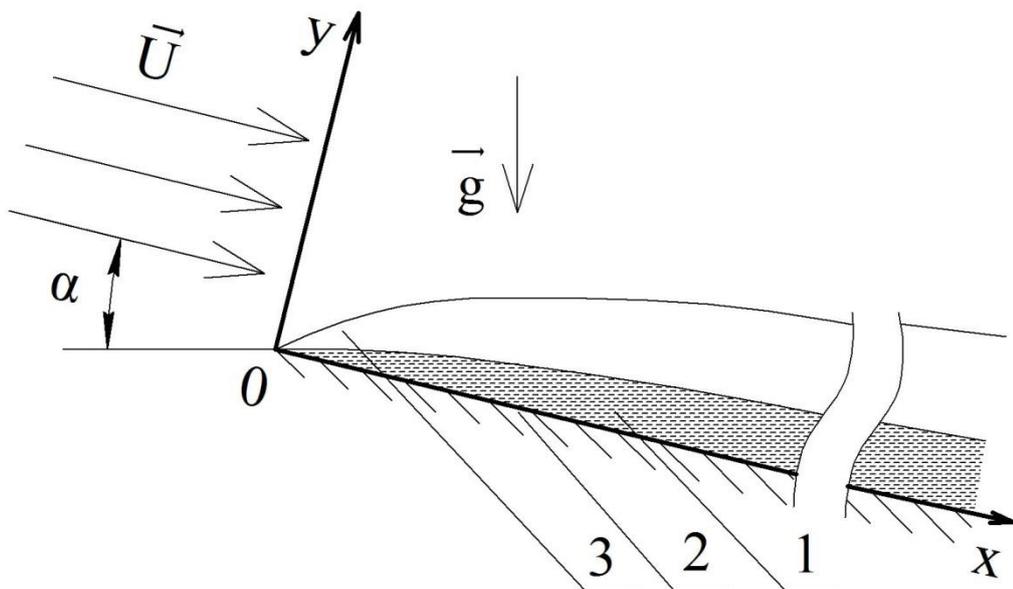


Рис. 3.1. Двухсредный пограничный слой: 1 – внутренний (жидкость); 2 – пластина; 3 – внешний (газ); \vec{g} – ускорение свободного падения; \vec{U} – скорость набегающего потока; α – угол наклона к горизонту.

Внутренний пограничный слой рассматривается как элемент пластины. Поступление массы во внутренний пограничный слой из окружающей среды считается равномерным по длине пластины и нормальным к пластине по

направлению. Влияние потока массы на внешний пограничный слой не учитывается.

Решение задач о двухсредном пограничном слое мало представлено в литературе. Известны автомодельные и близкие к ним решения двухсредного пограничного слоя [85], [89]. В этой главе представлен метод, в котором развит численный метод конечных разностей.

В общей постановке задача является сопряженной, включающей задачу о внутреннем и внешнем пограничных слоях. Решение сопряженной задачи в рамках теории пограничного слоя приводится в подразделах (3.1) – (3.3). Решение задачи по методу, развитому в программном комплексе Ansys Fluent с помощью уравнений Навье-Стокса, в приводится в подразделе (3.4).

3.1 Приближенный аналитический метод решения для задачи внутреннего пограничного слоя

В приближении теории пограничного слоя запишем уравнение движения и неразрывности для несжимаемой жидкости (индекс 1 относится к внутреннему пограничному слою)

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = g \sin \alpha + \nu_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 < y < \delta_1, \quad (3.1)$$

где $u(x, y), v(x, y)$ – проекции вектора скорости на оси Ox и Oy соответственно (продольная и поперечная скорости), ν – кинематическая вязкость.

Поставим граничные условия. На пластине задаем условия прилипания и непротекания

$$u_1(x, 0) = v_1(x, 0) = 0. \quad (3.2)$$

На верхней границе $y = \delta_1(x)$, согласно закону Ньютона, задаем функцию трения $\tau_1(x)$, полученную из решения внешней задачи

$$\mu_1 \frac{\partial u_1(x, \delta_1)}{\partial y} = \tau_1(x). \quad (3.3)$$

Формирование внутреннего пограничного слоя осуществляется поступлением массы v_k из окружающей среды. Дополним уравнения (3.1) кинематическим граничным условием

$$v_1(x, \delta_1) = u_1(x, \delta_1) \frac{d\delta_1(x)}{dx} - v_k. \quad (3.4)$$

Таким образом, математическая модель внутреннего пограничного слоя включает в себя соотношения (3.1) – (3.4).

Введем безразмерные переменные (обозначения сохранены)

$$x = \frac{x}{L}, y = \frac{y}{\delta^*}, \delta_1 = \frac{\delta_1}{\delta^*}, u_1 = \frac{u_1}{u^*}, v_1 = \frac{v_1}{v_k}, \tau_1 = \frac{\delta^*}{\mu_1 u^*} \tau_1. \quad (3.5)$$

С учетом (3.5) уравнение движения из (3.1) примет вид

$$\frac{\delta^*}{L} \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \frac{v_1}{\delta^* u^*} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\delta^* g \sin \alpha}{u^{*2}}. \quad (3.6)$$

Масштабы толщины δ^* и скорости u^* определим из баланса сил тяжести и вязкого трения. Тогда из (3.6) найдем

$$\frac{v_1}{\delta^* u^*} = \frac{\delta^* g}{u^{*2}}. \quad (3.7)$$

Из уравнения неразрывности (3.1) получим связь масштабов $u^* = v_k L / \delta^*$, и с

учетом (3.7) будем иметь $\delta^* = \sqrt[3]{\frac{v_k L v_1}{g}}$, $u^* = \sqrt[3]{\frac{v_k^2 L^2 g}{v_1}}$, L – длина расчетной области.

3.1.1 Нулевое приближение

Будем считать, что «относительная толщина» внутреннего пограничного слоя $\frac{\delta^*}{L}$ мала, а число Рейнольдса $Re_1 = \frac{\delta^* u^*}{\nu_1}$ невелико и параметр $\varepsilon = \frac{\delta^*}{L} Re_1$ можно считать малым, то есть $\varepsilon \ll 1$. С учетом (3.7) уравнение (3.6) примет вид

$$\varepsilon \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \sin \alpha .$$

Вид уравнения неразрывности не изменится. Будем искать приближенное решение системы: представим неизвестные функции в виде рядов по степеням малого параметра, пренебрегая слагаемыми второго и более порядков малости (далее в разделе нижний индекс означает порядок приближения, а переменные без индекса соответствуют внутреннему пограничному слою)

$$u = u_0 + \varepsilon u_1, \quad v = v_0 + \varepsilon v_1, \quad \delta = \delta_0 + \varepsilon \delta_1. \quad (3.8)$$

Тогда в нулевом приближении краевая задача для функции продольной скорости имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} &= -\sin \alpha, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \delta_0, \\ u_0(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u_0(x, \delta_0)}{\partial y} = \tau. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Решением (3.9) будет

$$u_0 = \delta_0^2 \left(\frac{y}{\delta_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_0} \right)^2 \right) \sin \alpha + \tau y. \quad (3.10)$$

Определим функцию поперечной скорости, проинтегрировав уравнение неразрывности из (3.1), с учетом (3.5), (3.10) и граничного условия $v_0(x, 0) = 0$:

$$v_0 = -(\tau + \delta_0 \sin \alpha)' \frac{y^2}{2}. \quad (3.11)$$

Подставляя безразмерные переменные (3.5) и полученные выражения (3.10), (3.11) в кинематическое граничное условие, получим следующий его вид:

$$1 = \left(\frac{\delta_0^2}{2} \sin \alpha + \tau \delta_0 \right) \delta_0' + (\tau + \delta_0 \sin \alpha)' \frac{\delta_0^2}{2}. \quad \text{Объединим слагаемые под знаком}$$

производной по переменной x (обозначено штрихом) $\left(\frac{\delta_0^3}{3} \sin \alpha + \frac{\delta_0^2}{2} \tau \right)' = 1,$

откуда, проинтегрировав, получим уравнение для определения функции δ_0 :

$$\delta_0^3 \sin \alpha + \frac{3}{2} \delta_0^2 \tau - 3x = 0. \quad (3.12)$$

Таким образом, решение задачи внутреннего пограничного слоя в нулевом приближении – выражения (3.10) – (3.12).

3.1.2 Первое приближение

Уравнения движения и неразрывности примут вид

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \delta_0 + \varepsilon \delta_1. \quad (3.13)$$

Они дополняются граничными условиями

$$u_1(x, 0) = v_1(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, \delta_0 + \varepsilon \delta_1)}{\partial y} = \tau(x) \quad (3.14)$$

и кинематическим граничным условием

$$v(x, \delta_0 + \varepsilon \delta_1) = u(x, \delta_0 + \varepsilon \delta_1) \frac{d\delta}{dx}(x) - 1. \quad (3.15)$$

Преобразуем второе условие в (3.14), для чего подставим в него разложение функции u в ряд в окрестности δ_0 с первым порядком точности

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(u(x, \delta_0) + \varepsilon \delta_1 \frac{\partial u(x, \delta_0)}{\partial y} \right) = \tau(x).$$

Раскладывая далее функцию u в соответствии с (3.8), получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(u_0(x, \delta_0) + \varepsilon u_1(x, \delta_0) + \varepsilon \delta_1 \left(\frac{\partial u_0(x, \delta_0)}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial u_1(x, \delta_0)}{\partial y} \right) \right) = \tau. \quad (3.16)$$

Оставляя в выражении (3.16) только слагаемые с коэффициентом ε , получим

$$\frac{\partial u_1(x, \delta_0)}{\partial y} + \delta_1(x) \frac{\partial^2 u_0(x, \delta_0)}{\partial y} = 0.$$

Учитывая (3.9), последнее выражение запишется в следующем виде:

$\frac{\partial u_1(x, \delta_0)}{\partial y} = \delta_1(x) \sin \alpha$. Таким образом, граничные условия (3.14) переписутся так:

$$u_1(x, 0) = 0, \quad v_1(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1(x, \delta_0)}{\partial y} = \delta_1(x) \sin \alpha. \quad (3.17)$$

Для упрощения выражения (3.15) сделаем с ним те же преобразования, что и со вторым условием в (3.14). Сначала подставим в (3.15) неизвестные функции, разложенные в ряд в окрестности δ_0 с первым порядком точности, а затем воспользуемся разложением (3.8), откуда получим

$$\begin{aligned} & (v_0(x, \delta_0) + \varepsilon v_1(x, \delta_0)) + \varepsilon \delta_1 \left(\frac{\partial v_0(x, \delta_0)}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial v_1(x, \delta_0)}{\partial y} \right) = \\ & = \left[(u_0(x, \delta_0) + \varepsilon u_1(x, \delta_0)) + \varepsilon \delta_1 \left(\frac{\partial u_0(x, \delta_0)}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial u_1(x, \delta_0)}{\partial y} \right) \right] (\delta_0(x) + \varepsilon \delta_1(x))' - 1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Сохраним в (3.18) слагаемые с коэффициентами ε (далее аргументы у функций опущены, а штрих над функцией означает её производную по x)

$$v_1 + \delta_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} = u_0 \delta_1' + u_1 \delta_0' + \delta_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} \delta_0'. \quad (3.19)$$

Преобразуем выражение (3.19), для чего подставим в него производные известных функций $\frac{\partial u_0}{\partial y} = (\delta_0 \sin \alpha + \tau) - y \sin \alpha$; $\frac{\partial v_0}{\partial y} = -(\delta_0 \sin \alpha + \tau) y$ и выражения (3.10), (3.11):

$$\begin{aligned} v_1 - \delta_1 \delta_0 (\tau + \delta_0 \sin \alpha)' &= \left(\frac{\delta_0^2}{2} \sin \alpha + \delta_0 \tau \right) \delta_1' + u_1 \delta_0' + \delta_1 \delta_0' \tau \text{ или} \\ v_1 - u_1 \delta_0' &= \delta_1 \delta_0 \tau' + \delta_1 \delta_0' \sin \alpha \delta_0 + \frac{\delta_0^2}{2} \delta_1' \sin \alpha + \delta_1' \delta_0 \tau + \delta_1 \delta_0' \tau. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В (3.20) левую часть оставляем без изменений, в правой части объединим первое и последнее слагаемые, второе слагаемое представим под знаком производной, а для третьего и четвертого слагаемых вынесем общий множитель

$$v_1 - u_1 \delta_0' = \delta_1 (\delta_0 \tau)' + \delta_1 \left(\frac{\delta_0^2}{2} \sin \alpha \right)' + \delta_1' \left(\frac{\delta_0^2}{2} \sin \alpha + \delta_0 \tau \right). \quad (3.21)$$

В правой части (3.21) вынесем общий множитель для первого и второго слагаемых и объединим с третьим слагаемым, откуда получим окончательный вид кинематического условия

$$v_1 - u_1 \delta_0' = \left[\delta_1 \left(\delta_0 \tau + \frac{\delta_0^2}{2} \sin \alpha \right) \right]' \quad (3.22)$$

Таким образом, для определения первого приближения необходимо найти решение уравнений (3.13) с граничными условиями (3.17) и кинематическим условием (3.22).

Найдем решение уравнения движения из (3.13), для чего распишем его правую часть с учетом известных соотношений (3.10) и (3.11), и вводя обозначение $p = \delta_0 \sin \alpha + \tau$

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = \left(py - \frac{y^2}{2} \sin \alpha \right) p' y = \frac{(p^2)'}{2} y^2 - \frac{p'}{2} y^3 \sin \alpha,$$

$$v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = \left(-p' \frac{y^2}{2} \right) (p - y \sin \alpha) = \frac{p'}{2} y^3 \sin \alpha - \frac{(p^2)'}{4} y^2.$$

Складывая последние выражения и приводя подобные члены, получим

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{(p^2)'}{4} y^2. \quad (3.23)$$

С учетом (3.23) уравнение движения из (3.13) примет вид

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{(p^2)'}{4} y^2,$$

решением которого будет

$$u_1 = \frac{(p^2)'}{48} y^4 + C_1 y + C_2, \quad (3.24)$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования, которые определим с помощью граничных условий (3.17)

$$C_1 = \delta_1 \sin \alpha - \frac{(p^2)'}{12} \delta_0^3; \quad C_2 = 0. \quad (3.25)$$

С учетом (3.25) выражение (3.24) примет вид

$$u_1 = \frac{(p^2)'}{48} y^4 + \left[\delta_1 \sin \alpha - \frac{(p^2)'}{12} \delta_0^3 \right] y. \quad (3.26)$$

Перейдем к решению уравнения неразрывности из (3.13). Для этого прежде найдем частную производную из (3.26)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{(p^2)''}{48} y^4 + \left[\delta_1' \sin \alpha - \frac{[(p^2)' \delta_0^3]'}{12} \right] y. \quad (3.27)$$

Используя (3.27), найдем

$$v_1 = - \int \frac{\partial u_1}{\partial x} dy = - \left(\frac{(p^2)''}{240} y^5 + \left[\delta_1' \sin \alpha - \frac{[(p^2)' \delta_0^3]'}{12} \right] \frac{y^2}{2} + C_3 \right) \quad (3.28)$$

где $C_3 = 0$ – константа интегрирования, полученная из (3.17).

Перейдем к рассмотрению кинематического условия (3.22). Подставим выражения (3.26) и (3.28) в левую часть (3.22)

$$v_1 - u_1 \delta_0' = - \left(\frac{(p^2)''}{240} \delta_0^5 + \left[\delta_1' \sin \alpha - \frac{[(p^2)' \delta_0^3]'}{12} \right] \frac{\delta_0^2}{2} \right) - \left(\frac{(p^2)'}{48} \delta_0^4 + \left[\delta_1 \sin \alpha - \frac{(p^2)'}{12} \delta_0^3 \right] \delta_0 \right) \delta_0'.$$

Объединив в последнем выражении подобные слагаемые, получим

$$v_1 - u_1 \delta_0' = - \frac{((p^2)' \delta_0^5)'}{240} - \frac{(\delta_1 \delta_0^2 \sin \alpha)'}{2} + \left(\frac{(p^2)'}{12} \delta_0^3 \frac{\delta_0^2}{2} \right)' \quad \text{или}$$

$$v_1 - u_1 \delta_0' = 3 \frac{((p^2)' \delta_0^5)'}{80} - \frac{(\delta_1 \delta_0^2 \sin \alpha)'}{2}. \quad (3.29)$$

Подставим (3.29) в (3.22), проинтегрируем и получим $\delta_1 = \frac{3}{40} (p' \delta_0^4)$. Выпишем решение задачи с учетом нулевого и первого приближений:

$$\begin{aligned}
u = u_0 + \varepsilon u_1 &= \delta_0^2 \left(\frac{y}{\delta_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_0} \right)^2 \right) \sin \alpha + \tau y + \varepsilon \left(\frac{(p^2)'}{48} y^4 + \left[\delta_1 \sin \alpha - \frac{(p^2)'}{12} \delta_0^3 \right] y \right), \\
v = v_0 + \varepsilon v_1 &= -(\tau + \delta_0 \sin \alpha)' \frac{y^2}{2} - \varepsilon \left(\frac{(p^2)''}{240} y^5 + \left[\delta_1' \sin \alpha - \frac{[(p^2)'] \delta_0^3}{12} \right] \frac{y^2}{2} \right), \\
\delta &= \delta_0 + \varepsilon \delta_1 = \delta_0 + \frac{3\varepsilon}{40} (p' \delta_0^4). \tag{3.30}
\end{aligned}$$

3.2 Метод для решения внешнего пограничного слоя

3.2.1 Постановка задачи и преобразование расчетной области

Известно, что для внутреннего пограничного слоя $\delta_1 \approx 10^{-4}$ м, и он незначительно изменяет геометрию пластины. Поэтому, для внешней задачи кривизной внутреннего пограничного слоя можно пренебречь. Переместим начало координат на межфазную поверхность. Уравнения имеют вид (индекс 3 относится к внешнему пограничному слою)

$$u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y} = \nu_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial y} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < \delta_3. \tag{3.31}$$

Поставим граничные условия. При $y=0$ зададим равенство продольных скоростей, а поперечная скорость определяется из кинематического условия:

$$u_3(x,0) = u_1(x, \delta_1), \quad v_3(x,0) = u_1(x, \delta_1) \frac{d\delta_1(x)}{dx}. \tag{3.32}$$

При $y = \delta_3$ функция u_3 принимает постоянное значение, равное величине скорости набегающего потока:

$$u_3(x, \delta_3) = U. \tag{3.33}$$

Уравнения пограничного слоя неприменимы в непосредственной близости от края пластинки [145]. Поэтому при $x=0$ задаем функции скоростей и верхнюю границу

$$u_3(0, y) = u_n(y), v_3(0, y) = v_n(y), \delta_3(0) = \delta_n. \quad (3.34)$$

Введем безразмерные переменные:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{\delta_3}, \bar{\delta}_3 = \frac{\delta_3}{L}, \bar{u}_3 = \frac{u_3}{U}, \bar{v}_3 = \frac{v_3}{U}, \tau_1 = \frac{\delta^*}{u^*} \frac{U}{L} \frac{\mu_3}{\mu_1} \bar{\tau}_3. \quad (3.35)$$

С целью упрощения расчетной области (переход от криволинейной области к прямоугольной) в (3.35) поперечная координата отнесена к локальному значению функции $\delta_3(x)$.

Распишем отдельно слагаемые из уравнений (3.31) с учетом (3.35)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x} &= \frac{\partial [U \bar{u}_3]}{\partial x} = U \left[\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{dx} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{dx} \right] = \left| \frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{d\left(\frac{y}{\delta_3}\right)}{dx} = -\frac{y}{\delta_3^2} \frac{d\delta_3}{dx} \right| = \\ &= U \left[\frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} + \left(-\frac{y}{\delta_3^2} \right) \frac{d\delta_3}{dx} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \right] = \left| \frac{d\delta_3}{dx} = \frac{d[L\bar{\delta}_3]}{dx} = L \frac{d\bar{\delta}_3}{d\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{dx} = \frac{d\bar{\delta}_3}{d\bar{x}} \right| = \\ &= U \left[\frac{1}{L} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{y}}{\delta_3} \frac{d\bar{\delta}_3}{d\bar{x}} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \right] = \frac{U}{L} \left[\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{y}}{\bar{\delta}_3} \frac{d\bar{\delta}_3}{d\bar{x}} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \right]; \\ \frac{\partial u_3}{\partial y} &= \frac{\partial [U \bar{u}_3]}{\partial y} = U \left[\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{dy} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{dy} \right] = \\ &= \left| \frac{d\bar{y}}{dy} = \frac{d\left(\frac{y}{\delta_3}\right)}{dy} = \frac{1}{L\bar{\delta}_3} \right| = \frac{U}{L\bar{\delta}_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}}; \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 [U \bar{u}_3]}{\partial y^2} = \\ &= U \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}^2} \left(\frac{d\bar{x}}{dy} \right)^2 + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} \frac{d^2 \bar{x}}{dy^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^2} \left(\frac{d\bar{y}}{dy} \right)^2 + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \frac{d^2 \bar{y}}{dy^2} \right] = \\ &= U \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^2} \frac{1}{L^2 \bar{\delta}_3^2} \right] = \frac{U}{L^2 \bar{\delta}_3^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^2}; \\ \frac{\partial v_3}{\partial y} &= \frac{\partial [U \bar{v}_3]}{\partial y} = U \left[\frac{\partial \bar{v}_3}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{dy} + \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{dy} \right] = \frac{U}{L\bar{\delta}_3} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial \bar{y}}. \end{aligned}$$

С учетом проделанных преобразований уравнение движения из (3.31) примет вид

$$\bar{u}_3 \left[\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{y} \bar{\delta}_3'}{\bar{\delta}_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \right] + \frac{\bar{v}_3}{\bar{\delta}_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{Re_3} \frac{1}{\bar{\delta}_3^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^2}, \quad (3.36)$$

где $\bar{\delta}' = \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}}$, $Re_3 = \frac{U L}{\nu_3}$ число Рейнольдса.

Уравнение неразрывности из (3.31) примет вид

$$\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{y} \bar{\delta}_3'}{\bar{\delta}_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\bar{\delta}_3} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (3.37)$$

Граничные условия (3.32), (3.33) и (3.34) переписутся соответственно

$$\bar{y} = 0, \bar{u}_3(\bar{x}, 0) = \frac{u_1(x, \delta_1)}{U}, \bar{v}_3(\bar{x}, 0) = \frac{u_1(x, \delta_1) \delta_1'(x)}{U}, \quad (3.38)$$

$$\bar{y} = 1, \bar{u}_3 = 1, \quad (3.39)$$

$$\bar{u}_3(0, \bar{y}) = \bar{u}_n(\bar{y}), \bar{v}_3(0, \bar{y}) = \bar{v}_n(\bar{y}), \bar{\delta}_3(0) = \bar{\delta}_n. \quad (3.40)$$

Уравнения (3.36) и (3.37) содержат 3 неизвестные функции – $\bar{u}_3, \bar{v}_3, \bar{\delta}_3$. Чтобы (3.36) и (3.37) образовывали замкнутую систему уравнений, добавим к ним еще одно уравнение, для чего проинтегрируем уравнение (3.36) по переменной \bar{y} от 0 до $\bar{\delta}_3$ с учетом условия плавности смыкания продольной скорости пограничного слоя со скоростью набегающего потока

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_3}{\partial y} \right|_{y=\delta_3} &= \left. \frac{\partial [\bar{u}_3 U]}{\partial y} \right|_{\bar{y} \delta_3 = \delta_3} = \\ &= U \left[\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{dy} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{dy} \right] \Big|_{\bar{y}=1} = \frac{U}{L \bar{\delta}_3} \left. \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=1} = \left. \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=1} = 0. \end{aligned}$$

Выпишем интегралы только тех слагаемых, которые удастся упростить

$$\begin{aligned} \int_0^1 \bar{u}_3 \frac{\bar{y} \bar{\delta}_3'}{\bar{\delta}_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} d\bar{y} &= \frac{\bar{\delta}_3'}{\bar{\delta}_3} \int_0^1 \bar{y} \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} d\bar{y} = \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{y} \bar{u}_3^2 \right) \right|_0^1 = \bar{u}_3^2 + 2 \bar{y} \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \Rightarrow \bar{y} \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{y} \bar{u}_3^2 \right) - \bar{u}_3^2 \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\bar{\delta}_3'}{\bar{\delta}_3} \int_0^1 \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\bar{y} \bar{u}_3^2) - \bar{u}_3^2 \right] d\bar{y} = \frac{\bar{\delta}_3'}{\bar{\delta}_3} \frac{1}{2} \left[\bar{y} \bar{u}_3^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 \bar{u}_3^2 d\bar{y} \right] = \frac{\bar{\delta}_3'}{2 \bar{\delta}_3} \left[1 - \int_0^1 \bar{u}_3^2 d\bar{y} \right];$$

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} d\bar{y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \Big|_0^1 = - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0}.$$

Таким образом, третье уравнение сведется к

$$2\bar{\delta}_3 \left[\int_0^1 \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} d\bar{y} \right] - \bar{\delta}_3' \left[1 - \int_0^1 \bar{u}_3^2 d\bar{y} \right] + 2 \int_0^1 \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} d\bar{y} + \frac{2}{Re_3} \frac{1}{\bar{\delta}_3} \left[\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} \right] = 0,$$

математическая модель внешнего пограничного слоя примет вид:

$$\bar{u}_3 \left[\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{y} \bar{\delta}_3'}{\bar{\delta}_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \right] + \frac{\bar{v}_3}{\bar{\delta}_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{Re_3} \frac{1}{\bar{\delta}_3^2} \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^2},$$

$$\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} - \frac{\bar{y} \bar{\delta}_3'}{\bar{\delta}_3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{\bar{\delta}_3} \frac{\partial \bar{v}_3}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (3.41)$$

$$2\bar{\delta}_3 \left[\int_0^1 \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}} d\bar{y} \right] - \bar{\delta}_3' \left[1 - \int_0^1 \bar{u}_3^2 d\bar{y} \right] + 2 \int_0^1 \bar{v}_3 \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} d\bar{y} + \frac{2}{Re_3} \frac{1}{\bar{\delta}_3} \left[\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y}=0} \right] = 0,$$

где $0 < \bar{x} < 1, 0 < \bar{y} < 1$,

$$\bar{u}_3(\bar{x}, 0) = \frac{u_1(\bar{x})}{U}, \bar{v}_3(\bar{x}, 0) = \frac{u_1(\bar{x}) \delta_1'(\bar{x})}{U}, \bar{u}_3(\bar{x}, 1) = 1, \bar{u}_3(0, \bar{y}) = \bar{u}_H(\bar{y}), \bar{v}_3(0, \bar{y}) = \bar{v}_H(\bar{y}), \bar{\delta}_3 = \bar{\delta}_H.$$

3.2.2 Численное решение

Разностная схема. Благодаря введенным формулой (3.35) безразмерным переменным расчетная область представляет собой прямоугольное поле $G = \{0 \leq \bar{x} \leq 1, 0 \leq \bar{y} \leq 1\}$ (рис. 3.2).

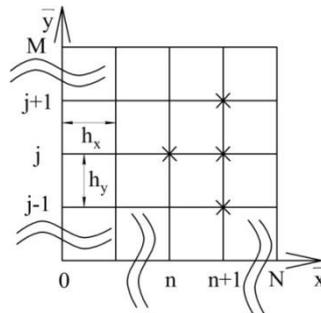


Рис. 3.2. Расчетная область, сетка и шаблон.

В G введем сетку с равномерными шагами h_x по \bar{x} и h_y по \bar{y} :

$\omega_{xy} = \{(\bar{x}_n, \bar{y}_j) : \bar{x}_n = nh_x, \bar{y}_j = jh_y, n = 0, 1, \dots, N, h_x = 1/N, j = 0, 1, \dots, M, h_y = 1/M\}$. Обозначим

через $\bar{u}_j^n, \bar{v}_j^n, \bar{\delta}^n$ значения в узле (\bar{x}_n, \bar{y}_j) сеточных функции $\bar{u}_3, \bar{v}_3, \bar{\delta}_3$ соответственно (обозначения совпадают), определенных на ω_{xy} .

Неявная разностная схема для (3.41) имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{u}_j^{n+1} \left(\frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{h_x} \right) + \frac{1}{\bar{\delta}^{n+1}} \left(\bar{v}_j^{n+1} - \bar{y}_j \bar{u}_j^{n+1} \frac{\bar{\delta}^{n+1} - \bar{\delta}^n}{h_x} \right) \frac{\bar{u}_{j+1}^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1}}{2h_y} = \\ = \frac{1}{Re_3} \frac{1}{(\bar{\delta}^{n+1})^2} \frac{\bar{u}_{j+1}^{n+1} - 2\bar{u}_j^{n+1} + \bar{u}_{j-1}^{n+1}}{h_y^2}, \quad j = 1, 2, \dots, M-1, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{u}_{j-1}^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^n}{h_x} + \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n}{h_x} \right) - \frac{\bar{y}_{j-1} + \bar{y}_j}{2\bar{\delta}^{n+1}} \frac{\bar{\delta}^{n+1} - \bar{\delta}^n}{h_x} \frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1}}{h_y} + \\ + \frac{1}{\bar{\delta}^{n+1}} \frac{\bar{v}_j^{n+1} - \bar{v}_{j-1}^{n+1}}{h_y} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M, \\ A \frac{\bar{\delta}^{n+1} - \bar{\delta}^n}{h_x} + B \bar{\delta}^{n+1} + \frac{C}{\bar{\delta}^{n+1}} + D = 0, \quad j = 0, 1, \dots, M, \\ \bar{u}_0^{n+1} = \frac{u_1}{U} \Big|_{\bar{x}=(n+1)h_x}, \quad \bar{v}_0^{n+1} = \frac{u_1 \delta_1'}{U} \Big|_{\bar{x}=(n+1)h_x}, \quad \bar{u}_M^{n+1} = 1, \\ \bar{u}_j^0 = \bar{u}_n^0, \quad \bar{v}_j^0 = \bar{v}_n^0, \quad \bar{\delta}^0 = \bar{\delta}_n^0, \quad j = 0, 1, \dots, M. \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \tag{3.42}$$

где $A = \frac{h_y}{2} \left((\bar{u}_0^{n+1})^2 + (\bar{u}_M^{n+1})^2 + 2 \sum_{j=1}^{M-1} (\bar{u}_j^{n+1})^2 \right) - 1,$

$$B = \frac{h_y}{h_x} \left(\bar{u}_0^{n+1} (\bar{u}_0^{n+1} - \bar{u}_0^n) + 2 \sum_{j=1}^{M-1} \bar{u}_j^{n+1} (\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n) \right), \quad C = \frac{1}{Re_3 h_y} (-3 \bar{u}_0^{n+1} + 4 \bar{u}_1^{n+1} - \bar{u}_2^{n+1}),$$

$$D = \frac{\bar{v}_0^{n+1}}{2} (-3 \bar{u}_0^{n+1} + 4 \bar{u}_1^{n+1} - \bar{u}_2^{n+1}) + \sum_{j=1}^{M-1} \bar{v}_j^{n+1} (\bar{u}_{j+1}^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1}).$$

Аппроксимация. Разложим решение в узлах шаблона по формуле Тейлора с центром в точке $(\bar{x}_{n+1}, \bar{y}_j)$ и подставим эти разложения в невязку первого уравнения (3.42):

$$\begin{aligned} \delta f^1 \Big|_j^{n+1} &= \left(\bar{u}_3 \frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\bar{y} \bar{u}_3}{\bar{\delta}_3} \frac{d^2 \bar{\delta}_3}{d\bar{x}^2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \right) \frac{h_x}{2} + \left(\frac{\bar{y} \bar{u}_3}{\bar{\delta}_3} \frac{d^3 \bar{\delta}_3}{d\bar{x}^3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial^3 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}^3} \right) \frac{h_x^2}{6} - \\ &- \frac{1}{12} \frac{\bar{y} \bar{u}_3}{\bar{\delta}_3} \frac{d^2 \bar{\delta}_3}{d\bar{x}^2} \frac{\partial^3 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^3} h_x h_y^2 + \frac{1}{36} \frac{\bar{y} \bar{u}_3}{\bar{\delta}_3} \frac{d^3 \bar{\delta}_3}{d\bar{x}^3} \frac{\partial^3 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^3} h_x^2 h_y^2 + \\ &+ \frac{1}{12 Re_3} \frac{1}{\bar{\delta}_3^2} \frac{\partial^4 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^4} h_y^2 + o(h_x + h_y^2), j = \overline{1, M-1}; \quad n = \overline{0, N-1} \end{aligned}$$

Раскладывая решение в узлах шаблона с центром в точке $(\bar{x}_{n+1}, \bar{y}_{j-1/2})$, и, подставляя в невязку второго уравнения из (3.42), получим:

$$\begin{aligned} \delta f^2 \Big|_{j-1/2}^{n+1} &= \frac{h_x}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\bar{y}}{\bar{\delta}_3} \frac{d^2 \bar{\delta}_3}{d\bar{x}^2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{(h_x)^2}{6} \left(\frac{\bar{y}}{\bar{\delta}_3} \frac{d^3 \bar{\delta}_3}{d\bar{x}^3} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial^3 \bar{u}_3}{\partial \bar{x}^3} \right) + \\ &+ \frac{(h_y)^2}{24} \left(\frac{\bar{y}}{\bar{\delta}_3} \frac{d \bar{\delta}_3}{d\bar{x}} \frac{\partial^3 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \bar{v}_3}{\partial \bar{y}^3} \right) - \frac{h_x (h_y)^2}{8} \left(\frac{\partial^3 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^2 \partial \bar{x}} + \frac{1}{6} \frac{\bar{y}}{\bar{\delta}_3} \frac{d^2 \bar{\delta}_3}{d\bar{x}^2} \frac{\partial^3 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^3} \right) + \\ &+ \frac{(h_x)^2 (h_y)^2}{144} \frac{\bar{y}}{\bar{\delta}_3} \frac{d^3 \bar{\delta}_3}{d\bar{x}^3} \frac{\partial^3 \bar{u}_3}{\partial \bar{y}^3} + o(h_x + h_y^2), j = \overline{1, M}; \quad n = \overline{0, N-1} \end{aligned}$$

В выражениях A, B, C, D интегралы приближенно вычисляются по формуле трапеций с погрешностью $O(h_y^2)$, первая производная по \bar{x} в третьем уравнении (3.41) аппроксимируется левой разностной производной с точностью $O(h_x)$, т.е.

$\delta f^3 \Big|_j^{n+1} = O(h_x + h_y^2)$, $n = \overline{0, N-1}$. Граничные условия аппроксимируются точно, т.е.

невязки $\delta f^4 \Big|_{j=0}^{n+1} = 0, n = \overline{0, N-1}$, $\delta f^5 \Big|_{j=M}^{n+1} = 0, n = \overline{0, N-1}$, $\delta f^6 \Big|_j^{n=0} = 0, j = \overline{0, M}$.

Введем сеточную норму

$$\|\delta f\| = \max_{n,j} \left\{ \max \left| \delta f^1 \Big|_j^{n+1} \right|, \max \left| \delta f^2 \Big|_{j-1/2}^{n+1} \right|, \max \left| \delta f^3 \Big|_j^{n+1} \right|, \max \left| \delta f^4 \Big|_{j=0}^{n+1} \right|, \max \left| \delta f^5 \Big|_{j=M}^{n+1} \right|, \max \left| \delta f^6 \Big|_j^{n=0} \right| \right\},$$

тогда схема имеет погрешность аппроксимации $\|\delta f\|_c = O(h_x + h_y^2)$.

Устойчивость. Исследование схемы (4.42) на устойчивость проведем с помощью метода «замороженных коэффициентов» [146]. «Заморозим» коэффициенты системы (3.42) следующим образом: $\alpha = \bar{u}_j^{n+1}$,

$$\beta = \frac{1}{\bar{\delta}^{n+1}} \left(\bar{v}_j^{n+1} - \bar{y}_j \bar{u}_j^{n+1} \frac{\bar{\delta}^{n+1} - \bar{\delta}^n}{h_x} \right), \quad \gamma = \frac{1}{Re_3} \frac{1}{(\bar{\delta}^{n+1})^2}, \quad \varphi = \frac{\bar{y}_{j-1} + \bar{y}_j}{2 \bar{\delta}^{n+1}} \frac{\bar{\delta}^{n+1} - \bar{\delta}^n}{h_x}, \quad \chi = \frac{1}{\bar{\delta}^{n+1}}.$$

Тогда запишем первые два уравнения системы (3.42) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n)}{h_x} + \frac{\beta(\bar{u}_{j+1}^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1})}{2h_y} &= \frac{\gamma(\bar{u}_{j+1}^{n+1} - 2\bar{u}_j^{n+1} + \bar{u}_{j-1}^{n+1})}{h_y^2}, \\ \frac{(\bar{u}_{j-1}^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^n + \bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^n)}{2h_x} - \frac{\varphi(\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_{j-1}^{n+1})}{h_y} + \frac{\chi(\bar{v}_j^{n+1} - \bar{v}_{j-1}^{n+1})}{h_y} &= 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

В уравнениях (3.43) отсутствует функция $\bar{\delta}^{n+1}$, следовательно, исследование устойчивости (3.43) может быть проведено отдельно.

Положим $w_j^n = \begin{bmatrix} \bar{u}_j^n \\ \bar{v}_j^n \end{bmatrix}$. Запишем (3.43) в векторной форме

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{2h_x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{w_{j-1}^{n+1} - w_{j-1}^n}{2h_x} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{w_{j+1}^{n+1} - w_{j-1}^{n+1}}{2h_y} - \\ - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varphi & 0 \end{bmatrix} \frac{w_j^{n+1} - w_{j-1}^{n+1}}{h_y} - \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{w_{j+1}^{n+1} - 2w_j^{n+1} + w_{j-1}^{n+1}}{h_y^2} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \chi \end{bmatrix} \frac{w_j^{n+1} - w_{j-1}^{n+1}}{h_y} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ищем решение в виде $w_j^n = \lambda^n \begin{bmatrix} \bar{u}^0 \\ \bar{v}^0 \end{bmatrix} e^{i\omega j} = \lambda^n w^0 e^{i\omega j}$, i – мнимая единица,

ω – вещественный параметр, λ – спектр разностной задачи, $w^0 = \begin{bmatrix} \bar{u}^0 \\ \bar{v}^0 \end{bmatrix}$ – числовой

вектор. Подставляя это выражение в (3.44), приходим к равенству:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\lambda^{n+1} e^{i\omega j} - \lambda^n e^{i\omega j}}{2h_x} w^0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\lambda^{n+1} e^{i\omega(j-1)} - \lambda^n e^{i\omega(j-1)}}{2h_x} w^0 + \\ + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\lambda^{n+1} e^{i\omega(j+1)} - \lambda^{n+1} e^{i\omega(j-1)}}{2h_y} w^0 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varphi & 0 \end{bmatrix} \frac{\lambda^{n+1} e^{i\omega j} - \lambda^{n+1} e^{i\omega(j-1)}}{h_y} w^0 - \\ - \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\lambda^{n+1} e^{i\omega(j+1)} - 2\lambda^{n+1} e^{i\omega j} + \lambda^{n+1} e^{i\omega(j-1)}}{h_y^2} w^0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \chi \end{bmatrix} \frac{\lambda^{n+1} e^{i\omega j} - \lambda^{n+1} e^{i\omega(j-1)}}{h_y} w^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Убирая общий множитель $\lambda^n e^{i\omega j}$ в последнем выражении, приходим к следующему:

$$\begin{bmatrix} \alpha \frac{\lambda-1}{h_x} + \beta \frac{\lambda(e^{i\omega} - e^{-i\omega})}{2h_y} - \gamma \frac{\lambda(e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega})}{h_y^2} & 0 \\ \frac{\lambda-1}{2h_x} + \frac{e^{-i\omega}(\lambda-1)}{2h_x} - \frac{\varphi\lambda(1-e^{-i\omega})}{h_y} & \chi \frac{\lambda(1-e^{i\omega})}{h_y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}^0 \\ \bar{v}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Система линейных уравнений (3.45) имеет нетривиальное решение $\begin{bmatrix} \bar{u}^0 \\ \bar{v}^0 \end{bmatrix}$ лишь при тех λ , при которых определитель системы (3.45) обращается в нуль:

$$\left(\alpha \frac{\lambda-1}{h_x} + \beta \frac{\lambda(e^{i\omega} - e^{-i\omega})}{2h_y} - \gamma \frac{\lambda(e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega})}{h_y^2} \right) \left(\chi \frac{\lambda(1-e^{i\omega})}{h_y} \right) = 0. \quad (3.46)$$

Поскольку второй множитель в (3.46) $\chi \frac{\lambda(1-e^{i\omega})}{h_y} \neq 0$, то

$$\lambda = \frac{\omega/h_x}{\left(\frac{\omega}{h_x} + \frac{\beta(e^{i\omega} - e^{-i\omega})}{2h_y} - \frac{\gamma(e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega})}{h_y^2} \right)} = \frac{\omega/h_x}{\left(\frac{\omega}{h_x} + \frac{4\gamma \sin^2 \omega/2}{h_y^2} + i \frac{\beta \sin \omega}{h_y} \right)}.$$

Схема устойчива, если удовлетворяется условие Неймана $|\lambda| \leq 1 + Ch_x$, $C = \text{const}$.

Если обозначить $a = \omega/h_x$, $b = \frac{\omega}{h_x} + \frac{4\gamma \sin^2 \omega/2}{h_y^2}$, $c = \frac{\beta \sin \omega}{h_y}$, то $\lambda = \frac{a}{b+ic}$,

$|\lambda|^2 = \frac{a^2}{b^2+c^2} < 1$ всегда, поскольку $a < b$. Таким образом, схема (3.43) является

безусловно устойчивой по Нейману (в среднеквадратичной норме [138]).

Для третьего уравнения (3.42) применена безусловно устойчивая неявная схема Эйлера 1 порядка точности [147].

Поскольку краевые условия аппроксимируются точно, устойчивости по ним можно не требовать.

Экспериментальное исследование схемы (3.42) выполнено на точном автомодельном решении односредного пограничного слоя. На основе оценок аппроксимации можно предположить, что для уменьшения погрешности численного решения в два раза, следует уменьшать шаг h_x в два раза, а шаг h_y – в

$\sqrt{2}$ раз. Исходя из этих соображений, выстроен вычислительный эксперимент.

Величина погрешности имеет вид

$$\eta_c = \frac{\max\left(\left|\bar{u}_j^n - \bar{u}(\bar{x}_n, \bar{y}_j)\right|\right)}{\max\left(\left|\bar{u}_j^n\right|\right)}, \quad n = \overline{0, N}, \quad j = \overline{0, M} \quad - \text{ в равномерной норме,}$$

$$\eta_\ell = \frac{\sqrt{\sum_{n=0, N} \sum_{j=0, M} \left(\left(\frac{\bar{u}_{j-1}^n + \bar{u}_{j-1}^{n-1} + \bar{u}_j^n + \bar{u}_j^{n-1}}{4} \right) - \bar{u}(\bar{x}_{n-1/2}, \bar{y}_{j-1/2}) \right)^2}}{\max_{\substack{n=0, N \\ j=0, M}} \left(\left|\bar{u}_j^n\right| \right)} \quad h_x h_y$$

среднеквадратичной норме. $\bar{u}(\bar{x}_n, \bar{y}_j)$ – точное решение [148] в переменных (3.35).

На рис. 3.3 представлены графики зависимости погрешности численного решения от номера сгущающейся сетки D. В таблице 3.1 приведены соответствующие значения погрешностей и количество узлов в расчетной области.

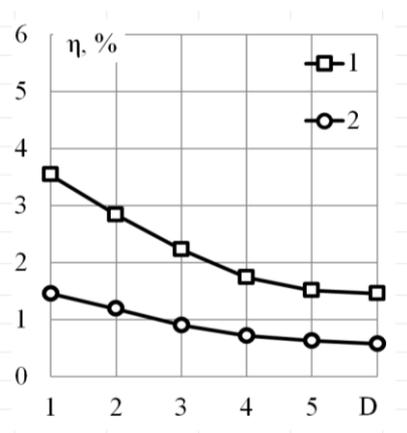


Рис. 3.3. Графики погрешностей в равномерной (1) и среднеквадратичной (2) нормах

Таблица 3.1. Значения погрешностей

D	1	2	3	4	5	6
N	20	40	80	160	320	640
M	10	14	20	28	40	57
η _c , %	3,54	2,84	2,23	1,74	1,51	1,46
η _ℓ , %	1,46	1,19	0,90	0,72	0,63	0,58

Вычислительный эксперимент проводился при $Re_3 = 2,15 \cdot 10^5$, $x_0 = 0,008$ м (в качестве начального приближения бралось точное решение Блазиуса), $U = 8$ м/с, $L = 0,4$ м. Итерации по нелинейности проводились до 10^{-7} . По графикам видно, что погрешность численного решения не превосходит 0,6 % в среднеквадратичной норме.

Итерационный метод. В (3.42) неизвестными являются сеточные функции $u_j^{n+1}, v_j^{n+1}, \delta^{n+1}$. Для реализации этой схемы применен итерационный процесс (k – номер итерации) по методу «запаздывающих коэффициентов» [142]. Этот метод позволяет уравнения (3.42) решать последовательно по маршевой координате \bar{x} и итерационно внутри каждого маршевого шага.

Далее описывается итерационный метод решения (3.42).

Первое уравнение в (3.42) образует систему уравнений для нахождения на

$n+1$ слое $\bar{u}_j^{(k+1)}, j = 1..M-1$

$$a_j \bar{u}_{j-1}^{(k+1)} - c_j \bar{u}_j^{(k+1)} + b_j \bar{u}_{j+1}^{(k+1)} = -f_j, \quad (3.47)$$

где

$$a_j = \frac{\left(\bar{u}_j^{(k)} \cdot j \cdot h_y \cdot \left(\frac{\bar{\delta}^{(k)} - \bar{\delta}^{(k-1)}}{h_x} \right) - \bar{v}_j^{(k)} \right)}{\left(\bar{\delta}^{(k)} \cdot 2 \cdot h_y \right)} - \frac{1}{Re_3 \cdot \left(\bar{\delta}^{(k)} \cdot h_y \right)^2},$$

$$b_j = \frac{\left(\frac{\binom{(k)}{\bar{v}_j^{n+1}} - \binom{(k)}{\bar{u}_j^{n+1}} \cdot j \cdot h_y}{\binom{(k)}{\bar{\delta}^{n+1} - \bar{\delta}^n}} \right)}{\binom{(k)}{\bar{\delta}^{n+1} \cdot 2 \cdot h_y}} - \frac{1}{Re_3 \cdot \binom{(k)}{\bar{\delta}^{n+1} \cdot h_y}^2},$$

$$c_j = - \left(\frac{\binom{(k)}{\bar{u}_j^{n+1}}}{h_x} + \frac{2}{Re_3 \binom{(k)}{\bar{\delta}^{n+1} \cdot h_y}^2} \right), \quad f_j = - \frac{\binom{(k)}{\bar{u}_j^{n+1} \bar{u}_j^n}}{h_x}.$$

Система уравнений (3.47) имеет трехдиагональную матрицу и вместе с соответствующими граничными условиями из (3.42) решается методом прогонки.

Полученные таким образом значения $\bar{u}_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, M}$ подставляются во второе уравнение (3.42), откуда в явном виде выписываются величины $\bar{v}_j^{(k+1)}$, $j = \overline{1, M}$:

$$\bar{v}_j^{(k+1)} = \bar{v}_{j-1}^{(k+1)} - \frac{\binom{(k)}{\bar{\delta}^{n+1}} h_y}{2 h_x} \times$$

$$\times \left(\left(\frac{\binom{(k+1)}{\bar{u}_{j-1}^{n+1}} - \binom{(k+1)}{\bar{u}_{j-1}^n} + \binom{(k+1)}{\bar{u}_j^{n+1}} - \binom{(k+1)}{\bar{u}_j^n} \right) - ((2j-1) \cdot h_y) \binom{(k)}{\bar{\delta}^{n+1} - \bar{\delta}^n} \left(\frac{\binom{(k+1)}{\bar{u}_j^{n+1}} - \binom{(k+1)}{\bar{u}_{j-1}^{n+1}} \right) \right). \quad (3.48)$$

Значения, полученные из (3.47) и (3.48), подставляются в третье уравнение из (3.42), откуда находятся значения

$$\bar{\delta}^{(k+1)} = \frac{-\beta_1 - (\Delta)^{1/2}}{2 \alpha_1}, \quad \alpha_1 = \frac{A}{h_x} + \frac{(k+1)}{B}, \quad \beta_1 = \frac{(k+1)}{D} - A \cdot \delta^n, \quad \Delta = \beta_1^2 - 4 \alpha_1 C. \quad (3.49)$$

Выражения $A^{(k+1)}, B^{(k+1)}, C^{(k+1)}, D^{(k+1)}$ получаются при подстановке значений $\bar{u}_j^{n+1}, \bar{v}_j^{n+1}$ вместо значений $\bar{u}_j^{n+1}, \bar{v}_j^{n+1}$ в выражения A, B, C, D . В итерационном процессе при $k = 0$ значения неизвестных берутся с предыдущего маршевого слоя.

3.3 Сопряженная задача и программа для её решения

В общем случае решение сопряженной задачи зависит от 3 параметров – $\varepsilon \ll 1$ (при этом $Re_1 < 400$), $Re_3 < 5 \cdot 10^5$ и $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ [149], [148]. Поэтому предложенный метод моделирования может быть использован при указанных ограничениях.

Основу алгоритма решения сопряженной задачи, реализованного в среде Maple (программа «Lambola plate wilifi», приложение Б), составляет метод последовательных приближений (блок-схема программы представлена на рис. 3.4). Метод заключается в том, что задачи внутреннего и внешнего пограничного слоев решаются друг от друга отдельно, но последовательно или итерационно. На каждом новом приближении внутренняя задача решается с учетом функции напряжения трения, полученной из решения внешней задачи, решение которой, в свою очередь, учитывает компоненты скорости, полученные в предыдущем приближении из решения внутренней задачи. Таким образом, итерационный процесс продолжается до тех пор, пока функция скорости и, как следствие, функция напряжения трения будут меняться мало от итерации к итерации.

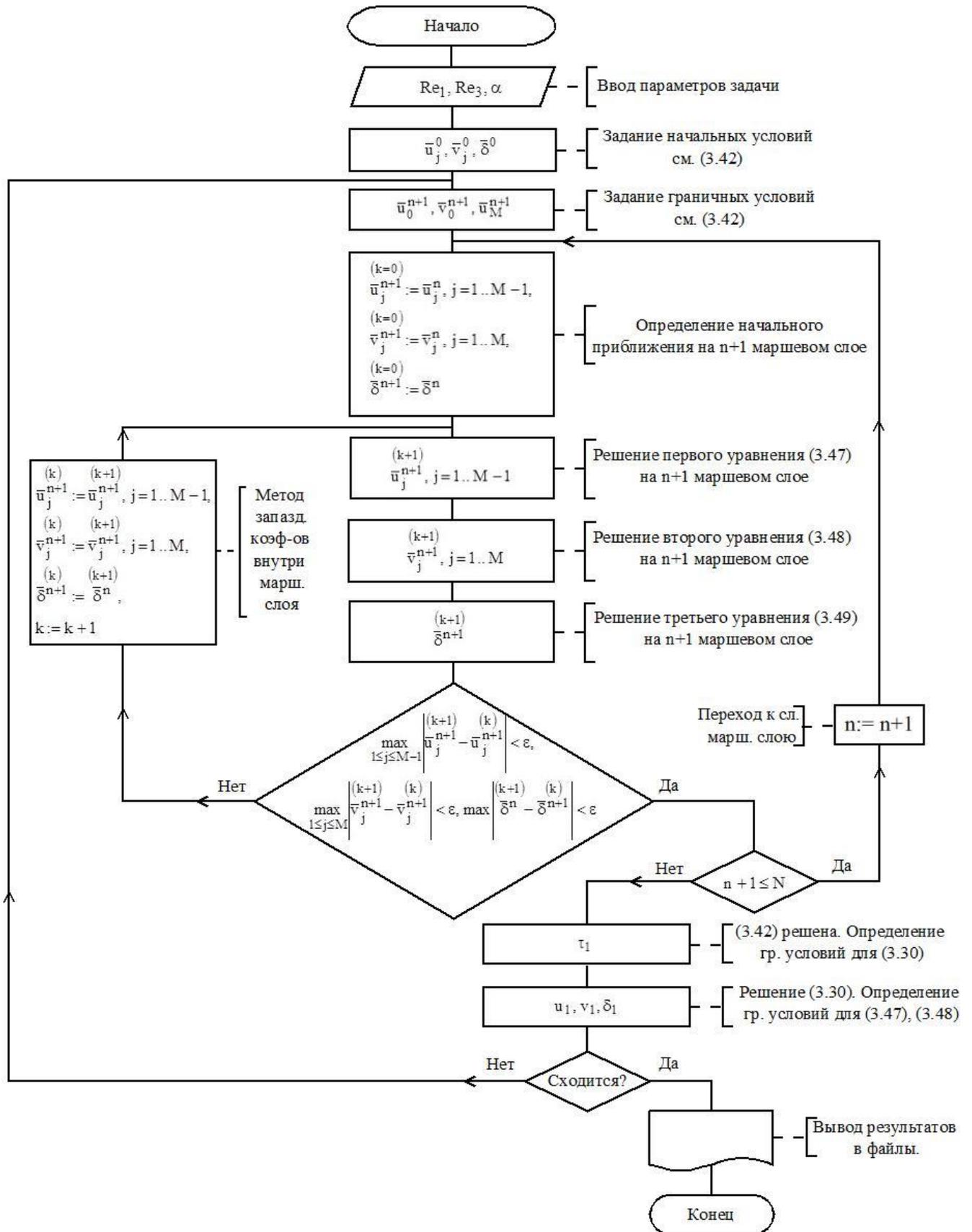


Рис. 3.4. Блок-схема программы «Lambola plate wilifi»

3.4 Решение в Ansys Fluent

Решение задачи двухсредного пограничного слоя по методу, реализованному в Ansys Fluent, выполнено с помощью модели Eulerian Wall Films, которая специально разработана для моделирования тонких течений жидкости. В основе модели принято допущение о малой толщине течения, а именно: течение имеет толщину много меньшую радиуса кривизны поверхности. Это предположение накладывает некоторые

ограничения на характеристики течения: вектор скорости представляется только составляющей, параллельной стенке, как квадратичная функция от поперечной координаты, определяемая по величине средней скорости. Таким образом, неизвестными характеристиками течения являются верхняя граница и средняя скорость. Для этого модель предусматривает решение уравнений сохранения массы и количества движения, записанных с учетом принятых допущений [141].

Поскольку использование Eulerian Wall Films-модели возможно только на пространственных поверхностях, то используется трехмерная геометрическая модель задачи (рис. 3.5).

Вся геометрическая модель представляет собой параллелепипед, в котором имитируются условия аэродинамической трубы. Так как постановка задачи является двумерной, то в направлении оси z длину области можно ограничить величиной одной ячейки. Для того чтобы исключить взаимное влияние течения около верхней поверхности и внешнего пограничного слоя, высоту расчетной области H (на рисунке расчетная область по высоте усечена) следует выбирать

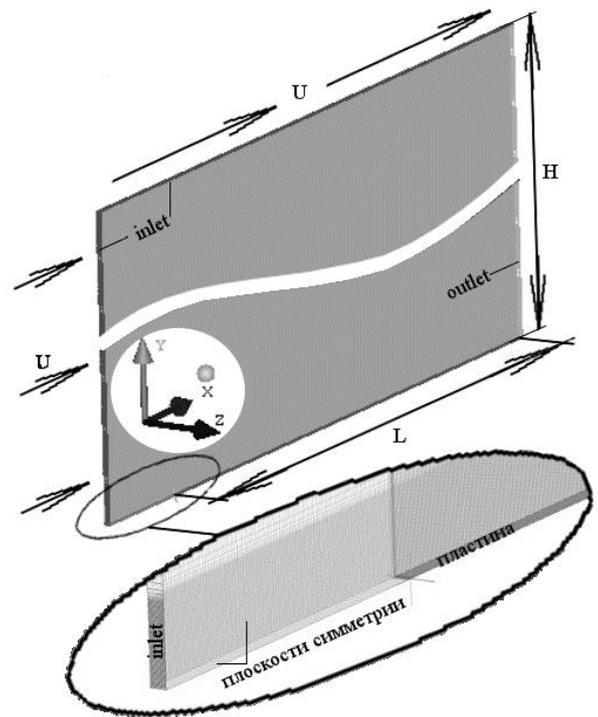


Рис. 3.5. Геометрическая модель и сетка для решения задачи в Ansys Fluent

много большей предполагаемой верхней границы внешнего пограничного слоя. Например, при температуре окружающей среды $T = 20^\circ\text{C}$ и $U = 1$ м/с на пластине длиной $L = 1$ м в соответствии с формулой Блазиуса верхняя граница внешнего пограничного слоя будет $\delta_3 \approx 5 \cdot \sqrt{\frac{\nu_3 L}{U}} = 0,02$ м. Тогда примем $H = 2$ м. На левой и верхней поверхностях области задаются условия невозмущенного набегающего потока – скорость U (граничное условие типа «inlet»), на правой поверхности – постоянное статическое давление (граничное условие типа «pressure outlet»). Для формирования течения перед пластиной, отодвинем её на некоторое расстояние от левой границы области. Тогда, используя свойство симметрии задачи, граничное условие для плоскости, находящейся перед пластиной (как и для боковых плоскостей параллелепипеда, одна из которых (дальняя) показана на рисунке) поставим типа «symmetry».

В представленной геометрической области сгенерирована блочная структурированная сетка, состоящая из гексаэдрических ячеек. Для лучшей сходимости решения задачи в областях с большими градиентами скорости внешнего пограничного слоя, сетка сгущается по направлению к пластине и её переднему краю. Это видно по рисунку, где в окрестности пластины сетка плотнее и её отображение темнее. Число ячеек вдоль пластины равно её длине, выраженной в миллиметрах, а в нормальном направлении высота ячеек, непосредственно примыкающих к пластине, составляет 0,5 мм. Для удалённых ячеек от пластины, их размеры равномерно увеличиваются.

Моделирование внутреннего пограничного слоя при использовании Eulerian Wall Films-модели осуществляется только в нестационарной постановке. Поэтому уравнения модели должны быть дополнены начальными условиями. Начальные условия задают начальное состояние внутреннего пограничного слоя – постоянные верхнюю границу и скорость. Заданный таким образом внутренний пограничный слой затем эволюционирует во времени, «пополняясь» за счет нормальной подачи жидкости со стенки. Для нашего случая надо задать постоянные удельный (т.е. через единицу площади стенки) массовый расход

жидкости, подаваемой на стенку («Mass flux») $G = \rho_3 v_k$, и удельный поток импульса жидкости («Y-Momentum flux») $I_Y = \rho_3 v_k^2$. Поскольку общая постановка является стационарной, то, естественно, для скорейшей сходимости к установившемуся течению, начальные условия выберем такими, которые наиболее близки к предполагаемому стационарному решению.

Несмотря на то, что Eulerian Wall Films-модель разработана для нестационарных течений, её использование сочетается как с нестационарным, так и со стационарным внешним пограничным слоем. Поэтому внешнюю задачу будем рассматривать в стационарной постановке, используя для её решения уравнения Навье-Стокса.

Таким образом, для внутренней задачи в разделах (3.1) и (3.4) используется одинаковое допущение – о малости верхней границы внутреннего пограничного слоя. При этом Eulerian Wall Films-модель в Ansys Fluent не учитывает поперечной составляющей скорости, а модель, представленная в разделе (3.1), учитывает. Для внешней задачи используются разные модели: в разделе (3.2) уравнения ламинарного пограничного слоя, в (3.4) – уравнения Навье-Стокса.

Стратегия решения сопряженной задачи в Ansys Fluent состоит в следующем: сформируем на пластине свободное течение внутреннего пограничного слоя, а затем перейдем к решению внешней задачи. При этом будем учитывать двухстороннее взаимодействие внутреннего пограничного слоя и внешнего через достижение одинаковой скорости на межфазной поверхности u_{mf} с помощью функции «Flow Momentum Coupling».

3.5 Результаты вычислительного эксперимента

Входные данные задачи: $T = 20^\circ\text{C}$, $U = 8 \text{ м/с}$, $v_k = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$, $L = 0,4 \text{ м}$,
 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $g = -9,81 \text{ м/с}^2$, $\varepsilon = 0,1$, $Re_3 = 2,15 \cdot 10^5$, $Re_1 = 160$.

На рисунках, представленных ниже, сплошной линией и точками приведены результаты, полученные по программе «Lambola plate wilifi» (Модель), маркерами – в Ansys Fluent (AF).

На рис. 3.6 представлены функции $\delta_1(x)$ и $u_1(x, \delta_1)$.

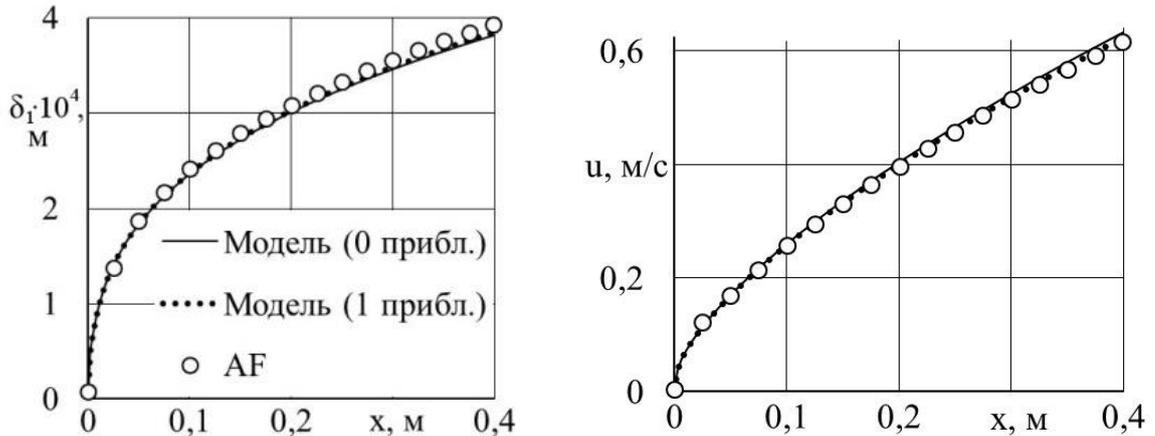


Рис. 3.6. Функции внутреннего пограничного слоя

Из физической постановки задачи ясно, что расход массы во внутреннем пограничном слое по длине пластины увеличивается, следовательно, функции $\delta_1(x)$, и, как следствие, $u_1(x, \delta_1)$, являются возрастающими. Вклад первого приближения в общее решение невелик (2%), и общее решение по Модели здесь и далее ограничено учетом первых двух приближений.

На рис. 3.7 приведены функции $u_3, v_3(L/2, y)$, $u_3, v_3(L, y)$.

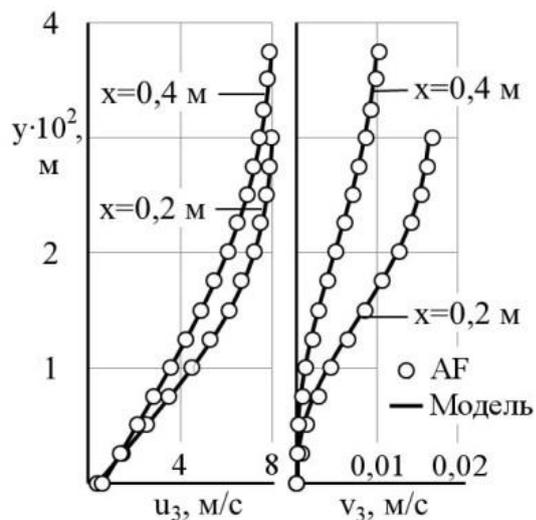


Рис. 3.7. Функции внешнего пограничного слоя

Практический интерес представляет функция коэффициента трения $c_f(\bar{x}) = \frac{2\tau(\bar{x})}{\rho U^2}$. На рис. 3.8 представлена функция, полученная по различным методам при $\varepsilon = 0,1$ ($Re_1 = 160$) и различных значениях Re_3 и α . Для сравнения на рис. 3.8 приведена функция для односредного пограничного слоя (Блазиус).

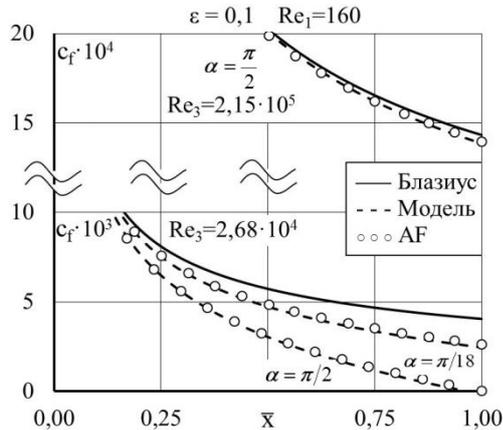


Рис. 3.8. Функция коэффициента трения

С увеличением α значения функции коэффициента трения двухсредного пограничного слоя уменьшаются: отличие от значений функции коэффициента трения односредного пограничного слоя растет от 40% (при $\alpha = \frac{\pi}{18}$) до 100% (при $\alpha = \frac{\pi}{2}$). При меньших значениях параметра Re_3 отличие в значениях функции становится еще большим. С увеличением параметра Re_3 отличие в значениях функции, наоборот, уменьшается до 3%.

Вычислительный эксперимент показывает, что функция коэффициента трения двухсредного пограничного слоя меньше функции коэффициента трения односредного пограничного слоя: в зависимости от параметров разница может

составлять от 0 до 100% (и более) по отношению $\frac{\max |c_{f_{\text{Бл}}}(\bar{x}) - c_f(\bar{x})|}{\min (c_{f_{\text{Бл}}}(\bar{x}))}$.

Коэффициент трения двухсредного пограничного слоя принимает наименьшие значения при максимально допустимых значениях параметра ε , и наоборот, принимает наибольшие значения при уменьшении ε .

По рисункам (3.6) – (3.8) видно хорошее совпадение результатов решения сопряженной задачи, полученных разными методами (отличие около 7 %), что подтверждает адекватность результатов. Причиной снижения коэффициента трения является следующее: силы тяжести разгоняют внутренний пограничный слой, вместо граничных условий прилипания (как в односредном пограничном слое) на межфазной границе выполняется условие проскальзывания. Вместе с тем происходит деформация (выпрямление) профиля продольной скорости внешнего пограничного слоя и, как следствие, снижение коэффициента трения.

Решение задачи по программе «Lambola plate wilifi» и в программе Ansys Fluent выполнено на персональном компьютере (8 ядер/ 1 процессор Intel Core 3.4 GHz с 16 Gb оперативной памяти). Время выполнения первой – минуты, второй – несколько часов.

Разработанная математическая модель двухсредного пограничного слоя и программа «Lambola plate wilifi» (свид-во о гос. регистрации №2015619401 от 02.09.2015 г.) использована для уточнения аэродинамических характеристик элементов корпуса ракеты-носителя с учетом появления на них жидкой пленки в профильном отделе АО «РКЦ «Прогресс», что отражено в акте (Приложение Д).

3.6 Выводы по третьей главе

1. В рамках теории пограничного слоя разработан метод математического моделирования двухсредного неперемешивающегося ламинарного пограничного слоя со скользящей межфазной границей на плоской полубесконечной пластине, позволяющий находить его характеристики с учетом нескольких параметров – чисел Рейнольдса внутреннего и внешнего пограничных слоев и угла наклона плоской полубесконечной пластины, что отличает его от известных методов.
2. Для решения краевой задачи внутреннего пограничного слоя развит приближенный аналитический метод разложения решения в ряд по малому параметру. Для численного решения краевой задачи внешнего пограничного слоя развит вычислительный метод конечных разностей, позволяющий отказаться от

итерационных процедур наращивания сетки на каждом маршевом слое до неизвестной границы пограничного слоя в поперечном направлении (как в известном алгоритме). Получена оценка аппроксимации, проведено исследование устойчивости и сходимости для разностной схемы.

3. На основе предложенного метода математического моделирования двухсредного пограничного слоя создана программа для проведения вычислительного эксперимента «Lambola plate wilifi». Показано, что коэффициент трения двухсредного пограничного слоя меньше коэффициента трения односредного пограничного слоя: в зависимости от параметров разница может составлять от 0 до 100 % (и более). Установлено, что причиной снижения коэффициента трения является сила тяжести, под влиянием которой в двухсредном пограничном слое на межфазной границе формируются условия проскальзывания (вместо граничных условий прилипания, как в односредном). Результаты, полученные по различным методам моделирования, согласуются с точностью до 7 %.

4. Результаты, полученные по программам «Lambola plate wilifi» и Ansys Fluent, согласуются между собой с точностью до 7 %. Программа «Lambola plate wilifi» позволяет получать результаты решения задачи двухсредного пограничного слоя на несколько часов быстрее программы Ansys Fluent при использовании ресурсов только персонального компьютера.

Глава 4

Метод математического моделирования движения частицы в ламинарном пограничном слое плоской пластины

В главе разрабатывается метод математического моделирования движения твердой тяжелой сферической частицы в ламинарном пограничном слое плоской полубесконечной пластины. Предполагается, что частица постоянной массы не вращается, не подвержена деформации, и не взаимодействует с другими частицами; плотности частицы (жидкость) и газовой фазы сильно отличаются $\rho_3 \ll \rho_1$. Частица со скоростью своего падения попадает в произвольное место внешней границы пограничного слоя и далее движется в его области.

4.1 Метод с выбором активно действующих сил

Выберем подвижную, связанную с пластиной систему декартовых координат, начало которой поместим на край пластины (рис. 4.1).

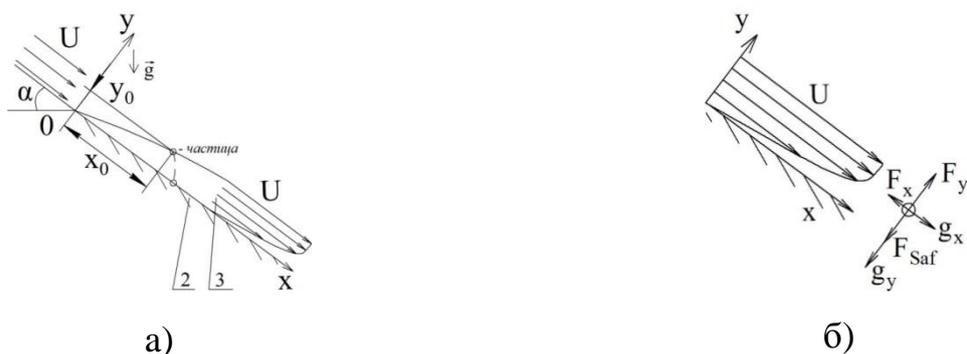


Рис. 4.1. Частица в пограничном слое: а) – схема движения; б) – силы, действующие на частицу; Oxy – декартова система координат; x_0, y_0 – координаты начальной точки движения; α – угол наклона пластины к горизонту; U – скорость набегающего потока; 1 – частица (жидкость); 2 – пластина; 3 – пограничный слой (газ); \vec{g} – вектор силы тяжести.

Пластина расположена под углом α к горизонту и обтекается однородным потоком воздуха с постоянной скоростью U . Вектор скорости потока совпадает с плоскостью пластины. Частица диаметра D_1 при свободном падении в гравитационном поле попадает на внешнюю границу пограничного слоя (точка с координатой (x_0, y_0) на рис. 4.1).

Известно, что движение в градиентных потоках тяжелых частиц определяется действием сил инерции, тяжести, аэродинамического сопротивления и силы Сэфмана [93]. Тогда математическая модель движения частицы в пограничном слое имеет вид

$$m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g \sin \alpha + F_x, \quad m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g \cos \alpha + F_y + F_{Saf}, \quad 0 < t, \\ x_1(0) = x_0, \quad y_1(0) = 5\sqrt{\frac{v_3 x_0}{U}}, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}_1(0) = \dot{y}_0. \quad (4.1)$$

где $m_1 = \frac{\pi D_1^3 \rho_1}{6}$ – масса частицы; $F_x = C_x \frac{\pi (D_1)^2}{4} \frac{\rho_3}{2} (\Delta u |\Delta u|)$, $F_y = C_y \frac{\pi (D_1)^2}{4} \frac{\rho_3}{2} (\Delta v |\Delta v|)$ –

компоненты силы аэродинамического сопротивления; $C_x = \frac{24}{Re_x} (1 + 0.15 Re_x^{0.687})$,

$C_y = \frac{24}{Re_y} (1 + 0.15 Re_y^{0.687})$, если $0.1 < Re_x = \frac{|\Delta u| D_1 \rho_3}{\mu_3}$, $Re_y = \frac{|\Delta v| D_1 \rho_3}{\mu_3} \leq 10^3$ или

$C_x = \frac{24}{Re_x}$; $C_y = \frac{24}{Re_y}$, если $Re_x; Re_y \leq 0.1$; $\Delta u = u_3 - \dot{x}_1$; $\Delta v = v_3 - \dot{y}_1$ – функции

относительной скорости; $u_3 = u_3(x, y)$, $v_3 = v_3(x, y)$ – компоненты скорости

пограничного слоя; $F_{Saf} = C_{Saf} 1.61 (D_1)^2 \sqrt{\frac{\mu_3 \rho_3}{|\frac{\partial u_3}{\partial y}|}} \Delta u \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} \right)$ – сила Сэфмана;

$C_{Saf} = \begin{cases} (1 - 0.3314\sqrt{\beta}) \exp\left(-\frac{Re_x}{10}\right) + 0.3314\sqrt{\beta}, & Re_x \leq 40, \\ 0.0524\sqrt{\beta Re_x}, & Re_x > 40, \end{cases}$ – коэффициент Сэфмана;

$\beta = \frac{D_1}{2|\Delta u|} \left| \frac{\partial u_3}{\partial y} \right|$.

Силам, действующим на частицу, посвящена часть Главы 1 (см. формулы (1.1), (1.2), (1.3)). Компоненты u_3 , v_3 определяются из автомодельных решений Блазиуса [148].

Отметим, что, если относительная продольная скорость отрицательная (частица опережает пограничный слой), то сила Сэфмана направлена к меньшей

скорости непрерывной фазы, то есть к стенке. Если относительная продольная скорость положительная, то сила Сэфмана направлена от стенки [92], [93]. Влияние пристеночных эффектов на силу Сэфмана сказывается на расстояниях порядка лишь несколько диаметров частицы [93], и в настоящей работе не учитывается

Скорость V , с которой частица попадает на внешнюю границу пограничного слоя, может быть разной: меньше или равной равновесной скорости V_∞ , если частица свободно падает, или больше V_∞ , если частица получила дополнительное ускорение. Равновесную скорость определим из баланса сил тяжести и сопротивления, действующих на неё в невозмущенном газе [97]. Тогда уравнение для V_∞ запишется в виде

$$m_1 g = \frac{\rho_3}{2} V_\infty^2 \frac{\pi D_1^2}{4} C_v \quad (4.2)$$

Подставим в (4.2) выражение для коэффициента сопротивления

$$C_v = \frac{24}{Re_V} \left(1 + 0.15 Re_V^{0.687} \right), \quad Re_V = \frac{V_\infty D_1 \rho_3}{\mu_3}. \quad \text{Тогда } V_\infty \text{ определится из}$$

$$\text{алгебраического уравнения } 0.15 \left(\frac{\rho_3 D_1 V_\infty}{\mu_3} \right)^{0.687} V_\infty + V_\infty - \frac{g \rho_1 D_1^2}{18 \mu_1} = 0.$$

Поскольку в задаче плотности фаз частицы и среды сильно отличаются, то в математическую модель (4.1) силы Архимеда, Бассе, присоединенной массы не включаются [92]. Система уравнений (4.1) решена численно методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Код программы, написанной в среде Maple, приведен в приложении В (среднее время исполнения программы на персональном компьютере (8 ядер/ 1 процессор Intel Core 3.4 GHz с 16 Gb оперативной памяти) – несколько секунд).

4.2 Моделирование движения частицы в Ansys Fluent

Метод, описанный в подразделе 4.1, основан на модели (4.1), в которой активно действующие на частицу силы предварительно выбраны. Для проверки

результатов по этому методу, решим задачу о движении частицы в пограничном слое другим методом, в котором рассматривается совместное движение частицы и потока. Для этого будем использовать пакет Ansys Fluent: поместим частицу в область пограничного слоя и зафиксируем её положение. Сформируем поле течения, для чего найдем стационарное решение задачи. Затем перейдем к нестационарному решению, задавая начальные условия для частицы. За перемещением частицы будем следить, используя встроенный решатель 6 DOF [141]. Этот решатель определяет перемещение частицы с учетом приложенных на неё массовых и объемных сил. Объемные силы рассчитываются численным интегрированием нормального и касательного напряжений по поверхности движущейся частицы. Перемещение частицы в границах расчетной области будет возможным благодаря использованию подхода динамически-перестраивающейся сетки, который позволяет передвигать границы ячеек и деформировать сетку с учетом движения частицы.

Расчетная область. Расчетная область и сетка построена с использованием генератора сеточных моделей ICEM [140]. Всю расчетную область представим в виде криволинейной трапеции той области пограничного слоя, в границах которой будет двигаться частица (рис. 4.2).

Левую и правую границы области ограничим продольными координатами $x_0 - \Delta_1$ и $x_0 + \Delta_2$ соответственно. Очевидно, что Δ_1 и Δ_2 нужно выбирать так, чтобы частица всё время своего движения оставалась в расчетной области, то есть $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 > (x_1^* - x_0)$. Координату столкновения частицы с пластиной x_1^* можно оценить, решив в подвижных координатах задачу: пусть частица с начальными координатой (x_0, y_0) и постоянными компонентами горизонтальной U и вертикальной $-V$ скорости падает на пластину, наклоненную под углом α к горизонту. Примем за единицу время полета частицы до пластины, а влияние пограничного слоя на частицу учитывать не будем. Тогда справедливо соотношение $\frac{x_1^* - x_0}{y_0} = \frac{V \sin \alpha + U}{V \cos \alpha}$, из которого найдем

$$x_1^* = \frac{V \sin \alpha + U}{V \cos \alpha} y_0 + x_0. \quad (4.3)$$

Таким образом, для оценки расстояния правой границы расчетной области можно использовать выражение (4.3), которое не учитывает влияние пограничного слоя на движение частицы.

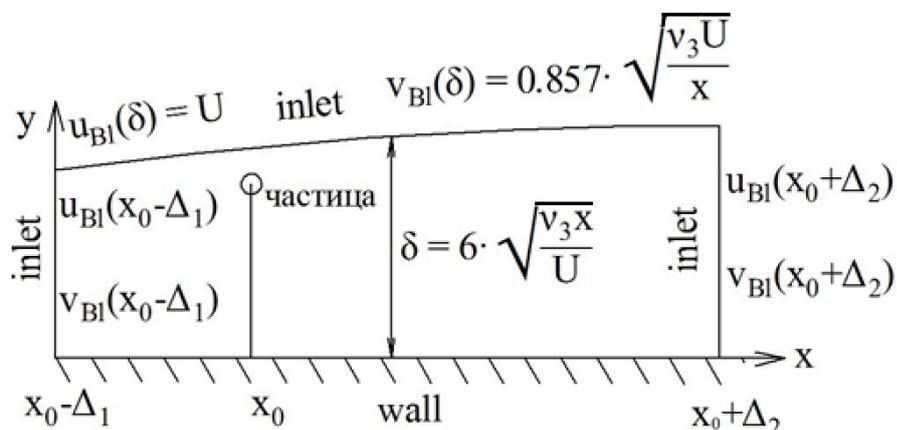


Рис. 4.2. Расчетная область: u_{Bl} , v_{Bl} - соответственно функции продольной и поперечной скорости Блазиуса

Граничные условия определим, используя UDF-макрос [141] (Приложение Г). На левой и правой границах зададим известные функции продольной и поперечной скоростей Блазиуса при координатах $x_0 - \Delta_1$ и $x_0 + \Delta_2$ соответственно, на верхней границе – постоянную по величине продольную скорость, равную U , а также функцию поперечной скорости $v_{Bl}(\delta) = 0,857 \sqrt{\frac{v_3 U}{x}}$, определенную по известной формуле Блазиуса на внешней границе пограничного слоя [148]. На левой, правой и верхней границах граничные условия имеют тип «velocity inlet». На поверхности пластины и для частицы - условия прилипания и непротекания потока (типа «wall»). На рис. 4.2 возле границ расчетной области указан тип соответствующих граничных условий и функции скоростей. Верхнюю границу определим по формуле Блазиуса для толщины пограничного слоя $\delta_3 = 6 \sqrt{\frac{v_3 x}{u_\infty}}$ [149].

Рассматриваемая задача является трехмерной, однако, согласно предварительным расчетам, для частицы можно допустить наличие только двух степеней свободы (частица перемещается в направлении x и y). Поэтому в направлении z (на рис. 4.2 ось z перпендикулярна плоскости oxy) длина расчетной области мала - десять диаметров частицы. Частицу поместим в точку с координатой $\left(x_0, y_0 = 5\sqrt{\frac{v_3 x_0}{U}}, 0\right)$. На боковых поверхностях расчетной области (параллельных плоскости oxy) зададим граничное условие типа «symmetry».

Расчетная сетка. Построим в расчетной области сетку, состоящую из двух зон. Одна из них примыкает непосредственно к частице (зона «inner»), в процессе расчета не деформируется и перемещается вместе с частицей. Она состоит из гексаэдрических ячеек. На рис. 4.3 представлен фрагмент расчетной сетки около частицы в начальный момент времени. На граничных поверхностях (пластина, верхняя граница пограничного слоя, плоскости симметрии) показана поверхностная сетка, а в секущей плоскости, проходящей через миделево сечение частицы, – объемная. Для лучшей видимости сеточной структуры, область около частицы увеличена, а ближняя плоскость симметрии «разорвана» на две части.

Зона «inner», построена в виде полого шара, внутренней поверхностью она описывает сферическую поверхность частицы, а на внешней границе плавно переходит в зону «outer». Зона «outer», состоящая из тетраэдрических ячеек, заполняет оставшуюся расчетную область и имеет большие объемы ячеек, чем зона «inner». Это необходимо для лучшего разрешения уравнений в области пограничного слоя частицы [96]. При расчете ячейки зоны «outer» перестраиваются, деформируются и разбиваются с учетом движения зоны «inner». Окончанием расчета является время, когда зона «inner» достигнет пластины.

Для перестраивающейся сеточной зоны «outer» используются методы сглаживания «smoothing» с настройками по умолчанию и перестроения «remeshing» с опцией «local cell» и настройками согласно рекомендациям в [141]. Общее число ячеек во всей области на начальный момент времени $n = 5 \cdot 10^6$ шт., а все время непрерывного счета занимает около недели с использованием 96 ядер

на кластере (характеристики кластера: 96 ядер/ 24 процессора Intel Xeon 2.7 GHz/ 6 узлов с 120 Gb оперативной памятью и 836 Gb дисковой памяти на узел).

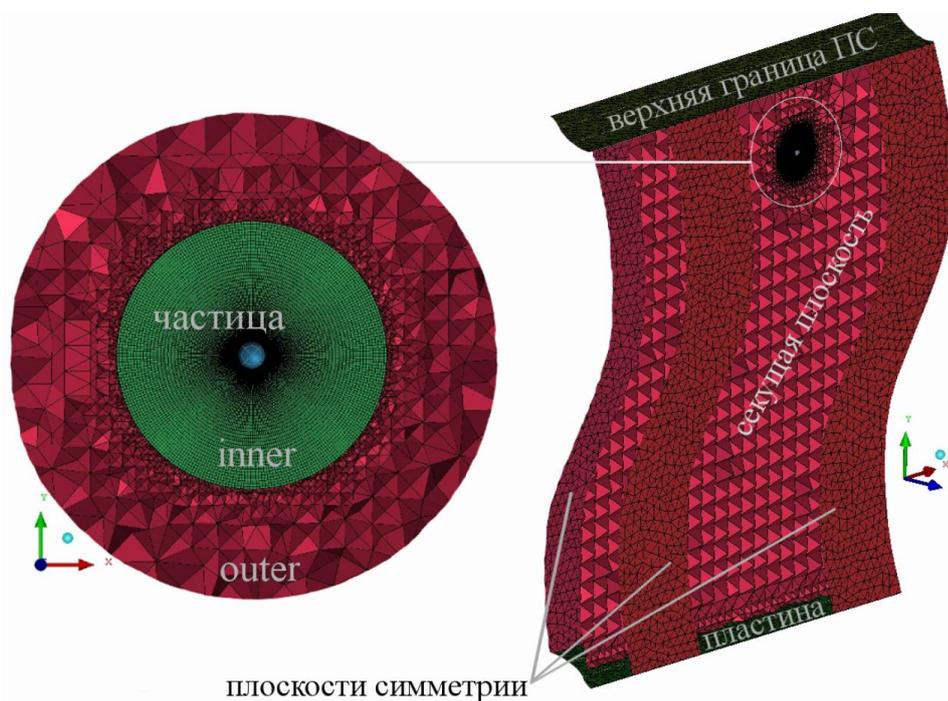


Рисунок 4.3 Фрагмент расчетной сетки

4.3 Сравнение расчетов и результаты решения

Рассмотрим на примере движение частицы. Пусть $T = 20^\circ\text{C}$, $U = 5$ м/с, $\alpha = 0$, $x_0 = 1$ м, $D_1 = 0.0001$ м. По приведенным данным определим число Рейнольдса для пограничного слоя $Re_z \approx 3,36 \cdot 10^5$ и для частицы $Re_x \leq 33,6$. Тогда условия задачи удовлетворяют ламинарному режиму как для задачи пограничного слоя, так и для задачи обтекания частицы.

Получим стационарное решение задачи, результатом которой будет сформированное поле скоростей в рассматриваемой области. Далее, назначив начальные условия для частицы, перейдем к нестационарной задаче: $\dot{x}_0 = 0$ м/с, $\dot{y}_0 = 0$ м/с.

Проведем анализ соотношения сил, действующих на частицу и определяющих её движение. Введем в рассмотрение функцию коэффициента подъёмной силы $C_d = C_y + C_{Saf}$, коэффициенты силы тяжести C_{gx} и C_{gy} по

направлениям осей. Здесь и далее все коэффициенты сил переотнесены к площади миделевого сечения частицы и скоростному напору, где в качестве характерной скорости взята U . На рис. 4.4–4.9 сплошной линией приведены кривые, полученные по методу, реализованному в Ansys Fluent (AF), а пунктирной – по методу, представленному в подразделе (4.1) (Модель).

На рис. 4.4 представлена функция относительной продольной скорости. При $t < 0,033$ с значения Δu уменьшаются, следовательно, функция коэффициента лобового сопротивления убывает (рисунок 4.5), а функция скорости частицы растет (рис. 4.6). При $t = 0,033$ с частица «догоняет» поток, и далее Δu , C_x меняют знаки, а частица тормозится.

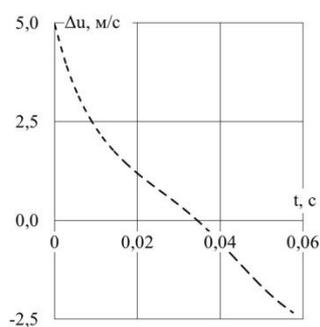


Рис. 4.5. Относительная продольная скорость

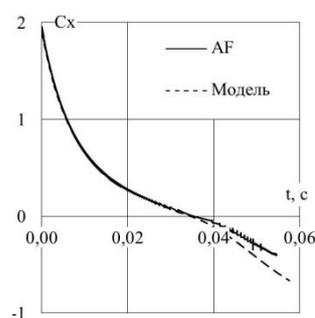


Рис. 4.5. Коэффициент лобового сопротивления

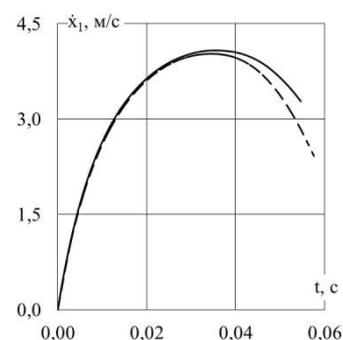


Рис. 4.6. Продольная скорость

На рис. 4.7 представлена функция относительной поперечной скорости. Функции коэффициентов сил и поперечной скорости приведены на рисунках 4.8 и 4.9. На рисунке 4.8 маркерами обозначены составляющие функции коэффициента подъёмной силы.

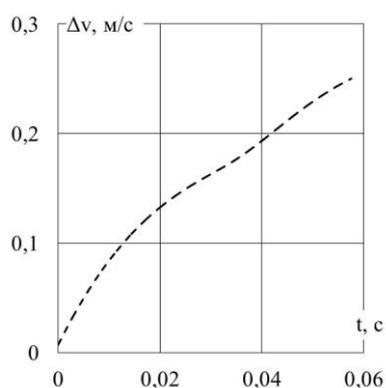


Рис. 4.7. Относительная поперечная скорость

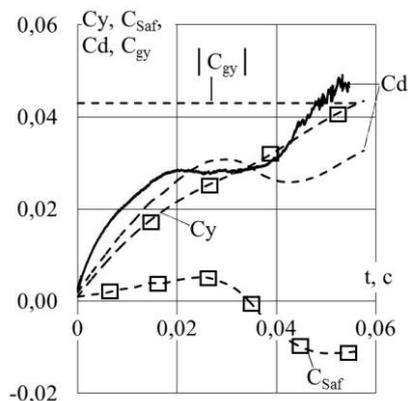


Рис. 4.8. Коэффициенты сил:
□ – составляющие C_d

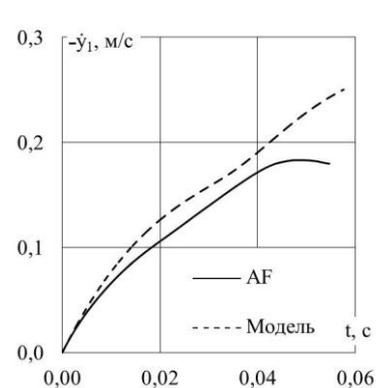


Рис. 4.9. Поперечная скорость

Поскольку значения Δv (рис. 4.7) растут, то C_y (рис. 4.8) увеличивается. При $t \approx 0,033$ с Δu (рис. 4.5) и, как следствие, C_{Saf} (уравнение (4.1) и рис. 4.8) меняют знаки. Коэффициент подъёмной силы C_d в это время имеет локальный минимум, но затем снова растёт. По величине C_{gy} превосходит C_d (рис. 4.8), поэтому частица ускоряется (рис. 4.9).

В пакете Ansys Fluent объёмная сила, действующая на частицу со стороны потока, вычисляется интегрированием нормального и касательного напряжений по поверхности частицы. Таким образом, эта сила является суммарной, и расчленив её на разные составляющие в каком-либо направлении затруднительно.

Решение в программе (Приложение В) по методу, описанному в подразделе 4.1, отличается быстрым получением результатов (численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений занимает несколько секунд), но требует проверки выбора системы активно действующих сил. Решение задачи в Ansys Fluent много затратнее по времени и ресурсам, однако избавляет от выбора системы сил и даёт более точные результаты, так как ещё учитывает взаимное влияние несущей среды и частицы. Поэтому для успешного решения задачи о движении частицы целесообразным видится подход, когда применяются оба метода.

Сравнение результатов расчетов, полученных разными методами, которое можно сделать по рис. 4.5, 4.6, 4.8, 4.9, показывает качественное совпадение. Следовательно, систему активных сил, используемых в методе, основанном на модели (4.1), можно применять для описания физической картины течения. Отметим, что до настоящего времени вопрос о величине и направлении силы Сэфмана остается спорным [150], [151], [152] и количественное рассогласование результатов объясняется, по-видимому, этим обстоятельством.

На рис. 4.10 показаны траектории частицы, полученные разными методами. Сравнение результатов показывает удовлетворительное совпадение (разница 12 %).

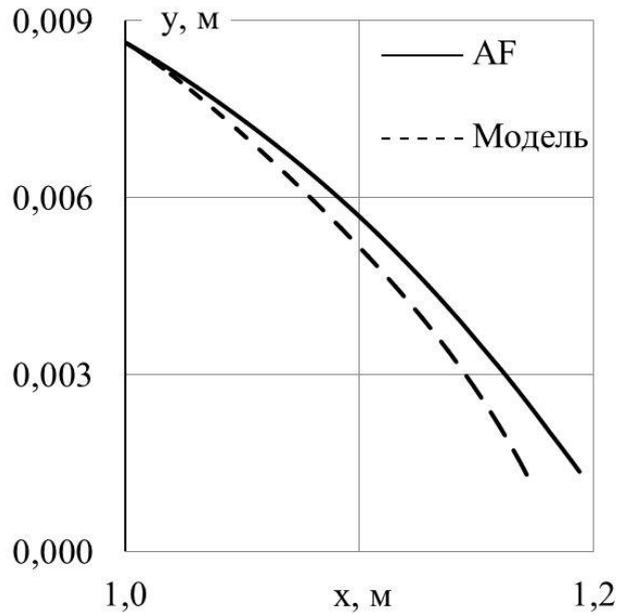


Рис 4.10. Траектории частицы

На рис. 4.11 показаны траектории частицы, полученные по методу, предложенному в подразделе (4.1), в зависимости от угла наклона пластины α и начальной скорости V . Сплошной линией обозначены траектории, полученные при $V=0$, пунктирной – при $V=V_\infty$. Как и следовало ожидать, сила инерции, которой обладает частица с ненулевой начальной скоростью, способствует осаждению частицы ближе к краю пластины (к начальной точке движения). С увеличением угла наклона силы тяжести и инерции в продольном направлении растут, и траектория частицы искривляется сильнее.

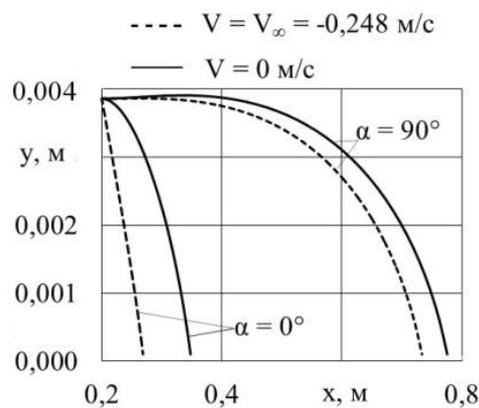


Рис. 4.11. Траектории частицы при различных параметрах

4.4 Выводы по четвертой главе

1. Разработан метод математического моделирования для сферической частицы (среда – жидкость), основанный на уравнении движения центра масс и заранее определенных активно действующих сил на частицу – инерции, тяжести, аэродинамического сопротивления и силы Сэфмана, позволяющий прогнозировать её движение в односредном пограничном слое (среда – газ) на плоской полубесконечной пластине.
2. Вычислительный эксперимент по методу, реализованному в программном комплексе Ansys Fluent и основанному на решении уравнений Навье-Стокса и на совместном решении задач динамики и аэродинамики для частицы подтверждает выбор системы активно действующих сил на частицу. Отличие траекторий, полученных разными методами моделирования составляет 12 %.
3. Получение численных результатов по предложенному методу на персональном компьютере занимает время несколько секунд, решение по методу, реализованному в Ansys Fluent много затратнее по времени и по вычислительным ресурсам (требуется несколько суток работы вычислительного кластера).

Заключение

1. Предложен метод математического моделирования для определения уровня свободной поверхности жидкости, позволяющий прогнозировать рассогласование уровня свободной поверхности жидкости в канале системы управления расходом топлива относительно уровня в баке ракеты-носителя и обосновать расположение датчиков уровня свободной поверхности в канале системы управления с целью минимизации ошибки при определении реального уровня топлива в баке.
2. Установлено, что уровень свободной поверхности в канале совершает затухающие колебания относительно уровня в баке. Показано, что причиной колебаний является инерционность вязкой жидкости. Результаты, полученные с помощью различных методов математического моделирования, имеют удовлетворительное совпадение (от 15 до 40 %).
3. В рамках теории пограничного слоя разработан метод математического моделирования двухсредного неперемешивающегося ламинарного пограничного слоя со скользящей межфазной границей на плоской полубесконечной пластине, позволяющий находить его характеристики с учетом нескольких параметров – чисел Рейнольдса внутреннего и внешнего пограничных слоев и угла наклона плоской полубесконечной пластины, что отличает его от известных методов.
4. Для решения краевой задачи внутреннего пограничного слоя развит приближенный аналитический метод разложения решения в ряд по малому параметру. Для численного решения краевой задачи внешнего пограничного слоя развит вычислительный метод конечных разностей, позволяющий отказаться от итерационных процедур наращивания сетки на каждом маршевом слое до неизвестной границы пограничного слоя в поперечном направлении (как в известном алгоритме). Получена оценка аппроксимации, проведено исследование устойчивости и сходимости для разностной схемы.

5. На основе предложенного метода математического моделирования двухсредного пограничного слоя создана программа для проведения вычислительного эксперимента «Lambola plate wilifi». Показано, что коэффициент трения двухсредного пограничного слоя меньше коэффициента трения односредного пограничного слоя: в зависимости от параметров разница может составлять от 0 до 100 % (и более). Установлено, что причиной снижения коэффициента трения является сила тяжести, под влиянием которой в двухсредном пограничном слое на межфазной границе формируются условия проскальзывания (вместо граничных условий прилипания, как в односредном). Результаты, полученные по различным методам моделирования, согласуются с точностью до 7 %.

6. Разработан метод математического моделирования для сферической частицы (среда – жидкость), основанный на уравнении движения центра масс и заранее определенных активно действующих сил на частицу – инерции, тяжести, аэродинамического сопротивления и силы Сэфмана, позволяющий прогнозировать её движение в односредном пограничном слое (среда – газ) на плоской полубесконечной пластине. Вычислительный эксперимент по методу, реализованному в программном комплексе Ansys Fluent и основанному на решении уравнений Навье-Стокса и на совместном решении задач динамики и аэродинамики для частицы подтверждает выбор системы активно действующих сил на частицу. Отличие траекторий, полученных разными методами моделирования составляет 12 %.

7. Программы, реализующие алгоритмы разработанных в диссертации методов математического моделирования (основанных на модифицированных уравнениях Навье-Стокса), позволяют получать результаты намного быстрее программы Ansys Fluent. Тогда как решение в программе Ansys Fluent (в рамках уравнений Навье-Стокса) позволяет контролировать решение этих программ. Следовательно для дальнейших исследований новых задач целесообразным представляется интеграция методов и подходов моделирования, используемых в диссертации.

Список литературы

- [1] Луковский, И. А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость / И. А. Луковский. – Киев: Наукова Думка, 1990. – 296 с.
- [2] Рабинович, Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов / Б. И. Рабинович. – М.: Машиностроение, 1975. – 416 с.
- [3] Моисеев, Н. Н. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость / Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев. – М.: Наука, 1965. – 440 с.
- [4] Докучаев, Л. В. Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами / Л. В. Докучаев. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
- [5] Нариманов, Г. С. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью / Г. С. Нариманов, Л. В. Докучаев, И. А. Луковский. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с.
- [6] Горелова, К. В. Моделирование вынужденных колебаний свободной поверхности жидкости в баках космических летательных аппаратов [Текст] / К. В. Горелова // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – т. 5. – № 7(65). – С. 30–34.
- [7] Елизарова, Т. Г. Численное моделирование колебаний жидкости в топливных баках [Текст] / Т. Г. Елизарова, Д. С. Сабурин // Математическое моделирование. – 2013. – т. 25. – № 3. – С. 75–88.
- [8] Калиниченко, В.А. Гармоническая неустойчивость поверхности маловязкой жидкости в вертикально колеблющемся сосуде [Текст] / Калиниченко В.А., Кравцов А.В., Родригес-Мижангес Р., Секерж-Зенькович С.Я., Флорес-Эспиноза Р. // ПММ. – 2000. – т. 64. – № 2. – С. 285–292.
- [9] Букреев, В.И. Гравитационные поверхностные волны при продольной качке контейнера, частично заполненного жидкостью [Текст] / Букреев В.И.,

- Дегтярев В.В., Чеботников А.В. // ИВУЗ. Строительство. – 2015. – № 1(673). – С. 77–83.
- [10] Букреев, В.И. Волны на воде в продольно колеблющемся контейнере [Текст] / Букреев В.И., Чеботников А.В. // Изв. РАН МЖГ. – 2015. – т. 3. – С. 140 – 147.
- [11] Ахметов, Д. Г. Кумуляция завихренности в прямоугольном бассейне с наклонным дном после резкого замедления его вращения [Текст] / Д. Г. Ахметов, В. В. Никулин и В. В. Остапенко // Изв. РАН МЖГ. – 2006. – т. 6. – С. 94 – 105.
- [12] Калиниченко, В. А. Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог [Электронный ресурс] / В. А. Калиниченко, Аунг Наинг Со // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – № 12. – Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1138.html>.
- [13] Богоряд, И. Б. О демпфировании нелинейных колебаний вязкой жидкости, частично заполняющей сосуд [Текст] / И. Б. Богоряд, Г. В. Христенко // Изв. РАН МЖГ. – 1994. – т. 5. – С. 158–162.
- [14] Солдатов, И. Н. Гироскопические волны во вращающемся слое жидкости [Текст] / И. Н. Солдатов // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – т. 49. – № 2. – С. 15–20.
- [15] Акуленко, Л. Д. Собственные колебания тяжелой жидкости в эллиптическом бассейне [Текст] / Л. Д. Акуленко, С. А. Кумакшев, С. В. Настеров // Изв. РАН МЖГ. – 2001. – т. 4. – С. 129–142.
- [16] Доценко, С. Ф. Точные аналитические решения нелинейных уравнений длинных волн в случае осесимметричных колебаний жидкости во вращающемся параболическом бассейне [Текст] / С. Ф. Доценко, А. Рубино // Изв. РАН МЖГ. – 2003. – т. 2. – С. 158 – 164.
- [17] Иванов, М. И. Собственные гармонические колебания гравитирующей жидкости в бассейнах сложной формы [Текст] / М. И. Иванов // Изв. РАН

- МЖГ. – 2006. – т. 1. – С. 131 – 148.
- [18] Хакимзянов, Г. С. Численное моделирование течений жидкости с поверхностями волнами / Г. С. Хакимзянов, Ю. И. Шокин, В. Б. Барахнин, Н. Ю. Шокина. – Новосибирск: Изд-во Сиб. отд. РАН, 2001. – 394 с.
- [19] Калиниченко, В. А. Гармоническая неустойчивость поверхности маловязкой жидкости в вертикально колеблющемся сосуде [Текст] / В. А. Калиниченко, А. В. Кравцов, Р. Родригес-Мижангес, С. Я. Секерж-Зенькович, Р. Флорес-Эспиноза // ПММ. – 2000. – т. 64. – № 2. – С. 285–292.
- [20] Шунгаров, Э. Х. Об устойчивости малых колебаний свободной поверхности жидкости [Электронный ресурс] / Э. Х. Шунгаров, Д. А. Гончаров // Молодежный научно-технический вестник. – 2013. – №. 4. – Режим доступа: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/566824.html>
- [21] Секерж-Зенькович, С. Я. Собственные колебания вязкой двухслойной жидкости в замкнутом сосуде [Текст] / С. Я. Секерж-Зенькович // ПММ. – 1990. – т. 54. – № 1. – С. 51–58.
- [22] Кравцов, А. В. Параметрическое возбуждение колебаний вязкой жидкости в замкнутом сосуде [Текст] / А. В. Кравцов, С. Я. Секерж-Зенькович // ЖВММФ. – 1993. – т. 33. – № 4. – С. 611–619.
- [23] Ершов, Б. А. Колебания идеальной жидкости в прямоугольном подвижном сосуде с учетом внутреннего трения в материале упругой вставки на стенке [Текст] / Б. А. Ершов, Г. А. Кутеева // Вестн. СПб. ун-та .Сер.1. – 2005. – № 2. – С. 88–94.
- [24] Кутеева, Г. А. Возмущенное движение жидкости в прямоугольном баке с упругой вставкой на стенке [Текст] / Г. А. Кутеева // Вестн. СПб. ун-та, Сер. 1. – 2002. – № 1. – С. 93–104.
- [25] Кутеева, Г. А. Определение свободной поверхности жидкости в движущемся сосуде с упругой вставкой асимптотическим методом [Текст] / Г. А. Кутеева // Международная конференция по механике. Третьи Поляховские чтения.

- Избранные труды. – СПб, 2003. – С. 203–207.
- [26] Бужинский, В. А. О колебаниях жидкости в топливных баках с демпфирующими решетками [Текст] / В. А. Бужинский // Космонавтика и ракетостроение. – 2007. – т. 1(46). – С. 110–120.
- [27] Пожалостин, А. А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения [Электронный ресурс] / А. А. Пожалостин, Д. А. Гончаров // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – №. 12(24). – Режим доступа: engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1147.html
- [28] Гончаров, Д. А. Осесимметричные колебания двухплотностной жидкости в цилиндрическом баке [Электронный ресурс] / Д. А. Гончаров // Наука и образование. – 2012. – №. 4. – Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/362856.html>.
- [29] Пожалостин, А. А. Малые колебания двухслойной жидкости с учетом проницаемости разделителя [Текст] / А. А. Пожалостин, Д. А. Гончаров, В. В. Кокушкин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Ест. наук. – 2014. – т. 5. – С. 109–116.
- [30] Гончаров, Д. А. Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения [Электронный ресурс] / Д. А. Гончаров // Наука и образование. – 2013. – №. 11. – DOI: 10.7463/1113.0619258
- [31] Борисов, Д. И. Собственные колебания идеальной жидкости в сосудах с перфорированными перегородками [Текст] / Д. И. Борисов, Ю. И. Руднев // Прикладная гидромеханика. – 2010. – т. 12. – № 2. – С. 8–19.
- [32] Кононов, Ю. Н. Свободные колебания упругих мембран, разделяющих многослойную жидкость в цилиндрическом сосуде с упругим дном [Текст] / Ю. Н. Кононов, Е. А. Татаренко // Динамические системы. – 2006. – № 21. – С. 7–13.

- [33] Гончаров, Д. А. Об экспериментальном методе определения коэффициента демпфирования разделителя двусвязной жидкости в баке [Электронный ресурс] / Д. А. Гончаров, А. А. Пожалостин // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2014. – №. 12(36). – Режим доступа: engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1342.html.
- [34] Богоряд, И. Б. К расчету течения вязкой жидкости во вращающемся цилиндре с упругими радиальными ребрами [Текст] / И. Б. Богоряд, Н. П. Лаврова // ИВУЗ Физика. – 2013. – т. 56. – № 6-3. – С. 89–91.
- [35] Нгуен, З. Х. Собственные колебания жидкости в сферических емкостях [Текст] / З. Х. Нгуен // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Машиностроение. – 2015. – т. 2(101) . – С. 84–90.
- [36] Шимановский, А. О. Моделирование колебаний жидкости в транспортном резервуаре с перегородками [Текст] / А. О. Шимановский, А. В. Путято // Автомобильный транспорт. – 2006. – т. 19. – С. 35-37.
- [37] Нгуен, Х. З. Колебания жидкого топлива непостоянного объема в сферической емкости [Текст] /Х. З. Нгуен и А. Н. Темнов // Наука и образование. – 2014. – т. 12. – С. 426–439.
- [38] Дьяченко, М. И. Колебания жидкого топлива в цилиндрических и конических емкостях [Текст] / М. И. Дьяченко, В. В. Орлов, А. Н. Темнов // Наука и образование. – 2013. – №. 11. – С. 175–192.
- [39] Дьяченко, М. И. Собственные колебания жидкого топлива в условиях перераспределения [Текст] / М. И. Дьяченко, А. Н. Темнов // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Машиностроение. – 2012. – №. 3. – С. 31–38.
- [40] Степанова, М. И. Малые движения жидкости с поверхностной диссипацией энергии [Текст] / М. И. Степанова, А. Н. Темнов А.Н. // Вестник МГТУ им. Н.Э.Баумана. Сер. Естеств. наук. – 2011. – №. 4. – С. 99-110.
- [41] Новошинцев, А. В. Численное моделирование истечения вязкой жидкости из объемного смесителя [Текст] / А. В. Новошинцев, Г. Р. Шрагер, В. А.

- Якутенок, Ю. М. Милехин, Ю. Б. Банзула // Теоретические основы химической технологии. – 2006. – т. 40. – № 6. – С. 668–674.
- [42] Новошинцев, А. В. Моделирование процесса истечения вязкой жидкости под действием перепада давления с заполнением канала [Текст] / А. В. Новошинцев, Г. Р. Шрагер, В. А. Якутенок, Ю. М. Милехин, Ю. Б. Банзула, С. В. Каразов // Теоретические основы химической технологии. – 2009. – т. 43. – № 3. – С. 341–349.
- [43] Карликов, В. П. Численный анализ процесса воронкообразования при нестационарном истечении жидкости из вращающегося цилиндрического сосуда [Текст] / В. П. Карликов, А. В. Розин, С. Л. Толоконников // Изв.РАН МЖГ. – 2007. – т. 5. – С. 98–105.
- [44] Орлов, В. В. Экспериментальное исследование истечения вращающейся жидкости из конструктивно подобных емкостей [Текст] / В. В. Орлов, А. Н. Темнов, Г. Н. Товарных // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2011. – С. 90–99.
- [45] Штарев, А. А. Экспериментальное исследование расхода жидкости при нестационарном истечении из заполненной емкости [Текст] / А. А. Штарев // Изв. РАН МЖГ. – 2005. – № 2. – С. 113–121.
- [46] Ахметов, Д. Г. Возникновение торнадоподобных вихрей во вращающейся жидкости при вынужденных инерционных колебаниях большой амплитуды [Текст] / Д. Г. Ахметов, Б. А. Луговцов, В. Г. Макаренко, В. В. Никулин // ПМТФ. – 2002. – т. 43. – № 2. – С. 87–91.
- [47] Карликов, В. П. К проблеме воронкообразования при истечении жидкостей из сосудов [Текст] / В. П. Карликов, А. В. Розин, С. Л. Толоконников // Изв. РАН МЖГ. – 2008. – № 3. – С. 140–151.
- [48] Павельев, А. А. Влияние симметрии положения сливного отверстия на формирование нестационарных вихревых воронок [Текст] / А. А. Павельев, А. А. Штарев // Изв. РАН МЖГ. – 2005. – № 5. – С. 182–188.

- [49] Мазуренко, В. Б. Модель процесса измерения уровня жидкого топлива в условиях качки [Текст] / В. Б. Мазуренко // Системные технологии. – 2014. – т. 5(94). – С. 25–36.
- [50] Сольнищев, Р. И. Повышение точности измерений уровня жидкости в замкнутых движущихся резервуарах [Текст] / Р. И. Сольнищев, Н. Н. Майоров // Научное приборостроение. – 2007. – т. 17. – № 4. – С. 66–70.
- [51] Бострикова, И. Н. Системы управления расходом топлива ракеты космического назначения "Ангара". Результаты наземной отработки и летных испытаний [Текст] / И. Н. Бострикова, В. А. Вакушин, И. С. Партола, Е. Б. Каблова, В. П. Иванов // Датчики и системы. – 2011. – т. 8. – pp. 25–29.
- [52] Лаптев, А. Г. Модель гидродинамических характеристик пленочного течения [Текст] / А. Г. Лаптев, Т. С. Бажиров, М. В. Сайтбаталов // Вестн. Казан. гос. энерг. ун-та. – 2010. – № 3. – С. 18–23.
- [53] Sinkunas, S. On liquid physical properties influence for laminar film thickness [Text] / Sinkunas S., Kiela A. // Proceedings of the 6 International Conference Intelligent Technologies in Logistics and Mechatronics Systems (ITELMS'2011). – Kaunas. – 2011. – P. 14–19.
- [54] Будлал, А. Уравнение модуляций для волновых течений плёнки жидкости по вертикальной стенке [Текст] / А. Будлал и В. Ю. Ляпидевский // Докл. АН. – 2012. – т. 442. – № 1, С. 45–49.
- [55] Чернявский, А. Н. Численное моделирование процесса волнообразования в стекающих плёнках жидкости [Текст] / А. Н. Чернявский // Устойчивость и турбулентность течений гомогенных и гетерогенных жидкостей: Докл. Всерос. молодёж. конф. – Новосибирск. – 2010. – №12. – С. 280–283.
- [56] Цвелодуб, О. Ю. Волновые режимы на плёнке обобщенной ньютоновской жидкости, стекающей по вертикальной плоскости [Текст] / О. Ю. Цвелодуб // Изв. РАН МЖГ. – 2007. – № 4. – С. 3–15.
- [57] Sadiq, T. R. Thin Newtonian film flow down a porous inclined plane: stability

- analysis [Text] / T. R. Sadiq, R. Usha // *Physics of Fluids*. – 2008. – Vol. 20. – № 2. – P. 022105.
- [58] Голуб, В. Л. Течение жидкости по наклонной гофрированной поверхности в резонансном режиме [Текст] / В. Л. Голуб, В. И. Тошинский, А. В. Медяник // *Интегрированные технологии и энергосбережение*. – 2009. – т. 1. – С. 48–56.
- [59] Николаев, А. Н. Динамика плёночного течения жидкости в каналах с крупномасштабной регулярной шероховатостью [Текст] / А. Н. Николаев // *Тр. Академэнерго*. – 2008. – т. 4. – С. 44–51.
- [60] Oron, A. Weighted-residual integral boundary-layer model for the nonlinear dynamics of thin liquid films falling on an undulating vertical wall [Text] / A. Oron, C. Heining // *Physics of Fluids*. – 2008. – Vol. 20. – № 8. – P. 082102.
- [61] Hacker, T. An integral boundary layer equation for film flow over inclined wavy bottoms [Text] / T. Hacker, H. Uecker // *Physics of Fluids*. – 2009. – Vol. 21. – № 9. – P. 092105.
- [62] D'Alessio, S. D. Film flow over heated wavy inclined surfaces [Text] / S. D. D'Alessio, K. A. Ogden, J. P. Pascal, H. A. Jasmine // *J. Fluid Mech.* – 2010. – Vol. 665. – P. 418–456.
- [63] Цвелодуб, О. Ю. Эволюция пространственных возмущений на поверхности плёнки жидкости, стекающей по вертикальному цилиндру [Текст] / О. Ю. Цвелодуб, А. А. Бочаров // *Тез. докл. Всерос. научн. конф. "Нелинейные волны: теория и новые приложения"*. – Новосибирск. – 2011. – С. 66.
- [64] Ключев, Н. И. Волновое течение плёнки по стенке вертикального цилиндрического канала [Текст] / Н. И. Ключев, Е. А. Соловьева // *Вестн. Сам-ГУ*. – 2009. – №. 4. – С. 114–128.
- [65] Бойко, В. Д. Волновое течение тонкого слоя вязкой жидкости по наклонной поверхности [Текст] / В. Д. Бойко, А. В. Дорошенко, В. Х. Кириллов // *ВОНМУ*. – 2009. – т. 26. – С. 52–66.

- [66] Novbari, E. Energy integral method model for the nonlinear dynamics of an axisymmetric thin liquid film falling on a vertical cylinder [Text] / E. Novbari, A. Oron // *Physics of Fluids*. – 2009. – Vol. 21. – № 6. – P. 062107.
- [67] Takagi, D. Flow and instability of thin films on a cylinder and sphere [Text] / D. Takagi, H. E. Huppert // *J. Fluid Mech.* – 2010. – Vol. 647. – P. 221–238.
- [68] Baxter, S. J. Three-dimensional thin film flow over and around an obstacle on an inclined plane [Text] / S. J. Baxter, H. Power, K. A. Cliffe, S. Hibberd // *Physics of Fluids*. – 2009. – Vol. 21. – № 3. – P. 032102.
- [69] Пономарева, М. А. Моделирование растекания капли вязкой жидкости в плоской постановке при больших числах Бонда [Текст] / М. А. Пономарева, В. А. Якутенок // *Вестник Томск.ГУ*. 2007. – т. 1. – P. 79–83.
- [70] Могилевский, Е. И. Течения тонких пленок вязкой жидкости по криволинейным вращающимся поверхностям [Текст] / Е. И. Могилевский, В. Я. Шкадов // *Изв. РАН. МЖГ*. – 2009. – т. 2. – С. 18–32.
- [71] Mukhopadhyay, A. Stability of a thin viscous fluid film flowing down a rotating non-uniformly heated inclined plan [Text] / A. Mukhopadhyay // *Acta mech.* – 2011. – Vol. 216. – P. 225–242.
- [72] Холпанов, Л. П. Нелинейное взаимодействие газового потока с волновой плёнкой жидкости с учетом срыва (осаждения) капель с поверхности [Текст] / Л. П. Холпанов, Н. С. Мочалова // *Теор. основы хим. технол.* – 2001. – т. 35. – № 4. – С. 349–354.
- [73] Samenfink, W. Droplet interaction with shear-driven liquid films: Analysis of deposition and secondary droplet characteristics [Text] / W. Samenfink, A. Elsaßer, K. Dullenkopf // *Int. J. Heat and Fluid Flow*. – 1999. – Vol. 20. – № 5. – P. 462–469.
- [74] Dietze, G. F. Investigation of the backflow phenomenon in falling liquid films [Text] / G. F. Dietze, A. Leefken и R. Kneer // *J. Fluid Mech.* – 2008. – Vol. 595. – P. 435–459.

- [75] Трифонов, Ю. Я. Расчёт волнового стекания пленок в рамках уравнений Навье-Стокса [Текст] / Ю. Я. Трифонов // Докл. АН. – 2007. – т. 416. – № 2, С. 195–199.
- [76] Трифонов, Ю. Я. Расчёт устойчивости волнового стекания пленок с использованием уравнений Навье-Стокса [Текст] / Ю. Я. Трифонов // Прикл. мех. и техн. физ. – 2008. – т. 49. – № 2(288). – С. 239–252.
- [77] Шкадов, В. Я. Волновые движения пленок жидкости на вертикальной поверхности (теория для истолкования экспериментов) [Текст] / В. Я. Шкадов, Е. А. Демехин // Успехи мех. – 2006. – т. 4. – № 2. – С. 3–65.
- [78] Алексеенко, С. В. Характеристики уединённых трёхмерных волн на вертикально стекающих плёнках жидкости [Текст] / С. В. Алексеенко, В. В. Гузанов, Д. М. Маркович, С. М. Харламов // Письма в ЖТФ. – 2010. – т. 36. – № 22. – С. 1–8.
- [79] Гузанов, В. В. Экспериментальное исследование взаимодействия трёхмерных и двумерных волн при пленочном течении жидкости [Текст] / В. В. Гузанов, А. З. Квон, С. М. Харламов // Докл. Всерос. молодежной конф. Устойчивость и турбулентность течений гомогенных и гетерогенных жидкостей. – Новосибирск, 2010. – Вып. 12. – С. 107–110.
- [80] Белоусов, А. П. Изменение толщины плёнки жидкости, движущейся по сферической поверхности [Текст] / А. П. Белоусов, П. Я. Белоусов // Автометрия. – 2010. – т. 46. – № 6. – С. 116–121.
- [81] Zhang, F. An investigation of falling liquid films on a vertical heated/cooled plate [Text] / F. Zhang, Y.-T. Wu, J. Geng, Z.-B. Zhang // Int. J. Multiphase Flow. – 2008. – Vol. 34. – № 1. – P. 13–28.
- [82] Лойцянский, Л. Г. Об изменении сопротивления тел путем заполнения пограничного слоя жидкостями с другими физическими константами [Текст] / Л. Г. Лойцянский // ПММ. – 1942. – т. VI. – № 1. – С. 94–100.
- [83] Федяевский, К. К. Поверхностное трение в турбулентном пограничном слое

- сжимаемого газа [Текст] / К. К. Федяевский // Труды Цаги. – 1940. – № 516.
- [84] Федяевский, К. К. Уменьшение сопротивления трения путем изменения физических констант жидкости у стенки [Текст] / К. К. Федяевский // Известия АН СССР, сер. ОТН. – 1943. – Т. №9 –10.
- [85] Черный, Г. Г. Механика жидкости и газа / Г. Г. Черный. – Москва: Физматлит, 2003.
- [86] Беда, Г. А. О течении жидкой пленки [Текст] / Г. А. Беда // ПМТФ. – 1961. – т. 3. – С. 110-111.
- [87] Shakhov, V. G. Calculation of laminar boundary layer by integral method for two fluids upon flat plate [Text] / V. G. Shakhov, B. Wang, S. Ji // Тезисы симп. с междунар. участием. Самолетостр. России. Пробл.и перспективы. – Самара, 2012. – С. 428–430.
- [88] Shakhov, V. G. Two fluids boundary layers [Text] / V. G. Shakhov, B. Wang, S. Ji // Сб. науч. тр. XVI Всеросс. н. т. конф. Управление движением и навигация летательных аппаратов. – Самара, 2013. – С. 238 – 241.
- [89] Шахов, В. Г. Двухсредный автомодельный пограничный слой на плоской пластине [Текст] /В. Г. Шахов // Изв. СИЦ РАН. – 2013. – т. 15. – № 6(4). – С. 1019–1021.
- [90] Воронков, Ю. С. Задачи обтекания тел / Ю. С. Воронков, И. М. Елманов, В. Г. Лежнёв, М. В. Лежнёв, А. Ж. Карсян, Э. Н. Потетюнко. – Ростов-н/Д: РГУПС, 2011. – С. 284.
- [91] Карсян, А. Ж. Математические модели расчета воздействия потока вязкой несжимаемой жидкости на тело: дис. ...канд.физ.-мат. наук : 01.02.05 / Карсян Анжела Жозефовна. – Ростов-н/Д, 2013. – 104 с.
- [92] Рыбдылова, О. Д. Поперечная миграция и фокусировка инерционной примеси в сдвиговых потоках : дис. ...канд.физ.-мат. наук : 01.02.05 / Рыбдылова Оюна Данзановна. – М., 2012. – 123 с.
- [93] Асмолов, Е. С. Поперечная миграция малых сферических частиц в

- сдвиговых и нестационарных потоках : дис. ...докт.физ.-мат. наук : 01.02.05 / Асмолов Евгений Савельевич. – М., 2015. – 206 с.
- [94] Crowe, C. T. Flows with droplets and particles / C. T. Crowe, J. D. Schwarzkopf, M. Sommerfeld, Y. Tsuji. – NW:CRC Press, 2012. – 487 p.
- [95] Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1970. – 904 с..
- [96] Jones, D. A. Simulation of Flow Past a Sphere using the Fluent Code [Электронный ресурс] / D. A. Jones, D. B. Clarke // Technical Report. – 2008. – Режим доступа: <http://www.dsto.defence.gov.au/corporate/reports/DSTO-TR-2232.pdf>
- [97] Уоллис, Г. Одномерные двухфазные течения / Г. Уоллис. – М.: Мир, 1972. – 440 с.
- [98] Neve, R. S. The effects of turbulence characteristics on sphere drag [Text] / R. S. Neve, T. Shansonga // Int. J. Heat and Fluid Flow. – 1989. – Vol. 10. – № 4. – P. 318–321.
- [99] Torobin, L. B. The drag coefficients of single spheres moving in steady and accelerated motion in a turbulent fluid [Text] / L. B. Torobin, W. H. Gauvin // AIChE J. – 1961. – Vol. 7. – № 4. – P. 615–619.
- [100] Clift, R. Motion of entrained particles in gas streams [Text] / R. Clift, W. H. Gauvin // The Can. J. of Chem. Eng. – 1971. – Vol. 49. – № 4. – P. 439–448.
- [101] Zarin, N. A. Sphere drag in solid rockets -non continuum and turbulence effects [Text] / N. A. Zarin, J. A. Nicholls // Comb. Sci. and Tech. – 1971. – Vol. 3. – P. 273–285.
- [102] Rudoff, R. R. Measurements of droplet drag coefficients in polydispersed turbulent flow field [Text] / R. R. Rudoff, W. D. Bachalo // AIAA Paper. – 1988. – P. 88-0235.
- [103] Brucato, A. Particle drag in turbulent fluids [Text] / A. Brucato, F. Grisaf, G. Montone // Chem. Eng. Sci. – 1998. – Vol. 53. – № 18. – P. 3295–3314.

- [104] Bagchi, P. Effect of turbulence on the drag and lift of a particle [Text] / P. Bagchi, S. Balachandar // *Phys. Fluids*. – 2003. – Vol. 15. – № 11. – P. 3496–3513.
- [105] Warnica, W. D. Drag coefficient of spherical liquid droplets. Part 2: Turbulent gaseous fields [Text] / W. D. Warnica, M. Renksizbulut, A. B. Strong // *Exp. Fluids*. – 1995. – Vol. 18. – № 4. – P. 265–276.
- [106] Crowe, C. T. Drag coefficient for particles in rarefied, low Mach number flows [Text] / C. T. Crowe, W. Babcock, P. G. Willoughby // *Proceedings of the Int. Symp. On Two-Ph. Syst. Prog. Heat and Mass Trans.* – 1973. – P.419–431.
- [107] Walsh, M. J. Drag coefficient equations for small particles in high speed flows [Text] / M. J. Walsh // *AIAA J.* – 1975. – Vol. 13. – № 11. – P. 1526–1528.
- [108] Bailey, A. B. Sphere drag coefficients for a broad range of Mach and Reynolds numbers [Text] / A. B. Bailey, J. Hiatt // *AIAA J.* – 1972. – Vol. 10. – № 11. – P. 1436–1440.
- [109] Henderson, C. B. Drag coefficients of spheres in continuum and rarefied flows [Text] / C. B. Henderson // *AIAA J.* – 1976. – Vol. 14. – P. 707–708.
- [110] Barkla, H. M. The Magnus or Robins effect on rotating spheres [Text] / H. M. Barkla, L. J. Auchterlonie // *J. Fluid Mech.* – 1971. – Vol. 47. – № 3. – P. 437–447.
- [111] Rubinow, S. I. The transverse force on spinning sphere moving in a viscous fluid [Text] / S. I. Rubinow, J. B. Keller // *J. Fluid Mech.* – 1961. – Vol. 11. – № 3. – P. 447–459.
- [112] Bagchi, P. Shear versus vortex-induced lift force on a rigid sphere at moderate Re [Text] / P. Bagchi, S. Balachandar // *J. Fluid Mech.* – 2002. – Vol. 473. – P. 379–388.
- [113] Niazman, H. Surface effects on transient three-dimensional flows around rotating spheres at moderate Reynolds numbers [Text] / H. Niazmand, M. Renksizbulut // *Comp. and fluids*. – 2003.–Vol. 32(10). – P. 1405–1433.
- [114] Brenner, H. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane

- surface [Text] / H. Brenner // Chem. Engng. Sci. – 1961. – Vol. 16. – P. 242–251.
- [115] Goldman, A. J. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall-I Motion through a quiescent fluid [Text] / A. J. Goldman, R. G. Cox, H. Brenner // Chem. Eng. Sci. – 1967. – Vol. 22. – P. 637–651.
- [116] Goldman, A. J. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall-II Coette flow [Text] / A. J. Goldman, R. G. Cox, H. Brenner // Chem. Eng. Sci. – 1967. – Vol. 22. – P. 653–660.
- [117] Auton, T. R. The force exerted on a body in an inviscid unsteady nonuniform rotational flow [Text] / T. R. Auton, J. R. Hunt, M. Prud'homme // J. Fluid Mech. – 1988. – Vol. 197. – P. 241.
- [118] Odar, F. Forces on a sphere accelerating in a viscous fluid [Text] / F. Odar, W. S. Hamilton // J. Fluid Mech. – 1964. – Vol. 18. – P. 302–314.
- [119] Odar, F. Verification of the proposed equation for calculation of the forces on a sphere accelerating in a viscous flow [Text] / F. Odar // J. Fluid Mech. – 1966. – Vol. 25. – P. 591–592.
- [120] Schöneborn, P. R. The interaction between a single particle and an oscillating fluid [Text] / P. R. Schöneborn // Int. J. Multiphase Flow. – 1975. – Vol. 2. – № 3. – P. 307–317.
- [121] Michaelides, E. E. A reinterpretation of the Odar and Hamilton data on the unsteady equation of motion of particles [Text] / E. E. Michaelides, A. Roig // AIChE J. – 2010. – Vol. 57. – № 11. – P. 2997–3002.
- [122] Reeks, M. W. The dispersive effects of Basset history forces on particle motion in a turbulent flow [Text] / M. W. Reeks, S. McKee // Phys. Fluids. – 1984. – Vol. 27. – P. 1573–1582.
- [123] Saffman, P. G. The lift on a small sphere in a slow shear flow [Text] / P. G. Saffman // J. Fluid Mech. – 1965. – Vol. 22. – P. 385–400.
- [124] Saffman, P. G. Corrigendum to "The lift on a small sphere in a slow shear flow" [Text] / P. G. Saffman // J. Fluid Mech. – 1968. – Vol. 31. – P. 624.

- [125] McLaughlin, J. B. Inertial migration of small sphere in linear shear flows [Text] / J. B. McLaughlin // J. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 224. – P. 261–274.
- [126] Mei, R. An approximate expression for the shear lift on a spherical particle at finite Reynolds number [Text] / R. Mei // Int. J. Multiphase Flow. – 1992. – Vol. 18. – № 1. – P. 145–147.
- [127] Dandy, D. S. A sphere in shear flow at finite Reynolds number: effect of particle lift, drag and heat transfer [Text] / D. S. Dandy, H. A. Dwyer // J. Fluid Mech. – 1990. – Vol. 216. – P. 381–410.
- [128] Oesterlé, B. Experiments on the lift of a spinning sphere in a range of intermediate Reynolds numbers [Text] / B. Oesterlé, B. Dinh // Exper. in Fluids. – 1998. – Vol. 25. – P. 16–22.
- [129] Sawatzki, O. Stromungsfeld um eine rotierend Kugel [Text] / O. Sawatzki // Acta Mechanica. – 1970. – Vol. 9. – P. 159–214.
- [130] Denis, S. R. The steady flow due to a rotating sphere at low and moderate Reynolds numbers [Text] / S. R. Denis, S. N. Singh, D. B. Ingham // J. Fluid Mech. – 1980. – Vol. 101. – P. 257–279.
- [131] Слезкин, Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н. А. Слезкин. – М.: Гостехиздат, 1955. – 520с.
- [132] Попов, Д. Н. Нестационарные гидромеханические процессы / Д. Н. Попов. – М.: Машиностроение, 1982. – 240 с.
- [133] Ройзман, Д. Х. Ламинарное пульсирующее течение жидкости в круглых трубах [Текст] / Д. Х. Ройзман // ТВТ. – 1969. – т. 7. – № 2. – С. 288–298.
- [134] Бабе, Г. Д. Идентификация моделей гидравлики / Г. Д. Бабе, Э. А. Бондарев, А. Ф. Воеводин, М. А. Каниболоцкий. – Новосибирск: Наука, 1980. – 160 с.
- [135] Фокс, Д. А. Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах / Д. А. Фокс. – М.: Энергоиздат, 1981.
- [136] Ключев, Н. И. Модели измерения уровня жидкости в баке ракеты-носителя [Текст] / Н. И. Ключев, О. П. Филатов // Вестн. СамГУ. Ест.серия. – 2015. – №

- 3(125) . – С. 88–96.
- [137] Филатов, О. П. Интегро-дифференциальная задача параболического типа [Текст] / О. П. Филатов // Материалы 68-й научной конференции «Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования «Герценовские чтения – 2015». – Спб, 2015. – С. 73–74.
- [138] Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с..
- [139] Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989.
- [140] ANSYS ICEM CFD 11.0. Tutorial Manual [Электронный ресурс]. –2007 – Режим доступа: http://orange.engr.ucdavis.edu/ICEM11_Tutorial/itut110.pdf.
- [141] ANSYS FLUENT 12.0. Theory Guide [Электронный ресурс]. – 2009. – Режим доступа:
<http://orange.engr.ucdavis.edu/Documentation12.0/120/FLUENT/flth.pdf>.
- [142] Андерсон, Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: в 2 т. / Д. Андерсон, Д. Таннехилл, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990 – 2 т.
- [143] Tutorial Solving a 2D Box Falling into Water [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.cae-club.ru/sites/default/files/users/files/2053/fluent-mdm-tut-01_2d-falling-box.pdf.
- [144] Fuel Tank Sloshing [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://wenku.baidu.com/view/7357404269eae009581bec64.html>.
- [145] Фабрикант, Н. Я. Аэродинамика / Н. Я. Фабрикант. – М.: Наука, 1964. – 814 с.
- [146] Рябенский, В. С. Введение в вычислительную математику / В. С. Рябенский – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 296 с.
- [147] Самарский, А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1982.

- [148] Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1969.
- [149] Кутателадзе, С. С. Гидродинамика газожидкостных систем / С. С. Кутателадзе, М. А. Стырикович. – М.: Энергия, 1976. – 296 с.
- [150] Cherukat, P. A computational study of the inertial lift on a sphere in a linear shear flow field [Text] / P. Cherukat, J. B. McLaughlin, D. S. Dandy // Int. J. Multiphase Flow. – 1999. – Vol. 25. – P. 15–33.
- [151] Kurose, R. Drag and lift forces on a rotating sphere in a linear shear flow [Text] / R. Kurose, S. Komori // J. Fluid Mech. – 1999. – Vol. 384. – P. 183–206.
- [152] Kurose, R. Effects of outflow from the surface of a sphere on drag, Shear lift, and scalar diffusion [Text] / R. Kurose, H. Makino // Physics of fluids. – 2003. – Vol. 15. – № 8. – P. 2338–2351.

Работы автора

- [153] **Клюев, Н.И. Влияние жидкой пленки на сопротивление трения плоской пластины [Текст] / Н.И.Клюев, Ю.А. Крюков // Изв. вузов. Ав. техника. – 2014. – № 4. – С. 33–35. (Также в перечень входит переводная версия статьи: Klyuev, N.I. Influence of fluid film on friction of a flat plate [Text] / N.I. Klyuev, Y. A. Kryukov // Russian Aeronautics. – 2014. – Vol 57. – No.4. – P. 372 – 377).**
- [154] **Клюев, Н.И. Снижение трения на плоской пластине при наличии жидкой пленки на ее поверхности [Текст] / Н.И. Клюев, В. А. Фролов, Ю.А. Крюков // Вестн. Самарск. универ. Аэрокосм. техника, технологии и машиностр. – 2012. – №5-2(36) (2012): спец. вып. – С. 29–32.**
- [155] **Крюков, Ю.А. Моделирование движения сферической капли в ламинарном пограничном слое Блазиуса с помощью пакета Ansys Fluent [Текст] / Ю.А. Крюков // Вестн. Сам. универ. Естеств. серия. – 2015. – № 3(2015). – С. 97–105.**
- [156] **Крюков, Ю.А. Математическая модель колебания топлива в измерительном канале системы управления расходом топлива**

- [Текст] / Ю.А. Крюков // Вестн. Самарск. универ. Аэрокосм. техника, технологии и машиностр. – 2016. – Т. 15 (2016). – № 1. – С. 207–217.
- [157] Ключев, Н.И. Ламинарное обтекание плоской пластины с жидкой пленкой на ее поверхности [Текст] / Н.И. Ключев, Ю.А. Крюков // Сборник трудов XVI Всероссийского семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. – Самара, 2013. – 198 – 201.
- [158] Крюков, Ю.А. Решение сопряженной задачи обтекания плоской пластины при наличии жидкой пленки на ее поверхности [Текст] / Крюков Ю.А. // Материалы III Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные проблемы ракетно-космической техники» (III Козловские чтения). – Самара, 2013. – С.524 – 531.
- [159] Klyuev, N.I. Two-media boundary layer on a flat plate [Text] / N.I. Klyuev, A. G. Gimadiev, Y. A. Kryukov // Int. J. of Eng. and Techn. – 2014. – Vol. 6. – № 5. – P. 2368 – 2374.
- [160] Крюков, Ю.А. Математическая модель колебания топлива в измерительном канале СУРТ [Текст] / Ю.А. Крюков // Материалы IV Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные проблемы ракетно-космической техники» (IV Козловские чтения). – Самара, 2015. – С.121 – 123.
- [161] Крюков, Ю.А. Сферическая капля в ламинарном пограничном слое плоской пластины [Текст] / Ю.А. Крюков // Научная мысль. – 2016. – № 1. – С. 106–111.
- [162] Ключев, Н.И. Колебание жидкости в измерительном канале системы управления расходом топлива ракеты-носителя / Н.И. Ключев, Ю.А. Крюков // Сборник трудов XVIII Всероссийского семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. – Самара, 2015. – С. 221 – 224.
- [163] Ключев, Н.И. Снижение аэродинамического сопротивления трения на плоской пластине / Н.И. Ключев, Ю.А. Крюков // Динамика и виброакустика

машин: материалы третьей международной научно-технической конференции. – Самара, 2016. – С. 38–40.

- [164] Крюков, Ю.А. Математические модели для исследования колебаний топлива в измерительном канале системы управления расходом топлива в баках ракеты носителя / Ю.А. Крюков // Сборник материалов Всероссийской молодежной научно-практической конференции «Орбита молодежи» и перспективы развития российской космонавтики». – Самара, 2016. – С. 74 – 75.
- [165] Klyuev, N.I. Reducing friction drag on flat plates / Klyuev N., Kryukov Y., Gimadiev A. // Procedia Engineering. – 2017. – Vol. 176. – P. 661–668.
- [166] Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015619401 Российская Федерация. Lambola plate wilifi / Ю.А.Крюков; заявитель и правообладатель Крюков Ю.А. - №2015619401; заявл. 07.07.2015; зарегистр. 02.09.2015.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Код программы для базовой модели в среде Maple

```

> restart:
#задаем входные данные задачи

#теплофизические характеристики жидкости - керосин
ro:=780:           #плотность - при темп-ре T=20 C (данные Fluent)
mu:=0.0024:       #дин. вязкость (Fluent)
nu:=mu/ro:
#nu:=9.75*10^(-7):
#внутренняя область
rad:=0.039:       #радиус
H_0:=8.20:        #начальный уровень во внешней области
g:=15.0:          #ускорение свободного падения
V_tank:=0.04:     #скорость понижения уровня жидкости во внешней
                  области:
VT:=-0.14:        #скорость во внешней области (около внутренней)

#константы, переменные, функции для численного счета
sigma:=0.5:
EPSILON:=10^(-7):
ht:=0.005:        #шаг по времени
reg:=ht:          #счетчик по времени
H:=H_0-(V_tank*0.5*ht):#текущий уровень жидкости во внешней области
                   баке (начальное присваивание в итерац.
                   процессе)
M:=50:            #кол-во шагов по направлению радиуса
hr:=rad/M:        #шаг по радиусу
u_mid:=0:         #средняя скорость во внутренней области
ksi_j:=H_0:       #координата поверхности жидкости во
                   внутренней области (начальное присваивание в
                   итерац. процессе)
H_stop:=0.1:      #уровень жидкости во внешней области до кот.
                   проводим счет
vec1::array[1..M]: #тип данных для хранения перем. числ. счета
alpha:=vec1:beta:=vec1: #переменные для решения методом
                        прогонки
a:=vec1:b:=vec1:c:=vec1:f:=vec1: #переменные для решения ур-я
ar::array[0..M]: #тип данных для хранения переменных решения задачи
u_j:=ar:          #массив для хранения продольной скорости на
                   предыдущем шаге по времени
u_j1:=ar:         #массив для хранения продольной скорости на
                   текущем шаге по времени
u_j1_it:=ar:      #массив для хранения продольной скорости на
                   текущем шаге по времени (для итерац. процесса)
fl_u:="D:\\Users\\Krjukov\\Tank process\\vel-ty_prof.txt":# файл,
куда записываются скорость жидкости во внутр. области по времени
fl_t_H_ksi_delta_fr:="D:\\Users\\Krjukov\\Tank process \\
t_H_ksi_delta_fr.txt":#файл, куда записываются остальные результаты

```

```

#Проводим инициализацию
for j from 0 to M-1 do
u_j[j]:=0:      #начальный профиль продольной скорости
u_j1_it[j]:=0:
od:
u_j[M]:=0:      #начальный профиль продольной скорости
u_j1_it[M]:=0:

#вычисляем среднюю скорость по методу Симпсона
sm:=(hr/3)*(4*sum((2*k-1)*hr*u_j[2*k-
1],k=1..(M/2))+2*sum((2*k)*hr*u_j[2*k],k=1..(M/2)-1)):
u_mid_pred:=(2/(rad^2))*sm:#ср. скорость на пред. шаге по времени
ksi_j1:=H_0+0.5*ht*u_mid_pred:

#Решение задачи
while (H>H_stop) do
# Решение прогонкой
alpha[1]:=sigma/(sigma+((hr^2)/(2*nu*ht))):
beta[1]:=((1-sigma)*u_j[1]+(((hr^2)/(2*nu*ht))-(1-
sigma))*u_j[0]+0.5*(hr^2)*(1/nu)*g*((H+((VT)*abs(VT)/(2*g)))/ksi_j1
)-1))/(sigma+((hr^2)/(2*nu*ht))):

xi2:=0:
mu2:=0:
for j from 1 to M-1 do      #прямой ход
a[j]:=(nu*sigma/hr)*((1/hr)-(1/(2*hr*j))):
c[j]:=(2*nu*sigma/(hr^2))+1/ht):
b[j]:=(nu*sigma/hr)*((1/hr)+(1/(2*hr*j))):
f[j]:=(nu*(1-sigma)/hr)*((1/hr)-(1/(2*hr*j)))*u_j[j-1]+(-(2*nu*(1-
sigma)/(hr^2))+1/ht)*u_j[j]+(nu*(1-
sigma)/hr)*((1/hr)+(1/(2*hr*j)))*u_j[j+1]+g*((H+((VT)*abs(VT)/(2*g)
))/ksi_j1)-1):#

alpha[j+1]:=b[j]/(c[j]-(a[j]*alpha[j])):
beta[j+1]:=(a[j]*beta[j]+f[j])/(c[j]-(a[j]*alpha[j])):
od:

u_j1[M]:=0:
for j from M-1 by (-1) to 0 do #обратный ход
u_j1[j]:=(alpha[j+1]*u_j1[j+1])+beta[j+1]:
od:      #прогонка проведена

maxim:=0:
for j from 0 to M do #вычисляем максимальное отличие
профилей между итерациями
max1:=max(abs(u_j1_it[j]-u_j1[j])):
if max1>maxim then
maxim:=max1:
fi:
od:

```

```

if maxim>EPSILON           #если отличие велико, ит.
                             процесс не сошелся,
                             продолжаем счет внутри
                             итерации

then
for j from 0 to M do
    u_j1_it[j]:=u_j1[j]:
od:
fi:

if maxim<EPSILON           #если отличие мало, ит.
                             процесс сошелся

then
    for j from 0 to M do #вносим полученные
                           результаты на предыдущий слой
                           по времени

        u_j[j]:=u_j1[j]:
        u_j1_it[j]:=u_j1[j]:
    od:

#Записываем полученные на текущем слое по времени результаты в файл
StPRT:=[[reg,H_0-(V_tank*reg),ksi_j+((sigma*u_mid+(1-
sigma)*u_mid_pred)*ht),(H_0-V_tank*reg)-(ksi_j+((sigma*u_mid+(1-
sigma)*u_mid_pred)*ht)),mu*(3*u_j1[M]-4*u_j1[M-1]+u_j1[M-
2])/(2*hr),u_mid_pred]]:

writedata[APPEND](fl_t_H_ksi_delta_fr,StPRT,[float,float,float,float
,float,float]):#соответственно время, высота во внешней области, во
внутренней области, разница высот, трение, средняя скорость
StPRT:=[["Момент времени t=",reg]]:
writedata[APPEND](fl_u,StPRT,[string,float]):#момент времени
    for j from 0 to M do
        StPRT:=[[j*hr,u_j1[j]]]:

writedata[APPEND](fl_u,StPRT,[float,float]):#профиль скорости
    od:
ksi_j:=ksi_j+((sigma*u_mid+(1-sigma)*u_mid_pred)*ht):#вносим
полученную высоту во внутренней области на предыдущий шаг по времени
u_mid_pred:=u_mid:#вносим ср. скорость во внутренней области на
предыдущий шаг по времени
    reg:=reg+ht: #переходим к следующему шагу по
времени
    fi:           #конец цикла "if maxim<EPSILON"

sm:=0:
#вычисляем среднюю скорость по методу Симпсона
sm:=(hr/3)*(4*sum((2*k-1)*hr*u_j1[2*k-
1],k=1..(M/2))+2*sum((2*k)*hr*u_j1[2*k],k=1..(M/2)-1)):
u_mid:=(2/(rad^2))*sm:#средняя скорость определена
H:=H_0-V_tank*(reg-0.5*ht):
ksi_j1:=ksi_j+(sigma*u_mid+(1-sigma)*u_mid_pred)*(0.5*ht):#ksi_j -
уровень во внутр. обл. на (j-1) врем. шаге (предыдущем)

od:           #конец цикла while

```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Код программы для двухсредного пограничного слоя на пластине в среде

Maple

> restart:

#Задаем входные данные задачи

ang1:=60: #угол наклона пластины к горизонту

g:=9.8: #ускорение свободного падения

L:=0.4: #длина пластины

Uun1:=8.0: #скорость набегающего потока

ics:=0.008: #расстояние от передней кромки, на котором задаем
начальные профили скоростей и толщину внешнего пс

#Задаем параметры для внешнего ПС

nu3:=1.49*(10⁻⁵): #кинематическая вязкость

ro3:=1.21: #плотность

mu3:=nu3*ro3: #динамическая вязкость

REYNOLDS3:=(Uun1*L)/(nu3): #число Рейнольдса

#Задаем параметры для внутреннего ПС

nu1:=1.01*(10⁻⁶): #кинематическая вязкость

ro1:=997.3: #плотность

mu1:=nu1*ro1: #динамическая вязкость

vk:=(4.0*10⁻⁴): #скорость вдува массы

#Задаем константы для численного счета

EPSILON:=0.0000001: #точность для решения внешнего погран. слоя

EPSILON1:=0.000001: #точность для сопряжения задач

N:=200: #число слоев по маршевой переменной x на длине L

M:=101: #число слоев по продольной переменной y

hx:=1/N: hy:=1/M: #вводим постоянные шаги по маршевой и продольной
переменным соответственно

#Задаем функции, типы и переменные для численного счета

vec1::array[1..M]:

alpha:=vec1:beta:=vec1: #перем. для решения методом
прогонки 1-ого ур-я внешнего п.с.

a:=vec1:b:=vec1:c:=vec1:f:=vec1: #перем. для реш. ур-я внешн. п.с.

ar::array[0..N,0..M]: #тип данных для хранения прод. и
поперечн. скоростей п.с.

vec::array[0..N]: #тип данных для хран. перем. п.с.

u:=ar:v:=ar:delta:=vec: #перем. для хран. реш-ия с-мы п.с.

u3:=ar:v3:=ar:delta3:=vec: #переменные для хранения решение системы
п.с. на промежуточных итерациях

tau3:=vec: #перем. для хранения межфазного трения от внешнего п.с.

tau1:=vec: #переменные для хранения межфазного трения внутр. п.с

u1_0:=vec: #переменные для хранения межфазной скорости (нулевое
приближение)

```

u1_1:=vec:      #переменные для хранения межфазной скорости (первое
                приближение)
u1:=vec:        #переменные для хранения межфазной скорости (сумма
                нулевого и первого приближения)
v1:=vec:
delta1_0:=vec:  #переменная для хранения толщины внутр. п.с. (нулевое
                приближение)
delta1_1:=vec:  #переменная для хранения толщины внутр. п.с. ( (первое
                приближение)
delta1:=vec:    #переменная для хранения толщины внутр. п.с. ( (сумма
                нулевого и первого приближения)

fl:="D:\\Users\\Krjukov\\Film\\flnm.txt":# файл, куда записываются
                результаты решения задачи

#Задаем известные функции Блазиуса
u_mf:=0:#в случае, если для опр-я нач. профиля исп-ем задачу Бл-са с
постоянной скор-ю на мф пов-ти

#решение задачи Блазиуса
with(plots):
nu_end:=8.8:
num:=10:
eq_B1:=2*diff(f(nu),nu,nu,nu)+f(nu)*diff(f(nu),nu,nu)=0:
ics_B1:=f(0)=0, D(f)(0)=u_mf/Uun1, D(f)(nu_end)=1:
p:=dsolve({eq_B1,ics_B1},type=numeric, range=0..nu_end,
output=listprocedure):

#справочно
#odeplot(p,[diff(f(nu),nu),nu]);# в безразмерном виде
#x:=0.4:#продольная координата
#графики продольной и поперечной скоростей в размерном виде
#odeplot(p,[nu*((nu^3*x/Uun1)^0.5),Uun1*diff(f(nu),nu)]);# продольная
скорость
#odeplot(p,[nu*(nu^3*x/Uun1)^0.5,-0.5*((nu^3*Uun1/x)^0.5)*(f(nu)-
nu*diff(f(nu),nu))]);# поперечная скорость

fi_B1:=eval(f(nu),p);          #реш-е ур-я ПС - сама функция
dfi_B1:=eval(diff(f(nu),nu),p);#производная
nu_B1:=(x,y)->y*((Uun1/(nu^3*x))^0.5):#автомодельная перем. Блазиуса
X_B1:=[seq(nu_end*j/num,j=0..num)]:#переменная ню Блазиуса
Y_B_u:=[seq(dfi_B1(nu_end*j/num),j=0..num)]:#безразмерная продольная
                скорость
func_u:=spline(X_B1,Y_B_u,var,linear):# функция безразмерной
                продольной скорости
u_3:=(x,y)->(limit(func_u,var=nu_B1(x,y))):#профиль продольной
скорости Блазиуса безразмерный (переменные x, y-размерные, сама
функция u_3-безразмерная)

Y_B_v:=[seq(fi_B1(nu_end*j/num)-
(nu_end*j/num)*dfi_B1(nu_end*j/num),j=0..num)]:#безразмерная
поперечная скорость

```

```

func_v:=spline(X_B1,Y_B_v,var,linear):# функция безразмерной
                                         поперечной скорости
v_3:=(x,y)->(-
0.5*((nu3/(x*Uun1))^0.5)*limit(func_v,var=nu_B1(x,y))):#профиль
поперечной скорости Блазиуса безразмерный (переменные x, y-
размерные, сама функция v_3-безразмерная)

#Задаем инициализацию граничных условий
for n from 0 to N do
u[n,0]:=0:
u[n,M]:=1:
v[n,0]:=0:
od:

delta[0]:=(8.8*sqrt((nu3*ics)/Uun1))/(L-ics);# в безразмерном виде
for j from 1 to M do
u[0,j]:=u_3(ics,(j/M)*delta[0]*(L-ics)):# в безразмерном виде
v[0,j]:=v_3(ics,(j/M)*delta[0]*(L-ics)):# в безразмерном виде
od:

#Решение системы п.с.
bull:=false:      #перем. для сопр-я внешней и внутренней задачи
while bull<>true do #условие для сопряжения внешней и внутренней
задачи

# Решение задачи внешнего п.с.

for n from 0 to (N-1) do #шаг по маршевой координате
#чтение начального приближения
delta3[n+1]:=delta[n]:
for j from 0 to M do
u3[n+1,j]:=u[n,j]:
v3[n+1,j]:=v[n,j]:
od:

bul:=false:#переменная для сходимости итерац.процесса решения
внешней задачи на каждом маршевом слое
while (bul<>true) do #шаг по внутренней координате (решение на
каждом маршевом слое)
# Решение прогонкой (нахождение продольной скорости п.с.)
alpha[1]:=0:beta[1]:=u[n+1,0]:
for j from 1 to M-1 do
a[j]:=((u3[n+1,j]*j*hy*((delta3[n+1]-delta[n])/hx)-
v3[n+1,j])/(delta3[n+1]*2*hy))-
((1)/(REYNOLDS3*((delta3[n+1]*hy)^2))):
b[j]:=((v3[n+1,j]-u3[n+1,j]*j*hy*((delta3[n+1]-
delta[n])/hx))/(delta3[n+1]*2*hy))-
((1)/(REYNOLDS3*((delta3[n+1]*hy)^2))):
c[j]:=-((u3[n+1,j]/hx)+((2)/(REYNOLDS3*((delta3[n+1]*hy)^2))):
f[j]:=-((u3[n+1,j]*u[n,j])/hx):
alpha[j+1]:=b[j]/(c[j]-(a[j]*alpha[j])):
beta[j+1]:=a[j]*beta[j]+f[j]/(c[j]-(a[j]*alpha[j])):

```

```

od:
for j from M-1 by (-1) to 1 do
u[n+1,j]:=(alpha[j+1]*u[n+1,j+1])+beta[j+1]:
od: #Решение прогонкой завершено

#Нахождение поперечной скорости п.с.
for j from 1 to M do
v[n+1,j]:=(delta3[n+1]*hy)*(((j-1)*hy+j*hy)*(delta3[n+1]-
delta[n])*(u[n+1,j]-u[n+1,j-1]))/(2*hx*delta3[n+1]*hy)-
(0.5*(u[n+1,j-1]-u[n,j-1]+u[n+1,j]-u[n,j])/hx))+v[n+1,j-1]:
od:

#Нахождения толщины п.с.
a1:=(((u[n+1,0])^2+(u[n+1,M])^2+2*sum((u[n+1,k])^2,k=1..M-
1))*(hy/2))-1:
b1:=(hy/hx)*(u[n+1,0]*(u[n+1,0]-u[n,0])+u[n+1,M]*(u[n+1,M]-
u[n,M])+2*sum(u[n+1,k]*(u[n+1,k]-u[n,k]),k=1..M-1)):
c1:=(1/(REYNOLDS3*hy))*(-3*u[n+1,0]+4*u[n+1,1]-u[n+1,2]):
d1:=((v[n+1,0]+v[n+1,1])*(u[n+1,1]-u[n+1,0])/2)+((v[n+1,M-
1]+v[n+1,M])*(u[n+1,M]-u[n+1,M-
1])/2)+sum((v[n+1,k]+v[n+1,k+1])*(u[n+1,k+1]-u[n+1,k]),k=1..M-2):
a2:=(a1/hx)+b1:b2:=d1-(a1*delta[n]/hx):discr:=(b2^2)-
(4*a2*c1):#a2 и discr - Вспомогательные константы
delta[n+1]:=(-b2-sqrt(discr))/(2*a2):#толщина п.с.

#Сходимость внутри маршевого слоя
maxim:=0:
for j from 0 to M do
max3:=max(abs(u[n+1,j]-u3[n+1,j]),abs(v[n+1,j]-
v3[n+1,j]),abs(delta[n+1]-delta3[n+1])):
if max3>maxim then
maxim:=max3:
fi:
od:
if maxim>EPSILON
then
for i from 0 to M do
u3[n+1,i]:=u[n+1,i]:
v3[n+1,i]:=v[n+1,i]:
od:
delta3[n+1]:=delta[n+1]:
fi:

if maxim<EPSILON
then
bul:=true:
fi:
od:#конец цикла по внутренней координате, переходим на следующий
маршевый слой
od:#конец цикла по маршевой координате - задача для внешнего пс по
всем маршевым слоям для текущей межфазной скорости решена

```

```

#Решение задачи для внутреннего пс (с учетом первого приближения)

# определяем среднюю толщину mid_delta1 и скорость mid_u1
mid_delta1:=(vk*L*nu1/g)^(1/3):
mid_u1:=(((vk*L)^2)*g/nu1)^(1/3):
REYNOLDS1:=mid_delta1*mid_u1/nu1:#число Рейнольдса для внутр. пс
EPS:=mid_delta1/L:                #малый параметр для внутр. пс

# безразмерное трение от внешн. погран. слоя
for j from 0 to N do
tau3[j]:=(-3*u[j,0]+4*u[j,1]-u[j,2])/(2*hy*delta[j]):
od:
Xtau:=[seq((ics+hx*j*(L-ics))/(L-ics),j=0..N)]:
Ytau3:=[seq(tau3[j],j=0..N)]:
ftau3:=spline(Xtau,Ytau3,x,cubic):

# безразмерное трение на внутр. пс и его производная
Ytau1:=[seq(tau3[j]*mu3*Uun1*mid_delta1/(mu1*(L-ics)*mid_u1),j=0..N)]:
ftau1:=spline(Xtau,Ytau1,x,cubic):
dftau1:=diff(ftau1,x):

#нулевое приближение для внутр. пс
# Находим безразмерную толщину внутр. пс и скорость на поверхности
внутр. пс (межфазную) и обезразмериваем её (нулевое приближение)
delta1_0[0]:=0:
u1_0[0]:=0:
for j from 1 to N do
delta1_0_ch:='delta1_0_ch':#отмена присваивания переменной delta1_0
eq:=2*sin(angl*evalf(Pi)/180)*(delta1_0_ch^3)+3*(delta1_0_ch^2)*limi
t(ftau1,x=j*hx)-6*j*hx=0,delta1_0_ch>0:
solutions :=solve({eq},[delta1_0_ch]):
assign(solutions):
if (TypeTools[Type](delta1_0_ch, 'float' )) then
delta1_0[j]:=delta1_0_ch:  #в безразмерных переменных для внутр. пс
fi:
od:

# Определяем кривую толщины внутр. пс (нулевого
приближения) (безразмерный вид)
Xdelta1_0:=[seq(j*hx+hx/999,j=0..N)]:
Ydelta1_0:=[seq(delta1_0[j],j=0..N)]:
fdelta1_0:=spline(Xdelta1_0,Ydelta1_0,x,cubic):
dfdelta1_0:=diff(fdelta1_0,x):

#первое приближение для внутр. пс
#Находим вспомогательные величины для нахождения первого приближения
скорости и толщины внутр. пс на межфазной границе
tpd:=fdelta1_0*sin(angl*evalf(Pi)/180)+ftau1:
dtpd:=dfdelta1_0*sin(angl*evalf(Pi)/180)+dftau1:
dtpd2:=diff((fdelta1_0*sin(angl*evalf(Pi)/180)+ftau1)^2,x):

```

```

d2tpd2:=diff (dtpd2, x) :
proizv:=diff (dtpd2*fdelta1_0^3, x) :

# Находим безразмерную толщину внутр. пс и скорость на поверхности
внутр. пс (межфазную) и обезразмериваем её (первое приближение)
delta1_1[0]:=0:
delta1[0]:=0:
u1_1[0]:=0:
u1[0]:=0:

#вводим функции для определения промежуточных результатов (продольная
скорость)
u1_1_c2_cv:=proc (j)
-limit (dtpd2, x=j*hx) * (limit (fdelta1_0, x=j*hx) ^4) /16
end proc:

u1_1_c3_cv:=proc (j)
(sin (angl*evalf (Pi) /180)) *limit (fdelta1_0, x=j*hx) /1
end proc:

#вводим функции для определения промежуточных результатов (поперечная
скорость)
v1_0_c2_cv:=proc (j)
-limit (dtpd, x=j*hx) *0.5* (limit (fdelta1_0, x=j*hx) ^2)
end proc:

v1_1_c4_cv:=proc (j)
limit (d2tpd2, x=j*hx) * (limit (fdelta1_0, x=j*hx) ^5) /240
end proc:

v1_1_c5_cv:=proc (j)
limit (dfdelta1_1, x=j*hx) *sin (angl*evalf (Pi) /180) *0.5* (limit (fdelta1_
0, x=j*hx) ^2) /1
end proc:

v1_1_c7_cv:=proc (j)
-limit (proizv, x=j*hx) *0.5* (limit (fdelta1_0, x=j*hx) ^2) /12
end proc:

for j from 1 to N do
delta1_1[j] := (1/240) * (18*limit (dtpd, x=j*hx) * ((limit (fdelta1_0, x=j*hx
))^4)) :
delta1[j] := delta1_0[j] + EPS * REYNOLDS1 * delta1_1[j] : #Находим Сумму
нулевого и первого приближений для толщины внутр. пс
u1_0[j] := (limit (tpd, x=j*hx) * limit (fdelta1_0, x=j*hx) -
((limit (fdelta1_0, x=j*hx) ^2) /2) * sin (angl*evalf (Pi) /180)) * mid_u1 / Uu
n1 : #нулевое приближение
u1_1[j] := ((u1_1_c2_cv (j) + ((delta1_1[j] * u1_1_c3_cv (j)))) + delta1_1[j] *
limit (ftau1, x=j*hx)) * mid_u1 / Uun1 : #первое приближение
u1[j] := u1_0[j] + EPS * REYNOLDS1 * u1_1[j] : #Находим Сумму нулевого и
первого приближений для продольной скорости на м/ф поверхности
od:

```

```

#Определяем кривую толщины внутр. пс (первого
приближения) (безразмерный вид)
Xdelta1_1:=[seq(j*hх+hх/999,j=0..N)]:
Ydelta1_1:=[seq(delta1_1[j],j=0..N)]:
fdelta1_1:=spline(Xdelta1_0,Ydelta1_0,x,cubic):
dfdelta1_1:=diff(fdelta1_1,x):

#Значение поперечной скорости с учетом 1 приближения
for j from 0 to N do
v1[j]:=(v1_0_c2_cv(j)-
EPS*REYNOLDS1*(v1_1_c4_cv(j)+v1_1_c5_cv(j)+v1_1_c7_cv(j))-
EPS*REYNOLDS1*limit(fdelta1_1,x=j*hх)*limit(dtpd,x=j*hх)*limit(fdel
ta1_0,x=j*hх))*vk/Uunl:
od:

#Цикл для сравнения межфазных скоростей от внешнего и внутр. пс
maxim1:=0: #Вспомогательная переменная
#Цикл для нахождения максимальной разницы этих скоростей
for j from 0 to N do
  if abs(u[j,0]-u1[j])>maxim1 then
    maxim1:=abs(u[j,0]-u1[j]):
    fi:
od:
#Сравнение межфазных скоростей
if maxim1>EPSILON1 then # условие сопряжения внешней и внутренней
задачи не выполнены

  for j from 0 to N do
    u[j,0]:=u1[j]:
    v[j,0]:=v1[j]+(vk/Uunl) #скор. только за счет кривизны внутр. пс
  od
else # условие сопряжения внешней и внутренней задачи выполнены
  bull:=true:
fi:

od: #Сопряженная задача решена

#Вывод результатов

#Вывод констант численного счета задачи
StPRT:=[["константы численного счета задачи"]]:
writedata[APPEND](f1,StPRT,[string]):
StPRT:=[["N=",N,"M=",M,"EPSILON=",EPSILON,"EPSILON1=",EPSILON1]]:#чи
сло слоев по маршевой переменной x на длине L , число слоев по
продольной переменной y,точность для решения системы погран. слоя
writedata[APPEND](f1,StPRT,[string,integer,string,integer,string,flo
at,string,float]):

f:=ftau3*mu3*Uunl/(L-ics): #определение межфазного трения на
поверхности внутр. пс в размерном виде

```

```

#INF:=int(f,x=0..L)/(L-ics):#определение среднего трения по длине
                               пластины

#Вывод полученных характеристик внешнего течения в файл (профили
продольной и поперечной скоростей по всем "маршевым" (шагам) сечениям
пластины)
Re3:=Uun1*L/nu3:#Число Рейнольдса для погр.слоя
StPRT:=["характеристики пограничного слоя"]:
writedata[APPEND](f1,StPRT,[string]):
StPRT:=["Число Рейнольдса для погр.слоя Re3= ",Re3,"Кинематическая
вязкость=",nu3,"Плотность=",ro3]:
writedata[APPEND](f1,StPRT,[string,float,string,float,string,float])
:
StPRT:=[" x координата(м) продольная скорость u (м/с)
поперечная скорость v (м/с)"]:
writedata[APPEND](f1,StPRT,[string]):
for i from 0 to N do
shag:=ics+hx*j*(L-ics):
StPRT:=[[i,"маршевый слой (длина пластины L=",shag,"м)"]]:
writedata[APPEND](f1,StPRT,[integer,string,float,string]):
for j from 0 to M do
StPRT := matrix( [[j*hy*delta[i]*(L-ics),u[i,j]*Uun1,v[i,j]*Uun1]]
) :
writedata[APPEND](f1,StPRT,float):
od:
od:

#Вывод полученных характеристик на м/ф поверхности в файл (толщина ,
продольная и поперечная скорости , трение, ср.трение по длине
пластины)
StPRT:=["характеристики на м/ф поверхности"]:
writedata[APPEND](f1,StPRT,[string]):
StPRT:=["Среднее трение по длине пластины=",INF]:
writedata[APPEND](f1,StPRT,[string,float]):
StPRT:=[" x координата(м) толщина (м) продольная скорость u1
(м/с) поперечная скорость v1 (м/с) трение (Н/м2) "]:
writedata[APPEND](f1,StPRT,[string]):
for i from 0 to N do
StPRT :=
matrix([[i*hx*L,delta1[i]*mid_delta1,u1[i]*Uun1,v1[i]*Uun1,limit(f,x
=i*hx)]]):
writedata[APPEND](f1,StPRT,float):
od:

```

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Код программы для задачи о движении частицы в пограничном слое в среде Maple

```

> restart:
#Задаем входные данные задачи
ang1:=90:      #угол наклона пластины к горизонту
g:=9.8:        #ускорение свободного падения
L:=0.4:        #длина пластины
Uun1:=5:       #скорость набегающего потока
a:=0.00005:    #радиус

#Задаем параметры для жидкости
nu1:=1.01*(10^(-6)):  #кинематическая вязкость
ro1:=997.3:          #плотность
mu1:=nu1*ro1:        #динамическая вязкость

mass:=4*evalf(Pi)*(a^3)*ro1/3; #масса частицы

#Задаем параметры для пограничного слоя
nu3:=1.49*(10^(-5)):  #кинематическая вязкость
ro3:=1.21:            #плотность
mu3:=nu3*ro3:        #динамическая вязкость

nu_end:=6:           #точка окончания расчета для диффура
N:=20:               #вспомог. переменная

#для коэф-ов сил
q_Smid:=0.5*ro3*(Uun1^2)*evalf(Pi)*(a^2);
lmt:=0.1:#граница м/ду аппрокс-иями для коэф-та сопротивления
end_cnt:=10^10:      #вспомог. константа

a1:=18*mu3/(ro1*((2*a)^2)):  #конст. в форм. для коэф. сопр-я
b1:=0.15*((2*a*ro3/mu3)^0.687):

#конечная скорость осаждения частицы (Уоллис, стр.200)
inc:=V_max(0)=0,D(V_max)(0)=0:
eq:=diff(V_max(t),t$2)=g-
a1*diff(V_max(t),t$1)*(1+b1*(diff(V_max(t),t$1))^0.687):
stpcnd:=[t=100]:
res:=dsolve({eq,inc},V_max(t),numeric,output=listprocedure,stop_cond
=stpcnd):
test:=rhs(res[3]):
V_max:=test(end_cnt);
#V_max:=0.00: #произвольная скорость падения частицы

#задаем скорость внутр. пс (если на пластине есть внутр. пс)
#через vk

```

```

#delta1:=evalf((3*vk*mu1*L/(g*sin(angl*evalf(Pi)/180)))^(1/3));#толщ
ина внутр. Пс.
#u1:=evalf((9*(vk^2)*(L^2)*g*sin(angl*evalf(Pi)/180)/(8*mu1))^(1/3))
;
#через среднюю скорость
#delta1:=evalf((3*nu1*G/(g*sin(angl*evalf(Pi)/180)))^(1/3));#толщина
внутр. пс
#u1:=evalf((9*(G^2)*(nu1^2)*g*sin(angl*evalf(Pi)/180)/(8*(mu1^3)))^(
1/3));
#или произвольно
u1:=0:

#Задаем известные функции
#решение задачи Блазиуса
with(plots):
eq:=2*diff(f(nu),nu,nu,nu)+f(nu)*diff(f(nu),nu,nu)=0;
ics:=f(0)=0, D(f)(0)=u1/Uunl, D(f)(nu_end)=1:
p:=dsolve({eq,ics},type=numeric, range=0..nu_end,
output=listprocedure):

#справочно
#odeplot(p,[diff(f(nu),nu),nu]); # в безразмерном виде
#x:=0.5: #продольная координата
#графики продольной и поперечной скоростей в размерном виде
#odeplot(p,[nu*((nu3*x/Uunl)^0.5),Uunl*diff(f(nu),nu)]);# продольная
скорость
#odeplot(p,[nu*(nu3*x/Uunl)^0.5,-0.5*((nu3*Uunl/x)^0.5)*(f(nu)-
nu*diff(f(nu),nu))]); # поперечная скорость

fi_B1:=eval(f(nu),p); #реш. ур-я ПС - сама функция
dfi_B1:=eval(diff(f(nu),nu),p); # производная
nu_B1:=(x,y)->y*((Uunl/(nu3*x))^0.5): #автомодельная переменная
Блазиуса
X_B1:=[seq(nu_end*j/N,j=0..N)]; #переменная ню Блазиуса
Y_B_u:=[seq(dfi_B1(nu_end*j/N),j=0..N)];#безразмерная продольная
скорость
func_u:=spline(X_B1,Y_B_u,var,linear): #функция безразмерной
продольной скорости
u_3:=(x,y)->(Uunl*limit(func_u,var=nu_B1(x,y))):#профиль продольной
скорости Блазиуса размерный

Y_B_v:=[seq(fi_B1(nu_end*j/N)-
(nu_end*j/N)*dfi_B1(nu_end*j/N),j=0..N)];#безразмерная поперечная
скорость
func_v:=spline(X_B1,Y_B_v,var,linear): # функция безразмерной
поперечной скорости
v_3:=(x,y)->(-
0.5*((nu3*Uunl/x)^0.5)*limit(func_v,var=nu_B1(x,y))):#профиль
поперечной скорости Блазиуса размерный

f_g_x:=g*sin(angl*evalf(Pi)/180):
f_g_y:=-g*cos(angl*evalf(Pi)/180):

```

```

cnst:=5:
y_0:=x_0->cnst*((nu3*x_0/Uun1)^0.5):#функция, опред. нач. ординату
                               движения частицы в ПС

#Решение задачи
with(plots):
stopcond:= [y(t)=2*a]: #условие, при котором числ. решение
                       остановится (частица на пластине)
#stopcond:=[t=0.1]:   #принудительно

_Env_dsolve_nowarnstop := true:#_Env_dsolve_nowarnstop - переменная
окружения(Отключение вывода информации об остановке счета)

x_0:=0.2:      #Нач. абсцисса частицы
y_0:=y_0(x_0): #Нач. ордината частицы

syst:=diff(x(t),t$2)=f_g_x+piecewise(2*a*abs(u_3(x(t),y(t))-
diff(x(t),t$1))/nu3<1mt,(1/mass)*evalf(Pi)*(a^2)*0.5*ro3*((abs(u_3(x
(t),y(t))-
diff(x(t),t$1)))^2)*(4.5+24*nu3/((2*a)*(abs(u_3(x(t),y(t))-
diff(x(t),t$1))))),2*a*abs(u_3(x(t),y(t))-
diff(x(t),t$1))/nu3>1mt,a1*(u_3(x(t),y(t))-
diff(x(t),t$1))*(1+b1*(abs(u_3(x(t),y(t))-
diff(x(t),t$1)))^0.687)),diff(y(t),t$2)=f_g_y+piecewise(2*a*abs(v_3(
x(t),y(t))-
diff(y(t),t$1))/nu3<1mt,(1/mass)*evalf(Pi)*(a^2)*0.5*ro3*((abs(v_3(x
(t),y(t))-
diff(y(t),t$1)))^2)*(4.5+24*nu3/((2*a)*(abs(v_3(x(t),y(t))-
diff(y(t),t$1))))),2*a*abs(v_3(x(t),y(t))-
diff(y(t),t$1))/nu3>1mt,a1*(v_3(x(t),y(t))-
diff(y(t),t$1))*(1+b1*(abs(v_3(x(t),y(t))-
diff(y(t),t$1)))^0.687)))+(1/mass)*1.61*((2*a)^2)*((mu3*ro3)^0.5)*((a
bs(u_3(x(t),y(t)+a)-u_3(x(t),y(t)-a))/(2*a))^(-
0.5))*(1*(u_3(x(t),y(t))-diff(x(t),t$1))*((u_3(x(t),y(t)+a)-
u_3(x(t),y(t)-a))/(2*a))*piecewise(2*a*abs(u_3(x(t),y(t))-
diff(x(t),t$1))/nu3<40,(1-0.3314*(a*(abs(u_3(x(t),y(t)+a)-
u_3(x(t),y(t)-a))/(2*a))/abs((u_3(x(t),y(t))-
diff(x(t),t$1))))^0.5)*exp(-0.1*2*a*abs((u_3(x(t),y(t))-
diff(x(t),t$1))/nu3)+0.3314*(a*(abs(u_3(x(t),y(t)+a)-
u_3(x(t),y(t)-a))/(2*a))/abs((u_3(x(t),y(t))-
diff(x(t),t$1))))^0.5),2*a*abs(u_3(x(t),y(t))-
diff(x(t),t$1))/nu3>40,0.0524*((2*a)^2)*(abs(u_3(x(t),y(t)+a)-
u_3(x(t),y(t)-a))/(2*a))/(2*nu3))^0.5):#силы тяжести, сопротивления
и Сэфмана

sol_1:=dsolve({syst,x(0)=x_0,D(x)(0)=V_max*sin(angl*evalf(Pi)/180)+U
un1,y(0)=y_0,D(y)(0)=-
V_max*cos(angl*evalf(Pi)/180)}, {x(t),y(t)},type=numeric,
output=listprocedure,stop_cond=stopcond):# нач. условия связаны со
скор. своб. падения

```

```

#sol_1:=dsolve({syst,x(0)=x_0,D(x)(0)=0,y(0)=y_0,D(y)(0)=0},{x(t),y(t)},type=numeric,output=listprocedure,stop_cond=stopcond):#при произвольных нач. условиях

#Справочно
sol_1(0);          #решение задачи при t=0
sol_1(end_cnt);   #решение задачи при конечном t

#x_pl:=(((V_max*sin(angl*evalf(Pi)/180)+Uunl)/(V_max*cos(angl*evalf(Pi)/180)))*cnst*((nu3*x_0/(Uunl))^0.5)+x_0);#решение без пограничного слоя при равновесном падении частицы

#находим продольную координату частицы при её неравновесном падении без учета влияния п.с. - справочно
#inc:=coord(0)=0,D(coord)(0)=V_max:
#eq:=diff(coord(t),t$2)=g-a1*diff(coord(t),t$1)*(1+b1*(diff(coord(t),t$1))^0.687):
#stpcnd_1:=[coord(t)=y_0/cos(angl*evalf(Pi)/180)]:
#res_1:=dsolve({eq,inc},coord(t),numeric,output=listprocedure,stop_cond=stpcnd_1):
#tm_1:=rhs(res_1[1]):          #функция-реш. для времени
#x_vel:=rhs(res_1[3]):        #функция-реш. для ск-ти
#coord_tm:=[seq(tm_1(end_cnt)*j/N,j=0..N)]:#координаты времени
#coord_x_vel:=[seq(x_vel(tm_1(end_cnt)*j/N),j=0..N)]: #координаты скорости по времени
#f_coord_x_vel:=spline(coord_tm,coord_x_vel,t,linear):#функция скорости
#d_f_coord_x_vel:=sin(angl*evalf(Pi)/180)*int(f_coord_x_vel,t=0..tm_1(end_cnt));#расстояние, кот. проходит частица по продольной (относ. пластины) координате
#odeplot(res_1,[t,diff(coord(t),t)],t=0..tm_1(end_cnt),numpoints=100):#графики для сравнения
#plot(f_coord_x_vel,t=0..tm_1(end_cnt)):#графики для сравнения
#x_pl_1:=x_0+d_f_coord_x_vel+Uunl*tm_1(end_cnt);#решение без пограничного слоя при неравновесном падении частицы

var_t:=rhs(sol_1[1]):      #переменная t:
var_x:=rhs(sol_1[2]):      #переменная x:
var_vel_x:=rhs(sol_1[3]):  #скорость по x:
var_y:=rhs(sol_1[4]):      #переменная y:
var_vel_y:=rhs(sol_1[5]):  #скорость по y:

odeplot(sol_1,[t,diff(x(t),t)],t=0..var_t(end_cnt),numpoints=1000);# скорость по оси x от времени
odeplot(sol_1,[t,diff(y(t),t)],t=0..var_t(end_cnt),numpoints=1000);# скорость по оси y от времени
odeplot(sol_1,[x(t),y(t)],t=0..var_t(end_cnt),numpoints=1000);#траектория частицы

#вывод относительной скорости частицы
t_otn_vel:=[seq(j*(var_t(end_cnt))/N,j=0..N)]:#время в размерном виде

```

```

X_otn_vel:=[seq((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_
cnt))/N))-var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N)),j=0..N)]:#продольная
относ. скорость в размерном виде
Y_otn_vel:=[seq((v_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_
cnt))/N))-var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N)),j=0..N)]:#поперечная
относ. скорость в размерном виде
fx_otn_vel:=spline(t_otn_vel,X_otn_vel,t,linear):#функция продольной
относит. скорости
fy_otn_vel:=spline(t_otn_vel,Y_otn_vel,t,linear):#функция поперечной
относит. скорости
plot(fx_otn_vel,t=0..var_t(end_cnt),title='график продольной_относит
. скорости');#график продольной_относит. скорости
plot(fy_otn_vel,t=0..var_t(end_cnt),title='график поперечной_относит
. скорости');#график поперечной_относит. скорости

#печать относительной продольной скорости частицы
for j from 0 to N do
print((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N)));
od:

#печать относительной поперечной скорости частицы
for j from 0 to N do
print((v_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N)));
od:

#печать продольной скорости частицы
for j from 0 to N do
print(var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N));
od:

#печать поперечной скорости частицы
for j from 0 to N do
print(var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N));
od:

#печать размерного времени
for j from 0 to N do
print(j*(var_t(end_cnt))/N);
od:

#печать продольной координаты частицы
for j from 0 to N do
print(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N));
od:

#печать поперечной координаты частицы
for j from 0 to N do
print(var_y(j*(var_t(end_cnt))/N));
od:

```

```

#вывод du/dy
X_dudy:=[seq(((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),a+var_y(j*(var_t(end_
cnt))/N)))-(u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),-
a+var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))))/(2*a),j=0..N] :
f_dudy:=spline(t_otn_vel,X_dudy,t,linear):#функция du/dy
plot(f_dudy,t=0..var_t(end_cnt),title='график_dudy');#график dudy

#печать du/dy
for j from 0 to N do
print(((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),a+var_y(j*(var_t(end_cnt))/N
)))-(u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),-
a+var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))))/(2*a));
od:

X_sopr:=[seq(piecewise(2*a*abs(u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y
(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N)/nu3<1mt,(1/q_Smid)*evalf(Pi)*(a^2)*
0.5*ro3*(abs((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_
cnt))/N)))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))^2*(4.5+24*nu3/((2*a)*(abs((u_3(va
r_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))))),2*a*abs((u_3(var_x(j*(var_t(end
_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3>1mt,(1/q_Smid)*mass*a1*((u_3(v
ar_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))*(1+b1*(abs((u_3(var_x(j*(var_t(end
_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N)))^0.687)),j=0..N] :#коэф-т
сопротивления в продольном направлении

Y_sopr:=[seq(piecewise(2*a*abs(v_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y
(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N)/nu3<1mt,(1/q_Smid)*evalf(Pi)*(a^2)*
0.5*ro3*(abs((v_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_
cnt))/N)))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N))^2*(4.5+24*nu3/((2*a)*(abs((v_3(va
r_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N))))),2*a*abs((v_3(var_x(j*(var_t(end
_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3>1mt,(1/q_Smid)*mass*a1*((v_3(v
ar_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N))*(1+b1*(abs((v_3(var_x(j*(var_t(end
_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N)))^0.687)),j=0..N] :#коэф-т
сопротивления в поперечном направлении

fx_sopr:=spline(t_otn_vel,X_sopr,t,linear):#функция коэф-та
сопротивления в продольном направлении от времени
fy_sopr:=spline(t_otn_vel,Y_sopr,t,linear):#функция коэф-та
сопротивления в поперечном направлении от времени

```

```

plot(fx_sopr,t=0..var_t(end_cnt),title='график коэф-
та_сопротивления_в_продольном_направлении');#график коэф-та
сопротивления в продольном направлении
plot(fy_sopr,t=0..var_t(end_cnt),title='график коэф-
та_сопротивления_в_поперечном_направлении');#график коэф-та
сопротивления в поперечном направлении

#график коэф-та силы Сэфмана
F_Sfm:= [seq((1/q_Smid)*1.61*((2*a)^2)*((mu3*ro3)^0.5)*((abs(u_3(var_
x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)+a)-
u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)-
a))/(2*a))^(-
0.5))*(1)*(u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/
N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))*((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),v
ar_y(j*(var_t(end_cnt))/N)+a)-
u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)-
a))/(2*a))*piecewise(2*a*abs(u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j
*(var_t(end_cnt))/N))-var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3<40,(1-
0.3314*(a*((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))
)/N)+a)-u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)-
a))/(2*a))/abs((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_c
nt))/N))-var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))))^0.5)*exp(-
0.1*2*a*abs((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt)
)/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3)+0.3314*((a*(abs(u_3(var_x(j*(
var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)+a)-
u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)-
a))/(2*a))/abs((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_c
nt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))))^0.5),2*a*abs(u_3(var_x(j*(var_t(e
nd_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3>40,0.0524*((2*a)^2)*(abs(u_3(v
ar_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)+a)-
u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)-
a))/(2*a))/(2*nu3))^0.5),j=0..N]:#коэф-т силы Сэфмана в поперечном
направлении
func_F_Sfm:=spline(t_otn_vel,F_Sfm,t,linear):#функция коэф-та силы
Сэфмана в поперечном направлении от времени
plot(func_F_Sfm,t=0..var_t(end_cnt),title='график коэф-
та_силы_Сэфмана_в_поперечном_направлении');#график коэф-та силы
Сэфмана
#график коэф-та сил Сэфмана+силы сопротивления в поперечном
направлении
F_Sum:= [seq((1/q_Smid)*1.61*((2*a)^2)*((mu3*ro3)^0.5)*((abs(u_3(var_
x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)+a)-
u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)-
a))/(2*a))^(-
0.5))*(1)*(u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/
N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))*((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),v
ar_y(j*(var_t(end_cnt))/N)+a)-

```

```

u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)-
a)/(2*a))*piecewise(2*a*abs(u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j
*(var_t(end_cnt))/N))-var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3<40,(1-
0.3314*(a*((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))
)/N)+a)-u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)-
a))/(2*a))/abs((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_c
nt))/N))-var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))))^0.5)*exp(-
0.1*2*a*abs((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt)
)/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3)+0.3314*((a*(abs(u_3(var_x(j*(
var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)+a)-
u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)-
a))/(2*a))/abs((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_c
nt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))))^0.5),2*a*abs(u_3(var_x(j*(var_t(e
nd_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3>40,0.0524*((2*a)^2)*(abs(u_3(v
ar_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)+a)-
u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)-
a))/(2*a))/(2*nu3))^0.5),j=0..N)+seq(piecewise(2*a*abs(v_3(var_x(j*(
var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3<lmt,(1/q_Smid)*evalf(Pi)*(a^2)*
0.5*ro3*(abs((v_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt)
))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N))^2*(4.5+24*nu3/((2*a)*(abs((v_3(va
r_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N))))),2*a*abs((v_3(var_x(j*(var_t(end
_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3>lmt,(1/q_Smid)*mass*a1*((v_3(v
ar_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N))*(1+b1*(abs((v_3(var_x(j*(var_t(end
_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N)))^0.687)),j=0..N] :#коэф-т силы
Сэфмана в поперечном направлении
func_F_Sum:=spline(t_otn_vel,F_Sum,t,linear):#функция коэф-та силы
Сэфмана в поперечном направлении от времени
plot(func_F_Sum,t=0..var_t(end_cnt),title='график коэф-
та суммарной поперечной силы');#график коэф-
та суммарной поперечной силы (Сэфман+сопротивления)
#печать коэф-та силы сопротивления в продольном направлении
for j from 0 to N do
print(piecewise(2*a*abs(u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var
_t(end_cnt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3<lmt,(1/q_Smid)*evalf(Pi)*(a^2)*
0.5*ro3*(abs((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt)
))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))^2*(4.5+24*nu3/((2*a)*(abs((u_3(va
r_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))))),2*a*abs((u_3(var_x(j*(var_t(end
_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3>lmt,(1/q_Smid)*mass*a1*((u_3(v
ar_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-

```

```

var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))* (1+b1*(abs((u_3(var_x(j*(var_t(end
_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))))^0.687));
od:
#печать коэф-та силы сопротивления в поперечном направлении
for j from 0 to N do
print(piecewise(2*a*abs(v_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var
_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3<1mt,(1/q_Smid)*evalf(Pi)*(a^2)*
0.5*ro3*(abs((v_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_c
nt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N))^2)*(4.5+24*nu3/((2*a)*(abs((v_3(va
r_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N))))),2*a*abs((v_3(var_x(j*(var_t(end
_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3>1mt,(1/q_Smid)*mass*a1*((v_3(v
ar_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N))* (1+b1*(abs((v_3(var_x(j*(var_t(end
_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_y(j*(var_t(end_cnt))/N))))^0.687));
od:
#печать коэф-та силы Сэфмана в поперечном направлении
for j from 0 to N do
print((1/q_Smid)*1.61*((2*a)^2)*((mu3*ro3)^0.5)*((abs(u_3(var_x(j*(v
ar_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)+a)-
u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)-
a))/(2*a))^(-
0.5))* (1)*(u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/
N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))* ((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),v
ar_y(j*(var_t(end_cnt))/N)+a)-
u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)-
a))/(2*a))*piecewise(2*a*abs(u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j
*(var_t(end_cnt))/N))-var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3<40,(1-
0.3314*(a*((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_c
nt))/N)+a)-u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_c
nt))/N)-
a))/(2*a))/abs((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_c
nt))/N))-var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))))^0.5)*exp(-
0.1*2*a*abs((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_c
nt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3)+0.3314*((a*(abs(u_3(var_x(j*(
var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)+a)-
u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)-
a))/(2*a))/abs((u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_c
nt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))))^0.5),2*a*abs(u_3(var_x(j*(var_t(e
nd_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N))-
var_vel_x(j*(var_t(end_cnt))/N))/nu3>40,0.0524*((2*a)^2)*(abs(u_3(v
ar_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)+a)-
u_3(var_x(j*(var_t(end_cnt))/N),var_y(j*(var_t(end_cnt))/N)-
a))/(2*a))/(2*nu3))^0.5));
od:

```

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Код UDF , необходимый для инициализации граничных условий в пакете Ansys Fluent

```
#include "udf.h"

DEFINE_SDOF_PROPERTIES(sphere, prop, dt, time, dtime)
{
    real t = CURRENT_TIME;

    prop[SDOF_MASS] = 5.222e-10; /* масса частицы */
    prop[SDOF_IZZ] = 5.222e-19; /* момент инерции частицы */

    prop[SDOF_ZERO_TRANS_X] = FALSE; /* част. разрешено дв-ся */
    prop[SDOF_ZERO_TRANS_Y] = FALSE; /* только по направл-ю */
    prop[SDOF_ZERO_TRANS_Z] = TRUE; /* X и Y */
    prop[SDOF_ZERO_ROT_X] = TRUE;
    prop[SDOF_ZERO_ROT_Y] = TRUE;
    prop[SDOF_ZERO_ROT_Z] = TRUE;

    prop[SDOF_LOAD_F_Y] = -5.11756e-9; /* сила тяжести */

}

/* профиль прод. Скорости Блазиуса при x=0,95 м; U=5 м/с */
DEFINE_PROFILE(inlet_x_velocity, thread, position)
{
    real x[ND_ND]; /* this will hold the position vector */
    real y;
    face_t f;
    begin_f_loop(f, thread)
    {
        F_CENTROID(x, f, thread);
        y = x[1]; /* non-dimensional y coordinate */
        if (y<=.1009535e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) = 985.3051157*y;
        else if (y>.1009535e-2 && y<=.2019069e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) = .2049903421e-
1+964.9996929*y;
        else if (y>.2019069e-2 && y<=.3028604e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) =
.1590008965+896.4027993*y;
        else if (y>.3028604e-2 && y<=.4038138e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) =
.5605484709+763.8177615*y;
        else if (y>.4038138e-2 && y<=.5047673e-2)
```

```

        F_PROFILE(f,          thread,          position)          =
1.303751163+579.7718752*y;
        else if (y>.5047673e-2 && y<=.6057207e-2)
        F_PROFILE(f,          thread,          position)          =
2.298248846+382.7508534*y;
        else if (y>.6057207e-2 && y<=.7066742e-2)
        F_PROFILE(f,          thread,          position)          =
3.307750648+216.0895858*y;
        else if (y>.7066742e-2 && y<=.8076276e-2)
        F_PROFILE(f,          thread,          position)          =
4.105749583+103.1664114*y;
        else if (y>.8076276e-2 && y<=.9085811e-2)
        F_PROFILE(f,          thread,          position)          =
4.604150168+41.45472916*y;
        else
        F_PROFILE(f,          thread,          position)          =
4.853899938+13.96684015*y;
    }
    end_f_loop(f, thread)
}

```

```

/* профиль поперечн. скорости Блазиуса при x=0,95 м; U=5 м/с */
DEFINE_PROFILE(inlet_y_velocity, thread, position)
{
    real x[ND_ND]; /* this will hold the position vector */
    real y;
    face_t f;
    begin_f_loop(f, thread)
    {
        F_CENTROID(x, f, thread);
        y = x[1]; /* non-dimensional y coordinate */
        if (y<=.1009535e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) = .2615085163*y;
        else if (y>.1009535e-2 && y<=.2019069e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) = -.5106927671e-
3+.7673778199*y;
        else if (y>.2019069e-2 && y<=.3028604e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) = -.1356556814e-
2+1.186315482*y;
        else if (y>.3028604e-2 && y<=.4038138e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) = -.2043707823e-
2+1.413202527*y;
        else if (y>.4038138e-2 && y<=.5047673e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) = -.1899250249e-
2+1.377429212*y;
        else if (y>.5047673e-2 && y<=.6057207e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) = -.5501963282e-
3+1.110166671*y;
        else if (y>.6057207e-2 && y<=.7066742e-2)

```

```

        F_PROFILE(f,      thread,      position)      =      .1691871218e-
2+.7400179290*y;
        else if (y>.7066742e-2 && y<=.8076276e-2)
        F_PROFILE(f,      thread,      position)      =      .4042621368e-
2+.4073681520*y;
        else if (y>.8076276e-2 && y<=.9085811e-2)
        F_PROFILE(f,      thread,      position)      =      .5835271744e-
2+.1854031807*y;
        else
        F_PROFILE(f,      thread,      position)      =      .6885552651e-
2+.6980745572e-1*y;
    }
    end_f_loop(f, thread)

}

/* профиль поперечн. скорости Блазиуса на верхн. границе */
DEFINE_PROFILE(inlet_y_velocity_2, thread, position)
{
    real x[ND_ND]; /* this will hold the position vector */
    real y;
    face_t f;
    begin_f_loop(f, thread)
    {
        F_CENTROID(x, f, thread);
        y = x[0]; /* non-dimensional y coordinate */
        F_PROFILE(f,      thread,      position)      =
0.5*sqrt(1.49*0.00001*5)*(6.0*0.99898-4.27964)/(sqrt(y));
    }
    end_f_loop(f, thread)

}

/* профиль прод. Скорости Блазиуса при x=1,2 м; U=5 м/с */
DEFINE_PROFILE(outlet_x_velocity, thread, position)
{
    real x[ND_ND]; /* this will hold the position vector */
    real y;
    face_t f;
    begin_f_loop(f, thread)
    {
        F_CENTROID(x, f, thread);
        y = x[1]; /* non-dimensional y coordinate */
        if (y<=.1134619e-2)
        F_PROFILE(f, thread, position) = 876.6819523*y;
        else if (y>.1134619e-2 && y<=.2269238e-2)
        F_PROFILE(f,      thread,      position)      =      .2050000044e-
1+858.6142132*y;
        else if (y>.2269238e-2 && y<=.3403857e-2)
        F_PROFILE(f,      thread,      position)      =
.1590000000+797.5805094*y;
        else if (y>.3403857e-2 && y<=.4538476e-2)

```

```

        F_PROFILE(f,          thread,          position)          =
.5605499996+679.6113938*y;
        else if (y>.4538476e-2 && y<=.5673094e-2)
        F_PROFILE(f,          thread,          position)          =
1.303747940+515.8564380*y;
        else if (y>.5673094e-2 && y<=.6807713e-2)
        F_PROFILE(f,          thread,          position)          =
2.298250338+340.5548470*y;
        else if (y>.6807713e-2 && y<=.7942332e-2)
        F_PROFILE(f,          thread,          position)          =
3.307750196+192.2671840*y;
        else if (y>.7942332e-2 && y<=.9076951e-2)
        F_PROFILE(f,          thread,          position)          =
4.105750089+91.79292785*y;
        else if (y>.9076951e-2 && y<=.1021157e-1)
        F_PROFILE(f,          thread,          position)          =
4.604150036+36.88462823*y;
        else
        F_PROFILE(f,          thread,          position)          =
4.872462492+10.60929057*y;
    }
    end_f_loop(f, thread)

}

/* профиль поперечн. скорости Блазиуса при x=1,2 м; U=5 м/с */
DEFINE_PROFILE(outlet_y_velocity, thread, position)
{
    real x[ND_ND]; /* this will hold the position vector */
    real y;
    face_t f;
    begin_f_loop(f, thread)
    {
        F_CENTROID(x, f, thread);
        y = x[1]; /* non-dimensional y coordinate */
        if (y<=.1134619e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) = .2070280861*y;
        else if (y>.1134619e-2 && y<=.2269238e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) = -.4543899999e-
3+.6075061320*y;
        else if (y>.2269238e-2 && y<=.3403857e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) = -.1207008000e-
2+.9391672447*y;
        else if (y>.3403857e-2 && y<=.4538476e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) = -.1818399004e-
2+1.118784367*y;
        else if (y>.4538476e-2 && y<=.5673094e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) = -.1689875368e-
2+1.090465690*y;
        else if (y>.5673094e-2 && y<=.6807713e-2)
            F_PROFILE(f, thread, position) = -.4895451248e-
3+.8788826910*y;
        else if (y>.6807713e-2 && y<=.7942332e-2)

```

```
        F_PROFILE(f,      thread,      position)      =      .1505358583e-
2+.5858468790*y;
        else if (y>.7942332e-2 && y<=.9076951e-2)
        F_PROFILE(f,      thread,      position)      =      .3596951320e-
2+.3224994470*y;
        else if (y>.9076951e-2 && y<=.1021157e-1)
        F_PROFILE(f,      thread,      position)      =      .5191967145e-
2+.1467779052*y;
        else
        F_PROFILE(f,      thread,      position)      =      .6204421946e-
2+.4763009601e-1*y;
    }
    end_f_loop(f, thread)

}
```

Приложение Д



**АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО
«РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКИЙ ЦЕНТР «ПРОГРЕСС»
(АО «РКЦ «ПРОГРЕСС»)**

ул. Земеца, д.18, г. Самара, 443009, тел. (846) 955-13-61, факс (846) 992-65-18, E-mail: mail@samspace.ru
ОКПО 43892776, ИНН 6312139922, КПП 997850001.

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель
генерального директора-
генеральный конструктор, д.т.н.



Равиль Нургалиевич
Ахметов*

» _____ 2017 г.

АКТ

об использовании результатов диссертационной работы
Крюкова Юрия Александровича

Научно-техническая комиссия в составе:

председателя – Космодемьянского Е. В., к.т.н., Заместителя генерального конструктора по научной работе
членов комиссии – Лагно О.Г., к.т.н., Главного конструктора - начальника отделения 1150
Дмитриева В.В., к.т.н., заместителя начальника отдела 1152,
Скалчихина Н.Н., к.т.н., начальника отдела 1156

составила настоящий АКТ о том, что материалы диссертационной работы Крюкова Ю.А., а именно:

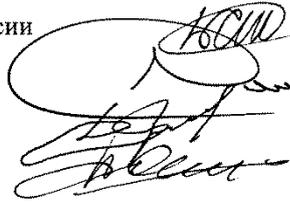
- математическая модель двухсредного неперемешивающегося ламинарного ПС со скользящей межфазной границей на плоской поверхности (представленная в НТО ФГУП ГНПРКЦ «ЦСКБ-Прогресс» по теме «Разработка методов исследования гидродинамики жидкого топлива в баках перспективных ракет-носителей» (гос. Рег. № 01200961335) и теме «Влияние атмосферной влаги на сопротивление трения элементов корпуса ракет-носителей» (гос. Рег. № 01201277996));
- математические модели для исследования динамики вязкой несжимаемой жидкости со свободной межфазной границей и расходом массы в двусвязных полостях;

были использованы для уточнения аэродинамических характеристик элементов корпуса ракеты-носителя с учетом появления на них жидкой пленки, а также для оценки управления характеристиками пограничного слоя с целью снижения сопротивления трения.

Результаты вычислительного эксперимента по математической модели динамики вязкой несжимаемой жидкости в двусвязных полостях использовались для исследования причин и оценки характеристик колебаний свободной поверхности топлива в измерительном канале системы управления расходом топлива в баках ракет-носителей семейства «Союз».

Председатель комиссии

Члены комиссии



Евгений Владимирович Космодемьянский**

Олег Геннадьевич Лагно***

Вячеслав Васильевич Дмитриев****

Николай Николаевич Скалчихин*****

* - ул. Земеца, д.18, г. Самара, 443009; тел. : 8(846) 955-06-74; e-mail: Ahmetov@samspace.ru

** - ул. Земеца, д.18, г. Самара, 443009; тел. : 8(846) 228-52-10;

e-mail: 1060_kosmodemyanskii@samspace.ru

*** - ул. Земеца, д.18, г. Самара, 443009; тел. : 8(846) 228-90-40; e-mail: 1150_lagno@samspace.ru

**** - ул. Земеца, д.18, г. Самара, 443009; тел. : 8(846) 932-04-03; e-mail: 1152_dmitrievv@samspace.ru

***** - ул. Земеца, д.18, г. Самара, 443009; тел. : 8(846) 228-94-48; e-mail: 1156_scalchihin@samspace.ru

Приложение Е

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015619401

Lambola plate wilifi

Правообладатель: *Крюков Юрий Александрович (RU)*Автор: *Крюков Юрий Александрович (RU)*

Заявка № 2015616170

Дата поступления 07 июля 2015 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 02 сентября 2015 г.

Заместитель руководителя Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Л.Л. Курий



Приложение Ж

УТВЕРЖДАЮ



проректор по учебной работе
Самарского национального
исследовательского университета
А.В. Гаврилов
« » 2017 г.

АКТ
внедрения в учебный процесс
результатов диссертационной работы Крюкова Ю.А.

Результаты диссертационной работы Крюкова Ю.А., связанные с математическим моделированием движения сферической частицы в пограничном слое на плоской пластине и выполненные в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 гг., используются в учебном процессе кафедры математического моделирования в механике Самарского национального исследовательского университета в курсе «Математическое моделирование процессов взаимодействия потоков жидкости и газа», читаемом для магистров по профессиональной образовательной программе направления 010800 Механика и математическое моделирование.

Директор института
ракетно-космической техники
д.т.н., профессор

С.А. Ишков

Заведующий кафедрой математического
моделирования в механике,
д.т.н., профессор

Н.И. Клюев