Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский государственный технический университет»

На правах рукописи

Кудинов Игорь Васильевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛЬНО - НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОТЫ, МАССЫ, ИМПУЛЬСА С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ

Специальность: 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора технических наук

Научный консультант
доктор физико-математических наук, профессор
_____ В.П. Радченко

Самара 2017

Оглавление

Стр.

Введение 5

1. Обзор работ в области построения математических моделей равновесных и локально - неравновесных процессов переноса и аналитических методов их исследования ……..... 13

2. Аналитические модели локально - неравновесных процессов теплообмена ..… 25

2.1 Исследование математической модели теплопроводности с учетом временно́й нелокальности ……..…….…… 26

2.2 Разработка математической модели локально - неравновесного теплообмена с учетом пространственно - временно́й нелокальности …...……..…… 38

2.3 Дифференциальные уравнения локально - неравновесного теплообмена с производными высокого порядка …….……...…… 49

2.4 Применение операционных методов к решению краевых задач локально - неравновесного теплообмена …….……..…… 65

2.5 Численное моделирование локально - неравновесного процесса теплового воспламенения …….……..…… 68

3. Математические модели локально - неравновесных процессов колебаний твердых тел и упругих жидкостей ……...…… 75

3.1 Математические модели колебаний стержня с учетом пространственно - временно́й нелокальности …….…….. 76

3.2 Разработка математической модели локально - неравновесного процесса поперечных колебаний струны ……..…….. 88

3.3 Получение точного решения гиперболического уравнения при гидравлическом ударе в трубопроводе ……..…… 97

3.4 Распределение скорости в круглой трубе при гидравлическом ударе ……... 103

3.5 Применение операционных методов для решения гиперболических уравнений колебаний давления при гидравлическом ударе в трубопроводе … 104

3.6 Численное исследование резонансных колебаний стержня с учетом релаксационных свойств материалов …….…… 114

3.7 Применение операционных методов в математических моделях колебаний струны …….……..…… 123

3.8 Экспериментальные исследования колебаний стержня ……..… 125

4. Математические модели локально - неравновесных процессов течения жидкостей …… 132

4.1 Математическая модель разгонного течения Куэтта при учете пространственно - временно́й нелокальности ……..……. 132

4.2 Численное моделирование локально - неравновесного теплообмена в движущейся жидкости ……..……... 140

4.3 Получение математической модели колебаний упругой жидкости при гидравлическом ударе с учетом ее релаксационных свойств ……..… 148

4.4 Исследование резонансных колебаний газа с учетом релаксационных свойств среды на основе конечно - разностного метода …… 157

5. Математические модели динамической термоупругости ……..……... 168

5.1 Динамическая термоупругость на основе параболического уравнения теплопроводности ……..…… 168

5.2 Динамическая термоупругость на основе гиперболического уравнения теплопроводности с релаксацией теплового потока ……...…… 177

5.3 Динамическая термоупругость на основе уравнения теплопроводности с релаксацией теплового потока и скалярной величины градиента температуры 185

5.4 Математическая модель локально - неравновесной динамической термоупругости ……..……...… 190

6. Дополнительные граничные условия в краевых задачах теплопроводности ... 203

6.1 Разработка метода решения параболических уравнений на основе допущения о конечной скорости переноса теплоты ……...……. 204

6.2 Применение теории обобщенных функций в краевых задачах теплопроводности для многослойных конструкций ……..... 217

6.3 Исследование теплообмена в турбулентном пограничном слое на основе вычисления фронта теплового возмущения и дополнительных краевых условий ……..… 230

6.4 Использование метода дополнительных краевых условий при решении задачи Стефана ……..…… 240

6.5 Определение коэффициентов теплоотдачи на внутренней поверхности парового котла БКЗ-320-140 НГМ ……..… 251

7. Метод решения уравнений параболического типа, основанный на свойстве бесконечной скорости переноса теплоты .....…..... 258

7.1 Бесконечная пластина (граничные условия 1-го рода) …… 258

7.2 Переменное начальное условие ……..…. 266

7.3 Переменные во времени граничные условия 1-го рода ……... 275

7.4 Бесконечная пластина с источником теплоты ……..…… 282

8. Комплекс программ численно - аналитического решения задач теплопроводности и тепломассопереноса .....…..... 288

8.1 Реализация метода решения задачи теплопроводности с учетом релаксации теплового потока численно - аналитическим методом в среде Mathcad 13 … 288

8.2 Реализация метода решения задачи теплопроводности с учетом релаксации теплового потока и градиента температуры численно - аналитическим методом в среде Mathcad 13 ……..…… 295

8.3 Реализация метода решения задачи динамической термоупругости с учетом релаксационных явлений численно - аналитическим методом в среде Mathcad 13 ……..…….……. 301

8.4 Укрупненная блок - схема решения задачи динамической термоупругости с учетом релаксационных явлений на основе решения задачи теплопроводности с релаксацией теплового потока и градиента температуры 307

8.5 Теория расчета сложных разветвленных гидравлических систем ……. 309

8.6 Основные положения построения компьютерных моделей гидравлических систем …….……..……..……. 312

8.7 Проектирование систем теплоснабжения больших городов с помощью компьютеных моделей…… 315

Основные выводы и результаты работ 324

Литература 329

Приложения 351

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. В последнее время в связи с развитием лазерных технологий, возможностью получения сверхвысоких температур и давлений, а также ввиду необходимости проведения различных физических процессов в экстремальных условиях возник интерес к изучению локально - неравновесных процессов. Интерес к таким процессам обусловлен широкими возможностями их практического применения для создания новых технологий получения наноматериалов и покрытий с уникальными физико - химическими свойствами, таких как бинарные и многокомпонентные металлические сплавы, керамика, полимерные материалы, металлические и полупроводниковые стекла и др. Однако для описания процессов, протекающих в локально - неравновесных условиях, классическая термодинамика не может быть использована, так как она основана на принципе локального равновесия (справедливого для относительно медленных процессов в гомогенных системах), согласно которому в каждом малом объеме среды наблюдается локальное равновесие, несмотря на наличие в системе в целом градиентов температур, концентраций и других параметров. То есть в классической термодинамике считается, что система находится в состоянии локального равновесия и скорость нарушения этого равновесия (скорость изменения ее макропараметров), определяемая граничными условиями, намного меньше скорости достижения локального равновесия (скорости релаксации системы к локальному равновесию). Следовательно, принцип локального равновесия может быть принят лишь для диапазона времени, значительно большего времени релаксации, и для величин характерного макромасштаба, значительно превышающих характерный микромасштаб (длина свободного пробега микрочастиц) системы.

Использование принципа локального равновесия и гипотезы сплошной среды позволяет считать, что законы переноса справедливы как для всей системы, так и для ее малой части. Для таких систем в интегральных законах сохранения путем приближения к нулю пределов интегрирования можно выполнять предельный переход и получать дифференциальные уравнения в частных производных, представляющих математическую запись законов сохранения в дифференциальной форме. На этом основании в классической теории выводятся параболические уравнения переноса (теплопроводности, диффузии, энергии и др.), являющиеся локальными, то есть, не учитывающими временну́ю и пространственную нелокальность системы.

Однако любой процесс переноса является нелокальным, так как перенос энергии (массы, импульса) из одной точки среды в другую происходит не мгновенно, а за вполне конечный промежуток времени. Следовательно, принимая принцип локального термодинамического равновесия, конечной скоростью процесса переноса пренебрегается. В связи с чем, возникает

проблема создания адекватных физических и соответствующих математических моделей описания локально - неравновесных процессов на основе современной версии термодинамики третьего типа – расширенной необратимой термодинамики, выходящей за рамки принципа локального равновесия.

Известные постановки краевых задач математической физики основаны на бесконечной скорости распространения потенциалов исследуемых полей (задачи теплопроводности, теплообмена в жидкостях, динамической термоупругости, колебаний упругих тел и жидкостей, и проч.), которая заложена в соответствующих диффузионных уравнениях: закон Фурье (для теплового потока), Фика (для задач диффузии), Гука (для нормального напряжения), Ньютона (для касательного напряжения в жидкости), Ома (для распространения тока в проводниках) и др. Полученные на основе этих законов дифференциальные уравнения являются локальными, то есть в них не учитываются релаксационные явления. Например, математические постановки классических задач нестационарного тепломассопереноса основаны на параболических уравнениях. Исследования их аналитических решений приводят к заключению о том, что скорость распространения теплоты является бесконечной. Для многих технических задач гипотеза Фурье приводит к результатам, которые подтверждаются опытными исследованиями. Однако существует большой класс задач, где классическое уравнение теплопроводности неадекватно описывает действительные физические процессы. Основная причина состоит в том, что формула Фурье (и другие перечисленные выше законы) является приближенным описанием теплопроводности, которое не учитывает ускорение теплового потока и градиента температуры. Первыми, кто учел ускорение в уравнения переноса, были Максвелл, Вернотт и Каттанео, которые предложили формулу для теплового потока, известную как формула Максвелла – Каттанео. Для этого в формуле закона Фурье было введено слагаемое, учитывающее ускорение теплового потока. Используя эту формулу, было выведено известное (классическое) гиперболическое уравнение теплопроводности. Многочисленные исследования его решений позволили заключить, что оно не обеспечивает адекватного описания реальных процессов. Например, решения описывают скачки температуры, что означает возникновение изотерм внутри исследуемой среды. Кроме того, наблюдаются бесконечные тепловые потоки на фронте волны, а также появляются отрицательные температуры в обратной тепловой волне.

Среди различных других направлений описания локально - неравновесных процессов переноса известны следующие: термодинамические (Де Гроот, Дэй У.А., Дьярмати, Петров Н., Лыков А.В., Карташов Э.М., Соболев С.Л., Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Бровкин Л.А., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., и др.); кинетические (Максвелл С.К., Бубнов В.А., Урушев Д. и др.); молекулярно - динамические (Черешнев С.Л., Мак Дональд Р.А.); феноменологические. Локально - неравновесные модели переноса могут быть получены также молекулярно -

кинетическими методами (из уравнения Больцмана), с использованием теории случайных блужданий и рядом других (Соболев С.Л., Новиков И.А., Гуртин М.Е., Леванов Е.И., Сотский Е.Н. и др.). Например, в термодинамических методах рассматриваются среды скоростного типа, с внутренними степенями свободы, с тепловой «памятью» (Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.). В расширенной необратимой термодинамике (Жоу Д., Касас – Баскес Х., Лебон Дж.), в волновой теории Дьярмати и ряде других вариантов локально - неравновесных процессов предполагается, что удельная энтропия является функцией не только экстенсивных параметров, но и их потоков (Максвелл, Вернотт, Каттанео, Соболев С.Л., Лыков А.В., Карташов Э.М., Цирельман Н.М. и др.).

Наличие значительного числа теорий локально - неравновесного переноса, не всегда между собой согласующихся, позволяет сделать заключение об отсутствии единой теории в данной области исследований. Отметим также практическое отсутствие локально - неравновесных теорий передачи импульса применительно к обширной области колебательных процессов (стержней, пружин, струн, упругих жидкостей, распространения электромагнитных полей и проч.), описываемых волновыми уравнениями, в которых, ввиду использования при их выводе нерелаксированных формул законов Гука, Ньютона, Ома, оказывается заложенной бесконечная скорость распространения потенциалов исследуемых полей. Эти уравнения, ввиду неучета в них пространственно - временно́й нелокальности, являются локальными. В связи с чем, тему работы, посвященной созданию локально - неравновесных теорий различных процессов переноса (тепла, массы, импульса и др.), а также методов решения соответствующих им краевых задач, следует признать актуальной.

Целью диссертационной работы является: разработка новых математических моделей локально - неравновесных процессов переноса теплоты, массы, импульса с учетом релаксационных явлений на основе уравнений гиперболического и параболического типов; разработка класса численно - аналитических методов решения краевых задач, описывающих предложенные модели; создание алгоритмов и комплексов программ для получения численно – аналитических решений рассмотренных задач теплопроводности, тепломассопереноса, теплообмена в движущихся жидкостях, колебательных процессов в упругих твердых телах и жидкостях, динамической термоупругости и др.

Научное направление состоит в новом подходе к описанию локально - неравновесных процессов переноса, основанном на учете релаксационных явлений в классических законах (Фурье, Фика, Ньютона, Гука, Ома и др). Получаемые с использованием этих законов дифференциальные уравнения в частных производных описывают локально - неравновесные процессы переноса потенциалов исследуемых полей с учетом релаксационных явлений.

Научная новизна:

1. Разработана новая концепция математического моделирования реальных физических процессов переноса тепла, массы, импульса на основе уравнений гиперболического и параболического типов с учётом релаксационных явлений в феноменологических законах Фурье, Фика, Ньютона, Гука, Ома.

2. Разработан класс численно - аналитических методов построения решений уравнений параболического и гиперболического типов, моделирующих локально - неравновесные процессы тепломассопереноса, динамической термоупругости, колебаний упругих тел, жидкостей и газов.

3. Разработаны алгоритмы и комплексы программ для реализации методов расчёта и анализа новых математических моделей локально - неравновесных процессов.

4. Разработаны методы математического моделирования локально - неравновесных процессов теплопереноса, теплового воспламенения и теплового взрыва, основанные на представлении классической формулы закона Фурье в виде линейной комбинации производных по времени от теплового потока и градиента температуры.

5. Разработаны методы математического моделирования локально - неравновесных процессов колебаний упругих жидкостей и тел на основе модификации законов Ньютона и Гука соответственно посредством введения дополнительных релаксационных слагаемых.

6. Проведено численное исследование локально - неравновесного процесса теплообмена в движущейся жидкости с учетом релаксационных явлений.

7. Разработан новый метод математического моделирования локально - неравновесного процесса изменения динамических температурных напряжений с учетом релаксационных явлений при использовании численно - аналитического решения уравнения теплопроводности гиперболического типа, полученного на основе модифицированного закона Фурье.

8. Проведен многофакторный анализ колебаний твердых тел и газов при воздействии внешней гармонической нагрузки при частотах, равных и близких к частоте собственных колебаний, который позволил сделать вывод о возникновении периодических высокоамплитудных бифуркационных флаттерных колебаний (биений) в незатухающем процессе колебаний.

9. Разработан приближенный аналитический метод получения решений краевых задач тепломассопереноса, основанный на определении фронта теплового возмущения (в предположении конечной скорости продвижения теплоты) и дополнительных граничных условий, позволяющий практически с заданной точностью получать решения краевых задач для всего времени нестационарного процесса, включая сверхмалые значения временно́й переменной.

10. Учитывая свойство параболических уравнений, связанное с бесконечной скоростью распространения теплоты, разработан метод получения численно - аналитических решений краевых задач нестационарного тепломассопереноса, основанный на определении дополнительной неизвестной функции и дополнительных граничных условий.

На защиту выносятся:

1. Новая концепция математического моделирования реальных физических процессов переноса тепла, массы, импульса, на основе уравнений гиперболического и параболического типов с учётом релаксационных явлений в модифицированных законах Фурье, Фика, Ньютона, Гука, Ома.

2. Класс численно - аналитических методов построения решений уравнений гиперболического и параболического типов, моделирующих локально - неравновесные процессы тепломассопереноса, динамической термоупругости, колебаний упругих тел, жидкостей и газов.

3. Алгоритмы и комплексы программ для реализации разработанных численно - аналитических методов решения краевых задач.

4. Метод математического моделирования локально - неравновесных процессов теплообмена (в том числе в движущихся жидкостях) на основе закона Фурье посредством введения дополнительных релаксационных слагаемых для теплового потока и скалярной величины градиента температур.

5. Методы математического моделирования локально - неравновесных процессов колебаний упругих жидкостей, газов и тел, разработанные с учетом модификации законов Ньютона и Гука соответственно посредством введения дополнительных релаксационных слагаемых.

6. Метод математического моделирования локально - неравновесного процесса распределения динамических температурных напряжений на основе численно - аналитического решения уравнения теплопроводности, полученного с учетом релаксационных явлений.

7. Приближенный аналитический метод решения краевых задач теплообмена, основанный на определении фронта теплового возмущения (в предположении конечной скорости продвижения теплоты) и дополнительных краевых условий.

8. Численно - аналитический метод получения решений задач теплопроводности на основе уравнений параболического типа с использованием дополнительной искомой функции, рассмотрение которой связано с бесконечной скоростью распространения теплоты.

9. Результаты расчетов динамических температурных напряжений, найденных с учетом релаксационных явлений, для распределения температуры, полученной из условия конечной и бесконечной скоростей распространения теплоты.

10. Условия возникновения бифуркационных флаттерных колебаний (биений) при частотах внешней нагрузки и собственных колебаний тела, близких к резонансным.

Достоверность результатов работы. Достоверность полученных моделей и решений подтверждается их соответствием реальным физическим процессам, протекающим в конкретных технических устройствах; сравнением данных расчета по предложенным моделям с точными решениями и с приближенными решениями, найденными другими авторами; сопоставлением расчётных данных по предложенным численно – аналитическим методам с решениями, найденными численными методами и с результатами натурных экспериментов.

Практическая значимость работы состоит в том, что использование разработанных в диссертации моделей локально - неравновесных процессов теплопереноса позволило получить новые физические и теоретические данные об их протекании. Разработан инструментарий для решения класса новых задач тепломассопереноса, термоупругости, колебаний упругих тел, жидкостей и газов, учитывающих релаксационные явления. Показана физическая невозможность задания граничных условий первого рода (тепловой удар) в реальных конкретных установках, независимо от условий взаимодействия с окружающей средой. Установлено, что коэффициенты теплоотдачи не могут превышать некоторых предельных значений, определяемых физическими свойствами тела. Сформулированы условия возникновения бифуркационных флаттерных колебаний (биений), которые ввиду периодически возникающей высокой амплитуды могут приводить к разрушению конструкций. Результаты исследований применены для построения компьютерных моделей теплосетей централизованного теплоснабжения г. Саратова, Самары, Тольятти, Ульяновска, Балаково, Новокуйбышевска, внутренних тепловых сетей Самарской ТЭЦ и Безымянской ТЭЦ (г. Самара), Самарской ГРЭС и Новокуйбышевской ТЭЦ-1.

На основе найденного в диссертации решения задачи для турбулентного теплового пограничного слоя найдено критериальное уравнение для определения коэффициентов теплоотдачи на границе жидкость – стенка, которое, исходя из гидродинамической теории теплообмена, было использовано для оценки коэффициентов сопротивления трения, необходимых при построении компьютерных моделей.

Выполнены исследования температурного состояния барабана котла БКЗ-420-140 НГМ в условиях планового (или аварийного) сброса давления пара в барабане, при котором на внутренних кромках отверстий барабана возникают температурные напряжения, превышающие предел прочности материала и приводящие к его разрушению. Методом конечных элементов были найдены температурные напряжения с учетом сил давления пара. Используя результаты исследований, были разработаны рекомендации по проведению безопасных режимов сброса давления.

Связь диссертационной работы с планами научных исследований. Исследования проводились по планам госбюджетных тематик Минвуза РФ № 1.21.11 (01.01.2009 г. – 31.12.2012 г.) «Разработка методов получения точных аналитических решений дифференциальных уравнений гиперболического типа»; в рамках Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы», согласно тематическому плану НИР № 551/02 «Разработка нового направления получения аналитических решений задач математической физики на основе определения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий», а также при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в пределах базовой части государственного задания ФГБОУ ВО «СамГТУ» (код проекта: 1273). С 2015 г. исследования выполняются при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по научному проекту № 16-38-00059 мол-а. С 2016 г. соискатель является стипендиатом Президента в категории «Молодой ученый».

Внедрение результатов работы. Результаты работы использовались при проведении энергоаудита СамГТУ с 01.02.2011 г. по 31.12.2012 г., при выполнении научно – исследовательских и регламентных работ с Волжской ТГК, Куйбышевским и Новокуйбышевским НПЗ, ОАО «Самараоргсинтез», Самарской ТЭЦ, Безымянской ТЭЦ, Самарской ГРЭС, Новокуйбышевской ТЭЦ-1. Экономический эффект, подтвержденный приведенными в приложениях диссертации актами о внедрении, составляет более 15 млн. руб.

Личный вклад автора на всех этапах исследований является определяющим и состоит в постановке проблем, разработке математических моделей, непосредственном выполнении основной части работы, выполненной в соавторстве.

Апробация работы. Полученные в диссертации результаты представлены и обсуждены на 7-ой Международной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов» (Ульяновск, 2009 г.); с 6-ой по 9-ой Всероссийских научных конференциях «Математическое моделирование и краевые задачи» (Самара, 2009 г., 2010г., 2011 г., 2013 г.); Школах - семинарах молодых ученых под руководством академика Леонтьева А.И. «Проблемы газодинамики и теплообмена в аэрокосмических технологиях» (Москва, 2009 г. , 2011 г.); Школах - семинарах молодых ученых под руководством академика Алемасова В.Е. «Проблемы тепломассообмена и гидродинамики в энергомашиностроении» (Казань, 2010 г.); XIV-м и XV-м Минских международных форумах по тепло - и массообмену (2012 г., 2016 г.); VI-ой Российской Национальной конференции по теплообмену (Москва, 2014 г.); 3-ей и 4-ой Международных конференциях «Математическая физика и её приложения» (Самара, 2013 г., 2014г.); Международной научной конференции молодых ученых «Электротехника. Энергетика.

Машиностроение» (Новосибирск, 2014 г.); Всероссийской научной школе-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы» (Чебоксары, 2015 г.); 3-ей Международной научно-технической конференции “Динамика и виброакустика машин” (Самара, 2016 г.); 3-ей международной конференции “Неизотермические явления и процессы” (Черноголовка, 2016 г.)

Публикации. Основные положения диссертации представлены в 139 печатных изданиях, среди которых 11 статей – в международных журналах, индексируемых в базе цитирования Web of Science, 9 статей – в журналах, состоящих в базе цитирования Scopus, 26 статей − в рецензируемых журналах из перечня ВАК. В автореферате приведена 51 печатная работа. По результатам исследований опубликованы 6 монографий, 1 учебник и 4 учебных пособия, зарегистрированы 4 программных комплекса для ЭВМ в Роспатенте.

Структура и объем работы. Диссертация включает введение, восемь глав, выводы, список литературы, приложения; изложена на 348 страницах основного машинописного текста и 35 страницах приложений, содержит 205 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 279 наименований.

1. ОБЗОР РАБОТ В ОБЛАСТИ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАВНОВЕСНЫХ И ЛОКАЛЬНО - НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА И АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ

Известно, что получение точных аналитических решений возможно лишь для наиболее простых краевых задач, в которых не учитываются переменность свойств, краевых условий, нелинейность и прочее. Все это приводит к отклонению исследуемых моделей от конкретных процессов, протекающих в технических устройствах. Кроме того, точные решения представляют собой сложные функциональные ряды, которые плохо сходятся при малых временах. Эти решения трудно использовать в инженерных расчетах и, особенно, когда решение задачи теплопроводности является промежуточным звеном получения решения каких-то других задач – обратных задач, задач управления, термоупругости и др. Поэтому интерес представляют приближенные методы прикладной математики, которые позволяют находить решения в аналитическом виде, с точностью, достаточной для инженерных приложений. Такие методы позволяют расширить круг решаемых задач по сравнению с классическими методами. Во многих случаях они позволяют находить и точные аналитические решения в форме бесконечных рядов [12, 13, 19, 20, 26, 49, 50, 61, 67, 74 – 76, 81, 111, 119 – 121, 123 – 125, 127].

Наиболее известным методом, широко используемым при решении задач теплопроводности, является метод Фурье (разделения переменных), лежащий в основе аналитической теории краевых задач переноса [54, 55, 90, 91, 114]. Однако его использование связано с необходимостью определения функций, удовлетворяющих уравнениям, полученным в результате разделения переменных, которые известны лишь для отдельных простых уравнений (Лежандра, Бесселя и др.). В случаях, когда в результате разделения переменных получаются сложные дифференциальные уравнения и функции, удовлетворяющие им, неизвестны, метод Фурье становится неприменимым.

В работах [8, 64, 66, 68, 81, 82] для решения краевых задач параллельно с методом Фурье применяется ортогональный метод Бубнова – Галеркина. При этом вводятся дополнительные краевые условия, необходимость которых связана с наличием нового неизвестного параметра, представляющего собственные числа краевой задачи. Дополнительные краевые условия определяются путем использования дифференциального уравнения задачи Штурма – Лиувилля посредством его дифференцирования применительно к граничным точкам. Применение ортогонального метода приводит к высокой точности приближенных решений для тех задач, в уравнениях которых возможно разделение переменных. Такой подход позволяет значительно расширить диапазон задач, решаемых с помощью метода Фурье, что объясняется универсальностью ортогонального метода Бубнова – Галеркина, так как его использование

возможно практически для любых дифференциальных операторов. Это задачи с неоднородными граничными условиями, с переменными начальными условиями и теплофизическими свойствами среды, краевые задачи для многослойных тел и другие [52, 53, 67, 68, 70, 74 – 76].

Среди приближенных методов, которые позволяют находить решения на начальном отрезке временно́й переменной, известны методы, в которых вводится понятие толщины термического (прогретого) слоя. Применительно к ним процесс нагрева подразделяется на две стадии, первая из которых характеризуется постепенным проникновением температурного фронта, а вторая – изменением температуры во всем объеме тела до наступления стационарного режима. Такой метод решения позволяет для каждой из стадий в отдельности уже в первых приближениях находить решения, точность которых вполне достаточна для инженерных приложений. Существенным их недостатком является необходимость априорного подбора получаемой температурной функции. Обычно используется квадратичная или кубическая парабола, что приводит к недостаточной точности решения, так как принятие заранее того или иного профиля температуры всякий раз будет приводить к различным конечным результатам [8, 12, 13, 20, 30, 40, 53, 66, 74 – 76, 82 – 87, 102 – 104, 126].

Среди этих методов большое распространение имеет интегральный метод теплового баланса [12, 30, 64, 66, 68, 70, 74 – 76, 101, 107, 108]. Этот метод позволяет свести решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения, решение которого обычно получается в аналитическом виде. Данный метод можно использовать при решении задач, когда физические свойства определяются сложной зависимостью, а также задач, в которых вместе с теплопроводностью учитывается и конвекция.

Примеры применения этого метода к краевым задачам теплопроводности даны в работе Т. Гудмена [30], где наряду с рассмотрением больших его преимуществ показана и его ограниченность. Например, имеется целый класс задач, для которых он практически неприменим. Это задачи с импульсным изменением граничных условий. Применительно к ним температурные кривые, представленные квадратичными параболами, не соответствуют действительному профилю для этих задач. И в случае, когда действительное изменение температуры является немонотонной функцией, то найти удовлетворительное решение практически не удается.

Повышение точности достигается использованием полиномов высоких степеней. Однако в данном случае краевые условия и условия на фронте волны являются недостаточными для определения коэффициентов этих полиномов. Поэтому появляется необходимость применения дополнительных краевых условий, которые позволяют определять неизвестные коэффициенты полиномов высоких степеней. Дополнительные краевые условия находятся из исходных

краевых условий и исходного уравнения задачи посредством их дифференцирования и сопоставления полученных соотношений применительно к граничным точкам [8, 64, 66, 68, 70, 74 – 76, 81, 82, 107, 108].

При решении многих краевых задач теплообмена теплофизические свойства принимаются независящими от температуры. Однако, в случаях, когда температура изменяется в широком диапазоне, то вследствие температурной зависимости физических свойств задача становится нелинейной. Ее решение настолько усложняется, что классические аналитические методы не могут быть применены. Однако связанные с нелинейностью трудности получения аналитических решений интегральный метод позволяет преодолеть. Он эффективен для задач с переменными физическими свойствами, переменными начальными условиями, переменными во времени краевыми условиями, краевых задач гидродинамики и тепломассообмена для жидкостей и других задач. Исследования, связанные с нахождением аналитических решений многих перечисленных задач, приведены в настоящей диссертации.

Если не удается непосредственно проинтегрировать уравнение задачи, то используются приближенные методы, среди которых наибольшее применение находят методы, основанные на совместном применении точных и приближенных методов. В этих методах по безграничной области определения временно́й переменной используются точные методы (Фурье, операционные и др.), а по ограниченным областям изменения декартовых координат – приближенные методы (вариационные, ортогональные методы, методы взвешенных невязок и др.). В результате применения метода Фурье задача относительно пространственных координат решается одним из приближенных методов (вариационным, взвешенных невязок и др.). Решение здесь принимается в виде ряда, содержащего неизвестные коэффициенты и координатные функции, выбираемые так, чтобы граничные условия задачи удовлетворялись точно. Коэффициенты решения определяются путем составления невязки дифференциального уравнения и выполнения условия ее ортогональности к координатным функциям. Для нахождения неизвестных коэффициентов решения в данном случае будем иметь систему алгебраических уравнений. Ее матрица представляет собой заполненную квадратную матрицу с большим расхождением коэффициентов, которая обычно плохо обусловлена. Алгебраические уравнения, получаемые на основе таких матриц, приводят к неточным собственным числам. При этом точность их определения при увеличении числа приближений может не повышаться, а понижаться. Отсюда следует, что плохая обусловленность матриц является основной причиной недостаточной эффективности приближенных методов.

Для преодоления этих трудностей в работах [8, 64, 66, 68, 70, 74 – 76, 81, 108] изложены методы получения дополнительных краевых условий, являющихся эффективным средством решения проблем плохо обусловленных матриц, что можно объяснить следующими факторами.

Когда дополнительные краевые условия не применяются, решение, принимаемое в виде алгебраического полинома, точно удовлетворяет лишь граничным условиям задачи. Удовлетворение уравнения и начальных условий выполняется из решения систем алгебраических уравнений, имеющих плохо обусловленные матрицы. Основное преимущество при использовании дополнительных условий заключается в том, что искомое решение здесь точно удовлетворяет исходным краевым условиям и уравнению в точках границы и на фронте возмущения. Удовлетворение основных и дополнительных краевых условий производится из решения систем алгебраических уравнений, имеющих сильно разреженные матрицы, которые обычно хорошо обусловлены. Кроме того, в случае использования дополнительных краевых условий получаются цепочные системы алгебраических уравнений, в которых неизвестные разделяются и, таким образом, они легко могут быть определены практически при любом количестве приближений. В связи с чем проблемы, связанные с плохой обусловленностью матриц, здесь практически не возникают.

Необходимо отметить, что дополнительные условия никоим образом не меняют исходную математическую постановку задачи, являясь вспомогательным средством при нахождении решения задачи. Физический смысл дополнительных условий заключается в том, что их выполнение эквивалентно выполнению исходного уравнения на границах и на фронте возмущения. И чем большее число таких условий будет принято, тем лучше будет удовлетворяться уравнение задачи не только в граничных точках, но и внутри области.

Определение решений задач для n - слойных тел связано с выполнением условий сопряжения, что в конечном итоге приводит к системам алгебраических уравнений. Однако при увеличении числа слоев создаются трудности проведения практических расчетов. При решении нестационарных краевых задач для многослойных тел для определения собственных чисел имеем системы многопараметрических трансцендентных уравнений, точные решения которых не получены. Применение для их решения приближенных методов – вариационных, ортогональных и др. – позволяет значительно упростить решение указанных задач ввиду того, что при их использовании применяются координатные функции, точно удовлетворяющие краевым условиям и условиям сопряжения. Однако эти методы эффективны лишь в процессе регулярного режима теплообмена. В области малых времен (в нерегулярном режиме) для достижения заданной точности требуется применять большое число приближений. В этом случае для определения неизвестных коэффициентов получаются большие системы алгебраических уравнений с квадратными матрицами, имеющими большой разброс коэффициентов, которые обычно плохо обусловлены.

Эффективным методом получения дифференциальных уравнений и нахождения решений соответствующих задач теплопроводности является метод, основанный на применении

обобщенных функций [2, 22, 25, 65, 99, 100]. Следуя данному методу, многослойная конструкция представляется в виде одного слоя с переменными теплофизическими свойствами, описываемыми с помощью единичных характеристических (асимметричных) функций. В данном случае нет необходимости выполнения условий сопряжения, так как эти условия благодаря свойствам асимметричной функции, выполняются в результате удовлетворения уравнение краевой задачи.

Проблеме вывода гиперболических (волновых) уравнений теплопроводности с учетом конечной скорости переноса теплоты посвящено много публикаций [11, 16, 18, 41, 53, 70 – 73, 77 – 80, 87, 104 – 106, 110, 121, 123 – 126, 129 – 190]. Необходимость их получения связана с парадоксами теории теплопроводности, вытекающими из решений параболического уравнения. При его получении используется закон Фурье, в котором тепловой поток и скалярная величина градиента температуры не разделены во времени. В связи с чем, любое изменение градиента температуры приводит к мгновенному изменению теплового потока. Поэтому уже в процессе вывода в параболическое уравнение теплопроводности закладывается бесконечная скорость переноса теплоты, что следует из его аналитических решений. И, в частности, установлено, что в условиях теплового удара величина теплового потока принимает бесконечные значения, что противоречит фундаментальным физическим законам.

Результаты таких решений не отражают реальное распределение температуры. Впервые это было показано Риманом, который доказал, что разным изотермическим поверхностям соответствуют разные дифференциальные уравнения теплопроводности, и среди них линейное уравнение параболического типа является лишь частным случаем. Кроме того, Риман ответил на вопрос – каким должно быть поле температуры произвольной формы тела для случая, когда изотермы, заданные в некоторый момент времени, были бы изотермами в любой другой момент времени, то есть чтобы температура в любой точке пространства была представлена в виде пространственно - временных функций. Кроме того, при ответе на вопрос – какие свойства должно иметь тело, для которых система кривых остается изотермами, Риман впервые доказал, что эти свойства характеризуются не физическими параметрами, а изотермическими поверхностями, описываемыми различными дифференциальными уравнениями, которые могут включать операторы со второй, третьей и т. д. производными, содержащими высшие производные от искомой функции по координатам и времени. Следовательно, параболическому уравнению теплопроводности соответствует лишь некоторый класс изотермических поверхностей, пределы которых не могут быть преодолены путем расширения краевых условий. В связи с чем, невозможно найти изотермические поверхности, несвойственные параболическому уравнению, лишь изменением краевых условий. Это путь, по которому развивалась теория теплообмена. Именно такой путь и приводит к указанным парадоксам, а

также к поставленным некорректно задачам. Все это объясняется ограниченностью параболического уравнения, при выводе которого принимается, что температура описывается плавной функцией координат и времени.

Отметим, что параболическим уравнением описывается процесс распространения теплоты, осуществляемый взаимодействующими частицами (электронами, ионами, атомами, молекулами). Количественные характеристики его определяются такими свойствами как теплопроводность и теплоемкость. В то же время, процесс распространения теплоты является волновым процессом, определяемым скоростью тепловой волны и релаксацией теплового потока. Следовательно, в нестационарных процессах распределение теплоты, вообще говоря, не следует закону Фурье, так как в его формуле отсутствуют параметры, учитывающие конечную скорость переноса тепла. Необходимость использования этих параметров связана с тем, что теплота переносится частицами тела (электронами, атомами, молекулами, ионами), а результат этого переноса – температура тела – связан со скоростями движения (колебания) этих частиц. Отсюда следует, что в формуле для переноса теплоты необходимо учитывать представления, связанные со скоростью движения частиц, временем и длиной свободного пробега и взаимодействием при ударах.

Обобщение формулы закона Фурье было выполнено авторами работ [11, 16, 41, 89, 91], получившими уравнение для теплового потока, включающее слагаемое $\tau_r \partial q/\partial\tau$, где $\tau_r = a/\vartheta^2$ – время релаксации, ϑ – скорость движения теплового возмущения, τ – время. Таким образом, величина $\tau_r \partial q/\partial\tau$ учитывает инерционные свойства теплового потока, то есть учитывает время, требуемое для его ускорения.

Отметим, что А.В. Лыковым обобщенная формула закона Фурье была получена на основе теории Максвелла, связанной аналогией механических свойств твердых тел и жидкостей. При этом релаксация представляется как явление «рассасывания» напряжений сдвига, то есть рассеивания энергии, запасенной в деформируемом твердом теле, путем ее перевода в теплоту. Используя эту теорию, доказывается эквивалентность времени релаксации теплового потока τ_r и вязких напряжений.

На основе обобщенного уравнения Фурье было получено гиперболическое уравнение теплопроводности, известное как уравнение Максвелла – Катанео – Лыкова. Аналогичное уравнение найдено также А.С. Предводителевым на основе других представлений – из анализа скоростей перемещения изотерм, используя положения Римана, полностью отказываясь от релаксационной формулировки закона Фурье.

Полученное гиперболическое уравнение по форме аналогично телеграфному уравнению (применительно к электрическим процессам). Эквивалентность передачи тепла и электричества

основывается на аналогии формул законов Ома и Фурье и подтверждается законом Видемана – Франца, по которому величина отношения коэффициентов теплопроводности и электропроводности металлов при одинаковой температуре одинакова. Отсюда следует, что электроны переносят как электрический заряд, так и теплоту. В связи с высокой концентрацией свободных электронов в металлах практически вся теплота передается электронами. Поэтому высокоэлектропроводные металлы также и высокотеплопроводны.

Аналогия между этими явлениями подтверждается также тем фактом, что переход к сверхпроводимости сопровождается аналогичным увеличением коэффициента теплопроводности. Так, теплопроводность жидкого гелия при температуре $-270\,^{\circ}C$ равна $\lambda = 0{,}0106\, Bm/(м \cdot K)$, а при температуре $-271\,^{\circ}C$ она возрастает до величины $\lambda = 0{,}9869 \cdot 10^{6}\ Bm/(м \cdot K)$. Коэффициент релаксации теплового потока здесь составляет $\tau_r \approx 10^{-3}\ c$, а скорость движения тепловой волны $\vartheta = 19\ м/c$ [126].

Для большей части физических задач влияние конечной скорости передачи теплоты крайне мало. Так, например, скорость диффузной передачи теплоты на несколько порядков меньше скорости тепловой волны [126]. Однако во многих процессах более достоверные данные можно получить лишь путем решения гиперболических уравнений. К их числу относятся быстропротекающие нестационарные процессы, сопоставимые по времени с временем релаксации τ_r. Например, в случае нагрева тел лазерными импульсами продолжительностью от нано - до фемтосекунд. Скорость нагрева здесь сопоставима со временем термализации, которое необходимо электронам для теплообмена с ионной решеткой, и со временем релаксации. К другим процессам относятся: нагрев при трении с большой скоростью, тепловой удар, нагрев при распространении трещин и другие процессы [41, 52].

Из анализа решений гиперболических уравнений при малых значениях времени при ($\tau \to 0$, $x \to 0$) следуют выводы, в определенном смысле, противоположные выводам, получаемым из решения параболического уравнения. Так, тепловой поток на стенке и скорости перемещения изотерм при $x \to 0$ и $\tau \to 0$ являются уже не бесконечными, а нулевыми, что вполне объясняется инерционностью распространения теплоты при учете ее конечной скорости. При больших значениях времени решения этих уравнений для многих задач полностью совпадают. Поэтому возникает вопрос – в каких диапазонах времени следует применять решения гиперболического уравнения и скоростью распространения теплоты можно пренебречь?

Ответы на поставленные вопросы связаны с детальным исследованием точного решения гиперболического уравнения. В известной литературе эти решения приводятся, как правило, для полупространства, что создает трудности при их исследовании ввиду невозможности

представления исходной постановки задачи в безразмерном виде (для всех ее переменных). Все это не позволяет провести их всесторонний анализ и выполнить заключения более общего характера. К тому же, решение для полупространства не позволяет проводить исследование обратной волны, наблюдающейся при достижении фронтом волны противоположной стенки, на ее фронте также наблюдаются скачки температуры. Результаты подобных исследований приведены в настоящей работе.

Распространение упругих колебаний продольных волн в различных средах, как известно, описывается волновым уравнением. Это уравнение описывает незатухающие колебания, то есть оно не учитывает оказываемое средой сопротивление процессу распространения возмущений. Это линейное гиперболическое уравнение, исследованию точных аналитических решений которого посвящены многие работы [70, 72, 77, 78, 122]. Трудности получения решений задач применительно к течению реальных жидкостей связаны с их нелинейностью, ввиду того, что коэффициент трения зависит от скорости. Уравнения для распределения давления и скорости вязкой жидкости получены И.А. Чарным [122]. Эти уравнения представляют зависимости между средними в сечении скоростью, плотностью и давлением. Кроме того, они также содержат среднюю величину касательного напряжения. Система уравнений для средних величин оказывается замкнутой в случае, если указана зависимость между касательным напряжением и скоростью. Для ее замыкания предполагается, что при неустановившемся движении касательное напряжение является такой же функцией скорости и свойств жидкости, как и при установившемся, то есть используется гипотеза квазистационарности. Следовательно, по гипотезе квазистационарности считается, что закон Ньютона для касательного напряжения выполняется и при нестационарном процессе изменения скорости, точно также предполагается неизменность соотношений и для коэффициента гидравлических сопротивлений. Строгое обоснование этого допущения отсутствует, поэтому его справедливость может быть подтверждена лишь путем сравнения с экспериментальными исследованиями [122]. В отдельных случаях (при малых изменениях давления и скорости во времени) теория квазистационарности удовлетворительно подтверждается результатами экспериментов, однако при значительных скачках давления и скорости обнаруживаются существенные расхождения. Следовательно, теория квазистационарности может быть использована лишь для некоторого ограниченного круга задач, когда распределение скорости при нестационарном течении незначительно отличается от стационарного.

В случае существенно нестационарных процессов уравнения для осредненных величин не позволяют выполнить оценку влияния нестационарности на силу трения. Поэтому для уточнения зависимости касательного напряжения от осредненных величин скорости, давления и плотности применяются уравнения Навье – Стокса, описывающие местные (локальные)

значения этих величин. Такой путь приводит к необходимости интегрирования системы двух взаимосвязанных дифференциальных уравнений (относительно давления и скорости), одно из которых является интегро – дифференциальным [122].

Таким образом, нелинейные уравнения, записанные для осредненных величин искомых функций и касательного напряжения, совместно с соответствующими краевыми условиями представляют краевую задачу в квазистационарной постановке. Их решение возможно лишь путем выполнения численного интегрирования. Используя предложенный И.А. Чарным метод линеаризации, эти уравнения сводятся к одному линейному уравнению для давления или скорости. Исследования их точного решения показали, что с течением времени давление в любой точке меняется скачкообразно. Такое изменение давления свидетельствует о бесконечной скорости переноса импульсов исследуемого поля. Бесконечная скорость оказывается заложенной в формулах закона Гука для нормального напряжения (давления) и законе Ньютона для касательного напряжения.

В настоящей работе для оценки изменения касательного напряжения, давления и скорости в нестационарном процессе используется метод, связанный с определением ускорений этих величин во времени с использованием соответствующих коэффициентов релаксации. Основные положения этого метода изложены в диссертации.

Периодические возмущения, вызывающие упругие деформации среды, распространяются в ней со скоростью, зависящей от физических свойств. Процесс колебательного движения, при котором возмущение, вызвавшее деформацию, не сопровождается поступательным перемещением вещества, называется волновым. Необходимыми условиями распространения волн в среде являются ее упругость (отсутствие пластического течения) и инертность (противодействие деформациям). При этом рассматриваются продольные и поперечные волны. В случае продольных волн упругость характеризуется модулем упругости (модуль Юнга), а поперечных, например в струне, – ее натяжением. Во всех волновых процессах в формулу скорости распространения волны входят плотность среды и модуль Юнга (для струны – натяжение), характеризующие соответственно ее инертность и упругость.

Уравнения, описывающие волновые процессы, являются гиперболическими. Получение точных решений этих уравнений в случаях незатухающих (вынужденных) колебаний, происходящих под действием некоторой возмущающей силы, представляет большие трудности. Решения таких задач найдены лишь для некоторых частных случаев при конкретно заданных законах изменения возмущающей нагрузки [10, 48, 70]. При этом вопросы, связанные с решением проблемы бесконечной скорости переноса импульсов исследуемых полей, в известной литературе не рассматривались. Однако, как показали выполненные в настоящей работе исследования, учет релаксационных свойств среды приводит к существенному отличию

колебательного процесса по сравнению со случаем их неучета. Учет этих свойств позволяет устранить проблему скачкообразного изменения натяжения, возникающую вследствие того, что в уравнении закона Гука заложена бесконечная скорость переноса возмущений. В самом деле, вертикальная составляющая T_u произвольного натяжения T и деформация $\varepsilon = du/dx$ здесь не разделены во времени (в законе Гука отсутствует время). Устранение проблемы бесконечной скорости приводит к существенному изменению не только формы колебаний, но и времени затухания колебательного процесса.

В диссертации даны результаты вывода гиперболических уравнений колебаний твердых тел при учете релаксационных явлений. Для этих уравнений были найдены точные решения и выполнены их детальные исследования.

В случае решений краевых задач термоупругости в квазистатической постановке напряжения определяются лишь пространственным изменением температуры, то есть в данном случае не учитывается скорость изменения температуры по времени. Однако из результатов исследований, приведенных в ряде работ [15, 32 – 34, 57, 99, 100, 103], следует, что учет динамических эффектов оказывает существенное влияние на распределение напряжений. И, в частности, было показано, что динамические напряжения обусловлены перемещением частиц твердого тела при его интенсивном тепловом расширении (или сжатии). Для математического описания этого процесса в уравнениях равновесия (движения) должны быть учтены инерционные члены, учитывающие изменение напряжений во времени. Их учет приводит к решениям задач термоупругости, качественно отличающимся от решений соответствующих квазистатических задач. Характерной особенностью динамических напряжений является их волновое распространение со скоростью, равной скорости звука в среде. Причем, на фронте волны (например, при тепловом ударе на поверхности тела) наблюдается скачок напряжений, сопровождающийся сменой их знака.

При определении динамических напряжений решения задач теплопроводности предполагаются известными. При этом могут быть использованы решения как параболического, так и гиперболического уравнения. Исследования динамических задач термоупругости при использовании точного решения параболического уравнения как для полупространства, так и для тел конечных размеров (пластина, цилиндр), приведены во многих литературных источниках [15, 32 – 34, 57, 103]. Использование аналитических решений гиперболических уравнений (расчет динамических напряжений при учете конечной скорости переноса теплоты) относится к новому направлению в термомеханике, называемой обобщенной термомеханикой [99].

В классической теории процессов переноса или в классической необратимой термодинамике используется теория локального термодинамического равновесия и гипотеза

сплошной среды, то есть считается, что в любом малом объеме среды наблюдается состояние локального равновесия, несмотря на наличие в системе в целом градиентов температур, концентраций и других параметров [36, 37]. Система находится в локально – равновесном состоянии в случае, когда скорость изменения макропараметров системы, определяемая граничными условиями (скорость нарушения равновесия), намного меньше скорости достижения локального равновесия (скорости достижения системой локального равновесия), то есть $\mathrm{v} >> \vartheta$, где $\mathrm{v} = \sqrt{a / t_0} = L / t_0$; $\vartheta = \sqrt{a / \tau} = h / \tau$; a – коэффициент температуропроводности; τ – коэффициент релаксации (например, время свободного пробега частиц); t_0 – характерное время макропроцесса ($\tau << t_0$); v – скорость изменения макропараметров (изотерм, изотах и проч.), вызванного внешними причинами; L – характерный макромасштаб процесса; h – масштаб микроструктуры среды (например, длина свободного пробега микрочастиц, $h << L$); υ – скорость перемещения волны возмущений (скорость звука в среде). Следовательно, теория локального термодинамического равновесия может быть принята лишь для времен t_0, значительно больших времени релаксации τ, и для величин характерного макромасштаба L, значительно превышающих характерный микромасштаб h системы. Согласно гипотезе сплошности отвлекаются от молекулярно - атомного строения среды, что может быть принято лишь в случае, когда $h << L$ [104 – 106].

Использование теории локального термодинамического равновесия и гипотезы сплошной среды позволяет считать, что законы механики и переноса справедливы как для всей системы, так и для любой ее малой части. Для таких систем в интегральных законах сохранения путем приближения к нулю пределов интегрирования можно выполнять предельный переход и получать уравнения в частных производных, представляющие математическую запись законов сохранения в дифференциальной форме. На этом теоретическом основании в классической термодинамике необратимых процессов выводятся параболические уравнения переноса (теплопроводности, диффузии, энергии), являющиеся локальными, то есть, не учитывающими временну́ю и пространственную нелокальность системы.

По результатам обзора можно сделать заключение о том, что в настоящее время отсутствует единая теория локального неравновесного переноса, которую можно было бы распространить на все случаи переноса энергии (тепла, массы, импульса и проч.). Кроме того, в известной литературе в недостаточной мере приведены исследования перечисленных теорий локально - неравновесных процессов, связанных с получением точных численно - аналитических решений соответствующих краевых задач и их детальным исследованием.

Целью диссертационной работы является: разработка локально - неравновесных моделей процессов переноса теплоты, массы, импульса с учетом пространственно - временной нелокальности.

К задачам исследований относятся:

1. Разработка новой методологии математического моделирования физических процессов переноса тепла, массы, импульса, основанной на учете релаксационных явлений.

2. Разработка численно - аналитических методов получения решений параболических и гиперболических уравнений, описывающих локально - неравновесные процессы тепломассопереноса, динамической термоупругости, колебаний упругих тел, жидкостей и газов.

3. Разработка алгоритмов и комплексов программ применительно к расчетам предложенных в диссертации новых математических моделей локально - неравновесных процессов.

4. Разработка методов математического моделирования локально - неравновесных процессов теплопереноса, теплового воспламенения и теплового взрыва.

5. Разработка нового метода математического моделирования локально - неравновесных процессов колебаний упругих жидкостей.

6. Разработка метода математического моделирования локально - неравновесных процессов колебаний упругих тел (струн, стержней, пружин и проч.) с учетом релаксационных явлений.

7. Разработка нового метода математического моделирования локально - неравновесных процессов изменения динамических температурных напряжений с учетом релаксационных явлений.

8. Разработка приближенного аналитического метода получения решений краевых задач тепломассопереноса, основанного на определении фронта теплового возмущения и дополнительных граничных условий.

9. Разработка метода получения численно - аналитических решений краевых задач нестационарного тепломассопереноса, основанного на свойстве параболического уравнения теплопроводности, связанном с бесконечной скоростью распространения теплоты.

10. Разработка приближенного аналитического метода решения задачи для турбулентного теплового пограничного слоя, основанного на допущении конечной скорости распространения теплоты.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛОКАЛЬНО - НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА

Научные результаты данной главы представлены в работах [70, 71, 73, 191, 196, 220, 221, 236, 242, 254, 265, 268 – 270] автора диссертации. К числу сформулированных в диссертации целей относятся рассмотренные в настоящем разделе вопросы, связанные с разработкой локально - неравновесных моделей процессов переноса теплоты с учетом релаксационных явлений. И, в частности, приведены результаты разработки указанных моделей с учетом временной (модель Максвелла – Каттанео) и пространственно - временной нелокальности (модель Максвелла – Каттанео – Лыкова).

Во второй главе приводятся также впервые рассмотренная в диссертации модель, включающая дифференциальные уравнения высокого порядка производных (в том числе и смешанных) по пространственной переменной и времени, полученная на основе многократной релаксации теплового потока и градиента температуры в формуле закона Фурье. Для всех рассмотренных выше краевых задач получены точные аналитические решения методом разделения переменных и операционным методом. Показано, что полученные с использованием этих двух методов результаты расчетов полностью совпадают. Решение представленной во второй главе нелинейной задачи локально - неравновесного теплового воспламенения было получено численным методом разделения переменных.

Решению проблем нахождения гиперболических (волновых) уравнений, учитывающих конечную скорость переноса теплоты, посвящено много публикаций [11, 16, 18, 24, 35, 36, 38, 41, 53 – 56, 77 – 80, 101, 102, 110, 123 – 127, 133, 134]. Необходимость их получения связана с парадоксами теории теплопроводности, вытекающими из решений параболического уравнения

$$\partial t(x, \tau)/\partial \tau = a\partial^2 t(x, \tau)/\partial x^2 , \qquad (2.1)$$

вывод которого основан на формуле закона Фурье

$$q = -\lambda \partial t/\partial x , \qquad (2.2)$$

где t – температура, x – координата, τ – время, a – температуропроводность, q – тепловой поток, λ – теплопроводность.

Из (2.2) изменение температуры в любой точке приводит к ее мгновенному изменению во всех точках системы. Следовательно, при выводе в уравнение (2.1) закладывается бесконечная скорость переноса теплового возмущения, подтверждаемая исследованием его точных решений, из которых следует, что в условиях теплового удара тепловой поток и скорости распространения изотерм при $x \to 0$ и $\tau \to 0$ имеют бесконечные значения, что противоречит фундаментальным физическим законам.

Обобщение соотношения (2.2) было выполнено в работах [37 – 91, 133, 144], в которых была получена следующая формула теплового потока:

$$q = -\lambda \partial t / \partial x - \tau_r \partial q / \partial \tau , \tag{2.3}$$

где $\tau_r = a / W^2$ – постоянная релаксации (время релаксации), W – скорость движения теплоты.

На основе (2.3) было получено гиперболическое уравнение теплопроводности, известное как уравнение Максвелла – Катанео – Лыкова

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial \tau^2} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} . \tag{2.4}$$

2.1 Исследование математической модели теплопроводности с учетом временно́й нелокальности

Найдем точное решение гиперболического уравнения для пластины при условиях 1-ого рода. Постановка задачи будет

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial \tau^2} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} ; \tag{2.5}$$

$$t(x, 0) = t_0 ; \quad \frac{\partial t(x, 0)}{\partial \tau} = 0 ; \quad \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = 0 ; \quad t(\delta, \tau) = t_{ст} , \tag{2.6}$$

где t_0 – начальная температура; $t_{ст}$ – температура стенки; δ – толщина пластины.

Обозначим:

$$\Theta = (t - t_{ст}) / (t_0 - t_{ст}) ; \quad \xi = x / \delta ; \quad \mathrm{Fo} = a\tau / \delta^2 , \tag{2.7}$$

где Θ – безразмерная температура; ξ – относительная координата; Fo – безразмерное время.

Задача (2.5), (2.6) с учетом (2.7) будет

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_r \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} \quad (\mathrm{Fo} > 0 ; \quad 0 < \xi < 1); \tag{2.8}$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (2.9) \qquad \partial \Theta(\xi, 0) / \partial \mathrm{Fo} = 0 ; \tag{2.10}$$

$$\partial \Theta(0, \mathrm{Fo}) / \partial \xi = 0 ; \quad (2.11) \qquad \Theta(1, \mathrm{Fo}) = 0 , \tag{2.12}$$

где $\mathrm{Fo}_r = a\tau_r / \delta^2$.

Решение задачи (2.8) – (2.12) разыскивается в виде

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \varphi(\mathrm{Fo}) \psi(\xi) . \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) в (2.8), будем иметь

$$\mathrm{Fo}_r d^2\varphi / d\mathrm{Fo}^2 + d\varphi / d\mathrm{Fo} + \nu\varphi = 0 ; \tag{2.14}$$

$$d^2\psi / d\xi^2 + \nu\psi = 0 , \tag{2.15}$$

где $\nu = \mu^2$ – постоянная.

Подставляя (2.13) в (2.11), (2.12), находим краевые условия для функции $\psi(\xi)$

$$d\psi(0)/d\xi = 0; \quad (2.16) \qquad \psi(1) = 0. \qquad (2.17)$$

Решение задачи Штурма – Лиувилля (2.15) – (2.17) разыскивается в виде

$$\psi(\xi) = \cos\left(r\frac{\pi}{2}\xi\right) \quad (r = 2i-1;\ \ i = 1, 2, ...). \qquad (2.18)$$

Соотношение (2.18) удовлетворяет условиям (2.16), (2.17). Подставляя (2.18) в (2.15), относительно собственных значений ν_k будем иметь

$$\nu_k = r^2\pi^2/4 \quad (r = 2k-1;\quad k = 1, 2, ...). \qquad (2.19)$$

Определяемые по (2.19) величины ν_k являются собственными значениями задачи (2.15) – (2.17).

Собственные функции (2.18) определяются с точностью до постоянной величины, которая может быть принята равной единице [114].

Характеристическое уравнение для уравнения (2.14) записывается в виде

$$\mathrm{Fo}_r z^2 + z + \nu_k = 0 \quad (k = 1, 2, ...). \qquad (2.20)$$

Уравнение (2.20) для любого собственного значения $\nu_k\,(k = 1, 2, ...)$ имеет корни:

$$z_{ik} = \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4\mathrm{Fo}_r\nu_k}\right)/(2\,\mathrm{Fo}_r) \quad (i = 1, 2;\ k = 1, 2, ...). \qquad (2.21)$$

Если дискриминант $D = (4\mathrm{Fo}_r\nu_k - 1) < 0$, то из (2.21) получаем два действительных корня z_{1k} и z_{2k} $(k = 1, 2, ...)$. Решение уравнения (2.14) здесь будет

$$\varphi_k(\mathrm{Fo}) = C_{1k}\exp(z_{1k}\mathrm{Fo}) + C_{2k}\exp(z_{2k}\mathrm{Fo}), \qquad (2.22)$$

где C_{1k} и C_{2k} – константы интегрирования, которые определяются из условий (2.9), (2.10).

Подставив (2.18) и (2.22) в (2.13) и составив сумму найденных частных решений, будем иметь

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[C_{1k}\exp(z_{1k}\mathrm{Fo}) + C_{2k}\exp(z_{2k}\mathrm{Fo})\right]\cos(\tau\pi\xi/2)\right\} \qquad (2.23)$$

$$(r = 2k-1;\quad k = 1, 2, ...).$$

Подставляя (2.23) в (2.10), находим

$$C_{1k} = -C_{2k}z_{2k}/z_{1k}\ . \qquad (2.24)$$

Подставляя (2.23) в (2.9), учитывая (2.24), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{2k}\left(1 - \frac{z_{2k}}{z_{1k}}\right)\cos\left(r\frac{\pi}{2}\xi\right) = 1. \qquad (2.25)$$

Соотношение (2.25) является разложением единицы в ряд Фурье по собственным функциям задачи (2.15) – (2.17). Умножим (2.25) на $\cos(j\pi\xi/2)$ и вычислим интеграл в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$:

$$\int_0^1\left[\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k}\left(1-\frac{z_{2k}}{z_{1k}}\right)\cos\left(r\frac{\pi}{2}\xi\right)\right]\cos\left(j\frac{\pi}{2}\xi\right)d\xi-\int_0^1\cos\left(j\frac{\pi}{2}\xi\right)d\xi=0 \qquad (2.26)$$

$$(j=r=2k-1;\ \ k=1,2,...).$$

Выражение (2.26) вследствие ортогональности косинусов примет вид

$$\int_0^1 C_{2k}\left(1-\frac{z_{2k}}{z_{1k}}\right)\cos^2\left(r\frac{\pi}{2}\xi\right)d\xi-\int_0^1\cos\left(r\frac{\pi}{2}\xi\right)d\xi=0. \qquad (2.27)$$

Вычисляя интегралы в (2.27), получим

$$C_{2k}=\left(\frac{4}{r\pi}\right)/\left(1-\frac{z_{2k}}{z_{1k}}\right)\quad (r=2k-1;\ \ k=1,2,...). \qquad (2.28)$$

В результате нахождения постоянных C_{1k} и C_{2k} решение задачи (2.8) – (2.12) определяется из (2.23).

Если дискриминант выражения (2.21) $D=(4\mathrm{Fo}_r\nu_k-1)>0$, то получаем следующие комплексные корни:

$$z_{1k}=\gamma+i\beta,\qquad z_{2k}=\gamma-i\beta,$$

где $i=\sqrt{-1}$; $\gamma=-0{,}5/\mathrm{Fo}_r$; $\beta=\left(\sqrt{4\mathrm{Fo}_r\nu_k-1}\right)/(2\mathrm{Fo}_r)$.

Частные решения соотношения (2.14) записываются в виде

$$\varphi_{1k}=\exp(\gamma+i\beta)\mathrm{Fo};\qquad \varphi_{2k}=\exp(\gamma-i\beta)\mathrm{Fo}. \qquad (2.29)$$

Используя частные решения, получаем общее решение соотношения (2.14):

$$\varphi_k(\mathrm{Fo})=C_{1k}\exp[(\gamma+i\beta)\mathrm{Fo}]+C_{2k}\exp[(\gamma-i\beta)\mathrm{Fo}], \qquad (2.30)$$

где C_{jk} $(j=1,2;\ \ k=1,2,...)$ – постоянные.

Соотношение (2.30) запишем в виде

$$\varphi_k(\mathrm{Fo})=\exp(\gamma\mathrm{Fo})[C_{1k}\exp(i\beta\mathrm{Fo})+C_{2k}\exp(-i\beta\mathrm{Fo})]. \qquad (2.31)$$

С помощью формул Эйлера $\exp(is)=\cos s+i\sin s$; $\exp(-is)=\cos s-i\sin s$ соотношение (2.31) записывается следующим образом:

$$\varphi_k(\mathrm{Fo})=\exp(\gamma\mathrm{Fo})[C_{1k}(\cos(\beta\mathrm{Fo})+i\sin(\beta\mathrm{Fo}))+C_{2k}(\cos(\beta\mathrm{Fo})-i\sin(\beta\mathrm{Fo}))]=\exp(\gamma\mathrm{Fo})[(C_{1k}+C_{2k})\times$$

$$\times\cos(\beta\mathrm{Fo})-i\,(C_{2k}-C_{1k})\sin(\beta\mathrm{Fo})]\ . \qquad (2.32)$$

Соотношение (2.32), учитывая обозначения $C_{1k}+C_{2k}=B_{1k}$, $i\,(C_{2k}-C_{1k})=B_{2k}$, будет

$$\varphi_k(\mathrm{Fo})=\exp(\gamma\mathrm{Fo})[B_{1k}\cos(\beta\mathrm{Fo})-B_{2k}\sin(\beta\mathrm{Fo})]. \qquad (2.33)$$

Подставляя (2.18), (2.33) в (2.13) и определяя сумму частных решений, имеем

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{[\exp(\gamma\mathrm{Fo})[B_{1k}\cos(\beta\,\mathrm{Fo})-B_{2k}\sin(\beta\,\mathrm{Fo})]]\cos\left(r\frac{\pi}{2}\xi\right)\right\} \qquad (2.34)$$

$$(\mathrm{r} = 2\mathrm{k} - 1; \quad \mathrm{k} = 1, 2, \ldots).$$

Постоянные B_{1k} и B_{2k} находятся из условий (2.9), (2.10). Подставляя (2.34) в (2.10), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\gamma B_{1k} - \beta B_{2k}) \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi \right) = 0.$$

Отсюда находим

$$B_{2k} = \gamma B_{1k} / \beta . \tag{2.35}$$

Подставляя (2.34) в (2.9), с учетом (2.35) получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi \right) = 1 . \tag{2.36}$$

Умножая соотношение (2.36) на $\cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi \right)$ $(j = 2k - 1)$ и интегрируя в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$, находим

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi \right) \cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi \right) d\xi = \int_0^1 \cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi \right) d\xi . \tag{2.37}$$

Соотношение (2.37) с учетом ортогональности косинусов будет

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} \cos^2\left(r \frac{\pi}{2} \xi \right) d\xi - \int_0^1 \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi \right) d\xi = 0 . \tag{2.38}$$

Вычисляя интегралы в (2.38), получим

$$B_{1k} = \frac{4}{r\pi} . \tag{2.39}$$

После получения констант B_{1k} и B_{2k} решение задачи определяется из (2.34).

С помощью непосредственной подстановки можно получить, что все условия задачи (2.8) – (2.12) решениями (2.23), (2.34) удовлетворяются точно.

На рисунках 2.1 – 2.4 представлены результаты расчетов по соотношениям (2.23), (2.34) для бесконечной пластины при исходных данных: $a = 10^{-6}\, м^2/c$; $\tau_r = 10^{-7}\, c$; $\delta = 0{,}001 м$, т. е. $\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$. Изменение температуры при $\mathrm{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$ дано на рисунках 2.5, 2.6.

Из анализа результатов следует, что для малых величин времени Fo и на фронте возмущения наблюдаются скачки температуры, то есть возникает фронт тепловой волны. На его границе температура скачком меняется от ее величины на фронте волны до начальной температуры. Часть пластины, расположенная за пределами фронта, является невозмущенной, и здесь сохраняется начальная температура. Данный результат есть следствие конечной скорости переноса тепла, которая для данной задачи будет $W = \sqrt{a / \tau_r} = 3{,}16228\, м/c$.

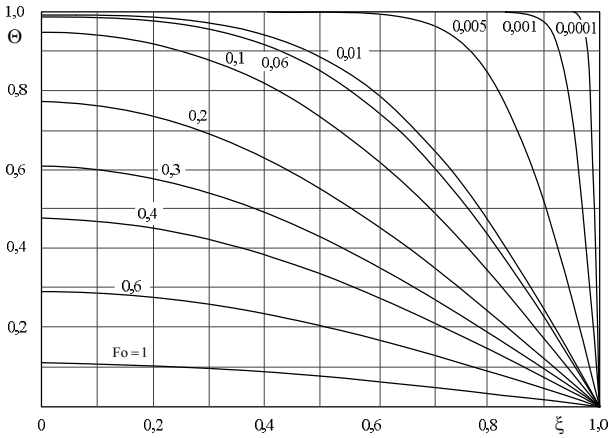


Рисунок 2.1. Распределение температуры $(0{,}0001 \le \mathrm{Fo} \le 1{,}0)$ $\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$

На фронте волны скачок имеет место вплоть до его достижения центра тела. Например, при $\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$ скачкообразное изменение температуры происходит и для всех $10^{-6} < \mathrm{Fo} < 10^{-5}$ (рисунок 2.2).

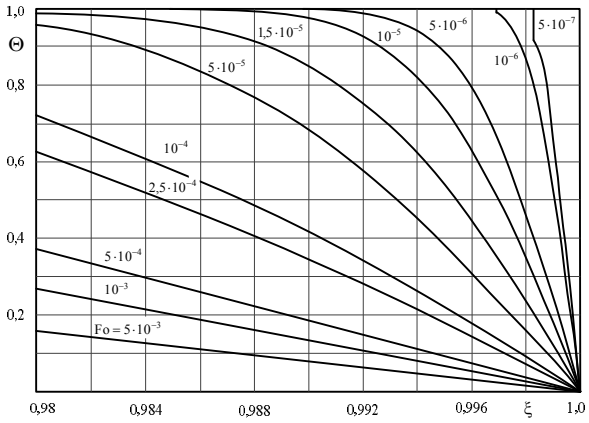


Рисунок 2.2. Изменение температуры $(5 \cdot 10^{-7} \le \mathrm{Fo} \le 5 \cdot 10^{-3})$, $\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$

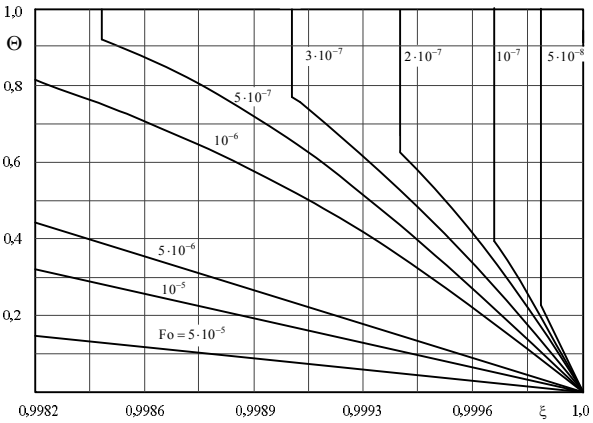


Рисунок 2.3. Графики распределения температуры $(5 \cdot 10^{-8} \le \mathrm{Fo} \le 5 \cdot 10^{-5})$, $\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$

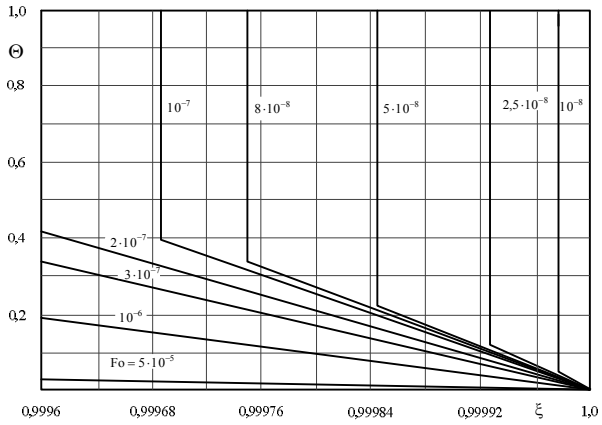


Рисунок 2.4. Графики изменения температуры $(10^{-8} \le \mathrm{Fo} \le 5\cdot10^{-5})$, $\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$

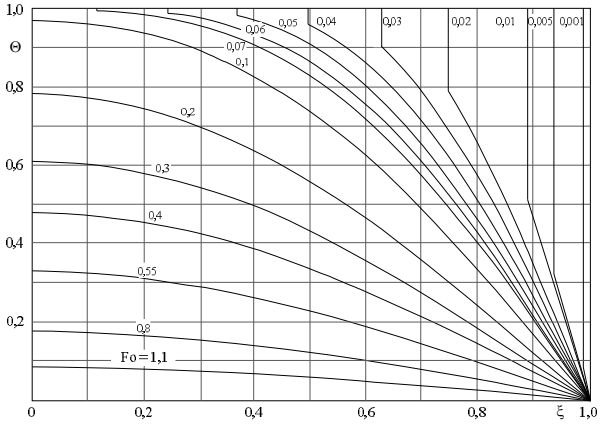


Рисунок 2.5. Изменение температуры $\mathrm{Fo}_r = 6{,}25\cdot10^{-3}$

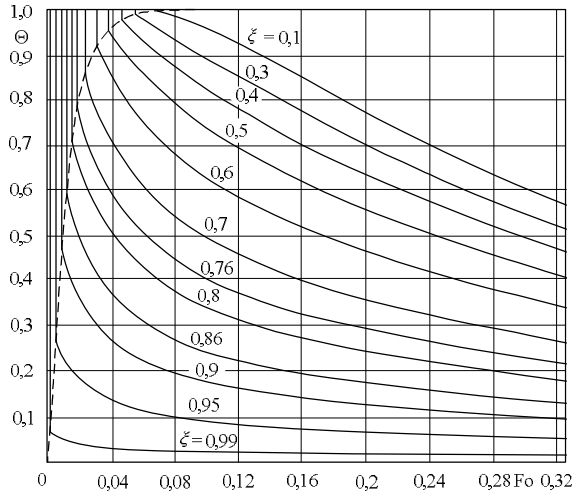


Рисунок 2.6. Распределение температуры:
- - - - - - - – линия перемещения фронта теплового возмущения $\left(\mathrm{Fo}_r = 6{,}25\cdot10^{-3}\right)$

Закон движения фронта по пространственной переменной во времени является линейным $x_\phi = \delta - W\tau$ $(\xi_\phi = 1 - \mathrm{FoFo}_r^{-0,5})$ (рисунок 2.7). Этот результат подтверждается исследованиями, данными в [11].

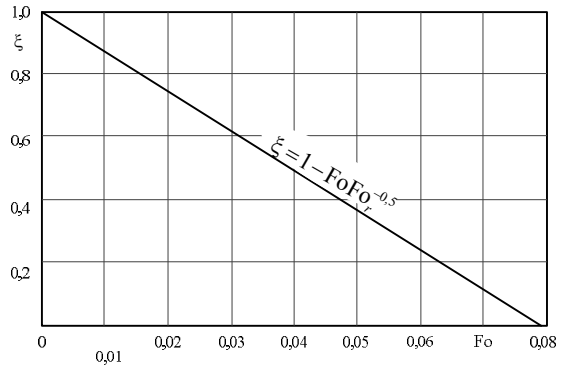


Рисунок 2.7. Изменение фронта теплового возмущения: $\mathrm{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}$

Для сравнения получаемых по формулам (2.23), (2.34) результатов были сделаны расчеты по формуле, найденной в [11] для полупространства, которая имеет вид

$$\Theta(\delta,\beta) = U(\beta-\delta)\left[e^{-\delta} + \delta\int_{\delta}^{\beta} e^{-\tau}\frac{I_1\left(\sqrt{\tau^2-\delta^2}\right)}{\sqrt{\tau^2-\delta^2}}d\tau \right], \qquad (2.40)$$

где $\beta = W^2\tau/(2a)$ – безразмерное время; $\delta = Wx/(2a)$ – безразмерное расстояние; x – координата; τ – время; $\Theta(\delta,\beta) = (t-t_0)/(t_{\text{ст}}-t_0)$ – безразмерная температура; $U(\beta-\delta)$ – единичная ступенчатая функция ($U=1$ при $\beta > \delta$; $U=0$ при $\beta < \delta$); $I_1(\sqrt{\tau^2-\delta^2})$ – функция Бесселя.

По соотношению (2.40) были проведены расчеты для величин $\beta = 0{,}3$; $0{,}5$; $0{,}8$ соответствующих следующим значениям Фурье задачи (2.8) – (2.12): $\mathrm{Fo} = 0{,}6\cdot10^{-7}$; $1\cdot10^{-7}$; $1{,}6\cdot10^{-7}$ $\left(\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}\right)$, полученным из условия равного размерного времени τ. Результаты расчетов по соотношениям (2.40) и (2.23), (2.34) для первых двух чисел β совпадают с точностью до девятого знака, а для 3-го числа β – с точностью до четвертого знака.

После того, как фронт волны достигает центра пластины, наблюдаются два варианта изменения температуры: 1. Обратная волна не возникает, что имеет место для малых значений Fo_r ($\mathrm{Fo}_r < 10^{-6}$). В данном случае в регулярном режиме (для всех $\mathrm{Fo} \le 0{,}01$ при $\mathrm{Fo}_r < 10^{-7}$) распределение температуры полностью совпадает с решением параболического уравнения. 2. Обратная волна возникает, что наблюдается при больших Fo_r ($\mathrm{Fo}_r > 10^{-6}$). Совпадение решений параболического и гиперболического уравнений в этом случае не обнаруживается.

На рисунке 2.8 для $\mathrm{Fo}_r = 6{,}25\cdot10^{-3}$ приводится распределение изотерм $\Theta = \text{const}$ в координатах $\xi - \mathrm{Fo}$, где штрихами обозначено перемещение фронта теплового возмущения. Их анализ показывает, что каждая изотерма возникает на фронте в конкретный момент времени и в определенной точке координаты ξ. В центре пластины $(\xi \to 0)$ изотермы имеют форму кривых, которые параллельны оси ξ и перпендикулярны оси Fo. Это означает, что скорости изотерм $V = d\xi/d\mathrm{Fo} \approx \Delta\xi/\Delta\mathrm{Fo}$ при $\xi \to 0$ устремляются к бесконечным величинам.

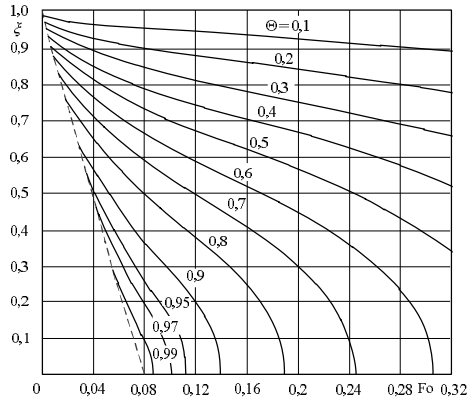


Рисунок 2.8. Распределение изотерм $\Theta = \text{const}$ по координате ξ во времени. - - - - - - – линия перемещения фронта теплового возмущения $\left(\text{Fo}_r = 6{,}25 \cdot 10^{-3}\right)$

Приведенные данные позволяют заключить, что в случаях большого времени релаксации τ_r и малой скорости движения фронта возмущения W необходимо применять гиперболическое уравнение, причем процессы могут быть и не быстропротекающими. Для малых значений времени гиперболическое уравнение необходимо использовать при любых (ненулевых) значениях постоянной релаксации.

Из анализа полученного решения следует, что волновое изменение температуры зависит от числа $\text{Fo}_r = a\tau_r / \delta^2$ и, следовательно, при неизменной толщине пластины δ оно зависит лишь от физических свойств $a = \lambda/(c\rho)$; $\tau_r = a/W^2$ и от скорости движения волны W, также зависящей от физических свойств тела.

На рисунке 2.9 приводятся данные расчетов температуры для $\text{Fo}_r = 0{,}1$. Здесь фронт волны достигает координаты $\xi = 0$, сохраняя скачок при значительной величине $\Delta\Theta = 1{,}0 - 0{,}79 = 0{,}21$. Например, при $\text{Fo} \approx 0{,}31623$ температура на адиабатной стенке $(\xi = 0)$ скачком меняется от температуры $\Theta = 1{,}0$ до $\Theta = 0{,}79$. С увеличением числа Фурье температура скачком меняется от величины $\Theta = 0{,}79$ до значения, зависящего от числа Фурье. Так, при $\text{Fo} = 0{,}32$ температура на стенке $\xi = 0$ уменьшается до $\Theta(0; 0{,}32) = 0{,}58$. При дальнейшем увеличении времени, начиная от $\text{Fo} = 0{,}31623$, на кривых температуры имеет место обратный скачок температуры. Обратная волна после достижения координаты $\xi = 1$ (при $\text{Fo} \approx 0{,}68$) снова переходит в прямую волну. Скачок на кривой температуры здесь направлен в сторону ее понижения. Процесс чередования прямых и обратных волн продолжается вплоть до установления стационарного состояния.

Движение прямой и обратной волн наглядно можно проанализировать на графиках, где представлено распределение температуры в различных точках координаты (рисунок 2.10). Из анализа можно заключить, что прямая волна, начинающаяся при $\text{Fo} > 0$, заканчивается при

$\mathrm{Fo} = 0{,}31623$. Обратная волна движется в диапазоне времени от $\mathrm{Fo} = 0{,}31623$ до $\mathrm{Fo} \approx 0{,}68$. Новая прямая волна после достижения координаты $\xi = 1$ вновь сменяется обратной волной.

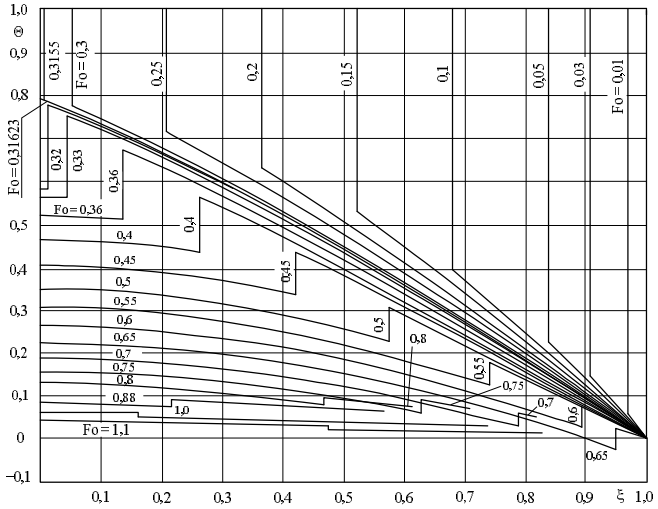


Рисунок 2.9. Изменение температуры $(\mathrm{Fo}_r = 0{,}1)$

При чередовании прямых и обратных волн происходят корреляции в область отрицательных значений температур (см. кривую при $\mathrm{Fo} = 0{,}65$ на рисунке 2.9). Результаты расчетов в области отрицательных температур, представлены на рисунках 2.11 и 2.11 а ($\mathrm{Fo}_r = 0{,}3$). Из анализа результатов следует, что могут наблюдаться волны, полностью находящиеся в области отрицательных температур (изменение времени от $\mathrm{Fo} \approx 1{,}1$ до $\mathrm{Fo} \approx 2{,}1$). С увеличением числа Фурье волны снова переходят в область положительных значений температур. Амплитуда колебаний при увеличении времени уменьшается и при $\mathrm{Fo} \to \infty$ пластина принимает температуру, равную нулю.

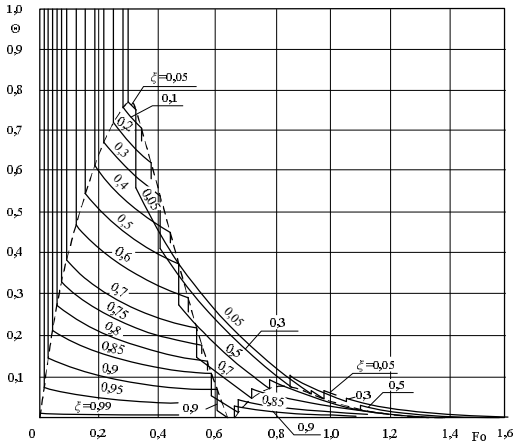


Рисунок 2.10. Распределение температуры $(\mathrm{Fo}_r = 0{,}1)$: - - - - - - – линия перемещения фронта прямой и обратной волн

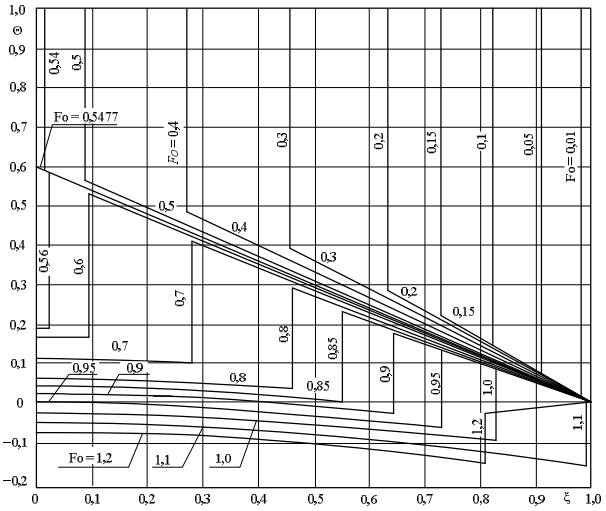


Рисунок 2.11. Изменение температуры $\left(\mathrm{Fo}_r = 0{,}3\right)$

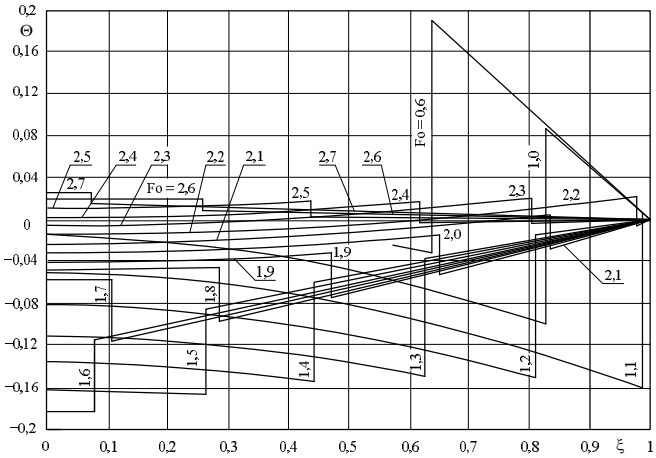


Рисунок 2.11, а. Изменение температуры $\left(\mathrm{Fo}_r = 0{,}3\right)$

Были проведены расчеты невязки уравнения (2.8) для значений числа Фурье, при котором имеют место отрицательные температуры. Такие расчеты были выполнены для $\mathrm{Fo} = \{\, 0{,}9;\, 1{,}1;\, 1{,}2;\, 2;\, 2{,}2 \,\}$, $\mathrm{Fo}_r = 0{,}1$. Их результаты приводят к заключению, что невязка соотношения (2.8) для всех чисел Фурье и для всей области пространственной переменной $0 \le \xi \le 0$ равна нулю.

Эти результаты согласуются с исследованиями, приведенными в работе [41]. В этой работе показано, что в соотношениях (2.2) и (2.3) для величины ε получаются уравнения

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} + k\varepsilon = 0\,; \tag{2.41}$$

$$\tau_r \frac{d^2\varepsilon}{d\tau^2} + \frac{d\varepsilon}{d\tau} + k\varepsilon = 0\,, \tag{2.42}$$

где k – коэффициент, характеризующий теплопроводность; ε – температура.

Решение уравнения (2.41) записывается в виде $\varepsilon = \varepsilon_0 \exp(-k\tau)$, где ε_0 – начальная разность температур. Отсюда следует, что ε экспоненциально уменьшается со временем и в пределе при $\tau \to \infty$ $\varepsilon \to 0$ (температура тел становится одинаковой).

Уравнение (2.42) по форме совпадает с уравнением (2.14). Согласно [41], уравнение (2.42) имеет как непрерывное затухание (соответствующее диффузному теплообмену), так и осциллирующее, соответствующее волновому распространению.

Расчеты функции $\varphi(\mathrm{Fo})$ по формуле (2.14) при различных значениях Fo_r даны на рисунке 2.12. Их анализ позволяет сделать вывод, что монотонное изменение функции $\varphi(\mathrm{Fo})$ наблюдается для малых величин Fo_r. Например, функция $\varphi(\mathrm{Fo})$ для всех $\mathrm{Fo}_r \le 0{,}001$ имеет плавное изменение, причем, ее кривые для данных значений чисел Fo_r имеют незначительные отличия, а при очень малых их величинах ($\mathrm{Fo}_r < 10^{-6}$) они почти совпадают. Однако для других (больших) чисел Fo_r ($\mathrm{Fo}_r > 0{,}01$) функция $\varphi(\mathrm{Fo})$ со временем изменяется ступенчато, осциллируя в область положительных и отрицательных значений.

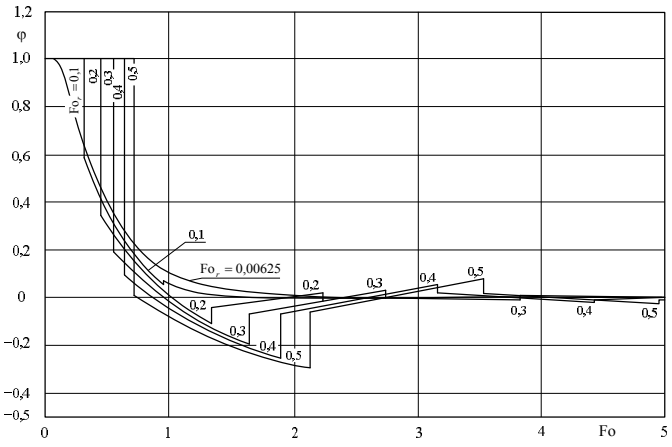


Рисунок 2.12. Изменение функции $\varphi(\mathrm{Fo})$ для различных значений Fo_r

Появление отрицательных температур применительно к решению гиперболического уравнения является известным свойством данного решения [41]. Следовательно, уравнение Максвелла – Каттанео (2.3) не обеспечивает адекватного распространения обратной тепловой волны.

Отметим, что сходимость ряда (2.23) находится в существенной зависимости от величины числа Фурье, для которого определяется распределение температуры в пределах толщины пластины. Например, применительно к задаче с исходными данными, приведенными выше, в области числа Фурье $0{,}1 \le \mathrm{Fo} < \infty$ сходимость обеспечивается всего несколькими членами этого ряда. При $0{,}0001 \le \mathrm{Fo} \le 0{,}1$ сходимость наблюдается при $10 \div 1000$ слагаемых ряда. Для чисел Фурье, когда наблюдаются скачки температуры, число слагаемых ряда (2.23), требуемых для сходимости, существенно увеличивается (от 10000 при $\mathrm{Fo} = 10^{-5}$ до 1000000 при $\mathrm{Fo} = 10^{-8}$). При еще большем уменьшении числа Фурье число слагаемых ряда (2.23) может быть равно нескольким миллионам.

Используя соотношение (2.3), определим распределение теплового потока $(\xi = 1)$. Формула (2.3) с учетом (2.7) будет

$$\frac{\partial \overline{q}}{\partial \mathrm{Fo}} + A\overline{q} + D(\mathrm{Fo}) = 0\,, \tag{2.43}$$

где $D(\mathrm{Fo}) = \dfrac{1}{Fo_r}\dfrac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}$; $\overline{q} = \dfrac{q\delta}{\lambda(t_0 - t_{\text{ст}})}$; $A = 1/\mathrm{Fo}_r$.

Интегрируя, находим

$$\overline{q}(\mathrm{Fo}) = [-\int D(\mathrm{Fo})\exp(A\mathrm{Fo})\mathrm{dFo} + C]\exp(-A\mathrm{Fo})\,, \tag{2.44}$$

C – постоянная интегрирования, которая находится из условия $\overline{q}(0) = 0$. Соотношение для нее будет

$$C = -\int D(\mathrm{Fo})\mathrm{dFo}\,.$$

Данные вычислений по формуле (2.44) (при $\mathrm{Fo}_r = 0{,}3$) приводятся на рисунке 2.13.

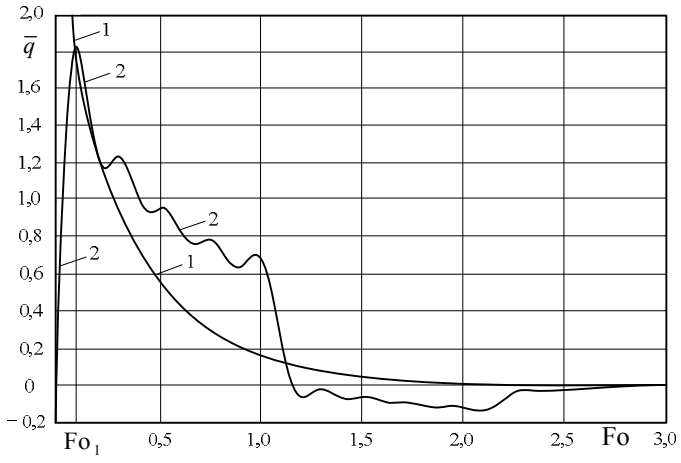


Рисунок 2.13. Графики изменения теплового потока $(\xi = 1)$ $\mathrm{Fo}_r = 0{,}3$: 1 – по (2.45); 2 – по (2.44)

Здесь же приведены результаты нахождения теплового потока согласно формуле (2.2). Эта формула в безразмерном виде записывается следующим образом

$$\overline{q} = -\partial\Theta(\xi, \mathrm{Fo})/\partial\xi\,, \tag{2.45}$$

где $\Theta(\xi, \mathrm{Fo})$ определялась по классическому точному решению уравнения (2.1)

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}\cdot 4}{r\pi}\cos(r\frac{\pi}{2}\xi)\exp(-\frac{r^2\pi^2}{4}\mathrm{Fo})\,. \tag{2.46}$$

Из анализа результатов можно сделать выводы:

1. Тепловой поток, согласно (2.45), на стенке пластины $(\xi = 1)$ устремляется к бесконечно большому значению (кривая 1 на рисунке 2.13). С увеличением времени $\overline{q}(\mathrm{Fo})$ он уменьшается и при $\mathrm{Fo} \approx 3$ становится равным нулевому значению.

2. Тепловой поток, согласно соотношению (2.44), представляющему решение уравнения (2.43), при $\mathrm{Fo}_r = 0{,}3$ $\xi = 1$ и $\mathrm{Fo} = 0$ равен нулю. При увеличении времени он увеличивается и при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1 \approx 0{,}08$ имеет максимальное значение $\overline{q} \approx 1{,}83$ (кривая 2 на рисунке 2.13). С дальнейшим увеличением числа Fo поток изменяется скачком, принимая в отдельных диапазонах числа Fo отрицательные величины. Амплитуда скачков при увеличении числа Fo уменьшается, вплоть до нулевого его значения $\overline{q}$ при $\mathrm{Fo} \approx 3$. Такое изменение теплового потока с отклонением в область отрицательных значений приводит к скачкам температуры в прямой и обратной волнах, а также и к отрицательным их величинам.

2.2 Разработка математической модели локально - неравновесного теплообмена с учетом пространственно - временно́й нелокальности

Как указывалось ранее (см. п. 2.1), необходимость вывода гиперболических уравнений объясняется парадоксами классической теории теплопроводности, связанными с решениями параболического уравнения, выведенного с использованием закона Фурье. С целью преодоления проблем классических решений посредством учета ускорения теплового потока было выведено гиперболическое уравнение (вида 2.4), которое включает вторую производную по времени. Решения этого уравнения при различных краевых условиях приводятся во многих публикациях [11, 16, 52, 53, 70, 71, 73, 89 – 91]. Однако их анализ позволяет заключить, что, устраняя одни парадоксы, оно приводит к другим. И, в частности, изменение температуры сопровождается движением тепловой волны, имеющей скачки температуры на ее фронте. В телах конечных размеров происходит обратная волна, имеющая противоположный знак. Наличие скачка в обратной волне приводит к появлению отрицательных температур. Данные факты свидетельствуют о нарушении 1-ого и 2-ого законов термодинамики.

Отсюда можно сделать вывод, что уравнение (2.4) неадекватно характеризует процесс теплообмена. Следовательно, формула (2.3), используя которую найдено уравнение (2.4), не содержит информацию, которая адекватна уравнению закона сохранения энергии, допуская уменьшение энтропии в неравновесном процессе. В связи с этим приведем вывод формулы (2.3), следуя [89, 91]. В этих работах на основе гипотезы о конечных скоростях диффузии теплоты и массы приводится обобщенная система уравнений Онзагера, которая в случае одномерной задачи теплопроводности приводит к уравнению [89]

$$J = L^{(r)} \frac{\partial J}{\partial \tau} + L\, X + L' \frac{\partial X}{\partial \tau}, \qquad (2.47)$$

где J − поток субстанции − тепловой поток; X − термодинамическая движущая сила ($X = \partial T / \partial x$); $L^{(r)}$, L, L' − постоянные коэффициенты переноса.

Пренебрегая производной от движущей силы X $\left(\partial X/\partial\tau = 0\right)$ [89, 91] (см. [89], стр. 290; [91], стр. 449), из соотношения (2.47) будем иметь формулу (2.3), где $L = -\lambda$; $L^{(r)} = -\tau_r$. Однако, если этой величиной $\partial X/\partial\tau$ не пренебрегать, то формула теплового потока принимает вид

$$q = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x} - \lambda\tau_r\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial\tau} - \tau_r\frac{\partial q}{\partial\tau}, \tag{2.48}$$

где $L' = -\lambda\,\tau_r$.

При выводе гиперболического уравнения с использованием формулы (2.48) используем уравнение теплового баланса

$$c\gamma\frac{\partial T}{\partial\tau} = -\frac{\partial q}{\partial x}, \tag{2.49}$$

где c – теплоемкость; γ – плотность.

Подставляя (2.48) в (2.49), будем иметь

$$c\gamma\frac{\partial T}{\partial\tau} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda\,\tau_r\frac{\partial^3 T}{\partial x^2\partial\tau} + \tau_r\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial\tau}. \tag{2.50}$$

Представим уравнение (2.50) в виде

$$c\gamma\frac{\partial T}{\partial\tau} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda\tau_r\frac{\partial^3 T}{\partial x^2\partial\tau} + \tau_r\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right). \tag{2.51}$$

Уравнение (2.51), учитывая (2.49), будет

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial\tau} + \tau_r\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial\tau^2} = a\left[\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} + \tau_r\frac{\partial^3 T(x,\tau)}{\partial x^2\partial\tau}\right]. \tag{2.52}$$

Следовательно, уравнение (2.52) выведено с учетом всех слагаемых уравнения, определяемого из сформулированной А.В. Лыковым обобщенной системы уравнений Онзагера.

Рассмотрим еще одно направление вывода соотношения (2.48), не связанное с формулой (2.47). В формуле (2.1) используем релаксационное слагаемое как для теплового потока, так и для величины $\partial T/\partial x$ [16, 41], то есть формулы для q и $\partial T/\partial x$ будем записывать в виде $q + \tau_r\partial q/\partial\tau$ и $\partial T/\partial x + \tau_r\partial^2 T/(\partial x\,\partial\tau)$. Отсюда формула (2.1) примет вид

$$q + \tau_r\frac{\partial q}{\partial\tau} = -\lambda\frac{\partial}{\partial x}\left(T + \tau_r\frac{\partial T}{\partial\tau}\right). \tag{2.53}$$

Формула (2.53) совпадает с соотношением (2.48).

Рассмотрим еще один метод получения уравнения (2.52), связанный с учетом релаксационных слагаемых для теплового потока и величины $\partial T/\partial x$. Формула (2.2) с учетом релаксационной поправки $\tau_r\partial^2 T/(\partial x\,\partial\tau)$ для величины $\partial T/\partial x$ будет

$$q = -\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(T + \tau_r \frac{\partial T}{\partial \tau} \right). \qquad (2.54)$$

Подставляя в уравнение (2.49) вместо q формулу (2.54), а вместо T – выражение, находящееся в скобках правой части формулы (2.54), находим

$$c\gamma\left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(T + \tau_r \frac{\partial T}{\partial \tau} \right) \right]. \qquad (2.55)$$

Уравнение (2.55) при $\lambda = \text{const}$ приводится к (2.52). Таким образом, уравнение (2.55) найдено в работе [16]. Автором этой работы производной 3-его порядка предложено пренебречь, что адекватно пренебрежению слагаемым $L' \partial X / \partial \tau$ в уравнении (2.47). Однако, как показали выполненные в диссертации исследования, учет члена с производной 3-его порядка в уравнении (2.52) приводит к значительному как к количественному, так и качественному расхождению результатов в сравнении со случаем, когда оно отсутствует.

Краевые условия для уравнения (2.52) для бесконечно протяженной пластины при симметричных краевых условиях 1-ого рода записываются так

$$T(x,0) = T_0; \quad (2.56) \qquad \frac{\partial T(x,0)}{\partial \tau} = 0; \qquad (2.57)$$

$$\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x} = 0; \quad (2.58) \qquad T(\delta,\tau) = T_{\text{ст}}, \qquad (2.59)$$

где δ – толщина пластины; T_0 – начальная температура; $t_{\text{ст}}$ – температура стенки при $x = \delta$.

Для нахождения точного решения задачи (2.52), (2.56) – (2.59) введем обозначения:

$$\Theta = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_0 - T_{\text{ст}}}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad \text{Fo} = \frac{a\tau}{\delta^2}; \quad \text{Fo}_r = \frac{a\tau_r}{\delta^2}. \qquad (2.60)$$

С учетом (2.18) задача (2.52), (2.56) – (2.59) приводится к виду

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} + \text{Fo}_r \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2} + \text{Fo}_r \frac{\partial^3 \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi^2 \partial \text{Fo}} \qquad (2.61)$$

$$(\text{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (2.62) \qquad \frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial \text{Fo}} = 0; \qquad (2.63)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad (2.64) \qquad \Theta(1, \text{Fo}) = 0. \qquad (2.65)$$

Решение задачи (2.61) – (2.65) разыскивается в виде

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \varphi(\text{Fo})\psi(\xi). \qquad (2.66)$$

Подставляя (2.66) в (2.61), получаем

$$\mathrm{Fo}_r \frac{d^2\varphi}{d\,\mathrm{Fo}^2} + (1+\mathrm{Fo}_r)\frac{d\,\varphi}{d\mathrm{Fo}} + \nu\varphi = 0\,; \tag{2.67}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\,\xi^2} + \nu\psi = 0\,, \tag{2.68}$$

где ν – постоянная.

Краевые условия для уравнения (2.68), согласно (2.64), (2.65), будут

$$\frac{d\,\psi(0)}{d\,\xi} = 0\,; \qquad \psi(1) = 0\,. \tag{2.69}$$

Решение задачи (2.68), (2.69) разыскивается в виде

$$\psi(\xi) = \cos\left(r\frac{\pi}{2}\xi\right) \quad (\mathrm{r} = 2\mathrm{k}-1\,; \quad \mathrm{k} = 1, 2, \ldots). \tag{2.70}$$

Соотношение (2.70) удовлетворяет условиям (2.69).

Подставляя (2.70) в (2.68), для определения собственных значений получаем формулу

$$\nu_k = r^2\pi^2/4 \quad (\mathrm{r} = 2\mathrm{k}-1; \quad \mathrm{k} = 1, 2, \ldots). \tag{2.71}$$

Характеристическое уравнение однородного уравнения (2.67) будет

$$\mathrm{Fo}_r z^2 + (1+\mathrm{Fo}_r\nu_k)z + \nu_k = 0 \quad (\mathrm{k} = 1, 2, \ldots). \tag{2.72}$$

Решение уравнения (2.72) для любого собственного значения имеет вид

$$z_{ik} = \frac{-(1+\mathrm{Fo}_r\nu_k) \pm \sqrt{(1+\mathrm{Fo}_r\nu_k)^2 - 4\mathrm{Fo}_r\nu_k}}{2\mathrm{Fo}_r} \quad (i = 1, 2; \quad k = 1, 2, \ldots). \tag{2.73}$$

Дискриминант D выражения (2.73) для любых ν_k и Fo_r меньше нуля, то есть $D = 4\,\mathrm{Fo}_r\,\nu_k - (1+\mathrm{Fo}_r\nu_k)^2 < 0$. Тогда из (2.73) для любого собственного значения ν_k будем иметь два корня z_{1k} и z_{2k} $(\mathrm{k} = 1, 2, \ldots)$.

Решение уравнения (2.67), учитывая найденные значения z_{1k} и z_{2k}, будет

$$\varphi_k(\mathrm{Fo}) = C_{1k}\exp(z_{1k}\mathrm{Fo}) + C_{2k}\exp(z_{2k}\mathrm{Fo}), \tag{2.74}$$

где $\mathrm{C_{jk}}$ $(\mathrm{j} = 1, 2\,; \quad \mathrm{k} = 1, 2, \ldots)$ – неизвестные коэффициенты.

Подставляя (2.70), (2.74) в (2.66), получаем

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \left[C_{1k}\exp(z_{1k}\mathrm{Fo}) + C_{2k}\exp(z_{2k}\mathrm{Fo})\right]\cos\left(r\frac{\pi}{2}\xi\right) \tag{2.75}$$

$$(\mathrm{r} = 2\mathrm{k}-1\,; \quad \mathrm{k} = 1, 2, \ldots)$$

Любое частное решение вида (2.75) удовлетворяет уравнению (2.61) и краевым условиям (2.64), (2.65), однако ни одним из частных решений не выполняются начальные условия (2.62), (2.63). Запишем сумму частных решений

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[C_{1k} \exp\left(z_{1k}\mathrm{Fo}\right) + C_{2k} \exp\left(z_{2k}\mathrm{Fo}\right) \right] \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi \right) \right\} \tag{2.76}$$

$$\left(r = 2k - 1\right).$$

Неизвестные коэффициенты C_{1k} и C_{2k} находятся из условий (2.62), (2.63). Подставляя (2.76) в (2.63), получаем

$$C_{1k} = -C_{2k} \frac{z_{2k}}{z_{1k}} \quad \left(\mathrm{k} = 1, 2, \ldots\right). \tag{2.77}$$

Подставляя (2.76) в (2.62), учитывая (2.77), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} \left(1 - \frac{z_{2k}}{z_{1k}} \right) \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi \right) = 1 \quad \left(r = 2k - 1\right). \tag{2.78}$$

Соотношение (2.78) является разложением единицы в ряд Фурье по собственным функциям задачи (2.68), (2.69). Умножая уравнение (2.78) на $\cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi \right)$ $\left(j = 2k - 1\right)$ и вычисляя интеграл в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$, получаем

$$\int_0^1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_{2k} \left(1 - \frac{z_{2k}}{z_{1k}} \right) \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi \right) - 1 \right] \cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi \right) d\xi = 0 \quad \left(j = r = 2k - 1\right). \tag{2.79}$$

Соотношение (2.79) из-за ортогональности косинусов будет

$$\int_0^1 C_{2k} \left(1 - \frac{z_{2k}}{z_{1k}} \right) \cos^2\left(r \frac{\pi}{2} \xi \right) d\,\xi - \int_0^1 \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi \right) d\xi = 0\,. \tag{2.80}$$

Вычисляя интегралы в (2.80), получаем

$$C_{2k} = \pm \frac{4}{r\pi} \Big/ \left(1 - \frac{z_{2k}}{z_{1k}} \right). \tag{2.81}$$

При найденных коэффициентах C_{1k} и C_{2k} $\left(\mathrm{k} = 1, 2, \ldots\right)$ точное решение задачи (2.61) – (2.65) находится из (2.76).

Непосредственная подстановка полученного решения (2.76) в основное дифференциальное уравнение, начальные и граничные условия позволяет сделать вывод, что все условия задачи (2.61) – (2.65) выполняются точно.

Результаты исследований для пластины по формуле (2.76) приводятся на рисунках 2.14 – 2.20. Из анализа следует, что при незначительных величинах числа Fo_r $\left(\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}\right)$ решения, получаемые по формуле (2.76), в области чисел $10^{-6} \le \mathrm{Fo} \le \infty$ совпадают с решением такой же задачи для параболического уравнения (2.1) (см. рисунки 2.14, 2.15). При $\mathrm{Fo} < 10^{-6}$ изменение температуры имеет некоторые особенности. Так, при $\mathrm{Fo} = 2 \cdot 10^{-8}$ температура тела

вблизи точки $\xi = 1$ скачком меняется от величины $\Theta\left(1;\ 2\cdot 10^{-8}\right) = 0$ на стенке (выполнение краевого условия 1-ого рода (2.65)) до $\Theta\left(0{,}99;\ 2\cdot 10^{-8}\right) = 0{,}88$ в точке $\xi = 0{,}99$, т. е. на «бесконечно малом» удалении от точки $\xi = 1$. Следовательно, при $\mathrm{Fo} = 2\cdot 10^{-8}$ по толщине нагретого слоя пластины $(0{,}95 \le \xi \le 1)$ температура изменяется от $\Theta = 0{,}9$ при $\xi = 0{,}99$ до $\Theta = 1$ при $\xi = 0{,}95$, тогда как при $\xi = 1$ $\Theta\left(1; 2\cdot 10^{-8}\right) = 0$. Такое же распределение температуры наблюдается и для других чисел $\mathrm{Fo} < 10^{-6}$. Для всех Fo, когда имеет место скачок температуры в окрестности точки $\xi = 1$, не наблюдается совпадение с решением параболического уравнения. С увеличением числа Fo_r скачки температуры в окрестности точки $\xi = 1$ имеют место уже для бóльших чисел Fo (см. рисунки 2.16 – 2.20). Для бóльших значений Fo совпадение с решением параболического уравнения наблюдается лишь для чисел Fo, при которых скачкообразное изменение температуры вблизи точки $\xi = 1$ отсутствует, т. е. температурные кривые исходят из точки $\Theta = 0$ при $\xi = 1$ (все кривые для $\mathrm{Fo} \ge 0{,}005$, указанные на рисунке 2.16).

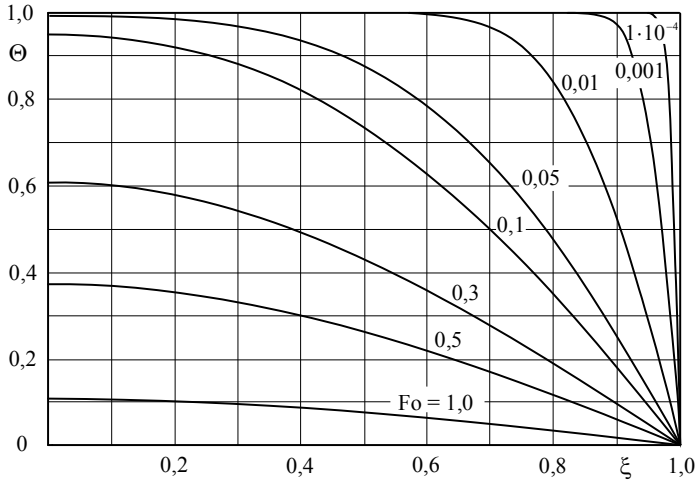


Рисунок 2.14. Изменение температуры: $\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$; $n = 10^4$ (n – число слагаемых ряда (2.76))

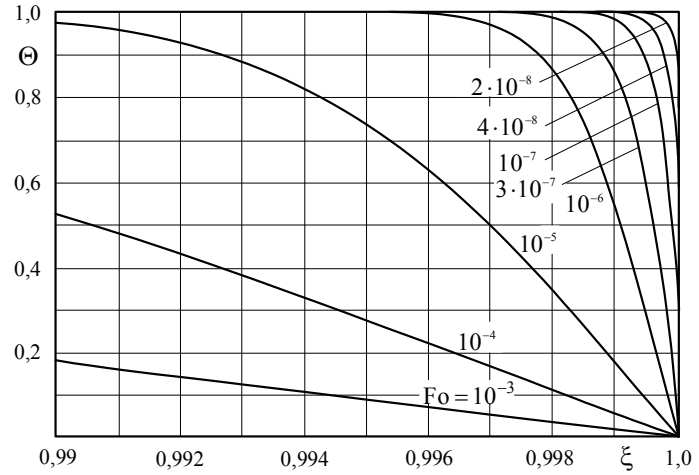


Рисунок 2.15. Изменение температуры: $\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$; $n = 10^5$

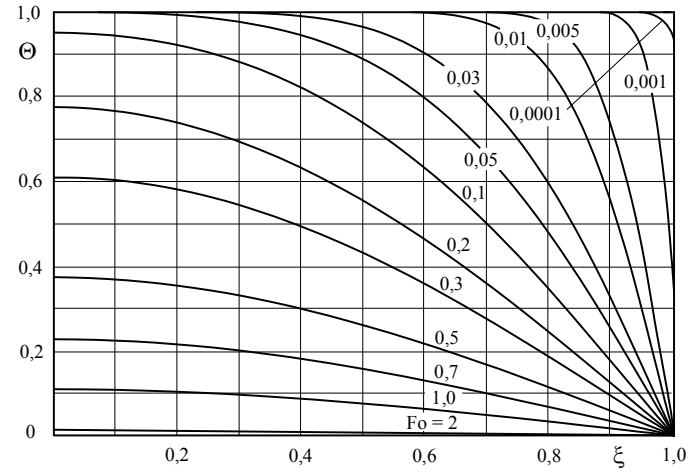


Рисунок 2.16. Изменение температуры: $\mathrm{Fo}_r = 10^{-3}$; $n = 10^4$

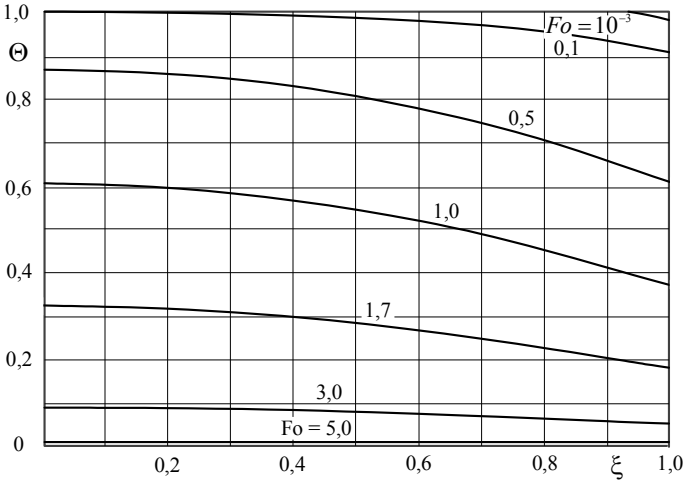


Рисунок 2.17. Изменение температуры: $\mathrm{Fo}_r = 1{,}0$; $n = 10^4$

С увеличением числа Fo_r кривые температур становятся пологими и при $\mathrm{Fo}_r > 20$, почти параллельными оси ξ. Скачки температуры вблизи точки $\xi = 1$ в данном случае наблюдаются для всех чисел Fo вплоть до стационарного режима.

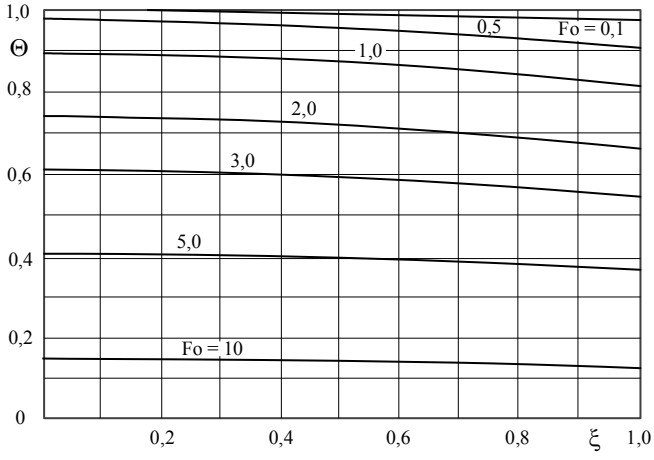


Рисунок 2.18. Изменение температуры: $\mathrm{Fo}_r = 5$; $n = 10^4$

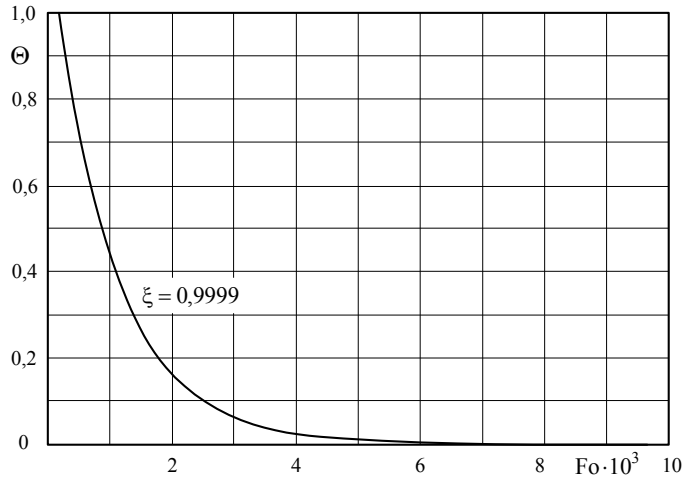


Рисунок 2.19. Распределение температуры во времени в точке $\xi = 0{,}9999$: $\mathrm{Fo}_1 = 10^{-3}$; $\mathrm{Fo}_2 = 10^{-20}$; $n = 10^3$

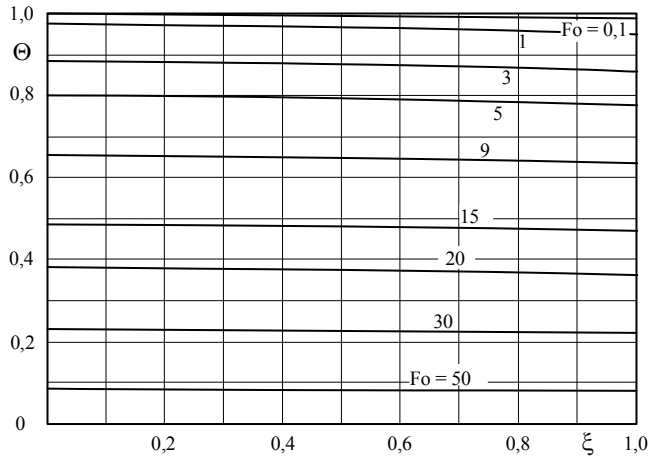


Рисунок 2.20. Изменение температуры: $\mathrm{Fo}_r = 20$; $n = 10^4$

На рисунке 2.20 приведено изменение температуры для $\xi = 0{,}9999$ при $\mathrm{Fo}_r = 10^{-3}$. Из анализа результатов можно сделать вывод, что в диапазоне $0 \le \mathrm{Fo} \le 0{,}2 \cdot 10^{-3}$ температура в точке $\xi = 0{,}9999$ совпадает с начальной $\Theta\left(0{,}9999; 0{,}2 \cdot 10^{-3}\right) = 1$. В диапазоне $0{,}2 \cdot 10^{-3} \le \mathrm{Fo} \le 7 \cdot 10^{-3}$ температура уменьшается от $\Theta\left(0{,}9999;\ 0{,}2 \cdot 10^{-3}\right) = 1$ до $\Theta\left(0{,}9999;\ 7 \cdot 10^{-3}\right) = 0$, и для всех $\mathrm{Fo} \ge 7 \cdot 10^{-3}$ температура здесь ($\xi = 0{,}9999$) принимает значение, равное нулю, определяемое граничным условием 1-ого рода (2.65). Следовательно, скачкообразное изменение температуры вблизи поверхности стенки пластины $\xi = 1$ происходит в диапазоне $0 \le \mathrm{Fo} \le 7 \cdot 10^{-3}$. Временно́й диапазон, где наблюдаются скачки, зависит от величины Fo_r. С ее возрастанием Fo_r он перемещается в направлении бóльших чисел Fo.

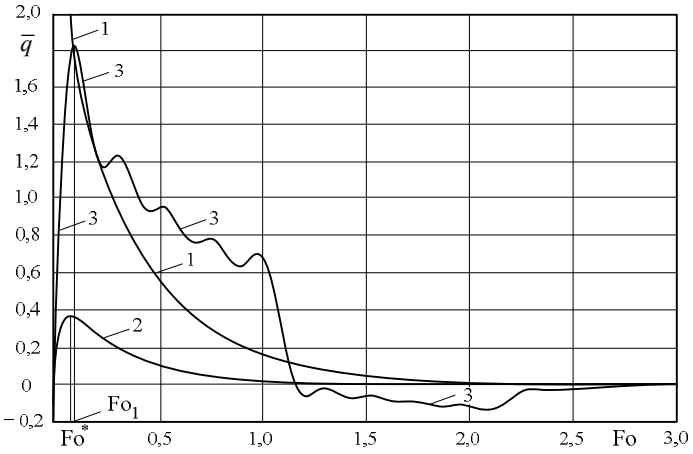


Рисунок 2.21. Распределение теплового потока $\xi = 1$, $\mathrm{Fo}_r = 0{,}3$: 1 – по (2.45); 2 − (2.83); 3 – по (2.83)

Величина $\mathrm{Fo}_r = a\,\tau_r / \delta^2$ при постоянных a и τ_r зависит лишь от величины δ. Оценим толщину слоя пластины и времени τ, для которых наблюдаются скачки вблизи точки $\xi = 1$. Например, для алюминия $\tau_r = 10^{-11}\,c$ [90]; $a = 91{,}3 \cdot 10^{-6}\ м^2/c$. Тогда для пластины толщиной $\delta = 0{,}1\ мм$ $\mathrm{Fo}_r = 0{,}913 \cdot 10^{-7}$. Исходя из выполненных по (2.76) расчетов, диапазон времени, для которого наблюдаются скачки температуры вблизи точки $\xi = 1$ составляет $0 \le \mathrm{Fo} \le 5 \cdot 10^{-7}$ или $0 \le \tau \le 0{,}54 \cdot 10^{-10}\,c$. Следовательно, скачкообразное изменение прекращается уже при времени $\tau = 0{,}54 \cdot 10^{-10}\,c$. Фронт волны в течение этого времени перемещается на величину $\Delta\xi = 0{,}00018\ мм$ (0,18 % от толщины пластины $\delta = 0{,}1\ мм$). Следовательно, для металлов релаксационные слагаемые в уравнении теплопроводности необходимо учитывать лишь для процессов, время изменения которых составляет $10^{-10} - 10^{-9}\,c$. За пределами данного времени решения, получаемые по соотношению (2.76), полностью идентичны решению параболического уравнения.

Отметим, что для некоторых материалов величина коэффициентов релаксации τ_r значительно бóльше, чем τ_r для металлов. К ним относятся газы (например, для азота $\tau_r = 10^{-9}\,c$), жидкий гелий − $\tau_r = 10^{-3}\,c$ [126] и др. Для таких сред числа Fo_r могут быть столь большими, что скачкообразное изменение температуры вблизи точки $\xi = 1$ будет наблюдаться для всего диапазона времени нестационарного процесса (см. рисунки 2.17 – 2.20). В наибольшей степени это проявляется в телах малой толщины (тонкие пленки) ввиду того, что при уменьшении толщины $\mathrm{Fo}_r = a\tau_r / \delta^2$ возрастает. Как следует из рисунков 2.17 – 2.20, теплообмен в таких телах протекает практически без градиента температуры по ширине пластины, т. е. температура изменяется лишь от времени. Скорость волны для них $w = \sqrt{a/\tau_r} \to 0$, а скорость изотермы $w_т = d\xi / d\mathrm{Fo} \to \infty$. Отметим, что краевое условие 1-ого

рода (2.65) при любом Fo_r выполняется. Скачки температуры происходят на некотором малом удалении от точки $\xi = 1$.

Детальные исследования позволили сделать вывод, что решение (2.76) не описывает скачки температуры, а также не обнаруживаются и их отрицательные величины.

Согласно формуле (2.48), найдем тепловой поток на стенке $(\xi = 1)$. Эта формула в безразмерном виде (с учетом (2.60)) будет

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathrm{Fo}} + A\bar{q} + B(\mathrm{Fo}) = 0, \tag{2.82}$$

где $\bar{q} = \dfrac{q\delta}{\lambda(t_0 - t_{\text{ст}})}$ – безразмерный тепловой поток;

$$A = 1/\mathrm{Fo}_{\text{г}}; \qquad B(\mathrm{Fo}) = \frac{1}{\mathrm{Fo}_{\text{г}}}\frac{\partial \Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial \xi\, \partial \mathrm{Fo}}.$$

Интегрируя (2.82), находим

$$\bar{q}(\mathrm{Fo}) = [-\int B(\mathrm{Fo}) \exp(A\mathrm{Fo})\mathrm{dFo} + C]\exp(-A\mathrm{Fo}), \tag{2.83}$$

где C – константа интегрирования, для определения которой используется начальное условие $\bar{q}(0) = 0$:

$$C = -\int B(\mathrm{Fo})\mathrm{dFo}. \tag{2.84}$$

Соотношение (2.3) (в безразмерном виде) для поверхности пластины $\xi = 1$ имеет вид

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathrm{Fo}} + A\bar{q} + D(\mathrm{Fo}) = 0, \tag{2.85}$$

где $D(\mathrm{Fo}) = \dfrac{1}{Fo_r}\dfrac{\partial \Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial \xi}$.

Решение уравнения (2.85) и формула для константы интегрирования приводятся соответственно к виду (2.83) и (2.84), где $B(\mathrm{Fo})$ необходимо заменить на $D(\mathrm{Fo})$.

Результаты исследований по соотношению (2.83) (при $\mathrm{Fo}_{\text{г}} = 0{,}3$) в случае, если тепловой поток находится по соотношениям (2.82) и (2.85), приведены на рисунке 2.21. Здесь же приведены также данные расчетов по соотношению (2.2), которое (в безразмерном виде) будет

$$\bar{q} = -\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})/\partial\xi, \tag{2.86}$$

где $\Theta(\xi,\mathrm{Fo})$ находилась по классическому точному решению уравнения (2.1) вида (2.46).

Из анализа результатов расчетов можно заключить: тепловой поток, согласно (2.86), на стенке $(\xi = 1)$ при $\mathrm{Fo} = 0$ устремляется к бесконечно большому значению (кривая 1 на рисунке 2.21); с течением времени $\bar{q}(\mathrm{Fo})$ уменьшается и при $\mathrm{Fo} \approx 3$ становится равным нулю.

Тепловой поток, согласно соотношению (2.83), представляющему решение уравнения (2.82), при $\mathrm{Fo}_r = 0{,}3$ $\xi = 1$ и $\mathrm{Fo} = 0$ равен нулю. С возрастанием времени он увеличивается и при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}^* \approx 0{,}072$ имеет максимальное значение $\bar{q} \approx 0{,}37$ (кривая 2 на рисунке 2.21). При еще большем возрастании времени он уменьшается и при $\mathrm{Fo} \approx 3$ оказывается равным нулю. С увеличением Fo_r максимальное значение $\bar{q}$ (как следует из формулы (2.83)), уменьшается и в пределе при $\mathrm{Fo}_r \to \infty$ $\bar{q} \to 0$.

Тепловой поток, определяемый по формуле (2.83), в случае, если $B(\mathrm{Fo})$ заменено на $D(\mathrm{Fo})$ (решение уравнения (2.85)), при $\mathrm{Fo}_r = 0{,}3$ описывается линией 3 (на рисунке 2.21). Здесь тепловой поток на стенке $\xi = 1$, имея нулевую величину при $\mathrm{Fo} = 0$, с увеличением числа Fo возрастает до максимального значения $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1 \approx 0{,}08$ и равного $\bar{q} \approx 1{,}83$. С дальнейшим увеличением числа Fo тепловой поток имеет скачкообразное изменение, принимая для некоторых чисел Fo отрицательные значения. Амплитуда скачков при увеличении числа Fo уменьшается, принимая нулевое значение $\bar{q}$ при $\mathrm{Fo} \approx 3$. Корреляция теплового потока в области его отрицательных значений приводит к скачкам температуры в прямой и обратной волнах, а также и к отрицательным ее значениям.

Полученные результаты приводят к выводу о том, что мгновенное принятие граничного условия первого рода не представляется возможным. Так как задание граничных условий первого рода эквивалентно заданию бесконечного значения коэффициента теплоотдачи в граничных условиях третьего рода, следовательно, в любых реальных условиях теплообмена коэффициент теплоотдачи не может превысить некоторого макимального значения. Для его оценки запишем уравнение конвективного теплообмена

$$-\lambda\, \partial t(\delta, \tau)/\partial x = \alpha(t - t_{\text{ср}}),$$

где α – коэффициент теплоотдачи; $t_{\text{ср}}$ – температура среды.

С целью получения последней формулы в безразмерном виде обозначим $\Theta(1, \mathrm{Fo}) = (t - t_{ср})/(t_0 - t_{ср})$. С учетом этого обозначения и обозначений (2.60), уравнение теплообмена принимает вид

$$-\partial\, \Theta(1, \mathrm{Fo})/\partial\, \xi = \mathrm{Bi}\Theta(1, \mathrm{Fo}), \qquad (2.86, \text{а})$$

где $\mathrm{Bi} = \alpha\delta/\lambda$.

Принимая $\xi = 0{,}99$ и выражая Bi из (2.86, а), получаем

$$\mathrm{Bi} = -\frac{\partial\, \Theta(0{,}9999; \mathrm{Fo})}{\partial\, \xi} / \Theta(0{,}9999; \mathrm{Fo}). \qquad (2.87)$$

Из (2.87) находится максимальное число $\mathrm{Bi} = \mathrm{Bi}_{max}$, положив время $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}^*$ (см. рисунок 2.21), когда тепловой поток на стенке имеет наибольшую величину, превышение которой не представляется возможным при любых условиях теплообмена с окружающей средой при данном значении Fo_r.

Для $\mathrm{Fo}_r = 0{,}3$, $\mathrm{Fo}^* = 0{,}072$ из формулы (2.87) получаем $\mathrm{Bi}_{max} = 0{,}89$. Так, для стальной пластины ($\lambda = 49\ Bm/(мК)$), имеющей толщину $\delta = 0{,}01\ м$, максимальный коэффициент теплоотдачи составляет $\alpha_{max} = \mathrm{Bi}\lambda/\delta = 4005\ Bm/(м^2 \cdot К)$. Таким образом, механизм теплопроводности при учете релаксационных свойств тел ограничивает количество тепла, отводимого от системы.

На основе результатов выполненных исследований можно заключить:

1. Гиперболическое уравнение, найденное на основе формулы Максвелла – Каттанео для теплового потока, не адекватно уравнению теплового баланса вследствие неучета релаксации величины $\partial T/\partial x$ в формуле закона Фурье.

2. С учетом ускорения во времени как теплового потока, так и величины $\partial T/\partial x$, получено дифференциальное уравнение, включающее вторую производную по времени и третью смешанную производную по декартовой координате и времени.

3. Детальные исследования аналитического решения найденного уравнения приводят к выводу, что изменение температуры зависит от числа Fo_r. Так, при малых его величинах решение краевой задачи (2.61) – (2.65) адекватно решению параболического уравнения. При увеличении числа Fo_r температура описывается прямыми линиями, параллельными оси ξ, со скачком вблизи $\xi = 1$. При этом краевое условие 1-ого рода (2.65) выполняется для всего диапазона времени – скачок наблюдается лишь на бесконечно малом удалении от точки $\xi = 1$.

4. Решение (2.76) не приводит к скачкам температуры внутри среды, а также и к отрицательным их значениям.

5. Коэффициент конвективной теплоотдачи не может быть выше некоторой максимальной для данных конкретных условий (определяемых толщиной тела и его теплофизическими свойствами) величины, независимо от каких бы то ни было условий теплообмена с окружающей средой.

2.3 Дифференциальные уравнения локально - неравновесного теплообмена с производными высокого порядка

Использование условия локального термодинамического равновесия и гипотезы сплошной среды позволяет считать, что законы механики и переноса справедливы как для всей

системы, так и для любой ее малой части. Для таких систем в интегральных законах сохранения путем приближения к нулю пределов интегрирования можно выполнять предельный переход и получать уравнения в частных производных, являющихся математической записью законов сохранения в дифференциальной форме. На этом теоретическом основании в классической термодинамике необратимых процессов выводятся параболические уравнения переноса (теплопроводности, диффузии, энергии и др.), являющиеся локальными, то есть, не учитывающими временну́ю и пространственную нелокальность.

Следует, однако, заметить, что любой процесс переноса является нелокальным, так как перенос энергии (теплоты, массы, импульса и проч.) из одной точки среды в другую происходит не мгновенно, а за некоторый конечный промежуток времени. Следовательно, принимая условие локального термодинамического равновесия ($\tau << t_0$; $h << L$), конечной скоростью процесса переноса пренебрегается. В случае, если $\tau \approx t_0$ и $h \approx L$, процесс переноса будет нелокальным и для его описания необходимо использовать локально - неравновесную модель переноса. Применительно к таким моделям в рациональной термодинамике вводится понятие тепловой памяти, рассматриваются среды скоростного типа. В расширенной необратимой термодинамике, волновой теории Дьярмати [37], а также в некоторых других вариантах локально - неравновесных теорий, полагается, что локальная удельная энтропия является функцией не только экстенсивных параметров (локальной плотности, внутренней энергии, удельного объема, локальной концентрации и др.), но и их диссипативных потоков (теплового потока, потока массы и др.) – «скоростных переменных», учитывающих инерционные свойства при достижении локального равновесия. Уравнения локально - неравновесного переноса могут быть найдены также из уравнения Больцмана, молекулярно - кинетическими методами, с использованием метода случайных блужданий и др. [104 – 107].

Так как в классической термодинамике температура находится лишь для равновесных или локально - равновесных систем (абсолютная температура), необходимо дать понятие температуры для локально - неравновесного состояния. В случае, когда состояние системы находится в зависимости от скорости изменения температуры, абсолютная температура заменяется на «термодинамическую», которая представляет собой функцию абсолютной температуры и скорости ее изменения [105]. Если скорость изменения абсолютной температуры равна нулю, то обе эти температуры совпадают. Следовательно, локальная неравновесность системы характеризуется величиной отклонения термодинамической температуры от абсолютной и эта величина пропорциональна скорости изменения абсолютной температуры. В работах [105, 106] показано, что в случаях, когда величина отклонения локально - неравновесной (термодинамической) температуры от локально - равновесной (абсолютной) меньше последней, локально - неравновесная температура может рассматриваться как локально - равновесная, но с учетом ее

отклонения от равновесности. Величина этого отклонения оценивается различного вида обобщенными формулами закона Фурье. Для их получения формулу классического закона Фурье

$$q = -\lambda \partial T / \partial x \tag{2.88}$$

представим в виде комбинации производных теплового потока и скалярной величины градиента температуры по времени в произведении с соответствующими коэффициентами релаксации

$$q + \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \cdots = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial t^2} + \cdots \right), \tag{2.89}$$

где q – скалярная величина плотности теплового потока, $Вт/м^2$; t – время, $с$; x – координата, $м$; τ_1 – коэффициент релаксации теплового потока, $с$; λ – коэффициент теплопроводности, $Вт/(м \cdot К)$; τ_2 – коэффициент релаксации градиента температуры, $с$.

Формула (2.89) представляет соотношение, в котором релаксируются и тепловой поток q, и скалярная величина градиента температуры $\partial T / \partial x$, и, следовательно, в ней учитывается пространственно - временна́я нелокальность. Из (2.89) следует, что и тепловой поток, и скалярная величина градиента температуры, не могут изменяться мгновенно, а лишь с некоторым запаздыванием (ускорением) во времени, оцениваемым величинами коэффициентов релаксации τ_1 и τ_2. Следовательно, формула (2.89), по сути, представляет собой выражение полного закона сохранения, в котором пространственно - временно́е изменение теплового потока и скалярной величины градиента температуры взаимосогласовано, что наиболее адекватно протеканию реальных теплофизических процессов.

Для вывода дифференциальных уравнений локально - неравновесного теплообмена соотношение (2.89) подставим в уравнение теплового баланса

$$c\rho \partial T / \partial t = -dq / dx, \tag{2.90}$$

где c – теплоемкость, $Дж/(кг \cdot К)$; ρ – плотность, $кг/м^3$.

В зависимости от принятого числа членов разложения в (2.89) будем получать различного вида уравнения локально - неравновесного теплообмена. Если, например, ограничиться двумя первыми слагаемыми в левой части соотношения (2.89) и одним слагаемым – в правой, то получим формулу теплового потока

$$q = -\lambda \partial T / \partial x - \tau_1 \partial q / \partial t, \tag{2.91}$$

известную как формула Максвелла – Каттанео, в которой не учитывается пространственная нелокальность и, следовательно, она не представляет полный закон сохранения [41]. Расчеты по формуле (2.91) показывают, что тепловой поток может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Если ограничиться двумя членами правой и левой части соотношения (2.89), то есть учесть как временну́ю, так и пространственную нелокальность, уравнение теплового потока будет

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda\tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t}. \qquad (2.92)$$

Как показывают расчеты, формула (2.92) не приводит к отрицательным величинам теплового потока и, таким образом, она представляет полный закон сохранения [41].

Отметим, что формулы (2.91), (2.92) могут быть найдены из предложенной Лыковым А.В. обобщенной системы уравнений Онзагера вида [89 – 91]

$$J_i = L_i^{(r)} \frac{\partial J_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \left(L_{ik} X_k + L'_{ik} \frac{\partial X_k}{\partial t} \right), \qquad (2.93)$$

где J_i – поток субстанции (тепла, массы и т. д.); X_k – движущие силы (для одномерной задачи $X = \partial T / \partial x$); $L_i^{(r)}$, L_{ik}, L'_{ik} – постоянные коэффициенты.

Если в соотношении (2.93) производной по времени от термодинамической движущей силы ($L'_{ik} \partial X_k / \partial t = 0$) пренебречь и положить $L_i^{(r)} = -\tau_1$, $L_{ik} = -\lambda$, то из (2.93) будем иметь формулу (2.91). Если величиной $L'_{ik} \partial X_k / \partial t$ не пренебрегать, то, положив $L'_{ik} = -\lambda\tau_1$, для теплового потока получим формулу (2.92). Следовательно, формула (2.92) получается в случае, если учитывать все члены обобщенной системы уравнений Онзагера. Совпадение формулы (2.92) с соотношением (2.93) свидетельствует о том, что в (2.92) учитываются перекрестные эффекты, связанные с одновременным учетом пространственной и временно́й неравновесности и их взаимного влияния в нелокальном процессе переноса теплоты.

Подставляя (2.88), (2.91), (2.92) в (2.90), соответственно получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}; \qquad (2.94)$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}; \qquad (2.95)$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} = a \left[\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \tau_1 \frac{\partial^3 T(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right], \qquad (2.96)$$

где $a = \lambda / (c\rho)$ – коэффициент температуропроводности, $м^2 / с$.

Уравнение (2.94) представляет классическое параболическое уравнение теплопроводности, являющееся локальным, так как выведено без учета временно́й и пространственной локальной неравновесности. Уравнение (2.95) является частично нелокальным, так как в нем учитывается лишь временна́я неравновесность (путем релаксации теплового потока). Уравнение (2.96) получено путем релаксации и теплового потока, и скалярной величины градиента температуры и, следовательно, в нем учитывается как

временна́я, так и пространственная нелокальность. В связи с чем, данное уравнение наиболее полно описывает локально - неравновесный теплоперенос.

Формула (2.89) в случае, если ограничиться тремя членами правой и левой частей, будет

$$q = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial t^2}\right) - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t} - \tau_2^2 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}. \qquad (2.97)$$

Подставляя (2.97) в уравнение теплового баланса (2.90), получим

$$c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^3 T}{\partial x \partial t^2}\right) + \tau_1 \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^3 q}{\partial x \partial t^2}. \qquad (2.98)$$

Продифференцируем уравнение (2.90) один раз и дважды по переменной t:

$$c\gamma \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial t}; \quad (2.99) \qquad c\gamma \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} = -\frac{\partial^3 q}{\partial x \partial t^2}. \qquad (2.100)$$

Уравнение (2.98) с учетом (2.99), (2.100) будет

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \tau_2^2 \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tau_1 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial t^2}\right). \qquad (2.101)$$

Найдем точное решение уравнения (2.101) для пластины при краевых условиях 1-ого рода. Краевые условия здесь будут

$$T(x,0) = T_0; \quad (2.102) \qquad \frac{\partial T(x,0)}{\partial t} = 0; \quad (2.103) \qquad \frac{\partial^2 T(x,0)}{\partial t^2} = 0; \qquad (2.104)$$

$$T(0,t) = T_{ст}; \quad (2.105) \qquad T(\delta,t) = T_{ст}, \qquad (2.106)$$

где T_0 – начальная температура; $T_{ст}$ – температура стенки; δ – половина толщина пластины.

Обозначим:

$$\Theta = \frac{T - T_{ст}}{T_0 - T_{ст}}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad \mathrm{Fo} = \frac{a\,t}{\delta^2}; \quad \mathrm{Fo}_1 = \frac{a\,\tau_1}{\delta^2}; \quad \mathrm{Fo}_2 = \frac{a^2\,\tau_2^2}{\delta^4}, \qquad (2.107)$$

где Θ – безразмерная температура; ξ – относительная координата; Fo – безразмерное время; Fo_1, Fo_2 – безразмерные коэффициенты релаксации.

С учетом (2.107) задача (2.101) – (2.106) будет

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \mathrm{Fo}^2} + \mathrm{Fo}_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \mathrm{Fo}^3} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \mathrm{Fo}_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_2 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial \xi^2 \partial \mathrm{Fo}^2} \quad (\mathrm{Fo} > 0;\ 0 < \xi < 1); \qquad (2.108)$$

$$\Theta(\xi,0) = 1; \quad (2.109) \qquad \frac{\partial \Theta(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}} = 0; \quad (2.110) \qquad \frac{\partial^2 \Theta(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}^2} = 0; \qquad (2.111)$$

$$\Theta(0,\mathrm{Fo}) = 0; \quad (2.112) \qquad \Theta(1,\mathrm{Fo}) = 0. \qquad (2.113)$$

Согласно методу Фурье, решение разыскивается в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \varphi(\mathrm{Fo})\psi(\xi) \quad (r = 2k - 1; \quad k = 1, 2, \ldots), \qquad (2.114)$$

где $\varphi(\mathrm{Fo})$ – неизвестная функция, зависящая лишь от времени; $\psi(\xi)=\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)$ – собственные функции задачи Штурма – Лиувилля

$$\partial^2\psi(\xi)/\partial\xi^2+\nu\psi(\xi)=0;\qquad \psi(0)=\psi(1)=0, \tag{2.115}$$

где $\nu_k=r^2\pi^2\ \ (r=2k-1;\quad k=1,2,\ldots)$ – собственные числа.

Соотношение (2.114) удовлетворяет условиям (2.112), (2.113). Подставляя (2.114) в (2.108), разделив полученное соотношение на $\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)$, находим

$$\mathrm{Fo}_2\varphi'''(\mathrm{Fo})+(\mathrm{Fo}_1+\mathrm{Fo}_2\nu_k)\varphi''(\mathrm{Fo})+(1+\mathrm{Fo}_1\nu_k)\varphi'+\nu\varphi=0, \tag{2.116}$$

где $\varphi'(\mathrm{Fo})$, $\varphi''(\mathrm{Fo})$, $\varphi'''(\mathrm{Fo})$ – 1-ая, 2-ая и 3-я производные от функции $\varphi(\mathrm{Fo})$ по времени.

Характеристическое уравнение уравнения (2.116) будет

$$\mathrm{Fo}_2z^3+(\mathrm{Fo}_1+\nu_k\mathrm{Fo}_2)z^2+(1+\nu_k\mathrm{Fo}_1)z+\nu_k=0.\ \ (k=\overline{1,\infty}) \tag{2.117}$$

Корни алгебраического уравнения 3-ей степени для любого собственного значения

$$z_1=0{,}5\left(-\mathrm{Fo}_1+\sqrt{\mathrm{Fo}_1^2-4\mathrm{Fo}_2}\right)\Big/\mathrm{Fo}_2; \tag{2.118}$$

$$z_2=0{,}5\left(-\mathrm{Fo}_1-\sqrt{\mathrm{Fo}_1^2-4\mathrm{Fo}_2}\right)\Big/\mathrm{Fo}_2; \tag{2.119}$$

$$z_{3k}=-\nu_k.$$

Если в (2.118), (2.119) подкоренное выражение

$$D=(4\mathrm{Fo}_2-\mathrm{Fo}_1^2)>0,$$

то получаем следующие комплексные корни:

$$z_1=e+i\beta;\qquad z_2=e-i\beta,$$

где $i=\sqrt{-1}$; $e=-0{,}5\mathrm{Fo}_1/\mathrm{Fo}_2$; $\beta=0{,}5\left(\sqrt{4\mathrm{Fo}_2-\mathrm{Fo}_1^2}\right)\Big/\mathrm{Fo}_2$.

Частные решения для уравнения (2.116) записываются в виде

$$\varphi_1=\exp(e+i\beta)\,\mathrm{Fo}\ ;\quad \varphi_2=\exp(e-i\beta)\,\mathrm{Fo};\quad \varphi_{3k}=\exp(-\nu_k\mathrm{Fo}). \tag{2.120}$$

Используя частные решения, найдем интеграл уравнения (2.116):

$$\varphi_k(\mathrm{Fo})=C_{1k}\exp[(e+i\beta)\,\mathrm{Fo}]+C_{2k}\exp[(e-i\beta)\,\mathrm{Fo}]+C_{3k}\exp(-\nu_k\mathrm{Fo}), \tag{2.121}$$

где $C_{jk}\ \ (j=1,2,3;\quad k=1,2,\ldots)$ – некоторые постоянные.

Соотношение (2.121) можно представить в виде

$$\varphi_k(\mathrm{Fo})=\exp(e\,\mathrm{Fo})[C_{1k}\exp(i\beta\mathrm{Fo})+C_{2k}\exp(-i\beta\mathrm{Fo})]+C_{3k}\exp(-\nu_k\mathrm{Fo}). \tag{2.122}$$

С учетом формул Эйлера

$$\exp(is)=\cos s+i\sin s;\qquad \exp(-is)=\cos s-i\sin s$$

соотношение (2.122) будет

$$\varphi_{\mathrm{k}}(\mathrm{Fo}) = \exp(e\,\mathrm{Fo})\left[C_{1k}\left(\cos(\beta\mathrm{Fo}) + i\sin(\beta\mathrm{Fo})\right) + C_{2k}\left(\cos(\beta\mathrm{Fo}) - i\sin(\beta\mathrm{Fo})\right)\right] +$$

$$+ C_{3k}\exp(-\nu_k\mathrm{Fo}) = \exp(e\mathrm{Fo})\left[(C_{1k} + C_{2k})\cos\beta\mathrm{Fo} -\right.$$

$$\left. - i(C_{2k} - C_{1k})\sin(\beta\mathrm{Fo})\right] + C_{3k}\exp(-\nu_k\mathrm{Fo}). \qquad (2.123)$$

Обозначим $B_{1k} = C_{1k} + C_{2k}$; $\quad B_{2k} = i(C_{2k} - C_{1k})$.

С учетом введенных обозначений решение уравнения (2.116) принимает вид

$$\varphi_k(\mathrm{Fo}) = \exp(e\mathrm{Fo})\left[B_{1k}\cos(\beta\mathrm{Fo}) - B_{2k}\sin(\beta\mathrm{Fo})\right] + C_{3k}\exp(-\nu_k\mathrm{Fo}). \qquad (2.124)$$

Подставляя (2.124) в (2.114), получаем

$$\Theta_k(\xi, \mathrm{Fo}) = \left\{\left[\exp(e\mathrm{Fo})\left[B_{1k}\cos(\beta\mathrm{Fo}) - B_{2k}\sin(\beta\mathrm{Fo})\right] +\right.\right.$$

$$\left.\left. + C_{3k}\exp(-\nu_k\mathrm{Fo})\right\}\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)\right. . \qquad (2.125)$$

Любое частное решение (2.125) является решением уравнения (2.108), удовлетворяющим также и краевым условиям (2.112), (2.113), однако ни одно из них не удовлетворяет условиям (2.109) – (2.111). Найдем сумму этих частных решений:

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\exp(e\mathrm{Fo})\left(B_{1k}\cos(\beta\mathrm{Fo}) - B_{2k}\sin(\beta\mathrm{Fo})\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + C_{3k}\exp(-\nu_k\mathrm{Fo})\right]\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)\right\} \quad (r = 2k-1;\ \ k = 1, 2, \ldots). \qquad (2.126)$$

Для определения постоянных B_{1k}, B_{2k} и C_{3k} будем использовать условия (2.109) – (2.111). Подставляя (2.126) в (2.110), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(eB_{1k} - \beta B_{2k} - \nu_{\mathrm{k}}C_{3\mathrm{k}})\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right) = 0,$$

откуда имеем

$$B_{1k} = -(\nu_k C_{3k} + \beta B_{2k})/e. \qquad (2.127)$$

Подставляя (2.126) в (2.111), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[(e^2 - \beta^2)B_{1k} + 2e\beta B_{2\mathrm{k}} + \nu_k^2 C_{3k}\right]\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right) = 0.$$

Отсюда с учетом (2.127) находим

$$B_{2k} = -\frac{\nu_k C_{3k}\left[e(\nu_k - e) + \beta^2\right]}{\beta(e^2 + \beta^2)}. \qquad (2.128)$$

Для нахождения постоянных C_{3k} составим невязку условия (2.109) и потребуем ее ортогональности ко всем собственным функциям $\psi(\xi) = \cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right)$:

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(B_{1k} + C_{3k}) \cos\left(r \frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right) \cos\left(j \frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right) \right] d\xi =$$

$$= \int_0^1 \cos\left(j \frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right) d\xi = 0 \quad (j = r = 2k-1). \tag{2.129}$$

Соотношение (2.129) с учетом ортогональности косинусов приводится к виду

$$\int_0^1 (B_{1k} + C_{3k}) \cos^2\left(r \frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right) d\xi - \int_0^1 \cos\left(r \frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right) d\xi = 0. \tag{2.130}$$

Вычисляя интегралы в (2.130), учитывая (2.127) и (2.128), получаем

$$C_{3k} = \frac{4e}{r\pi} \Bigg/ \left\{ \nu_k + \frac{\nu_k \left[e(\nu_k - e) + \beta^2 \right]}{e^2 + \beta^2} + e \right\}. \tag{2.131}$$

Если в (2.118), (2.119) $D = (4\mathrm{Fo}_2 - \mathrm{Fo}_1^2) < 0$, то корни z_1 и z_2 будут отрицательными числами. Интеграл уравнения (2.116) в этом случае принимает вид

$$\varphi_k(\mathrm{Fo}) = D_{1k} \exp(z_1 \mathrm{Fo}) + D_{2k} \exp(z_2 \mathrm{Fo}) + D_{3k} \exp(z_{3k} \mathrm{Fo}), \tag{2.132}$$

где D_{1k}, D_{2k}, D_{3k} – постоянные коэффициенты.

Подставляя (2.132) в (2.114) и составляя сумму частных решений, находим

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \left[D_{1k} \exp(z_1 \mathrm{Fo}) + D_{2k} \exp(z_2 \mathrm{Fo}) + \right.$$

$$\left. + D_{3k} \exp(z_{3k} \mathrm{Fo}) \right] \cos\left(r \frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right) \Big\} \quad (r = 2k-1; \quad k = 1, 2, \ldots) \tag{2.133}$$

Постоянные D_{1k}, D_{2k}, D_{3k}, определяемые из условий (2.109) – (2.111), здесь будут

$$D_{1k} = -\frac{D_{2k} z_2 + D_{3k} z_{3k}}{z_1}; \qquad D_{2k} = -\frac{D_{3k} z_{3k} (z_{3k} - z_1)}{z_2 (z_2 - z_1)};$$

$$D_{3k} = \frac{4}{r\pi} \Bigg/ \left[\frac{z_{3k}}{z_1} \left(\frac{z_{3k} - z_1}{z_2} - 1 \right) + 1 \right]. \tag{2.134}$$

После получения коэффициентов B_{1k}, B_{2k}, C_{3k} в случаях, когда подкоренные соотношения в (2.118), (2.119) больше нуля, точное решение задачи (2.108) – (2.113) определяется из (2.126). Если они меньше нуля, то точное решение после получения коэффициентов D_{1k}, D_{2k}, D_{3k} определяется из (2.133).

Результаты исследований для пластины по формулам (2.126), (2.133) приведены на рисунках 2.22 – 2.26. Из их анализа следует, что при малых величинах чисел Fo_1 и Fo_2 ($\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10^{-7}$) получаемые решения в области чисел $10^{-6} \le \mathrm{Fo} < \infty$ совпадают с решением подобной задачи для параболического уравнения нестационарной теплопроводности. Отметим,

что при выполнении сравнений с решением параболического уравнения [17] число Фурье в формулах (2.126), (2.133) необходимо принимать равным $\mathrm{Fo}/4$. Это связано с тем, что число Фурье для задач (2.108) – (2.113) и (2.135) – (2.139) (см. ниже) принято равным $\mathrm{Fo} = a\tau/\delta^2$, а для корректного сравнения с классическими решениями параболического уравнения оно должно быть $\mathrm{Fo} = a\tau/4\delta^2$, так как толщина пластины для задач (2.108) – (2.113) и (2.135) – (2.139) должна быть равна 2δ.

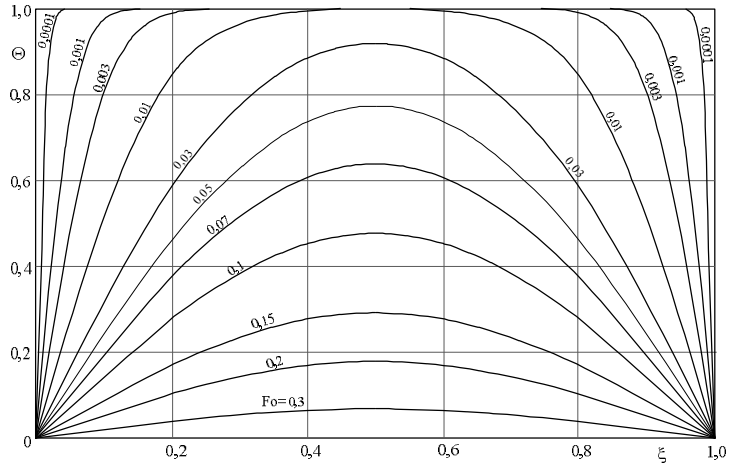


Рисунок 2.22. Изменение температуры: $\mathrm{Fo}_1 = 10^{-6}$; $\mathrm{Fo}_2 = 10^{-10}$; $n = 100000$ (n – число членов решений (2.126), (2.133))

При $\mathrm{Fo} < 10^{-6}$ изменении температуры имеет некоторые особенности. Так при малых величинах Fo_2 ($\mathrm{Fo}_2 = 10^{-20}$), когда последние члены в обеих частях уравнения (2.108) оказываются пренебрежимо малыми, например, при $\mathrm{Fo} = 10^{-4}$ ($\mathrm{Fo}_1 = 10^{-3}$) температура вблизи точек $\xi = 0$ и $\xi = 1$ скачком меняется от величины $\Theta(0;\ 10^{-4}) = \Theta(1;\ 10^{-4}) = 0$ на границах (выполнение краевых условий (2.112), (2.113)) до $\Theta(0{,}0001;\ 10^{-4}) = \Theta(0{,}9999;\ 10^{-4}) = 0{,}91$ в точках $\xi = 0{,}0001$ и $\xi = 0{,}9999$, т. е. на «бесконечно малом» удалении от точек $\xi = 0$ и $\xi = 1$ (см. рисунки 2.23, 2.24). Следовательно, при $\mathrm{Fo} = 10^{-4}$ по толщине прогретых слоев ($0{,}0001 \le \xi \le 0{,}03$ и $0{,}97 \le \xi \le 0{,}9999$) температура изменяется от $\Theta = 0{,}91$ при $\xi = 0{,}0001$ и $\xi = 0{,}9999$ до $\Theta = 1$ при $\xi = 0{,}03$ и $\xi = 0{,}97$, тогда как при $\xi = 0$ и $\xi = 1$ $\Theta = 0$ вследствие выполнения краевых условий (2.112) и (2.113). Для чисел Fo, когда наблюдаются скачки температуры на стенках в окрестности точек $\xi = 0$ и $\xi = 1$, совпадения с решением параболического уравнения не наблюдается. С увеличением числа Fo_1 (при неизменном числе $\mathrm{Fo}_2 = 10^{-20}$) скачкообразное распределение температуры вблизи точек $\xi = 0$ и $\xi = 1$ происходит уже для бóльших чисел Fo (см. рисунки 2.24, 2.25). Сходство с решением параболического уравнения наблюдается лишь для чисел Fo, когда скачки температуры вблизи точек $\xi = 0$ и

$\xi = 1$ не происходят, то есть кривые температур исходят из точек $\xi = 0$ и $\xi = 1$ при $\Theta = 0$ (например, кривые для $\mathrm{Fo} \geq 0{,}01$, приведенные на рисунках 2.23, 2.24).

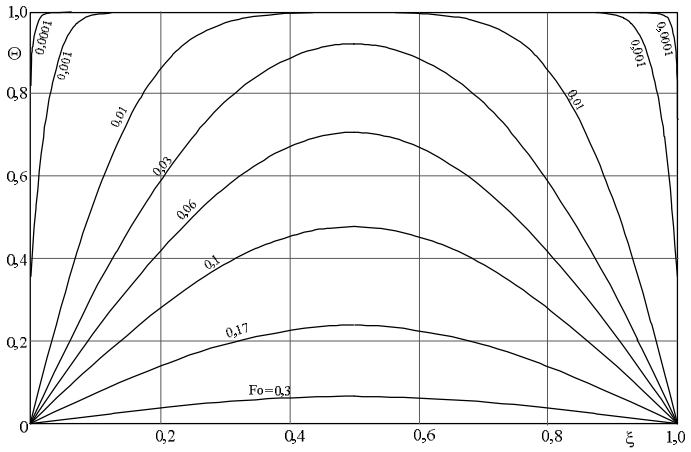


Рисунок 2.23. Изменение температуры: Fo1 = 0,001; Fo2 = 10–20; n = 10000 (n – число членов решений (2.126), (2.133))

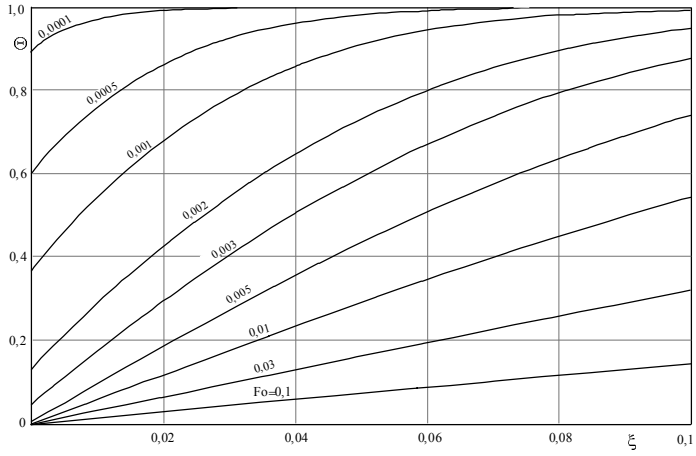


Рисунок 2.24. Изменение температуры: $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_2 = 10^{-20}$; n = 100000 (n – число членов решений (2.126), (2.133))

С увеличением числа Fo_1 ($\mathrm{Fo}_2 = 10^{-20}$) кривые температур становятся пологими и при $\mathrm{Fo}_1 > 5$ – параллельными оси ξ. Скачок температуры вблизи точек $\xi = 0$ и $\xi = 1$ происходит для всех чисел Fo вплоть до стационарного режима (см. рисунки 2.25, 2.26).

На рисунке 2.26 представлены данные исследований при величине числа Fo_2, сопоставимой с Fo_1. Из анализа следует, что учет членов, имеющих высокие порядки производных, приводит к незначительным отличиям в температурном поле. С увеличением Fo_2 (при неизменном Fo_1) расхождение данных (по сравнению со случаем $\mathrm{Fo}_2 = 0$) возрастает. Следует, однако, отметить, что качественно распределение температуры остается практически неизменным, включая и скачки вблизи координат $\xi = 0$ и $\xi = 1$.

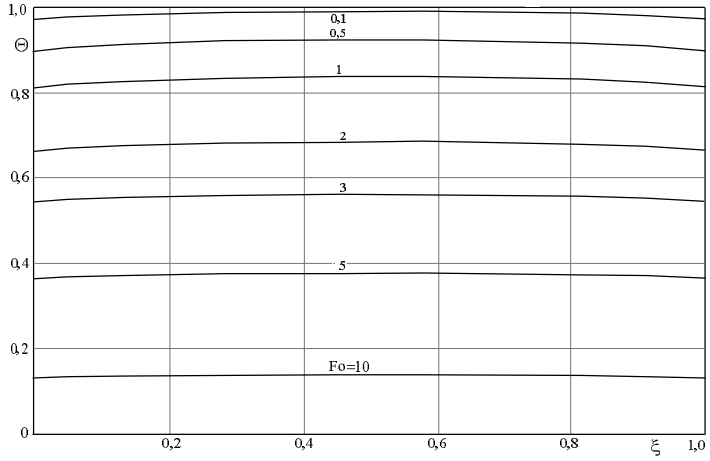


Рисунок 2.25. Изменение температуры: $Fo_1 = 5$; $Fo_2 = 10^{-10}$; $n = 1000$ (n – число членов решений (2.126), (2.133))

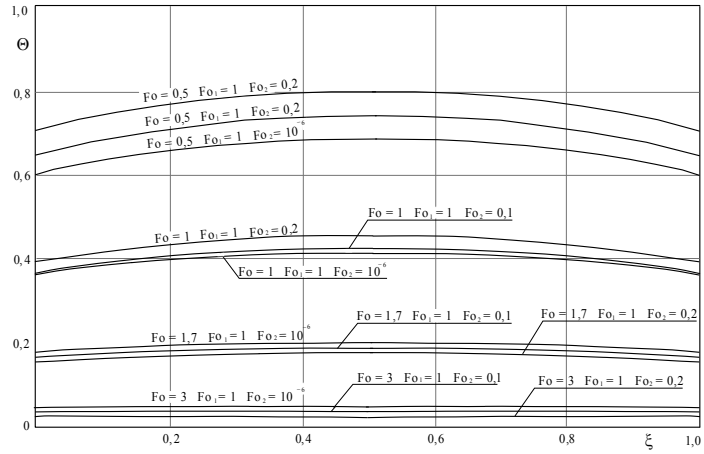


Рисунок 2.26. Изменение температуры: $n = 1000$ (n – число членов решений (2.126), (2.133))

Для сравнения решений различных гиперболических уравнений на рисунках 2.27 – 2.34 приведены также результаты дополнительных расчетов, выполненных по формулам (2.23), (2.34), то есть в случае релаксации лишь теплового потока по формуле закона Фурье.

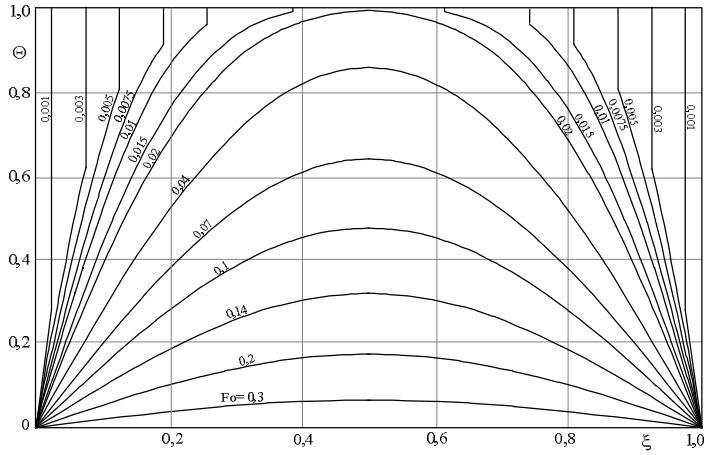


Рисунок 2.27. Изменение температуры: $Fo_r = 0{,}15 \cdot 10^{-2}$; $n = 1000$ (n – число членов решений (2.23), (2.34))

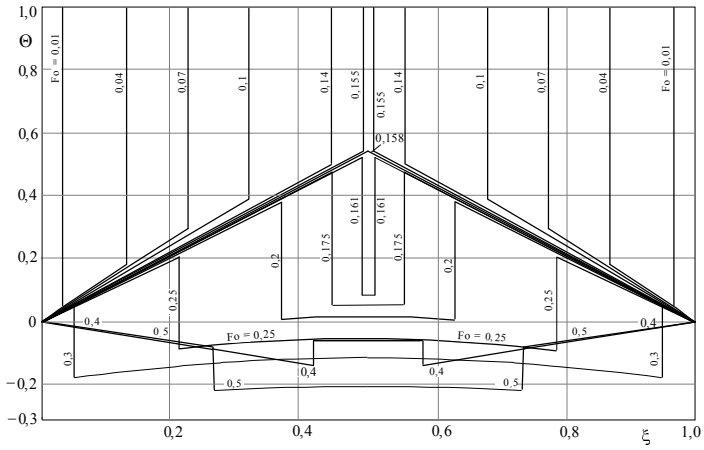


Рисунок 2.28. Изменение температуры: $Fo_r = 0{,}1$; $n = 10000$ (n – число членов решений (2.23), (2.34))

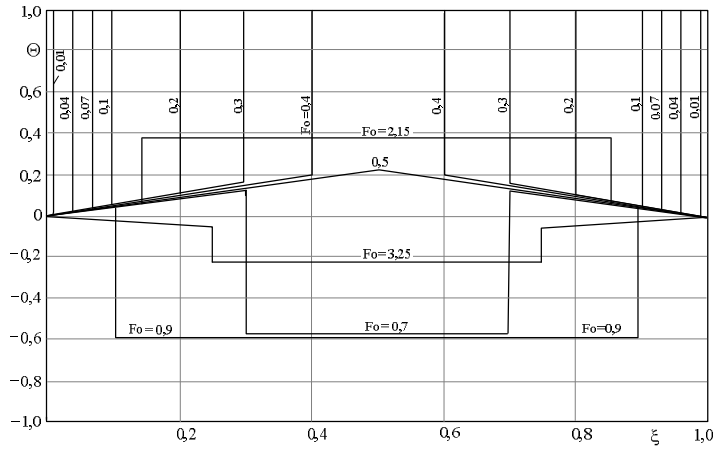


Рисунок 2.29. Изменение температуры: $Fo_r = 1{,}0$; $n = 10000$ (n – число членов решений (2.23), (2.34))

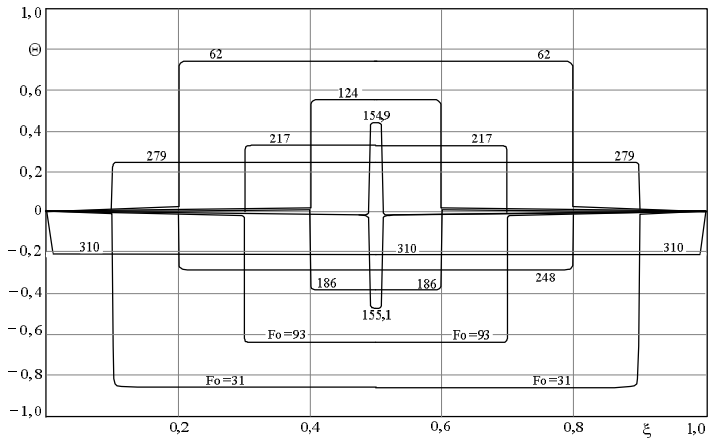


Рисунок 2.30. Изменение температуры: $Fo_r = 100$; $n = 10000$ (n – число членов решений (2.23), (2.34))

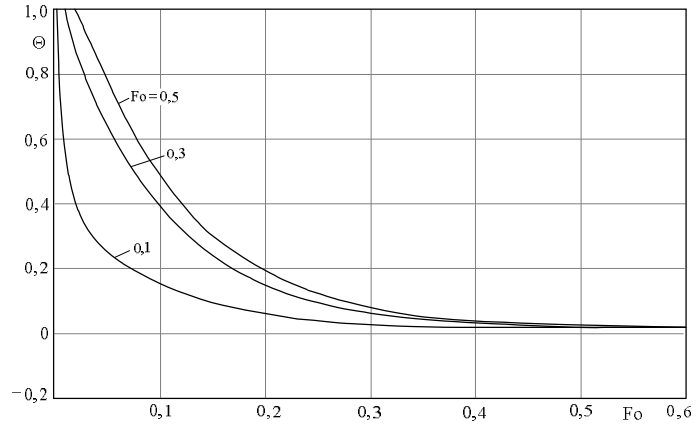


Рисунок 2.31. Изменение температуры в точках $\xi = 0{,}1$; 0,3; 0,5 во времени: $Fo_r = 0{,}0015$; $n = 10000$ (n – число членов решений (2.23), (2.34))

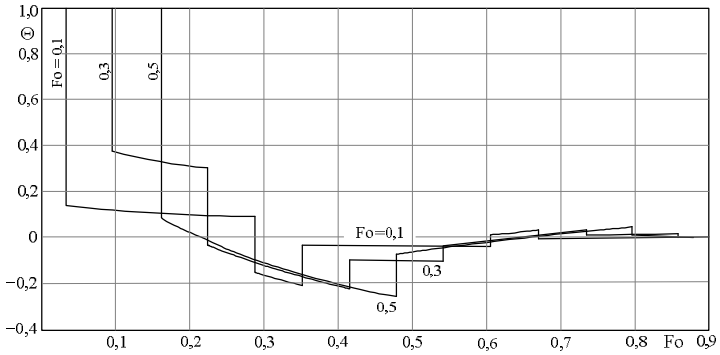


Рисунок 2.32. Изменение температуры в точках $\xi = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5$ во времени: $Fo_1 = 0{,}1$; $n = 10000$ (n – число членов решений (2.23), (2.34))

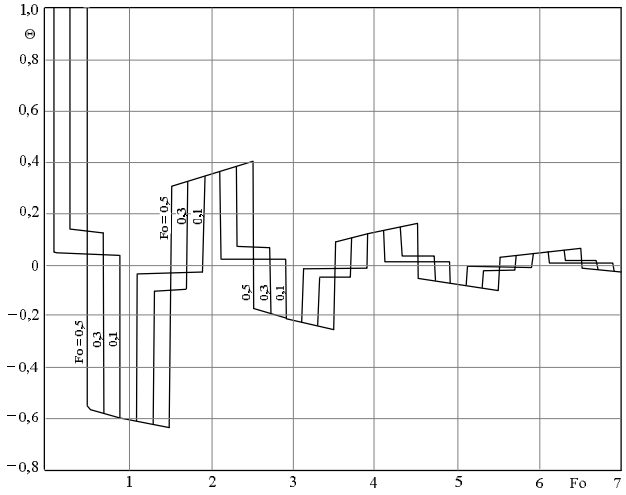


Рисунок 2.33. Изменение температуры в точках $\xi = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5$ во времени: $Fo_1 = 1$; $n = 10000$ (n – число членов решений (2.23), (2.34))

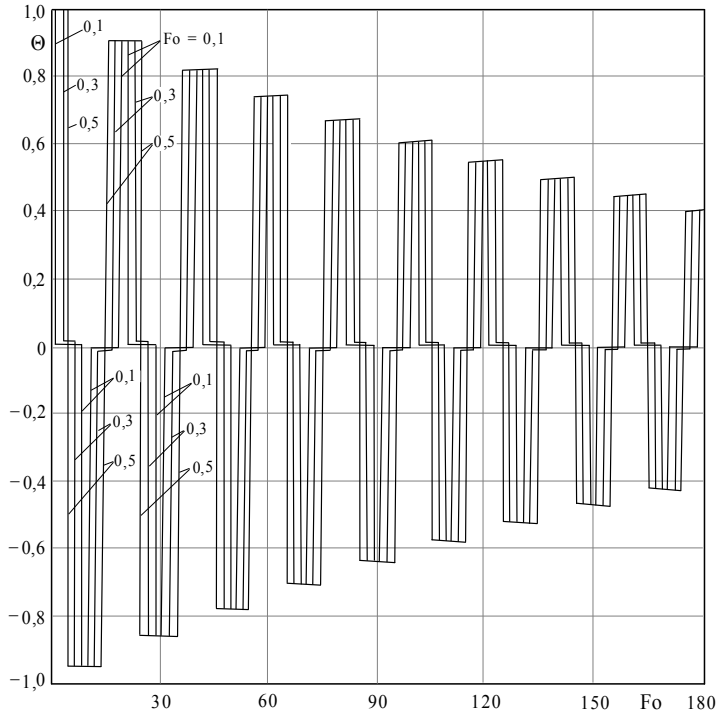


Рисунок 2.34. Изменение температуры в точках $\xi = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5$ во времени: $Fo_1 = 100$; $n = 10000$ (n – число членов решений (2.23), (2.34))

Выполним анализ результатов. При движении тепловой волны происходит появление изотерм внутри тела (см. рисунок 2.30). Если температурный скачок происходит до момента достижения фронтом волны центра пластины, возникает обратная волна со скачком на фронте противоположного знака (см. изменение температуры при $Fo \geq 0{,}56$ на рисунках 2.28 – 2.30).

Наличие скачка в обратной волне приводит к появлению отрицательных температур (см. изменение температуры при $\mathrm{Fo} > 0{,}85$ на рисунках 2.28 – 2.30, 2.32 – 2.34). С увеличением Fo_1 колебания температуры происходят как в положительной, так и в отрицательной области, стабилизируясь вблизи ее нулевого значения при $\mathrm{Fo} \to \infty$. При этом колебания температуры происходят по типу колебаний закрепленной с двух сторон струны, имеющей изломы по ее длине (см. рисунки 2.28 – 2.30).

На рисунках 2.31 – 2.34 приводятся результаты расчетов изменения температуры в точках $\xi = 0{,}1\,(0{,}9);\ 0{,}3\,(0{,}7);\ 0{,}5$ во времени Fo. Выполним их анализ. При малых значениях Fo_1 (см. рисунок 2.31) происходит монотонное уменьшение температуры от начального ее значения до температуры, заданной краевым условием 1-ого рода при $\mathrm{Fo} \to \infty$. С увеличением Fo_1 появляются скачки температур с отклонением в область отрицательных значений (рисунок 2.32). При дальнейшем увеличении числа Fo_1 наблюдается скачкообразное распределение температуры относительно ее нулевого значения с экспоненциальным затуханием скачков при $\mathrm{Fo} \to \infty$ (см. рисунки 2.33, 2.34).

Следовательно, без учета второго члена в правой части гиперболического уравнения (2.96) оно неточно описывает процесс теплообмена.

Используя уравнение (2.92), найдем тепловой поток на стенках $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Уравнение (2.92) с учетом (2.107) записывается как

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathrm{Fo}} + A\bar{q} + B(\mathrm{Fo}) = 0, \qquad (2.135)$$

где $\bar{q} = \dfrac{q\delta}{\lambda(T_0 - T_{\text{ст}})}$ – безразмерный тепловой поток; $A = 1/\mathrm{Fo}_1$;

$$B(\mathrm{Fo}) = \frac{1}{\mathrm{Fo}_1}\frac{\partial \Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial \xi\, \partial \mathrm{Fo}}.$$

Интегрируя (2.135), находим

$$\bar{q}\,(\mathrm{Fo}) = [-\int B(\mathrm{Fo}) \exp(A\mathrm{Fo})\mathrm{dFo} + C]\exp(-A\mathrm{Fo}), \qquad (2.136)$$

где C – константа интегрирования, для определения которой используется начальное условие $\bar{q}\,(0) = 0$. Подставляя (2.136) в начальное условие, получаем

$$C = -\int B(\mathrm{Fo})\mathrm{dFo}. \qquad (2.137)$$

Формула (2.91) (в безразмерном виде) при $\xi = 1$ будет

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathrm{Fo}} + A\bar{q} + D(\mathrm{Fo}) = 0, \qquad (2.138)$$

где $D(\mathrm{Fo}) = \dfrac{1}{\mathrm{Fo}_1}\dfrac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}$.

Решение уравнения (2.138) и формула для константы интегрирования имеют вид (2.136), (2.137), где $B(\mathrm{Fo})$ необходимо заменить на $D(\mathrm{Fo})$.

Данные исследований для пластины по формуле (2.136) (при $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}3$) в случае описания теплового потока уравнениями (2.135) и (2.138) представлены на рисунке 2.35. Здесь же даны результаты исследований теплового потока, получаемого по соотношению (2.88), которое в безразмерных переменных будет

$$\overline{q} = -\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})/\partial\xi\,, \qquad (2.139)$$

где $\Theta(\xi,\mathrm{Fo})$ находилась по точному решению параболического уравнения [90]:

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}\cdot 4}{r\pi}\cos(r\frac{\pi}{2}\xi)\exp(-\frac{r^2\pi^2}{4}\mathrm{Fo})\,. \qquad (2.140)$$

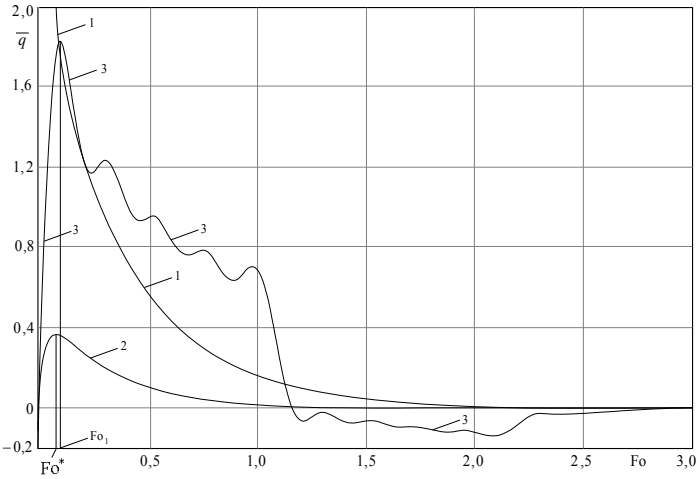


Рисунок 2.35. Распределение теплового потока ($\xi = 1$): $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}3$. 1 – по (2.139); 2 – по (2.136); 3 – по (2.136)

Из анализа результатов расчетов можно заключить следующее.

Тепловой поток по формуле (2.139) на стенке $(\xi = 1)$ при $\mathrm{Fo} = 0$ устремляется к бесконечному значению (кривая 1 на рисунке 2.35. При увеличении времени $\overline{q}(\mathrm{Fo})$ поток уменьшается и при $\mathrm{Fo} \approx 3$ он становится равным нулю.

Поток, определяемый по соотношению (2.136), представляющему решение уравнения (2.135), при $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}3$ $\xi = 1$ и $\mathrm{Fo} = 0$ равен нулю. При увеличении времени он растет и при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}^* \approx 0{,}072$ имеет максимальное значение $\overline{q} \approx 0{,}37$ (кривая 2 на рисунке 2.35). При дальнейшем увеличении времени происходит снижение теплового потока и при $\mathrm{Fo} \approx 3$ он практически оказывается равным нулю.

Распределение теплового потока на основе формулы (2.136) в случае, если $B(\mathrm{Fo})$ заменено на $D(\mathrm{Fo})$ (решение уравнения (2.138)), при $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}3$ описывается линией 3

(см. рисунок 2.35). Здесь тепловой поток ($\xi = 0$ и $\xi = 1$), имея нулевую величину при $\mathrm{Fo} = 0$, с увеличением числа Fo возрастает до максимального значения $\bar{q} \approx 1{,}83$ (при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1 = 0{,}08$). При дальнейшем увеличении числа Fo тепловой поток меняется скачком, с отклонением в сторону отрицательных значений. С увеличением числа Fo амплитуда скачков уменьшается, стабилизируясь около нулевой величины $\bar{q}$ при $\mathrm{Fo} \approx 3$. Такое изменение потока приводит к скачкообразному изменению температуры, а также к их отрицательным значениям.

По соотношению (2.97), найдем изменение теплового потока на стенке ($\xi = 1$). Формула (2.97) с учетом обозначений (2.107) в безразмерном виде будет

$$\bar{q} = -\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \mathrm{Fo}_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi \partial \mathrm{Fo}} - \mathrm{Fo}_2 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi \partial \mathrm{Fo}^2} - \mathrm{Fo}_1 \frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathrm{Fo}} - \mathrm{Fo}_2 \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial \mathrm{Fo}^2}, \qquad (2.141)$$

Соотношение (2.141) представим в виде

$$\frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial \mathrm{Fo}^2} + A_1 \frac{\partial \bar{q}}{\partial \mathrm{Fo}} + A_2 \bar{q} + A_3(\mathrm{Fo}) = 0, \qquad (2.142)$$

где $A_1 = \mathrm{Fo}_1 / \mathrm{Fo}_2$; $A_2 = 1/\mathrm{Fo}_2$; $A_3(\mathrm{Fo}) = \dfrac{1}{\mathrm{Fo}_2}\left(\dfrac{\partial \Theta}{\partial \xi} + \mathrm{Fo}_1 \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi \partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_2 \dfrac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi \partial \mathrm{Fo}^2}\right)$.

Начальные условия для уравнения (2.142) имеют вид

$$\bar{q}(0) = 0; \quad \partial \bar{q}(0)/\partial \mathrm{Fo} = 0. \qquad (2.143)$$

Решение уравнения (2.142) будет

$$\bar{q}(\xi, \mathrm{Fo}) = c_1 \exp(z_1 \mathrm{Fo}) + c_2 \exp(z_2 \mathrm{Fo}) -$$
$$-\frac{1}{D_1}\left[\exp(D_1 \mathrm{Fo}/\mathrm{Fo}_2) \int B(\xi, \mathrm{Fo}) \exp(z_2 \mathrm{Fo})\, d\,\mathrm{Fo} - \right.$$
$$\left. - \exp(z_2 \mathrm{Fo}) \int B(\xi, \mathrm{Fo}) \exp(z_1 \mathrm{Fo})\, d\,\mathrm{Fo}\right], \qquad (2.144)$$

где $D_1 = \sqrt{\mathrm{Fo}_1^2 - 4\mathrm{Fo}_2}$; $B = A/\mathrm{Fo}_2$; c_1, c_2 – постоянные интегрирования, для определения которых используются условия (2.143).

Данные исследований по формуле (2.144) для $\mathrm{Fo}_2 = 10^{-7}$ (кривая 1), $\mathrm{Fo}_2 = 0{,}1$ (кривая 2), $\mathrm{Fo}_2 = 0{,}2$ (кривая 3) при $\mathrm{Fo}_1 = 1$, $\xi = 1$ приведены на рисунке 2.36. Здесь же приведены также данные расчетов безразмерного теплового потока по формуле (2.139) (кривая 4). Анализ кривой 4, совпадающей с кривой 1 на рисунке 2.35, был дан выше.

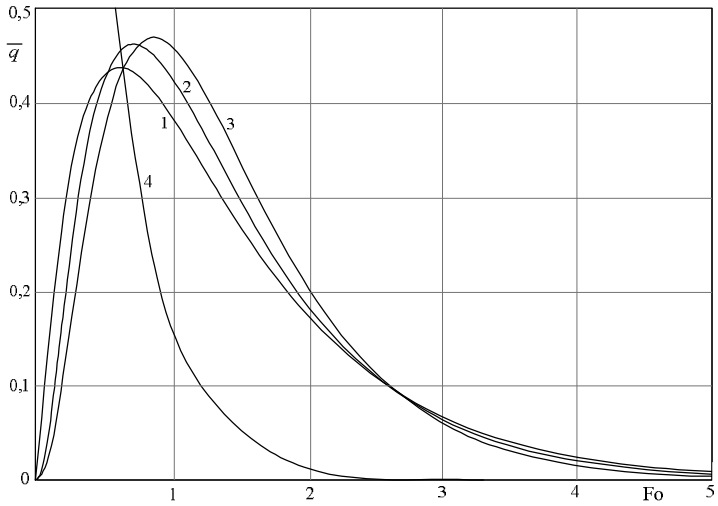


Рисунок 2.36. Распределение теплового потока ($\xi = 1$) $Fo_1 = 1$: 1 – $Fo_2 = 10^{-7}$; 2 – $Fo_2 = 0{,}1$; 3 – $Fo_2 = 0{,}2$; 4 – по (2.139); 1, 2, 3 – по (2.144)

Из анализа результатов расчетов по формуле (2.144) следует, что для любых значений Fo_1 и Fo_2 тепловой поток при $\xi = 1$ и $Fo = 0$ равен нулю. С возрастанием времени он растет, достигая максимального значения (в зависимости от Fo_1 и Fo_2). При дальнейшем возрастании времени тепловой поток снижается, стабилизируясь около нулевой величины при $Fo \to \infty$.

Полученные результаты приводят к заключению, что коэффициент теплоотдачи не может быть выше некоторой величины, определяемой максимальной величиной теплового потока на стенках. Например, для кривой 2 (см. рисунок 2.35) максимальный тепловой поток наблюдается при $Fo = Fo^*$, а для кривой 3 – при $Fo = Fo_1$. Следовательно, при этих значениях чисел Фурье будем иметь максимальную интенсивность теплообмена с окружающей средой, несмотря на то, что краевые условия 1-ого рода математически выполняются точно. Приведенные выше исследования показали, что в реальных процессах температура стенки пластины (в том числе и при краевых условиях 1-ого рода) определяется физическими свойствами тела, и при определенных их значениях (характеризуемых величиной чисел Fo_1 и Fo_2) тело может охлаждаться (нагреваться) практически при отсутствии градиентов температуры внутри него, независимо от интенсивности теплообмена с окружающей средой. Следовательно, при определенных внутренних условиях, зависящих от теплофизических свойств тела (в том числе и релаксационных свойств), граничная поверхность тела ни при каких условиях внешнего теплообмена не может принять температуру среды, то есть краевые условия 1-ого рода физически не могут быть выполнены.

2.4 Применение операционных методов к решению краевых задач локально - неравновесного теплообмена

Выше (см. п. 2.3) применительно к решению задачи (2.108) – (2.113) был использован метод разделения переменных (метод Фурье). Применение этого метода приводит к появлению

комплексных корней при интегрировании обыкновенного дифференциального уравнения относительно временно́й переменной. Преобразование полученного решения с использованием формул Эйлера, связывающих тригонометрические и экспоненциальные функции ($\exp(is) = \cos s + i \sin s$, $\exp(-is) = \cos s - i \sin s$), позволяет избавиться от комплексных чисел путем объединения мнимой единицы с константами интегрирования. Тем не менее, процесс получения точного аналитического решения в данном случае оказывается достаточно трудоемким.

Рассмотрим другой (более простой) путь получения решения задачи (2.108) – (2.113), базирующийся на совместном использовании метода Фурье и операционного метода. Согласно методу разделения переменных решение разыскивается в виде

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(\mathrm{Fo}) \sin(n\pi\xi) , \qquad (2.145)$$

где C_n – неизвестные константы.

Соотношение (2.145) удовлетворяет условиям (2.112), (2.113). Подставляя (2.145) в (2.108), разделив полученное соотношение на $C_n \sin(n\pi\xi)$, находим (при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_1^*$ и $\mathrm{Fo}_2 = \mathrm{Fo}_2^*$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\mathrm{Fo}_2 \varphi_n''' + (\mathrm{Fo}_1 + \gamma_n^2 \mathrm{Fo}_2)\varphi_n'' + (1 + \mathrm{Fo}_1 \gamma_n^2)\varphi' + \gamma_n^2 \varphi_n] = 0 , \qquad (2.146)$$

где $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ – 1-ая, 2-ая и 3-я производные функции $\varphi(\mathrm{Fo})$ по времени Fo; γ_n^2 – собственные числа задачи Штурма – Лиувилля, которая получается после разделения переменных в уравнении (2.108)), имеющей вид

$$\psi''(\xi) + \gamma_n^2 \psi(\xi) = 0 \ ; \quad (2.147) \qquad \psi(0) = \psi(1) = 0 , \qquad (2.148)$$

где ψ'' – вторая производная от функции $\psi(\xi)$ по координате ξ.

Собственные функции задачи (2.147) – (2.148) находятся в виде

$$\psi_n(\xi) = \sin(n\pi\xi) . \qquad (2.149)$$

Подставляя (2.149) в (2/147), относительно собственных значений получаем соотношение

$$\gamma_n^2 = n^2 \pi^2 . \qquad (2.150)$$

Так как каждый член бесконечной суммы (2.146) представляет обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\varphi_n(\mathrm{Fo})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то для выполнения бесконечной суммы достаточно потребовать выполнения любого из них, независимо от величины n, то есть

$$\mathrm{Fo}_2 \varphi_n''' + (\mathrm{Fo}_1 + \gamma_n^2 \mathrm{Fo}_2)\varphi_n'' + (1 - \mathrm{Fo}_1 \gamma_n^2)\varphi' + \gamma_n^2 \varphi_n = 0 . \qquad (2.151)$$

Начальные условия для функции $\varphi_n(\mathrm{Fo})$ после подстановки (2.145) в (2.109) – (2.111) принимают вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \varphi_n(0) \sin(n\pi\xi) = 1 \; ; \quad (2.152) \qquad \psi_n'(0) = \psi_n''(0) = 0 \; . \quad (2.153)$$

Соотношение (2.152) является разложением единицы в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0;\ 1]$. Его коэффициенты находятся по формуле

$$C_n \varphi_n(0) = 2[1-(-1)^n]/(n\pi) \quad (n = 1, 2, \ldots) . \quad (2.154)$$

Отсюда получаем

$$\varphi_n(0) = \alpha_n / C_n \; , \quad (2.155)$$

где $\alpha_n = 2[1-(-1)^n]/(n\pi)$.

Для решения уравнения (2.151) с начальными условиями (2.153), (2.155) (задача Коши) используем операционный метод, согласно которому уравнение (2.151) в пространстве изображений приводится к виду

$$\mathrm{Fo}_2[p^3 \overline{\varphi}_n(p) - p^2(\alpha_n / C_n)] + (\mathrm{Fo}_1 + \gamma_n^2 \mathrm{Fo}_2)[p^2 \overline{\varphi}_n(p) - p(\alpha_n / C_n)] +$$
$$+ (1 + \gamma_n^2 \mathrm{Fo}_1)[p\overline{\varphi}_n(p) - (\alpha_n / C_n)] + \gamma^2 \overline{\varphi}_n(p) = 0 \; , \quad (2.156)$$

где $\overline{\varphi}_n(p) = \int_0^{\infty} \varphi_n(\mathrm{Fo}) e^{-p\mathrm{Fo}} d\mathrm{Fo}$; $\varphi_n'(\mathrm{Fo}) \to p\overline{\varphi}_n(p) - \varphi_n(0)$;

$$\varphi_n''(\mathrm{Fo}) \to p^2 \overline{\varphi}_n(p) - p\varphi_n(0) - \varphi_n'(0) ;$$
$$\varphi_n''' \to p^3 \overline{\varphi}_n(p) - p^2 \varphi_n(0) - p\varphi_n'(0) - \varphi_n''(0) .$$

Соотношение (2.156) относительно $\overline{\varphi}_n(\mathrm{Fo})$ является алгебраическим линейным уравнением, из решения которого получаем

$$\frac{\overline{\varphi}_n(p) C_n}{\alpha_n} = \frac{\mathrm{Fo}_1^2 p + \mathrm{Fo}_1}{\mathrm{Fo}_1^2 p^2 + \mathrm{Fo}_1 p + 1} + \frac{A_{1n}}{p + \gamma_n^2} + \frac{A_{2n} p + A_{3n}}{\mathrm{Fo}_1^2 p^2 + \mathrm{Fo}_1 p + 1} \; , \quad (2.157)$$

где $A_{1n} = 1/B_n$; $A_{2n} = -\mathrm{Fo}_1^2 / B_n$; $A_{3n} = \mathrm{Fo}_1(\mathrm{Fo}_1 \gamma_n^2 - 1)/B_n$;

$$B_n = (\mathrm{Fo}_1 \gamma_n^2 - 1/2)^2 + 3/4 . \quad (2.158)$$

Переходя к оригиналам в (2.157), находим

$$\varphi_n(\mathrm{Fo}) C_n = \alpha_n e^{-\mathrm{Fo}/(2\mathrm{Fo}_1)} \left[\frac{\mathrm{Fo}_1^2 + A_{2n}}{\mathrm{Fo}_1^2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}\mathrm{Fo}}{2\mathrm{Fo}_1} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{(\mathrm{Fo}_1 + A_{3n}) - (A_{2n} + \mathrm{Fo}_1^2)/(2\mathrm{Fo}_1)}{(\sqrt{3}/2)\mathrm{Fo}_1} \sin\left(\frac{\sqrt{3}\mathrm{Fo}}{2\mathrm{Fo}_1} \right) + A_{1n} e^{-\gamma_n^2 \mathrm{Fo}_1} \right] . \quad (2.159)$$

Учитывая (2.159), точное решение задачи (2.108) – (2.113) находится из (2.145).

Выше, используя метод разделения переменных, получены точные аналитические решения задачи (2.108) – (2.114), имеющие вид (2.126), (2.133). Выполненные исследования показали, что расчеты по формулам (2.145) и (2.126) полностью совпадают. В самом деле,

точные аналитические решения одной и той же задачи, полученные различными методами, ввиду единственности решения краевой задачи должны приводить к одинаковым результатам.

2.5 Численное моделирование локально - неравновесного процесса теплового воспламенения

Используя модифицированную формулу закона Фурье, в которой учитывается ускорение во времени теплового потока и градиента температуры, разработана математическая модель локально - неравновесного процесса теплопроводности для систем с экспоненциально изменяющимся от температуры внутренним источником теплоты (модель теплового воспламенения). Выполненные с помощью метода конечных разностей исследования показали, что учет пространственно - временно́й нелокальности приводит к возрастанию времени задержки теплового воспламенения, независимо от прогрева или охлаждения тела в окружающей среде. Этот факт объясняется тепловой инерционностью среды, вследствие которой граничные условия не могут быть приняты мгновенно – процесс их установления занимает определенный диапазон начального временно́го участка. Следовательно, количество теплоты, подводимой к системе, имеет определенный предел, зависящий от физических (в том числе и релаксационных) свойств тела. Это означает наличие предела и по величине коэффициентов теплоотдачи.

Составной частью теории горения является теория теплового воспламенения (теплового взрыва), в основе которой лежит исследование температурного изменения системы при протекании химических реакций математическими методами. Основным содержанием подобных исследований является определение критических условий и времени задержки теплового воспламенения [113, 115]. Классические математические модели теплового воспламенения основаны на параболических уравнениях теплопроводности, выведенных без учета локальной неравновесности процессов переноса теплоты. В связи с чем, в этих уравнениях оказывается заложенной бесконечная скорость распространения теплоты, что связано с использованием при их выводе формулы закона Фурье для теплового потока

$$q = -\lambda \partial T / \partial x , \qquad (2.160)$$

в которой градиент температуры (движущая сила) и тепловой поток не разделены во времени. Из (2.160) следует, что любое изменение причины (движущей силы) вызывает мгновенное изменение следствия (теплового потока). Кроме того, из формулы (2.160) следует, что при тепловом ударе на поверхности стенки (реализация граничных условий 1-го рода) тепловой поток в начальное время устремляется к бесконечной величине. Так как в реальных физических процессах не могут реализовываться бесконечные значения каких-либо параметров, то выведенные на основе соотношения (2.160) дифференциальные уравнения адекватны этим

процессам лишь в определенном диапазоне времени. Как показано во многих работах [14, 16, 18, 69, 71, 104 – 106], параболические уравнения теплопроводности на начальном участке временного диапазона, а также для быстропротекающих процессов, неадекватно описывают реальные физические процессы переноса теплоты.

Учитывая, что предметом исследования теории теплового взрыва является определение времени задержки теплового воспламенения, отсчитываемое непосредственно от начала процесса теплообмена, а также то, что данные процессы являются, как правило, быстропротекающими, то неучет пространственно - временно́й нелокальности в математических моделях может приводить к существенному отклонению исследуемых параметров от их реальных значений.

Для вывода дифференциального уравнения теплового воспламенения с учетом локальной неравновесности представим формулу (2.160) таким образом, чтобы в ней было учтено ускорение во времени как теплового потока, так и градиента температуры [16, 41, 71, 80]:

$$q = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t}\right) - \tau_1 \frac{\partial q}{\partial t}, \tag{2.161}$$

где q – тепловой поток, T – температура, x – координата, t – время, λ – коэффициент теплопроводности, τ_1, τ_2 – коэффициенты релаксации, соответственно теплового потока и скалярной величины градиента температуры.

Подставляя (2.161) в уравнение теплового баланса

$$c\rho \partial T / \partial t + \partial q / \partial x + \omega(T) = 0, \tag{2.162}$$

находим

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda \tau_2 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} + \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \omega(T), \tag{2.163}$$

где $\omega(T) = Q\rho k_0 \exp(-E/(RT))$ – мощность внутреннего источника теплоты, Q – тепловой эффект реакции, ρ – плотность, c – теплоемкость, E – энергия активации, k_0 – предэкспоненциальный множитель, R – универсальная газовая постоянная.

Выражая $\partial q / \partial x$ из (2.162) и подставляя в (2.163), получаем

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda \tau_2 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} - \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\left[c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + Q\rho k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)\right] + Q\rho k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right). \tag{2.164}$$

Определяя производные в третьем слагаемом правой части уравнения (2.164), будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t}\right) - \frac{\gamma}{T^2} \exp\left(-\frac{E}{RT}\right)\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{Qk_0}{c} \exp\left(-\frac{E}{RT}\right), \tag{2.165}$$

где $\gamma = \tau_1 Q k_0 E/(cR)$ – комплекс, имеющий размерность K^2; $a = \lambda/(c\rho)$ – коэффициент температуропроводности.

Очевидно, что при $\tau_1 = \tau_2 = 0$ уравнение (2.165) приводится к классическому параболическому уравнению теплопроводности с нелинейным источником теплоты

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Qk_0}{c\rho}\exp\left(-\frac{E}{RT}\right). \qquad (2.166)$$

Краевые условия к уравнению (2.165) для бесконечной пластины имеют вид

$$T(x,\,0) = T_0; \quad (2.167) \qquad \partial T(x,\,0)/\partial t = 0; \qquad (2.168)$$

$$\partial T(0,\,t)/\partial x = 0; \quad (2.169) \qquad T(\delta,\,t) = T_{\text{ст}}, \qquad (2.170)$$

где T_0 – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки ($T_{\text{ст}} > T_0$); δ – толщина пластины.

Обозначим

$$\Theta = \frac{T - T_{\text{ст}}}{\Delta T}; \quad \text{Fo} = \frac{at}{\delta^2}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad \text{Fo}_1 = \frac{a\tau_1}{\delta^2};$$

$$\text{Fo}_2 = \frac{a\tau_2}{\delta^2}; \quad \tau = \frac{\delta^2 Qk_0}{ca\Delta T}; \quad \Delta T = T_0 - T_{\text{ст}}, \qquad (2.171)$$

где Θ, Fo, ξ – соответственно безразмерные температура, время, координата; τ – безразмерный параметр; Fo_1, Fo_2 – безразмерные коэффициенты релаксации.

С учетом (2.171) задача (2.165), (2.167) – (2.170) будет

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\text{Fo}} + \text{Fo}_1\frac{\partial^2\Theta}{\partial\text{Fo}^2} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2} + \text{Fo}_2\frac{\partial^3\Theta}{\partial\xi^2\partial\text{Fo}} - \frac{\gamma}{(\Theta\Delta T + T_{\text{ст}})^2}\exp\left(-\frac{E}{R(\Theta\Delta T + T_{\text{ст}})}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\text{Fo}} +$$

$$+ \tau\exp\left(-\frac{E}{R(\Theta\Delta T + T_{\text{ст}})}\right) \quad (\text{Fo} > 0, \quad 0 < \xi < 1). \qquad (2.172)$$

$$\Theta(\xi,\,0) = 1; \quad (2.173) \qquad \partial\Theta(\xi,\,0)/\partial\text{Fo} = 0; \qquad (2.174)$$

$$\partial\Theta(0,\,\text{Fo})/\partial\xi = 0; \quad (2.175) \qquad \Theta(1,\,\text{Fo}) = 0. \qquad (2.176)$$

Отметим, что задача (2.172) – (2.176) представлена полностью в безразмерном виде. Для ее решения использовался метод конечных разностей [63, 111, 117, 119, 120]. В рассматриваемой области автором диссертационной работы вводилась пространственно - временна́я сетка с шагами $\Delta\xi$, ΔFo соответственно по переменным ξ и Fo:

$$\xi_k = k\Delta\xi, \quad k = \overline{0,\,K}; \quad \text{Fo}_i = i\,\Delta\text{Fo}, \quad i = \overline{0,\,I}. \qquad (2.177)$$

где K, I – число шагов по координатам ξ, Fo.

На сетке (2.177) вводились сеточные функции $\Theta_k^i = \Theta(\xi_k, \text{Fo}_i)$. Используя явную схему аппроксимации дифференциальных операторов, задача (2.172) – (2.176) может быть записана в виде

$$\left[1 + \frac{\gamma}{(\Theta_k^i\Delta T + T_{\text{ст}})^2}\exp\left(-\frac{E}{R(\Theta_k^i\Delta T + T_{\text{ст}})}\right)\right]\frac{\Theta_k^i - \Theta_k^{i-1}}{\Delta\text{Fo}} + \text{Fo}_1\frac{\Theta_k^{i+1} - 2\Theta_k^i + \Theta_k^{i-1}}{\Delta\text{Fo}^2} =$$

$$= \frac{\Theta_{k-1}^{i} - 2\Theta_{k}^{i} + \Theta_{k+1}^{i}}{\Delta\xi^{2}} + \mathrm{Fo}_{2}\,\frac{\Theta_{k-1}^{i} - 2\Theta_{k}^{i} + \Theta_{k+1}^{i} - \Theta_{k-1}^{i-1} + 2\Theta_{k}^{i-1} - \Theta_{k+1}^{i-1}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\xi^{2}} +$$

$$+ \tau \exp\left(-\frac{E}{R(\Theta_{k}^{i}\Delta T + T_{\text{ст}})}\right) \qquad (\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1); \qquad (2.178)$$

$$\Theta_{k}^{0} = 0; \quad (2.179) \qquad \frac{\Theta_{k}^{1} - \Theta_{k}^{0}}{\Delta\mathrm{Fo}} = 0; \qquad (2.180)$$

$$\frac{\Theta_{1}^{i} - \Theta_{0}^{i}}{\Delta\xi} = 0; \quad (2.181) \qquad \Theta_{K}^{i} = 1. \qquad (2.182)$$

При решении модельной задачи (2.178) – (2.182) использовались следующие исходные данные: $\tau = 3{,}39 \cdot 10^{8}$; $E = 12700$, *Дж/моль*; $R = 8{,}31$, *Дж/(моль·К)*; $\Delta T = 10$, *К*; $T_{\text{ст}} = 850$, *К*; $k_{0} = 1{,}925 \cdot 10^{6}$, $1/c$.

Результаты расчетов даны на рисунках 2.37 – 2.39. Из их анализа следует, что величина коэффициентов релаксации существенно влияет на время задержки теплового воспламенения. Так, при $\mathrm{Fo}_{1} = \mathrm{Fo}_{2} = 0{,}15$ в случае нагрева тела ($T_{\text{ст}} > T_{0}$) время задержки воспламенения возрастает (по сравнению со случаем, когда релаксационные свойства материала не учитываются ($\mathrm{Fo}_{1} = \mathrm{Fo}_{2} = 0$)) (см. рисунок 2.37).

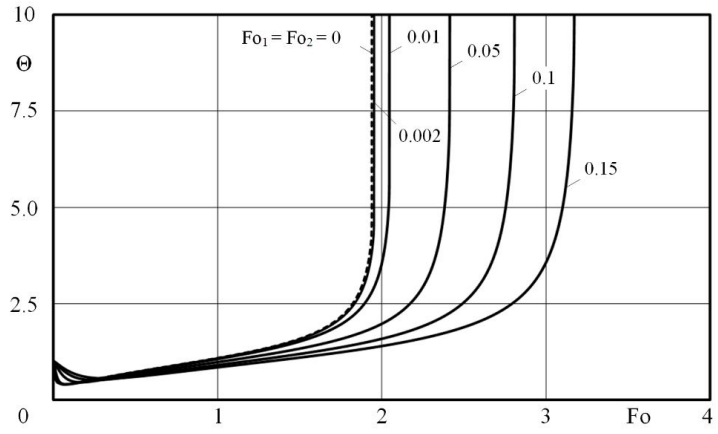


Рисунок 2.37. Изменение температуры во времени ($\xi = 0{,}15$; $\gamma = 0$)

Факт задержки теплового воспламенения объясняется релаксационными свойствами материалов. Их учет приводит к невозможности мгновенного принятия граничных условий первого рода на стенке пластины ($\xi = 1$) – процесс их установления занимает некоторый начальный диапазон времени $0 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}^{*}$. И, в частности, при $\mathrm{Fo}_{1} = \mathrm{Fo}_{2} = 0{,}15$ $\mathrm{Fo}^{*} = 0{,}5$ (рисунок 2.38). Отсюда следует, что граничные условия первого рода (тепловой удар) не могут быть установлены мгновенно ни при каких условиях теплообмена с окружающей средой. Следовательно, в реальных физических процессах коэффициент теплоотдачи ограничен некоторой постоянной величиной, определяемой релаксационными свойствами материала.

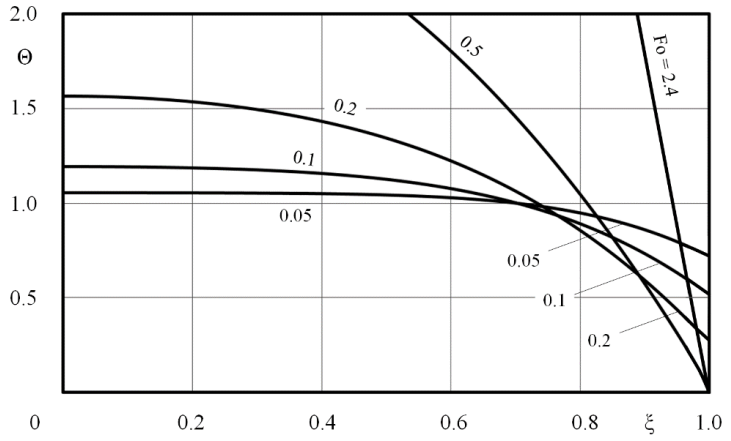


Рисунок 2.38. Изменение температуры от времени Fo ($\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 015;\ \gamma = 0$)

На рисунке 2.39 даны расчеты в случае когда $\gamma \neq 0$. Из анализа следует, что при малых значениях $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2$ величина γ оказывает незначительное влияние на время задержки воспламенения. С увеличением коэффициентов релаксации Fo_1 и Fo_2 его влияние существенно возрастает.

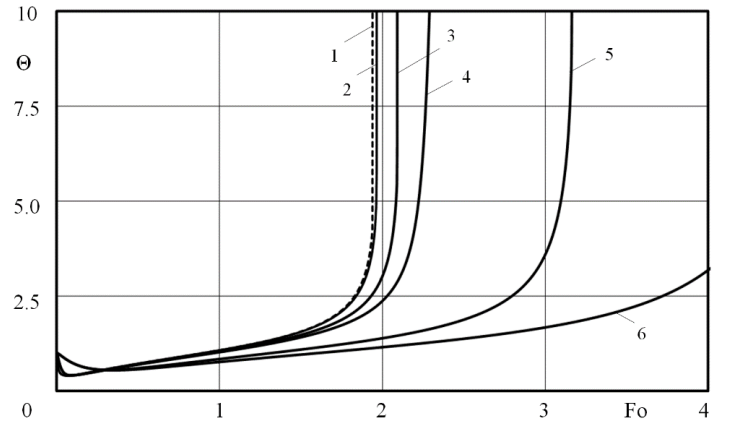


Рисунок 2.39. Изменение температуры во времени ($\xi = 0{,}9$):
1 – $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}0015;\ \gamma = 0$;
2 – $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}0015;\ \gamma = 10^{11}$;
3 – $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}015;\ \gamma = 0$;
4 – $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}015;\ \gamma = 10^{12}$;
5 – $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}15;\ \gamma = 0$;
6 – $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 015;\ \gamma = 10^{13}$

Выводы

1. Учитывая ускорение во времени теплового потока и градиента температуры в формуле закона Фурье, разработана математическая модель теплового воспламенения в пластине с нелинейным (экспоненциально зависящим от температуры) источником теплоты при граничных условиях первого рода с учетом пространственно - временно́й нелокальности.

2. Численные исследования полученной модели показали возрастание времени задержки теплового воспламенения при учете релаксационных свойств материалов, независимо от нагрева или охлаждения тела в окружающей среде. Этот факт объясняется тем, что ввиду тепловой инерционности материалов тепловой поток на стенке возрастает от нулевого значения в начальный момент времени до значения, задаваемого граничными условиями первого рода, по истечении некоторого конечного временно́го интервала. Следовательно, коэффициенты теплоотдачи не могут превышать некоторых предельных величин, зависящих от

теплофизических (в том числе и релаксационных) свойств тела, ни при каких условиях теплообмена с внешней средой. Время задержки теплового воспламенения возрастает также и в случае тепловой изоляции тела, то есть, когда его температурное состояние определяется лишь действием внутреннего источника теплоты.

По результатам исследований, приведенных во второй главе диссертации, получены следующие новые научные результаты:

1. Показано, что гиперболическое уравнение теплопроводности, выведенное с использованием для теплового потока формулы Максвелла – Каттанео, неадекватно описывает тепловой процесс ввиду неучета релаксации градиента температуры в формуле закона Фурье для теплового потока.

2. На основе полученной для теплового потока формулы, в которой учитывается релаксация не только теплового потока, но и градиента температуры, получены гиперболические уравнения теплопроводности, содержащие третью и четвертую производные по пространственной переменной и времени, в том числе и смешанные производные.

3. Выполненные исследования полученных точных аналитических решений указанных гиперболических уравнений теплопроводности позволяют заключить, что распределение температуры в теле определяется величинами коэффициентов релаксации. При малых их значениях решения краевых задач совпадают с решением параболического уравнения теплопроводности при аналогичных граничных условиях. С увеличением этих чисел кривые распределения температуры приближаются к прямым линиям, практически параллельным оси пространственной переменной.

4. С использованием метода разделения переменных найдены точные аналитические решения полученных уравнений для бесконечной пластины при граничных условиях первого рода. Исследования этих решений показали, что при одновременном учете временно́й и пространственной нелокальности, т. е. когда учитывается релаксация теплового потока и градиента температуры, скачки температуры внутри рассматриваемой среды, а также отрицательные ее значения отсутствуют. Скачки и отрицательные температуры наблюдаются лишь при одностороннем учете нелокальности, т.е. когда при учете релаксации теплового потока (временна́я нелокальность) релаксация градиента температуры (пространственная нелокальность) не учитывается.

5. Исследования показали, что граничные условия первого рода (тепловой удар) ввиду инерционности изменения теплового потока не могут быть приняты стенкой мгновенно – процесс их установления происходить в весьма малом, но конечном диапазоне времени. следовательно, коэффициент теплоотдачи на стенке имеет некоторый верхний предел,

определяемый физическими (в том числе и релаксационными) свойствами среды, который не может быть превышен ни при каких условиях внешнего теплообмена. Отсюда можно заключить, что граничные условия первого рода являются лишь математической идеализацией, никогда не реализуемой практически.

6. Учитывая ускорение во времени теплового потока и градиента температуры в формуле закона Фурье, разработана математическая модель теплового воспламенения в пластине с нелинейным (экспоненциально зависящим от температуры) источником теплоты при граничных условиях первого и третьего рода с учетом пространственно - временно́й нелокальности.

7. Показано, что, независимо от прогрева тела или охлаждения, при учете релаксационных свойств материалов время задержки теплового воспламенения возрастает. Оно возрастает также и при отсутствии теплообмена на границах, то есть, когда поле температуры определяется лишь действием внутреннего источника теплоты. Увеличение коэффициентов релаксации приводит к возрастанию времени задержки теплового воспламенения.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛОКАЛЬНО - НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ КОЛЕБАНИЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ И УПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ

Научные результаты данной главы представлены в работах [77 – 79, 215, 230, 231, 236, 238, 242, 244, 246, 258, 266, 267, 274, 275] автора диссертации. В третьем разделе диссертации приводятся результаты разработки локально - неравновесных процессов колебаний упругих твёрдых тел (стержней, струн) и жидкостей (в условиях гидравлического удара). Применительно жидкости рассмотрены две модели – по определению давлений, возникающих при гидравлическом ударе в трубопроводах, а также по определению скоростей течения среды. Для решения описывающих указанные модели краевых задач применялись: метод разделения переменных (метод Фурье), операционные методы, а также метод конечных разностей. Последний метод был применён к решению задачи о колебаниях стержня с учётом приложенной на его свободном торце внешней гармонической нагрузки. Показано, что решения одинаковых задач методом Фурье и операционным методом полностью совпадают (решение двумя различными точными аналитическими методами выполнено с целью сравнения полученных результатов). Отметим, что численный метод (метод конечных разностей) применён к задаче о колебаниях стержня с внешней нагрузкой, решение которой аналитическими методами затруднительно. В этом же разделе приводятся результаты экспериментальных исследований колебаний стержня, выполненных на специализированной установке в АО Ракетно-космический центр «Прогресс» (по программе совместных научных и экспериментальных исследований АО РКЦ «Прогресс» и Самарского государственного технического университета)

Периодические возмущения, вызывающие упругие деформации среды, распространяются в ней со скоростью, зависящей от физических свойств. Процесс колебательного движения, при котором возмущение, вызвавшее деформацию, не сопровождается поступательным перемещением вещества, называется волновым. Необходимыми условиями распространения волн в среде являются ее упругость (отсутствие пластического течения) и инертность (противодействие деформациям). При этом бывают поперечные и продольные волны. В случае продольных волн упругость характеризуется модулем упругости (модуль Юнга), а поперечных, например в струне, – ее натяжением. Во всех волновых процессах в формулу скорости распространения волны входят плотность среды и модуль Юнга (для струны – натяжение), характеризующие соответственно ее инертность и упругость.

Уравнения, описывающие волновые процессы, являются гиперболическими. Получение их точных решений в случаях незатухающих (вынужденных) колебаний, происходящих под действием некоторой возмущающей силы, представляет серьезные трудности. Решения таких

задач найдены лишь в частных случаях при конкретно заданных законах изменения возмущающей нагрузки [10, 28, 48, 52, 53, 57, 58, 70, 72, 78, 79, 88, 114]. При этом вопросы, связанные с решением проблемы бесконечной скорости переноса потенциалов исследуемых полей, в известной литературе не рассматривались. Однако, как показали выполненные в настоящей работе исследования, учет релаксационных свойств среды приводит к существенному отличию колебательного процесса по сравнению со случаем их неучета. Учет этих свойств позволяет устранить проблему скачкообразного изменения напряжений (для струны натяжения) во времени, возникающую ввиду заложенной в законе Гука бесконечной скорости переноса возмущений. В самом деле, напряжение и деформация $\varepsilon = du/dx$ здесь не разделены во времени (в законе Гука отсутствует время). Устранение проблемы бесконечной скорости приводит к существенному изменению не только формы колебаний, но и времени затухания колебательного процесса.

3.1 Математические модели колебаний стержня с учетом пространственно - временнóй нелокальности

На основе учета сопротивления, оказываемого средой при воздействии на нее механической нагрузки, а также с учетом зависимости от времени напряжений и деформаций в формуле закона Гука, получено дифференциальное уравнение затухающих колебаний упругого стержня, содержащее вторую и третью производные от перемещения по времени, а также смешанную производную по пространственной переменной. Используя метод Фурье, найдено его точное решение, исследование которого показало, что с увеличением коэффициентов релаксации амплитуда колебаний уменьшается и при каких-то больших их значениях процесс возврата выведенного из состояния равновесия стержня происходит при отсутствии колебательного процесса.

В настоящем разделе будут рассмотрены вопросы, связанные с решением проблемы учета временнóй зависимости напряжений и деформаций в формуле закона Гука с целью получения соответствующих этой зависимости дифференциальных уравнений.

При выводе дифференциальных уравнений продольных колебаний стержней, пружин, мембран, струн используются второй закон Ньютона и закон Гука. По закону Гука напряжение под действием некоторой силы F, пропорционально деформации

$$\sigma = EdU/dx \ , \qquad (3.1)$$

где U – перемещение; x – координата; σ – нормальное напряжение; E – модуль упругости; $\varepsilon = \partial U/\partial x$ – деформация.

По 2-ому закону Ньютона

$$F = ma = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d^2U}{dt^2} = \rho S\Delta x\frac{d^2U}{dt^2}, \tag{3.2}$$

где F – сила, m – масса тела, $a = d\upsilon / dt$ – ускорение, $\upsilon = dU / dt$ – скорость, ρ – плотность, S – площадь сечения, Δx – длина элементарного участка.

Сила, действующая на элементарном участке $(x + \Delta x)$, равна произведению площади сечения тела на разность нормальных напряжений

$$F = S(\sigma_{x+\Delta x} - \sigma_x). \tag{3.3}$$

Соотношение (3.3) для элементарного участка Δx, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, можно переписать в виде

$$F = S\Delta x\frac{d\sigma}{dx}. \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в (3.2), получаем уравнение равновесия (движения) вида

$$d\sigma / dx = \rho d^2U / dt^2. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.1) в (3.5), находим

$$\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial t^2} = e^2\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial x^2}, \tag{3.6}$$

где $e = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения возмущения.

Уравнение (3.6) представляет волновое гиперболическое уравнение, описывающее незатухающие колебания упругих тел. Отсутствие затухания объясняется тем, что в данном уравнении отсутствует член, учитывающий внутреннее сопротивление среды при воздействии на нее механической нагрузки. Для учета сопротивления примем, что сила сопротивления пропорциональна скорости перемещения во времени

$$F_c = -r\partial U / \partial t\ , \tag{3.7}$$

где r – коэффициент сопротивления.

Знак минус в формуле (3.7) означает, что сила сопротивления направлена противоположно скорости перемещения.

Подставляя (3.7) в уравнение движения (3.5), учитывая, что сила сопротивления относится к объемным силам, находим

$$\rho\frac{\partial^2U}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} - \frac{r}{\Delta V}\frac{\partial}{\partial t}\ , \tag{3.8}$$

где V – объем.

Подставляя (3.1) в (3.8), находим волновое уравнение, описывающее затухающие колебания

$$\frac{\partial^2U}{\partial t^2} = e^2\frac{\partial^2U}{\partial x^2} - \gamma\frac{\partial U}{\partial t}\ , \tag{3.9}$$

где $\gamma = r/(\rho\Delta V)$ − коэффициент сопротивления, имеющий размерность $1/c$.

При выводе уравнения (3.9) использован закон Гука, в котором, как известно, отсутствует причинно - следственная связь явлений. Причиной (действующей силой) здесь является деформация $\varepsilon = \partial U/\partial x$, а следствием – напряжение σ. Отсутствие в законе Гука временно́й переменной свидетельствует, что причина и следствие здесь не разделены во времени. В связи с чем, следствие с изменением причины наступает мгновенно (скачкообразно). Однако скорости распространения потенциалов любых физических полей не могут быть бесконечными. В реальном теле их изменение происходит с запаздыванием во времени в зависимости от релаксационных свойств, учитываемых коэффициентами релаксации.

С целью учета релаксационных свойств формулу (3.1) закона Гука представим в виде линейной комбинации производных напряжения и деформации по времени в произведении с соответствующими коэффициентами релаксации τ_1 и τ_2:

$$\sigma + \tau_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \tau_1^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} + \cdots = E\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} + \tau_2^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial t^2} + \cdots \right), \tag{3.10}$$

где τ_1, τ_2 – коэффициенты релаксации напряжения и деформации, c.

Слагаемые с производной по времени в формуле (3.10) представляют скорости изменения напряжений и деформаций, где коэффициенты релаксации τ_1 и τ_2 учитывают реакцию среды на изменение данных величин, то есть они учитывают время, которое необходимо для выравнивания (рассеивания) энергии, возникающей в упругой деформируемой среде и вызывающей появление напряжений и перемещений.

Ограничиваясь двумя первыми членами в левой и в правой частях, соотношение (3.10) будет

$$\sigma = E\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} \right) - \tau_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \tag{3.11}$$

Соотношение (3.11) полностью совпадает со стандартными моделями вязкоупругого тела, известными как модели Максвелла и Кельвина – Фойхта [88, 52, 53, 116]. Отметим, что соотношение (3.11) соответствует усложненным моделям Максвелла и Фойхта, в которых добавляется третий элемент (пружина в модели Максвелла и демпфер в модели Фойхта, называемой в этом случае моделью Кельвина или Кельвина – Фойхта).

Модели Максвелла и Кельвина – Фойхта отличаются лишь различными формулами для коэффициентов релаксации τ_1 и τ_2. Физический смысл этих моделей в том, что в них учитывается временна́я зависимость напряжений и деформаций и их взаимное влияние друг на друга. Именно такая цель была поставлена при записи соотношения (3.10). Совпадение модели (3.11) с моделями Максвелла и Кельвина – Фойхта (с точностью до постоянных) свидетельствует об использовании одинаковых исходных принципов.

Формула (3.11) может быть получена также из найденной Лыковым А.В. обобщенной системы дифференциальных уравнений Онзагера [88, 91]

$$J_i = L_i^{(r)} \frac{\partial J_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \left(L_{ik} X_k + L'_{ik} \frac{\partial X_k}{\partial t} \right), \tag{3.12}$$

где J_i – поток субстанции (тепла, массы, импульса и т. д.), X_k – движущие силы (в данном случае $X_k = \varepsilon = \partial u / \partial x$), $L_i^{(r)}$, L_{ik}, L'_{ik} – постоянные феноменологические коэффициенты.

Если положить $L_i^{(r)} = -\tau_1$; $L_{ik}^{(r)} = E$; $L'_{ik} = E\tau_2$; $J_i = \sigma$; $X_k = \partial u / \partial x$, то соотношение (3.12) приводится к формуле (3.11). Согласованность формулы (3.11) с формулой (3.12) свидетельствует о том, что в формуле (3.11) учитываются перекрестные эффекты, связанные с одновременным учетом временно́й и пространственной неравновесности и их взаимного влияния в нелокальном процессе переноса импульса.

Для вывода дифференциального уравнения, в котором учитывается изменение во времени напряжений и деформаций в законе Гука, подставим (3.11) в уравнение движения (3.8):

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + E\tau_2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} - \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) - \frac{r}{\Delta V} \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Заменяя в последней формуле величину $\partial\sigma / \partial x$ ее значением из (3.5), получаем

$$\tau_1 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + e^2 \tau_2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} - \gamma \frac{\partial U}{\partial t} \ . \tag{3.13}$$

При $\tau_1 = \tau_2 = \gamma = 0$ уравнение (3.13) совпадает с уравнением незатухающих колебаний (3.6).

Рассмотрим получение точного аналитического решения задачи о продольных колебаниях стержня жестко закрепленного на одном из торцов и свободного на втором. В начальный момент времени стержень деформирован по линейному закону, по которому максимальное перемещение имеет свободный конец стержня. Математически задача формулируется в виде

$$\tau_1 \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = e^2 \left[\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] - \gamma \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \tag{3.14}$$

$$(t > 0; \quad 0 < x \le \delta);$$

$$U(x,0) = b(\delta - x); \ (3.15) \quad \partial U(x,0)/\partial t = 0; \ (3.16) \quad \partial^2 U(x,0)/\partial t^2 = 0; \tag{3.17}$$

$$\partial U(0,t)/\partial x = 0; \quad (3.18) \qquad U(\delta,t) = 0, \tag{3.19}$$

где δ – длина стержня; b – коэффициент, который учитывает начальное перемещение.

Из условия (3.15) следует, что при $t = 0$ перемещение линейно зависит от координаты x, принимая максимум $U(0;0) = b\delta$ в точке $x = 0$ и минимум $U(\delta,0) = 0$ – в точке $x = \delta$. Согласно (3.16) и (3.17) начальные скорости и ускорения принимаются равными нулю. Из условий (3.18) следует, что на незакрепленном конце стержня (при $x = 0$) нагрузка отсутствует. Граничное условие (19) представляет условие жесткого закрепления торца стержня при $x = \delta$.

Обозначим:

$$\Theta = \frac{U}{U_0}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad \mathrm{Fo} = \frac{et}{\delta}; \quad \mathrm{Fo}_1 = \frac{e\tau_1}{\delta}; \quad \mathrm{Fo}_2 = \frac{e\tau_2}{\delta}; \quad \mathrm{Fo}_3 = \frac{\delta\gamma}{e}, \tag{3.20}$$

где Θ – безразмерное перемещение; ξ – безразмерная координата; Fo – число Фурье; $U_0 = b\delta$; Fo_1, Fo_2 – безразмерные коэффициенты релаксации; Fo_3 – безразмерный коэффициент сопротивления среды.

С учетом обозначений (3.20) математическая постановка задачи (3.14) – (3.19) принимает вид

$$\mathrm{Fo}_3 \frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_1 \frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^3} + \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} + \mathrm{Fo}_2 \frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2\partial\mathrm{Fo}} \tag{3.21}$$

$$(\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < \xi \le 1);$$

$$\Theta(\xi,0) = 1; \quad (3.22) \qquad \frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial\mathrm{Fo}} = 0; \quad (3.23) \qquad \frac{\partial^2\Theta(\xi,0)}{\partial\mathrm{Fo}^2} = 0; \tag{3.24}$$

$$\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi = 0; \quad (3.25) \qquad \Theta(1,\mathrm{Fo}) = 0. \tag{3.26}$$

Соотношение (3.21) является уравнением затухающей волны перемещения. Оно отличается от уравнения (3.6) наличием трех дополнительных слагаемых, позволяющих учесть инерционность изменения во времени напряжений и деформаций в законе Гука, а также оказываемой средой сопротивление перемещению ее участков при действии некоторой нагрузки (первое слагаемое левой части).

Решение задачи (3.21) – (3.26) разыскивается в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \varphi(\mathrm{Fo})\psi(\xi). \tag{3.27}$$

Подставляя (3.27) в (3.21), получаем

$$\frac{\mathrm{Fo}_3\varphi' + \varphi'' + \mathrm{Fo}_1\varphi'''}{\varphi + \mathrm{Fo}_2\varphi'} = \frac{\psi''}{\psi} = -\nu, \tag{3.28}$$

где $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ – 1-ая, 2-ая и 3-я производные по времени; ψ'' – вторая производная по координате ξ; ν – постоянная.

Из (3.28) находим обыкновенные уравнения

$$\mathrm{Fo}_1\varphi''' + \varphi'' + (\mathrm{Fo}_3 + \nu\mathrm{Fo}_2)\varphi' + \nu\varphi = 0; \tag{3.29}$$

$$\psi'' + \nu\psi = 0. \tag{3.30}$$

Подставляя (3.27) в (3.25), (3.26), получаем

$$d\psi(0)/d\xi = 0; \quad (3.31) \qquad \psi(1) = 0. \tag{3.32}$$

Решение задачи Штурма – Лиувилля (3.30) – (3.32) разыскивается в виде

$$\psi(\xi) = \cos(r\pi\xi/2), \quad (r = 2k - 1; \ \ k = 1, 2, \ldots). \tag{3.33}$$

Соотношение (3.33) удовлетворяет условиям (3.31), (3.32). Подставляя (3.33) в (3.30), относительно собственных значений получаем формулу

$$\nu_k = r^2\pi^2/4 \quad (r = 2k-1;\ \ k = 1, 2, \ldots)\,. \tag{3.34}$$

Собственные функции находятся из (3.33).

Характеристическое уравнение применительно к уравнению (3.29) имеет вид

$$\mathrm{Fo}_1 z^3 + z^2 + (\mathrm{Fo}_3 + \nu_k \mathrm{Fo}_2)z + \nu_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.35}$$

Корни кубического уравнения для любого собственного числа будут

$$z_{1k} = \gamma + i\beta\ ; \quad (3.36) \quad z_{2k} = \gamma - i\beta\ ; \quad (3.37) \quad z_{3k} = (A/2 - 2B/A - 1)/(3\mathrm{Fo}_1)\,, \tag{3.38}$$

где $\gamma = (B/A - A/4 - 1)/(3\mathrm{Fo}_1)$; $\beta = \sqrt{3}(A/2 + 2B/A - 1)/(6\mathrm{Fo}_1)$; $i = \sqrt{-1}$;

$$A = \{36\mathrm{Fo}_1(\nu_k\mathrm{Fo}_2 + \mathrm{Fo}_3) - 108\nu_k\mathrm{Fo}_1^2 - 8 + 12\sqrt{3}\,[2\nu_k m_1(2\nu_k^2\mathrm{Fo}_2^2 + 6\nu_k m_2 + 6\mathrm{Fo}_3^2 -$$

$$-9\nu_k) - \nu_k\mathrm{Fo}_2(\nu_k\mathrm{Fo}_2 + 2\mathrm{Fo}_3) + 2m_3(2\mathrm{Fo}_3^2 - 9\nu_k) - \mathrm{Fo}_3^2 + 27\nu_k\mathrm{Fo}_1^2 + 4\nu_k\,]^{1/2}\mathrm{Fo}_1\}^{1/3};$$

$$B = 3\mathrm{Fo}_1(\nu_k\mathrm{Fo}_2 + \mathrm{Fo}_3) - 1\ ; \quad m_1 = \mathrm{Fo}_1\mathrm{Fo}_2\ ; \quad m_2 = \mathrm{Fo}_2\mathrm{Fo}_3\ ; \quad m_3 = \mathrm{Fo}_1\mathrm{Fo}_3\,.$$

Частные решения уравнения (3.29) будут

$$\varphi_1 = \exp(\gamma + i\beta)\mathrm{Fo}\,; \qquad \varphi_2 = \exp(\gamma + i\beta)\mathrm{Fo}\,; \qquad \varphi_3 = \exp(z_{3k}\mathrm{Fo})\ . \tag{3.39}$$

Используя частные решения, составим интеграл уравнения (3.39):

$$\varphi_k(\mathrm{Fo}) = C_{1k}\exp[(\gamma + i\beta)\mathrm{Fo}] + C_{2k}[\exp(\gamma + i\beta)\mathrm{Fo}] + C_{3k}\exp(z_{3k}\mathrm{Fo})\ . \tag{3.40}$$

где $C_{jk}\,(j = 1, 2, 3;\ \ k = 1, 2, \ldots)$ – константы интегрирования.

Соотношение (3.40) представим в виде

$$\varphi_k(\mathrm{Fo}) = \exp(\gamma\mathrm{Fo})[C_{1k}\exp(i\beta)\mathrm{Fo}) + C_{1k}\exp(-i\beta)\mathrm{Fo})] + C_{3k}\exp(z_{3k}\mathrm{Fo})\,. \tag{3.41}$$

Используя формулы Эйлера

$$\exp(is) = \cos s + i\sin s; \quad \exp(-is) = \cos s - i\sin s,$$

соотношение (3.41) запишется следующим образом:

$$\varphi_k(\mathrm{Fo}) = \exp(\gamma\mathrm{Fo})[C_{1k}(\cos(\beta\mathrm{Fo}) + i\sin(\beta\mathrm{Fo}) + C_{2k}(\cos(\beta\mathrm{Fo}) - i\sin(\beta\mathrm{Fo}))] +$$

$$+ C_{3k}\exp(z_{3k}\mathrm{Fo}) = \exp(\gamma\mathrm{Fo})[(C_{1k} + C_{2k})\cos(\beta\mathrm{Fo}) - i\,(C_{2k} - C_{1k})\sin(\beta\mathrm{Fo}))] +$$

$$+ C_{3k}\exp(z_{3k}\mathrm{Fo})\,.$$

Обозначим $B_{1k} = C_{1k} + C_{2k}$; $B_{2k} = i\,(C_{2k} - C_{1k})$.

С учетом обозначений решение уравнения (3.29) примет вид

$$\varphi_k(\mathrm{Fo}) = \exp(\gamma\mathrm{Fo})[B_{1k}\cos(\beta\mathrm{Fo}) - B_{2k}\sin(\beta\mathrm{Fo})] + C_{3k}\exp(z_{3k}\mathrm{Fo}). \tag{3.42}$$

Подставляя (3.33), (3.42) в (3.27), получаем

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \{\exp(\gamma\,\mathrm{Fo})[B_{1k}\cos(\beta\mathrm{Fo}) - \mathrm{B}_{2k}\sin(\beta\mathrm{Fo})] +$$

$$+ C_{3k}\exp(z_{3k}\mathrm{Fo})\}\cos(r\pi\xi/2) \quad (r = 2k-1;\ \ k = 1, 2, \ldots)\,. \tag{3.43}$$

Любое частное решение (3.43) удовлетворяет уравнению (3.21) и краевым условиям (3.25), (3.26), однако ни одно из этих решений не удовлетворяет условиям (3.22) – (3.24). Для выполнения этих условий запишем

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} \{\exp(\gamma\,\mathrm{Fo})[B_{1k}\cos(\beta\mathrm{Fo}) - B_{2k}\sin(\beta\mathrm{Fo})] +$$

$$+ C_{3k}\exp(z_{3k}\mathrm{Fo})\}\cos(r\pi\xi/2) \quad (r = 2k-1; \quad k = 1, 2, \ldots), \tag{3.44}$$

где константы интегрирования B_{1k}, B_{2k}, C_{3k}, определяются из (3.22) – (3.24). Подставляя (3.44) в (3.23), находим

$$B_{1k} = (B_{2k}\beta - C_{3k}z_{3k})/\gamma \ . \tag{3.45}$$

Подставляя (3.44) в (3.24), получаем

$$B_{2k} = [(\gamma^2 - \beta^2)B_{1k} + C_{3k}z_{3k}{}^2]/(2\gamma\beta). \tag{3.46}$$

После подстановки (3.44) в (3.22), находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}(B_{1k} + C_{3k})\cos(r\pi\xi/2) = 1 - \xi \quad (r = 2k-1). \tag{3.47}$$

Соотношение (3.47) является разложением функции $(1-\xi)$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля на отрезке $[0; 1]$. Для определения неизвестного коэффициента C_{3k} умножим (3.47) на $\cos(j\pi\xi/2)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и найдем интеграл полученного выражения в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$:

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}(B_{1k} + C_{3k})\cos(r\pi\xi/2)\cos(r\pi\xi/2)d\xi = \int_0^1 (1-\xi)\cos(r\pi\xi/2)d\xi. \quad (j = r = 2k-1). \tag{3.48}$$

Соотношение (3.48) вследствие ортогональности косинусов приводится к виду

$$\int_0^1 (B_{1k} + C_{3k})\cos^2(r\pi\xi/2)d\xi = \int_0^1 (1-\xi)\cos(r\pi\xi/2)d\xi \quad (j = r = 2k-1). \tag{3.49}$$

Вычисляя интегралы в (3.49), находим

$$C_{3k} = -[(D + r^2\pi^2)B_{1k} + 8\cos(0{,}5r\pi) - 8]/(D + r^2\pi^2) \quad (r = 2k-1; \ k = 1, 2, \ldots), \tag{3.50}$$

где $D = 2r\pi\cos(0{,}5r\pi)\sin(0{,}5r\pi)$.

После нахождения постоянных B_{1k}, B_{2k} и C_{3k} решение задачи (3.21) – (3.26) находится из (3.44).

В случае $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$ и $\mathrm{Fo}_3 \neq 0$ характеристическое уравнение (3.35) будет

$$z^2 + \mathrm{Fo}_3 z + \nu_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.51}$$

Частные решения уравнения (3.51) принимают вид

$$z_{1k,2k} = -0{,}5\mathrm{Fo}_3 \pm 0{,}5\sqrt{\mathrm{Fo}_3^2 - 4\nu_k} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.52}$$

Используя (3.52), запишем общий интеграл уравнения (3.35):

$$\varphi_k(\mathrm{Fo}) = C_{1k}\exp(z_{1k}\mathrm{Fo}) + C_{2k}\exp(z_{2k}\mathrm{Fo})\,, \qquad (3.53)$$

где C_{1k} и C_{2k} – постоянные интегрирования.

Подставляя (3.33) и (3.53) в (3.27) и, составляя сумму частных решений, будем иметь

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[C_{1k}\exp(z_{1k}\mathrm{Fo}) + C_{2k}\exp(z_{2k}\mathrm{Fo})\right]\cos(r\pi\xi/2) \quad (r = 2k-1;\ \ k = 1, 2, \ldots). \qquad (3.54)$$

Соотношения для констант интегрирования C_{1k} и C_{2k}, определяемых из (3.22), (3.23), будут

$$C_{1k} = \frac{8\left[\cos(0{,}5r\pi) - 1\right]}{r\pi(z_{2k} - z_{1k})(2E_1 + r\pi)}; \qquad C_{2k} = C_{1k}z_{1k}/z_{2k}\ , \qquad (3.55)$$

где $E_1 = \cos(r\pi/2)\sin(r\pi/2)$.

Соотношение (3.54) с учетом (3.55) представляет точное решение задачи (3.21) – (3.26) при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$; $\mathrm{Fo}_3 \neq 0$.

Уравнение (3.1) закона Гука с учетом принятых обозначений в безразмерных переменных $\Theta = U/U_0$ и $\xi = x/\delta$ будет:

$$\bar{\sigma} = \partial\Theta/\partial\xi\ , \qquad (3.56)$$

где $\bar{\sigma} = \sigma/(b\mathrm{E})$; $\Theta(\xi,\mathrm{Fo})$ – функция для безразмерных перемещений при незатухающих колебаниях, то есть она является решением уравнения (3.21) при равенстве нулю членов, находящихся в произведении с Fo_1, Fo_2 и Fo_3.

Точное решение уравнения незатухающих колебаний будет

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{r^2\pi^2}\cos(r\pi\mathrm{Fo}/2)\cos(r\pi\xi/2) \quad (r = 2k-1). \qquad (3.57)$$

Расчеты напряжений по формуле (3.56) с учетом (3.57) при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = \mathrm{Fo}_3 = 0$ даны на рисунке 3.1. Из анализа следует, что колебания $\bar{\sigma}$ представляют скачкообразный во времени процесс от значения $\bar{\sigma} = -0{,}1$ до $\bar{\sigma} = 0{,}1$.

Соотношение (3.8) в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\mathrm{Fo}} + A_1\bar{\sigma} = A_2(\mathrm{Fo})\ , \qquad (3.58)$$

где $A_1 = 1/\mathrm{Fo}_1$; $A_2(\mathrm{Fo}) = \dfrac{1}{\mathrm{Fo}_1}\dfrac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi} + \dfrac{\mathrm{Fo}_2}{\mathrm{Fo}_1}\dfrac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi\partial\mathrm{Fo}}$.

Начальным условием к уравнению (3.58) будет

$$\bar{\sigma}(0) = 0\ . \qquad (3.59)$$

Интегрируя (3.58), получаем

$$\bar{\sigma}(\mathrm{Fo}) = \left[\int A_1A_2(\mathrm{Fo})\exp(A_1\mathrm{Fo})\,d\mathrm{Fo} + \mathrm{C}\right]\exp(-A_1\mathrm{Fo})\,, \qquad (3.60)$$

где C – константа интегрирования, которая находится из условия (3.59).

Расчеты напряжения по формуле (3.60) приведены на рисунке 3.2. Из анализа следует, что напряжения в стержне меняются по гармонической зависимости, имея затухающую амплитуду и неизменную частоту. Таким образом, учет релаксационных слагаемых в формуле закона Гука позволяет устранить скачкообразное изменение напряжений во времени.

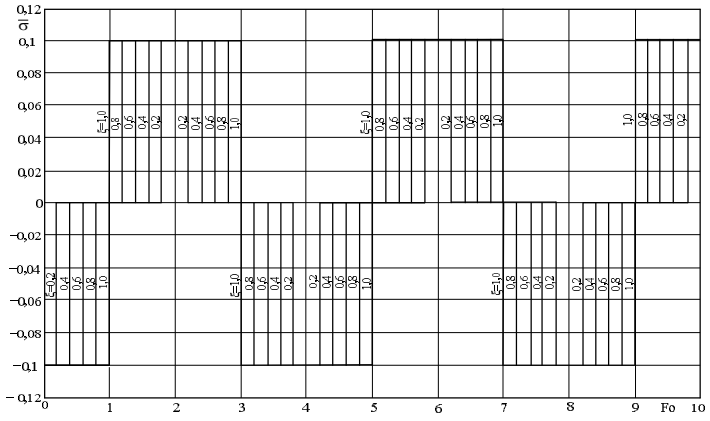


Рисунок 3.1. Распределение напряжений (по формуле (3.56)): $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = \mathrm{Fo}_3 = 0$. $n = 100$ – число слагаемых ряда (3.44)

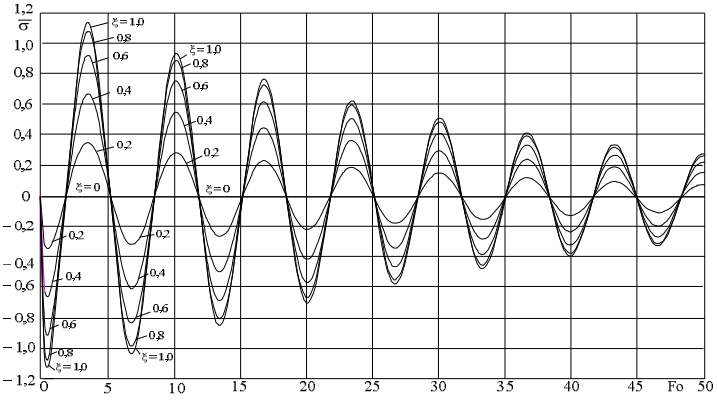


Рисунок 3.2. Распределение напряжений (по формуле (3.60))

Выполним анализ полученных результатов, полученных по формуле (3.44) при различных значениях Fo_1, Fo_2 и Fo_3. Например, при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}1$ и $\mathrm{Fo}_3 = 0$ колебания являются незатухающими. Отсутствие затухания объясняется тем, что безразмерный коэффициент сопротивления Fo_3 принят равным нулю.

На рисунках 3.3, 3.4, 3.5 представлены данные расчетов перемещений по соотношению (3.44) при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = \mathrm{Fo}_3 = 0{,}1$ (рисунок 3.3) и $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}1$; $\mathrm{Fo}_3 = 0{,}5$ (рисунок 3.4); $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}1$; $\mathrm{Fo}_3 = 30$ (рисунок 3.5). Из анализа можно заключить, что увеличение числа Fo_3 (при неизменных Fo_1 и Fo_2) сопровождается быстрым затуханием колебаний и при каких-то больших его значениях ($\mathrm{Fo}_3 > 5$) возврат стержня в исходное состояние происходит практически без колебаний (жесткое затухание (рисунок 3.5)).

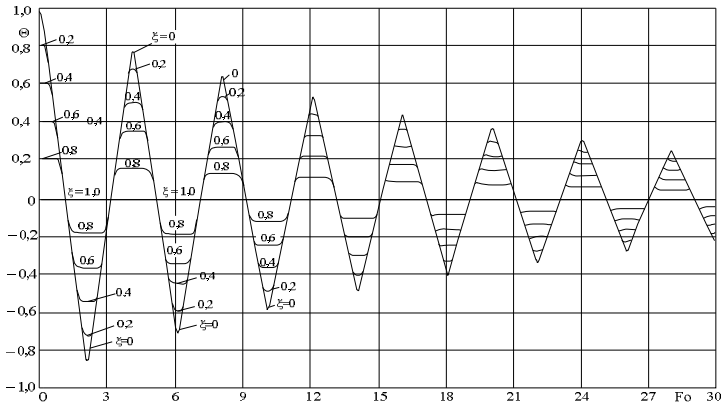


Рисунок 3.3. Изменение перемещений стержня во времени (по формуле (3.44)): $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = \mathrm{Fo}_3 = 0{,}1$. $n = 100$ – число слагаемых ряда (3.44)

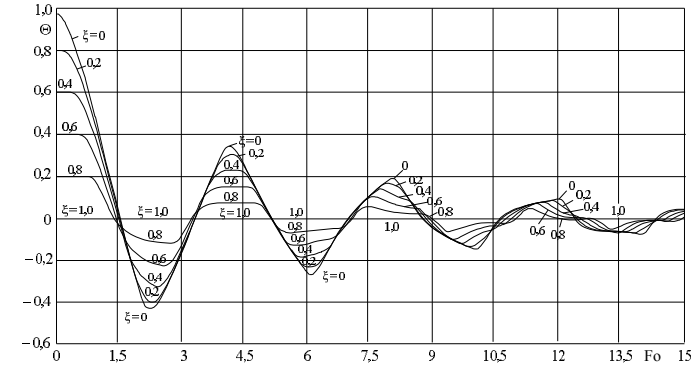


Рисунок 3.4. Изменение перемещений стержня во времени (расчет по формуле (3.44)): $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}1$; $\mathrm{Fo}_3 = 0{,}5$; $n = 100$

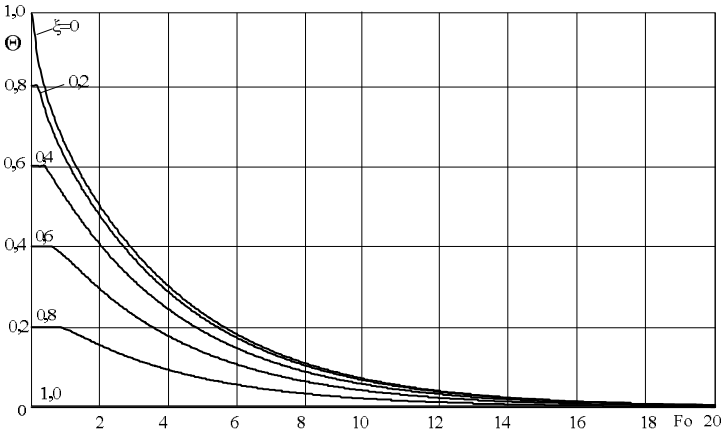


Рисунок 3.5. Изменение перемещений стержня (по формуле (3.44)): $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}1$; $\mathrm{Fo}_3 = 30$; $n = 100$

На Рисунках 3.6, 3.7 представлены результаты расчетов перемещений по формуле (3.44) по длине стержня для различных моментов времени.

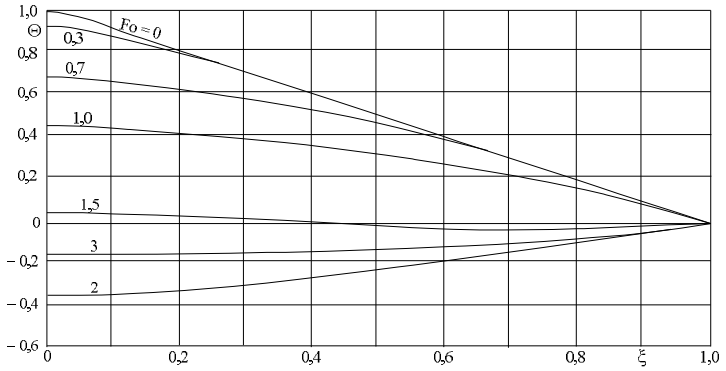


Рисунок 3.6. Изменение перемещений по длине стержня (расчет по формуле (3.44)): $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}1$; $\mathrm{Fo}_3 = 0$; $n = 100$

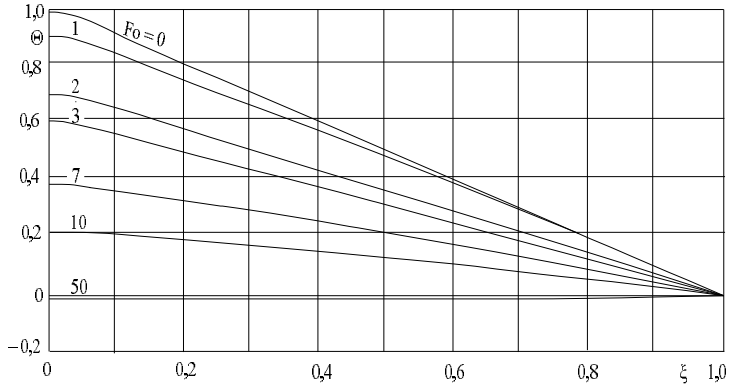


Рисунок 3.7. Изменение перемещений по длине стержня (расчет по формуле (3.44)): $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}1$; $\mathrm{Fo}_3 = 5$; $n = 100$

На графиках рисунков 3.8, 3.9, 3.10 приводятся результаты расчетов перемещений по соотношению (3.44) при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 2$, $\mathrm{Fo}_3 = 1$ (рисунок 3.8); $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10$; $\mathrm{Fo}_3 = 0$ (рисунок 3.9); $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10$; $\mathrm{Fo}_3 = 20$ (рисунок 3.10). Их анализ позволяет заключить, что с увеличением Fo_1 и Fo_2 (при $\mathrm{Fo}_3 = 0$) амплитуда колебаний уменьшается (при неизменной частоте), при этом процесс колебаний является незатухающим. При каких-то очень больших значениях Fo_1 и Fo_2 ($\mathrm{Fo}_3 = 0$) возврат стержня в исходное состояние происходит практически при отсутствии колебательного процесса (жесткое затухание).

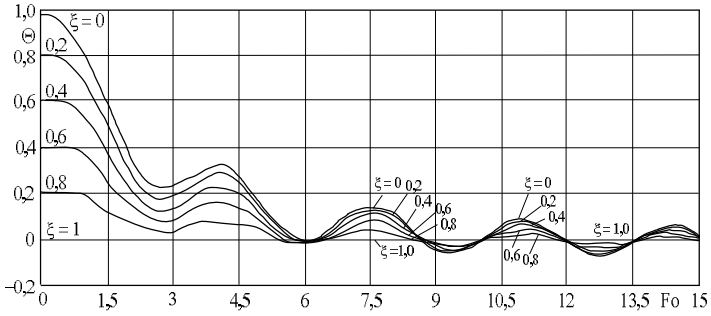


Рисунок 3.8. Изменение перемещений стержня во времени (расчет по формуле (3.44)): $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 2$; $\mathrm{Fo}_3 = 1$; $n = 100$

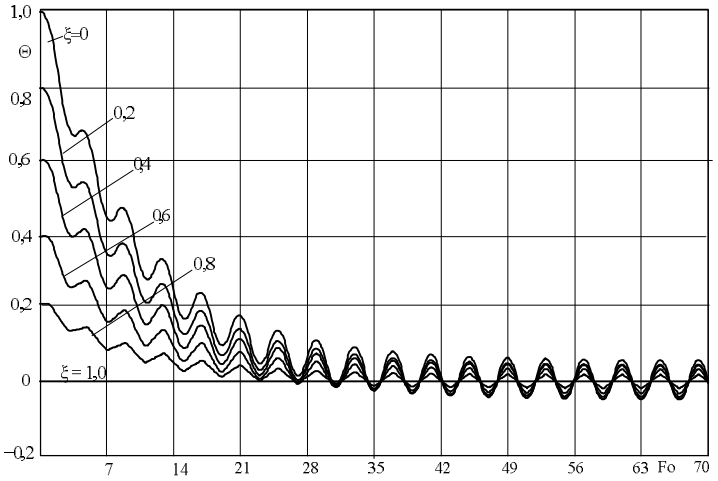


Рисунок 3.9. Изменение перемещений стержня во времени (расчет по формуле (3.44)): $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10$; $\mathrm{Fo}_3 = 0$; $n = 100$

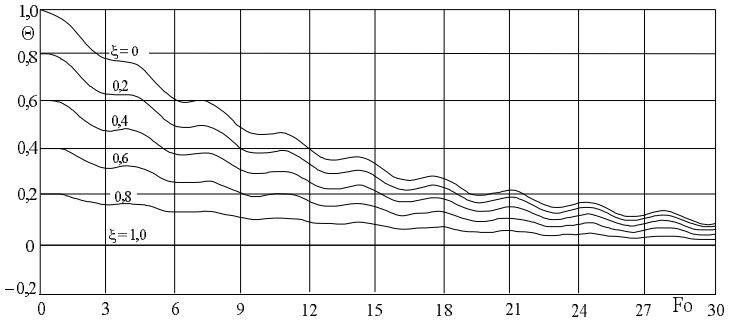


Рисунок 3.10. Изменение перемещений стержня во времени (расчет по формуле (3.44)): $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10$; $\mathrm{Fo}_3 = 20$; $n = 100$

На графиках рисунков 3.11 – 3.13 приводятся результаты расчетов перемещений по соотношению (3.54) при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$; $\mathrm{Fo}_3 = 1$ (рисунок 3.11); $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$; $\mathrm{Fo}_3 = 2$ (рисунок 3.12); $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$; $\mathrm{Fo}_3 = 10$ (рисунок 3.13). Их анализ позволяет заключить, что при любом $\mathrm{Fo}_3 \neq 0$ колебания являются затухающими. С увеличением Fo_3 время затухания уменьшается и при каких-то больших значениях Fo_3 возврат стержня в исходное состояние происходит практически при отсутствии колебательного процесса (жесткое затухание (рисунок 3.13)).

Таким образом, на основе формул (3.44) и (3.54) можно рассчитать практически любые варианты колебаний стержня, варьируя параметры Fo_1, Fo_2, Fo_3. В заключении отметим, что полученные результаты можно также использовать при исследовании колебаний струн, пружин, мембран, несжимаемых жидкостей и других физических объектов.

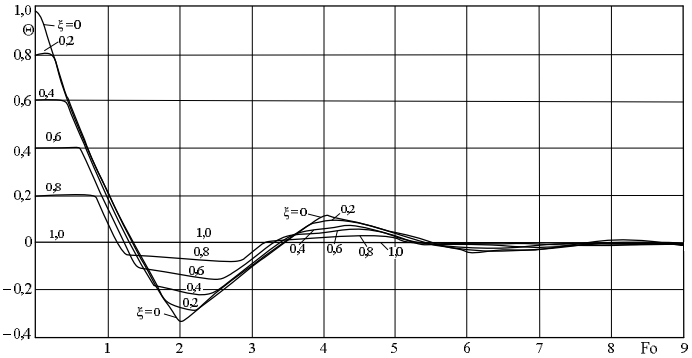


Рисунок 3.11. Изменение перемещений стержня во времени (расчет по формуле (3.54)): $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$; $\mathrm{Fo}_3 = 1$; $n = 100$

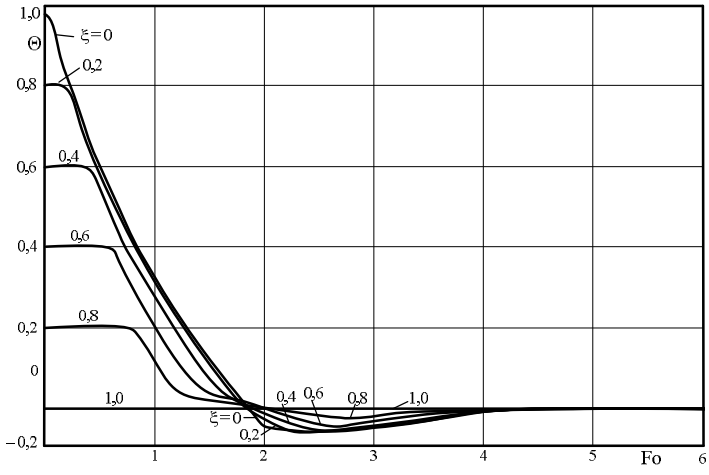


Рисунок 3.12. Изменение перемещений стержня во времени (расчет по формуле (3.54)): $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$; $\mathrm{Fo}_3 = 2$; $n = 100$

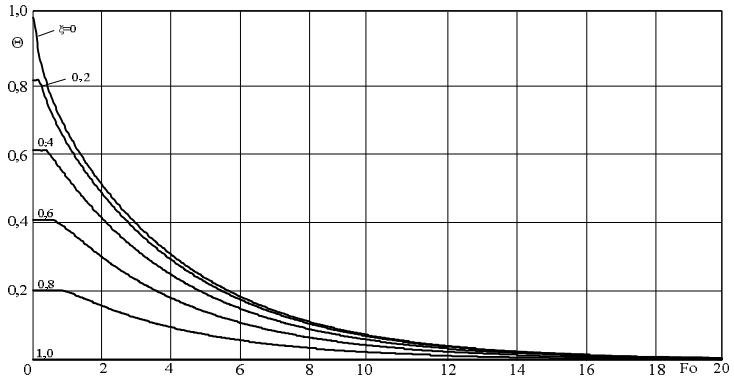


Рисунок 3.13. Изменение перемещений (по формуле (3.54)): $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$; $\mathrm{Fo}_3 = 10$; $n = 100$

Выводы

1. Построена математическая модель затухающих колебаний тел с учетом релаксационных явлений, а также сопротивления, оказываемого средой процессу изменения ее формы. Представляя формулу закона Гука в виде линейной комбинации производных от напряжения и деформации по степеням коэффициентов релаксации, с использованием уравнения движения получено дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня, содержащее первую и третью производные от перемещения по времени, а также смешанную пространственно - временну́ю производную. Используя метод разделения переменных, получено точное аналитическое решение найденного уравнения и выполнен его детальный анализ.

2. Исследования полученного решения позволили заключить, что использование релаксационных составляющих напряжений и деформаций в формуле закона Гука приводит к устранению скачкообразного изменения напряжений в процессе колебаний стержня, выведенного из состояния равновесия. Процесс колебаний в зависимости от величины коэффициентов релаксации имеет качественные различия. И, в частности, с увеличением этих коэффициентов происходит уменьшение амплитуды колебаний при неизменной частоте. И в пределе при каких-то их больших значениях возврат стержня в исходное состояние происходит практически при отсутствии колебательного процесса (жесткое затухание). Жесткое затухание наблюдается также и при каких-то больших значениях величины Fo_3.

3.2 Разработка математической модели локально - неравновесного процесса поперечных колебаний струны

При выводе уравнения колебаний струны с учетом ее релаксационных свойств рассмотрим сначала последовательность вывода гиперболического уравнения незатухающих колебаний, а затем на основе этого вывода получим искомое уравнение затухающих колебаний.

Рассматривая задачу о поперечных колебаниях струны будем полагать, что смещения лежат в плоскости u, x (см. рисунок 3.14) и что вектор смещения в любой момент времени перпендикулярен к оси x. В этом случае колебательный процесс можно описать одной функцией $u(x,t)$, характеризующей вертикальное перемещение струны во времени. Полагаем, что натяжения, возникающие в струне, направлены по касательной к ее профилю, то есть струна является гибкой (не сопротивляется изгибу).

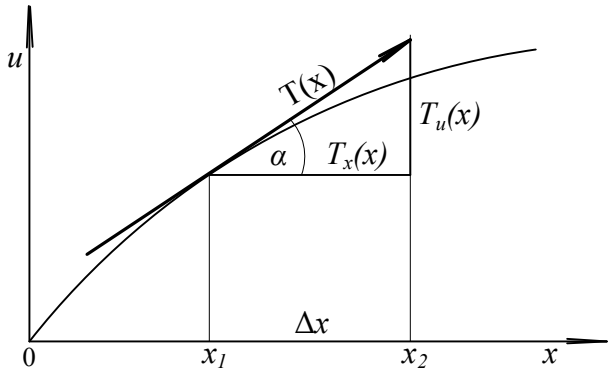


Рисунок 3.14. Схема к объяснению вывода уравнения колебаний струны

Возникающая в струне величина натяжения (вследствие ее упругости) может быть найдена по закону Гука. Рассматривая бесконечно малые колебания, длина дуги участка $[x_1, x_2]$ находится по соотношению (рисунок 3.14)

$$ds^2 = du^2 + dx^2. \tag{3.61}$$

Деля на dx^2, получаем

$$ds = \sqrt{1 + (du/dx)^2}\,dx. \tag{3.62}$$

Ввиду малости величины u ее изменение du/dx настолько мало, что можно пренебречь его квадратом. Тогда из (3.62) находим $ds = dx$. Таким образом, удлинения участков струны в процессе колебания не происходит и, следовательно, величина натяжения T в соответствии с классическим законом Гука не меняется от времени [48, 114].

Найдем проекции натяжения на оси u и x, обозначив их $T_u(x)$ и $T_x(x)$,

$$T_x(x) = T(x)\cos\alpha = T(x)\frac{dx}{ds} \approx T(x); \tag{3.63}$$

$$T_u(x) = T(x)\sin\alpha\ , \tag{3.64}$$

где α – угол между касательной к кривой $u(x,t)$ и осью x.

Так как рассматриваются малые колебания, то угол α мал. В этом случае $\sin\alpha = \alpha = \mathrm{tg}\,\alpha$. Тогда соотношение (3.64) можно записать в виде [66]

$$T_u(x) = T(x)tg\alpha = T(x)\frac{du}{dx}. \tag{3.65}$$

Соотношение (3.65) представляет классический закон Гука для вертикального смещения струны.

Рассматривая только поперечные колебания (по оси u), составим сумму проекций всех сил на ось x и приравняем ее к нулю. На участок $[x_1, x_2]$ действуют внешние силы, силы инерции и силы натяжения. Так как внешние силы и силы инерции (по предположению) направлены по оси u, то для суммы проекций на ось x можно записать следующее соотношение: $T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0$ или, учитывая (3.63), $T(x_2) = T(x_1)$. Отсюда следует, что натяжение T не зависит от величины x.

Таким образом, для любых x и t сила натяжения T является постоянной величиной. Отсюда уравнение (3.65) принимает вид

$$T_u(x) = T\frac{du}{dx}. \tag{3.66}$$

По второму закону Ньютона для поперечных колебаний струны можно записать

$$F = ma = \rho\Delta x\frac{d\vartheta}{dt} = \rho\Delta x\frac{d^2u}{dt^2}, \tag{3.67}$$

где F – сила; m – масса; ρ – линейная плотность; $a = d\vartheta/dt$ – ускорение; $\vartheta = du/dt$ – скорость; Δx – длина элементарного участка.

Сила F, выраженная через натяжение T_u, для элементарного участка будет

$$F = \Delta x\frac{dT_u}{dx}. \tag{3.68}$$

Подставляя (3.68) в (3.67), находим

$$\rho\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dT_u}{dx}. \tag{3.69}$$

Подставляя (3.66) в (3.69), будем иметь

$$\frac{d^2u(x,t)}{dt^2} = e^2\frac{\partial^2u(x,t)}{dx^2}, \tag{3.70}$$

где $e = \sqrt{T/\rho}$ – скорость упругой волны.

Уравнение (3.70) является классическим волновым уравнением, описывающим незатухающие колебания струны. Исследование его решений дано в ряде литературных источников [10, 45, 48, 114].

Для учета затухания колебаний, уравнение должно включать слагаемое, учитывающее силу внутреннего трения. По формуле (3.66) натяжение, вызванное какой-либо силой, мгновенно достигает соответствующих ей величин, то есть в этом законе заложена бесконечная скорость распространения возмущений. Однако, как натяжение, так и величина du/dx, не

могут изменяться мгновенно. В реальной среде изменения происходят с некоторым запаздыванием в зависимости от релаксационных свойств материалов, учитываемым τ_r коэффициентом релаксации.

Для учета скорости изменения натяжения $T_u(x)$ и производной от перемещения du/dx представим их в формуле (3.66) в виде соотношений [79]

$$T_u + \tau_r \frac{\partial T_u}{\partial t}; \qquad (3.71) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_r \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}. \qquad (3.72)$$

Вторые члены (3.71) описывают скорости изменения натяжения T_u и производной от перемещения du/dx.

Формула (3.66), учитывая (3.71), будет

$$T_u = T\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \tau_r \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) - \tau_r \frac{\partial T_u}{\partial t}. \qquad (3.73)$$

Подставляя (3.73) в (3.69), получаем

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + T\tau_r \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \tau_r \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T_u}{\partial x}\right).$$

Заменяя в последнем выражении $\partial T_u / \partial x$ ее величиной из (3.69), находим

$$\tau_r \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^2 \tau_r \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}. \qquad (3.74)$$

Уравнение (3.74) получено с учетом релаксационных явлений. Однако здесь отсутствует слагаемые, учитывающее сопротивление среды при действии на нее нагрузки. Для его учета примем, что сопротивление пропорционально скорости изменения перемещения

$$F_c = -r du/dt, \qquad (3.75)$$

где «минус» означает, что сила сопротивления F_c направлена противоположно скорости изменения перемещения, r – коэффициент сопротивления.

Соотношение (3.75) подставим в уравнение (3.74):

$$\tau_r \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tau_r \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}\right) - \gamma \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (3.76)$$

где $\gamma = r/(\rho\delta)$ – коэффициент, *1/c*.

При $\tau_r = 0$ и $\gamma = 0$ уравнение (3.76) становится уравнением незатухающих колебаний (3.70).

Рассмотрим получение точного аналитического решения задачи затухающих колебаний струны, закрепленной на ее концах. Постановка задачи будет

$$\gamma\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\tau_r\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3}=e^2\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\tau_r\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2\partial t}\right]\qquad (t>0;\quad 0<x<\delta);\qquad (3.77)$$

$$u(x,0)=bx(\delta-x);\quad (3.78)\qquad \partial u(x,0)/dt=0;\qquad (3.79)$$

$$\partial^2 u(x,0)/\partial t^2=0;\quad (3.80)\qquad u(0,t)=0;\quad (3.81)\qquad u(\delta,t)=0,\qquad (3.82)$$

где δ – длина струны.

В задаче (3.77) – (3.82) начальное положение струны описывается соотношением (3.78), где b – коэффициент. По условиям (3.79), (3.80) начальные скорости и ускорения равны нулю (отметим, что можно найти решение и при их значениях отличных от нулевых). Соотношения (3.81), (3.82) характеризуют жесткое закрепление струны в точках $x=0$ и $x=\delta$.

Обозначим:

$$\Theta=\frac{u}{u_0};\qquad \xi=\frac{x}{\delta};\qquad \mathrm{Fo}=\frac{et}{\delta};\qquad \mathrm{Fo}_r=\frac{e\,\tau_r}{\delta};\qquad \mathrm{Fo}_1=\frac{\delta\gamma}{e},\qquad (3.83)$$

где $u_0=b\delta^2$; Θ – безразмерное перемещение; ξ – безразмерная координата; Fo – число Фурье; Fo_r, Fo_1 – безразмерные коэффициенты релаксации и сопротивления среды.

С учетом (3.83) задача (3.77) – (3.82) приводится к виду

$$\mathrm{Fo}_1\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_r\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^3}+\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}+\mathrm{Fo}_r\frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2\,\partial\mathrm{Fo}}\qquad (3.84)$$

$$(\mathrm{Fo}>0;\qquad 0<\xi<1);$$

$$\Theta(\xi,0)=\xi(1-\xi);\quad (3.85)\qquad \partial\Theta(\xi,0)/\partial\mathrm{Fo}=0;\qquad (3.86)$$

$$\partial^2\Theta(\xi,0)/\partial\mathrm{Fo}^2=0;\quad (3.87)\qquad \Theta(0,\mathrm{Fo})=0;\quad (3.88)\qquad \Theta(1,\mathrm{Fo})=0.\qquad (3.89)$$

Решение задачи (3.84) – (3.89) разыскивается в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\varphi(\mathrm{Fo})\psi(\xi).\qquad (3.90)$$

Подставляя (3.90) в (3.84), получаем

$$\frac{\mathrm{Fo}_1\varphi'+\varphi''+\mathrm{Fo}_r\,\varphi'''}{\varphi+\mathrm{Fo}_1\varphi'}=\frac{\psi''}{\psi}=-\mu^2,\qquad (3.91)$$

где $\varphi',\varphi'',\varphi'''$ – 1-ая, 2-ая и 3-я производные по времени Fo; ψ'' – вторая производная по координате ξ; μ^2 – постоянная.

Из (3.91) получаем обыкновенные уравнения

$$\mathrm{Fo}_r\varphi'''+\varphi''+(\mathrm{Fo}_1+\nu\,\mathrm{Fo}_r)\varphi'+\nu\varphi=0,\qquad (3.92)$$

$$\psi''+\nu\psi=0,\qquad (3.93)$$

где $\nu=\mu^2$.

Подставляя (3.89) в (3.88), (3.89), получаем

$$\psi(0)=0; \quad (3.94) \qquad \psi(1)=0. \qquad (3.95)$$

Решение задачи (3.93) – (3.95) разыскивается в виде

$$\psi(\xi)=\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right] \quad (r=2k-1; \quad k=1,2,\ldots) \qquad (3.96)$$

Соотношение (3.96) удовлетворяет условиям (3.94), (3.95). Подставляя (3.96) в (3.93), для нахождения собственных значений получаем формулу

$$\nu_k=r^2\pi^2 \quad (r=2k-1; \quad k=1,2,\ldots). \qquad (3.97)$$

Характеристическое уравнение однородного уравнения (3.92) будет

$$\mathrm{Fo}_r z^3+z^2+(\mathrm{Fo}_1+\nu\,\mathrm{Fo}_r)z+\nu_k=0 \quad (k=1,2,\ldots). \qquad (3.98)$$

Корни кубического уравнения (3.98) будут

$$z_{1k}=C-1/(3\mathrm{Fo}_r); \quad (3.99) \qquad z_{2k}=-C/2-1/3(\mathrm{Fo}_r); \qquad (3.100)$$

$$z_{3k}=-C/2-1/3(\mathrm{Fo}_r)-D, \qquad (3.101)$$

где $C=A/(6\mathrm{Fo}_r)-2B/(3A\mathrm{Fo}_r)$; $B=3\mathrm{Fo}_1\mathrm{Fo}_r+3\nu\mathrm{Fo}_r^2-1$; $D=\frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{A}{6\mathrm{Fo}_r}+\frac{2B}{3A\mathrm{Fo}_r}\right)$;

$$A=\left\{36\,\mathrm{Fo}_1\mathrm{Fo}_r-72\nu\mathrm{Fo}_r^2-8+12\sqrt{3}\left[4\mathrm{Fo}_r\mathrm{Fo}_1(\mathrm{Fo}_1^2+3\mathrm{Fo}_r\mathrm{Fo}_1+3\mathrm{Fo}_r^2\nu^2+5\nu)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathrm{Fo}_1^2+4\nu^2\mathrm{Fo}_r^2(\nu\mathrm{Fo}_r^2+2)+4\nu\right]\right\}; \quad i=\sqrt{-1}.$$

С учетом частных решений уравнения (3.92)

$$\varphi_1=\exp(z_{1k}\mathrm{Fo}); \quad \varphi_2=\exp[(D_3+iD_4)\mathrm{Fo}]; \quad \varphi_3=\exp[(D_5-iD_6)\mathrm{Fo}]$$

общее решение уравнения (3.92) имеет вид

$$\varphi_k(\mathrm{Fo})=C_{1k}\exp(z_{1k}\mathrm{Fo})+C_{2k}\exp[(D_3+iD_4)\,\mathrm{Fo}]+C_{3k}\exp[(D_5-iD_6)\,\mathrm{Fo}], \qquad (3.102)$$

где C_{jk} $(j=1,2,3; \quad k=1,2,\ldots)$ – константы интегрирования.

Соотношение (3.92) перепишем так:

$$\varphi_k(\mathrm{Fo})=C_{1k}\exp(z_{1k}\mathrm{Fo})+\exp[(D_3+D_5)\,\mathrm{Fo}][C_{2k}\exp(iD_4\mathrm{Fo})+C_{3k}\exp(-iD_6\mathrm{Fo})]. \qquad (3.103)$$

Подставляя (3.96), (3.103) в (3.90), получаем

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=(C_{1k}\exp(z_{1k}\,\mathrm{Fo})+\exp(D\,\mathrm{Fo})(C_{2k}\exp(iD_4\mathrm{Fo})+$$

$$+C_{3k}\exp(-iD_6\,\mathrm{Fo})))\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right) \quad (r=2k-1; \quad k=1,2,\ldots), \qquad (3.104)$$

где $D=D_3+D_5$.

Для выполнения начальных условий (3.85) – (3.87) запишем сумму частных решений:

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{k=1}^{\infty}(C_{1k}\exp(z_{1k}\,\mathrm{Fo})+\exp(D\,\mathrm{Fo})(C_{2k}\exp(iD_4\mathrm{Fo})+$$

$$+C_{3k}\exp(-iD_6\,\mathrm{Fo})))\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right) \quad (r=2k-1). \qquad (3.105)$$

Константы интегрирования (3.105) определяются из (3.85) – (3.87). Подставляя (3.105) в (3.86), находим

$$C_{1k} = (C_{2k}(D + iD_4) + C_{3k}(D - iD_6))/z_{1k}\,. \tag{3.106}$$

Подставляя (3.105) в (3.87), учитывая (3.106), получаем

$$C_{2k} = -\frac{C_{1k}z_{1k}^2 + C_{3k}(D^2 - 2DD_6 i + D_6^2)}{D^2 + 2DD_4 i - D_4^2}\,. \tag{3.107}$$

Подставляя (3.105) в (3.85), находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}(C_{1k} + C_{2k} + C_{3k})\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right] = \xi(1-\xi) \quad (r = 2k-1; \quad k = 1, 2, \ldots). \tag{3.108}$$

Соотношение (3.108) является разложением функции $\xi(1-\xi)$ в ряд Фурье. Умножим это соотношение на $\cos\left[j\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]$ и найдем интеграл от полученного выражения в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$:

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty}\left[(C_{1k} + C_{2k} + C_{3k})\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]\cos\left[j\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]d\xi = \right.$$

$$= \int_0^1 \xi(1-\xi)\cos\left[j\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]d\xi \quad (j = r = 2k-1)\,. \tag{3.109}$$

Вследствие ортогональности косинусов соотношение (3.109) будет

$$\int_0^1 (C_{1k} + C_{2k} + C_{3k})\cos^2\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]d\xi = \int_0^1 \xi(1-\xi)\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]d\xi$$

$$(r = 2k-1; \qquad k = 1, 2, \ldots).$$

Откуда, вычисляя интегралы, получаем

$$C_{3k} = -C_{1k} - C_{2k} - \frac{4(r\pi\cos(r\pi/2) - 2\sin(r\pi/2))}{r^2\pi^2(\sin(r\pi) + r\pi)} \tag{3.110}$$

$$(r = 2k-1, \qquad k = 1, 2, \ldots),$$

где C_{1k} и C_{2k} находятся из (3.106), (3.107).

Точное решение краевой задачи (3.84) – (3.89) определяется из (3.105).

Из анализа расчетов перемещений по формуле (3.105) следует, что для $\mathrm{Fo}_r \le 10^{-4}$ имеем незатухающие колебания. Результаты исследований затухающих колебаний $\left(\mathrm{Fo}_r > 10^{-4}\right)$ представлены на рисунках 3.15 – 3.22. Из анализа следует, что с течением времени амплитуда колебаний уменьшается. При малых значениях Fo_r $\left(\mathrm{Fo}_r < 0{,}1\right)$ имеет место симметрия перемещений относительно нулевого значения. При увеличении Fo_r $\left(\mathrm{Fo}_r > 0{,}1\right)$ возникает несимметрия колебаний (см. рисунок 3.19). При этом возникают дополнительные колебания

струны с малой амплитудой. Следует отметить, что дополнительные колебания происходят в положительной области перемещений (рисунок 3.20).

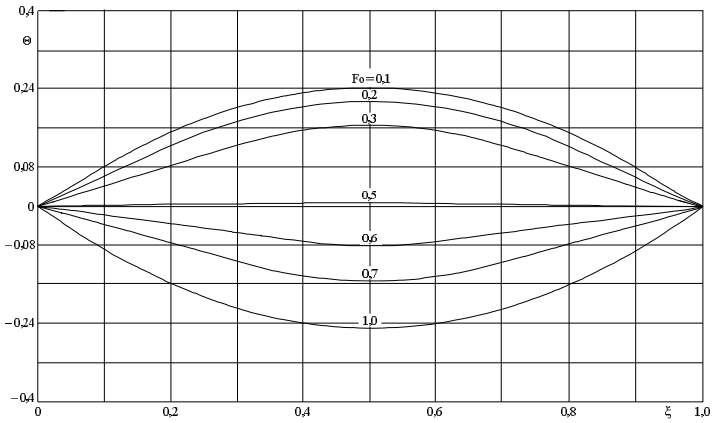


Рисунок 3.15. Перемещения струны: расчет по формуле (3.105) ($Fo_1 = Fo_r = 0{,}01$); $n = 10$ (n – число ряда (3.105))

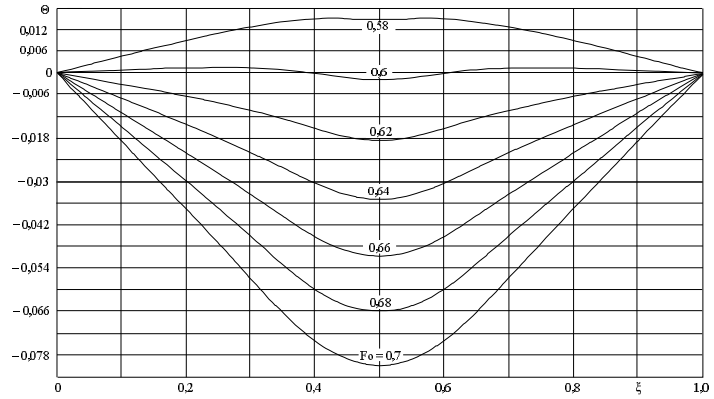


Рисунок 3.16. Перемещения струны: расчет по формуле (3.105) ($Fo_1 = Fo_r = 0{,}1$); $n = 20$

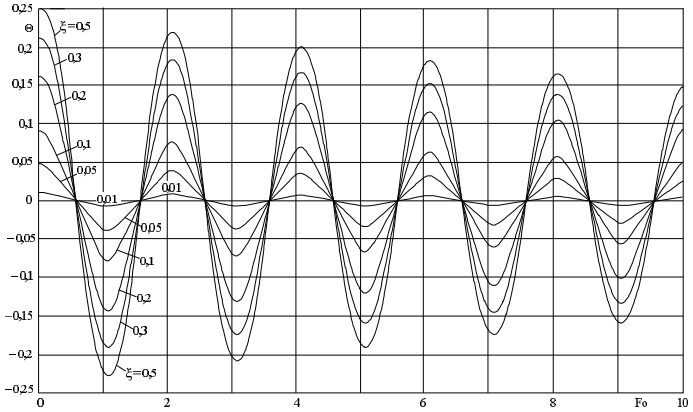


Рисунок 3.17. Перемещения струны: расчет по формуле (3.105) ($Fo_1 = Fo_r = 0{,}1$); $n = 20$

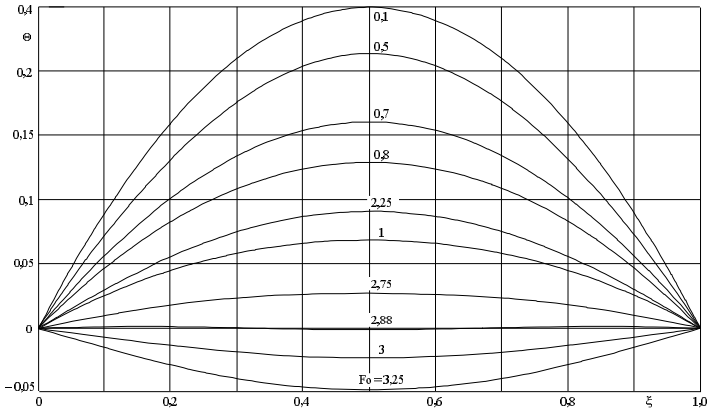


Рисунок 3.18. Перемещения струны во времени: расчет по формуле (3.105) ($Fo_1 = Fo_r = 1{,}0$); $n = 20$

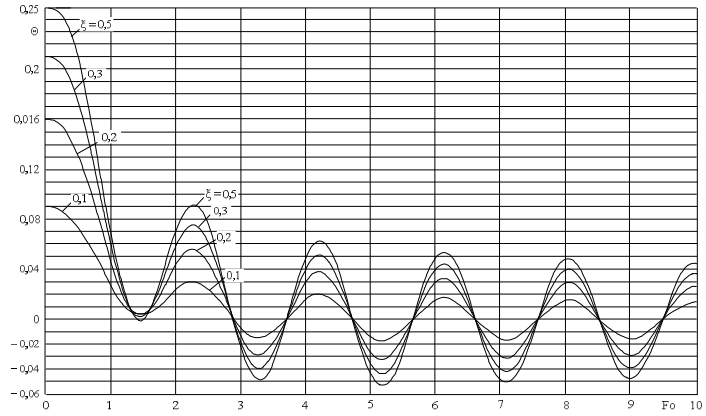


Рисунок 3.19. Перемещения струны во времени: расчет по формуле (3.105) ($Fo_1 = Fo_r = 1$); $n = 20$

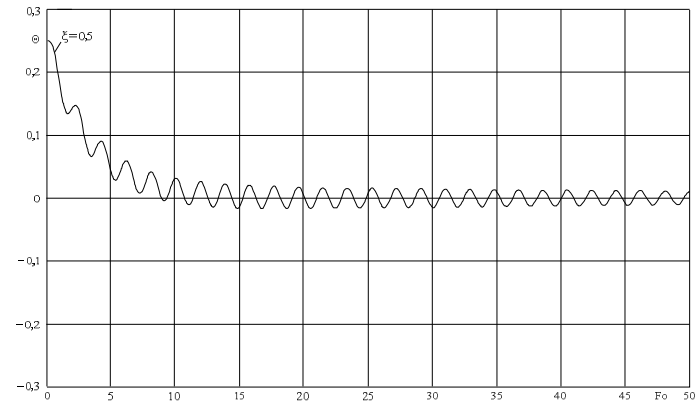


Рисунок 3.20. Перемещения струны ($\xi = 0{,}5$): расчет по формуле (3.105) ($Fo_1 = Fo_r = 3$); $n = 100$

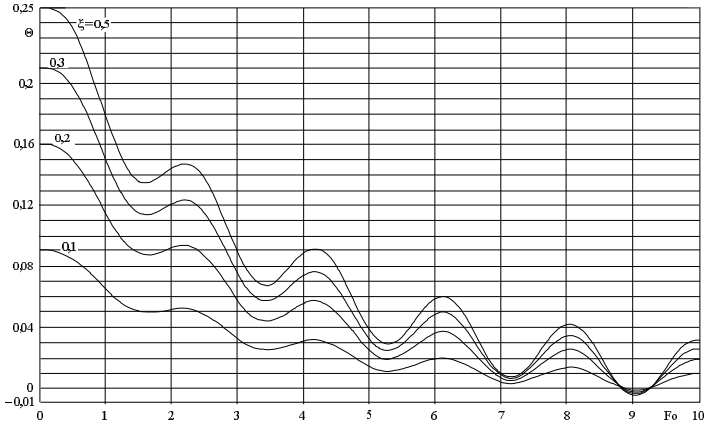


Рисунок 3.21. Перемещения струны: расчет по формуле (3.105) ($Fo_1 = Fo_r = 3$); $n = 20$

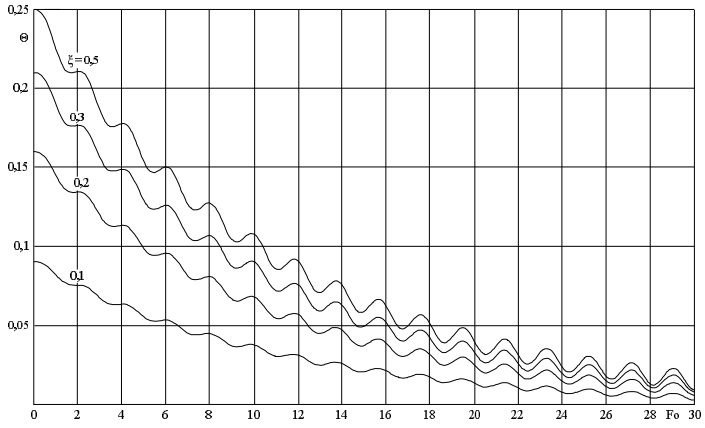


Рисунок 3.22. Перемещения струны: расчет по формуле (3.105) ($Fo_1 = Fo_r = 10$); $n = 20$

Увеличение числа Fo_r (см. рисунки 3.21, 3.22) приводит к возрастанию числа колебаний, происходящих в положительной области перемещений. Например, при $Fo_r = 5$ колебания здесь совершаются вплоть до $Fo \approx 19$, что для струны, имеющей длину $1\ м$, при $e = 1000\ м/с$ соответствует $t = Fo\delta/e = 0{,}019\ c$ размерного времени. Следовательно, для упругих струн с большими величинами чисел Fo_r возврат в исходное положение сопровождается возникновением высокочастотных колебаний, протекающих в начальном интервале времени лишь в положительной области перемещений. С увеличением времени высокочастотные колебания происходят симметрично относительно нулевого значения перемещения, в равной степени охватывая области как положительного, так и отрицательного его значения.

При некоторых сочетаниях коэффициентов релаксации и коэффициента сопротивления каждая точка струны участвует в двух колебательных процессах: высочастотном с малой амплитудой и низкочастотном с большой амплитудой.

3.3 Получение точного решения гиперболического уравнения при гидравлическом ударе

Для идеальной жидкости получение решения задачи об изменении давления в трубе сводится к решению линейного гиперболического уравнения. Методы его интегрирования в настоящее время достаточно разработаны. Трудность получения решений задач, описывающих течение реальных жидкостей, объясняется их нелинейностью вследствие зависимости коэффициента трения от скорости. Уравнения распределения давления и скорости здесь будут

$$-\frac{\partial p(x,\tau)}{\partial x} = \rho\left[\frac{\partial \vartheta(x,\tau)}{\partial \tau} + \frac{\lambda(\vartheta)\vartheta^2}{2d}\right]; \tag{3.111}$$

$$-\frac{\partial p(x,\tau)}{\partial \tau} = c^2\rho\frac{\partial \vartheta(x,\tau)}{\partial x}, \tag{3.112}$$

где p – давление, x – продольная координата, ϑ – скорость, τ – время, $\rho = \text{const}$ – плотность, $\lambda(\vartheta)$ – коэффициент трения, $c = 1/\sqrt{\frac{\rho}{k} + \frac{\rho d}{\delta E}}$ – скорость звука в жидкости, движущейся в трубе с

упругими стенками (соотношение верно при $\vartheta/c << 1$ и $(p-p_0)/E << 1$, k − модуль упругости среды, δ − толщина стенки трубопровода, d − диаметр трубы, E − модуль упругости стенки трубы.

Решение нелинейных уравнений (3.111), (3.112) можно получить лишь посредством численного интегрирования. С целью упрощения нелинейного уравнения (3.111) И.А. Чарный [122] выполнил линеаризацию 2-ого члена (в правой части), приняв множитель $\lambda\vartheta/(2d)$ в виде постоянной величины, равной ее среднему значению:

$$\lambda\vartheta/(2d) = 2a = \text{const}. \tag{3.113}$$

Величина $2a$ для ламинарного потока, согласно формуле Пуазейля

$$\lambda = 64/\text{Re} = 64\nu/(\vartheta d),$$

приводится к виду

$$2a = 32\nu/d^2, \tag{3.114}$$

где $\text{Re} = (\vartheta d)/\nu$ − число Рейнольдса; ν − кинематическая вязкость.

Для турбулентного потока второй член правой части (3.111) осредняется в определенном интервале скорости $\vartheta_0 < \vartheta < \vartheta_1$ при ее замене кривой изменения функции $y = \lambda(\vartheta)\vartheta^2/(2d)$ отрезком прямой. Отсюда соотношения для $2a$ приводится к следующему:

$$2a = \frac{\lambda}{3d}\frac{\vartheta_1^2 + \vartheta_0\vartheta_1 - 2\vartheta_0^2}{\vartheta_1 - \vartheta_0}, \tag{3.115}$$

где принимается $\lambda = \text{const}$.

Учитывая линеаризацию, уравнение (3.111) будет

$$-\frac{\partial p(x,\tau)}{\partial x} = \rho\left[\frac{\partial\vartheta(x,\tau)}{\partial\tau} + 2a\vartheta(x,\tau)\right]. \tag{3.116}$$

Уравнения (3.112), (3.116) решаются с помощью операционных методов или методами контурного интегрирования, являющимися разновидностью операционных [122].

Для упрощения процесса получения решения уравнения (3.112), (3.116) иногда сводятся к одному уравнению для давления (или скорости) [122]. Дифференцируя (3.112) по τ, а уравнение (3.116) − по x и сопоставляя найденные соотношения, получаем

$$c^2\frac{\partial^2 p(x,\tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p(x,\tau)}{\partial\tau^2} - 2a\rho\frac{\partial\vartheta(x,\tau)}{\partial x}. \tag{3.117}$$

Уравнение (3.117), учитывая (3.112), принимает вид

$$c^2\frac{\partial^2 p(x,\tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p(x,\tau)}{\partial\tau^2} + 2a\frac{\partial p(x,\tau)}{\partial\tau}. \tag{3.118}$$

Аналогично получается уравнение и для скорости

$$c^2 \frac{\partial^2 \vartheta(x,\tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \vartheta(x,\tau)}{\partial \tau^2} + 2a \frac{\partial \vartheta(x,\tau)}{\partial \tau}. \qquad (3.119)$$

В качестве примера нахождения решений уравнений (3.118), (3.119) рассмотрим задачу о движении скачка давления в трубе. Предположим, что в сечении $x=0$ скачкообразно изменилось давление, а сечение $x=l$ закрыто. Найти распределение давления по длине трубы во времени [122].

В технике такая задача возникает при расчетах гидравлических регуляторов, когда в сечении $x=0$ находится источник давления, а в сечении $x=l$ к трубе присоединен некоторый прибор (регулятор расхода, давления), включающийся лишь после достижения в данном сечении давления заданной величины. Интерес представляет нахождение запаздывания импульса и его величина. Кроме того, нахождение величины импульса в сечении $x=l$ является решением задачи для гидравлического удара.

Постановка задачи будет:

$$c^2 \frac{\partial^2 p(x,\tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p(x,\tau)}{\partial \tau^2} + 2a \frac{\partial p(x,\tau)}{\partial \tau} \quad (\tau > 0; \quad 0 < x < l); \qquad (3.120)$$

$$p(x,0) = p_0 = const; \quad (3.121) \qquad \partial p(x,0)/\partial \tau = 0; \qquad (3.122)$$

$$p(0,\tau) = p_1 = const; \quad (3.123) \qquad \partial p(l,\tau)/\partial x = 0, \qquad (3.124)$$

где p_0 – начальное давление; p_1 – давление в точке $x=0$; l – длина трубы.

После нахождения решения задачи (3.120) – (3.124) можно получить полное представление об изменении давления по длине трубы. Распределение скорости при известном давлении находится посредством интегрирования уравнения (3.112).

Для упрощения математической постановки краевой задачи и последовательности нахождения решения, а также для получения решения более общего вида, введем безразмерные величины:

$$\Theta = \frac{p - p_1}{p_0 - p_1}; \quad \mathrm{Fo} = \frac{c^2 \tau}{2al^2}; \quad \rho = \frac{x}{l}; \quad \mathrm{Fo}_r = \frac{c^2}{4a^2 l^2}, \qquad (3.125)$$

где Fo – безразмерное время; Θ – безразмерное давление; ρ – относительная координата; $\mathrm{Fo}_r = const$ – параметр, учитывающий гидравлическое сопротивление.

С учетом обозначений краевая задача (3.120) – (3.124) будет

$$\frac{\partial \Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_r \frac{\partial^2 \Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial \rho^2} \quad (\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < \rho < 1); \qquad (3.126)$$

$$\Theta(\rho,0) = 1; \quad (3.127) \qquad \delta\Theta(\rho,0)/\partial \mathrm{Fo} = 0; \qquad (3.128)$$

$$\Theta(0,\mathrm{Fo}) = 0; \quad (3.129) \qquad \delta\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial \rho = 0. \qquad (3.130)$$

Выполним замену переменной

$$\xi = 1 - \rho . \qquad (3.131)$$

Для переменной ξ задача (3.126) – (3.130) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_{\mathrm{r}} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} \quad (\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1); \qquad (3.132)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (3.133) \qquad \delta\Theta(\xi, 0) / \partial \mathrm{Fo} = 0; \qquad (3.134)$$

$$\Theta(1, \mathrm{Fo}) = 0; \quad (3.135) \qquad \delta\Theta(0, \mathrm{Fo}) / \partial \xi = 0. \qquad (3.136)$$

Задача (3.132) – (3.136) полностью совпадает с задачей (2.8) – (2.12), ее точное решение представлено соотношением (2.3). Таким образом, результаты решения задачи (2.8) – (2.12), представленные в безразмерном виде, могут быть использованы и для задачи (3.132) – (3.136).

На рисунках 3.23 – 3.29 приведены результаты исследований по формуле (2.34) задачи об изменении давления нефти, находящейся в стальной трубе, при следующих условиях:

$$\nu = 7{,}65 \cdot 10^{-6}\ м^2/с; \ d = 0{,}1\ м; \ \lambda = 0{,}01; \ \vartheta_0 = 0; \ \vartheta_1 = 2\ м/с;$$

$$c = 998\ м/с; \ \rho = 840\ кг/м^3; \ k = 1500\ МПа; \ E = 2 \cdot 10^5\ МПа; \quad p_0 = 10\ атм; \ p_1 = 100\ атм.$$

Расчеты проводились для следующих длин трубопровода: $l = 1000\,км$; $l = 100\,км$; $l = 100\,м$.

Соответственно этим длинам число Fo_r для ламинарного потока течения было:

$$\mathrm{Fo}_r = 6{,}648 \cdot 10^{-3}; \ \mathrm{Fo}_r = 0{,}1662; \ \mathrm{Fo}_r = 1662{,}0277.$$

Для турбулентного – $\mathrm{Fo}_r = 0{,}8964 \cdot 10^{-3}$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}02241$; $\mathrm{Fo}_r = 224{,}1$.

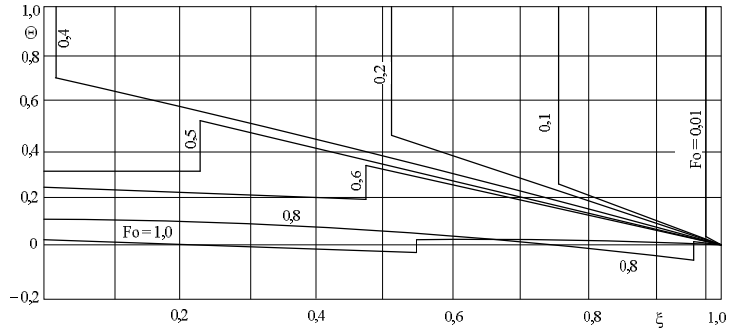


Рисунок 3.23. Распределение давления в трубопроводе при Fo_r = 0,1662

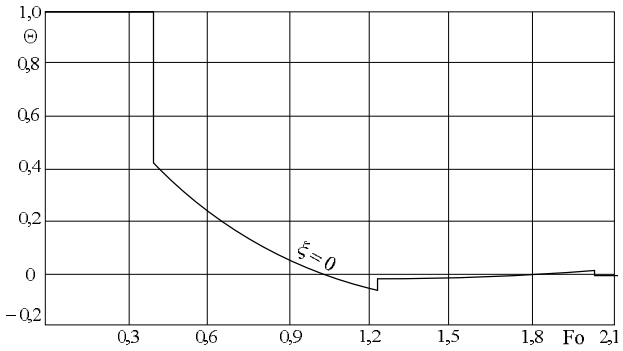


Рисунок 3.24. Изменение давления ($\xi = 0$ $\mathrm{Fo}_r = 0{,}1662$): $n = 100$ (n – число слагаемых ряда (2.34))

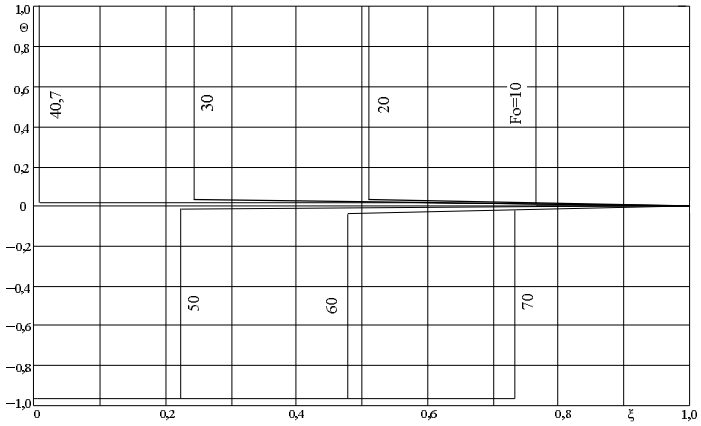


Рисунок 3.25. Распределение давления в трубопроводе при Fo_r = 0,1662; n = 100

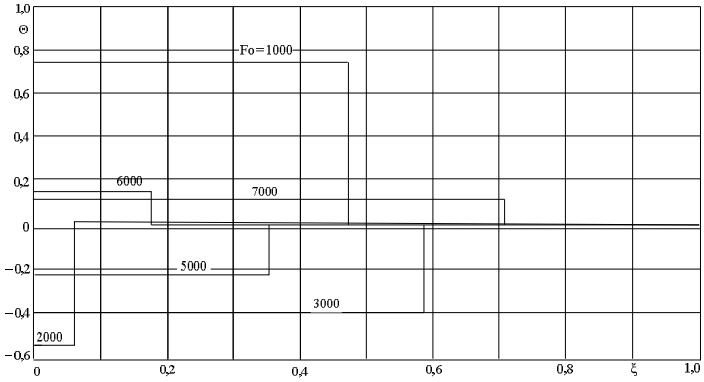


Рисунок 3.26. Распределение давления в трубопроводе при Fo_r = 0,1662; n = 100

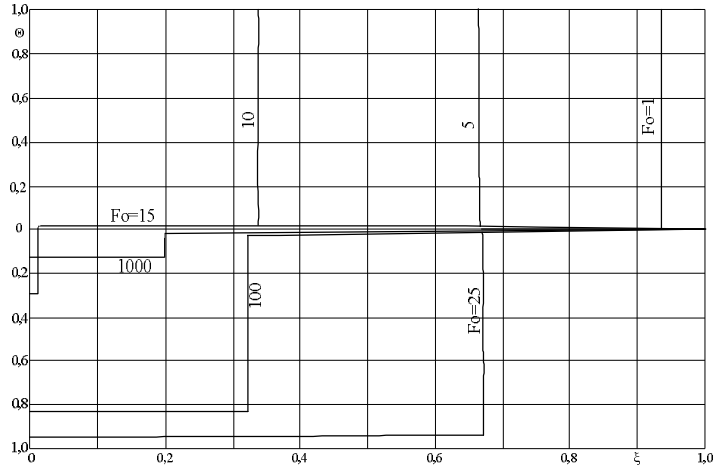


Рисунок 3.27. Распределение давления в трубопроводе при Fo_r = 224,1, n = 100

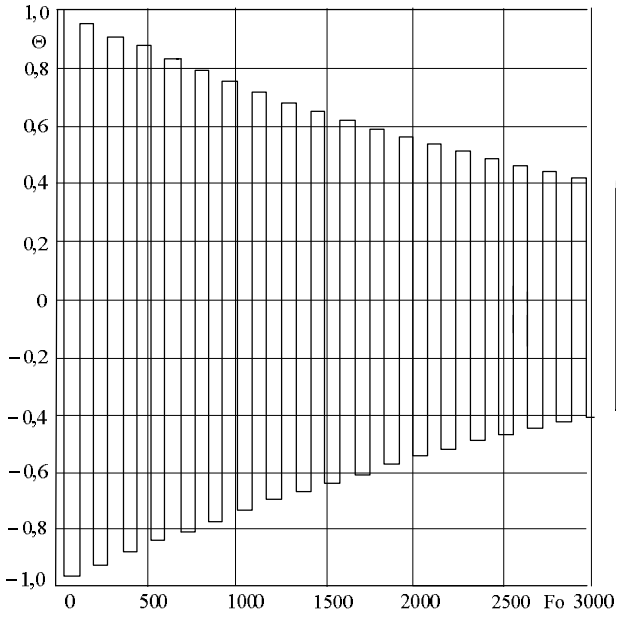


Рисунок 3.28. Распределение давления ($\xi = 0$ при $\mathrm{Fo}_r = 0{,}1662$), $n = 100$

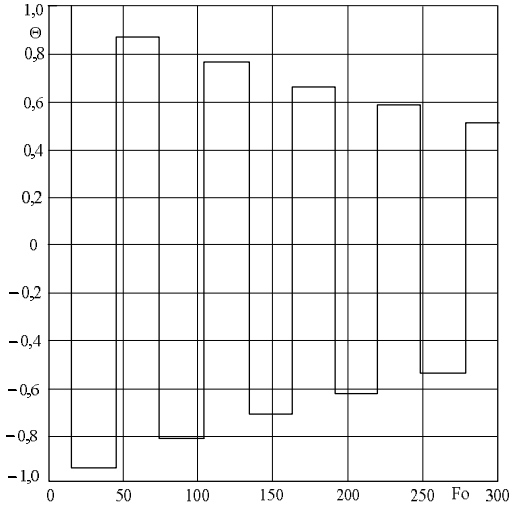


Рисунок 3.29. Распределение давления ($\xi = 0$ $\mathrm{Fo}_r = 224{,}1$), $n = 100$

Анализ результатов приводит к выводу, что при любых величинах числа Fo_r распределение давления характеризуется перемещением гидравлической волны, со скачком давления на фронте. Область за его пределами остается невозмущенной, и давление в этой области равно начальному p_0. Закон продвижения фронта волны $\xi = \mathrm{Fo}\mathrm{Fo}_r^{0,5}$ является линейным (см. рисунок 2.7).

В зависимости от числа Fo_r отмечается существенное расхождение результатов. Например, при малых его значениях скачки кривых давления наблюдаются лишь на начальных участках трубы. Так, при $\mathrm{Fo}_r = 6{,}648 \cdot 10^{-3}$ скачок давления происходит лишь в диапазоне $0 \le \mathrm{Fo} \le 0{,}07$ (см. рисунок 2.5). Для всех $\mathrm{Fo} > 0{,}07$ для этого значения Fo_r получаемое решение совпадает с решением параболического уравнения теплопроводности и, следовательно, изменение давления не сопровождается появлением скачков. Для малых величин Fo_r скачок

давления происходит лишь на малом участке трубы вблизи сечения $x = l$ и при незначительных величинах времени. Так, при $\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$ скачки давления практически не наблюдаются при $\mathrm{Fo}_r \approx 10^{-6}$.

На оставшейся части трубы при $\mathrm{Fo} > 10^{-6}$ возрастание давления происходит при отсутствии скачков вплоть до установившегося режима, когда давление оказывается равным давлению, определяемому граничным условием 1-ого рода в сечении $x = 0$. Решение задачи (3.132) – (3.136) на временно́м участке $10^{-6} \le \mathrm{Fo} \le \infty$ (при $\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$) совпадает с точным решением параболического уравнения теплопроводности при краевых условиях 1-ого рода (см. рисунок 2.2). Fo_r, близкие к нулевым значениям, могут быть в случаях большой длины трубопровода, высоковязких жидкостей, больших величин коэффициента трения.

При значениях числа $\mathrm{Fo}_r > 0{,}07$ скачки давления в трубе происходят вплоть до достижения фронтом возмущения координаты $\xi = x/\delta$ (см. рисунки 2.3, 2.4, 2.44 – 2.48). Например, для $\mathrm{Fo}_r = 0{,}3$ фронт возмущения достигает координаты $\xi = 0$ при $\mathrm{Fo} \approx 0{,}5477$. Давление на фронте здесь составляет $\Theta = 0{,}6$, что меньше давления $\Theta = 0$, определяемого граничным условием 1-го рода.

При увеличении времени происходит периодическое изменение давления в любой точке трубы вплоть до стационарного режима, когда давление по длине трубы оказывается равным давлению $p_1 = 100$ *атм* в сечении $x = 0$ (см. рисунки 3.28, 3.29)

3.4 Распределение скорости в круглой трубе при гидравлическом ударе

Течение вязких жидкостей описывается уравнениями (3.111), (3.112). Выше (см. п. 3.3) было показано, что эти уравнения могут быть приведены к одному уравнению для давления (или скорости) (уравнения (3.118), (3.119)). Решение уравнения для давления было получено в п. 3.3. Получим решение задачи для распределения скорости жидкости, движущейся в трубе длиной l, в случае, когда начальная скорость по длине трубы равна $\vartheta_0 = \mathrm{const}$. При времени $t = 0$ производится мгновенное перекрытие задвижки в сечении $x = l$ и, таким образом, скорость жидкости в данном сечении оказывается равной нулю. Требуется найти распределение скорости по всей длине трубы вплоть до стационарного состояния, когда скорость течения по всей длине трубы равна нулю.

Постановка задачи здесь включает уравнение (3.119) и следующие краевые условия:

$$\vartheta(x,0) = \vartheta_0; \quad (3.137) \qquad \partial\vartheta(x,0)/\partial t = 0; \qquad (3.138)$$

$$\partial\vartheta(0,t)/\partial x = 0; \quad (3.139) \qquad \vartheta(l,t) = 0, \qquad (3.140)$$

где ϑ_0 – начальная скорость, постоянная по всей длине трубы.

После получения решения задачи (3.119), (3.137) – (3.140) распределение давления в сечении $x=l$, где наблюдается максимальное его возрастание при гидравлическом ударе, определяется посредством решения уравнения (3.111), то есть

$$p(l,t)=p(0,t)-\rho\int_0^l\left[\frac{\partial\vartheta(x,t)}{\partial t}+2a\vartheta(x,t)\right]dx. \qquad (3.141)$$

где $\mathrm{p}(0,\mathrm{t})=\mathrm{p}_1=\mathrm{const}$ – давление в сечении $x=0$, которое считается известным.

Обозначим:

$$\Theta=\frac{\vartheta}{\vartheta_0};\quad \mathrm{Fo}=\frac{c^2t}{2al^2};\quad \xi=\frac{x}{l};\quad \mathrm{Fo}_r=\frac{c^2}{4a^2l^2}, \qquad (3.142)$$

где Θ – безразмерная скорость; Fo – число Фурье; ξ – относительная координата; $\mathrm{Fo}_r=\mathrm{const}$ – безразмерная константа.

Учитывая обозначения, задача (3.119), (3.137) – (3.140) будет

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_r\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\quad(\mathrm{Fo}>0;\quad 0<\xi<1); \qquad (3.143)$$

$$\Theta(\xi,0)=1; \quad (3.144) \qquad \partial\Theta(\xi,0)/\partial\mathrm{Fo}=0; \qquad (3.145)$$

$$\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi=0; \quad (3.146) \qquad \Theta(1,\mathrm{Fo})=0. \qquad (3.147)$$

Задача (3.143) – (3.147) совпадает с задачей (3.132) – (3.136), и, поэтому результаты исследований для задачи (3.132) – (3.136) могут быть применены и к задаче (3.143) – (3.147).

3.5 Применение операционных методов для решения гиперболических уравнений колебаний давления при гидравлическом ударе в трубопроводе

Используя интегральное косинус - преобразование по ограниченной области определения эллиптической координаты и интегральное преобразование Лапласа по неограниченной области изменения односторонней параболической координаты, найдено точное решение гиперболического уравнения, описывающего распределение давления в трубопроводе применительно к движению реальной жидкости при гидравлическом ударе. Показано, что процесс колебаний давления сопровождается перемещением гидравлической волны со скачком давления на ее фронте. После достижения фронтом гидравлической волны конца трубопровода, перекрытого задвижкой, происходит смена знака давления и направления течения жидкости на противоположное со скачком давления на фронте гидравлической волны. Колебательный процесс изменения давления в любой точке трубопровода во времени происходит с затухающей по экспоненциальной зависимости амплитудой.

Краевая задача определения давления в трубопроводе для идеальной жидкости сводит к интегрированию линейного волнового уравнения, методы решения которого известны.

Трудность решения задач для вязких реальных жидкостей связаны с их нелинейностью. В случае реальных жидкостей уравнения для давления и скорости имеют вид [122]:

$$-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}=\rho\left[\frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial t}+\frac{\lambda(\vartheta)\vartheta^2}{2d}\right]; \quad (3.148) \qquad -\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}=c^2\rho\frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial x}, \quad (3.149)$$

где p – давление; x – продольная координата; ϑ – скорость; t – время; ρ – плотность; $\lambda(\vartheta)$ – коэффициент гидравлического сопротивления; $c=1/\sqrt{\frac{\rho}{k}+\frac{\rho d}{\delta E}}$ – скорость звука в жидкости; k – модуль упругости жидкости; δ – толщина стенки трубы; d – диаметр трубы; E – модуль упругости материала трубы.

Уравнения неустановившегося движения (3.148) и (3.149) определяют зависимости между значениями скорости, плотности и давления потока жидкости, осредненными по его сечению. Кроме того, они содержат среднюю величину касательного напряжения на стенке трубопровода. Система уравнений для средних величин оказывается замкнутой в случае, если указана зависимость между касательным напряжением и скоростью. Для ее замыкания предполагается, что при неустановившемся движении касательное напряжение является такой же функцией скорости и свойств жидкости, как и при установившемся движении, т. е. используется гипотеза квазистационарности, в соответствии в которой считается, что закон Ньютона для касательного напряжения выполняется и при нестационарном процессе изменения скорости. Точно также предполагается, что соответствующие соотношения сохраняются и для коэффициента гидравлического сопротивления. Строгое обоснование этого допущения отсутствует, поэтому его справедливость может быть подтверждена лишь путем сравнения с экспериментальными данными [122]. При малых изменениях давления и скорости во времени теория квазистационарности удовлетворительно подтверждается результатами экспериментов, однако при значительных их изменениях обнаруживаются существенные расхождения. Следовательно, теория квазистационарности может быть использована лишь для некоторого ограниченного круга задач, когда распределение скорости при нестационарном течении жидкости незначительно отличается от стационарного.

Ввиду нелинейности в уравнении (3.148) решение системы (3.148), (3.149) можно получить лишь посредством численного интегрирования. Способ линеаризации уравнения (3.148) разработан И.А. Чарным [122], который принял множитель $\lambda\vartheta/(2d)$ в виде постоянной величины, равной его среднему значению. Величина $2a$ для ламинарного потока, с учетом формулы Пуазейля $\lambda=64/\mathrm{Re}=64\nu/(\vartheta d)$, будет $2a=32\nu/d^2$, где $\mathrm{Re}=\vartheta d/\nu$ – число Рейнольдса; ν – кинематическая вязкость.

Для турбулентного потока второй член правой части (3.148) осредняется в некотором скоростном интервале с заменой кривой изменения функции $y = \lambda(\vartheta)\vartheta^2/(2d)$ соответствующим отрезком прямой. Отсюда формула для $2a$ будет $2a = \lambda(\vartheta_1^2 + \vartheta_0\vartheta_1 - 2\vartheta_0^2)/[3d(\vartheta_1 - \vartheta_0)]$, где принимается $\lambda = \text{const}$.

Учитывая линеаризацию, уравнение (3.148) будет

$$-\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = \rho\left[\frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial t} + 2a\vartheta(x,t)\right]. \qquad (3.150)$$

Уравнения (3.149), (3.150) в ряде случаев сводятся к одному уравнению для давления (или скорости) [122]. Дифференцируя (3.149) по t, а уравнение (3.150) − по x, из сравнения полученных соотношений получаем

$$c^2\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - 2a\rho\frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial x}\ . \qquad (3.151)$$

Уравнение (3.151), учитывая уравнение (3.149), будет

$$c^2\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}. \qquad (3.152)$$

Аналогично можно получить и уравнение для скорости:

$$c^2\frac{\partial^2 \vartheta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \vartheta(x,t)}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial t}. \qquad (3.153)$$

В качестве примера нахождения решений уравнений (3.152), (3.153) найдем решение задачи о движении скачка давления в трубе с неподвижной в исходном положении жидкостью. Предположим, что в сечении $x = 0$ происходит скачок давления, а сечение $x = l$ закрыто. Найти распространение давления по длине трубы во времени. Такая задача встречается в расчетах гидравлических регуляторов, когда в сечении $x = 0$ расположен источник давления, а в сечении $x = l$ находится некоторый прибор, например, регулятор расхода (или давления), включающийся лишь после достижения в этом сечении некоторого заданного давления. Интерес представляет определение запаздывания импульса и его величины, что связано с длиной трубы, вязкостью жидкости и коэффициентом трения. Отметим, что нахождение значения импульса в сечении $x = l$ сводится к задаче о гидравлическом ударе. Ее математическая постановка будет следующей:

$$c^2\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} \quad (t > 0;\quad 0 < x < l); \qquad (3.154)$$

$$p(x,0) = p_0 = \text{const}\ ; \quad (3.155) \qquad \partial p(x,0)/\partial t = 0\ ; \qquad (3.156)$$

$$p(0,t) = p_1 = \text{const}\ ; \quad (3.157) \qquad \partial p(l,t)/\partial x = 0\ , \qquad (3.158)$$

где p_0 – начальное давление в трубе; p_1 – давление в точке $x=0$ $(p_1 > p_0)$; l – длина трубопровода.

Решение задачи (3.154) – (3.158) дает полную информацию об изменении давления по длине трубопровода во времени. Скорость при известном давлении находится посредством интегрирования уравнения (3.149)

Методы решения задачи (3.154) – (3.158) основаны на применении метода разделения переменных [77, 78], а также метода Бернулли – Фурье [122]. К тому же, решение в [122] найдено в размерном виде, что не позволяет сделать заключения наиболее общего характера. Далее излагается способ получения точного решения, основанный на использовании интегральных методов [52 − 56].

Для упрощения постановки задачи, введем безразмерные переменные:

$$\Theta = \frac{p - p_1}{p_0 - p_1}; \qquad \mathrm{Fo} = \frac{c^2 t}{2al^2}; \qquad y = \frac{x}{l}; \qquad \mathrm{Fo}_r = \frac{c^2}{4a^2 l^2}, \tag{3.159}$$

где Θ − безразмерное давление; Fo − число гомохронности; y − безразмерная координата; $\mathrm{Fo}_r = const$ − безразмерный параметр.

Учитывая безразмерные переменные, задача (3.154) – (3.158) принимает вид

$$\frac{\partial \Theta(y,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_r \frac{\partial^2 \Theta(y,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \Theta(y,\mathrm{Fo})}{\partial y^2} \quad (\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < y < 1); \tag{3.160}$$

$$\Theta(y,0) = 1 \ ; \quad (3.161) \qquad \partial\Theta(y,0)/\partial \mathrm{Fo} = 0 \ ; \tag{3.162}$$

$$\Theta(0,\mathrm{Fo}) = 0 \ ; \quad (3.163) \qquad \partial\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial y = 0 \ . \tag{3.164}$$

Выполним замену независимой переменной y соотношением

$$\xi = 1 - y. \tag{3.165}$$

Для переменной ξ задача (3.160) – (3.164) будет

$$\frac{\partial^2 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_r \frac{\partial^2 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} \quad (\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1); \tag{3.166}$$

$$\Theta(\xi,0) = 1 \ ; \quad (3.167) \qquad \partial\Theta(\xi,0)/\partial \mathrm{Fo} = 0 \ ; \tag{3.168}$$

$$\Theta(1,\mathrm{Fo}) = 0 \ ; \quad (3.169) \qquad \partial\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial \xi = 0 \ . \tag{3.170}$$

Для приведения начального условия (3.167) к однородному обозначим: $\mathrm{W}(\xi,\mathrm{Fo}) = \Theta(\xi,\mathrm{Fo}) - 1$. Задача (3.166) – (3.170) приводится к виду

$$\frac{\partial \mathrm{W}(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \mathrm{W}(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_r \frac{\partial^2 \mathrm{W}(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} \quad (\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1); \tag{3.171}$$

$$\mathrm{W}(\xi,0) = 0 \ ; \quad (3.172) \qquad \partial \mathrm{W}(\xi,0)/\partial \mathrm{Fo} = 0 \ ; \tag{3.173}$$

$$\partial \mathrm{W}(0,\mathrm{Fo})/\partial \xi = 0 \ ; \quad (3.174) \qquad \mathrm{W}(1,\mathrm{Fo}) = -1 \ . \tag{3.175}$$

Для исключения переменной ξ введем интегральное преобразование вида [54, 55]

$$\overline{\mathrm{W}}(n,\mathrm{Fo})=\int_0^1 \mathrm{W}(\xi,\mathrm{Fo})\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}\xi\,d\xi\ . \tag{3.176}$$

При этом

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 \mathrm{W}(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}\xi d\xi=(-1)^n\frac{(2n-1)\pi}{2}-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2\overline{\mathrm{W}}(n,\mathrm{Fo})\ . \tag{3.177}$$

Формула обращения имеет вид

$$\mathrm{W}(\xi,\mathrm{Fo})=2\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{W}}(n,\mathrm{Fo})\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}\xi\ . \tag{3.178}$$

Применяя (3.176) – (3.177) к задаче (3.171) – (3.173), находим

$$\mathrm{Fo}_r\frac{d^2\overline{\mathrm{W}}(n,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}+\frac{d\overline{\mathrm{W}}(n,\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}}+\gamma_n^2\overline{\mathrm{W}}(n,\mathrm{Fo})=0\ ; \tag{3.179}$$

$$\overline{\mathrm{W}}(n,0)=0\ ; \tag{3.180}$$

$$d\overline{\mathrm{W}}(n,0)/d\mathrm{Fo}=0; \tag{3.181}$$

$$\gamma_n^2=\left[\frac{(2n-1)\pi}{2}\right]^2\ . \tag{3.182}$$

К задаче (3.179) – (35) применим преобразование Лапласа

$$\overline{\mathrm{W}}(n,P)=\int_0^{\infty}\overline{\mathrm{W}}(n,\mathrm{Fo})\exp(-P\mathrm{Fo})d\mathrm{Fo}\ . \tag{3.183}$$

В пространстве изображений решение задачи (3.179) – (3.182) будет

$$\overline{\mathrm{W}}(n,P)=\frac{(-1)^n(2n-1)(\pi/2)}{(\mathrm{Fo}_rP^2+P+\gamma_n^2)P}\ . \tag{3.184}$$

Рассмотрим случай, когда квадратный трехчлен

$$\mathrm{Fo}_rP^2+P+\gamma_n^2 \tag{3.185}$$

не имеет действительных корней, то есть дискриминант $D=1-4\lambda_n^2\mathrm{Fo}<0$, что возможно при $4\gamma_n^2\mathrm{Fo}>1$.

Решение задачи (3.179) – (3.182) в области изображений в этом случае будет

$$\overline{\mathrm{W}}(n,P)=\frac{(-1)^n(2n-1)(\pi/(2\mathrm{Fo}))}{\left[\left(p+\dfrac{1}{2\mathrm{Fo}_r}\right)^2+\dfrac{4\gamma_n^2\mathrm{Fo}_r-1}{4\mathrm{Fo}_r^2}\right]P}\ . \tag{3.186}$$

Переходя к оригиналу, находим

$$\overline{\mathrm{W}}(n,P)=\frac{(-1)^n(2n-1)\pi}{\sqrt{4\gamma_n^2\mathrm{Fo}-1}}\int_0^{\mathrm{Fo}}\sin\left(\frac{\sqrt{4\gamma^2\mathrm{Fo}_r-1}}{2\mathrm{Fo}_r}\tau\right)e^{-\tau/(2\mathrm{Fo}_r)}d\tau\ . \tag{3.187}$$

Решение задачи (3.166) – (3.170) при $4\gamma^2\mathrm{Fo}_r>1$ принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{\sqrt{4\gamma_n^2\mathrm{Fo}_r - 1}}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}\,\xi\int_0^{\mathrm{Fo}}\sin\left(\frac{\sqrt{4\gamma^2\mathrm{Fo}_r - 1}}{2\mathrm{Fo}_r}\tau\right)e^{-\tau/(2\mathrm{Fo}_r)}d\tau\ . \qquad (3.188)$$

Рассмотрим случай, когда квадратный трехчлен (3.185) имеет действительные корни

$$P_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 - 4\gamma_n^2\mathrm{Fo}_r}\,/(2\mathrm{Fo}_r)\ , \qquad (3.189)$$

что возможно, если $4\gamma_n^2\mathrm{Fo}_r < 1$.

В этом случае решение в изображениях будет

$$\overline{\mathrm{W}}(n,P) = \frac{(-1)^n(2n-1)(\pi/(2\mathrm{Fo}_r))}{(P-P_1)(P-P_2)P} = \frac{(-1)^n(2n-1)/2}{\sqrt{1-4\gamma_n^2\mathrm{Fo}_r}}\left[\frac{1}{(P-P_1)P} - \frac{1}{(P-P_2)P}\right]\ . \qquad (3.190)$$

Переходя к оригиналу по Fo, находим

$$\overline{\mathrm{W}}(n,P) = \frac{(-1)^n(2n-1)/2}{\sqrt{1-4\gamma_n^2\mathrm{Fo}_r}}\left[\left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}\right) + \left(\frac{1}{P_1}e^{P_1\mathrm{Fo}} - \frac{1}{P_2}e^{P_2\mathrm{Fo}}\right)\right]\ . \qquad (3.191)$$

Решение задачи (3.166) – (3.170) при $4\gamma_n^2\mathrm{Fo}_r < 1$ приводится к виду

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{\sqrt{1-4\gamma_n^2\mathrm{Fo}_r}}\cos\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}\right) + \left(\frac{1}{P_1}e^{P_1\mathrm{Fo}} - \frac{1}{P_2}e^{P_2\mathrm{Fo}}\right)\right]\ . \qquad (3.192)$$

На рисунках 3.30 – 3.38 даны результаты исследований по формулам (3.188), (3.192) задачи о распределении давления нефти стальном трубопроводе при следующих условиях:

$$\nu = 7{,}65\cdot10^{-6}\ м^2/с;\quad d = 0{,}1\ м;\quad \lambda = 0{,}01;\quad \vartheta_0 = 0\ м/с;\quad \vartheta_1 = 2\ м/с;\quad c = 998\ м/с;$$

$$\rho = 840\ кг/м^3;\quad k = 1500\ МПа;\quad E = 2\cdot10^5\ МПа;\quad p_0 = 10\ атм;\quad p_1 = 100\ атм.$$

Расчеты были выполнены для следующих длин трубы:

$$l = 1000\ км;\quad l = 100\ км;\quad l = 100\ м.$$

Соответственно длинам были использованы следующие значения числа Fo_r: $\mathrm{Fo}_r = 6{,}648\cdot10^{-3}$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}1662$; $\mathrm{Fo}_r = 1662{,}0277$ – для ламинарного и $\mathrm{Fo}_r = 224{,}1$ – для турбулентного режима течения.

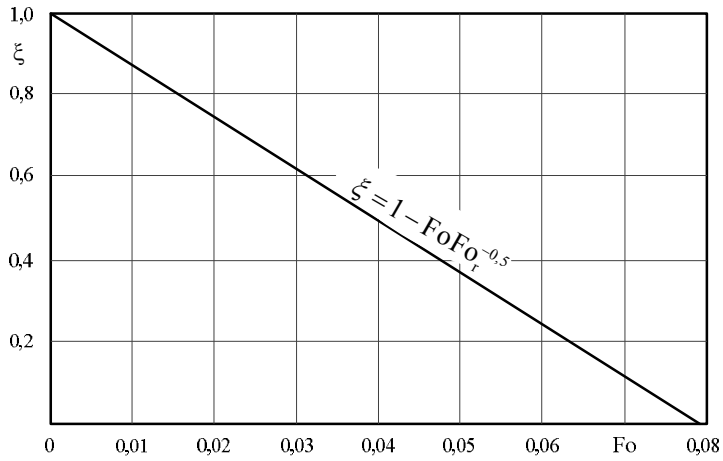


Рисунок 3.30. Перемещение фронта волны ($\mathrm{Fo}_r = 6{,}648 \cdot 10^{-3}$)

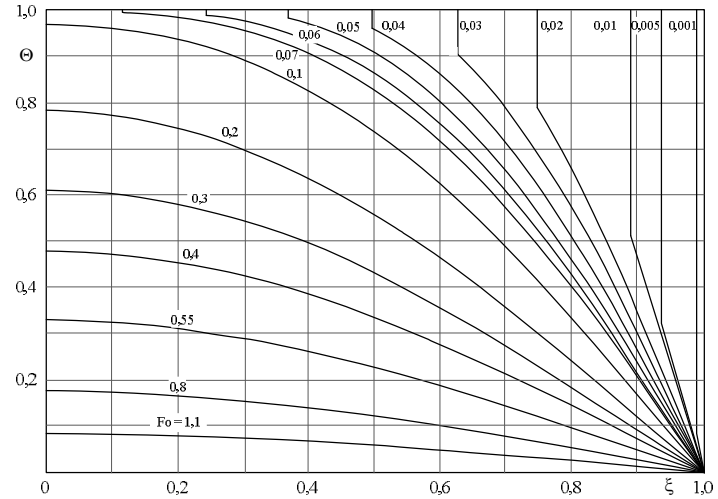


Рисунок 3.31. Распределение давления в трубопроводе при $\mathrm{Fo}_r = 6{,}648 \cdot 10^{-3}$

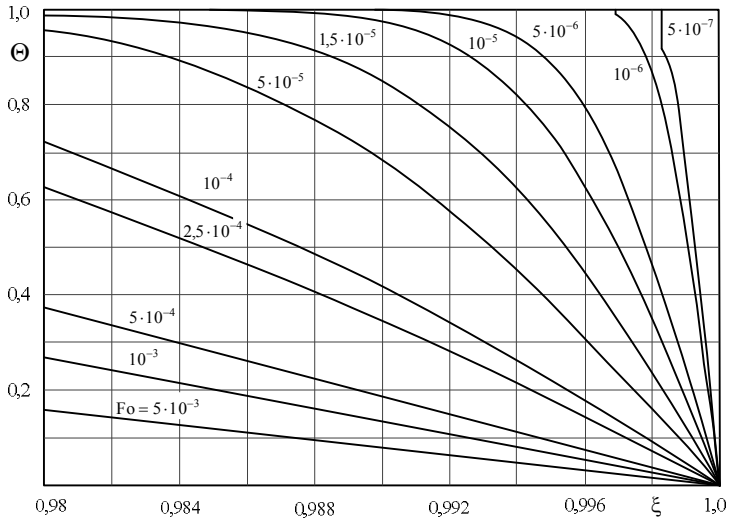


Рисунок 3.32. Распределение давления в трубопроводе при $\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$

Из анализа результатов следует, что изменение давления представляет движение гидравлической волны со скачком давления на ее фронте. Область за пределами фронта остается невозмущенной, где давление здесь равно начальному p_0. Движение фронта возмущения по декартовой координате во времени подчиняется линейной закономерности

$\xi = \mathrm{FoFo}_r^{\,0,5}$ (см. рисунок 3.30), что подтверждается исследованиями, выполненными другими авторами [11].

Величина числа Fo_r оказывает существенное влияние на получаемые результаты. При малых значениях скачок скорости наблюдается лишь на начальных участках трубы. Например, при $\mathrm{Fo}_r = 6{,}648 \cdot 10^{-3}$ скачок давления отмечается лишь в диапазоне $0 \le \mathrm{Fo} \le 0{,}07$ (см. рисунок 3.32), то есть для всех $\mathrm{Fo} > 0{,}07$ скачки давления не наблюдаются. При очень малых значениях Fo_r скачки давления происходят лишь на малом участке трубы и при малых величинах времени. Например, при $\mathrm{Fo}_r = 10^{-7}$ скачки давления прекращаются при $\mathrm{Fo} \approx 10^{-6}$. Фронт возмущения для этого времени перемещается на величину $\xi = 0{,}003$, что составляет 0,3 % от длины трубопровода.

На оставшейся части трубы при $\mathrm{Fo} > 6{,}648 \cdot 10^{-3}$ изменение давления протекает без скачков вплоть до установления стационарного процесса (давление в сечении $x = l$ становится одинаковым с давлением, заданным граничным условием первого рода). Отметим, что близкие к нулевым значения Fo_r наблюдаются в случаях: большая длина трубы; высоковязкая жидкость; большая величина коэффициента трения.

При значениях числа $\mathrm{Fo}_r > 0{,}07$ скачок в трубопроводе наблюдается до момента достижения фронтом возмущения координаты $\xi = 0$ (см. рисунки 3.33 – 3.37). С увеличением времени имеет место обратная волна со скачком давления в противоположную сторону. После достижения обратной волной координаты $\xi = 1$ вновь наблюдается прямая волна, но уже с уменьшенным давлением. Такое чередование прямых и обратных волн происходит до полного затухания процесса колебаний.

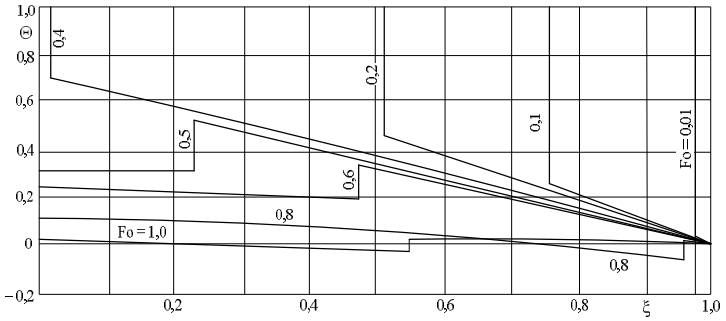


Рисунок 3.33. Распределение давления в трубопроводе при $\mathrm{Fo}_r = 0{,}1662$

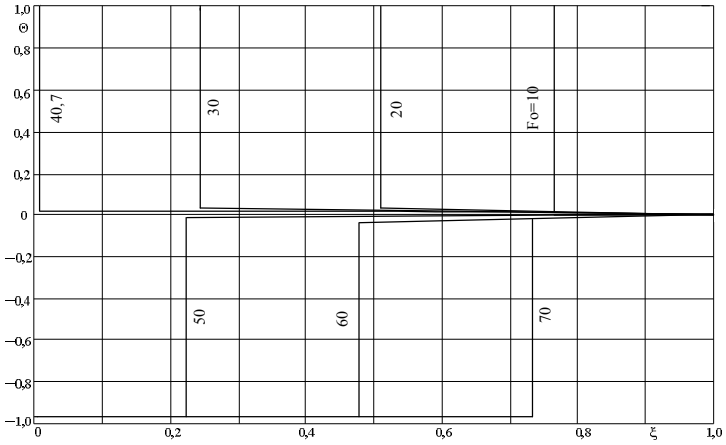


Рисунок 3.34. Распределение давления в трубопроводе при $\mathrm{Fo}_r = 0{,}1662$ ($n = 100$)

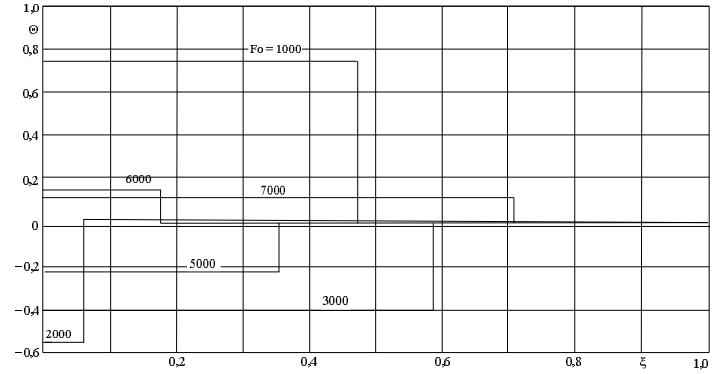


Рисунок 3.35. Распределение давления в трубопроводе при $\mathrm{Fo}_r = 1662$ ($n = 100$)

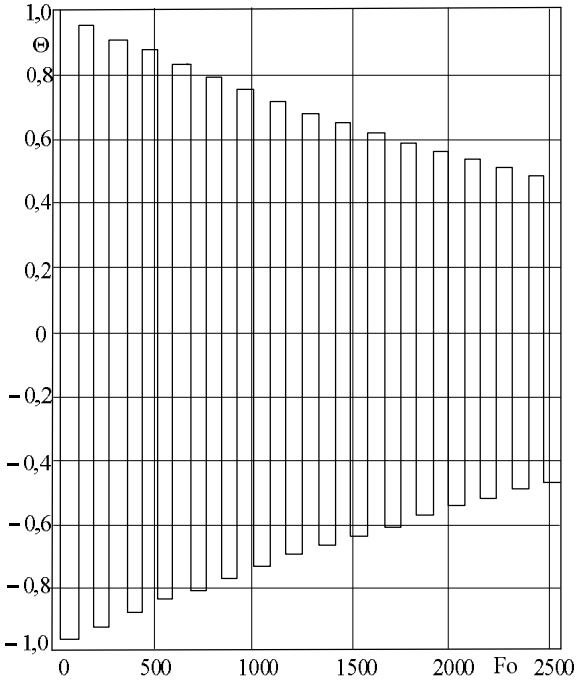


Рисунок 3.36. Распределение давления для точки $\xi = 0$ Fo при $\mathrm{Fo}_r = 1662$ ($n = 100$)

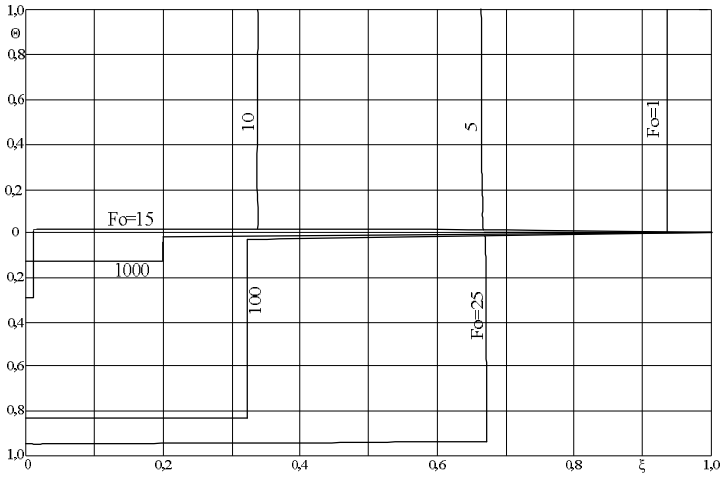


Рисунок 3.37. Распределение давления в трубопроводе при $\mathrm{Fo}_r = 224{,}1$ ($n = 100$)

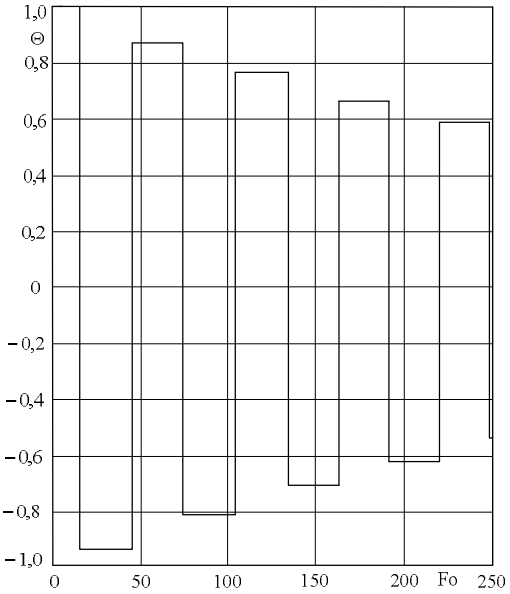


Рисунок 3.38. Распределение давления для точки $\xi = 0$ при $\mathrm{Fo}_r = 224{,}1$ ($n = 100$)

3.6 Численное исследование резонансных колебаний стержня с учетом релаксационных свойств материалов

Разработана математическая модель упругих колебаний стержня при воздействии внешней гармонической нагрузки с учетом релаксационных свойств и сил сопротивления среды. Вывод дифференциального уравнения модели основан на учете временно́й зависимости напряжений и деформаций в формуле закона Гука, которая при таком ее представлении совпадает с формулой усложненных моделей Максвелла и Кельвина – Фойхта. Исследование модели численным методом показало, что при совпадении частоты собственных колебаний стержня с частотой колебаний внешней нагрузки (при неучете сопротивления среды и ее релаксационных свойств) наблюдается неограниченное во времени возрастание амплитуды колебаний (резонанс). При учете сопротивления и релаксационных свойств среды в резонансных частотах наблюдается стабилизация амплитуды колебаний на ее величине, зависящей от значений коэффициентов сопротивления и релаксации. При частотах, близких к

резонансным, наблюдаются бифуркационные флаттерные колебания (биения), при которых происходит периодическое возрастание и убывание амплитуды колебаний. При частотах, существенно отличающихся от резонансных, в случае учета сил сопротивления и релаксационных свойств материалов бифуркационные колебания не наблюдаются. В этом случае, амплитуда колебаний стабилизируется во времени на величине, зависящей от амплитуды колебаний внешней нагрузки, коэффициента сопротивления и коэффициентов релаксации.

Упругая продольная деформация стержня распространяется со скоростью, зависящей от физических свойств среды. При этом волновой процесс колебаний не сопровождается перемещением вещества стержня. Дифференциальные уравнения, описывающие такие процессы, называются волновыми [10, 45, 48, 114].

В технике довольно часто встречаются случаи, когда процесс собственных колебаний стержня сопровождается колебаниями приложенной на его свободном торце нагрузки. При этом особый практический интерес представляет нахождение амплитуды резонансных колебаний, наблюдающихся при совпадении частоты собственных колебаний с частотой колебаний внешней нагрузки. Интерес представляет также выяснение причин возникновения бифуркационных флаттерных колебаний (биений), наблюдающихся при работе конкретных технических устройств.

Постановка задачи. В основе вывода уравнений колебаний стержней, пружин, струн и проч. лежат второй закон Ньютона и закон Гука. По закону Гука напряжение, вызванное действием некоторой силы F, пропорционально деформации $\varepsilon = dU / dx$

$$\sigma = EdU / dx, \tag{3.193}$$

где U – перемещение; x – координата; σ – напряжение; E – модуль нормальной упругости; ε – деформация.

Запишем второй закон Ньютона

$$F = ma = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d^2U}{dt^2} = \rho S\Delta x\frac{d^2U}{dt^2}, \tag{3.194}$$

где F – сила, m – масса тела, $a = d\upsilon / dt$ – ускорение, $\upsilon = dU / dt$ – скорость, ρ – плотность, S – площадь поперечного сечения, Δx – длина элементарного участка.

Сила давления, действующая на элементарном участке $(x + \Delta x)$ тела, равная произведению площади сечения на разность напряжений в сечениях, может быть представлена в виде соотношения

$$F = S\Delta x d\sigma / dx. \tag{3.195}$$

Подставляя (3.195) в (3.194), получаем уравнение движения (равновесия)

$$\rho S\Delta x\frac{d^2U}{dt^2}=S\Delta x\frac{d\sigma}{dx}. \tag{3.196}$$

Подставляя (3.193) в (3.196), получаем

$$\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial t^2}=e^2\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial x^2}, \tag{3.197}$$

где $e=\sqrt{E/\rho}$ – скорость волны.

Для учета силы сопротивления среды F_c примем, что

$$F_c=-r\partial U/\partial t, \tag{3.198}$$

где r – коэффициент. Знак «минус» означает, что сила сопротивления направлена, противоположно перемещению.

Подставляя (3.198) в правую часть соотношения (3.196), находим

$$\rho S\Delta x\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=S\Delta x\frac{\partial\sigma}{\partial x}-r\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{3.199}$$

Соотношение (3.199) можно переписать в виде

$$\rho\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\frac{r}{\Delta V}\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{3.200}$$

где $\Delta V=S\Delta x$ – объем элементарного участка.

Отметим, что последнее слагаемое в правой части соотношения (3.210) представляет силу сопротивления, приходящуюся на единицу объема.

Подставляя (3.193) в (3.200), находим волновое уравнение колебаний стержня с учетом сил сопротивления процессу изменения его формы

$$\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial t^2}=e^2\frac{\partial^2U(x,t)}{\partial x^2}-\gamma\frac{\partial U(x,t)}{\partial t}, \tag{3.201}$$

где $\gamma=r/(\rho\Delta V)$ – коэффициент сопротивления.

При выводе уравнения (3.201) был использован закон Гука, в котором отсутствует причинно – следственная связь явлений. Причиной (действующей силой) здесь является деформация ε, а следствием – напряжение σ. Отсутствие в этой формуле временно́й переменной свидетельствует о том, что следствие с изменением причины наступает мгновенно. Однако, распространение потенциалов любых физических полей в реальном происходит с запаздыванием во времени ввиду релаксационных свойств материала, учитываемых коэффициентом релаксации.

Для учета релаксационных свойств материала формулу (3.193) закона Гука представим в виде

$$\sigma+\tau_1\frac{\partial\sigma}{\partial t}=E\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\tau_2\frac{\partial^2U}{\partial x\partial t}\right), \tag{3.202}$$

где τ_1, τ_2 – коэффициенты релаксации напряжения и деформации, c.

Соотношение (3.202) совпадает с усложненными моделями Максвелла и Кельвина – Фойхта, общая формула которых имеет вид [52, 53, 88, 116].

$$\sigma + Q\partial\sigma/\partial t = E(\varepsilon + Q\partial\varepsilon/\partial t), \tag{3.203}$$

где константа Q, имеющая размерность времени, в работах [52, 53, 116] характеризуется как время запаздывания или время (период) релаксации [88].

Очевидно, что формула (2.202), если принять $\tau_1 = \tau_2 = Q$, полностью совпадает с формулой (3.203).

Формула (3.202) может быть получена также из сформулированной Лыковым А.В. обобщенной системы уравнений Онзагера [89, 91]

$$J_i = L_i^{(r)}\frac{\partial J_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N}\left(L_{ik}X_k + L'_{ik}\frac{\partial X_k}{\partial t}\right), \tag{3.204}$$

где J_i – поток субстанции (тепла, массы, импульса и т. д.); X_k – движущие силы; $L_i^{(r)}$, L_{ik}, L'_{ik} – постоянные.

Если положить $L_i^{(r)} = -\tau_1$; $L_{ik}^{(r)} = E$; $L'_{ik} = E\tau_2$; $J_i = \sigma$; $X_k = \varepsilon$, то соотношение (3.204) приводится к формуле (3.202). Согласованность формул (3.202), (3.204) свидетельствует о том, что в формуле (3.202) учитываются перекрестные эффекты, связанные с одновременным учетом временно́й и пространственной неравновесности и их взаимного влияния в нелокальном процессе переноса импульса.

Для вывода дифференциального уравнения, в котором учитывается изменение во времени напряжений и деформаций в законе Гука, выразим напряжение σ из (3.202) и подставим полученное соотношение в уравнение движения (3.200). После некоторых преобразований получим

$$\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + E\tau_2\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial t} - \tau_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) - \frac{r}{\Delta V}\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Заменяя в последнем выражении $\partial\sigma/\partial x$ ее величиной из (3.196), находим

$$\tau_1\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = e^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + e^2\tau_2\frac{\partial^3 U}{\partial x^2\partial t} - \gamma\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{3.205}$$

Уравнение (3.205) представляет волновое уравнение продольных колебаний стержня, в котором учитываются релаксационные свойства материала стержня и его сопротивление процессу изменения формы в результате деформации. При $\tau_1 = \tau_2 = \gamma = 0$ уравнение (3.205) переходит в уравнение незатухающих колебаний (3.197).

Рассмотрим получение решения задачи о колебаниях стержня, жестко закрепленного на одном из торцов (при $x = \delta$), а на втором – на единицу площади приложена сила F, изменяющаяся по косинусоидальному закону (при $x = 0$):

$$\frac{F}{ES} = \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \cos(\omega t), \tag{3.206}$$

где S – площадь сечения стержня, $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота.

В начальное время стержень деформирован по линейному закону, по которому максимальное перемещение имеет его свободный торец. Начальные скорости элементов стержня также изменяются по линейному закону, согласно которому максимальную начальную скорость также имеет его свободный торец.

Постановка задачи здесь будет следующей:

$$\tau_1 \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = e^2\left[\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 U(x,t)}{\partial x^2 \partial t}\right] - \gamma \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} \qquad (t > 0; \quad 0 < x < \delta); \tag{3.207}$$

$$U(x,0) = b(\delta - x); \quad (3.208) \qquad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \nu(\delta - x); \quad (3.209) \qquad \frac{\partial^2 U(x,0)}{\partial t^2} = 0; \tag{3.210}$$

$$\partial U(0,t)/\partial x = \cos(\omega t); \quad (3.211) \qquad U(\delta,t) = 0, \tag{3.212}$$

где δ – длина стержня, b – коэффициент, учитывающий начальные перемещения элементов стержня; ν – коэффициент, учитывающий начальные скорости.

Обозначим

$$\Theta = \frac{U}{U_0}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad \mathrm{Fo} = \frac{et}{\delta}; \quad F_1 = \frac{e\tau_1}{\delta}; \quad F_2 = \frac{e\tau_2}{\delta}; \quad F_3 = \frac{\delta\gamma}{e}, \tag{3.213}$$

где Θ – безразмерное перемещение; ξ – безразмерная координата; Fo – число Фурье; $U_0 = b\delta$; F_1, F_2 – безразмерные коэффициенты релаксации; F_3 – безразмерный коэффициент сопротивления среды.

С учетом (3.213) задача (3.207) – (3.212) преобразуется к виду:

$$F_3 \frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} + F_1 \frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^3} + \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} + F_2 \frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2\partial\mathrm{Fo}} \tag{3.214}$$

$$(\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi,0) = 1 - \xi; \quad (3.215) \qquad \frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial\mathrm{Fo}} = B(1-\xi); \quad (3.216) \qquad \frac{\partial^2\Theta(\xi,0)}{\partial\mathrm{Fo}^2} = 0; \tag{3.217}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi} = F_4 \cos(F_5\,\mathrm{Fo}); \quad (3.218) \qquad \Theta(1,\mathrm{Fo}) = 0, \tag{3.219}$$

где $F_4 = \delta/U_0$; $F_5 = \omega\delta/e$ – безразмерная частота вынужденных колебаний (колебаний внешней нагрузки).

Решение задачи. Для решения задачи (3.214) – (3.219) конечно - разностным методом в рассматриваемой области вводится пространственная сетка с шагами $\Delta\xi = 0{,}005$, $\Delta\mathrm{Fo} = 0{,}005$ соответственно по переменным ξ и Fo так, что

$$\xi_k = k\,\Delta\xi, \quad k = \overline{0, K}; \quad \mathrm{Fo}_i = i\,\Delta\mathrm{Fo}, \quad i = \overline{0, I}, \tag{3.220}$$

где $K = 200$, $I = 50000$ – число шагов по координатам ξ, Fo.

На сетке (3.220) вводятся сеточные функции $\Theta_k^i = \Theta(\xi_k, \mathrm{Fo}_i)$. Используя принятую схему аппроксимации дифференциальных операторов, задача (3.214) – (3.219) записывается в виде

$$F_3\frac{\Theta_k^{i+1}-\Theta_k^i}{\Delta\mathrm{Fo}} + F_1\frac{\Theta_k^{i+1}-3\Theta_k^i+3\Theta_k^{i-1}-\Theta_k^{i-2}}{\Delta\mathrm{Fo}^3} + \frac{\Theta_k^{i-1}-2\Theta_k^i+\Theta_k^{i+1}}{\Delta\mathrm{Fo}^2} =$$

$$= \frac{\Theta_{k-1}^i-2\Theta_k^i+\Theta_{k+1}^i}{\Delta\xi^2} + F_2\left(\frac{\Theta_{k-1}^i-2\Theta_k^i+\Theta_{k+1}^i}{\Delta\xi^2\Delta\mathrm{Fo}} - \frac{\Theta_{k-1}^{i-1}-2\Theta_k^{i-1}+\Theta_{k+1}^{i-1}}{\Delta\xi^2\Delta\mathrm{Fo}}\right);$$

$$\Theta_k^0 = 1-\xi_k; \quad \frac{\Theta_k^1-\Theta_k^0}{\Delta\mathrm{Fo}} = 0; \quad \frac{\Theta_k^0-2\Theta_k^1+\Theta_k^2}{\Delta\xi} = 0;$$

$$\frac{\Theta_1^i-\Theta_0^i}{\Delta\xi} = F_4\cos(F_5\,\mathrm{Fo}_i); \qquad \Theta_K^i = 0.$$

Анализ результатов. Результаты выполненных исследований приведены на рисунках 3.39 – 3.47. В случае, когда не учитываются релаксационные свойства материалов и силы сопротивления среды ($F_1 = F_2 = F_3 = 0$), а также при отсутствии внешней нагрузки ($F_4 = 0$) и при равенстве нулю начальных скоростей, наблюдаются незатухающие колебания стержня с частотой его собственных колебаний, безразмерная величина которых составляет 1,575.

При отличных от нуля начальных скоростях ($F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0$) колебания происходят при повышенной и неизменной во времени амплитуде, зависящей от коэффициента B, в незатухающем во времени процессе колебаний.

При любых ненулевых значениях коэффициента сопротивления ($F_3 \neq 0$) и при неучете релаксационных свойств материала ($F_1 = F_2 = 0$) колебания затухающие (рисунок 3.39).

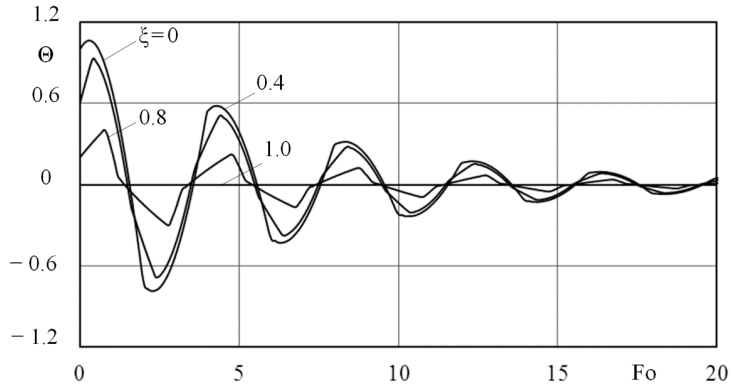


Рисунок 3.39. Изменение перемещений стержня во времени:
$F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = 0;\ F_3 = 0{,}3$

При $F_1 = F_2 = F_3 = 0$; $F_4 = 0{,}5$; $F_5 = 1{,}575$ безразмерная частота вынужденных колебаний, возникающих под действием внешней нагрузки вида (3.218), совпадает с частотой собственных колебаний стержня. При этом происходит неограниченное возрастание амплитуды колебаний во времени, то есть наблюдаются резонансные колебания (рисунок 3.40).

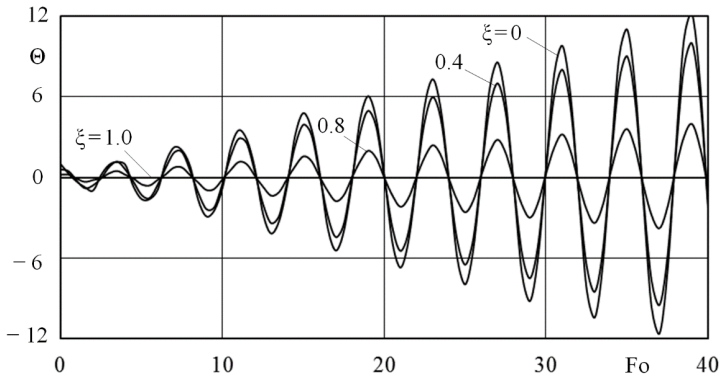


Рисунок 3.40. Изменение перемещений стержня в резонансных частотах:
$F_1 = F_2 = F_3 = 0;\ F_4 = 0{,}5;$
$F_5 = 1{,}575$

При малых значениях коэффициентов релаксации ($F_1 = F_2 = 0.1$) и при $F_3 = 0{,}3$; $F_4 = 0{,}1$; $F_5 = 1{,}575$ (колебания в резонансных частотах) на начальном диапазоне времени амплитуда колебаний уменьшается, достигая некоторого минимума. С увеличением времени амплитуда возрастает, стабилизируясь на некоторой неизменной во времени величине (рисунок 3.41).

Пример колебаний стержня в резонансных частотах при больших значениях коэффициентов релаксации ($F_1 = F_2 = 2$) и при $F_3 = 1$; $F_4 = 0{,}1$; $F_5 = 1{,}575$ приведен на рисунке 3.42. Из анализа результатов следует, что под действием внешней нагрузки происходит периодическое возрастание и убывание амплитуды в незатухающем во времени процессе колебаний.

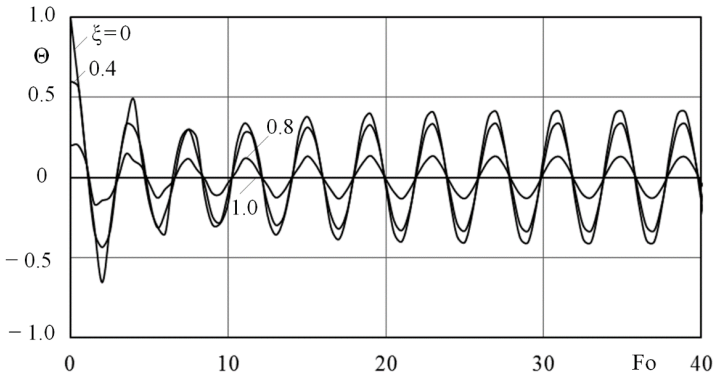


Рисунок 3.41. Изменение перемещений стержня в резонансных частотах:
$F_1 = F_2 = 0{,}1;\ F_3 = 0{,}3;\ F_4 = 0{,}1;$
$F_5 = 1{,}575$

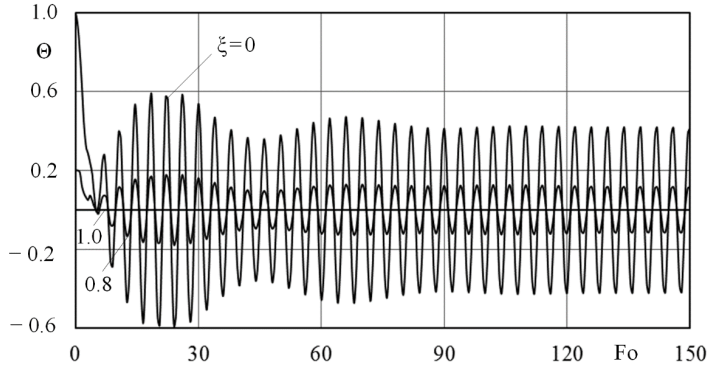


Рисунок 3.42. Изменение перемещений стержня в резонансных частотах:
$F_1 = F_2 = 2;\ F_3 = 1;\ F_4 = 0{,}1;$
$F_5 = 1{,}575$

Были также выполнены расчеты в нерезонансных частотах колебаний внешней нагрузки. При этом рассматривались два варианта – при частотах, близких к резонансным, и при существенно отличающихся от резонансных. И, в частности, пример колебания стержня при частотах, близких к резонансным ($F_5 = 1{,}5$), приведен на рисунках 3.43, 3.44 ($F_1 = F_2 = 10$; $F_3 = 0{,}3$; $F_4 = 0{,}1$). Из анализа результатов следует, что в данном случае наблюдается бифуркационное изменение амплитуды, при котором значительные периодические возрастания амплитуды сопровождаются столь же значительными ее падениями. Такого типа колебания можно квалифицировать как флаттерные колебания.

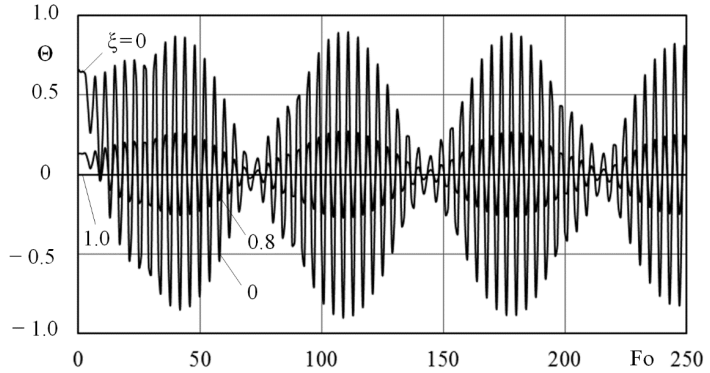


Рисунок 3.43. Изменение перемещений стержня в нерезонансных частотах:
$F_1 = F_2 = 10;\ F_3 = 0{,}3;\ F_4 = 0{,}1;$
$F_5 = 1{,}5$

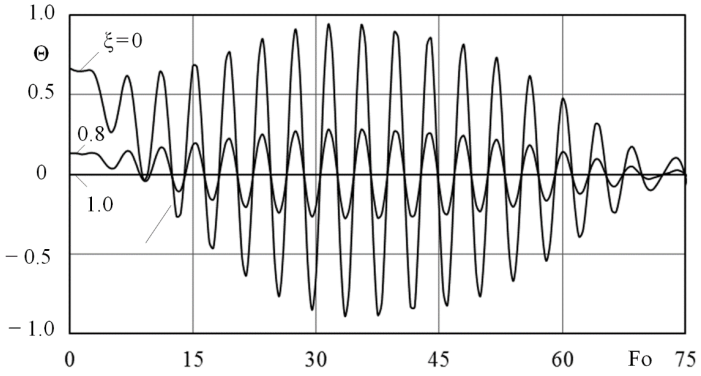


Рисунок 3.44. Изменение перемещений стержня в нерезонансных частотах:
$F_1 = F_2 = 10;\ F_3 = 0{,}3;\ F_4 = 0{,}1;$
$F_5 = 1{,}5$

Пример колебаний стержня при частотах, далеких от резонансных $(F_5 = 0{,}1)$, приведен на рисунке 3.45. Из их анализа можно заключить, что каждая точка стержня имеет две амплитуды колебаний с существенно отличающейся частотой. То есть каждая точка стержня участвует в двух колебательных процессах, в одном из которых совершаются высокочастотные и низкоамплитудные колебания, а в другом – низкочастотные и высокоамплитудные. При каких-то больших значениях коэффициента сопротивления F_3 как для резонансных, так и для нерезонансных частот, наблюдается критическое затухание колебаний, при котором, несмотря на воздействие внешней нагрузки, возврат выведенного из состояния равновесия стержня происходит практически при отсутствии колебаний его внутренних точек (рисунки 3.46, 3.47).

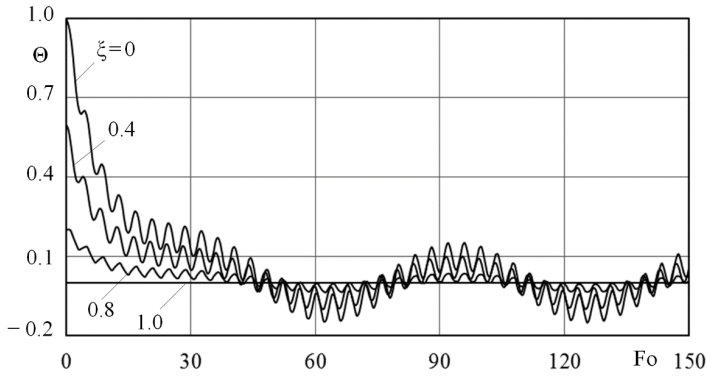


Рисунок 3.45. Изменение перемещений стержня в нерезонансных частотах:
$F_1 = F_2 = 10;\ F_3 = 0{,}3;\ F_4 = 0{,}1;$
$F_5 = 0{,}1$

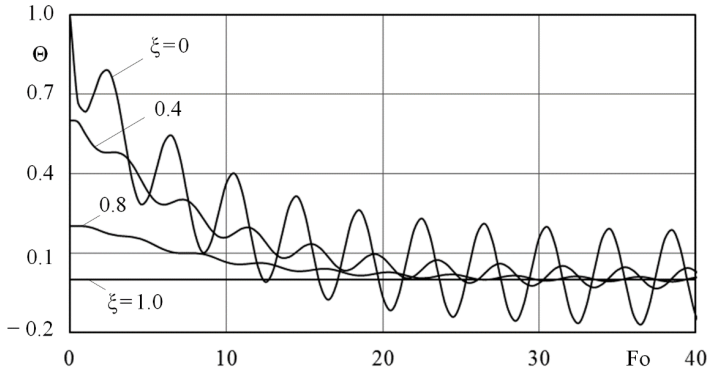


Рисунок 3.46. Изменение перемещений стержня в резонансных частотах:
$F_1 = F_2 = 0;\ F_3 = 20;$
$F_4 = 1;\ F_5 = 1{,}575$

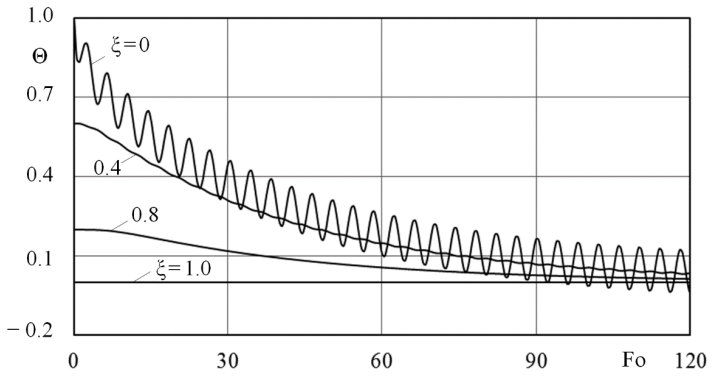


Рисунок 3.47. Изменение перемещений стержня в резонансных частотах:
$F_1 = F_2 = 0;\ F_3 = 100;$
$F_4 = 1;\ F_5 = 1{,}575$

Заключение

1. На основе учета в формуле закона Гука релаксационных слагаемых, включающих производные по времени от напряжения и деформации в произведении с коэффициентами релаксации, а также при учете внутреннего сопротивления материала стержня процессу изменения его формы, выведено волновое уравнение колебаний упругого стержня.

2. Численным методом выполнено исследование продольных колебаний стержня с жестким закреплением одного из его торцов и при задании внешней гармонической нагрузки на другом, с учетом изменяющихся по пространственной координате начальных скоростей различных точек стержня при начальной деформации стержня по линейному закону.

3. При неучете сил сопротивления материала стержня и его релаксационных свойств в резонансных частотах (при совпадении частоты собственных колебаний стержня с частотой колебаний внешней нагрузки) происходит неограниченное во времени увеличение амплитуды колебаний. При учете релаксационных свойств и сопротивления среды наблюдается периодическое изменение амплитуды в незатухающем процессе колебаний.

4. При частотах, близких к резонансным, наблюдаются бифуркационные флаттерные колебания (биения), сопровождающиеся существенными изменениями амплитуды колебаний в незатухающих во времени процессах колебаний стержня.

5. При частотах, далеких от резонансных, каждая точка стержня участвует в двух колебательных процессах. В одном из них совершаются высокочастотные и низкоамплитудные, а в другом низкочастотные и высокоамплитудные колебания.

6. При больших значениях коэффициента сопротивления наблюдается критическое затухание колебаний стержня, при котором возврат выведенного из состояния равновесия стержня в исходное (недеформированное) состояние происходит при практическом отсутствии колебательных процессов во всех внутренних точках стержня, за исключением точки, где задана внешняя нагрузка.

3.7 Применение операционных методов в математических моделях колебаний струны

Используя двойное интегральное преобразование, найдем точное решение задачи, приведенной в п. 3.2. Математическая постановка следующая:

$$\mathrm{Fo}_1 \frac{\partial \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_r \frac{\partial^3 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^3} + \frac{\partial^2 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} + \mathrm{Fo}_r \frac{\partial^3 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2 \partial \mathrm{Fo}} \tag{3.221}$$

$$(\mathrm{Fo} > 0;\quad 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi,0) = \xi(1-\xi)\ ;\quad (3.222) \qquad \partial\Theta(\xi,0)/\partial\,\mathrm{Fo} = 0\ ; \tag{3.223}$$

$$\partial^2\Theta(\xi,0)/\partial\,\mathrm{Fo}^2 = 0\ ;\quad (3.224) \qquad \Theta(0,\mathrm{Fo}) = 0\ ;\quad (3.225) \qquad \Theta(1,\mathrm{Fo}) = 0\ . \tag{3.226}$$

Введем

$$W(\xi,\mathrm{Fo}) = \Theta(\xi,\mathrm{Fo}) - \xi(1-\xi)\ , \tag{3.227}$$

относительно которой задача (3.221) – (3.226) принимает вид

$$\mathrm{Fo}_1 \frac{\partial W}{\partial \mathrm{Fo}} + \frac{\partial^2 W}{\partial \mathrm{Fo}^2} + \mathrm{Fo}_r \frac{\partial^3 W}{\partial \mathrm{Fo}^3} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \mathrm{Fo}_r \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^2 \partial \mathrm{Fo}} - 2 \qquad (\mathrm{Fo} > 0;\quad 0 < \xi \le 1); \tag{3.228}$$

$$W(\xi,0) = \frac{\partial W(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 W(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}^2} \qquad (0 \le \xi \le 1); \tag{3.229}$$

$$W(0,\mathrm{Fo}) = W(1,\mathrm{Fo}) = 0 \qquad (\mathrm{Fo} > 0). \tag{3.230}$$

Применяя интегральное преобразование по переменной ξ

$$\overline{W}(n,\mathrm{Fo}) = \int_0^1 W(\xi,\mathrm{Fo})\sin(n\pi\xi)d\xi\ , \tag{3.231}$$

находим

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}\sin(n\pi\xi)d\xi = -(n\pi)^2\overline{W}\ ; \tag{3.232}$$

$$W(\xi,\mathrm{Fo}) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \overline{W}(n,\mathrm{Fo})\sin(n\pi\xi). \tag{3.233}$$

Применяя интегральное преобразование Лапласа по переменной Fo

$$\overline{\overline{W}}(n,p) = \int_0^\infty e^{-p\mathrm{Fo}}\overline{W}(n,\mathrm{Fo})d\mathrm{Fo}\ , \tag{3.234}$$

в результате двойного преобразования находим

$$\overline{\overline{W}}(n,p) = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\mathrm{Fo}_r(n\pi)} \cdot \frac{1}{p\left\{p^3 + \dfrac{p^2}{\mathrm{Fo}_r} + \left[\dfrac{\mathrm{Fo}_1}{\mathrm{Fo}_r} + (n\pi)^2\right] + p\dfrac{(n\pi)^2}{\mathrm{Fo}_r}\right\}}\ . \tag{3.235}$$

Для нахождения оригинала необходимо найти корни алгебраического уравнения

$$p^3 + (1/\mathrm{Fo}_r)p^2 + [\mathrm{Fo}_1/\mathrm{Fo}_r +] + p(1/\mathrm{Fo}_r)(n\pi)^2 = 0\ . \tag{3.236}$$

Обозначим:

$$q_{1n} = [3\mathrm{Fo}_r(\mathrm{Fo}_1 + \mathrm{Fo}_r(r\pi)^2) - 1]/(3\mathrm{Fo}_r^2) \quad (q_{1n} > 0);$$

$$q_{2n} = [2 - 9\mathrm{Fo}_r(\mathrm{Fo}_1 + 2\mathrm{Fo}_r(r\pi)^2)]/(27\mathrm{Fo}_r^2) \; ; \qquad Q_n = (q_{1n}/3)^3 + (q_{2n}/2)^2 .$$

Так как $Q_n > 0$, то уравнение (3.236) имеет один действительный и два комплексно - сопряженных корня: p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}.

С учетом обозначений

$$a_n = \sqrt[3]{-q_{2n}/2 + \sqrt{Q_n}} \; ; \qquad b_n = \sqrt[3]{-q_{2n}/2 - \sqrt{Q_n}}$$

корни уравнения (3.246) будут следующими:

$$p_{1n} = -\left(\sqrt[3]{q_{2n}/2 - \sqrt{Q_n}} + \sqrt[3]{q_{2n}/2 + \sqrt{Q_n}} + (1/3\mathrm{Fo}_r)\right) = -\beta_n \; ;$$

$$p_{2n} = -\left(\frac{a_n + b_n}{2} + (1/3\mathrm{Fo}_r)\right) + i\frac{(a_n - b_n)\sqrt{3}}{2} = -\beta_{1n} + i\beta_{2n} \; ; \qquad (3.237)$$

$$p_{3n} = -\left(\frac{a_n + b_n}{2} + (1/3\mathrm{Fo}_r)\right) - i\beta_{2n} = -\beta_{1n} - i\beta_{2n} \; ,$$

где $\beta_{1n} = \left(\frac{a_n + b_n}{2} + (1/3\mathrm{Fo}_r)\right)$; $\beta_{2n} = \frac{(a_n - b_n)\sqrt{3}}{2}$; $b_n > 0$.

$$p_{1n} = -\beta_n \; ; \qquad p_{2n} = -\beta_{1n} + i\beta_{2n} \; ; \qquad p_{3n} = -\beta_{1n} - i\beta_{2n} \; .$$

Отсюда соотношение для двойного преобразования принимает вид

$$\overline{W}(n,p) = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\mathrm{Fo}_r(n\pi)} \cdot \frac{1}{p(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)} =$$

$$= \frac{2[(-1)^n - 1]}{\mathrm{Fo}_r(n\pi)} \cdot \frac{1}{p(p-\beta_n)[(p+\beta_{1n})^2 + \beta_{2n}^2)]} =$$

$$= \frac{2[(-1)^n - 1]}{\beta_n \mathrm{Fo}_r(n\pi)} \cdot \left\{ \frac{1}{p[(p+\beta_{1n})^2 + \beta_{2n}^2)]} - \frac{1}{(p-\beta_n)[(p+\beta_{1n})^2 + \beta_{2n}^2)]} \right\} . \qquad (3.238)$$

Переходя в область оригиналов, получаем

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \xi(1-\xi) + (4/\pi\mathrm{Fo}_r)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n\beta_n} \cdot \left\{ \frac{1}{\beta_{1n}^2 + \beta_{2n}^2} + \frac{1}{(\beta_{1n} + \beta_n)^2 + \beta_{2n}^2} \cdot e^{-\beta_n \mathrm{Fo}} - \right.$$

$$- \left[\frac{1}{\beta_{1n}^2 + \beta_{2n}^2} + \frac{1}{(\beta_{1n} - \beta_n)^2 + \beta_{2n}^2} \right] \cdot e^{-\beta_n \mathrm{Fo}} \cos(\beta_{2n}\mathrm{Fo}) - \left[\frac{\beta_{1n}}{\beta_{2n}(\beta_{1n}^2 + \beta_{2n}^2)} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\beta_{1n} - \beta_n}{\beta_{2n}[(\beta_{1n} - \beta_n)^2 + \beta_{2n}^2]} \right] \cdot e^{-\beta_n \mathrm{Fo}} \cos(\beta_{2n}\mathrm{Fo}) \right\} \sin(n\pi\xi) \; . \qquad (3.239)$$

Формула (3.239) является точным аналитическим решением задачи (3.221) – (3.226). Получаемые по этому соотношению результаты полностью совпадают с результатами расчетов по формуле (3.105) (см. рисунки 3.15 – 3.22).

3.8 Экспериментальные исследования колебаний стержня

С целью подтверждения теоретических исследований, полученных в диссертации, в ОАО Ракетно - космический центр «Прогресс» (г. Самара) были выполнены экспериментальные исследования колебаний стержня, закрепленного на одном из его торцов. Работы по экспериментальным исследованиям выполнялись по программе Соглашения о научно - техническом сотрудничестве в совместном проведении теоретических и экспериментальных исследований процессов колебаний твердых упругих тел с целью получения новых данных по их механическим (в том числе и релаксационным) свойствам, заключенного между АО РКЦ «Прогресс» и Самарским государственным техническим университетом (Соглашение № 1 – сотр. от 26.04.2017 г.).

Исследования проводились на специальной установке (рисунок 3.48), включающей следующее оборудование: 1) стенд для создания начальных удлинений стержня; 2) измерительная система ИИС «АСИДХК»; 3) акселерометры PCB Piezotronics типа 354 C02; 4) усилитель сигнала PCB Piezotronics 481A03; 5) универсальный измерительный усилитель QuantumX MX 840B (класс точности 0,05); 6) тензометрический датчик силы – модель U9B2KN класса точности 0,2; 7) индуктивный датчик перемещения; 8) ноутбук с программным обеспечением (Microsoft Win 8.1, CatmanAP v.4.3).

Последовательность выполнения работы заключалась в следующем. Стальной круглый стержень (сталь 30ХГСА) диаметром 17 *мм* и длиной 310 *мм* жестко закреплялся на одном из его торцов (левый торец на рисунке 3.49) путем накручивания на цилиндрическую втулку длиной 80 *мм* и диаметром 4 *мм*. На правый торец стержня накручивалась еще одна втулка, содержащая на правом основании вкрученную в неё шпильку (размеры шпильки даны на рисунке 3.50). Шпилька в центральной ее части имеет малый диаметр (4 *мм*), причем такой, чтобы ее разрыв в этой части происходил при определенном (заданном) растяжении стержня при воздействии растягивающей нагрузки на правый торец втулки. После обрыва втулки стержень растянутый до 0,1 *мм* совершал продольные колебания во времени, фиксируемые измерительной системой установки.

Результаты экспериментальных исследований даны на рисунках 3.51 – 3.56. Их анализ позволяет заключить, что колебания свободного торца стержня представляет волновой процесс с монотонно меняющейся амплитудой. Детальная расшифровка процесса колебаний в диапазонах сверхмалых значений времени (до сотых долей секунды, см. рисунки 3.53 – 3.56)

позволяет заключить, что свободный торец стержня участвует в двух колебательных процессах – с малой амплитудой и большой частотой (временные участки *а* на рисунке 3.53) и одновременно – с большой амплитудой и малой частотой (временно́й участок *б* на рисунке 3.53). Этот факт можно объяснить тем, что процесс сжатия (или растяжения) стержня одновременно сопровождается его малоамплитудными и высокочастотными колебаниями. Полученные экспериментальные данные качественно согласуются с результатами теоретических исследований по разработанным в диссертации моделям колебаний упругих тел с учетом пространственно - временно́й нелокальности. На рисунках 3.57, 3.58 приведены результаты теоретических исследований свободного торца стержня при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 2$ и $\mathrm{Fo}_3 = 0{,}1$, из анализа которых следует можно заключить, что каждая точка стержня (в том числе и свободная поверхность) участвуют в двух колебательных процессах – в высокочастотном низкоамплитудном и малочастотном высокоамплитудном колебаниях.

С увеличением времени ($\tau \geq 0{,}06$) прооцесс колебаний стабилизируется, принимая вид гармонических колебаний с монотонно уменьшающейся амплитудой (см. рисунок 3.51).)

Количественное сравнение результатов экспериментальных и теоретических исследований показывает, что при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 2$ расчетная частота колебаний составляет 2380 1/*c*, а экспериментальная – 2400 1/*c*. Величина $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2$ находилась из условия, чтобы средние амплитуды колебаний, получаемые из эксперимента и из расчета, были одинаковыми.

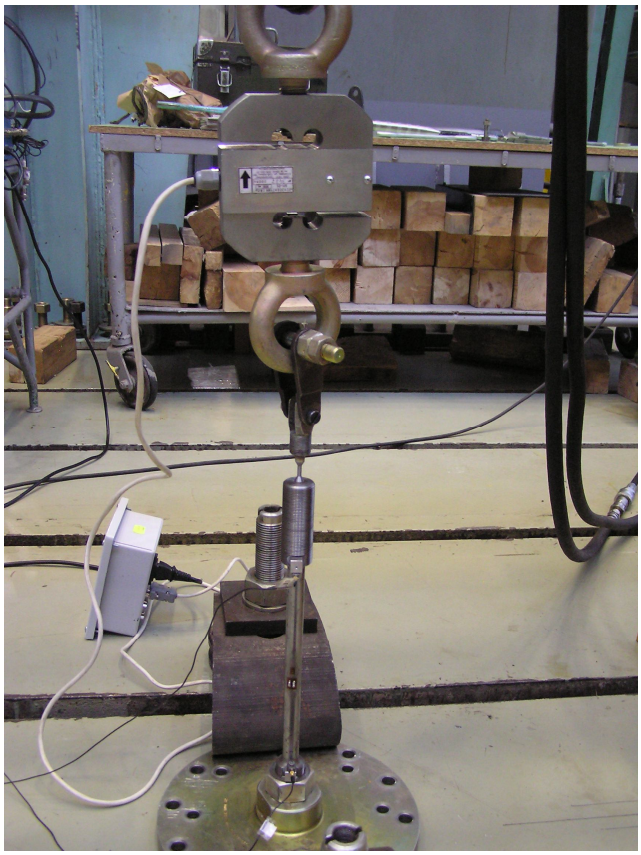


Рисунок 3.48. Экспериментальная установка по определению колебаний стержня

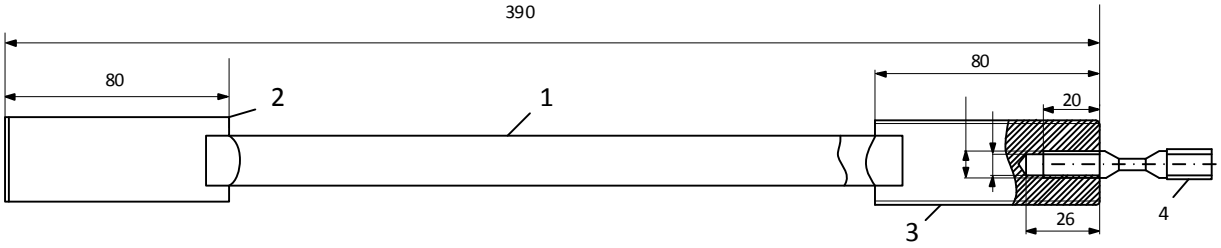


Рисунок 3.49. Схема закрепления стержня. 1 – стержень; 2 – неподвижная втулка; 3 – подвижная втулка; 4 – разрывная шпилька

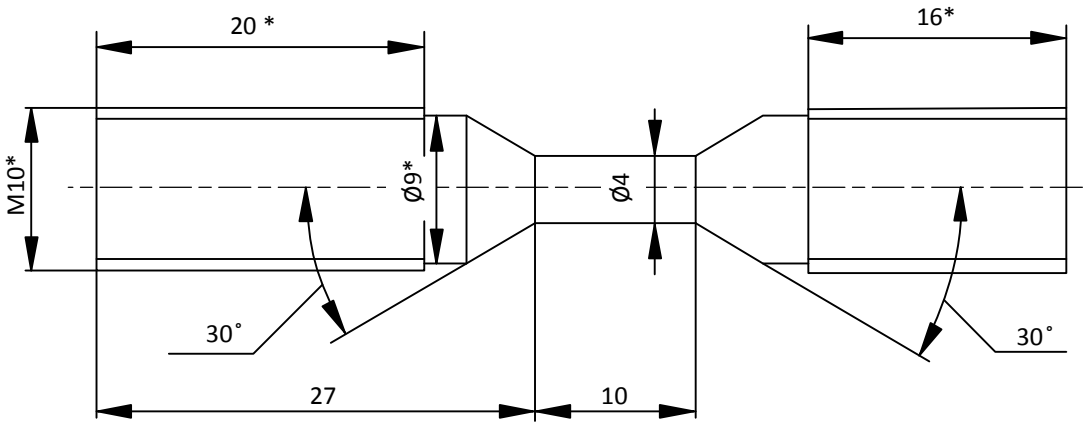


Рисунок 3.50. Разрывная шпилька

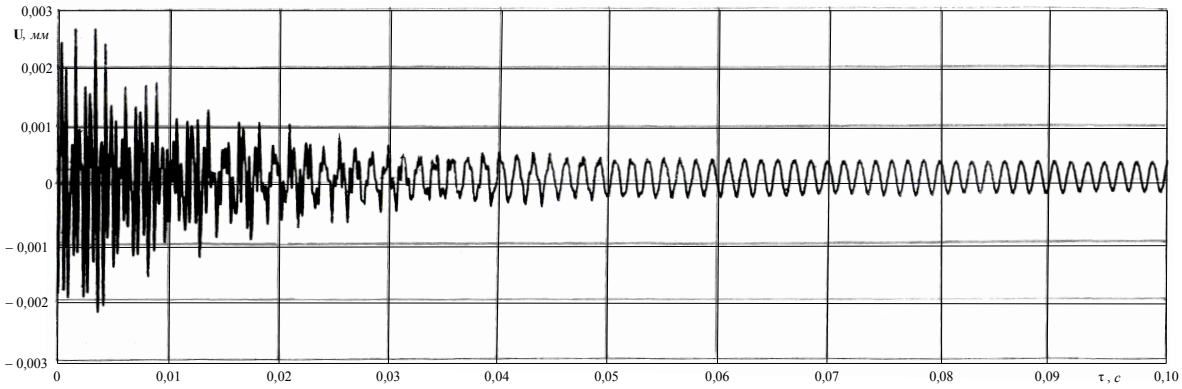


Рисунок 3.51. Перемещение свободного торца стержня во времени в диапазоне $0 \le \tau \le 0{,}1$ *c* (эксперимент)

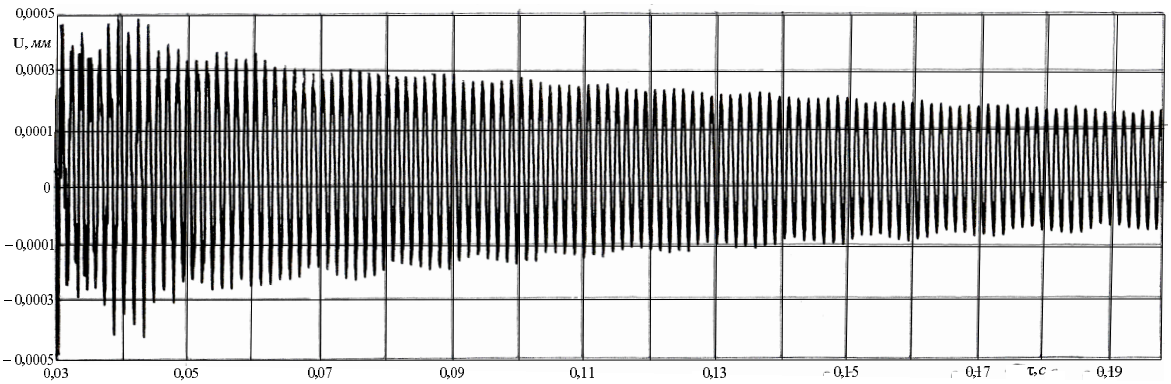


Рисунок 3.52. Перемещение свободного торца стержня во времени в диапазоне $0{,}03 \le \tau \le 0{,}2$ *c* (эксперимент)

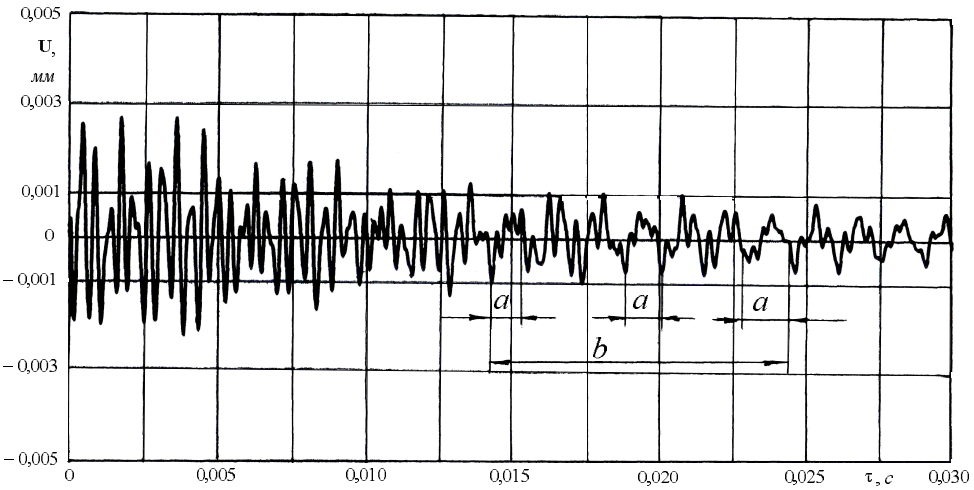


Рисунок 3.53. Перемещение свободного торца стержня во времени в диапазоне $0 \le \tau \le 0{,}03$ *c* (эксперимент)

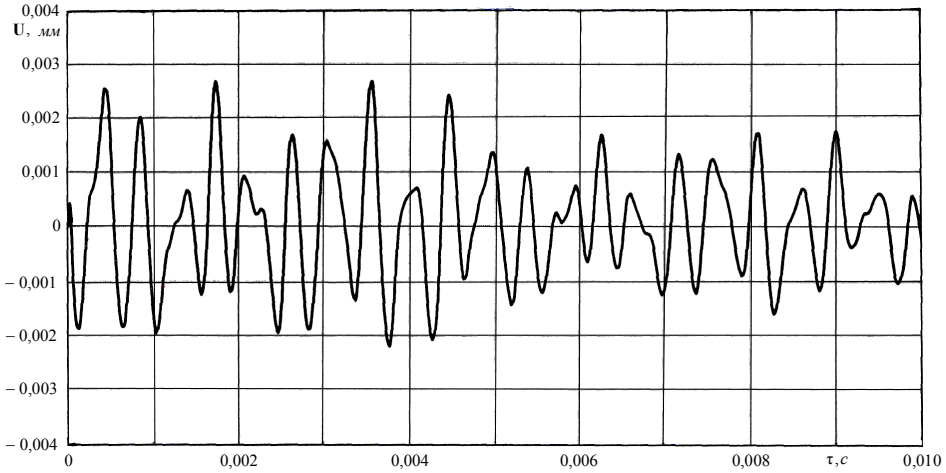


Рисунок 3.54. Перемещение свободного торца стержня во времени в диапазоне $0 \le \tau \le 0{,}01$ *c* (эксперимент)

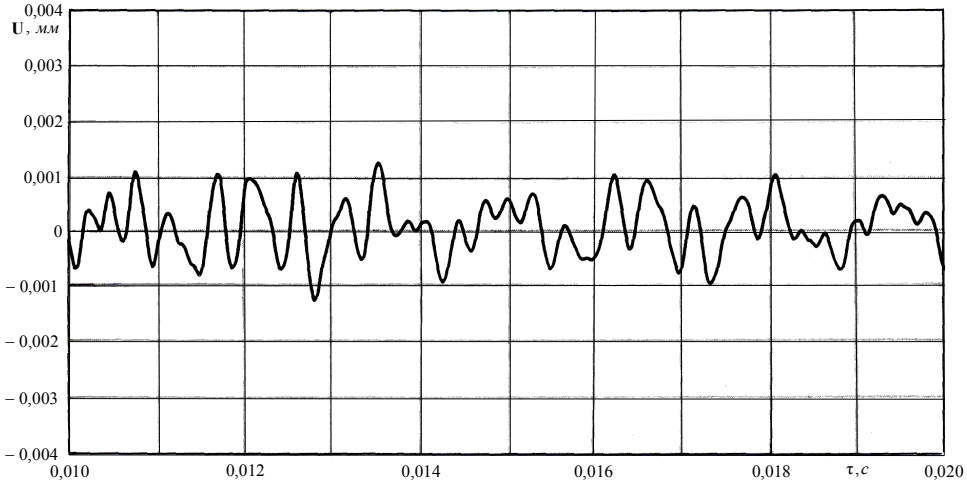


Рисунок 3.55. Перемещение свободного торца стержня во времени в диапазоне $0 \le \tau \le 0{,}02$ *c* (эксперимент)

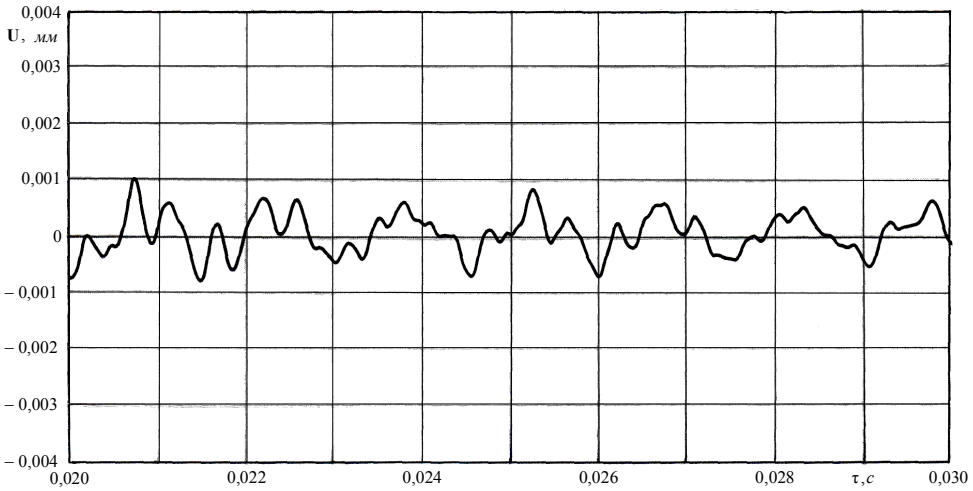


Рисунок 3.56. Перемещение свободного торца стержня во времени в диапазоне $0{,}02 \le \tau \le 0{,}03$ *c* (эксперимент)

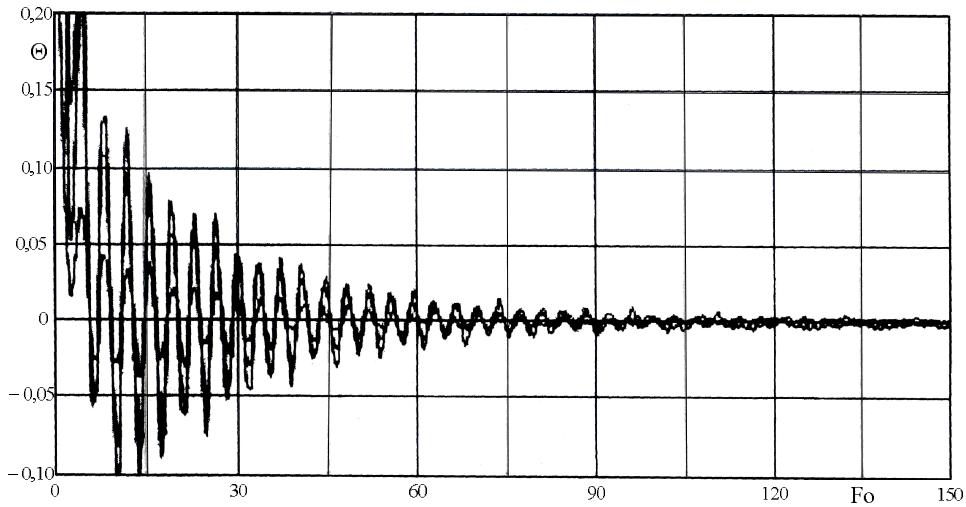


Рисунок 3.57. Перемещение свободного торца стержня во времени Fo (расчет численным методом) $Fo_1 = Fo_2 = 2$

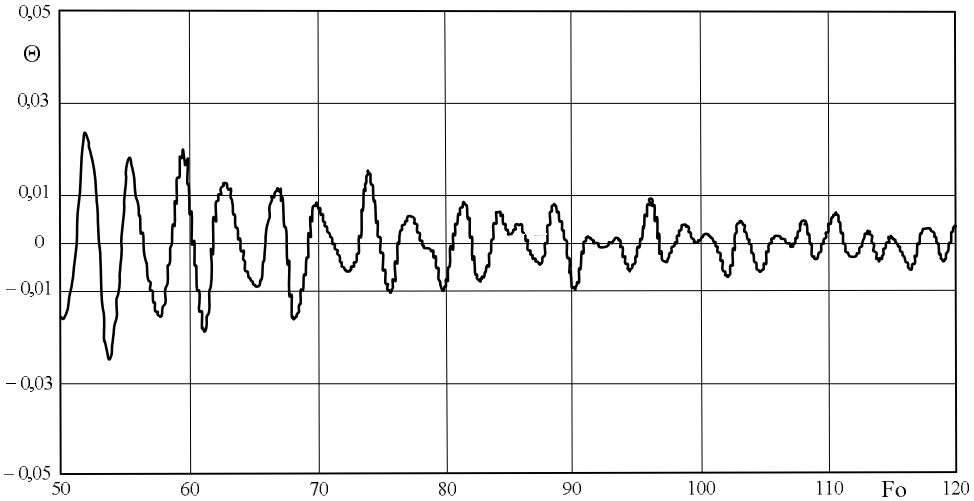


Рисунок 3.58. Перемещение свободного торца стержня во времени Fo (расчет численным методом $Fo_1 = Fo_2 = 2$)

При выполнении экспериментальных исследований применялось следующее оборудование, приведенное на рисунке 3.48:

Оборудование для определения форм колебаний и перемещения стержня во времени:

– измерительная система: ИИС «АСИДХК». Свидетельство о калибровке СрК 502497 от 19.07.16;

– акселерометры: 354C02 серийные номера 15894, 15899; свидетельство о поверке 448089 от 23.11.2015 т 448093 от 23.11.2015; диапазон рабочих частот от 0,2 до 6000 *Гц; д*иапазон измерения ускорения до 500 g;

– усилитель сигнала: PCB Piezotronics тип 481A03 серийный номер 376; свидетельство о поверке 503877 от 09.08.2016; диапазон рабочих частот от 0,5 до 10000 *Гц.*

Оборудование для определения разрушающей нагрузки:

– ноутбук с программным обеспечением (Microsoft Win 8.1, CatmanAP v.4.3);

– измерительный усилитель QuantumX MX 840B с классом точности 0,05; зав. № 0009E5006FC5; свидетельство поверки № 502797 действительно до 02.08.2017 г.;

– тензометрический датчик силы модель U9B 2 kN класс точности 0,2; зав. № 143713097; свидетельство поверки № СвП - 389676 до 20.10.2016 г.;

– индуктивный датчик перемещения (участвовал в первом эксперименте по определению усилия растяжения на 0,2 *мм*).

На основе исследований, представленных в третьей главе диссертации, получены следующие новые научные результаты.

1. На основе учета в формуле закона Гука релаксационных слагаемых, включающих производные по времени от напряжения и деформации, а также при учете внутреннего сопротивления материала стержня процессу изменения его формы, выведено модифицированное волновое уравнение колебаний упругого стержня.

2. Численным методом выполнено исследование продольных колебаний стержня с жестким закреплением одного из его торцов и при задании внешней гармонической нагрузки на другом, с учетом изменяющихся по пространственной переменной начальных скоростей различных точек стержня при начальной деформации стержня по линейному закону.

3. При неучете сил сопротивления материала стержня и его релаксационных свойств в резонансных частотах происходит неограниченное увеличение амплитуды в незатухающем во времени процессе колебаний. При учете релаксационных свойств и сопротивления среды наблюдается периодическое изменение амплитуды в затухающем процессе колебаний.

4. При частотах, близких к резонансным, наблюдаются бифуркационные колебания (биения), сопровождающиеся существенными изменениями амплитуды колебаний в незатухающих во времени процессах колебаний стержня.

5. При частотах, далеких от резонансных, каждая точка стержня участвует в двух колебательных процессах. В одном из них совершаются высокочастотные и низкоамплитудные, а в другом – низкочастотные и высокоамплитудные колебания.

6. При больших значениях коэффициента сопротивления наблюдается критическое затухание колебаний, при котором возврат стержня, выведенного из состояния равновесия, в исходное (недеформированное) состояние, происходит при практическом отсутствии колебательных процессов во всех его внутренних точках, за исключением точки, где задана внешняя нагрузка.

7. Выполнены экспериментальные исследования продольных колебаний стержня, жестко закрепленного на одном из его торцов. Анализ полученных результатов показал, что на отдельных участках временно́го диапазона колебаний данные эксперимента качественно совпадают с результатами теоретических исследований.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛОКАЛЬНО - НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТЕЙ

Научные результаты данной главы представлены в работах [72, 201, 205, 211, 223, 225, 227, 232, 245, 253 – 256, 262] автора диссертации. В четвертой главе диссертации приводятся результаты разработки математических моделей локально - неравновесного теплообмена и гидродинамики в движущихся жидкостях. И, в частности, разработана математическая модель разгонного течения Куэтта (исследуется распределение скоростей при разгоне жидкости из начального неподвижного состояния) (см. п. 4.1). В п. 4.2 представлены результаты разработки математической модели применительно к нестационарной двумерной задаче теплопроводности для движущейся в плоском канале жидкости. Разработана модель о распределении давления в жидкости в условиях гидравлического удара с учетом пространственно - временной нелокальности (отметим, что в математической модели о гидравлическом ударе, приведенной в п. 3.3, релаксационные свойства жидкости не учитывались). Приведены также результаты разработки математической модели колебаний газа с учетом локальной неравновесности процесса (см. п. 4.4). При решении краевых задач, описывающих указанные математические модели, были использованы точные аналитические (Фурье) и численные (метод конечных разностей, с использованием метода прогонки) методы.

4.1 Математическая модель разгонного течения Куэтта при учете пространственно - временно́й нелокальности

Исследование разгонных течений, возникающих из положения покоя, представляет определенный интерес для техники, так как позволяет оценить формирование во времени пограничного слоя, движущейся стенки в покоящейся в среде, или при перемещении среды вдоль закрепленной пластины.

Разгонное течение Куэтта наблюдается в случае, если на некотором расстоянии δ от движущейся пластины находится неподвижная стенка [128]. Постановка задачи здесь будет следующей (рисунок 4.1, а):

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u(y,t)}{\partial y^2} \qquad (t > 0; \quad 0 < y < \delta); \tag{4.1}$$

$$u(y,0) = 0; \qquad u(0,t) = u_0; \qquad u(\delta,t) = 0, \tag{4.2}$$

где u – скорость; $u_0 = \text{const}$ – скорость пластины в перпендикулярном оси y направлении; y – координата; t – время; δ – расстояние между двумя пластинами; ν – коэффициент кинематической вязкости.

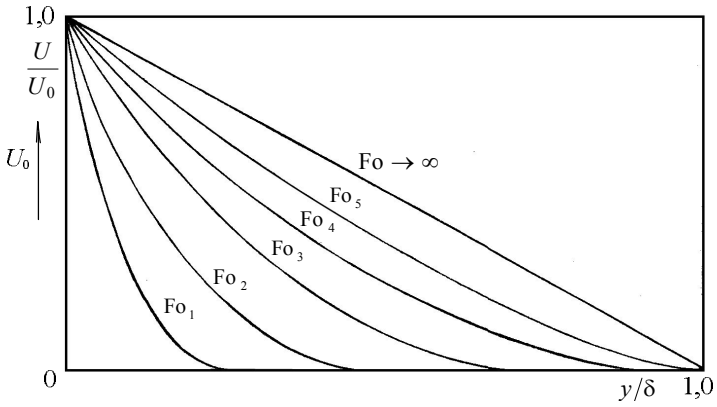


Рисунок 4.1, а. Изменение скоростей при течении Куэтта – решение параболического уравнения. $\mathrm{Fo} = \nu t/\delta^2$

Отметим, что уравнение (4.1) найдено из системы уравнений Навье – Стокса для одномерного течения без учета градиента давления и массовых сил.

Задача (4.1), (4.2) эквивалентна задаче нестационарной теплопроводности для пластины при краевых условиях 1-ого рода, точное решение которой известно [90]. Графики распределения скоростей движения среды представлены на рисунке 4.1, а, из которых следует, что при увеличении времени изменение скорости между пластинами становится линейным.

В решениях задач теплопроводности для уравнения параболического типа, аналогичного уравнению (4.1), наблюдаются известные парадоксы теории теплопроводности, которые заключаются в том, что на стенке, где задаются краевые условия 1-ого рода, из найденных решений получаются бесконечные тепловые потоки и бесконечные скорости перемещения изотерм. Это объясняется тем, что в основе получения параболического уравнения, которое аналогично уравнению (4.1), лежит уравнение Фурье

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{4.3}$$

где T – температура; q – тепловой поток; x – координата; λ – коэффициент теплопроводности.

Данные парадоксы объясняются тем, что формула (4.3) описывает бесконечную скорость переноса теплового возмущения. Так, из решения задачи теплопроводности следует, что изменение температуры в любой точке тела сопровождается ее мгновенным изменением в любых других точках.

В основе получения системы уравнений Навье – Стокса, и, следовательно, уравнения (4.1), лежит формула Ньютона для касательного напряжения, аналогичная формуле Фурье

$$\tau = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{4.4}$$

где τ – касательное напряжение; μ – вязкость.

Также из решения уравнения (4.1) следуют парадоксы в виде бесконечных касательных напряжений на стенке и бесконечные скорости перемещения изотах (линий равных скоростей), что объясняется бесконечной скоростью переноса гидравлических возмущений при течении жидкости, следующей из соотношения (4.4), по которому напряжение изменяется мгновенно при изменении градиента скорости [49].

Следовательно, решения всех параболических уравнений, полученных с использованием законов Фурье, Фика, Ньютона, Ома и др., включают указанные выше парадоксы. Отсюда следует, что применительно к нестационарным процессам распределение потенциалов исследуемых полей, вообще говоря, не подчиняется строго перечисленным выше законам (Фурье, Фика, Ньютона, Ома и др.), что объясняется отсутствием в их формулах параметров, которые учитывают конечную скорость переноса возмущений.

В основе получения гиперболического уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}+\tau_r\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}=a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{4.5}$$

лежит уравнение Максвелла – Каттанео [90, 133, 144]

$$q=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}-\tau_r\frac{\partial q}{\partial t}. \tag{4.6}$$

Формула (4.6) также была также найдена А.В. Лыковым из полученной системы уравнений Онзагера, найденной на основе конечной скорости диффузии теплоты и массы [89, 91]

$$J_i=L_i^{(r)}\frac{\partial J_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{N}\left(L_{ik}X_k+L'_{ik}\frac{\partial X_k}{\partial t}\right), \tag{4.7}$$

где J_i – поток теплоты, массы и т. д.; X – движущие силы; $L_i^{(r)}, L_{ik}, L'_{ik}$ – постоянные коэффициенты $\left(L_{ik}=L_{ki}\right)$.

Если производной от движущей силы X_k пренебречь, то из (4.7) получаем формулу (4.6), где $L=-\lambda$; $L^{(r)}=-\tau_r$. Если величиной $\partial X/\partial t$ не пренебрегать, то соотношение для теплового потока приводится к виду

$$q=-\lambda\frac{\partial T}{\partial x}-\lambda\tau_r\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial t}-\tau_r\frac{\partial q}{\partial t}, \tag{4.8}$$

где $L'=-\lambda\tau_r$.

Из формулы (4.8) при использовании уравнения теплового баланса

$$c\gamma\frac{\partial T}{\partial t}=-\frac{\partial q}{\partial x} \tag{4.9}$$

находится гиперболическое уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}+\tau_r\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}=a\left[\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}+\tau_r\frac{\partial^3 T(x,t)}{\partial x^2\partial t}\right], \tag{4.10}$$

где c – теплоемкость; γ – плотность.

Следовательно, гиперболическое уравнение (4.10) найдено на основе учета всех членов обобщенной системы уравнений Онзагера (4.7). Такое же уравнение получается, если применительно к формуле (4.3) вводить релаксационное слагаемое как для теплового потока, так и для скалярной величины градиента температуры.

Применительно к течению вязкой среды Олдройд [89, 141] вывел следующее соотношение

$$\tau_{ik}=\eta\frac{\partial\varepsilon_{ik}}{\partial t}+\eta'\frac{\partial^2\varepsilon_{ik}}{\partial t^2}-\tau_p\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial t}, \tag{4.11}$$

где τ_{ik} – касательное напряжение; $\varepsilon=dl_x/dy$ – деформация ; $l_x=ut$ – удлинение по оси x; $\tau_p=\mu/G$ – время релаксации вязкоупругих напряжений; $G=\tau/\gamma$ – модуль упругости; γ – угол сдвига; η,η' – постоянные.

Если положить $L=\eta,\ L'=\eta',\ L^{(r)}=-\tau_p$, то соотношение (4.11) оказывается эквивалентным уравнению (4.7) [89].

Обозначая $\eta=\mu;\ \eta'=\mu\tau_p$ и учитывая, что

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dl_x}{dy}\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dy}(ut)\right]=\frac{du}{dy}, \tag{4.12}$$

соотношение (4.11) будет

$$\tau=\mu\frac{\partial u}{\partial y}-\tau_p\frac{\partial\tau}{\partial t}+\mu\tau_p\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial t}. \tag{4.13}$$

Соотношение (4.13) по форме аналогично формуле (4.8). Соотношение (4.13) можно найти, если учесть релаксационные слагаемые для касательного напряжения и градиента скорости, то есть записывать их в виде соотношений $\tau+\tau_p\partial\tau/\partial t$ и $\mu\left(\frac{du}{dy}+\tau_p\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial t}\right)$. Заменив ими τ и $\mu\,du/dy$ в формуле (4.4), получаем формулу (4.13).

При плоском сдвиговом течении уравнение динамики в напряжениях записывается в виде

$$\rho\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}=\frac{\partial\tau(y,t)}{\partial y}. \tag{4.14}$$

Подставляя (4.13) в (4.14), находим гиперболическое уравнение относительно напряжений

$$\frac{\partial\tau(y,t)}{\partial t}+\tau_p\frac{\partial^2\tau(y,t)}{\partial t^2}=\nu\left[\frac{\partial^2\tau(y,t)}{\partial y^2}+\tau_p\frac{\partial^3\tau(y,t)}{\partial y^2\partial t}\right]. \qquad (4.15)$$

Выведем подобное уравнение для функции $u=u(y,t)$. Продифференцировав (4.14) по времени, получаем

$$\rho\frac{\partial^2u(y,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\tau(y,t)}{\partial y\partial t}. \qquad (4.16)$$

Дифференцируя уравнение (4.13) по *y*, находим

$$\frac{\partial\tau(y,t)}{\partial y}=\mu\frac{\partial^2u(y,t)}{\partial y^2}-\tau_p\frac{\partial^2\tau(y,t)}{\partial y\partial t}+\mu\tau_p\frac{\partial^3u(y,t)}{\partial y^2\partial t}. \qquad (4.17)$$

Подставляя (4.17) в (4.14), будем иметь

$$\rho\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}=\mu\frac{\partial^2u(y,t)}{\partial y^2}-\tau_p\frac{\partial^2\tau(y,t)}{\partial y\partial t}+\mu\tau_p\frac{\partial^3u(y,t)}{\partial y^2\partial t}. \qquad (4.18)$$

Подставляя (4.16) в (4.18), получаем

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}+\tau_p\frac{\partial^2u(y,t)}{\partial t^2}=\nu\left[\frac{\partial^2u(y,t)}{\partial y^2}+\tau_p\frac{\partial^3u(y,t)}{\partial y^2\partial t}\right]. \qquad (4.19)$$

Уравнение (4.19) по форме аналогично соотношению (4.10).

Если вместо (4.13) для касательного напряжения применять формулу

$$\tau=\mu\frac{\partial u}{\partial y}-\tau_p\frac{\partial\tau}{\partial t}, \qquad (4.20)$$

получаем следующее гиперболическое уравнение для функции *u* (аналогичным будет и уравнение для τ):

$$\frac{\partial u(y,t)}{\partial t}+\tau_p\frac{\partial^2u(y,t)}{\partial t^2}=\nu\frac{\partial^2u(y,t)}{\partial y^2}. \qquad (4.21)$$

В этом случае имеем уравнение, аналогичное (4.5).

Уравнения вида (4.19), (4.21) могут быть найдены также и для краевых задач диффузии вихря.

С целью получения точного решения уравнения (4.19) рассмотрим задачу для симметричного движения Куэтта, то есть, положим, что две плоскопараллельные пластинки перемещаются в неподвижной жидкости. Так как задача симметричная, то можно рассматривать половину ширины канала (см. рисунок 4.1, б). Краевые условия для уравнения (4.19) здесь будут

$$u(y,0)=0; \quad (4.22) \qquad \partial u(y,0)/\partial t=0; \qquad (4.23)$$

$$u(0,t)=u_0; \quad (4.24) \qquad \partial u(\delta,t)/\partial y=0, \qquad (4.25)$$

где u_0 – скорость пластины; δ – половина ширины канала.

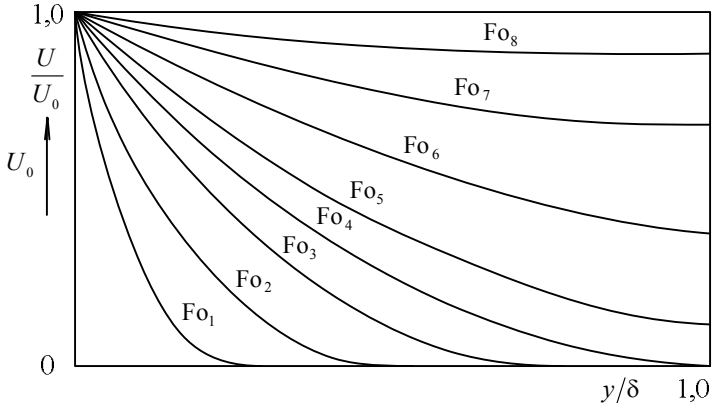


Рисунок 4.1, б. Изменение скорости (для параболического уравнения). $\mathrm{Fo} = \nu t/\delta^2$

Обозначим:

$$\mathrm{v} = u/u_0; \quad \eta = y/\delta; \quad \mathrm{Fo} = \nu t/\delta^2; \quad \mathrm{Fo}_p = \nu\tau_p/\delta^2, \tag{4.26}$$

где v – безразмерная скорость; η – безразмерная координата; Fo – число Фурье; $\mathrm{Fo}_p = \mathrm{const}$.

Задача (4.19), (4.22) – (4.25) с учетом обозначений принимает вид

$$\frac{\partial \mathrm{v}(\eta,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_p \frac{\partial^2 \mathrm{v}(\eta,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \mathrm{v}(\eta,\mathrm{Fo})}{\partial \eta^2} + \mathrm{Fo}_p \frac{\partial^3 \mathrm{v}(\eta,\mathrm{Fo})}{\partial \eta^2 \partial t} \quad (\mathrm{Fo} > 0 \;\; ; \;\; 0 < \eta < 1); \tag{4.27}$$

$$\mathrm{v}(\eta,0) = 0; \quad (4.28) \qquad \partial \mathrm{v}(\eta,0)/\partial \mathrm{Fo} = 0; \tag{4.29}$$

$$\mathrm{v}(0,\mathrm{Fo}) = 1; \quad (4.30) \qquad \partial \mathrm{v}(1,\mathrm{Fo})/\partial \eta = 0. \tag{4.31}$$

Сделаем замену переменной

$$\Theta = 1 - \mathrm{v}; \qquad \xi = 1 - \eta. \tag{4.32}$$

Задача (4.27) – (4.31), учитывая (4.32), приводится к виду

$$\frac{\partial \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_p \frac{\partial^2 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} + \mathrm{Fo}_p \frac{\partial^3 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2 \partial \mathrm{Fo}} \quad (\mathrm{Fo} > 0; \;\; 0 < \xi < 1); \tag{4.33}$$

$$\Theta(\xi,0) = 1; \quad (4.34) \qquad \frac{\partial \Theta(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}} = 0; \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial \Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad (4.36) \qquad \Theta(1,\mathrm{Fo}) = 0. \tag{4.37}$$

Задача (4.33) – (4.37) при $\mathrm{Fo}_p = \mathrm{Fo}_r$ аналогична задаче (2.61) – (2.65). Следовательно, для решения задачи (4.33) – (4.37) можно использовать соотношение (2.76). Так как на рисунках 2.14 – 2.20 приведены результаты детальных исследований решения (2.76), то они могут быть использованы и в задаче (4.33) – (4.37).

Если в (4.33) пренебречь вторым членом в правой части, то краевая задача (4.33) – (4.37) будет

$$\frac{\partial \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_p \frac{\partial^2 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} \quad (\mathrm{Fo} > 0; \;\; 0 < \xi < 1); \tag{4.38}$$

$$\Theta(\xi,0)=1; \quad (4.39) \qquad \frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial \mathrm{Fo}}=0; \tag{4.40}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=0; \quad (4.41) \qquad \Theta(1,\mathrm{Fo})=0. \tag{4.42}$$

Задача (4.38) – (4.42) при $\mathrm{Fo}_p=\mathrm{Fo}_r$ аналогична задаче (2.8) – (2.12). Следовательно, решения (2.23), (2.34) задачи (2.8) – (2.12) могут быть использованы и в задаче (4.38) – (4.42).

Из анализа результатов расчетов скорости (см. рисунки 2.1 – 2.11) по соотношениям (2.23), (2.34) можно сделать вывод, что при малых величинах времени Fo ($\mathrm{Fo_p}=6{,}25\cdot10^{-3}$) на фронте гидравлического возмущения происходит скачок скорости. Область среды за фронтом возмущения, остается невозмущенной, где скорость равна начальной. При больших значениях времени ($\mathrm{Fo}>0{,}07$; $\mathrm{Fo_p}=6{,}25\cdot10^{-3}$) скорости совпадают с точными величинами, которые находятся из решения параболического уравнения (4.1).

Формула для скорости на фронте гидравлической волны совпадает с формулой, полученной в [11, 90] применительно температурной задаче при учете конечной скорости переноса теплоты. Закон движения фронта гидравлической волны по координате во времени является линейным, что подтверждается данными, полученными в [11] для перемещения фронта тепловой волны (см. рисунок 2.7).

Так как величина скачка скорости переменна во времени, то при движении гидравлической волны происходит появление изотах $\Theta=\mathrm{const}$ внутри среды (см. рисунок 2.6). В обратной гидравлической волне наблюдается скачок скорости противоположного знака (на рисунке 2.9), что приводит к появлению отрицательных скоростей.

Вероятные причины таких результатов в том, что уравнение (4.38) неадекватно описывает гидравлический процесс. Лишь после учета второго члена его правой части устраняются отмеченные проблемы.

На основе формулы (4.13) выполним исследование касательного напряжения. В безразмерном виде, учитывая обозначения (4.26), эта формула будет

$$\frac{\partial\bar{\tau}}{\partial \mathrm{Fo}}+A\bar{\tau}+B(\mathrm{Fo})=0, \tag{4.43}$$

где $\bar{\tau}=\dfrac{\tau\delta}{\mu u_0}$ – безразмерные касательные напряжения; $A=1/\mathrm{Fo}_p$;

$$B(\mathrm{Fo})=\frac{1}{\mathrm{Fo}_p}\frac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi\,\partial\,\mathrm{Fo}}.$$

Решение уравнения (4.43) имеет вид

$$\bar{\tau}(\mathrm{Fo})=[\int B(\mathrm{Fo})\exp(A\mathrm{Fo})\mathrm{dFo}+C]\exp(-A\mathrm{Fo}), \tag{4.44}$$

где C – константа интегрирования. Подставляя (4.44) в начальное условие, получаем

$$C = \int B(\mathrm{Fo})\mathrm{dFo}\,. \tag{4.45}$$

Соотношение (4.20) в безразмерном виде будет

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \mathrm{Fo}} + A\bar{\tau} + D(\mathrm{Fo}) = 0\,, \tag{4.46}$$

где $D(\mathrm{Fo}) = \dfrac{1}{\mathrm{Fo}_p}\dfrac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}$.

Общий интеграл уравнения (4.46) и соотношение для константы интегрирования соответственно имеют вид (4.44) и (4.45), где $B(\mathrm{Fo})$ необходимо заменить на $D(\mathrm{Fo})$.

Данные расчетов по соотношению (4.44) (при $\mathrm{Fo}_p = 0{,}3$) в случаях, когда касательное напряжение удовлетворяет уравнениям (4.43) и (4.46), приведены на рисунке 4.2. Здесь же даны расчеты касательного напряжения по формуле (4.4), представленной в безразмерном виде

$$\bar{\tau} = -\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})/\partial\xi\,, \tag{4.47}$$

где $\Theta(\xi,\mathrm{Fo})$ − безразмерная скорость, которая находилась по точному решению (2.46) уравнения (4.1).

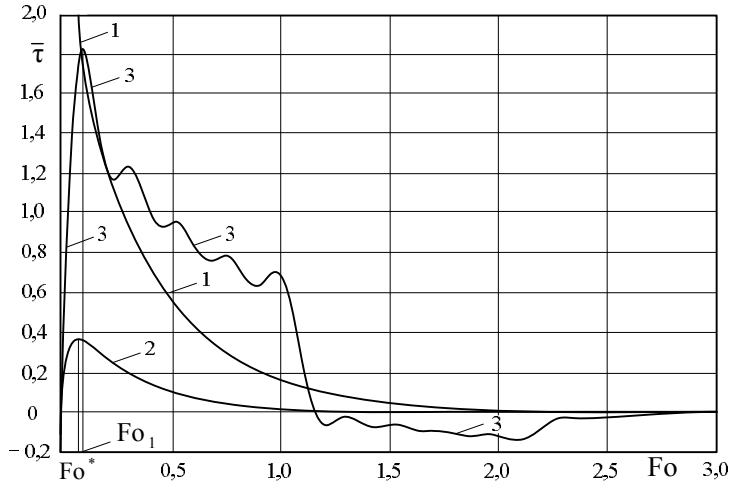


Рисунок 4.2. Касательное напряжение при $\xi = 1$, $\mathrm{Fo}_p = 0{,}3$: 1 – по (4.47); 2 − по (4.44) (решение уравнения (4.43)); 3 – по (4.44) (решение уравнения (4.46))

Из анализа результатов расчетов можно заключить следующее.

Напряжение, определяемое формулой (4.47), на стенке $(\xi = 1)$ при $\mathrm{Fo} = 0$ устремляется к бесконечной величине (кривая 1 на рисунке 4.2). При увеличении времени $\bar{\tau}(\mathrm{Fo})$ оно уменьшается и при $\mathrm{Fo} \approx 3$ становится равным нулю.

Напряжение, определяемое формулой (4.44), являющейся решением уравнения (4.43), при $\mathrm{Fo}_p = 0{,}3$, $\xi = 1$ и $\mathrm{Fo} = 0$ равно нулю. При увеличении времени оно увеличивается и при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}^* \approx 0{,}072$ принимает максимальное значение $\bar{\tau} \approx 0{,}37$ (кривая 2 на рисунке 4.2). С

дальнейшим увеличением времени напряжение уменьшается и при $\mathrm{Fo} \approx 3$ оказывается равным нулю.

Распределение напряжения, определяемого по формуле из (4.44), в случае, когда $B(\mathrm{Fo})$ заменено на $D(\mathrm{Fo})$ (решение уравнения (4.46)), при $\mathrm{Fo}_p = 0{,}3$ описывается линией 3 на рисунке 4.2. Здесь, имея нулевое значение при $\mathrm{Fo} = 0$, с увеличением числа Fo касательное напряжение увеличивается до максимального значения $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1 \approx 0{,}08$ равного $\bar{\tau} \approx 1{,}83$. При дальнейшем возрастании числа Fo напряжение изменяется скачком, принимая в некотором диапазоне числа Fo отрицательные значения. Скачкообразное изменение с отклонением в область отрицательных значений способствует появлению скачков скорости в прямой и обратной волнах и к отрицательным скоростям.

По результатам исследований в данном пункте следуют выводы:

1. С учетом релаксации τ_p как касательного напряжения, так и скалярной величины градиента скорости, выведено гиперболическое уравнение движения, включающее производные высокого порядка, в том числе и смешанные производные.

2. Исследования найденного решения позволили заключить, что изменение скорости зависит от числа Fo_p. При малых их величинах, решение совпадает с решением параболического уравнения. При увеличении числа Fo_p кривые скорости вырождаются в прямые линии, практически параллельные оси ξ, имея скачок скорости вблизи точки $\xi = 1$. Отметим, что краевое условие 1-ого рода (4.37) выполняется для всех значений времени процесса (скачок скорости имеет место лишь на бесконечно малом расстоянии от точки $\xi = 1$.

3. Напряжение на стенке не превышает некоторой максимальной в данных условиях величины ни при каких скоростях движения пластин.

4.2 Численное моделирование локально - неравновесного теплообмена в движущейся жидкости

Вывод уравнения применительно к нестационарному теплообмену при ламинарном течении вязкой жидкости в плоском канале (уравнение энергии) подобен выводу уравнения (2.96). Формулы для составляющих теплового потока в направлениях координатных осей x и y по аналогии с (2.92) будут

$$\begin{aligned} q_x &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau_1 \frac{\partial q_x}{\partial t} - \lambda \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + \rho \omega_x i\,; \\ q_y &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \tau_1 \frac{\partial q_y}{\partial t} - \lambda \tau_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial t} + \rho \omega_y i\,, \end{aligned} \tag{4.48}$$

где q_x, q_y – компоненты теплового потока по осям x и y; ω_x, ω_y – компоненты скорости жидкости в направлениях продольной и поперечной осей x и y плоскопараллельного канала; i – теплосодержание (энтальпия жидкости); τ_1, τ_2 – коэффициенты релаксации соответственно теплового потока и скалярной величины градиента температуры.

Отличие формул (4.48) от соотношения (2.92) состоит в том, что при движении жидкости теплота переносится как за счет теплопроводности, так и за счет конвекции, учитываемой последними слагаемыми этих формул.

Уравнение теплового баланса здесь имеет вид

$$\rho\frac{\partial i}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right). \tag{4.49}$$

Подставляя (4.48) в (4.49), получаем

$$\rho\frac{\partial i}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \tau_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}\right) + \lambda\tau_2\frac{\partial^3 T}{\partial x^2\partial t} - \rho\omega_x\frac{\partial i}{\partial x} +$$

$$+ \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \tau_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q_y}{\partial y}\right) + \lambda\tau_2\frac{\partial^3 T}{\partial y^2\partial t} - \rho\omega_y\frac{\partial i}{\partial y}. \tag{4.50}$$

Соотношение (4.50) перепишем в виде

$$\rho\frac{\partial i}{\partial t} - \rho\omega_x\frac{\partial i}{\partial x} - \rho\omega_y\frac{\partial i}{\partial y} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ \tau_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right) + \lambda\tau_2\left(\frac{\partial^3 T}{\partial x^2\partial t} + \frac{\partial^3 T}{\partial y^2\partial t}\right). \tag{4.51}$$

Пренебрегая конвективным теплопереносом в поперечном направлении ($\rho\omega_y\partial i/\partial y = 0$) и теплопроводностью – в продольном ($\lambda\partial^2 T/\partial x^2 = 0$), с учетом (4.49) находим

$$\rho\frac{\partial i}{\partial t} + \rho\omega_x\frac{\partial i}{\partial x} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \tau_1\rho\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \lambda\tau_2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right). \tag{4.52}$$

Учитывая, что $\partial i = c\partial T$, получаем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \omega_x\frac{\partial T}{\partial x} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \tau_1\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + a\tau_2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right). \tag{4.53}$$

Найдем решение уравнения (4.53) при краевых условиях вида (рисунок 4.3):

$$T(x,y,0) = T_{in}; \quad (4.54) \qquad \frac{\partial T(x,y,0)}{\partial T} = 0; \quad (4.55) \qquad T(0,y,t) = T_0; \tag{4.56}$$

$$\frac{\partial T(x,0,t)}{\partial y} = 0; \quad (4.57) \qquad T(x,\delta,t) = T_w, \tag{4.58}$$

$$t > 0; \quad x > 0; \quad 0 < y < \delta,$$

где T_{in} – начальная температура жидкости, T_0 – температура среды на входе в канал, T_w – температура жидкости на стенке (теплопроводностью стенки пренебрегается), δ – ширина плоского канала.

При ламинарном установившемся течении жидкости в плоском канале распределение скорости по координате y (в любой точке координаты x) определяется из соотношения [97]

$$\omega_x = \frac{3}{2}\omega_s\left(1-\frac{y^2}{\delta^2}\right),$$

где ω_s – средняя скорость течения жидкости.

Обозначим:

$$\Theta = \frac{T-T_w}{T_0-T_w}; \quad \eta = \frac{y}{\delta}; \quad \mathrm{Fo} = \frac{a\,t}{\delta^2}; \quad \mathrm{Fo}_1 = \frac{a\,\tau_1}{\delta^2}; \quad \mathrm{Fo}_2 = \frac{a\,\tau_2}{\delta^2};$$

$$\xi = \frac{2}{3}\frac{ax}{\delta\omega_s}; \quad \mathrm{Pe} = \left(\frac{2}{3}\frac{a}{\delta\omega_s}\right)^2, \tag{4.59}$$

где Θ – безразмерная температура; ξ, η – безразмерные поперечная и продольная координаты; Fo – число Фурье; Fo_1, Fo_2 – безразмерные коэффициенты релаксации соответственно теплового потока и скалярной величины градиента температуры; Pe – число Пекле.

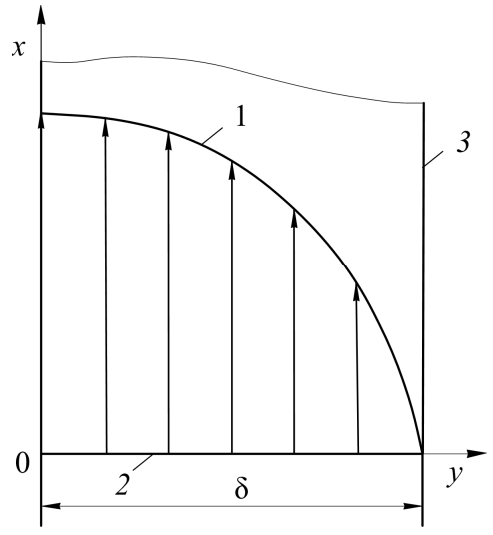


Рисунок 4.3. Схема теплообмена при ламинарном движении среды в плоском канале: 1 – профиль изменения скорости, ω_x; 2 – температура среды на входе в канал, T_0; 3 – температура жидкости на стенке, T_w

Учитывая обозначения (4.59) задача (4.53) – (4.58) запишется таким образом:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_1\frac{\partial^2\Theta}{\partial\mathrm{Fo}^2} + (1-\eta)\frac{\partial\Theta}{\partial\xi} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\eta^2} + \mathrm{Fo}_2\frac{\partial}{\partial\mathrm{Fo}}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}\mathrm{Pe} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial\eta^2}\right) \tag{4.60}$$

$$\mathrm{Fo} > 0; \quad \xi > 0; \quad 0 < \eta < 1;$$

$$\Theta(\xi,\eta,0) = \Theta_{in}; \quad (4.61) \qquad \frac{\partial\Theta(\xi,\eta,0)}{\partial\mathrm{Fo}} = 0; \quad (4.62) \qquad \Theta(0,\eta,\mathrm{Fo}) = 1; \tag{4.63}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\eta,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=0;\quad (4.64)\qquad \frac{\partial\Theta(\xi,0,\mathrm{Fo})}{\partial\eta}=0;\quad (4.65)\qquad \Theta(\xi,1,\mathrm{Fo})=0,\qquad (4.66)$$

где $\Theta_{in}=(T_{in}-T_w)/(T_0-T_w)$ – начальная температура жидкости.

При нахождении решения задачи (4.56) – (4.57) в рассматриваемой области на основе конечно - разностного метода введем пространственно - временну́ю сетку с шагами $\Delta\xi,\ \Delta\eta,\ \Delta\mathrm{Fo}$ соответственно по переменным $\xi,\ \eta,\ \mathrm{Fo}$ так, что

$$\xi_i=i\Delta\xi,\ \ i=\overline{0,I};\ \ \eta_j=j\Delta\eta,\ \ j=\overline{0,J},\ \ J=1+\Delta\eta^{-1};\ \ \mathrm{Fo_k}=k\,\Delta\mathrm{Fo},\ \ k=\overline{0,K}\quad (4.67)$$

где I, J, K – число шагов по координатам $\xi,\ \eta,\ \mathrm{Fo}$.

Выполним анализ численного решения задачи при начальной температуре $\Theta_{in}=0{,}5$.

С целью проверки принятой схемы конечно - разностного метода сначала было получено решение уравнения (4.51) при равенстве нулю последних членов в его правой и левой частях. Уравнение (4.56) в этом случае приводится к уравнению (2.8) (представленному в безразмерном виде), точное решение которого записывается в виде (2.23), (2.34). Анализ результатов, приведенных на рисунке 4.4, позволяет заключить о практическом совпадении расчетов численным методом с точным аналитическим решением. Отметим, что для описания скачков температуры на фронте тепловой волны необходимо выполнять существенное измельчение шагов пространственно - временно́й сетки в методе конечных разностей.

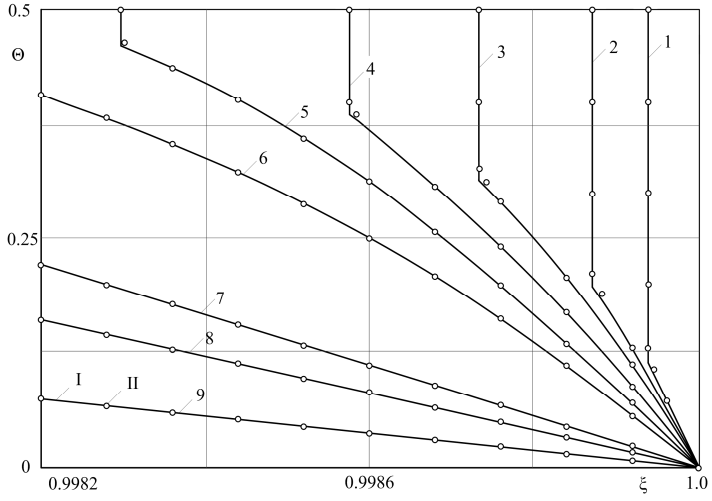


Рисунок 4.4. Распределение температуры в плоском канале с неподвижной жидкостью ($\mathrm{Fo_1}=\mathrm{Fo_2}=10^{-7}$): 1 – 9 – решение при $\mathrm{Fo}=5\cdot10^{-8};\ 10^{-7};\ 2\cdot10^{-7};3\cdot10^{-7};\ 5\cdot10^{-7};\ 10^{-6};5\cdot10^{-6};\ 5\cdot10^{-5};\ 10^{-5}$; I – точное решение [90, 91]; II – метод конечных разностей

На рисунке 4.5 приведены данные расчетов температуры в диапазоне времени $10^{-6}\le\mathrm{Fo}\le0{,}01$ для $\xi=5\cdot10^{-5}$ ($\mathrm{Fo_1}=\mathrm{Fo_2}=10^{-7}$). Из их анализа можно заключить, что в указанном диапазоне времени в пределах $0\le\eta\le0{,}8$ краевое условие 1-ого рода на стенке ($\Theta(\xi,1,\mathrm{Fo})=0$) практически еще не оказывает влияния на температурное состояние жидкости, и теплообмен в этой области определяется величиной начального условия $\Theta(\xi,\eta,0)=\Theta_{in}=0{,}5$ и температурой жидкости на входе $\Theta(0,\eta,\mathrm{Fo})=1$.

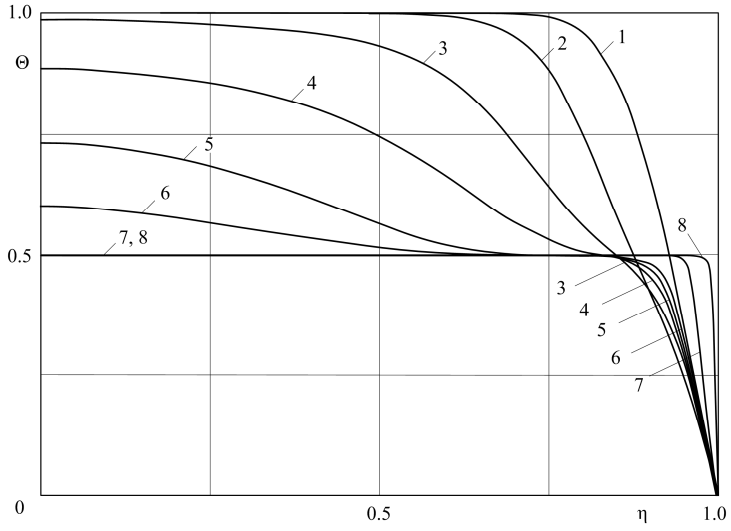


Рисунок 4.5. Распределение температуры по ширине канала при $\xi = 5 \cdot 10^{-5}$; $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10^{-7}$; $\mathrm{Pe} = 10^{-7}$ в диапазоне безразмерного времени $10^{-6} \le \mathrm{Fo} \le 0{,}01$: 1 –8 – $\mathrm{Fo} = 0{,}01;\ 0{,}003;\ 0{,}002;$ $0{,}0014;\ 0{,}001;\ 8 \cdot 10^{-4};\ 4 \cdot 10^{-4}; 10^{-6}$

На рисунке 4.6 дано распределение температур в жидкости при малых значениях величин поперечной координаты $0{,}99 \le \eta \le 1{,}0$ и числа Фурье $2 \cdot 10^{-8} \le \mathrm{Fo} \le 10^{4}$. Анализ результатов позволяет заметить интересную особенность теплообмена в случае краевых условий 1-ого рода на стенке, когда учитываются релаксационные свойства среды. Так, несмотря на выполнение граничного условия 1-ого рода $\Theta(\xi, 1, \mathrm{Fo}) = 0$ непосредственно в точке $\xi = 1$, в бесконечно малой ее окрестности, например при $\xi = 0{,}999$, температура стенки не принимает температуру $\Theta(\xi, 1, \mathrm{Fo}) = 0$ мгновенно, то есть непосредственно при $\mathrm{Fo} = 0$. И, в частности, для того чтобы температура стенки приняла температуру $\Theta(\xi, 1, \mathrm{Fo}) = 0$, требуется некоторый промежуток времени, равный $\mathrm{Fo} = 10^{-4}$ (при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10^{-7}$). Найденные результаты совпадают с результатами точного решения, приведенного в п. 2.2 диссертации. Таким образом, при решении уравнений теплообмена, позволяющих учитывать релаксационные свойства жидкости, исследуемая среда не принимает граничное условие теплового удара мгновенно, а лишь в течение некоторого конечного диапазона времени. Следовательно, в реальных условиях теплообмена величина коэффициента теплоотдачи не может быть выше некоторого предела, определяемого теплофизическими свойствами среды, вне зависимости от интенсивности внешнего теплообмена.

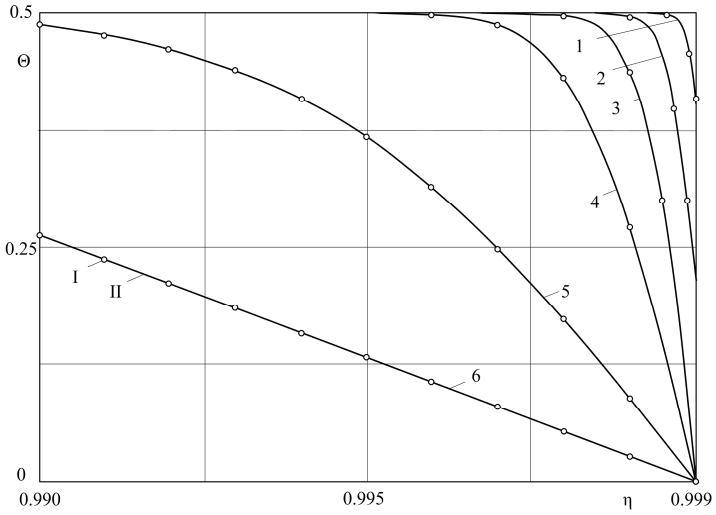


Рисунок 4.6. Распределение температуры по ширине канала при $\xi = 5 \cdot 10^{-5}$; $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10^{-7}$; $\mathrm{Pe} = 10^{-7}$ в диапазоне $2 \cdot 10^{-8} \le \mathrm{Fo} \le 10^{-4}$: 1 –6 – $\mathrm{Fo} = 2 \cdot 10^{-8}$; 10^{-7}; $3 \cdot 10^{-7}$; 10^{-6}; 10^{-5}; 10^{-4}; I – точное решение [90, 91]; II – метод конечных разностей

На рисунках 4.7 – 4.8 приводятся результаты расчетов распределения температуры в диапазоне продольной координаты $0 \le \xi \le 0{,}025$ и $0 \le \xi \le 0{,}25$ для центра канала ($\eta = 0$) при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10^{-4}$. Из их анализа следует, что для значений $\xi \le 0{,}17$ краевое условие 1-ого рода, заданное в точке $\eta = 1{,}0$, вплоть до $\mathrm{Fo} = 0{,}1$ практически не влияет на температуру в центральной части канала.

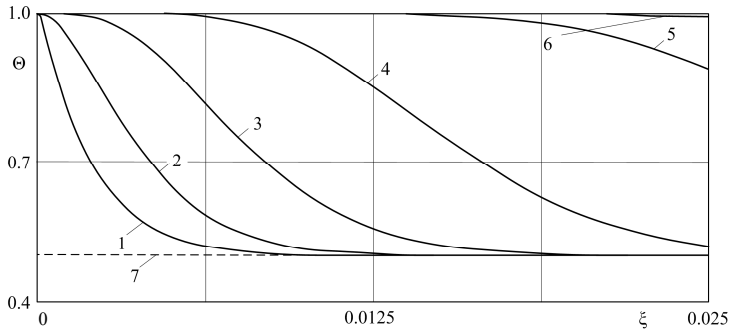


Рисунок 4.7. Распределение температуры в диапазоне продольной координаты $0 \le \xi \le 0{,}025$ при $\eta = 0$; $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10^{-4}$; $\mathrm{Pe} = 10^{-7}$: 1 – 6 – $\mathrm{Fo} = 0{,}002$; $0{,}004$; $0{,}008$; $0{,}016$; $0{,}032$; $\mathrm{Fo} \to \infty$; 7 – начальная температура жидкости T_{in}

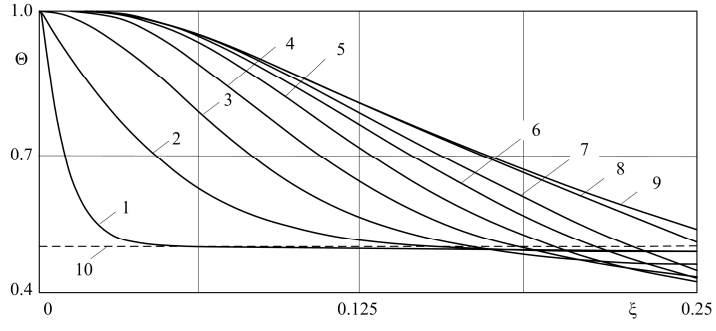


Рисунок 4.8. Распределение температуры в диапазоне $0 \le \xi \le 0{,}25$ при $\eta = 0$; $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10^{-4}$; $\mathrm{Pe} = 10^{-7}$: 1 – 9 – $\mathrm{Fo} = 0{,}01$; $0{,}05$; $0{,}1$; $0{,}15$; $0{,}2$; $0{,}25$; $0{,}3$; $0{,}5$; $\mathrm{Fo} \to \infty$; 10 – начальная температура жидкости T_{in}

Аналогичные результаты для этих же диапазонов продольной координаты ξ представлены на рисунках 4.9, 4.10 для $\eta = 0{,}6$ и рисунках 4.11, 4.12 – $\eta = 0{,}9$. Из их анализа следует, что при увеличении η краевое условие 1-ого рода на стенке ($\eta = 1$) оказывает существенное влияние на распределение температуры в движущейся жидкости.

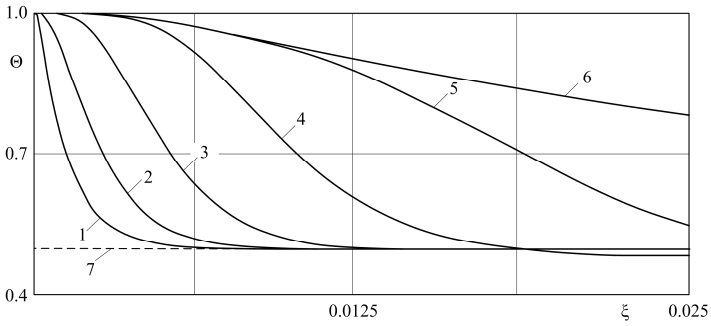


Рисунок 4.9. Распределение температуры в диапазоне $0 \le \xi \le 0{,}025$ при $\eta = 0{,}6$; $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10^{-4}$; $\mathrm{Pe} = 10^{-7}$: 1 – 6 – для тех же значений Fo, как на рисунках 4.7; 4.9; 7 – начальная температура жидкости T_{in}

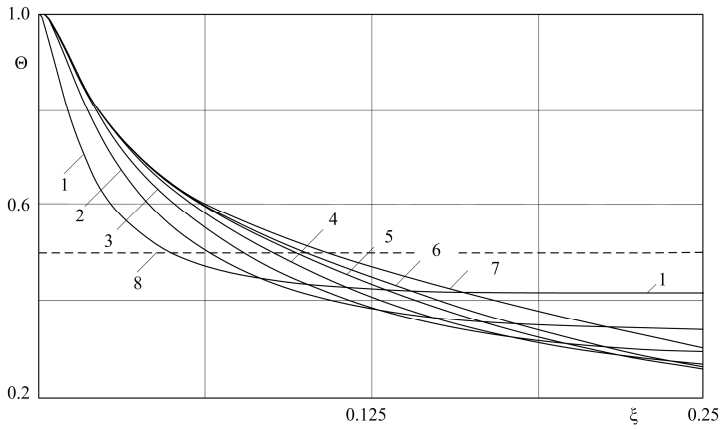


Рисунок 4.10. Распределение температуры в диапазоне $0 \le \xi \le 0{,}25$ при $\eta = 0{,}6$; $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10^{-4}$; $\mathrm{Pe} = 10^{-7}$: 1 – 7 – $\mathrm{Fo} = 0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}15;\ 0{,}2;\ 0{,}25;\ 0{,}3;\ \mathrm{Fo} \to \infty$; 8 – начальная температура жидкости T_{in}

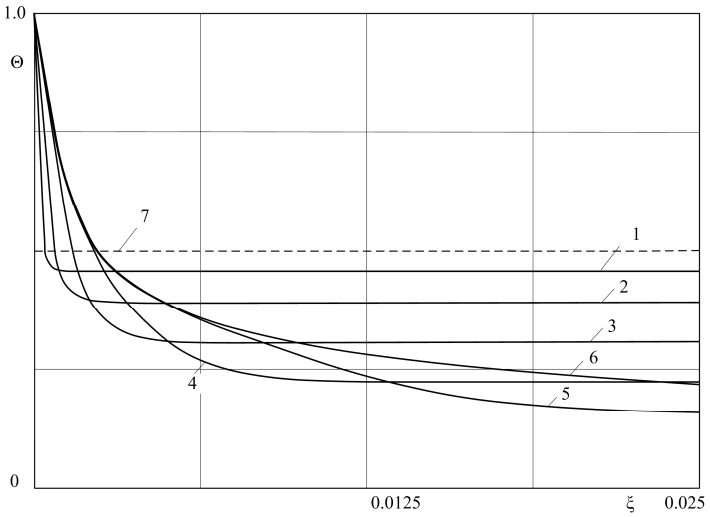


Рисунок 4.11. Распределение температуры в диапазоне $0 \le \xi \le 0{,}025$ при $\eta = 0{,}9$; $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10^{-4}$; $\mathrm{Pe} = 10^{-7}$: 1 – 6 – для тех же значений Fo, как на рисунках 4.7; 4.9; 7 – начальная температура жидкости T_{in}

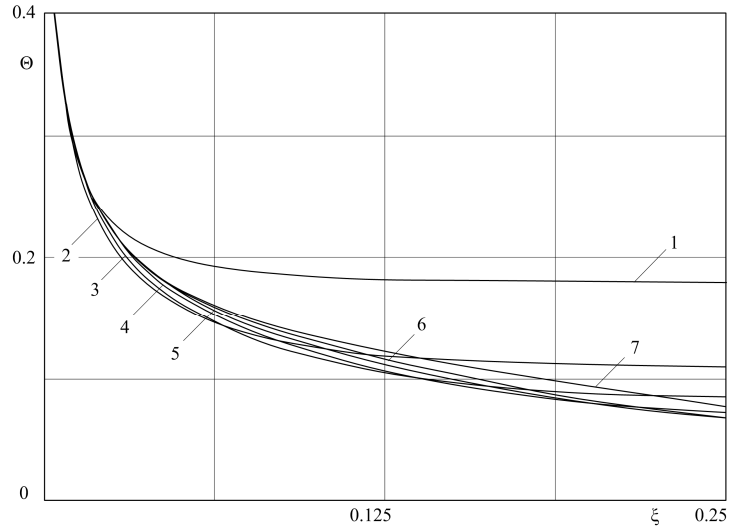


Рисунок 4.12. Распределение температуры в диапазоне $0 \le \xi \le 0{,}25$ при $\eta = 0{,}9$; $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 10^{-4}$; $\mathrm{Pe} = 10^{-7}$: 1 – 7 – для тех же значений Fo, как на рисунке 4.10

Отметим, что при каких-то больших числах Фурье теплообмен стабилизируется, и наступает квазистационарный режим, когда температура жидкости в любой точке канала принимает неизменное во времени значение (рисунки 4.8 – 4.12).

Выводы

1. Путем разложения формулы Фурье в ряд по степеням малых параметров (коэффициентов релаксации для теплового потока τ_1 и скалярной величины градиента температуры τ_2) при использовании уравнения теплового баланса получено дифференциальное уравнение энергии, моделирующее локально - неравновесный теплообмен в жидкости с учетом пространственно - временно́й нелокальности.

2. С помощью конечно - разностного метода выполнены детальные исследования краевой задачи, описывающей процесс теплообмена в жидкости, движущейся в плоскопараллельном канале, при параболическом законе распределения скорости и при краевых условиях 1-ого рода на стенке.

3. Исследования показали, что краевые условия 1-ого рода, ввиду инерционности теплового потока, не могут быть приняты стенкой мгновенно – процесс их установления происходит в некотором, весьма малом, но конечном диапазоне времени. Следовательно, коэффициент теплоотдачи на стенке имеет некоторый верхний предел, определяемый физическими свойствами, который не может быть превышен при любых условиях внешнего теплообмена.

4. При одновременном учете временно́й и пространственной нелокальности скачки температуры внутри движущейся жидкости, а также отрицательные ее значения отсутствуют. Скачки и отрицательные значения температуры наблюдаются лишь при одностороннем учете неравновесности, то есть, когда учитывается лишь временна́я нелокальность (релаксация

теплового потока) и не учитывается пространственная (релаксация скалярной величины градиента температуры).

4.3 Получение математической модели колебаний упругой жидкости при гидравлическом ударе с учетом ее релаксационных свойств

Выше было показано, что распространение упругих волн в различных средах (твердые, жидкие, газообразные) описывается следующим волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \ , \tag{4.68}$$

где u – перемещение; x – продольная координата; t − время; c – скорость продвижения волны.

Уравнение (4.68) описывает незатухающие колебания, то есть оно не учитывает оказываемое средой сопротивление процессу распространения возмущений. Это линейное гиперболическое уравнение, исследованию точных решений которого посвящены многие работы [10, 52, 53, 114, 122]. Трудность получения решений задач, связанных с течением реальных жидкостей, объясняется их нелинейностью, так как коэффициент трения зависит от скорости. Уравнения распределения давления и скорости вязкой жидкости получены И.А. Чарным и имеют вид (3.152), (3.153). Эти уравнения представляют зависимости между средними в сечении скоростью, плотностью и давлением. Кроме того, они также содержат среднюю величину касательного напряжения. Система уравнений для средних величин оказывается замкнутой в случае, если указана зависимость касательного напряжения от скорости. Для ее замыкания предполагается, что при неустановившемся движении касательное напряжение является такой же функцией скорости и свойств жидкости, как и при установившемся, то есть используется гипотеза квазистационарности. Следовательно, по гипотезе квазистационарности считается, что формула Ньютона для касательного напряжения выполняется и при нестационарном процессе изменения скорости, точно также предполагается неизменность соотношений и для коэффициента гидравлических сопротивлений. Строгое обоснование этого допущения отсутствует, поэтому его справедливость может быть подтверждена лишь путем сравнения с экспериментальными исследованиями [118]. В отдельных случаях (при малых изменениях давления и скорости во времени) теория квазистационарности удовлетворительно подтверждается результатами экспериментов, однако при значительных скачках давления и скорости обнаруживаются существенные расхождения. Следовательно, теория квазистационарности может быть использована лишь для некоторого ограниченного круга задач, когда распределение скорости при нестационарном течении незначительно отличается от стационарного.

В случае существенно нестационарных процессов уравнения для осредненных величин не позволяют учитывать влияние нестационарности на силу трения. Поэтому для уточнения зависимости касательного напряжения от осредненных величин плотности, скорости и давления, применяются уравнения Навье – Стокса, описывающие местные (локальные) значения этих величин. Такой путь приводит к необходимости интегрирования системы двух взаимосвязанных дифференциальных уравнений (для давления и скорости), одно из которых является интегро - дифференциальным [122].

Таким образом, нелинейные уравнения (3.148), (3.149) записаны для осредненных величин искомых функций и касательного напряжения и совместно с краевыми условиями представляют краевую задачу в квазистационарной постановке. Решение данных уравнений возможно лишь посредством численного интегрирования. В результате по предложенному И.А. Чарным методу линеаризации уравнения (3.148) уравнения (3.148) и (3.149) сводятся к одному линейному гиперболическому уравнению для давления или скорости вида (3.152), (3.153). В п. 3.4 выполнен анализ точного решения уравнения (3.166), который показал, что с течением времени давление в любой точке меняется скачкообразно. Такое изменение давления свидетельствует о бесконечной скорости перемещения потенциалов исследуемого поля. Бесконечная скорость оказывается заложенной в законе Гука для нормального напряжения (давления) и законе Ньютона для касательного напряжения, определяемых соотношениями

$$\sigma = E\varepsilon \ ; \quad (4.69) \qquad \tau = \mu \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \tag{4.70}$$

где σ – нормальное напряжение; τ – касательное напряжение; $\vartheta = du/dt$ – скорость; μ – коэффициент динамической вязкости; $\varepsilon = \partial u / \partial x$ – деформация.

В настоящей работе для оценки изменения касательного напряжения, давления и скорости в нестационарном процессе используется метод, связанный с определением ускорений этих величин во времени с использованием соответствующих коэффициентов релаксации. Основные положения этого метода изложены ниже.

Формулы (4.69), (4.70) совместно со вторым законом Ньютона

$$F = ma = m\frac{d\vartheta}{dt} = m\frac{d^2u}{dt^2} \tag{4.71}$$

используются при выводе волновых уравнений вида (4.68), описывающих различные колебательные процессы для струн, стержней, пружин, упругих колебаний жидкости и газа (распространение звука) и проч. Применительно к уравнению (4.71) обозначено: F – сила, приложенная к телу; m – масса тела; $\vartheta = du/dt$ – скорость; $a = d\vartheta/dt$ – ускорение. При описании колебательных процессов во всех перечисленных выше телах (средах) уравнение

(4.68) имеет одинаковый физический смысл – описывает волновое распространение потенциалов исследуемой среды.

Характерной особенностью волновых уравнений вида (4.68) для любых сред является бесконечная скорость переноса нормального и касательного напряжений. Это связано с тем, что в используемых для его вывода соотношениях (4.69), (4.70) отсутствует причинно - следственная связь явлений. Причиной (движущей силой) в данном случае являются деформация ε и градиент скорости $\partial\vartheta/\partial x$, а следствием – нормальное и касательное напряжения σ и τ. Очевидно, что причина и следствие в данном случае не разделены во времени, поэтому следствие с изменением причины наступает мгновенно. Однако в реальных процессах движение потенциалов происходит с запаздыванием во времени, определяемым релаксационными свойствами материалов, учитываемыми соответствующими коэффициентами релаксации.

Для их учета скорости изменения напряжений σ и τ, деформации ε и градиента скорости $\partial\vartheta/\partial x$ будем принимать в виде следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \sigma(x,t) &= \sigma + \tau_1 \frac{\partial \sigma}{\partial t}; \quad \varepsilon(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}; \\ \tau(x,t) &= \tau + \tau_3 \frac{\partial \tau}{\partial t}; \quad \frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \tau_4 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial t}, \end{aligned} \tag{4.72}$$

где τ_i $(i = \overline{1,4})$ – коэффициенты релаксации.

С учетом соотношений (4.72) формулы (4.69), (4.70) примут вид:

$$\sigma(x,t) + \tau_1 \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial t} = E\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \tau_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right); \tag{4.73}$$

$$\tau(x,t) + \tau_3 \frac{\partial \tau(x,t)}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial x} + \tau_4 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial t} \right). \tag{4.74}$$

Соотношение (4.73) по форме записи полностью совпадает со стандартными моделями вязкоупругого тела, известными как усложненные модели Максвелла и Кельвина – Фойхта, в которых по сравнению с обычными (не усложненными) их моделями добавляется третий элемент – пружина в модели Максвелла и демпфер – в модели Кельвина – Фойхта [26, 70].

Соотношение (4.74) при $\tau_3 = \tau_4 = \tau_r$ полностью совпадает с формулой для касательного напряжения вида

$$\tau = \mu \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \tau_r \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mu \tau_r \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2 \partial t}. \tag{4.75}$$

Формула (4.75) предложена А.В. Лыковым из полученной им обобщенной системы уравнений Онзагера, в основу которой положена гипотеза о конечной скорости переноса теплоты и массы. В общем виде эта система представляется следующим соотношением [89, 91].

$$J_i = L_i^{(r)} \frac{\partial J_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \left(L_{ik} X_k + L'_{ik} \frac{\partial X_k}{\partial t} \right). \qquad (4.76)$$

Применительно к формуле (4.75)

$$L^{(r)} = -\tau_p; \qquad L = \mu; \qquad L' = \mu\tau_p; \qquad X = \partial u / \partial x; \qquad J = \tau.$$

Отметим, что формула вида (4.75) теоретическим путем была получена также Олдройдом [89, 141].

На основе формулы второго закона Ньютона (4.71) и соотношения (4.73) выводится следующее волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \tau_1 \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} = c^2 \left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right]. \qquad (4.77)$$

Очевидно, что при $\tau_1 = \tau_2 = 0$, то есть без учета релаксационных составляющих в формуле (4.75), уравнение (4.77) приводится к уравнению (4.68). Отметим, что уравнение вида (4.77) описывает колебания стержней струн, пружин, жидкостей, газов, звуковых колебаний и прочего, с учетом запаздывания во времени следствия при изменении причины, то есть в данном уравнении учитывается конечная скорость переноса потенциалов исследуемых полей. Однако в этом уравнении не учитываются силы сопротивления среды процессу изменения ее формы. В связи с чем, уравнение для колебаний давления (напряжения) в жидкости с учетом сил трения и релаксационных свойств среды по аналогии с (3.14) и (3.84) приводится к виду

$$c^2 \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + c^2 \tau_2 \frac{\partial^3 p(x,t)}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} + \tau_1 \frac{\partial^3 p(x,t)}{\partial t^3} + 2a \frac{\partial p(x,t)}{\partial t}. \qquad (4.78)$$

Отметим, что аналогичное уравнение можно получить и относительно скорости при использовании формулы (4.74) для касательного напряжения.

Найдем решение уравнения (4.78) для жидкости, находящейся в трубопроводе в условиях гидравлического удара, используя следующие краевые условия:

$$p(x,0) = p_0; \quad (4.79) \qquad \partial p(x,0)/\partial t = 0; \quad (4.80) \qquad \partial^2 p(x,0)/\partial t^2 = 0; \qquad (4.81)$$

$$p(0,t) = p_1; \quad (4.82) \qquad \partial p(l,t)/\partial x = 0, \qquad (4.83)$$

где p_0 – начальное давление; p_1 – давление в сечении $x = 0$; l – длина трубопровода.

Обозначим:

$$\Theta = \frac{p - p_1}{p_0 - p_1}; \qquad \mathrm{Fo} = \frac{ct}{l}; \qquad \rho = \frac{x}{l}; \qquad \mathrm{Fo}_1 = \frac{c\tau_1}{l}; \qquad \mathrm{Fo}_2 = \frac{c\tau_2}{l}; \qquad \mathrm{Fo}_r = \frac{2al}{c}, \qquad (4.84)$$

где Θ – безразмерное давление; ρ – относительная координата; Fo – безразмерное время; $\mathrm{Fo}_1, \mathrm{Fo}_2$ – безразмерные коэффициенты релаксации; Fo_r – безразмерный коэффициент сопротивления.

Подставляя (4.84) в (4.78) – (4.83), находим

$$\mathrm{Fo}_r \frac{\partial\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} + \frac{\partial^2\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2} + \mathrm{Fo}_1 \frac{\partial^3\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^3} = \frac{\partial^2\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2} + \mathrm{Fo}_2 \frac{\partial^3\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2\partial\mathrm{Fo}} \qquad (4.85)$$

$$(\mathrm{Fo}>0;\quad 0<\rho<1);$$

$$\Theta(\rho,0)=1; \quad (4.86) \qquad \partial\Theta(\rho,0)/\partial\mathrm{Fo}=0; \quad (4.87) \qquad \partial^2\Theta(\rho,0)/\partial\mathrm{Fo}^2=0; \quad (4.88)$$

$$\Theta(0,\mathrm{Fo})=0; \quad (4.89) \qquad \partial\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\rho=0. \qquad (4.90)$$

Сделаем замену переменной

$$\xi = 1-\rho. \qquad (4.91)$$

Для переменной ξ задача (4.85) – (4.90) примет вид

$$\mathrm{Fo}_r \frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} + \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2} + \mathrm{Fo}_1 \frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^3} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} + \mathrm{Fo}_2 \frac{\partial^3\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2\partial\mathrm{Fo}} \qquad (4.92)$$

$$(\mathrm{Fo}>0;\quad 0<\rho<1);$$

$$\Theta(\xi,0)=1; \quad (4.93) \qquad \partial\Theta(\xi,0)/\partial\mathrm{Fo}=0; \quad (4.94) \qquad \partial^2\Theta(\xi,0)/\partial\mathrm{Fo}^2=0; \quad (4.95)$$

$$\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi=0; \quad (4.96) \qquad \Theta(1,\mathrm{Fo})=0. \qquad (4.97)$$

Решение задачи (4.92) – (4.97) разыскивается в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \varphi(\mathrm{Fo})\cos\left(r\frac{\pi}{2}\xi\right). \qquad (4.98)$$

Соотношение (4.98) удовлетворяет краевым условиям (4.96), (4.97).

Подставляя (4.98) в (4.92), разделив полученное соотношение на $\cos\left(r\frac{\pi}{2}\xi\right)$, находим

$$\mathrm{Fo}_1\varphi''' + \varphi'' + (\mathrm{Fo}_r + 0{,}25\mathrm{Fo}_2 r^2\pi^2)\varphi' + 0{,}25r^2\pi^2\varphi = 0, \qquad (4.99)$$

где $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ – 1-ая, 2-ая и 3-я производные от функции $\varphi(\mathrm{Fo})$ по безразмерному времени Fo.

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (4.99) будет

$$\mathrm{Fo}_1 z^3 + z^2 + A\,z + B = 0\ , \qquad (4.100)$$

где $A = \mathrm{Fo}_r + B\mathrm{Fo}_2$; $B = 0{,}25r^2\pi^2$.

Уравнение (4.100) имеет следующие корни:

$$z_1 = [B_1/6 - 2B_2/(3B_1) - 1/3]/\mathrm{Fo}_1; \qquad (4.101)$$

$$z_{2,3} = \frac{1}{\mathrm{Fo}_1}\left[\frac{B_2}{3B_1} - \frac{B_1}{12} - \frac{1}{3} \pm 0{,}5i\sqrt{3}\left(\frac{B_1}{6} + \frac{2B_2}{3B_1}\right)\right], \qquad (4.102)$$

где $B_2 = 3A\mathrm{Fo}_1 - 1$; $i = \sqrt{-1}$;

$$B_1 = \left\{36\,\mathrm{Fo}_1(A - 3B\mathrm{Fo}_1) - 8 + 12\sqrt{3}\mathrm{Fo}_1\left[2A\,\mathrm{Fo}_1(2A^2 - 9B) - A^2 + B\left(3B\mathrm{Fo}_1^2 + 4\right)\right]\right\}^{1/3}.$$

Учитывая найденные значения z_1, z_2, z_3, решение уравнения (4.99) будет

$$\varphi(\mathrm{Fo}) = C_1 e^{z_1 \mathrm{Fo}} + C_2 e^{z_2 \mathrm{Fo}} + C_3 e^{z_3 \mathrm{Fo}} , \qquad (4.103)$$

где C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования.

Подставляя (4.103) в (4.98), находим

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = (C_1 e^{z_1 \mathrm{Fo}} + C_2 e^{z_2 \mathrm{Fo}} + C_3 e^{z_3 \mathrm{Fo}}) \cos(r \frac{\pi}{2} \xi) . \qquad (4.104)$$

Любое частное решение вида (4.104) удовлетворяет краевым условиям (4.96), (4.97), однако ни одно из них не удовлетворяет условиям (4.93) – (4.95). Для выполнения этих условий запишем сумму решений

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_{1k} e^{z_1 \mathrm{Fo}} + C_{2k} e^{z_2 \mathrm{Fo}} + C_{3k} e^{z_3 \mathrm{Fo}} \right) \cos(r \frac{\pi}{2} \xi) \quad (r = 2k - 1) . \qquad (4.105)$$

Подставляя (4.105) в (4.94), получаем

$$C_{1k} = 4 z_{3k} z_{2k} \sin\eta / [(z_{3k} - z_{1k})(2\cos\eta\sin\eta + r\pi)(z_{2k} - z_{1k})] , \qquad (4.106)$$

где $\eta = r\pi / 2$; $r = 2k - 1$.

Подставляя (4.105) в (4.94), будем иметь

$$C_{2k} = -4 z_{3k} z_{1k} \sin\eta / [(z_{3k} - z_{2k})(2\cos\eta\sin\eta + r\pi)(z_{2k} - z_{1k})] . \qquad (4.107)$$

Подстановкой (4.105) в (4.93), находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} (C_{1k} + C_{2k} + C_{3k}) \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi \right) = 1 \quad (r = 2k - 1; \quad k = 1, 2, \ldots) . \qquad (4.108)$$

Соотношение (4.108) является разложением единицы в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля в диапазоне [0; 1]. Для нахождения неизвестного коэффициента C_{3k} умножим соотношение (4.108) на $\cos(j\pi\xi/2)$ и вычислим интеграл от найденного выражения в пределах от $\xi = 0$ до $\xi = 1$:

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(C_{1k} + C_{2k} + C_{3k}) \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi \right) \cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi \right) \right] d\xi = \int_0^1 \cos\left(j \frac{\pi}{2} \xi \right) d\xi , \qquad (j = r = 2k - 1) . \qquad (4.109)$$

Соотношение (4.109) вследствие ортогональности косинусов приводится к виду

$$\int_0^1 (C_{1k} + C_{2k} + C_{3k}) \cos^2\left(r \frac{\pi}{2} \xi \right) d\xi = \int_0^1 \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi \right) d\xi \qquad (r = 2k - 1; \quad k = 1, 2, \ldots). \qquad (4.110)$$

Определяя интегралы в (4.110), с учетом (4.106), (4.107) получаем

$$C_{3k} = 4 z_{1k} z_{2k} \sin\eta / [(z_{3k} - z_{1k})(z_{3k} - z_{2k})(2\cos\eta\sin\eta + r\pi)] . \qquad (4.111)$$

В результате нахождения констант интегрирования C_{1k}, C_{2k} и C_{3k} решение задачи (4.92) – (4.97) находится из (4.105).

Используя формулы (4.44), (4.47), в п. 4.1 применительно к разгонному течению Куэтта найдено касательное напряжение на стенке посредством интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений.

Из анализа результатов заключаем (см. рисунок 4.13), что касательное напряжение, определяемое формулой (4.47), при $\mathrm{Fo} \to 0$ стремится к бесконечной величине. Напряжение, определяемое по формуле (4.44) при $\mathrm{Fo} \to 0$, $\bar{\tau} \to 0$. Касательное напряжение, имеющее в начальный момент нулевое значение, при увеличении времени увеличивается, принимая при некотором $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}^*$ максимальное значение $\bar{\tau} = \tau^*$. При последующем увеличении времени $\bar{\tau}$ уменьшается и при $\mathrm{Fo} \to \infty$ имеем $\bar{\tau} \to 0$.

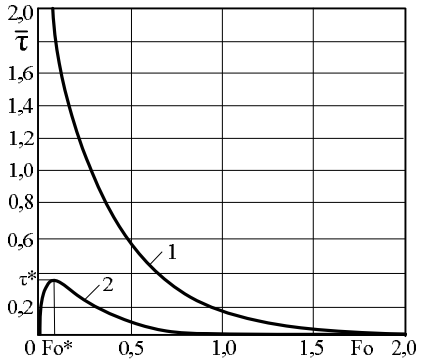


Рисунок 4.13. Распределение касательного напряжения при $\mathrm{Fo}_r = \nu\tau_r / \delta^2 = 0{,}3$. 1 – решение уравнения (4.70); 2 – решение уравнения (4.75)

Результаты, полученные из решения уравнения (4.75), приводят к следующим выводам: касательное напряжение при $\mathrm{Fo} \to 0$ $\bar{\tau} \to 0$; касательное напряжение не может быть выше некоторой наибольшей для данных условий величины; использование формулы (4.75) позволяет исключить бесконечные значения касательных напряжений.

Данные расчетов по формуле (4.105) приведены на рисунках 4.14, 4.15 (для $\xi = 0$) и рисунках 4.16, 4.17 (для $\xi = 0{,}5$). И, в частности, здесь приведены данные решения краевой задачи (4.92) – (4.97) в квазистационарной постановке (при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$), а также при учете конечной скорости переноса потенциалов исследуемой среды, то есть с учетом влияния нестационарности на силу трения.

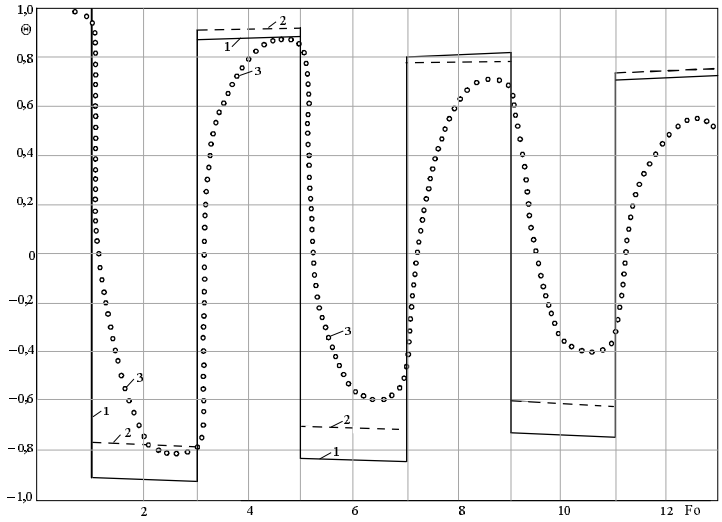


Рисунок 4.14. Распределение давления ($\xi = 0$): 1 – по соотношению (4.105) при $Fo_r = 0{,}0538$; $Fo_1 = Fo_2 = 0$; $n = 100$ (число слагаемых ряда (4.105)); 2 – по методу [122]; 3 – эксперимент [118]

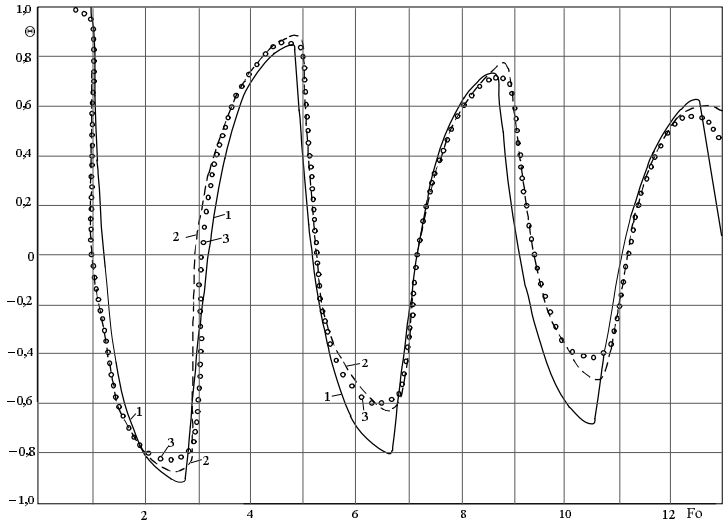


Рисунок 4.15. Распределение давления ($\xi = 0$): 1 – по соотношению (4.105) при $Fo_r = 0{,}0538$; $Fo_1 = 0{,}4$; $Fo_2 = 0{,}043$; $n = 100$; 2 – по методу [122]; 3 – эксперимент [118]

На этих же рисунках приведены данные расчетов, выполненных автором работы [122], а также результаты экспериментальных исследований гидравлического удара для сильновязкой жидкости при ламинарном режиме, проведенных Е.Л. Холмбоу и В.Т. Руло [118]. При сравнении результатов, полученных по формуле (4.105), с теоретическими расчетами из [122] и данными эксперимента [118] начальное давление (4.93), мгновенно приложенное к неподвижной жидкости, принято за первую фазу гидравлического удара.

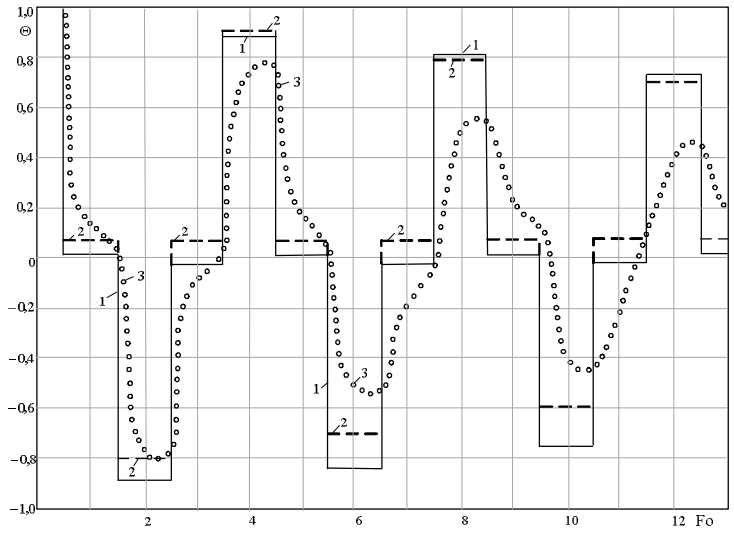


Рисунок 4.16. Распределение давления ($\xi = 0{,}5$): 1 – по (9.464) $\mathrm{Fo}_r = 0{,}0538$; $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$; $n = 100$; 2 – по методу [122]; 3 – эксперимент [118]

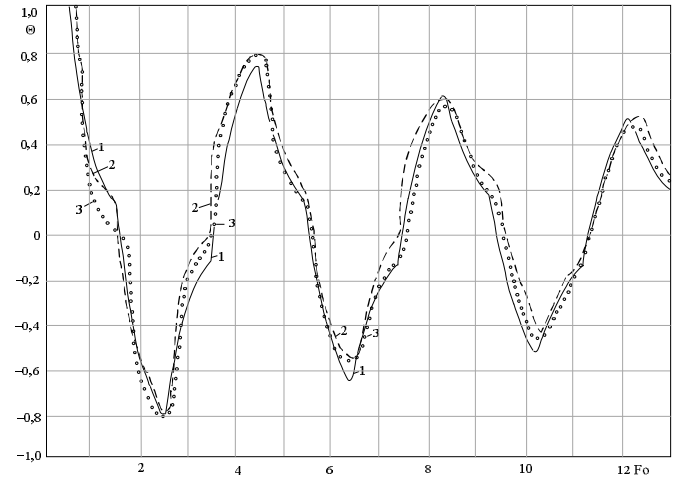


Рисунок 4.17. Распределение давления ($\xi = 0{,}5$): 1 – по соотношению (4.105) при $\mathrm{Fo}_r = 0{,}0538$; $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}4$; $\mathrm{Fo}_2 = 0{,}43$; $n = 100$; 2 – по методу [122]; 3 – эксперимент [118]

Теоретические исследования в [129] выполнялись по двум методикам – с учетом влияния нестационарности на силу трения и без ее учета (в квазистатической постановке).

Экспериментальные исследования в [118] выполнялись для масла вязкостью $\nu = 0{,}397\ см^2/с$ при скорости звука (определенной экспериментально) $c = 1324\ м/с$. Длина трубопровода и его диаметр были следующие: $l = 35{,}8\ м$; $d = 0{,}0254\ м$. Скорость течения масла $\vartheta_0 = 0{,}128\ м/с$.

При выполнении расчетов по соотношению (4.105) безразмерный коэффициент сопротивления определялся по последнему соотношению из (4.84), где $2a = 32\nu/d^2$. Отсюда, с учетом приведенных выше данных, получаем $\mathrm{Fo}_r = 2al/c = 0{,}0538$.

Из анализа результатов, найденных по формуле (4.105) (см. рисунки 4.14, 4.15), следует, что решение краевой задачи (4.92) – (4.97) в квазистатической постановке (при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$) незначительно отличается от решения аналогичной задачи, полученного в [122] с использованием метода Бернулли – Фурье. Однако результаты двух теоретических методов

значительно отличаются от экспериментальных данных. Учет нестационарности градиента скорости и касательного напряжения приводит к существенному приближению расчетных данных к результатам эксперимента (см. рисунки 4.15, 4.17).

При расчетах по формуле (4.105) коэффициенты релаксации Fo_1 и Fo_2 подбирались таким образом, чтобы получаемые результаты наименее отклонялись от экспериментальных данных. Используя полученные таким путем значения $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}4$ и $\mathrm{Fo}_2 = 0{,}43$, по формулам $\mathrm{Fo}_1 = c\tau_1 / l$ и $\mathrm{Fo}_2 = c\tau_2 / l$ были найдены коэффициенты релаксации $\tau_1 = 0{,}0108\, c$; $\tau_2 = 0{,}0116\, c$.

Полученные двумя различными методами результаты приводят к заключению, что гипотеза квазистационарности, вообще говоря, неверна, что подтверждается приведенными выше сравнениями решений квазистационарной и нестационарной задач с данными натурного эксперимента. Из двух рассмотренных выше направлений учета нестационарности касательных напряжений первое связано с рассмотрением уравнений Навье – Стокса, характеризующих изменение местных (локальных – не осредненных) величин [122]. Второе направление, рассмотренное в данной работе, связано с введением временно́й зависимости между градиентом скорости и касательным напряжением. В данном случае устраняется проблема бесконечной скорости переноса потенциалов исследуемого поля, а также проблема бесконечных величин касательных напряжений на стенке при $\mathrm{Fo} \to 0$.

4.4 Исследование резонансных колебаний газа с учетом релаксационных свойств среды на основе конечно - разностного метода

Разработана математическая модель упругих колебаний газа при воздействии внешней гармонической нагрузки с учетом релаксационных свойств и сил сопротивления среды. Вывод дифференциального уравнения модели основан на учете временно́й зависимости избыточного давления и деформации в формуле закона Гука. Исследование модели численным методом показало, что при совпадении частоты собственных колебаний газа с частотой колебаний внешней нагрузки (при неучете сопротивления среды и ее релаксационных свойств) наблюдается неограниченное во времени возрастание амплитуды колебаний газа (резонанс). При учете сопротивления и релаксационных свойств газа в резонансных частотах наблюдается стабилизация амплитуды колебаний на ее величине, зависящей от значений коэффициентов сопротивления и релаксации. При частотах, близких к резонансным, наблюдаются бифуркационные колебания (биения), при которых происходит периодическое возрастание и убывание амплитуды колебаний. При частотах, существенно отличающихся от резонансных, в случае учета сил сопротивления и релаксационных свойств среды бифуркационные колебания не наблюдаются. В этом случае, амплитуда колебаний газа стабилизируется во времени на

величине, зависящей от амплитуды колебаний внешней нагрузки, коэффициента сопротивления и коэффициентов релаксации.

Упругая продольная деформация газа распространяется со скоростью, зависящей от его физических свойств. При этом волновой процесс колебаний не сопровождается движением газа. Дифференциальные уравнения, описывающие такие процессы, называются волновыми.

В технике довольно часто встречаются случаи, когда процесс собственных колебаний газа сопровождается колебаниями приложенной на свободном торце трубы нагрузки. При этом особый практический интерес представляет нахождение амплитуды резонансных колебаний, наблюдающихся при совпадении частоты собственных колебаний с частотой колебаний внешней нагрузки. Интерес представляет также выяснение причин возникновения бифуркационных колебаний (биений), наблюдающихся при работе конкретных технических устройств.

В основе вывода дифференциальных уравнений продольных колебаний газов и жидкостей лежат закон Гука и второй закон Ньютона. Согласно закону Гука, избыточное давление, возникающее в газе или жидкости под действием упругой волны, пропорционально величине относительной деформации $\varepsilon = d\xi / dx$, то есть [48]

$$p_{из} = \rho_0 e^2 \varepsilon, \tag{4.112}$$

где ξ – перемещение; x – координата; $p_{из}$ – избыточное давление; ρ_0 – плотность в ненапряженном состоянии; ε – деформация; $e = \sqrt{\partial p / \partial \rho}$ – скорость распространения волны.

Согласно второму закону Ньютона

$$F = ma = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{d^2\xi}{dt^2} = \rho S \Delta x \frac{d^2\xi}{dt^2}, \tag{4.113}$$

где F – сила, действующая на тело, m – масса тела, $a = d\upsilon / dt$ – ускорение, $\upsilon = d\xi / dt$ – скорость, ρ – плотность, S – площадь поперечного сечения тела, Δx – длина элементарного участка.

Сила давления, действующая на некотором элементарном участке $(x + \Delta x)$ газа, равная произведению площади поперечного сечения тела на разность давлений в сечениях, может быть представлена в виде соотношения

$$F = S \Delta x dp_{из} / dx. \tag{4.114}$$

Подставляя (4.114) в (4.113), получаем уравнение движения (равновесия) [48]

$$\rho_0 S \Delta x \frac{d^2\xi}{dt^2} = S \Delta x \frac{dp_{из}}{dx}. \tag{4.115}$$

Подставляя (4.112) в (4.115), находим

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}. \qquad (4.116)$$

Волновое уравнение (4.116) описывает незатухающие колебания газа, что связано с отсутствием в нем слагаемых, учитывающих внутреннее сопротивление среды. С целью его учета примем силу сопротивления F_c пропорциональной изменению перемещения во времени, характеризуемому некоторым коэффициентом r:

$$F_c = -r\partial\xi / \partial t, \qquad (4.117)$$

где «минус» означает противоположное перемещению направление действия силы сопротивления.

Подставляя (4.117) в правую часть соотношения (4.115), находим

$$\rho_0 S\Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S\Delta x \frac{\partial p_{из}}{\partial x} - r\frac{\partial \xi}{\partial t}. \qquad (4.118)$$

Соотношение (4.118) можно переписать в виде

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{из}}{\partial x} - \frac{r}{\Delta V}\frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad (4.119)$$

где $\Delta V = S\Delta x$ – объем элементарного участка.

Отметим, что последнее слагаемое в правой части соотношения (4.119) представляет силу сопротивления, приходящуюся на единицу объема.

Подставляя (4.112) в (4.119), находим

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t}, \qquad (4.120)$$

где $\gamma = r/(\rho_0 \Delta V)$ – коэффициент сопротивления, $1/c$.

Уравнение (4.120) описывает затухающие колебания газа без учета его релаксационных свойств. При его выводе использовано соотношение (4.112), в котором отсутствует причинно - следственная связь явлений. Причиной (движущей силой) здесь является деформация ε, а следствием – давление $p_{из}$. Причина и следствие в данном случае не разделены во времени и поэтому следствие с изменением причины наступает мгновенно (скачкообразно). Однако перенос потенциалов в реальных средах происходит с некоторым ускорением во времени, учитываемым коэффициентами релаксации. С целью учета релаксационных свойств представим соотношение (4.112) в виде

$$p_{из} + \tau_1 \partial p_{из} / \partial t = -\rho_0 e^2 (\varepsilon + \tau_2 \partial \varepsilon / \partial t), \qquad (4.121)$$

где τ_1, τ_2 – коэффициенты релаксации избыточного давления и деформации.

Отметим, что формула (4.121) может быть получена также из обобщенной системы дифференциальных уравнений Онзагера, сформулированной А.В. Лыковым и имеющей вид [89, 91]

$$J_i = L_i^{(r)} \frac{\partial J_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \left(L_{ik} X_k + L'_{ik} \frac{\partial X_k}{\partial t} \right), \qquad (4.122)$$

где J_i – поток субстанции (тепла, массы, импульса и т. д.); X_k – движущие силы; $L_i^{(r)}$, L_{ik}, L'_{ik} – постоянные.

Если положить $L_i^{(r)} = -\tau_1$; $L_{ik}^{(r)} = E$; $L'_{ik} = \rho_0 e^2 \tau_2$; $J_i = p_{\text{из}}$; $X_k = \partial\xi / \partial x$, то соотношение (4.122) приводится к формуле (4.121). Согласованность формул (4.121), (4.122) свидетельствует о том, что в формуле (4.121) учитываются перекрестные эффекты, связанные с одновременным учетом временно́й и пространственной неравновесности и их взаимного влияния в нелокальном процессе переноса импульса.

Соотношение (4.121) полностью совпадает также со стандартными моделями вязкоупругого тела, известными как модели Максвелла и Кельвина – Фойхта [52, 53, 88, 116]. Отметим, что соотношение (4.121) соответствует усложненным моделям Максвелла и Кельвина – Фойхта, в которой добавляется третий элемент – пружина, расположенная параллельно к последовательно соединенным телам Гука и Ньютона (в модели Максвелла) и расположенная последовательно с параллельно соединенными телами Гука и Ньютона (в модели Кельвина – Фойхта).

Объединенная формула усложненных моделей Максвелла и Кельвина – Фойхта имеет вид [52, 53, 88, 116]:

$$\sigma + Q \partial\sigma / \partial t = E(\varepsilon + Q \partial\varepsilon / \partial t), \qquad (4.123)$$

где σ – нормальное напряжение, E – модуль упругости, $\varepsilon = d\xi / dx$ – перемещение; t – время; Q – коэффициент.

Постоянная Q, имеющая размерность времени, в работах [53, 88] интерпретируется как время запаздывания или время (период) релаксации [116].

Очевидно, что формула (4.123) при $\sigma = p_{\text{из}}$; $E = \rho_0 e^2$; $\tau_1 = \tau_2 = Q$ полностью совпадает с формулой (4.121).

Для вывода дифференциального уравнения, в котором учитывается изменение во времени избыточного давления и деформации, выразим $p_{\text{из}}$ из формулы (4.121) и подставим полученное соотношение в уравнение движения (4.118). В результате некоторых преобразований находим

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \rho_0 e^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \rho_0 e^2 \tau_2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t} - \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p_{\text{из}}}{\partial x} \right) - \frac{r}{\Delta V} \frac{\partial \xi}{\partial t}. \qquad (4.124)$$

Заменяя в уравнении (4.124) величину $\partial p_{\text{из}} / \partial x$ ее значением из (4.115), получаем

$$\tau_1 \frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = e^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + e^2 \tau_2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2 \partial t} - \gamma \frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad (4.125)$$

где $\gamma = r/(\rho_0 \Delta V)$ – коэффициент сопротивления.

Уравнение (4.125) представляет волновое уравнение продольных колебаний газа, в котором учитываются силы сопротивления среды, а также релаксационные свойства газа. Если положить $\tau_1 = \tau_2 = \gamma = 0$, то это уравнение приводится к уравнению (4.116).

Найдем решение уравнения (4.125) для колебаний газа в трубе, один конец которой закрыт (при $x = \delta$), а на втором на единицу площади задано давление p, изменяющееся по гармоническому закону (при $x = 0$):

$$\frac{p}{S} = \rho_0 e^2 \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} = \cos(\omega t), \tag{4.126}$$

где S – единица площади; $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота, $1/c$.

Предположим, что в начальный момент времени перемещение газа в любой точке пространственной переменной равно ξ_0. Математическая постановка задачи в данном случае будет

$$\tau_1 \frac{\partial^3 \xi(x,t)}{\partial t^3} + \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = e^2 \left[\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} + \tau_2 \frac{\partial^3 \xi(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right] - \gamma \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial t} \quad (t > 0; \quad 0 < x < \delta); \tag{4.127}$$

$$\xi(x,0) = \xi_0; \quad (4.128) \qquad \frac{\partial \xi(x,0)}{\partial t} = 0; \quad (4.129) \qquad \frac{\partial^2 \xi(x,0)}{\partial t^2} = 0; \tag{4.130}$$

$$\partial \xi(0,t)/\partial x = \cos(\omega t); \quad (4.131) \qquad \xi(\delta,t) = 0, \tag{4.132}$$

где δ – длина трубы, b – коэффициент, учитывающий начальные перемещения.

Обозначим:

$$\psi = \frac{\xi}{\xi_0}; \qquad \eta = \frac{x}{\delta}; \qquad \mathrm{Fo} = \frac{et}{\delta}; \qquad F_1 = \frac{e\tau_1}{\delta}; \qquad F_2 = \frac{e\tau_2}{\delta}; \qquad F_3 = \frac{\delta\gamma}{e}, \tag{4.133}$$

где ψ – безразмерное перемещение; η – безразмерная координата; Fo – число Фурье; $\xi_0 = b\delta$; F_1, F_2 – безразмерные коэффициенты релаксации; F_3 – безразмерный коэффициент сопротивления среды.

С учетом (4.131) задача (4.127) – (4.131) принимает вид:

$$F_3 \frac{\partial \psi(\eta,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} + F_1 \frac{\partial^3 \psi(\eta,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^3} + \frac{\partial^2 \psi(\eta,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \psi(\eta,\mathrm{Fo})}{\partial \eta^2} + F_2 \frac{\partial^3 \psi(\eta,\mathrm{Fo})}{\partial \eta^2 \partial \mathrm{Fo}} \quad (\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < \eta < 1); \tag{4.134}$$

$$\psi(\eta,0) = 1; \quad (4.135) \qquad \frac{\partial \psi(\eta,0)}{\partial \mathrm{Fo}} = 0; \quad (4.136) \qquad \frac{\partial^2 \psi(\eta,0)}{\partial \mathrm{Fo}^2} = 0; \tag{4.137}$$

$$\frac{\partial \psi(0,\mathrm{Fo})}{\partial \eta} = F_4 \cos(F_5 \mathrm{Fo}); \quad (4.138) \qquad \psi(1,\mathrm{Fo}) = 0, \tag{4.139}$$

где $F_4 = \delta/\xi_0$; $F_5 = \omega\delta/e$ – безразмерная частота вынужденных колебаний (колебаний внешней нагрузки).

Для решения задачи (4.132) – (4.139) конечно - разностным методом в рассматриваемой области вводится пространственная сетка с шагами $\Delta\eta = 0{,}005$, $\Delta\mathrm{Fo} = 0{,}005$ соответственно по переменным η и Fo так, что

$$\eta_k = k\,\Delta\eta, \quad k = \overline{0, K}; \qquad \mathrm{Fo}_i = i\,\Delta\mathrm{Fo}, \quad i = \overline{0, I}, \tag{4.140}$$

где $K = 200$, $I = 50000$ – число шагов по координатам η, Fo.

На сетке (4.140) вводятся сеточные функции $\psi_k^i = \psi(\eta_k, \mathrm{Fo}_i)$. Используя принятую схему аппроксимации дифференциальных операторов, задача (4.132) – (4.139) записывается в виде

$$F_3\frac{\psi_k^{i+1}-\psi_k^i}{\Delta\mathrm{Fo}} + F_1\frac{\psi_k^{i+1}-3\psi_k^i+3\psi_k^{i-1}-\psi_k^{i-2}}{\Delta\mathrm{Fo}^3} + \frac{\psi_k^{i-1}-2\psi_k^i+\psi_k^{i+1}}{\Delta\mathrm{Fo}^2} =$$

$$= \frac{\psi_{k-1}^i-2\psi_k^i+\psi_{k+1}^i}{\Delta\eta^2} + F_2\left(\frac{\psi_{k-1}^i-2\psi_k^i+\psi_{k+1}^i}{\Delta\eta^2\Delta\mathrm{Fo}} - \frac{\psi_{k-1}^{i-1}-2\psi_k^{i-1}+\psi_{k+1}^{i-1}}{\Delta\eta^2\Delta\mathrm{Fo}}\right);$$

$$\psi_k^0 = 1; \qquad \frac{\psi_k^1-\psi_k^0}{\Delta\mathrm{Fo}} = 0; \qquad \frac{\psi_k^0-2\psi_k^1+\psi_k^2}{\Delta\eta} = 0;$$

$$\frac{\psi_1^i-\psi_0^i}{\Delta\eta} = F_4\cos(F_5\,\mathrm{Fo}_i); \qquad \psi_K^i = 0.$$

Результаты выполненных исследований приведены на рисунках 4.18 – 4.26. В случае, когда не учитываются релаксационные свойства газа и силы сопротивления среды ($F_1 = F_2 = F_3 = 0$), а также при отсутствии внешней нагрузки ($F_4 = 0$), наблюдаются незатухающие колебания газа с частотой его собственных колебаний, безразмерная величина которых составляет 1,575.

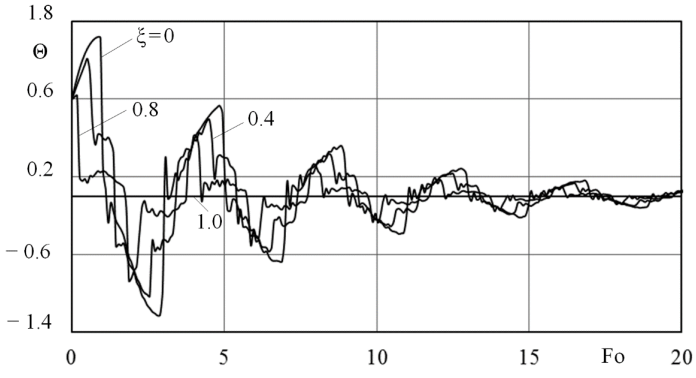


Рисунок 4.18. Изменение перемещений газа во времени: $F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = 0;\ F_3 = 0{,}3;$ $B = 1{,}5$

При любых ненулевых значениях коэффициента сопротивления ($F_3 \neq 0$) при неучете релаксационных свойств среды ($F_1 = F_2 = 0$) колебания затухающие (рисунок 4.18).

При $F_1 = F_2 = F_3 = 0;\ F_4 = 0.5;\ F_5 = 1.575$ безразмерная частота вынужденных колебаний, возникающих под действием внешней нагрузки вида (4.138), совпадает с частотой собственных

колебаний газа. При этом происходит неограниченное возрастание амплитуды колебаний во времени, то есть наблюдаются резонансные колебания (рисунок 4.19).

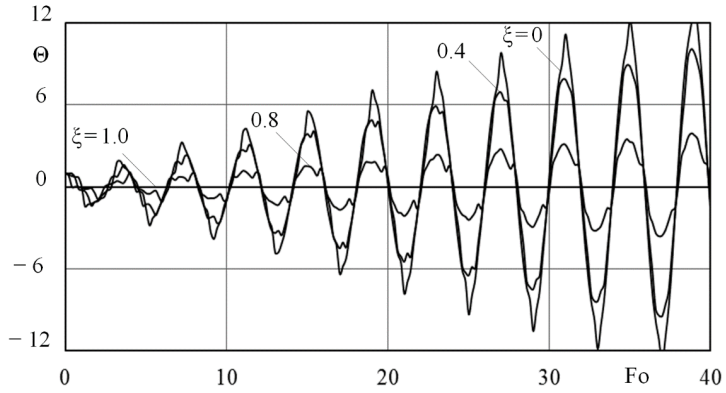


Рисунок 4.19. Изменение перемещений газа в резонансных частотах:
$F_1 = F_2 = F_3 = 0$; $F_4 = 0{,}5$;
$F_5 = 1{,}575$; $B = 10$

При малых значениях коэффициентов релаксации ($F_1 = F_2 = 0.1$) и при $F_3 = 0{,}3$; $F_4 = 0{,}1$; $F_5 = 1{,}575$ (колебания в резонансных частотах) на начальном диапазоне времени амплитуда колебаний уменьшается, достигая некоторого минимума. С увеличением времени амплитуда возрастает, стабилизируясь на некоторой неизменной во времени величине (рисунок 4.20).

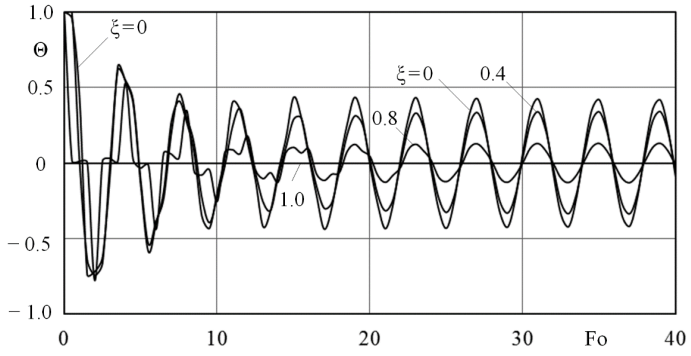


Рисунок 4.20. Изменение перемещений газа в резонансных частотах:
$F_1 = F_2 = 0{,}1$; $F_3 = 0{,}3$; $F_4 = 0{,}1$;
$F_5 = 1{,}575$

Пример колебаний газа в резонансных частотах при больших значениях коэффициентов релаксации ($F_1 = F_2 = 2$) и при $F_3 = 1$; $F_4 = 0{,}1$; $F_5 = 1{,}575$ приведен на рисунке 4.21. Из анализа результатов следует, что под действием внешней нагрузки происходит периодическое возрастание и убывание амплитуды в незатухающем во времени процессе колебаний.

Были также выполнены расчеты в нерезонансных частотах колебаний внешней нагрузки. При этом рассматривались два варианта – при частотах, близких к резонансным, и при существенно отличающихся от резонансных. И, в частности, пример колебания газа при частотах, близких к резонансным ($F_5 = 1.5$), приведен на рисунках 4.22, 4.23 ($F_1 = F_2 = 10$; $F_3 = 0{,}3$; $F_4 = 0{,}1$). Из анализа результатов следует, что в данном случае наблюдается бифуркационное изменение амплитуды, при котором периодические значительные возрастания

амплитуды сопровождаются столь же значительными ее падениями. Такого типа колебания называются еще биениями.

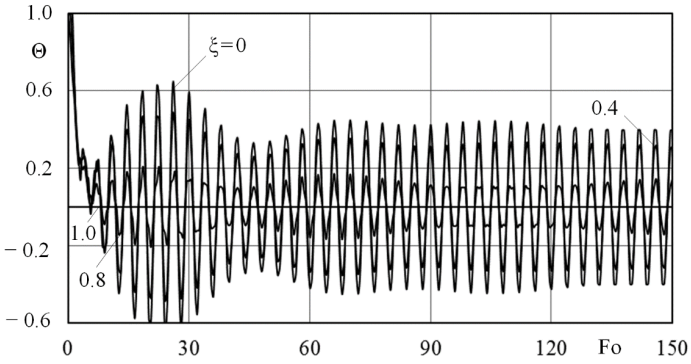


Рисунок 4.21. Изменение перемещений газа в резонансных частотах:
$F_1 = F_2 = 2;\ F_3 = 1;\ F_4 = 0{,}1;$
$F_5 = 1{,}575$

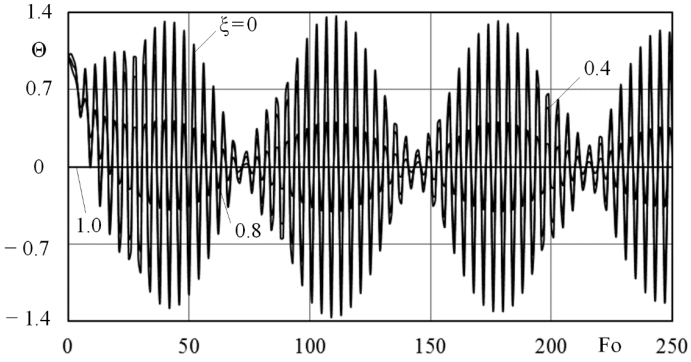


Рисунок 4.22. Изменение перемещений газа в нерезонансных частотах:
$F_1 = F_2 = 10;\ F_3 = 0{,}3;\ F_4 = 0{,}1;$
$F_5 = 1{,}5$

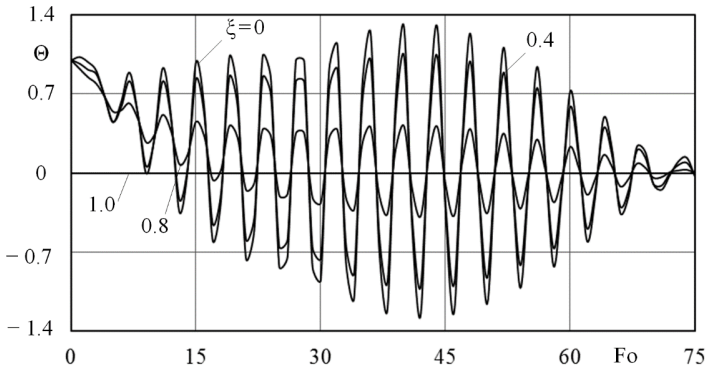


Рисунок 4.23. Изменение перемещений газа в нерезонансных частотах:
$F_1 = F_2 = 10;\ F_3 = 0{,}3;\ F_4 = 0{,}1;$
$F_5 = 1{,}5$

Пример колебания газа при частотах, далеких от резонансных ($F_5 = 0.1$), приведен на рисунке 4.24. Анализ результатов приводит заключению, что каждая точка газа имеет две амплитуды колебаний с существенно отличающейся частотой. То есть каждая точка газа участвует в двух колебательных процессах, в одном из которых совершаются высокочастотные и низкоамплитудные колебания, а в другом – низкочастотные и высокоамплитудные. При каких-то больших значениях коэффициента сопротивления F_3 как в резонансных, так и нерезонансных частотах, наблюдается критическое затухание колебаний, при котором,

несмотря на воздействие внешней нагрузки, возврат выведенного из равновесия газа происходит практически при отсутствии колебаний его внутренних точек (рисунки 4.25, 4.26).

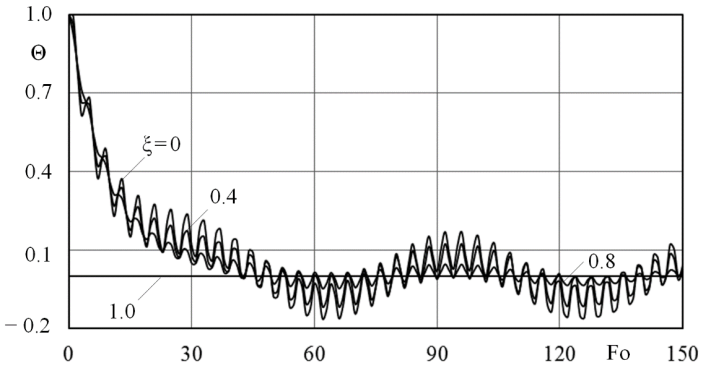


Рисунок 4.24. Изменение перемещений газа в нерезонансных частотах:
$F_1 = F_2 = 10$; $F_3 = 0{,}3$; $F_4 = 0{,}1$; $F_5 = 0{,}1$

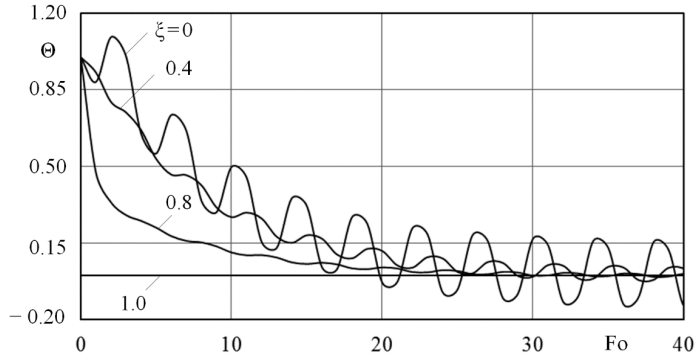


Рисунок 4.25. Изменение перемещений газа в резонансных частотах:
$F_1 = F_2 = 0$; $F_3 = 20$; $F_4 = 1$; $F_5 = 1{,}575$

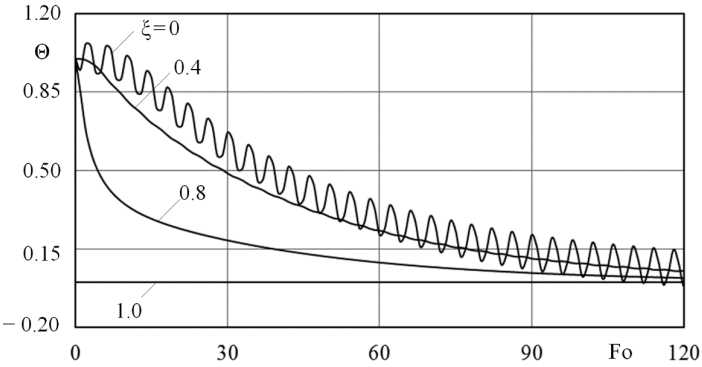


Рисунок 4.26. Изменение перемещений газа в резонансных частотах:
$F_1 = F_2 = 0$; $F_3 = 100$; $F_4 = 1$; $F_5 = 1{,}575$

Заключение

1. На основе учета в формуле закона Гука релаксационных слагаемых, включающих производные по времени от избыточного давления и деформации в произведении с коэффициентами релаксации, а также при учете внутреннего сопротивления среды, выведено волновое уравнение колебаний газа.

2. Численным методом выполнено исследование продольных колебаний газа в трубе, один конец которой закрыт, а на втором на единицу площади задано давление p, изменяющееся по гармоническому закону.

3. При неучете сил сопротивления газа и его релаксационных свойств в резонансных частотах (при совпадении частоты собственных колебаний газа с частотой колебаний внешней нагрузки) происходит неограниченное во времени увеличение амплитуды колебаний. При учете релаксационных свойств и сопротивления среды наблюдается периодическое изменение амплитуды в незатухающем процессе колебаний.

4. При частотах, близких к резонансным, наблюдаются бифуркационные колебания (биения), сопровождающиеся существенными изменениями амплитуды колебаний в незатухающих во времени процессах колебаний газа.

5. При частотах, далеких от резонансных, каждая точка газа участвует в двух колебательных процессах. В одном из них совершаются высокочастотные и низкоамплитудные, а в другом – низкочастотные и высокоамплитудные колебания.

6. При больших значениях коэффициента сопротивления наблюдается критическое затухание колебаний газа, при котором возврат выведенного из состояния равновесия газа в исходное состояние происходит при практическом отсутствии колебательных процессов во всех его внутренних точках, за исключением точки, где задана внешняя нагрузка.

По результатам исследований, приведенных в четвертой главе диссертации, получены следующие новые научные результаты:

1. Путем релаксации касательного напряжения и градиента скорости в законе Ньютона разработана математическая модель разгонного течения Куэтта с учетом пространственно - временной нелокальности.

2. При использовании релаксационных слагаемых в законе Гука разработана математическая модель колебаний упругой жидкости при гидравлическом ударе в трубопроводе с учетом ее релаксационных свойств.

3. На основе учета в формуле закона Гука релаксационных слагаемых, включающих производные по времени от избыточного давления и деформации в произведении с коэффициентами релаксации, а также при учете внутреннего сопротивления среды, выведено волновое уравнение колебаний газа.

4. Показано, что при частотах, близких к резонансным, наблюдаются бифуркационные колебания (биения), сопровождающиеся существенными изменениями амплитуды колебаний в незатухающем во времени процессе колебаний газа. При частотах, далеких от резонансных, каждая точка газа участвует в двух колебательных процессах. В одном из них совершаются высокочастотные низкоамплитудные, а в другом – низкочастотные высокоамплитудные колебания.

Новые научные результаты, полученные в четвертой главе диссертации, были использованы при разработке компьютерных моделей тепловых сетей централизованного теплоснабжения и циркуляционных систем тепловых электрических станций. На основе гидродинамической теории теплообмена, используя найденные по методам главы 4 коэффициенты теплоотдачи, были получены используемые в компьютерных моделях коэффициенты трения (гидравлические сопротивления). Суммарный экономический эффект от внедрения результатов работы, подтвержденный актами о внедрении, приведенными в приложениях диссертации, составляет 9,9 миллиона рублей (см. приложения 2 – 8).

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Научные результаты данной главы представлены в работах [80, 218, 238, 239, 243, 250, 257, 259] автора диссертации. В пятой главе диссертации рассматриваются вопросы разработки математических моделей краевых задач динамической термоупругости с учетом релаксационных свойств материалов. В качестве решения температурных задач, используемых в уравнениях динамической термоупругости, принимались решения: классического параболического уравнения теплопроводности (см. п. 5.1); уравнения теплопроводности по модели Максвелла – Каттанео (см. п. 5.2) и Максвелла – Каттанео – Лыкова (см. п. 5.3). В п. 5.4 рассмотрена математическая модель динамической термоупругости с учетом релаксации напряжения и деформации в формуле закона Гука при использовании модели Максвелла – Каттанео – Лыкова в качестве аналитического решения температурной задачи. Все представленные в данном разделе задачи решались методом разделения переменных.

5.1 Динамическая термоупругость на основе параболического уравнения теплопроводности

В случае, если скорость изменения температуры существенно ниже скорости звука в материале, распределение температуры практически не зависит от деформаций. При этом в уравнении теплопроводности можно не учитывать член механической связи, зависящий от деформации, и инерционные слагаемые в уравнениях движения. Задачи, в которых не учитываются отмеченные составляющие, называются квазистатическими. Время здесь является параметром, а напряжения находятся, лишь исходя из температурного состояния в данный момент времени [5, 15, 20, 28].

При высокой скорости изменения температуры температурные напряжения в любой конкретный момент времени будут зависеть от распределения напряжений в теле в предыдущие моменты времени. Время в данном случае приобретает смысл независимой переменной, и поэтому в уравнениях термоупругости появляются инерционные члены, учитывающие изменение напряжений во времени [15, 32 – 34, 52, 53, 57, 80, 103].

Для вывода уравнения динамической термоупругости (одномерная задача) запишем уравнение равновесия (движения) и соотношение между напряжениями и деформациями

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (5.1) \qquad \varepsilon_x = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}\sigma_x + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha(T-T_0), \qquad (5.2)$$

где σ_x – нормальное напряжение, x – координата, T – температура, T_0 – температура в ненапряженном состоянии, t – время, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона;

α – коэффициент линейного расширения, ρ – плотность, u – перемещение, $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$ – деформация.

Для получения динамического уравнения в напряжениях продифференцируем уравнение (5.1) по переменной x

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial t^2}. \tag{5.3}$$

Подставляя (5.2) в (5.3), получаем динамическое уравнение термоупругости в напряжениях [5, 15, 32, 34, 52, 53, 58]

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \sigma_x(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\rho\alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}, \quad (t>0; \qquad 0<x<\delta) \tag{5.4}$$

где $c^2 = E(1-\nu)/[(1+\nu)(1-2\nu)\rho]$ – скорость перемещения упругой волны; δ – толщина пластины.

Краевые условия к уравнению (5.4) при отсутствии внешней механической нагрузки для бесконечной пластины имеют вид:

$$\begin{aligned} &\sigma_x(x,0) = 0; && \partial\sigma_x(x,0)/\partial t = 0; \\ &\sigma_x(0,t) = 0; && \sigma_x(\delta, t) = 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Распределение температуры $T(x,t)$ в задаче (5.4), (5.5) полагается известным из решения задачи теплопроводности для бесконечной пластины. В данном случае в качестве $T(x,t)$ было использовано точное решение краевой задачи теплопроводности при краевых условиях 1-ого рода.

Для приведения задачи к безразмерному виду обозначим:

$$\sigma = \frac{\sigma_x(1-2\nu)}{\alpha E(T_0 - T_{ст})}; \qquad \mathrm{Fo} = \frac{ct}{\delta}; \qquad \xi = \frac{x}{\delta}; \qquad \Theta = \frac{T - T_{ст}}{T_0 - T_{ст}}, \tag{5.6}$$

где σ – безразмерное напряжение; Fo – число гомохронности; ξ – относительная координата; Θ – безразмерная температура; T_0 – начальная температура; $T_{ст}$ – температура пластины при $x=0$ и $x=\delta$.

Задача (5.1) – (5.5) с учетом (5.6) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \sigma(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} \qquad (\mathrm{Fo}>0; \quad 0<\xi<1; \quad 0\le\Theta\le 1); \tag{5.7}$$

$$\sigma(\xi,0) = 0; \quad (5.8) \qquad \partial\sigma(\xi,0)/\partial \mathrm{Fo} = 0; \tag{5.9}$$

$$\sigma(0,\mathrm{Fo}) = 0; \quad (5.10) \qquad \sigma(1,\mathrm{Fo}) = 0. \tag{5.11}$$

Определим решение задачи (5.7) – (5.11), используя решение температурной задачи при краевых условиях 1-ого рода вида

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}_т) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right] \exp\left(-r^2\pi^2 \mathrm{Fo}_т\right) \quad (r = 2k-1; \quad k = 1, 2, \ldots), \qquad (5.12)$$

где $\mathrm{Fo}_т = at/(\delta^2)$ – число Фурье температурной задачи; a – коэффициент температуропроводности; $A_k = 4\sin(0{,}5r\pi)/[2\cos(0{,}5r\pi)\sin(0{,}5r\pi) + r\pi]$.

Для того чтобы решения термоупругой и температурной задач были согласованы во времени, из условия $\mathrm{Fo}_т = \mathrm{Fo}$ находим $\mathrm{Fo}_т = a\mathrm{Fo}/(c\delta)$. Подставляя найденное $\mathrm{Fo}_т$ в (5.12), получаем

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right] \exp\left(-mr^2 \mathrm{Fo}\right) \quad (r = 2k-1; \quad k = 1, 2, \ldots), \qquad (5.13)$$

где $m = a\pi^2/(c\delta)$ – безразмерный комплекс.

Подставляя (5.13) в (5.7), находим

$$\frac{\partial^2 \sigma(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} = m^2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^4 \cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right] \exp\left(-mr^2 \mathrm{Fo}\right) \qquad (r = 2k-1). \qquad (5.14)$$

Решение уравнения (5.14) с условиями (5.8) – (5.11), следуя методу Фурье, разыскивается в виде

$$\sigma(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} N(\xi)\varphi(\mathrm{Fo}), \qquad (5.15)$$

где $N(\xi) = \cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right] \quad (r = 2k-1; \quad k = 1, 2, \ldots)$.

Подставляя (5.15) в (5.14), находим

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ r^2\pi^2 \cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right] \varphi(\mathrm{Fo}) + \frac{\partial^2 \varphi(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} \cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right] + \right. \\ &\left. + m^2 r^4 A_k \cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right] \exp(-mr^2 \mathrm{Fo}) \right\} = 0 \qquad (r = 2k-1). \end{aligned} \qquad (5.16)$$

Разделив каждый член суммы (5.16) на $\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi) \right]$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 \varphi(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} + r^2\pi^2 \varphi(\mathrm{Fo}) + m^2 r^4 A_k \exp(-mr^2 \mathrm{Fo}) \right] = 0 \quad (r = 2k-1). \qquad (5.17)$$

Так как каждый член суммы (5.17) представляет обыкновенное дифференциальное уравнение, то для выполнения суммы достаточно потребовать выполнения любого члена суммы, независимо от величины k:

$$\frac{\partial^2 \varphi(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} + D\varphi(\mathrm{Fo}) + D_1 \eta(\mathrm{Fo}) = 0, \qquad (5.18)$$

где $D = r^2\pi^2$; $D_1 = A_k m^2 r^4$; $\eta(\mathrm{Fo}) = \exp(-mr^2 \mathrm{Fo})$.

Интегрируя уравнение (5.18) , получаем

$$\varphi(\mathrm{Fo}) = C_1\cos(\sqrt{D}\mathrm{Fo}) + C_2\sin(\sqrt{D}\mathrm{Fo}) - \frac{D_1\eta(\mathrm{Fo})}{D + m^2 r^4} \qquad (r = 2k-1). \tag{5.19}$$

где C_1, C_2 − константы интегрирования.

Формула (5.19) удовлетворяет уравнению (5.18) при любых значениях $r = 2k-1$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Подставляя (5.19) в (5.15), получаем

$$\begin{aligned}\sigma(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{&[C_{1k}\cos(\sqrt{D}\mathrm{Fo}) + C_{2k}\sin(\sqrt{D}\mathrm{Fo}) - \\ &- \frac{D_1\eta(\mathrm{Fo})}{D + m^2 r^4}\Bigg]\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]\Bigg\} \quad (r = 2k-1).\end{aligned} \tag{5.20}$$

Для нахождения постоянных интегрирования C_{1k} и C_{2k} используем начальные условия (5.8), (5.9). Подставляя (5.20) в (5.8), (5.9), получаем

$$C_{1k} = D_1/\left(D + m^2 r^4\right); \qquad C_{2k} = -C_{1k} m r^2/\sqrt{D}\ . \tag{5.21}$$

Подставляя (5.21) в (5.20), с учетом обозначений для D и D_1 получаем

$$\begin{aligned}\sigma(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{&\frac{A_k m^2 r^2}{\left(\pi^2 + m^2 r^2\right)}\Big[\cos(r\pi\mathrm{Fo}) - \frac{mr}{\pi}\sin(r\pi\mathrm{Fo}) - \\ &- \exp\left(-mr^2\mathrm{Fo}\right)\Big]\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]\Bigg\} \qquad (r = 2k-1).\end{aligned} \tag{5.22}$$

Соотношение (5.22) представляет точное решение задачи (5.7) – (5.11). Подстановкой можно убедиться, что оно точно удовлетворяет всем условиям этой задачи – уравнению (5.7) и краевым условиям (5.8) – (5.11).

Изменение безразмерной температуры, найденной по формуле (5.13) , приведено на рисунках 5.1, 5.2. На рисунке 5.3 даны расчеты правой части уравнения (5.14) (то есть величины $\Theta''(\xi, \mathrm{Fo}) = \partial^2\Theta(\xi, \mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo}^2$), являющейся источником возникновения динамических температурных напряжений. Из их анализа следует, что при любых ξ в окрестности внешних поверхностей пластины ($\xi \to 0$ и $\xi \to 1$) величина $\Theta''(\xi, \mathrm{Fo})$ с уменьшением числа Fo ($\mathrm{Fo} \to 0$) возрастает, оставаясь равной нулю непосредственно в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$ для любых значений числа Fo, в том числе и при $\mathrm{Fo} = 0$. Изменение $\Theta''(\xi, \mathrm{Fo})$ по координате ξ для любых значений числа Fo характеризуется скачком ее величины со сменой знака в скачке. При этом величина скачка с уменьшением времени возрастает, и при $\mathrm{Fo} \to 0$ для точек $\xi \to 0$ она устремляется к бесконечному значению. Учитывая тот факт, что $\Theta''(\xi, \mathrm{Fo})$ является единственным источником температурных напряжений в задаче (5.7) – (5.11) (ввиду того, что все краевые условия этой

задачи нулевые), то при его устремлении к бесконечному значению к бесконечной величине устремляется и температурное напряжение.

Интересно отметить, что аналогичным свойством обладает и вторая производная по времени от функции ошибок Гаусса $erf\left(x/(2\sqrt{at})\right)$, представляющей точное решение задачи теплопроводности для полупространства при граничном условии 1-ого рода, где a – коэффициент температуропроводности, $м^2/с$; x – пространственная переменная, $м$; t – время, $с$ (см. Рисунок 5.4).

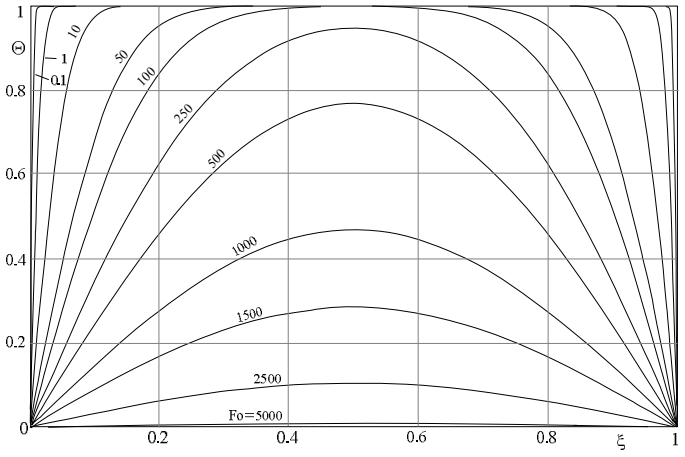


Рисунок 5.1. Распределение температуры для симметричных краевых условий первого рода (расчет по формуле (5.13)): m = 0,001; n = 100 (n – число слагаемых ряда (5.13))

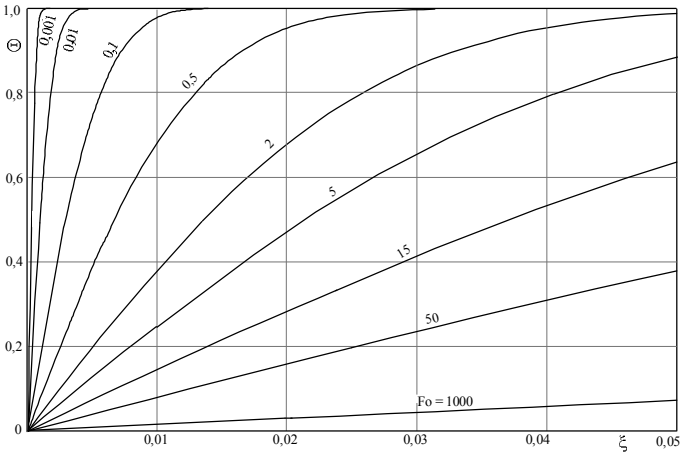


Рисунок 5.2. Распределение температуры на начальном участке временно́й переменной (расчет по формуле (5.13)): m = 0,001; n = 1000 (n – число слагаемых ряда (5.13))

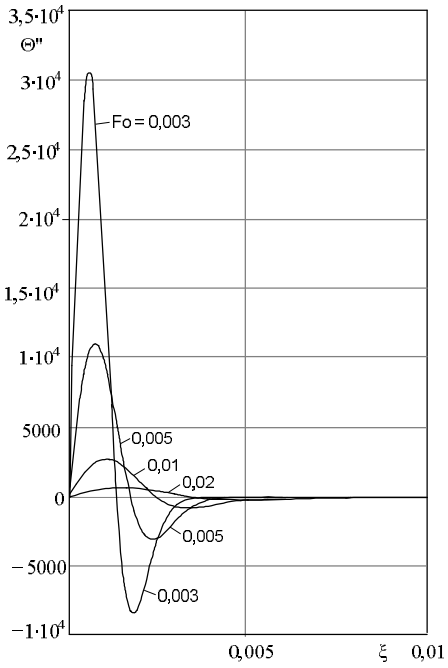


Рисунок 5.3. Изменение величины $\Theta'' = \partial^2\Theta(\xi, \mathrm{Fo})/\partial \mathrm{Fo}^2$ от координаты ξ для отдельных моментов времени. Расчет по формуле (5.13): $m = 0{,}001$; $n = 1000$ (n – число слагаемых ряда (5.13))

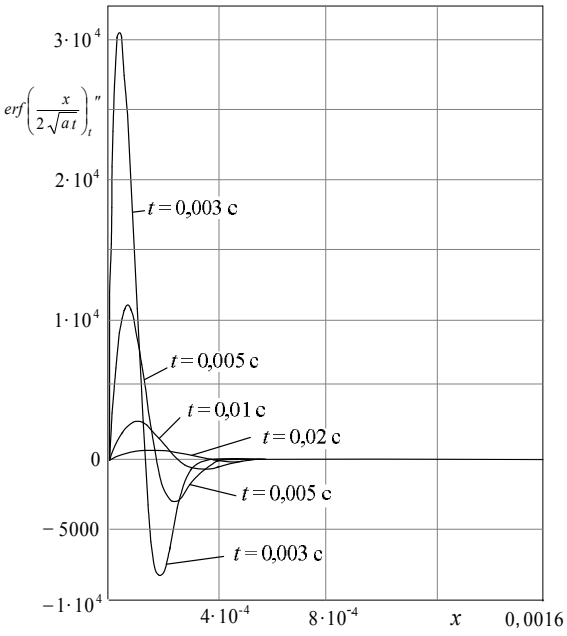


Рисунок 5.4. Изменение второй производной по времени от функции $erf\left(x/\left(2\sqrt{at}\right)\right)$: t – время, c; $a = 10^{-6}$, $м^2/с$

Анализ изменения второй производной по времени от этой функции показывает, что она имеет скачок (со сменой знака в скачке), величина которого с уменьшением x и t ($x \to 0$ и $t \to 0$) устремляется к бесконечному значению.

Данные расчетов температурных напряжений по формуле (5.22) приведены на рисунках 5.5, 5.6. Их анализ позволяет сделать вывод, что при воздействии теплового удара возникают термоупругие волны напряжений сжатия (положительный знак), движущиеся от поверхностей $\xi = 0$ и $\xi = 1$ к центру пластины. Например, в точке $\xi = 0{,}1$ (см. рисунок 5.5) в начальный момент времени ($\mathrm{Fo} = 0$) напряжение скачкообразно мгновенно возрастает от нуля до некоторой величины, несмотря на то, что фронт динамического возмущения, движущийся со

скоростью звука в данной среде, еще не достигает этой точки. Возникновение этого напряжения связано с бесконечной скоростью распространения теплоты, описываемой параболическим уравнением теплопроводности. Согласно его точному аналитическому решению температура в любой точке тела после воздействия теплового удара мгновенно становится отличной от начальной температуры на некоторую бесконечно малую величину (данное утверждение справедливо и для любой точки полупространства). Именно это изменение температуры в точке $\xi = 0{,}1$ в начальное время и вызывает появление в этой точке весьма малого значения напряжения сжатия, которое с увеличением времени монотонно возрастает и при $\mathrm{Fo} = 0{,}1$, то есть когда термоупругая волна, движущаяся со скоростью звука в данной среде от наружной поверхности к центру пластины ($\xi = 0{,}5$), достигает точки $\xi = 0{,}1$, происходит скачок температурных напряжений (см. скачок напряжений, обозначенный цифрой 1 на рисунке 5.5). Аналогичный процесс протекает и во второй половине пластины, где скачок напряжений, движущийся от точки $\xi = 1{,}0$ к центру пластины $\xi = 0{,}5$, достигает точки $\xi = 0{,}9$ при $\mathrm{Fo} = 0{,}1$ (см. скачок напряжений, обозначенный цифрой 1 на рисунке 5.5).

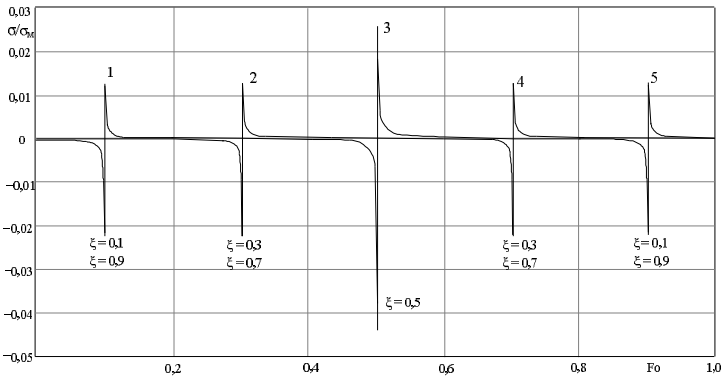


Рисунок 5.5. Изменение напряжений в точках $\xi = 0{,}1$ (0,9); 0,3 (0,7); 0,5 во времени: $m = 0{,}001$; $n = 1000$ (n – число слагаемых ряда (5.22)); $Q_{\text{м}}$ – максимальное напряжение

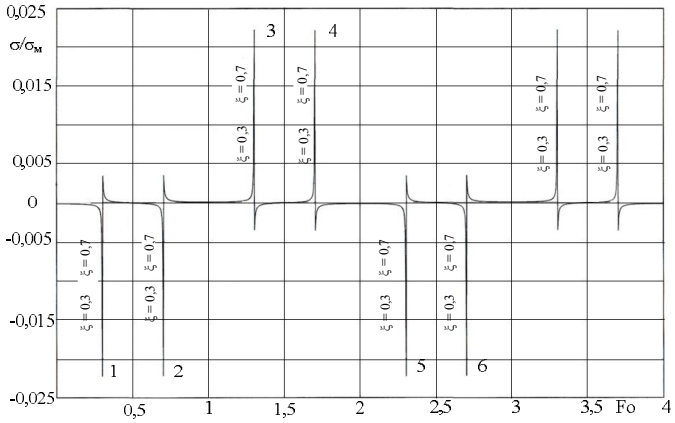


Рисунок 5.6. Изменение напряжений в точках $\xi = 0{,}3$ и $\xi = 0{,}7$ во времени: $m = 0{,}001$; $n = 1000$ (n – число слагаемых ряда (5.22))

В центре пластины ($\xi = 0{,}5$) происходит объединение двух волн, движущихся от наружных поверхностей ($\xi = 0$ и $\xi = 1$), которое сопровождается удвоением величины скачка

напряжений (так как волны имеют одинаковые фазы колебаний, то их амплитуды складываются) (см. скачок напряжений, обозначенный цифрой 3 на рисунке 5.5).

После достижения центра пластины происходит отражение волн с продолжением их движения в противоположных направлениях (без изменения знака напряжения в скачке). Так, отраженные от центра волны достигают точек $\xi = 0{,}3$ и $\xi = 0{,}7$ в момент времени $\mathrm{Fo} = 0{,}7$ (см. скачок 4 на рисунке 5.5 и скачок 2 на рисунке 5.6). Координат $\xi = 0{,}1$ и $\xi = 0{,}9$ отраженные волны достигают в момент времени $\mathrm{Fo} = 0{,}9$ (см. скачок 5 на рисунке 5.5).

После того как отраженные от срединной поверхности волны, двигаясь в обратном направлении, достигают наружных поверхностей пластины знаки напряжений в скачке изменяются на противоположные. Так, например, скачки напряжений в точках $\xi = 0{,}3$ и $\xi = 0{,}7$ вызванные обратными волнами, движущимися от поверхностей $\xi = 0$ и $\xi = 1$, происходят при $\mathrm{Fo} = 1{,}3$ (см. скачок 3 на рисунке 5.6), а скачки напряжений, вызванные отраженными от центра обратными волнами, достигают точек $\xi = 0{,}3$ и $\xi = 0{,}7$ при $\mathrm{Fo} = 1{,}7$ (см. скачок 4 на рисунке 5.6). После достижения отраженными обратными волнами центра пластины вновь происходит их отражение (с удвоением непосредственно в центре) и движение по направлению к наружным поверхностям (без изменения знака напряжений в скачке). При достижении наружных поверхностей скачки напряжений вновь изменяют свой знак и продолжают движение по направлению к центру пластины. Так, например, цифрой 5 на рисунке 5.6 обозначены скачки напряжений в точках $\xi = 0{,}3$ и $\xi = 0{,}7$, вызванные достижением этих точек волнами, отраженными от поверхностей $\xi = 0$ и $\xi = 1$ при $\mathrm{Fo} = 2{,}3$, а цифрой 6 – этими же волнами, отраженными от центра пластины и достигающими точек $\xi = 0{,}3$ и $\xi = 0{,}7$ при $\mathrm{Fo} = 2{,}7$.

Движущиеся таким путем волны, как показывают расчеты, являются незатухающими. Этот факт можно объяснить тем, что уравнение (5.7) не содержит членов, отвечающих затуханию волнового процесса, то есть в данном случае не учитывается сопротивление среды процессу изменения формы тела при изменении температуры. Отсутствие затухания волн, описываемых уравнением (5.7), следует из того факта, что оно не содержит первой производной от искомой функции по времени в произведении с некоторым коэффициентом затухания, характеризующим физические свойства среды (именно такое слагаемое в волновых уравнениях отвечает за затухание волнового процесса). Отсутствие этого слагаемого в уравнении (5.7) приводит к тому, что его решение вида (5.22) не содержит коэффициента затухания.

Исследования решения (5.22) показали, что невязки начальных условий (5.8), (5.9) равны нулю во всей области изменения пространственной координаты ξ. Краевые условия (5.10), (5.11) при любых значениях переменных ξ и Fo выполняются точно благодаря использованию

в решении (5.22) функции $N(\xi)$. Уравнение (5.14) при $m \le 10^5$ и $n \le 100$ решением (5.22) выполняется точно при любых величинах числа Фурье. С увеличением величины m и количества членов ряда (5.22) невязка уравнения (5.14) может отклоняться от нуля. Это связано с устремлением каждого члена уравнения (5.14) (после определения вторых производных по пространственной координате и времени от функций $\sigma(\xi, \mathrm{Fo})$, $\Theta(\xi, \mathrm{Fo})$) к бесконечно большим значениям, что затрудняет расчет его невязки даже при использовании современных средств вычислительной техники.

Полученные результаты позволяют заключить, что динамическая задача термоупругости в условиях теплового удара имеет лишь теоретическое значение: определение напряжений для любых реальных конкретных случаев не представляется возможным ввиду физической невозможности реализации теплового удара. Математическая модель динамической задачи термоупругости с реализацией данного условия приводит к бесконечным значениям напряжений. Эти результаты объясняются тем, что в данной задаче исследуется (математически моделируется) изменение напряжений в зависимости от скорости изменения температуры. Так как при тепловом ударе температура стенки мгновенно принимает температуру греющей среды, то, следовательно, диапазон времени изменения температуры от начального значения до величины, определяемой граничным условием 1-ого рода, отсутствует (равен нулю). Реализация такого условия, являющегося математической идеализацией, приводит к другой идеализации – бесконечно большим напряжениям.

Отметим, что данное заключение не распространяется на другие (отличные от теплового удара) виды теплового нагружения (граничные условия 2-ого и 3-его рода), при которых температура стенки возрастает (убывает) от некоторого начального состояния до температуры греющей среды за конечный отрезок времени. К данной категории задач относятся и задачи теплопроводности при учете конечной скорости переноса теплоты. Их исследование сводится к решению гиперболических уравнений теплопереноса. В частности, выше показано, что в любых конкретных случаях теплообмена условия теплового удара не могут быть реализованы мгновенно ввиду релаксационных свойств материалов. В связи с этим температура поверхности конкретного материала принимает температуру, заданную граничным условием 1-ого рода, с некоторым запаздыванием во времени, независимо от интенсивности теплообмена на этой поверхности. Поэтому величина максимального напряжения в скачке в данном случае всегда будет конечной.

Следует, однако, отметить, что классические точные аналитические решения динамических задач термоупругости при любых краевых условиях температурной задачи, описываемой параболическим уравнением теплопроводности, в любой точке пространства уже в начальное время приводят к температурным напряжениям, связанными с бесконечной

скоростью переноса теплового возмущения. Величина этих напряжений возрастает с увеличением времени, включая и точки, которых еще не достигает волна динамического возмущения. Ни в каких реальных физических процессах эти напряжения не могут возникать ввиду того, что действительная скорость распространения теплоты конечна. Поэтому для ответа на вопрос об адекватности результатов расчетов динамических напряжений для любых граничных условий температурной задачи, описываемой параболическим уравнением теплопроводности, требуются дополнительные исследования.

Для получения затухающих колебаний напряжений необходимо учитывать сопротивление материала температурному изменению его формы, а также его релаксационные свойства, учитывающие конечную скорость переноса потенциалов исследуемых величин не только температурной, но и термоупругой задачи.

5.2 Динамическая термоупругость на основе гиперболического уравнения теплопроводности с релаксацией теплового потока

При решении краевых задач термоупругости в квазистатической постановке напряжения определяются лишь пространственным изменением температуры, то есть в данном случае не учитывается скорость изменения температуры. Однако из результатов исследований, приведенных в ряде работ, следует, что учет динамических эффектов оказывает существенное влияние на распределение напряжений. И, в частности, было показано, что динамические напряжения обусловлены движением частиц тела при его интенсивном тепловом расширении (или сжатии). Для математического описания этого процесса в уравнениях равновесия (движения) должны быть учтены инерционные члены, учитывающие изменение напряжений во времени. Их учет приводит к решениям задач термоупругости, качественно отличающимся от решений соответствующих квазистатических задач. Характерной особенностью динамических напряжений является их волновое распространение со скоростью, равной скорости звука в среде. Причем, на фронте волны наблюдается скачок напряжений, сопровождающийся сменой их знака.

При определении динамических напряжений решение температурной задачи предполагается известным. При этом могут быть применены решения параболического и гиперболического уравнения теплопроводности. Исследования динамических задач термоупругости при использовании точного решения параболического уравнения как для полупространства, так и для тел конечных размеров (пластина, цилиндр), приведены во многих литературных источниках [5, 15, 32 – 34, 52, 53, 65, 99, 100, 103]. Использование аналитических решений гиперболических уравнений (исследование динамических напряжений при учете

конечной скорости переноса теплоты) относится к новому направлению в термомеханике, называемой обобщенной термомеханикой [52, 53, 65, 99, 100].

Различают связанные и несвязанные задачи динамической термоупругости В связанных задачах в уравнении теплопроводности учитывается член механической связи, характеризующий изменение температуры от деформации тела. В несвязанных – этой зависимостью пренебрегается. Ниже будет рассмотрена несвязанная задача динамической термоупругости.

Математическая формулировка задачи для незакрепленной пластины без внешней нагрузки имеет вид:

$$\frac{\partial^2\sigma_x(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\sigma_x(x,t)}{\partial t^2}=\frac{1+\nu}{1-\nu}\rho\alpha_т\frac{\partial^2T(x,t)}{\partial t^2}\qquad (t>0;\qquad 0<x<\delta); \tag{5.23}$$

$$\sigma_x(x,0)=0;\qquad \partial\sigma_x(x,0)/\partial t=0; \tag{5.24}$$

$$\sigma_x(0,t)=0;\qquad \sigma_x(\delta,\,t)=0, \tag{5.25}$$

где $c=\sqrt{E(1-\nu)/\left[(1+\nu)(1-2\nu)\rho\right]}$ – скорость движения волны, δ – толщина пластины, σ_x – нормальное напряжение, x – координата, T – температура, t – время, ν – коэффициент Пуассона; $\alpha_т$ – коэффициент линейного расширения, E – модуль упругости, ρ – плотность.

Распределение температуры $T(x,t)$ в задаче (5.23) – (5.25) полагается известным из задачи теплопроводности. Здесь в качестве $T(x,t)$ было использовано точное аналитическое решение гиперболического уравнения теплопроводности, полученного при учете релаксации теплового потока в формуле закона Фурье [18, 19].

Обозначим:

$$\sigma=\frac{\sigma_x(1-2\nu)}{\alpha_т E(T_{ст}-T_0)};\qquad \mathrm{Fo}=\frac{ct}{\delta};\qquad \xi=\frac{x}{\delta};\qquad \Theta=\frac{T-T_0}{T_{ст}-T_0}, \tag{5.26}$$

где σ − безразмерное напряжение; Fo − число гомохронности ξ − относительная координата; Θ − безразмерная температура; T_0 − начальная температура, *К*; $T_{ст}$ − температура пластины при $x=0$ и $x=\delta$, *К*; E – модуль упругости, *Па*.

Задача (5.23) – (5.25) с учетом (5.26) будет

$$\frac{\partial^2\sigma(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2\sigma(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}\qquad (\mathrm{Fo}>0;\quad 0<\xi<1;\quad 0\le\Theta\le1); \tag{5.27}$$

$$\sigma(\xi,0)=0; \quad (5.28) \qquad \partial\sigma(\xi,0)/\partial\mathrm{Fo}=0; \tag{5.29}$$

$$\sigma(0,\mathrm{Fo})=0; \quad (5.30) \qquad \sigma(1,\mathrm{Fo})=0. \tag{5.31}$$

Математическая формулировка задачи теплопроводности в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial\,\Theta(\xi,\mathrm{Fo_т})}{\partial \mathrm{Fo_т}}+\mathrm{Fo}_r\,\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo_т})}{\partial \mathrm{Fo_т}^2}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo_т})}{\partial\xi^2}\qquad(\mathrm{Fo}>0;\ 0<\xi<1);\tag{5.32}$$

$$\Theta(\xi,0)=0;\qquad \partial\Theta(\xi,0)/\partial\mathrm{Fo_т}=0;\tag{5.33}$$

$$\Theta(0,\mathrm{Fo_т})=0;\qquad \Theta(1,\mathrm{Fo_т})=0,\tag{5.34}$$

где $\mathrm{Fo_т}=at/\delta^2$ − число Фурье; $\mathrm{Fo}_r=a\tau_r/\delta^2$; τ_r − коэффициент релаксации, a − коэффициент температуропроводности.

Точное решение задачи (5.32) – (5.34) будет

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{k=1}^{\infty}\left[C_{1k}\exp(z_{1k}\,\mathrm{Fo_т})+C_{2k}\exp(z_{2k}\,\mathrm{Fo_т})\right]\cos\left[(r\pi/2)(1-2\xi)\right],\tag{5.35}$$

где $z_{ik}=\left(\sqrt{1-\mathrm{Fo}_r\nu_k}\pm1\right)/(2\mathrm{Fo}_r)$ $(i=1,2)$; $\alpha=\sqrt{\nu_k}/2$; $C_{1k}=-(4z_{2k}\sin\alpha)/A$; $C_{2k}=(4z_{1k}\sin\alpha)/A$; $A=2(\sin\alpha\cos\alpha+\sqrt{\nu_k})(z_{1k}-z_{2k})$.

Для того чтобы решения термоупругой и температурной задач были согласованы во времени, из условия $\mathrm{Fo_т}=\mathrm{Fo}$ находим:

$$\mathrm{Fo_т}=a\mathrm{Fo}/(c\delta).\tag{5.36}$$

Следовательно, в решении (5.35) при его подстановке в уравнение (5.27) вместо $\mathrm{Fo_т}$ необходимо использовать соотношение (5.36):

$$\frac{\partial^2\sigma(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\,\xi^2}-\frac{\partial^2\sigma(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}=m^2\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{1k}z_{1k}^2\cdot\mathrm{e}^{z_{1k}m\mathrm{Fo}}+C_{2k}z_{2k}^2\cdot\mathrm{e}^{z_{2k}m\mathrm{Fo}}\right)\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right],\tag{5.37}$$

где $m=a/(c\delta)$; $r=2k-1$ $(k=1,2,\ldots)$.

Решение уравнения (5.37) с краевыми условиями (5.28) – (5.31) по методу Фурье разыскивается в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{k=1}^{\infty}N(\xi)\varphi(\mathrm{Fo}),\tag{5.38}$$

где $N(\xi)=\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]$ $(r=2k-1;\quad k=1,2,\ldots)$..

Подставляя (5.38) в (5.37), находим

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{&r^2\pi^2\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]\varphi(\mathrm{Fo})+\frac{\partial^2\varphi(\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]+\\&+m^2(C_{1k}z_{1k}^2\,\mathrm{e}^{z_{1k}m\mathrm{Fo}}+C_{2k}z_{2k}^2\,\mathrm{e}^{z_{2k}m\mathrm{Fo}})\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]\Bigg\}=0.\end{aligned}\tag{5.39}$$

Разделив каждый член суммы (5.39) на $N(\xi)$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[r^2\pi^2\varphi(\mathrm{Fo})+\frac{\partial^2\varphi(\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}+m^2(C_{1k}z_{1k}^2\,\mathrm{e}^{z_{1k}m\mathrm{Fo}}+C_{2k}z_{2k}^2\,\mathrm{e}^{z_{2k}m\mathrm{Fo}})\right]=0.\tag{5.40}$$

Так как каждый член бесконечной суммы (5.40) представляет обыкновенное дифференциальное уравнение, то для ее выполнения достаточно потребовать для любого из этих уравнений, независимо от величины k, выполнения условия

$$\frac{\partial^2 \varphi(\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} + D\varphi(\mathrm{Fo}) + \eta D\varphi(\mathrm{Fo}) = 0\,, \tag{5.41}$$

где $D = r^2\pi^2$; $\eta(\mathrm{Fo}) = m^2(C_{1k} z_{1k}^2\ \mathrm{e}^{z_{1k} m\mathrm{Fo}} + C_{2k} z_{2k}^2\ \mathrm{e}^{z_{2k} m\mathrm{Fo}})$.

Интегрируя уравнение (5.41), получаем

$$\varphi_k(\mathrm{Fo}) = C_{1nk}\cos(r\pi\mathrm{Fo}) + C_{2nk}\sin(r\pi\mathrm{Fo}) - m^2\left[\frac{C_{1k} z_{1k}^2\left(z_{2k}^2 m^2 + \nu_k\right)\mathrm{e}^{z_{1k} m\mathrm{Fo}}}{(z_{2k}^2 m^2 + \nu_k)(z_{1k}^2 m^2 + \nu_k)} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{2k} z_{2k}^2\left(z_{1k}^2 m^2 + \nu_k\right)\mathrm{e}^{z_{2k} m\mathrm{Fo}}}{(z_{2k}^2 m^2 + \nu_k)(z_{1k}^2 m^2 + \nu_k)}\right], \tag{5.42}$$

где C_{1nk}, C_{2nk} – константы интегрирования.

Формула (5.42) удовлетворяет уравнению (5.41) при любых значениях $r = 2k - 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Подставляя (5.42) в (5.38), получаем

$$\sigma(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty} [C_{1nk}\cos(r\pi\mathrm{Fo}) + C_{2k}\sin(r\pi\mathrm{Fo}) + D_0]\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1 - 2\xi)\right], \tag{5.43}$$

где $D_0 = \eta(\mathrm{Fo})/(D + m^2 r^2)$; $r = 2k - 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Определяя постоянные интегрирования C_{1nk} и C_{2nk} из начальных условий (5.28), (5.29), находим

$$C_{1nk} = m^2\left[\frac{C_{1k} z_{1k}^2\left(z_{2k}^2 m^2 + \nu_k\right) + C_{2k} z_{2k}^2\left(z_{1k}^2 m^2 + \nu_k\right)}{(z_{2k}^2 m^2 + \nu_k)(z_{1k}^2 m^2 + \nu_k)}\right]; \tag{5.44}$$

$$C_{2nk} = m^3\left[\left(m^2 C_{1k} z_{1k}^3 z_{2k}^2 + C_{1k} z_{1k}^3 \nu_k\right)/D_1 + \left(m^2 C_{2k} z_{2k}^3 z_{1k}^2 + C_{2k} z_{2k}^3 \nu_k\right)/D_1\right], \tag{5.45}$$

где $D_1 = \sqrt{\nu_k}\,(z_{2k}^2 m^4 z_{1k}^2 + z_{2k}^2 m^2 \nu_k + \nu_k z_{1k}^2 m^2 + {\nu_k}^2)$.

Подставляя (5.44), (5.45) в (5.43), с учетом обозначений для D и D_1 получаем

$$\sigma(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_{2nk}\sin\left(\sqrt{\nu_k}\,\mathrm{Fo}\right) + C_{1nk}\cos\left(\sqrt{\nu_k}\,\mathrm{Fo}\right) - \right.$$

$$\left. - m^2\left[\frac{C_{1k} z_{1k}^2\left(z_{2k}^2 m^2 + \nu_k\right)\mathrm{e}^{z_{1k} m\mathrm{Fo}}}{(z_{2k}^2 m^2 + \nu_k)(z_{1k}^2 m^2 + \nu_k)} + \frac{C_{2k} z_{2k}^2\left(z_{1k}^2 m^2 + \nu_k\right)\mathrm{e}^{z_{2k} m\mathrm{Fo}}}{(z_{2k}^2 m^2 + \nu_k)(z_{1k}^2 m^2 + \nu_k)}\right]\right\}\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1 - 2\xi)\right]. \tag{5.46}$$

Решение (5.46) удовлетворяет уравнению (5.37) и краевым условиям (5.28) – (5.31).

Распределение безразмерной температуры, найденной по формуле (5.33) для пластины, приведено на рисунках 5.7 – 5.9. На рисунке 5.11 приведены расчеты правой части уравнения

(5.35) (то есть величины $\Theta''(\xi,\mathrm{Fo}) = \partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo}^2$), являющейся источником возникновения динамических температурных напряжений. Из их анализа следует, что для любых ξ в окрестности внешних поверхностей пластины ($\xi\to 0$ и $\xi\to 1$) при $\mathrm{Fo}\to 0$ величина $\Theta''(\xi,\mathrm{Fo})$ с уменьшением числа Fo возрастает (ввиду увеличения количества членов ряда в правой части уравнения (5.35)), оставаясь равной нулю непосредственно в точках $\xi=0$ и $\xi=1$ при любых значениях числа Fo, в том числе и при $\mathrm{Fo}\to 0$.

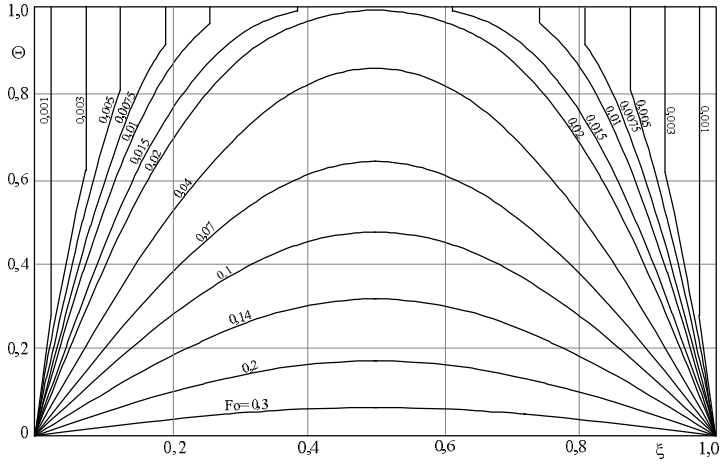


Рисунок 5.7. Изменение температуры: $\mathrm{Fo}_r = 0{,}15\cdot 10^{-2}$; $n = 1000$ (n – число членов решения (5.35))

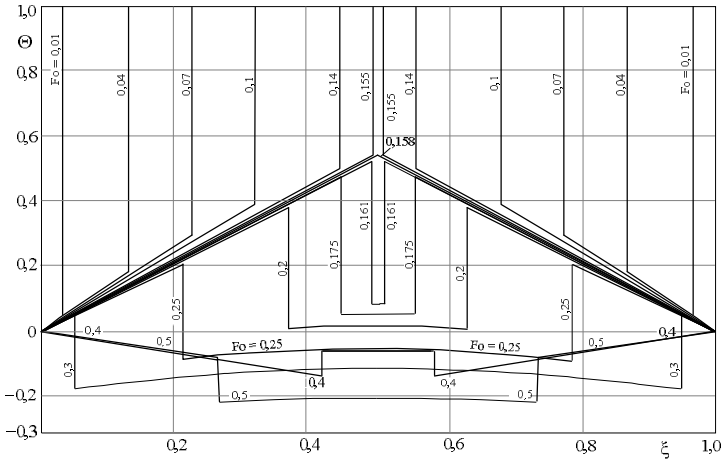


Рисунок 5.8. Изменение температуры: $\mathrm{Fo}_r = 0{,}1$; $n = 10000$ (n – число членов решения (5.35))

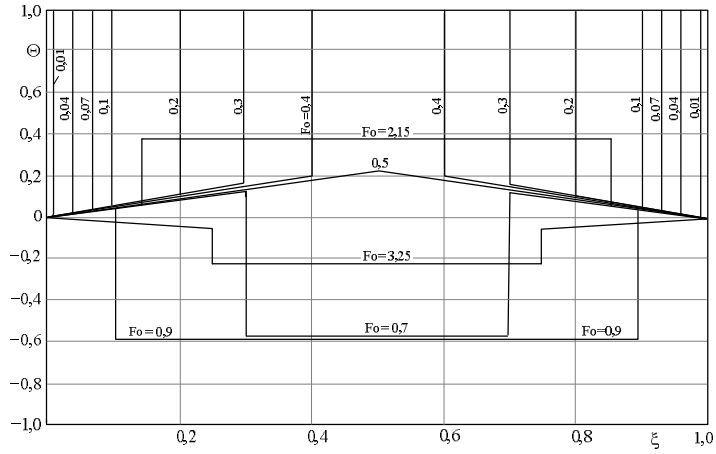


Рисунок 5.9. Изменение температуры: $\mathrm{Fo}_r = 1{,}0$; $n = 10000$ (n – число членов решения (5.35))

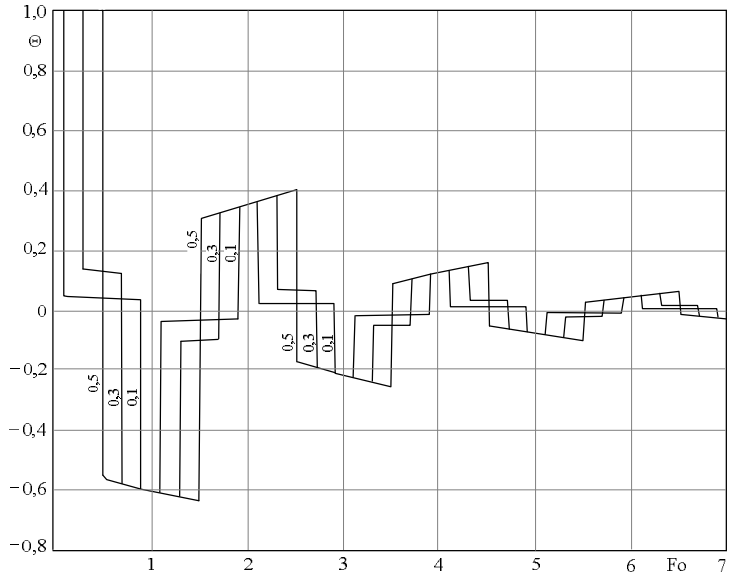


Рисунок 5.10. Изменение напряжений в точках $\xi = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5$ во времени: $\mathrm{Fo}_r = 1$; $n = 10000$ (n – число членов решений (64), (75))

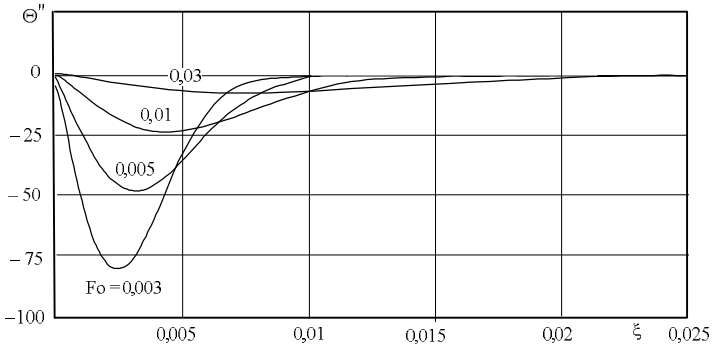


Рисунок 5.11. Изменение второй производной $\Theta''(\xi, \mathrm{Fo}) = \partial^2\Theta(\xi, \mathrm{Fo})/\partial \mathrm{Fo}^2$ по координате ξ для отдельных моментов времени: $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 1000$ (n – число слагаемых ряда (5.36))

Результаты расчетов для значений $\xi = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5$ температурных напряжений по формуле (5.44) даны на рисунке 5.10. Из его анализа следует, что напряжения в этих точках с течением времени изменяются скачкообразно, периодически изменяя знак, то есть имеет место скачкообразно волновой характер изменения напряжений. В момент времени $\mathrm{Fo} = 0{,}1$ в точке $\xi = 0{,}1$ возникает скачок напряжения растяжения. Затем на участке времени $0{,}1 < \mathrm{Fo} < 0{,}9$ происходит незначительное снижение напряжения и в момент времени $\mathrm{Fo} = 0{,}9$ в этой точке

происходит еще один скачок напряжений, по величине равный первоначальному скачку. Второй скачок объясняется тем, что за время $\mathrm{Fo} = 0{,}9$ прямая волна, достигая центра пластины ($\xi = 0{,}5$) и увеличиваясь в два раза по амплитуде колебания (в результате встречи двух волн, движущихся навстречу от внешних стенок пластины $\xi = 0$ и $\xi = 1$), двигаясь в обратном направлении (от центра ($\xi = 0{,}5$) к внешней поверхности ($\xi = 0$)), вновь достигает координаты $\xi = 0{,}1$. На отрезке времени $0{,}9 < \mathrm{Fo} < 1{,}1$ в точке $\xi = 0{,}1$ наблюдается незначительное уменьшение напряжения и в момент времени $\mathrm{Fo} = 1{,}1$ происходит скачкообразное уменьшение напряжения, по абсолютной величине равного увеличению напряжения в прямом скачке. Этот факт свидетельствует о том, что после достижения обратной волной координаты $\xi = 0$, происходит смена знака напряжения в волновом процессе его изменения. На отрезке времени $1{,}1 < \mathrm{Fo} < 1{,}9$ происходит медленное уменьшение напряжения и в момент времени $\mathrm{Fo} = 1{,}9$, то есть, когда прямая волна напряжений противоположного знака достигает центра пластины $\xi = 0{,}5$), вновь наблюдается двукратное увеличение напряжения противоположного знака, что происходит в результате встречи двух прямых волн, движущихся от внешних поверхностей $\xi = 0$ и $\xi = 1$ пластины.

Как следует из решения (5.46), волновой процесс скачкообразного изменения напряжений является незатухающими во времени, что объясняется отсутствием в этом решении коэффициента затухания. В самом деле, волновое уравнение (5.32) не содержит членов, отвечающих затуханию колебаний (а именно, в нем нет первой производной от искомой функции по времени в произведении с некоторым коэффициентом сопротивления среды). В связи с чем, несмотря на равенство нулю источника колебаний (правая часть уравнения (5.32)) при больших значениях времени, колебательный процесс, инициированный в начальное время, является незатухающим, так как в волновом уравнении не учитываются силы внутреннего сопротивления процессу колебаний.

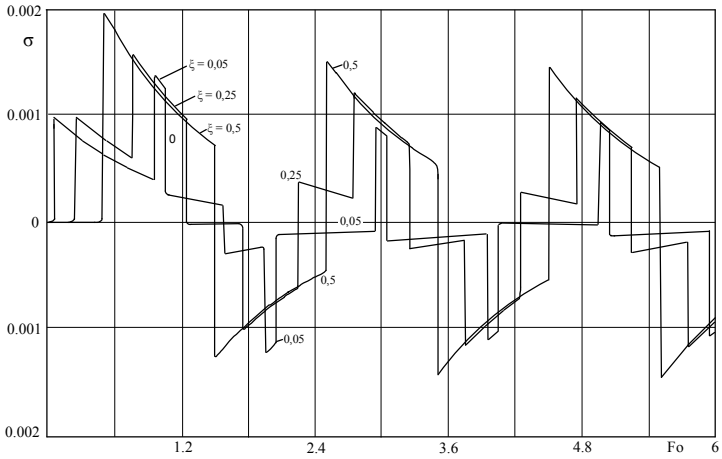


Рисунок 5.12. Изменение напряжений во времени в точках $\xi = 0{,}05$; 0,25; 0,5 (расчет по соотношению (5.46)): $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 1000$ (n – число слагаемых ряда (5.46))

На рисунке 5.13 приведены результаты расчетов температурных напряжений в пластине для значений времени, при которых имеет место квазистационарный режим незатухающих колебаний, наблюдающийся при $\mathrm{Fo} > 5$. Из их анализа следует заключение о наличии симметрии положительных и отрицательных значений напряжений относительно их нулевого значения. На этом рисунке особенно наглядно проявляется форма колебаний в виде закрепленной по концам струны, имеющей перемещающиеся по координате ξ во времени изломы скачкообразного характера.

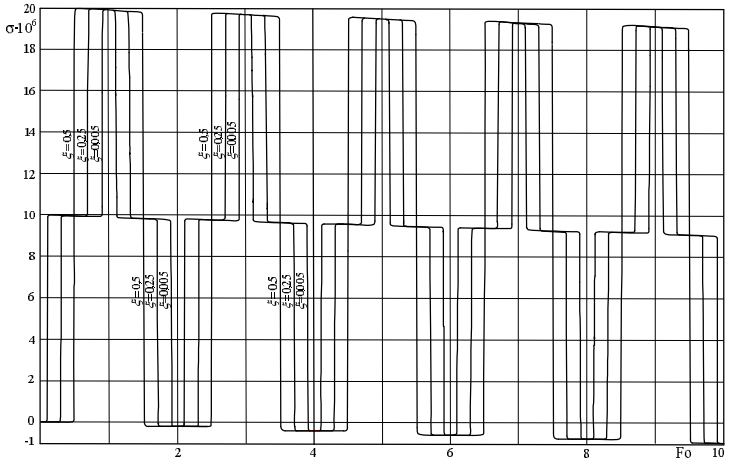


Рисунок 5.13. Изменение напряжений во времени в точках $\xi = 0{,}05;\ 0{,}25;\ 0{,}5$ (расчет по формуле (5.46)): $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 1000$ (n – число слагаемых ряда (5.46))

На рисунке 5.14 приведены расчеты распределения напряжений для различных моментов времени. Из их анализа следует, что по форме колебаний они эквивалентны колебаниям закрепленной с двух сторон струны, имеющей изломы, перемещающиеся по координате ξ во времени. Направление движения периодически изменяется – от внешних поверхностей до центра, где происходит двукратное увеличение амплитуды колебаний, и затем движение в обратном направлении к поверхностям, где происходит уменьшение напряжения до нулевых значений.

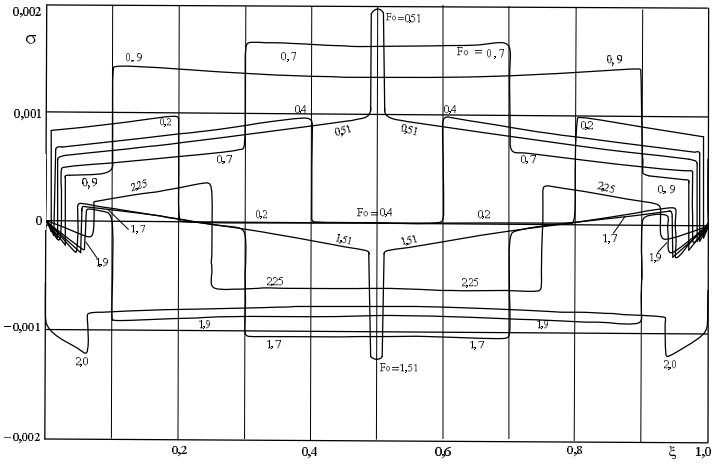


Рисунок 5.14. Изменение напряжений по координате ξ для некоторых значений времени Fo: $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 2000$ (n – число слагаемых ряда (5.46))

5.3 Динамическая термоупругость на основе уравнения теплопроводности с релаксацией теплового потока и скалярной величины градиента температуры

При нахождении решения краевой задачи (5.27) – (5.31) в качестве решения температурной задачи принималось точное решение краевой задачи теплопроводности, дифференциальное уравнение которой получено с учетом релаксационных слагаемых в формуле для теплового потока в законе Фурье. Получим решение краевой задачи (5.27) – (5.31) для случая, когда используется решение гиперболического (волнового) уравнения теплопроводности, полученного с использованием релаксационных слагаемых для теплового потока и скалярной величины градиента температуры в формуле закона Фурье. Решение температурной задачи в этом случае имеет вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{k=1}^{\infty}\left[C_{1k}\exp(z_{1k}\,\mathrm{Fo}_{\mathrm{т}})+C_{2k}\exp(z_{2k}\,\mathrm{Fo}_{\mathrm{т}})\right]\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]; \qquad (5.47)$$

где $z_{1k}=-\nu_k$; $z_{2k}=-1/\mathrm{Fo}_r$; $C_{1k}=-Az_{2k}$; $C_{2k}=Az_{1k}$; $r=2k-1$;

$$A=4B_1/\left[(r\pi+2B_2B_1)(z_{1k}-z_{2k})\right]; \qquad B_1=\sin(r\pi/2); \qquad B_2=\cos(r\pi/2).$$

Для того чтобы решения термоупругой и температурной задач были согласованы во времени, из условия $\mathrm{Fo}_{\mathrm{т}}=\mathrm{Fo}$ находим:

$$\mathrm{Fo}_{\mathrm{т}}=a\mathrm{Fo}/(c\delta). \qquad (5.48)$$

Следовательно, в решении (5.47) при его подстановке в уравнение (5.27) вместо $\mathrm{Fo}_{\mathrm{т}}$ необходимо использовать соотношение (5.48).

Подставляя (5.47) с учетом (5.48) в (5.27), получаем

$$\frac{\partial^2\sigma(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2\sigma(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}=m^2\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_{1k}z_{1k}^2\cdot\mathrm{e}^{z_{1k}m\mathrm{Fo}}+C_{2k}z_{2k}^2\cdot\mathrm{e}^{z_{2k}m\mathrm{Fo}}\right)\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right], \qquad (5.49)$$

где $m=a/(c\delta)$; $r=2k-1$.

Решение уравнения (5.49) с краевыми условиями (5.28) – (5.31) по методу Фурье (разделения переменных) разыскивается в виде

$$\sigma(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{k=1}^{\infty}N(\xi)\varphi(\mathrm{Fo})\ , \qquad (5.50)$$

где $N(\xi)=\cos[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)]$ $\left(r=2k-1;\quad k=1,2,\ldots\right)$.

Подставив (5.50) в (5.49), находим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{r^2\pi^2\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]\varphi(\mathrm{Fo})+\frac{\partial^2\varphi(\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]+\right.$$
$$\left.+m^2\left(C_{1k}z_{1k}^2\mathrm{e}^{z_{1k}m\mathrm{Fo}}+C_{2k}z_{2k}^2\mathrm{e}^{z_{2k}m\mathrm{Fo}}\right)\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]\right\}=0. \qquad (5.51)$$

Разделив каждый член суммы (5.51) на $N(\xi)$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{d^2\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^2}+r^2\pi^2\varphi(\mathrm{Fo})+m^2\left(C_{1k}z_{1k}^2\mathrm{e}^{z_{1k}m\mathrm{Fo}}+C_{2k}z_{2k}^2\mathrm{e}^{z_{2k}m\mathrm{Fo}}\right)\right]=0\,. \qquad (5.52)$$

Так как каждый член бесконечной суммы (5.52) представляет обыкновенное дифференциальное уравнение, то для выполнения (5.52) достаточно потребовать для любого из этих уравнений, независимо от величины k, выполнения соотношения

$$\frac{d^2\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^2}+D\varphi(\mathrm{Fo})+\eta(\mathrm{Fo})=0\,, \qquad (5.53)$$

где $D=r^2\pi^2$; $\eta(\mathrm{Fo})=m^2\left(C_{1k}z_{1k}^2\mathrm{e}^{z_{1k}m\mathrm{Fo}}+C_{2k}z_{2k}^2\mathrm{e}^{z_{2k}m\mathrm{Fo}}\right)$.

Интегрируя уравнение (5.53), получаем

$$\varphi_k(\mathrm{Fo})=C_{1nk}\cos(r\pi\mathrm{Fo})+C_{2nk}\sin(r\pi\mathrm{Fo})-m^2\left[\frac{C_{1k}z_{1k}^2\left(z_{2k}^2m^2+\nu_k\right)\mathrm{e}^{z_{1k}m\mathrm{Fo}}}{(z_{2k}^2m^2+\nu_k)(z_{1k}^2m^2+\nu_k)}+\right.$$
$$\left.+\frac{C_{2k}z_{2k}^2\left(z_{1k}^2m^2+\nu_k\right)\mathrm{e}^{z_{2k}m\mathrm{Fo}}}{(z_{2k}^2m^2+\nu_k)(z_{1k}^2m^2+\nu_k)}\right], \qquad (5.54)$$

где C_{1nk}, C_{2nk} – константы интегрирования.

Формула (5.54) удовлетворяет уравнению (5.53) при любом значении $r=2k-1$ $(k=1,2,\ldots)$.

Подставляя (5.54) в (5.50), получаем

$$\sigma(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{k=1}^{\infty}\left[C_{1nk}\cos(r\pi\mathrm{Fo})+C_{2nk}\sin(r\pi\mathrm{Fo})+D_0\right]\cos\left[(r\frac{\pi}{2})(1-2\xi)\right]\,, \qquad (5.55)$$

где $D_0=\eta(\mathrm{Fo})/(D+m^2r^2)$; $r=2k-1$.

Для нахождения постоянных интегрирования C_{1nk}, C_{2nk} используем начальные условия (5.28), (5.29). Подставляя (5.55) в (5.28), (5.29), получаем

$$C_{1nk}=m^2\left[\frac{C_{1k}z_{1k}^2\left(z_{2k}^2m^2+\nu_k\right)}{(z_{2k}^2m^2+\nu_k)(z_{1k}^2m^2+\nu_k)}+\frac{C_{2k}z_{2k}^2\left(z_{1k}^2m^2+\nu_k\right)}{(z_{2k}^2m^2+\nu_k)(z_{1k}^2m^2+\nu_k)}\right];$$
$$C_{2nk}=m^3\left[\left(m^2C_{1k}z_{1k}^3z_{2k}^2+C_{1k}z_{1k}^3\nu_k\right)/D_1+\left(m^2C_{2k}z_{2k}^3z_{1k}^2+C_{2k}z_{2k}^3\nu_k\right)/D_1\right], \qquad (5.56)$$

где $D_1=\sqrt{\nu_k}\,(z_{2k}^2m^4z_{1k}^2+z_{2k}^2m^2\nu_k+\nu_kz_{1k}^2m^2+\nu_k{}^2)$.

Подставляя (5.56) в (5.55), с учетом обозначений для D и D_1 получаем

$$\sigma(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{C_{2nk}\sin\left(\sqrt{\nu_k}\mathrm{Fo}\right)+C_{1nk}\cos\left(\sqrt{\nu_k}\mathrm{Fo}\right)-m^2\left[\frac{C_{1k}z_{1k}^2\left(z_{2k}^2m^2+\nu_k\right)\mathrm{e}^{z_{1k}m\mathrm{Fo}}}{(z_{2k}^2m^2+\nu_k)(z_{1k}^2m^2+\nu_k)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{C_{2k}z_{2k}^2\left(z_{1k}^2m^2+\nu_k\right)\mathrm{e}^{z_{2k}m\mathrm{Fo}}}{(z_{2k}^2m^2+\nu_k)(z_{1k}^2m^2+\nu_k)}\right]\right\}\cos\left[r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right]. \qquad (5.57)$$

Решение (5.57) удовлетворяет уравнению (5.49) и краевым условиям (5.28) – (5.31).

Для бесконечной пластины распределение безразмерной температуры, найденной по соотношению (5.47), приведено на рисунках 5.15, 5.16. На рисунках 5.17, 5.18 приведены расчеты правой части уравнения (5.49) (то есть величины $\Theta''(\xi,\mathrm{Fo})=\dfrac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}$), являющейся источником возникновения динамических температурных напряжений. Из их анализа следует, что для любых ξ в окрестности внешних поверхностей пластины ($\xi\to 0$ и $\xi\to 1$) при $\mathrm{Fo}\to 0$ величина $\Theta''(\xi,\mathrm{Fo})$ с уменьшением числа Fo возрастает (ввиду увеличения числа слагаемых ряда правой части уравнения (5.49)), оставаясь равной нулю непосредственно в точках $\xi=0$ и $\xi=1$ при любых величинах числа Fo, в том числе и при $\mathrm{Fo}\to 0$. Изменение $\Theta''(\xi,\mathrm{Fo})$ по координате ξ для любых значений числа Fo показано на рисунке 5.17.

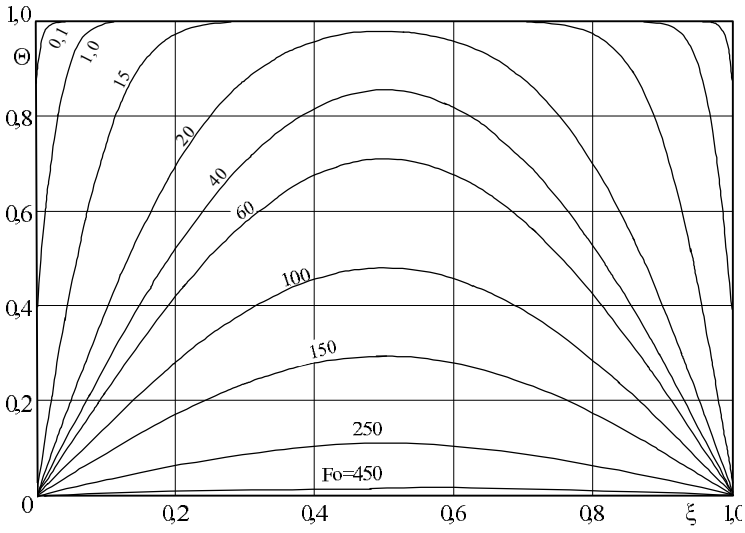


Рисунок 5.15. Изменение температуры (расчет по соотношению (5.47)): $m=0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r=0{,}001$; $n=1000$ (n – число слагаемых ряда (5.47))

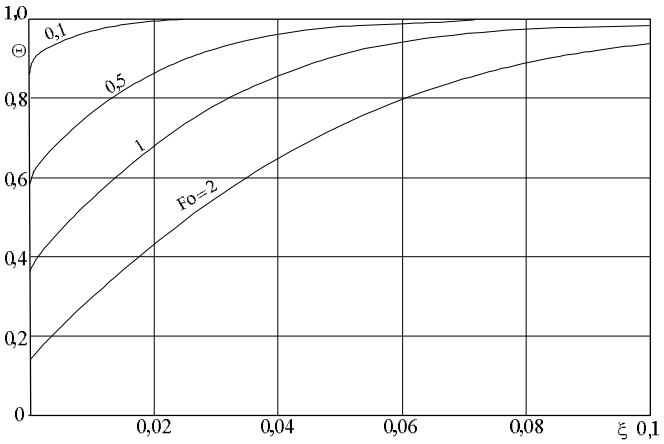


Рисунок 5.16. Распределение температуры при малых величинах числа $\mathrm{Fo}=at/\delta^2$ (расчет по соотношению (5.47)): $m=0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r=0{,}001$; $n=1000$

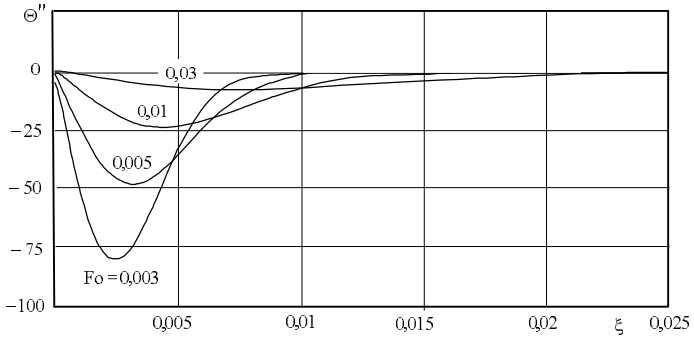


Рисунок 5.17. Изменение второй производной по координате ξ $\Theta''(\xi, \mathrm{Fo}) = {}^{2}\ \Theta(\xi, \mathrm{Fo}) / \partial \mathrm{Fo}^2$ для отдельных моментов времени: $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 1000$

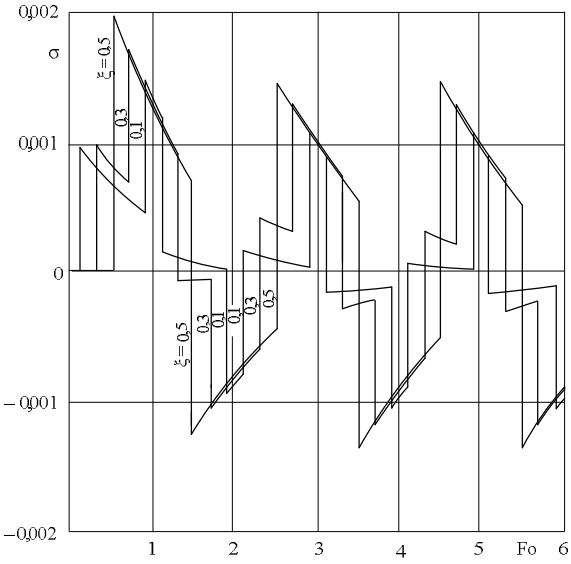


Рисунок 5.18. Изменение напряжений во времени в точках $\xi = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5$ (расчет по формуле (5.57)): $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 1000$ (n – число слагаемых ряда (5.57)

Результаты расчетов температурных напряжений по формуле (5.57) для значений $\xi = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5$ приведены на рисунке 5.18. Из анализа следует, что напряжения в этих точках с течением времени изменяются скачкообразно, периодически изменяя знак, то есть имеет место скачкообразно волновой характер изменения напряжений. В момент времени $\mathrm{Fo} = 0{,}1$ в точке $\xi = 0{,}1$ возникает скачок напряжения растяжения. Затем на участке времени $0{,}1 < \mathrm{Fo} < 0{,}9$ происходит незначительное снижение напряжения и в момент времени $\mathrm{Fo} = 0{,}9$ в этой точке происходит еще один скачок напряжений, по величине равный первоначальному скачку. Второй скачок объясняется тем, что за время $\mathrm{Fo} = 0{,}9$ прямая волна, достигая центра пластины ($\xi = 0{,}5$) и увеличиваясь в два раза по амплитуде колебания (в результате встречи двух волн, движущихся навстречу от внешних стенок пластины $\xi = 0$ и $\xi = 1$), двигаясь в обратном направлении (от центра ($\xi = 0{,}5$) к внешней поверхности ($\xi = 0$)), вновь достигает координаты $\xi = 0{,}1$. На отрезке времени $0{,}9 < \mathrm{Fo} < 1{,}1$ в точке $\xi = 0{,}1$ наблюдается незначительное уменьшение напряжения и в момент времени $\mathrm{Fo} = 1{,}1$ происходит скачкообразное уменьшение напряжения, по абсолютной величине равного увеличению напряжения в прямом скачке. Этот факт свидетельствует о том, что после достижения обратной волной координаты $\xi = 0$, происходит смена знака напряжения в волновом процессе его изменения. На отрезке времени

$1{,}1 < \mathrm{Fo} < 1{,}9$ происходит медленное уменьшение напряжения и в момент времени $\mathrm{Fo} = 1{,}9$ (то есть когда прямая волна напряжений противоположного знака достигает центра пластины $\xi = 0{,}5$), вновь наблюдается двукратное увеличение напряжения противоположного знака, что происходит в результате встречи двух прямых волн, двигающихся от внешних поверхностей $\xi = 0$ и $\xi = 1$ пластины.

Как следует из решения (5.57), волновой процесс скачкообразного изменения напряжений является незатухающим во времени, что объясняется отсутствием в этом решении коэффициента затухания. В самом деле, волновое уравнение (5.27) не содержит членов, отвечающих затуханию колебаний (а именно, в нем нет первой производной от искомой функции по времени в произведении с некоторым коэффициентом сопротивления среды). В связи с чем, несмотря на равенство нулю источника колебаний (правая часть уравнения (5.27)) при больших значениях времени, колебательный процесс, инициированный в начальное время, является незатухающим, так как в волновом уравнении не учитываются силы внутреннего сопротивления процессу колебаний.

На рисунке 5.19 приведены расчеты распределения напряжений для различных моментов времени. Из их анализа следует, что по форме колебаний они эквивалентны колебаниям закрепленной с двух сторон струны, имеющей изломы, перемещающиеся по координате ξ во времени. Направление движения периодически изменяется – от внешних поверхностей до центра, где происходит двукратное увеличение амплитуды колебаний, и затем движение в обратном направлении к поверхностям, где происходит уменьшение напряжения до нулевых значений.

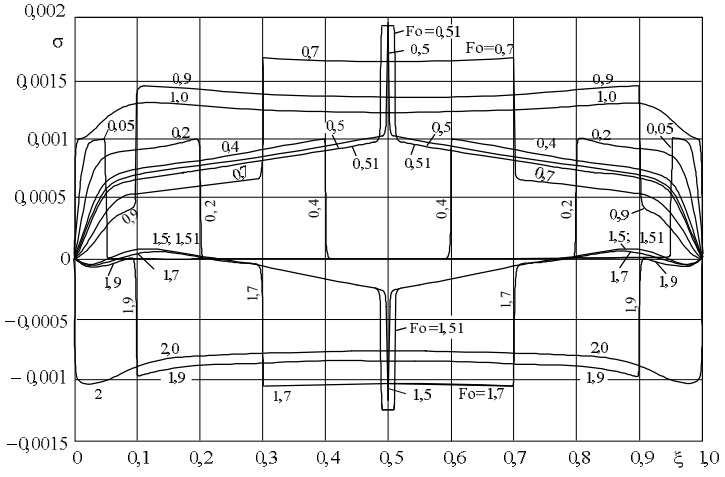


Рисунок 5.19. Распределение напряжений по координате ξ для некоторых значений времени Fo (расчет по формуле (5.57)): $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 1000$ (n – число слагаемых ряда (5.57)

На рисунке 5.20 приведены графики изменения напряжений для малых и сверхмалых значений координаты ξ во времени. Из их анализа следует, что с уменьшением координаты ξ величина напряжений уменьшается вплоть до нуля при $\xi = 0$.

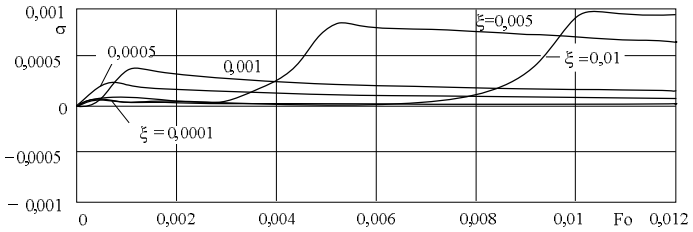


Рисунок 5.20. Изменение напряжений во времени для малых значений координаты ξ: $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 1000$

На рисунке 5.21 приведены результаты расчетов температурных напряжений для значений времени, при которых имеет место квазистационарный режим незатухающих колебаний, наблюдающийся при $\mathrm{Fo} > 5$. Из их анализа можно заключить о наличии симметрии положительных и отрицательных значений напряжений относительно их нулевого значения. На этом рисунке особенно наглядно проявляется форма колебаний в виде закрепленной по концам струны, имеющей перемещающиеся по координате ξ во времени изломы скачкообразного характера.

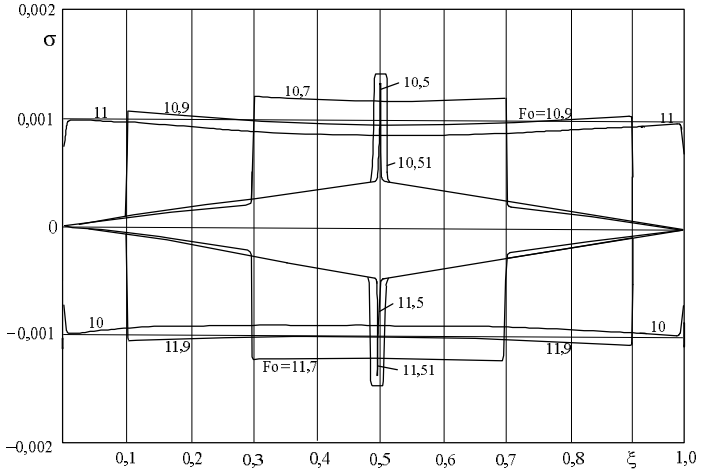


Рисунок 5.21. Изменение напряжений по координате ξ для отдельных моментов времени (расчет по формуле (5.57)): $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 1000$ (n – число слагаемых ряда (5.57)

5.4 Математическая модель локально - неравновесной динамической термоупругости

Температурные напряжения в квазистатических задачах термоупругости определяются лишь пространственным изменением температуры, то есть без учета скорости изменения температуры во времени (без учета динамических напряжений, обусловленных перемещением во времени частиц твердого тела при интенсивном тепловом изменении его формы). Поэтому время в квазистатических задачах является параметром и для любого его значения можно находить температурные напряжения. При больших скоростях изменения температуры температурные напряжения оказываются зависимыми от распределения напряжений в предшествующие моменты времени. Время в данном случае становится независимой переменной, и поэтому в уравнениях термоупругости появляются инерционные члены, учитывающие изменение напряжений во времени. При этом различают связанные и

несвязанные задачи динамической термоупругости. В связанной задаче в уравнении теплопроводности учитывается зависящий от деформации член механической связи. Ниже будут рассмотрены лишь несвязанные задачи, в которых пренебрегается изменением температуры от деформации и учитываются лишь инерционные члены в уравнениях равновесия.

При выводе одномерного уравнения динамической термоупругости для бесконечной пластины используется уравнение движения и соотношение между напряжениями и деформациями

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \ ; \tag{5.58}$$

$$\varepsilon_x = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}\sigma_x + \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha(T - T_0) \ , \tag{5.59}$$

где σ_x – нормальное напряжение; x – координата; T – температура; T_0 – температура в ненапряженном состоянии; t – время; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; α – коэффициент линейного расширения; ρ – плотность; U – перемещение; $\varepsilon_x = \partial U / \partial x$ – деформация.

Дифференцируя уравнение (5.58) по переменной x, с учетом соотношения для $\varepsilon_x = \partial U / \partial x$ получаем

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{5.60}$$

Подставляя (5.59) в (5.60), находим следующее уравнение динамической термоупругости [15, 58]:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \sigma_x(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\rho\alpha\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} \qquad (t > 0;\ 0 < x < \delta), \tag{5.61}$$

где $c^2 = E(1-\nu)/[(1+\nu)(1-2\nu)\rho]$; c – скорость распространения упругой волны; δ – толщина пластины.

Распределение температуры как функции пространственной переменной и времени предполагается известным из решения соответствующей задачи теплопроводности.

Уравнение (5.61) является волновым, описывающим незатухающие колебания температурных напряжений. Отсутствие затухания колебаний связано с тем, что данное уравнение не содержит членов, учитывающих силы внутреннего сопротивления среды процессу изменения ее формы в результате температурных деформаций.

Уравнение (5.61) выведено без учета пространственно - временно́й локальной неравновесности и, следовательно, оно является локальным. Это связано с тем, что

классическая теория процессов переноса базируется на принципе локального термодинамического равновесия и гипотезе сплошной среды [105 – 107]. Согласно указанному принципу в каждом малом элементе тела наблюдается состояние локального равновесия, несмотря на наличие в системе в целом градиентов полей потенциалов (температур, скоростей, напряжений, перемещений, концентраций и т. д.). Такое состояние может установиться в случае, когда скорость изменения макропараметров системы, вызванная граничными условиями (скорость нарушения равновесия), намного меньше скорости установления локального равновесия (скорости релаксации системы к локальному равновесию). Согласно гипотезе сплошности отвлекаются от дискретности среды (от молекулярно - атомного строения), считая ее непрерывной.

Принимая принцип локального равновесия и гипотезу сплошной среды, можно полагать, что законы переноса справедливы как для всей системы в целом, так и для любой сколь угодно малой ее части. Для таких систем в интегральных законах сохранения путем приближения к нулю пределов интегрирования можно выполнять предельный переход и получать дифференциальные уравнения в частных производных, представляющих математическую запись законов сохранения в дифференциальной форме. Таким путем выводятся уравнения переноса теплоты, массы, импульса и др., являющиеся локальными по временно́й и пространственной переменным. Следует, однако, заметить, что любой процесс переноса является нелокальным, так как перенос энергии (массы, импульса и проч.) из одной точки среды в другую происходит не мгновенно, а за вполне конечный промежуток времени. Следовательно, принимая принцип локального термодинамического равновесия, конечной скоростью процесса переноса пренебрегается.

При выводе уравнений колебаний пружины, стержней, мембран, струн и т. д. используются второй закон Ньютона и закон Гука. По закону Гука напряжение пропорционально деформации $\varepsilon=\partial U/\partial x$, т. е.

$$\sigma_x = E\partial U / \partial x . \tag{5.62}$$

Уравнение второго закона Ньютона имеет вид

$$F = ma = m\frac{d\upsilon}{dt} = m\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \rho S\Delta x\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{5.63}$$

где F – сила, m – масса, $a = \partial\upsilon/\partial t$ – ускорение, $\upsilon = \partial U/\partial t$ – скорость, ρ – плотность, S – площадь поперечного сечения, Δx – длина элементарного участка.

Сила, действующая на элементарном участке (x+Δx), равна произведению площади сечения на разность нормальных напряжений в сечениях:

$$F = S(\sigma_{x+\Delta x} - \sigma_x) = S\Delta x\partial\sigma/\partial x. \tag{5.64}$$

Подставляя (5.64) в (5.63), получаем уравнение движения вида (5.58). Это уравнение, а также полученное на его основе уравнение (5.61), выведены без учета пространственно - временно́й нелокальности и, следовательно, в них оказывается заложенной бесконечная скорость распространения потенциалов исследуемых полей. Бесконечная скорость оказывается заложенной в используемом для вывода уравнения (5.61) законе Гука (5.62) ввиду отсутствия в нем причинно - следственной связи явлений. Причиной (движущей силой) здесь является деформация ε, а следствием – напряжение σ. Отсутствие в этой формуле временно́й переменной свидетельствует, что причина и следствие здесь не разделены во времени. В связи с чем, в ней оказывается заложенной бесконечная скорость распространения напряжения, то есть следствие с изменением причины наступает мгновенно (скачкообразно). Однако скорости распространения потенциалов любых физических полей не могут принимать бесконечных значений, также как напряжения и деформации не могут мгновенно принимать какие-либо конкретные величины. В реальных телах их изменение происходит с запаздыванием по времени, учитываемым коэффициентами релаксации. Для их учета классическую формулу закона Гука представим в виде (3.10), ограничиваясь двумя первыми членами в правой и левой частях соотношения (3.10), получаем соотношение (3.11).

Формула (3.11) представляет соотношение, в котором релаксируются как напряжение σ, так и деформация ε и, следовательно, в ней учитывается пространственно - временна́я нелокальность. Из (3.11) следует, что напряжение и перемещение не могут изменяться мгновенно, а лишь с некоторым запаздыванием (ускорением) во времени, оцениваемым коэффициентами релаксации τ_1 и τ_2. Следовательно, эта формула представляет выражение полного закона сохранения, в котором пространственно - временно́е изменение напряжений и деформаций взаимосогласовано, что наиболее адекватно протеканию реальных физических процессов. В частном случае, когда скорости изменения напряжений и деформаций во времени одинаковы, т. е. $\tau_1 = \tau_2$.

Для учета сопротивления среды процессу изменения ее формы в уравнение движения (5.58) введем силу сопротивления $F_c = -\beta \partial U / \partial t$, где «минус» означает, что направление, силы сопротивления противоположно скорости изменения перемещения; β – коэффициент сопротивления. С учетом силы F_c уравнение (5.58) будет

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\beta}{V}\frac{\partial U}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{5.65}$$

где V – объем.

Подставляя (3.10) в (5.65), получаем

$$E\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + E\tau_2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t} - \tau_1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right) - \frac{\beta}{V}\frac{\partial U}{\partial t} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \ . \tag{5.66}$$

Продифференцируем формулу (5.62) по переменной x

$$\partial\sigma_x/\partial x = E\partial^2 U/\partial x^2 \ . \tag{5.67}$$

Подставляя (5.67) в (5.66), находим

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \tau_2\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x\partial t} - E\tau_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) - \frac{\beta}{V}\frac{\partial U}{\partial t} - \rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{5.68}$$

Дифференцируя уравнение (5.68) по x и, учитывая, что $\varepsilon = \partial U/\partial x$, получаем

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + \tau_2\frac{\partial^3\sigma_x}{\partial x^2\partial t} - E\tau_1\frac{\partial^3\varepsilon}{\partial x^2\partial t} - \frac{\beta}{V}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \rho\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{5.69}$$

Подставляя (5.59) в (5.69), получаем

$$\frac{\partial^2\sigma_x(x,t)}{\partial x^2} + (\tau_2 - E\tau_1 A)\frac{\partial^3\sigma_x(x,t)}{\partial x^2\partial t} - \frac{\beta A}{V}\frac{\partial\sigma_x(x,t)}{\partial t} - \rho A\frac{\partial^2\sigma_x(x,t)}{\partial t^2} =$$

$$= E\tau_1 B\frac{\partial^3 T(x,t)}{\partial x^2\partial t} + \frac{\beta B}{V}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \rho B\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} \ , \tag{5.70}$$

где $A = \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E}$; $B = \dfrac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha$.

При $\tau_1 = \tau_2 = \beta = 0$ уравнение (5.70) приводится к уравнению (5.61).

В уравнении динамической термоупругости (5.70) учитывается пространственно - временна́я нелокальность и сопротивление среды процессу изменения ее формы. Начальные и граничные условия при отсутствии внешней механической нагрузки для бесконечной пластины будут

$$\sigma_x(x,0) = 0\,; \tag{5.71}$$

$$\partial\sigma_x(x,0)/\partial t = 0\,; \tag{5.72}$$

$$\sigma_x(0,t) = 0\,; \tag{5.73}$$

$$\sigma_x(\delta,t) = 0\,, \tag{5.74}$$

где δ – толщина пластины.

Обозначим:

$$\Theta = \frac{T - T_{\text{ст}}}{\Delta T};\quad \xi = \frac{x}{2\delta};\quad \text{Fo} = \frac{c\,t}{2\delta};\quad \Delta T = T_0 - T_{\text{ст}};\quad \sigma = \frac{\sigma_x(1-2\nu)}{E\alpha\Delta T}, \tag{5.75}$$

где σ − безразмерное напряжение; Θ – безразмерная температура; ξ – безразмерная координата; Fo – число Фурье термоупругой задачи; T_0 – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки; E – модуль упругости.

С учетом принятых обозначений задача (5.70) – (5.74) принимает вид

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi^2} + \text{Fo}_1\frac{\partial^3\sigma(\xi,\text{Fo})}{\partial\xi^2\partial\text{Fo}} - \frac{\partial^2\sigma(\xi,\text{Fo})}{\partial\text{Fo}^2} - \text{Fo}_3\frac{\partial\sigma(\xi,\text{Fo})}{\partial\text{Fo}} =$$

$$= \mathrm{Fo}_2 \frac{\partial^3 \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^2 \partial \mathrm{Fo}} + \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}^2} + \mathrm{Fo}_3 \frac{\partial \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} \qquad (\mathrm{Fo} > 0; \quad 0 < \xi < 1; \quad 0 \le \Theta \le 1); \qquad (5.76)$$

$$\sigma(\xi, 0) = 0; \qquad (5.77)$$

$$\frac{\partial \sigma(\xi, 0)}{\partial \mathrm{Fo}} = 0; \qquad (5.78)$$

$$\sigma(0, \mathrm{Fo}) = 0; \qquad (5.79)$$

$$\sigma(1, \mathrm{Fo}) = 0, \qquad (5.80)$$

где $\mathrm{Fo}_1 = \frac{c}{2\delta}\left[\tau_2 - \frac{\tau_1 E}{c^2 \rho}\right]$, $\mathrm{Fo}_2 = \frac{0.5\tau_1 E}{\delta c \rho}$, $\mathrm{Fo}_3 = \frac{2\beta\delta \mathrm{Ac}}{\mathrm{V}}$ – безразмерные параметры.

Очевидно, что при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = \mathrm{Fo}_3 = 0$ задача (5.76) – (5.80) приводится к задаче динамической термоупругости без учета пространственно - временно́й нелокальности и сопротивления среды.

Математическая постановка задачи теплопроводности в случае, когда релаксируется тепловой поток и градиент температуры в формуле закона Фурье, имеет вид [25, 26]

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \mathrm{Fo}_т)}{\partial \mathrm{Fo}_т} + \mathrm{Fo}_r \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo}_т)}{\partial \mathrm{Fo}_т^{\,2}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo}_т)}{\partial \xi^2} + \mathrm{Fo}_r \frac{\partial^3 \Theta(\xi, \mathrm{Fo}_т)}{\partial \xi^2 \partial \mathrm{Fo}_т} \quad (\mathrm{Fo}_т > 0; \ 0 < \xi < 1); \qquad (5.81)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \qquad \partial \Theta(\xi, 0) / \partial \mathrm{Fo}_т = 0; \qquad \Theta(0, \mathrm{Fo}_т) = 0; \qquad \Theta(1, \mathrm{Fo}_т) = 0, \qquad (5.82)$$

где $\mathrm{Fo}_т = at/\delta^2$ – число Фурье температурной задачи; $\mathrm{Fo}_r = a\tau_r / \delta^2 = \mathrm{const}$; $\tau_r = \tau_1 = \tau_2$ – коэффициенты релаксации, при этом τ_1, τ_2, – коэффициенты релаксации теплового потока и скалярной величины градиента температуры; a – коэффициент температуропроводности, *м²/с.*

В работах [69, 73] приводится точное аналитическое решение задачи (5.81) – (5.82), имеющее вид

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}_т) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[C_{1k} \exp(z_{1k} \mathrm{Fo}_т) + C_{2k} \exp(z_{2k} \mathrm{Fo}_т)\right] \cos\left[(r\pi/2)(1 - 2\xi)\right], \qquad (5.83)$$

где $z_{1k} = -\mu_k$; $z_{2k} = -1/\mathrm{Fo}_r$; $C_{1k} = -A_1 z_{2k}$; $C_{2k} = A_1 z_{1k}$; $r = 2k - 1 \quad (k = 1, 2, \ldots)$;

$$A_1 = 4B\left[(r\pi + 2B_1 B_2)(z_{1k} - z_{2k})\right]; \qquad B_1 = \sin(r\pi/2); \qquad B_2 = \cos(r\pi/2).$$

Для того чтобы решения термоупругой и температурной задач были согласованы во времени, из условия $\mathrm{Fo}_т = \mathrm{Fo}$ находим:

$$\mathrm{Fo}_т = 2a\mathrm{Fo}/(c\delta). \qquad (5.84)$$

Следовательно, в решении (5.83) при его подстановке в уравнение (5.76) вместо $\mathrm{Fo}_т$ необходимо использовать соотношение (5.84).

Подставляя (5.83) (с учетом (5.84)) в (5.76), получаем

$$\frac{\partial^2\sigma(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}+\mathrm{Fo}_1\frac{\partial^3\sigma(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2\partial\mathrm{Fo}}-\frac{\partial^2\sigma(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}^2}-\mathrm{Fo}_3\frac{\partial\sigma(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=$$

$$=-m^2\sum_{k=1}^{\infty}(H_1\mathrm{e}^{z_{1k}m\mathrm{Fo}}+H_2\mathrm{e}^{z_{2k}m\mathrm{Fo}})\cos(r\pi(1-2\xi)/2)\ , \qquad (5.85)$$

где $m=2a/(c\delta)$; $H_1=C_{1k}z_{1k}(z_{1k}+\mathrm{Fo}_3-\mathrm{Fo}_2\mu_k)$; $H_2=C_{2k}z_{2k}(z_{2k}+\mathrm{Fo}_3-\mathrm{Fo}_2\mu_k)$; $r=2k-1$; $\mu_k=r^2\pi^2$.

Решение уравнения (5.85) с начальными и граничными условиями (5.77) – (5.80) принимается в виде

$$\sigma(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{k=1}^{\infty}N(\xi)\varphi(\mathrm{Fo})\,, \qquad (5.86)$$

где $N(\xi)=\cos(r\pi(1-2\xi)/2)$; $r=2k-1$.

Подставляя (5.86) в (5.85), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\mu_kN(\xi)\varphi(\mathrm{Fo})+\mathrm{Fo}_1\mu_kN(\xi)\frac{d\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}}-N(\xi)\frac{d^2\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^2}-$$

$$-\mathrm{Fo}_3N(\xi)\frac{d\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}}+m^2(H_1\mathrm{e}^{z_{1k}m\mathrm{Fo}}+H_2\mathrm{e}^{z_{2k}m\mathrm{Fo}})\cos(r\pi(1-2\xi)/2)\Big]=0. \qquad (5.87)$$

Разделив каждый член суммы (5.87) на $N(\xi)$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{d^2\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^2}+(\mathrm{Fo}_1\mu_k-\mathrm{Fo}_3)\frac{d\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}}-$$

$$-\mu_k\varphi(\mathrm{Fo})-m^2(H_1\mathrm{e}^{z_{1k}m\mathrm{Fo}}+H_2\mathrm{e}^{z_{2k}m\mathrm{Fo}})\Big]=0\ . \qquad (5.88)$$

Так как каждый член бесконечной суммы (5.88) представляет обыкновенное дифференциальное уравнение, то для выполнения (5.88) достаточно потребовать для любого из этих уравнений, независимо от величины k, выполнения условия

$$\frac{d^2\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^2}+(\mathrm{Fo}_1\mu_k-\mathrm{Fo}_3)\frac{d\varphi(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}}-\mu_k\varphi(\mathrm{Fo})-m^2(H_1\mathrm{e}^{z_{1k}m\mathrm{Fo}}+H_2\mathrm{e}^{z_{2k}m\mathrm{Fo}})=0\ . \qquad (5.89)$$

Интегрируя уравнение (5.89), получаем

$$\varphi_k(\mathrm{Fo})=C_{1nk}\exp(-0{,}5(\mathrm{Fo}_4+\sqrt{\mathrm{Fo}_4^2-4\mu_k})\mathrm{Fo})+C_{2nk}\exp(-0{,}5(\mathrm{Fo}_4-$$

$$-\sqrt{\mathrm{Fo}_4^2-4\mu_k})\mathrm{Fo})-[A_2H_3\exp(z_{1k}m\mathrm{Fo})+B_3H_4\exp(z_{2k}m\mathrm{Fo})]/(H_3H_4)\ , \qquad (5.90)$$

где $A_2=-mC_{1k}z_{1k}(\mathrm{Fo}_2\mu_k-mz_{1k}-\mathrm{Fo}_3)$; $B_3=-mC_{2k}z_{2k}(\mathrm{Fo}_2\mu_k-mz_{2k}-\mathrm{Fo}_3)$;

$H_3=m\mathrm{Fo}_4z_{2k}+\mu_k+m^2z_{2k}^2$; $H_4=m\mathrm{Fo}_4z_{1k}+\mu_k+m^2z_{1k}^2$; $\mathrm{Fo}_4=\mu_k\mathrm{Fo}_1\mathrm{Fo}_2$; C_{1nk}, C_{2nk} $(k=1,2,\ldots)$ – константы, которые находятся из начальных условий (5.77), (5.78).

Подставляя (5.90) в (5.77), (5.78), будем иметь

$$C_{1nk} = -0{,}5\left[mR_3R_6 + mR_4(B_3z_{1k}^2 + B_3z_{2k}^2) + 2z_{1k}z_{2k}\mathrm{Fo}_4m^2R_2 + 2\mu_k mR_5 + \mu_k R_2R_4\right]/D; \qquad (5.91)$$

$$C_{2nk} = 0{,}5\left[2m\mu_k R_5 + R_1(m^2(A_2z_{1k} + B_3z_{2k}) + \mathrm{Fo}_4R_3 + \mu_k R_2) + 2z_{1k}z_{2k}m^2(\mathrm{Fo}_4R_2 + R_3)\right]/D, \qquad (5.92)$$

где $R_1 = \mathrm{Fo}_4 + \mathrm{Fo}_5$; $R_2 = A_2 + B_3$; $R_3 = m(A_2z_{2k} + B_3z_{1k})$; $R_4 = \mathrm{Fo}_4 - \mathrm{Fo}_5$; $R_5 = B_2z_{2k} + A_2z_{1k}$;

$$R_6 = 2z_{1k}z_{2k}m^2 + \mathrm{Fo}_4(1 - \mathrm{Fo}_5);\ \mathrm{Fo}_5 = (\mathrm{Fo}_4^2 - 4\mu_k)^{1/2};$$

$$D = \mathrm{Fo}_5\left[\mathrm{Fo}_4^2m^2z_{1k}z_{2k} + \mathrm{Fo}_4m(z_{1k} + z_{2k})(\mu_k m^2z_{1k}^2 + z_{2k}^2) + \mu_k m^2(z_{1k}^2 + z_{2k}^2) + z_{1k}^2z_{2k}^2m^4 + \mu_k^2\right].$$

Подставляя (5.90) в (5.86), находим

$$\sigma(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[(\mathrm{C}_{1nk}\mathrm{e}^{-\nu_{1k}\mathrm{Fo}} + \mathrm{C}_{2nk}\mathrm{e}^{-\nu_{2k}\mathrm{Fo}}) - \right.$$

$$\left.(A_2H_3\mathrm{e}^{z_{1k}m\mathrm{Fo}} + B_2H_4\mathrm{e}^{z_{2k}m\mathrm{Fo}})/(H_3H_4)\right]\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1 - 2\xi)\right), \qquad (5.93)$$

где $\nu_{1k}, \nu_{2k} = 0{,}5(\mathrm{Fo}_4 \pm \sqrt{\mathrm{Fo}_4^2 - 4\mu_k})$.

Соотношение (5.93) представляет точное решение задачи (5.76) – (5.80) (оно точно удовлетворяет всем условиям задачи (5.76) – (5.80), в чем можно убедиться с помощью подстановки).

Графики распределения безразмерной температуры, найденной на основании соотношения (5.83), даны на рисунках 5.22, 5.23.

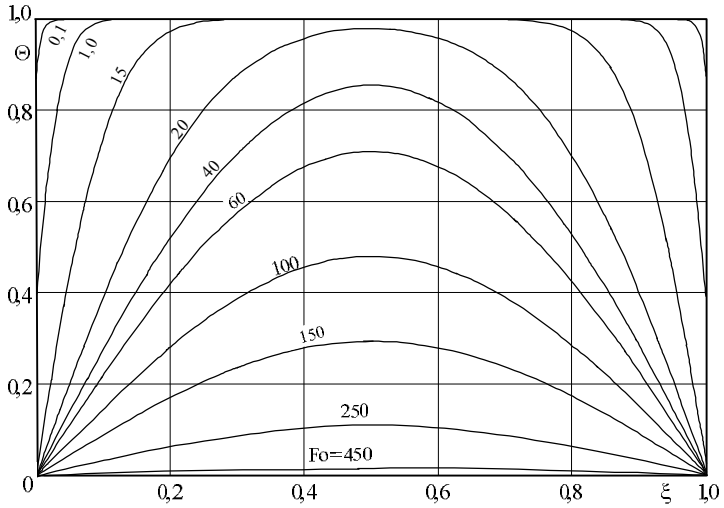


Рисунок 5.22. Распределение температуры в пластине (расчет по формуле (5.83)): $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 1000$ (n – число членов ряда (5.87))

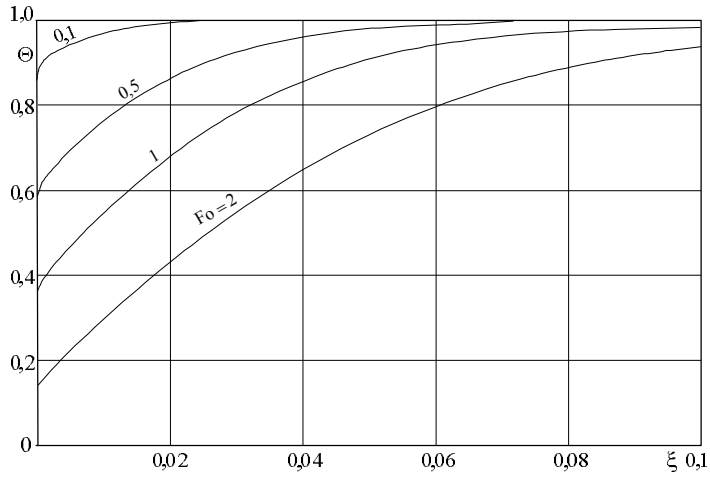


Рисунок 5.23. Распределение температуры по формуле (5.83)): $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 10000$

Результаты расчетов температурных напряжений по формуле (5.93) даны на рисунках 5.24 – 5.29. И, в частности, на рисунке 5.24 даны результаты расчетов при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = \mathrm{Fo}_3 = 0$ для значений $\xi = 0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5$. Их анализ позволяет заключить, что напряжения в этих точках с течением времени изменяются скачкообразно, периодически изменяя знак. В момент времени $\mathrm{Fo} = 0{,}1$ в точке $\xi = 0{,}1$ возникает скачок напряжения растяжения. Затем на участке времени $0{,}1 < \mathrm{Fo} < 0{,}9$ происходит снижение напряжения, и в момент времени $\mathrm{Fo} = 0{,}9$ в этой точке происходит еще один скачок напряжения, по величине равный первоначальному. Этот скачок объясняется тем, что за время $\mathrm{Fo} = 0{,}9$ прямая волна, достигая центра пластины ($\xi = 0{,}5$) и увеличиваясь в два раза по амплитуде колебания (в результате встречи двух волн, движущихся навстречу друг другу), двигаясь в обратном направлении вновь достигает координаты $\xi = 0{,}1$. В момент времени $\mathrm{Fo} = 1{,}1$ происходит скачкообразное уменьшение напряжения в этой точке. Этот факт свидетельствует о том, что после достижения обратной волной координаты $\xi = 0$ происходит смена знака напряжения. В момент времени $\mathrm{Fo} = 1{,}9$, то есть когда прямая волна напряжений достигает центра пластины, вновь наблюдается двукратное увеличение напряжения противоположного знака.

Волновой процесс изменения напряжений при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = \mathrm{Fo}_3 = 0$ является незатухающим во времени, что объясняется отсутствием в уравнении (5.76) членов, отвечающих затуханию колебаний (а именно, в нем нет первой производной от искомой функции по времени в произведении с некоторым коэффициентом сопротивления среды). Отметим, что при $\mathrm{Fo}_3 \neq 0$ в уравнении (5.76) появляется слагаемое (четвертый член в левой части), которое учитывает силы внутреннего трения и, как будет показано ниже, приводит к затуханию процесса колебаний.

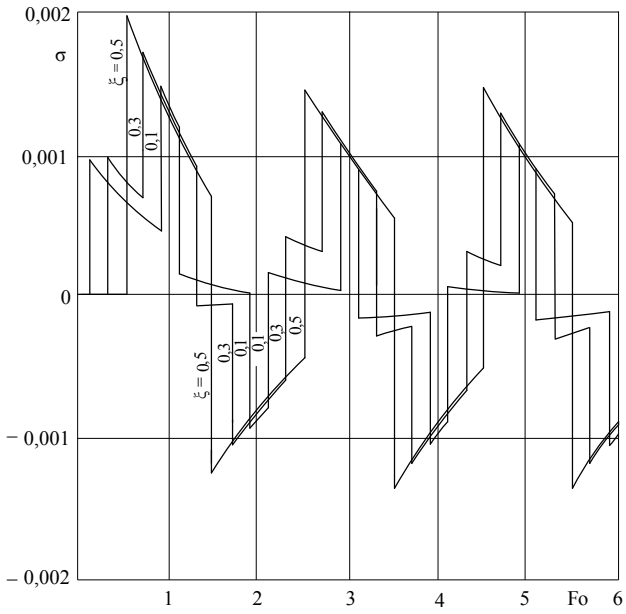


Рисунок 5.24. Распределение напряжений в пластине (расчет по формуле (5.93)): $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = \mathrm{Fo}_3 = 0$; $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 1000$ (n – число членов ряда (5.97))

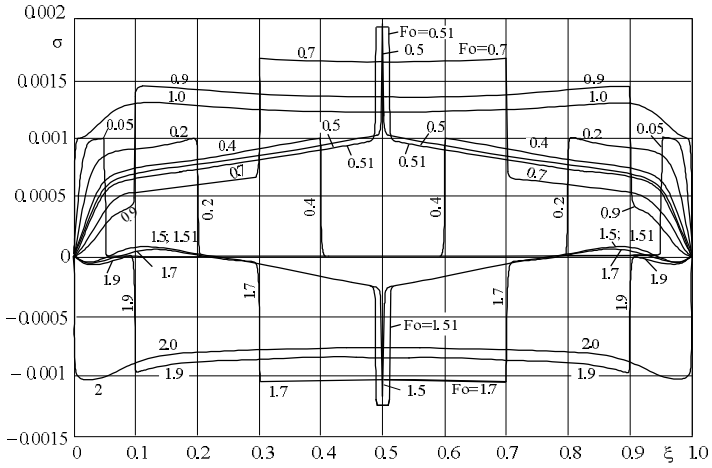


Рисунок 5.25. Распределение напряжений в пластине: $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = \mathrm{Fo}_3 = 0$; $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 1000$

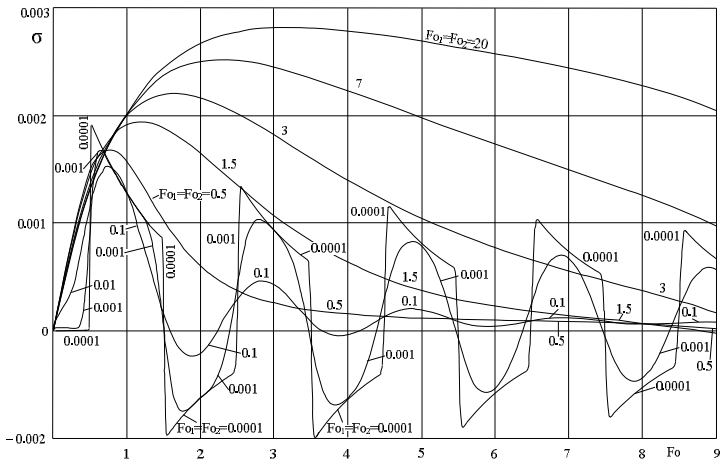


Рисунок 5.26. Распределение напряжений в точке $\xi = 0{,}5$ при различных значениях $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2$ и при $\mathrm{Fo}_3 = 0{,}1$: $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 100$

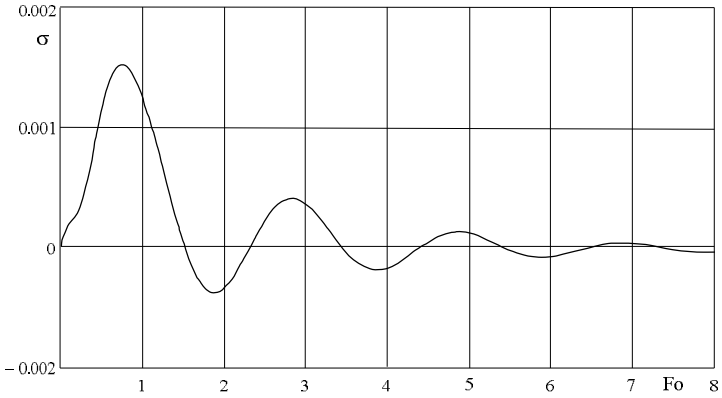


Рисунок 5.27. Распределение напряжений в центре пластины ($\xi = 0.5$) во времени: $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}1$; $\mathrm{Fo}_3 = 0$; $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 100$

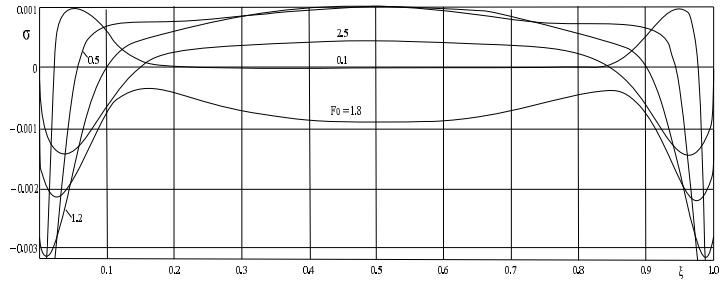


Рисунок 5.28. Распределение напряжений в пластине: $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = \mathrm{Fo}_3 = 0{,}01$; $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 1000$

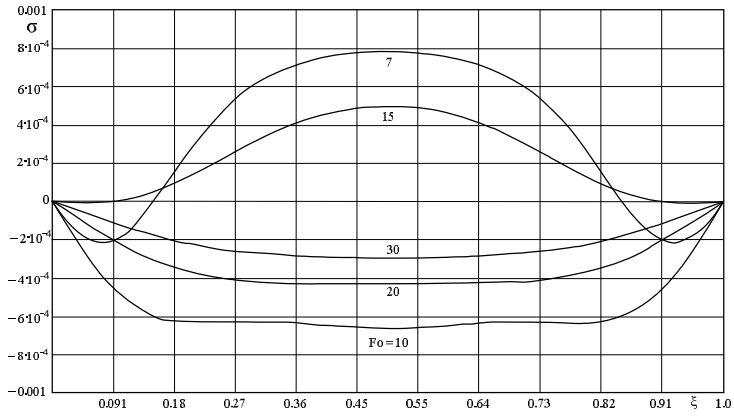


Рисунок 5.29 Распределение напряжений в пластине: $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = \mathrm{Fo}_3 = 0{,}01$; $m = 0{,}001$; $\mathrm{Fo}_r = 0{,}001$; $n = 100$

На рисунке 5.25 приведены результаты расчетов распределения напряжений при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = \mathrm{Fo}_3 = 0$ по координате ξ для различных моментов времени. Их анализ позволяет заключить, что изменение напряжений по форме эквивалентно колебаниям закрепленной с двух сторон струны, имеющей изломы (в виде прямоугольных скачков напряжений), перемещающиеся по координате ξ во времени. Отметим, что результаты расчетов, приведенные на рисунках 5.24, 5.25, совпадают с результатами, полученными в работе [103].

Результаты расчетов напряжений в точке $\xi = 0.5$ для разных значений $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2$ и при $\mathrm{Fo}_3 = 0.1$ даны на рисунке 5.26. Их анализ позволяет сделать вывод, что процесс колебаний является затухающим во времени. При увеличении значений $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2$ (при неизменном $\mathrm{Fo}_3 = 0{,}1$) скачки напряжений сглаживаются и при каких-то больших их значениях возникающие от теплового удара напряжения монотонно уменьшаются до нулевого значения

при практическом отсутствии колебательного процесса. На рисунке 5.27 дано изменение напряжений в центре пластины ($\xi = 0{,}5$) при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0{,}1$ и $\mathrm{Fo}_3 = 0$, из которого следует, что процесс затухания колебаний обусловлен не только величиной коэффициента сопротивления Fo_3, но и значениями коэффициентов релаксации Fo_1 и Fo_2.

На рисунках 5.28, 5.29 приведены расчеты напряжений по координате ξ для малых ($0{,}5 \le \mathrm{Fo} \le 1{,}8$, рисунок 5.28) и для больших ($7 \le \mathrm{Fo} \le 30$, рисунок 5.29) значений безразмерного времени. Их анализ позволяет заключить, что при больших значениях числа Fo колебания напряжений по форме аналогичны колебаниям закрепленной на концах струны.

Выводы

Выполненные исследования для пластины позволяют заключить, что при $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = \mathrm{Fo}_3 = 0$ изменение напряжений, найденных по формуле (5.97), представляет незатухающий во времени колебательный процесс, происходящий по типу колебаний закрепленной струны с изломами (скачками напряжений), перемещающимися по координате ξ во времени Fo. В центре пластины, где происходит встреча двух движущихся от наружных поверхностей волн, происходит двукратное возрастание величины динамического напряжения.

При $\mathrm{Fo}_1 = \mathrm{Fo}_2 = 0$ и $\mathrm{Fo}_3 \ne 0$ колебания напряжений являются затухающими во времени при сохранении их скачкообразного изменения. При $\mathrm{Fo}_1 \ne 0$, $\mathrm{Fo}_2 \ne 0$ и $\mathrm{Fo}_3 = 0$ скачки напряжений сглаживаются, приближаясь к гармоническому закону их изменения с уменьшающейся во времени амплитудой колебаний, то есть они являются затухающими. С увеличением Fo_1 и Fo_2 ($\mathrm{Fo}_3 = 0$) изменение напряжений происходит практически при отсутствии колебательного процесса. При больших значениях числа Fo изменение напряжений происходит в форме колебаний закрепленной струны.

При выполнении исследований, приведенных в пятой главе, получены следующие новые научные результаты:

1. Учитывая ускорения во времени напряжений и деформаций в формуле закона Гука, разработана математическая модель локально - неравновесной динамической термоупругости, в которой учитываются релаксационные свойства материалов, в том числе и в используемой в данной модели релаксированной задаче теплопроводности.

2. Впервые показано, что использование в уравнении динамической термоупругости точного аналитического решения нерелаксированной температурной задачи при граничных условиях первого рода (тепловой удар – мгновенное принятие температуры стенки), динамические температурные напряжения устремляются к бесконечным значениям.

3. Использование в уравнении динамической термоупругости точного аналитического решения релаксированного уравнения теплопроводности (по модели Максвелла – Каттанео – Лыкова), согласно которому температура на границе в любых реальных условиях не может мгновенно принимать заданную температуру, динамические температурные напряжения имеют вполне конкретные конечные значения, в зависимости от скорости изменения температуры во времени.

4. Использование локально - неравновесной модели динамической термоупругости приводит к устранению скачкообразного изменения динамических температурных напряжений. Изменение температурных напряжений качественно совпадает с колебаниями закрепленной на концах струны.

5. Впервые показано, что объединение в центре пластины двух волн, движущихся от поверхностей, приводит к двукратному увеличению амплитуды колебаний динамических температурных напряжений.

6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Научные результаты данной главы представлены в работах [191 – 195, 197, 199, 200, 203, 204, 206 – 210, 212, 213, 218, 219, 222, 224, 226, 228, 229, 233, 235, 248, 249, 261, 276 – 278] автора диссертации. В шестой главе диссертации приводятся результаты разработки метода решения краевых задач теплопроводности, основанного на использовании дополнительных искомых функций и дополнительных граничных условий. Использование этого метода основано на допущении о конечной скорости распространения теплоты, несмотря на то, что решению подлежит параболическое уравнение теплопроводности, описывающее бесконечную его скорость. Объяснение данного противоречия дано в п. 6.1. Разработанный метод был распространен применительно к решению задач теплопроводности для многослойных конструкций с привлечением математического аппарата теории обобщенных функций, позволяющего задачу для многослойного тела представить в виде однослойного, но с переменными (кусочно-однородными) свойствами среды (см. п. 4.2). Этот метод был применен также для решения задачи теплообмена в турбулентном пограничном слое, уравнения для которого были выведены на основе использования полуэмпирической теории турбулентности Прандтля (см. п. 6.3). Применение метода к решению задачи Стефана с абляцией (с удалением расплавляемого вещества) рассматривается в п. 6.4.

Как известно, точные решения краевых задач, найденные классическими аналитическими методами, имеют вид плохо сходящихся бесконечных рядов [29, 43, 44, 54, 55, 62, 90, 91, 97]. Исследования показали, что сходимость точного решения краевой задачи теплопроводности для пластины при краевых условиях 1-ого рода в диапазоне величин Фурье $10^{-12} \le \mathrm{Fo} \le 10^{-7}$ имеет место лишь в случае использования от 2000 ($\mathrm{Fo} = 10^{-7}$) до пятисот тысяч ($\mathrm{Fo} = 10^{-12}$) слагаемых ряда [81].

Вариационные методы (Ритца, Треффтца и др.), а также ортогональные методы Бубнова – Галеркина, Л.В. Канторовича и др., для получения решений для малых величин времени практически неприменимы, так как для определения собственных чисел необходимо решать алгебраические уравнения высоких степеней, а выполнение начальных условий связано с решением систем алгебраических уравнений, матрицы которых плохо обусловлены.

В теории теплопроводности применяется метод, в котором вводится понятие фронта теплового возмущения – интегральный метод теплового баланса [1, 8, 12, 13, 26, 30, 38, 52, 61, 64, 66, 68 – 84, 108, 111], при использовании которого тепловой процесс подразделяется на две стадии, из которых первая стадия характеризуется постепенным перемещением фронта

теплового возмущения к центру пластины, а во второй – температура изменяется во всем объеме тела. К преимуществу этого метода относится возможность нахождения простых приближенных аналитических решений, существенный недостаток – низкая точность, так как получаемое решение при точном выполнении краевых условий исходному уравнению удовлетворяет лишь в среднем. Следовательно, для повышения точности необходимо повышать точность удовлетворения исходного уравнения задачи. Для этого в данной работе принято направление аппроксимации температуры полиномами высокой степени, при определении неизвестных коэффициентов которых используются некоторые дополнительные условия, задаваемые на границах области и на фронте тепловой волны.

В отличие от известных работ этого направления, в настоящей диссертации показано, что удовлетворение уравнения на границах и на фронте возмущения посредством использования специально построенных дополнительных краевых условий приводит к его выполнению и внутри области с точностью, завясящей от числа приближений.

6.1 Разработка метода решения параболических уравнений на основе допущения о конечной скорости переноса теплоты

Анализ точных решений параболических уравнений теплопроводности приводит к заключению о бесконечной скорости продвижения теплоты. Во всех методах, использующих понятие глубины прогретого слоя, вводится допущение о конечной скорости переноса теплоты, несмотря на то, что решению подлежит параболическое уравнение. В настоящей работе показано, что при увеличении числа приближений скорость переноса теплоты (скорость передвижения фронта теплового возмущения) стремится к бесконечной величине и, следовательно, противоречие, связанное с принятым допущением, снимается.

Идею метода рассмотрим применительно к нахождению решения краевой задачи теплопроводности для пластины с граничными условиями 1-ого рода в математической постановке вида

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\quad(\mathrm{Fo}>0;\quad 0<\xi<1);\tag{6.1}$$

$$\Theta(\xi,0)=0;\quad(6.2)\qquad\Theta(0,\mathrm{Fo})=1;\quad(6.3)\qquad\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi=0,\tag{6.4}$$

где $\Theta=(T-T_0)/(T_{\text{ст}}-T_0)$ – относительная избыточная температура; $\mathrm{Fo}=a\tau/\delta^2$ – число Фурье; $\xi=x/\delta$ – безразмерная координата; x – координата; δ – ширина пластины; a – температуропроводность; τ – время; T_0 – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки.

Разделяя процесс нагрева на две стадии ($0<\mathrm{Fo}\le\mathrm{Fo}_1$ и $\mathrm{Fo}_1\le\mathrm{Fo}<\infty$), введем движущуюся границу (фронт теплового возмущения), которая разделяет исследуемую область

$0 \le \xi \le 1$ на подобласти $0 \le \xi \le q_1(\mathrm{Fo})$ и $q_1(\mathrm{Fo}) \le \xi \le 1$, где $q_1(\mathrm{Fo})$ – функция, описывающая движение границы во времени (рисунок 6.1). В области за фронтом возмущения остается начальная температура. Первая стадия завершается после достижения движущейся границей центра пластины $(\xi = 1)$, то есть, когда $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1$. Применительно ко второй стадии температура меняется во всем объеме тела $0 \le \xi \le 1$. И в рассмотрение вводится еще одна искомая функция $q_2(\mathrm{Fo}) = \Theta(1, \mathrm{Fo})$, которая характеризует изменение во времени температуры в центре пластины.

Постановка задачи для 1-ой стадии будет

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^2} \quad (0 < \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_1 \,;\, 0 \le \xi \le q_1(\mathrm{Fo})) \,; \qquad (6.5)$$

$$\Theta(0, \mathrm{Fo}) = 1; \quad (6.6) \qquad \Theta(q_1, \mathrm{Fo}) = 0 \,; \quad (6.7) \qquad \partial \Theta(q_1, \mathrm{Fo}) / \partial \xi = 0 \,, \qquad (6.8)$$

где соотношения (6.7), (6.8) являются условиями сопряжения прогретой и непрогретой областей.

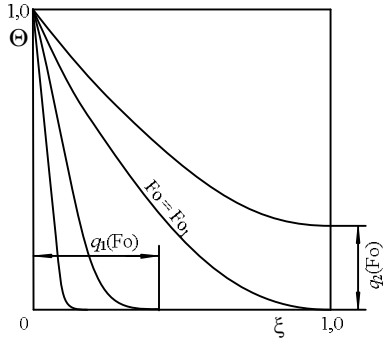


Рисунок 6.1. Схема теплообмена

Очевидно, что на первой стадии задача (6.5) – (6.8) за пределами фронта теплового возмущения, то есть в диапазоне $q_1(\mathrm{Fo}) \le \xi \le 1$, не определена. Поэтому здесь не требуется выполнения начального условия (6.2) по всей ширине пластины – достаточно потребовать выполнения условия (6.7), по которому для всех $\xi = q_1(\mathrm{Fo})$ температура совпадает с начальной температурой. К тому же, в этой задаче нет также граничного условия (6.4), которое не оказывает влияния на теплообмен на первой стадии.

Уравнение (6.5) относится к параболическим уравнением теплопроводности, в котором заложена бесконечная скорость перемещения теплоты. В связи с этим понятие фронта теплового возмущения здесь следует считать условным и используемым лишь как средство для нахождения как можно более простых аналитических решений. Ниже будет показано, что при увеличении числа приближений n наряду с увеличением точности решения время Fo_1 движения фронта теплового возмущения до центра пластины уменьшается и в пределе при $n \to \infty$ $\mathrm{Fo}_1 \to 0$. Следовательно, получаемое решение при $n \to \infty$ будет описывать процесс теплопроводности, протекающий с бесконечной скоростью продвижения теплоты.

Решение задачи (6.5) – (6.8) разыскивается в виде

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k(q_1)\, \xi^{2k-1}, \tag{6.9}$$

где $a_k(q_1)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ – неизвестные коэффициенты; n – число приближений.

Соотношение (6.9) благодаря нечетным степеням алгебраического полинома удовлетворяет условию (6.6). Неизвестные коэффициенты $a_k(q_1)$ $(k = 1, 2)$ определяются из (6.7), (6.8). Подставляя (6.9) в (6.7) и (6.8), ограничиваясь двумя слагаемыми ряда, для $a_1(q_1)$ и $a_2(q_1)$ получим систему алгебраических уравнений, решение которой $a_1 = -1{,}5 / q_1$; $a_2 = 0{,}5 / q_1^{\,2}$. Подставляя полученные значения коэффициентов в (6.9), получаем

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \sum_{k=1}^{2} (-1)^k A_k \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^{2k-1}, \tag{6.10}$$

где $A_1 = 1{,}5$; $A_2 = 0{,}5$.

Для получения функции $q_1(\mathrm{Fo})$ составим невязку уравнения (6.5) и найдем интеграл от нее в пределах глубины прогретого слоя (что равносильно нахождению интеграла теплового баланса – осреднению уравнения (6.5)):

$$\int_0^{q_1(\mathrm{Fo})} \frac{\partial \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}\, d\xi = \int_0^{q_1(\mathrm{Fo})} \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial \xi^2}\, d\xi. \tag{6.11}$$

Подставляя (6.10) в (6.11), после вычисления интегралов будем иметь

$$q_1 dq_1 = 4 d\mathrm{Fo}. \tag{6.12}$$

Решая уравнения (6.12), с учетом начального условия $q_1(0) = 0$ находим

$$q_1(\mathrm{Fo}) = \sqrt{8\mathrm{Fo}}. \tag{6.13}$$

Положив $q_1(\mathrm{Fo}_1) = 1$, из (6.13) определяем время завершения первой стадии $\mathrm{Fo}_1 = 1/8 = 0{,}125$.

Формулы (6.10), (6.13) являются решением задачи (6.5) – (6.8) во втором приближении – число приближений будем определять числом членов суммы соотношения (6.9).

Данные расчетов по соотношению (6.10) в сравнении с точным аналитическим решением [90] даны на рисунке 6.2. Их анализ позволяет сделать вывод о том, что наибольшее расхождение наблюдается при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1$ и составляет около 9 %. Причем основная погрешность связана с неточным выполнением дифференциального уравнения (6.5). Отметим, что граничные условия (6.6) – (6.8) и соотношение (6.11) выполняются точно.

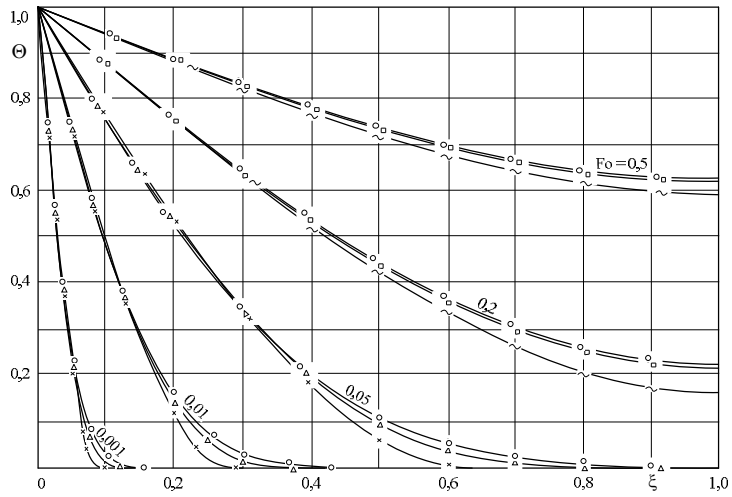


Рисунок 6.2. Распределение температуры: × – второе приближение первой стадии; △ – пятое приближение первой стадии; ∼ – второе приближение второй стадии; □ – пятое приближение второй стадии; ○ – точное решение

Для повышения точности будем увеличивать число слагаемых полинома (6.9). При нахождении неизвестных коэффициентов следует привлекать некоторые дополнительные краевые условия, которые будем находить в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением приводило к более точному выполнению уравнения (6.5). И, в частности, дифференцируя (6.7) по Fo и сопоставляя полученное с уравнением (6.5), применительно к точке $\xi = q_1(\mathrm{Fo})$ находим дополнительное условие:

$$\partial^2\Theta(q_1, \mathrm{Fo}) / \partial\xi^2 = 0 . \qquad (6.14)$$

Дифференцируя соотношение (6.8) по переменной Fo, с учетом уравнения (6.5) находим дополнительное условие вида

$$\partial^3\Theta(q_1, \mathrm{Fo}) / \partial\xi^3 = 0 \ . \qquad (6.15)$$

Дифференцируя соотношение (6.14) по переменной Fo, а уравнение (6.5) − дважды по переменной ξ, путем сравнения найденных соотношений получаем еще одно дополнительное краевое условие

$$\partial^4\Theta(q_1, \mathrm{Fo}) / \partial\xi^4 = 0 \ . \qquad (6.16)$$

Аналогично, дифференцируя дополнительные условия по Fo, с учетом уравнения (6.5) можно найти любое количество дополнительных краевых условий. Общая формула для них будет

$$\partial^i\Theta(q_1, \mathrm{Fo}) / \partial\xi^i = 0 \quad (i = 2, 3, 4, 5, \ldots). \qquad (6.17)$$

При нахождении дополнительных условий (6.17) было использовано уравнение (6.5), следовательно, их выполнение искомым решением будет эквивалентно удовлетворению этого уравнения во всех точках координаты ξ, где в данный момент находится фронт теплового возмущения $q_1(\mathrm{Fo})$.

Для получения как можно более высокой точности решения при наименьшем числе приближений уравнение (6.5) должно также выполняться и в точке $\xi = 0$, что можно обеспечить

заданием в ней некоторых дополнительных краевых условий. Так, дифференцируя условие (6.6) по времени и сопоставляя найденное с уравнением (6.5), для точки $\xi = 0$ получаем дополнительное условие

$$\partial^2 \Theta(0, \mathrm{Fo}) / \partial \xi^2 = 0 . \tag{6.18}$$

Дифференцируя (6.18) по Fo, с учетом уравнения (6.5) находим еще одно дополнительное условие в этой точке

$$\partial^4 \Theta(0, \mathrm{Fo}) / \partial \xi^4 = 0 . \tag{6.19}$$

Общая формула для дополнительных условий в точке $\xi = 0$ будет

$$\partial^i \Theta(0, \mathrm{Fo}) / \partial \xi^i = 0 \quad (i = 2, 4, 6, 8, \ldots) . \tag{6.20}$$

Условия вида (6.20) решением (6.9), благодаря нечетным степеням алгебраического полинома, в любом приближении удовлетворяются точно и, следовательно, данное решение удовлетворяет уравнению (6.5) в точке $\xi = 0$ в любом приближении. Отметим, что выполнение уравнения (6.5) в этой точке должно быть обязательным условием при использовании данного метода, позволяющим существенно уменьшить число приближений искомого решения.

Для определения решения в 3-ем приближении после подстановки (6.9) (ограничиваясь тремя слагаемыми суммы) в основные (6.7), (6.8) и дополнительное (6.14) условия, для нахождения неизвестных коэффициентов $a_k(q_1)$ $(k = 1, 2, 3)$ получаем цепочную систему трех алгебраических уравнений. Ее решение

$$a_1 = -15/(8q_1); \quad a_2 = 5/(4q_1); \quad a_3 = -3/(8q_1) . \tag{6.21}$$

С учетом $a_k(q_1)$ $(k = 1, 2, 3)$ соотношение (6.9) будет

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \sum_{k=1}^{3} (-1)^k A_k \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^{2k-1} , \tag{6.22}$$

где $A_1 = 15/8$; $A_2 = 5/4$; $A_3 = 3/8$.

Подставляя (6.22) в соотношение (6.11), получаем

$$q_1 dq_1 = 6 d\mathrm{Fo} . \tag{6.23}$$

Интегрируя уравнение (6.23), для начального условия $q_1(0) = 0$ находим

$$q_1(\mathrm{Fo}) = \sqrt{12\mathrm{Fo}} . \tag{6.24}$$

Положив $q_1(\mathrm{Fo}_1) = 1$, получаем $\mathrm{Fo}_1 = 1/12 \approx 0{,}083333$.

В четвертом приближении используются основные (6.7), (6.8) и дополнительные (6.14), (6.15) граничные условия. Соотношение (6.9) здесь имеет вид

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \sum_{k=1}^{4} (-1)^k A_k \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^{2k-1} , \tag{6.25}$$

где $A_1 = 35/16$; $A_2 = 35/16$; $A_3 = 21/16$; $A_4 = 5/16$.

Подставляя (6.25) в (6.11), находим

$$q_1 dq_1 = 8d\mathrm{Fo}. \qquad (6.26)$$

Интегрируя уравнение (6.26), при $q_1(0) = 0$ получаем

$$q_1(\mathrm{Fo}) = \sqrt{16\mathrm{Fo}}. \qquad (6.27)$$

Время завершения первой стадии $\mathrm{Fo}_1 = 1/16 = 0{,}0625$.

В пятом приближении используем основные (6.7), (6.8) и дополнительные (6.14), (6.15), (6.16) условия. Для определения неизвестных коэффициентов a_k $(k = \overline{1,5})$ имеем цепочную систему пяти алгебраических уравнений. После их определения выражение (6.9) принимает вид

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \sum_{k=1}^{5} (-1)^k A_k \left(\frac{\xi}{q_1} \right)^{2k-1}, \qquad (6.28)$$

где $A_1 = \frac{315}{128}$; $A_2 = \frac{105}{32}$; $A_3 = \frac{189}{64}$; $A_4 = \frac{45}{32}$; $A_5 = \frac{35}{128}$.

Уравнение для неизвестной функции $q_1(\mathrm{Fo})$ и его решение в данном случае будут

$$q_1 dq_1 = 10d\mathrm{Fo}; \quad (6.29) \qquad q_1(\mathrm{Fo}) = \sqrt{20\mathrm{Fo}}. \qquad (6.30)$$

Время завершения первой стадии процесса – $\mathrm{Fo}_1 = 1/20 = 0{,}05$.

Таким путем можно найти решение в любом приближении. Отметим, что ввиду цепочности систем алгебраических уравнений для коэффициентов $a_k(q_1)$ $(k = \overline{1,n})$ их решение при любом числе приближений не представляет затруднений. К тому же, уравнения для неизвестной функции $q_1(\mathrm{Fo})$ применительно к любому приближению отличаются лишь коэффициентом правой части, который в каждом следующем приближении увеличивается на две единицы (см. уравнения (6.12), (6.23), (6.26), (6.29)). Поэтому уравнение для $q_1(\mathrm{Fo})$ можно записать в любом приближении, минуя подстановку искомого решения в соотношение (6.11) и последующего вычисления интегралов, представляющего наиболее трудоемкую процедуру получения решения. Также легко можно записать решение уравнения относительно $q_1(\mathrm{Fo})$, которое от приближения к приближению отличается лишь коэффициентом под знаком корня, увеличивающимся в каждом следующем приближении на четыре единицы (см. соотношения (6.13), (6.24), (6.27), (6.30)).

Результаты исследований закономерности перемещения фронта теплового возмущения $q_1(\mathrm{Fo})$ для 2, 3, 5, 20 и 30-го приближений приведены на рисунке 6.3. Их анализ позволяет сделать вывод, что с увеличением числа приближений время (Fo_1) достижения фронтом возмущения координаты $\xi = 1$ уменьшается (отметим, что величина Fo_1 в 20-ом и 30-ом

приближениях соответственно составляет $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}025$ и $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}0125$). И в пределе при $n \to \infty$ $\mathrm{Fo}_1 \to 0$, что согласуется с гипотезой о бесконечной скорости продвижения теплового возмущения, описываемой уравнением (6.5), согласно которой сразу после приложения граничного условия $\Theta(0, \mathrm{Fo}) = 1$ температура во всем диапазоне координаты $0 \le \xi \le 1$, включая центр пластины $(\xi = 1)$, не совпадает с начальной, а меньше ее на некоторую бесконечно малую величину.

Расчеты для 2, 3, 5, 20, 30-го приближений в сопоставлении с точным решением [90] представлены на рисунках 6.2, 6.4, 6.5. Из анализа следует, что с увеличением числа приближений решение уточняется, приближаясь к точному. Так, уже в 20-ом приближении отличие от точного решения не превышает 1 %, а в 30-ом – практически совпадает с ним. Результаты расчетов для сверхмалых величин времени $(10^{-8} \le \mathrm{Fo} \le 10^{-12})$ даны на рисунке 6.6. Следует подчеркнуть трудности нахождения точного решения по формулам из [90] для таких малых величин Фурье из-за необходимости применения большого числа слагаемых ряда. Расчеты показывают, что при $\mathrm{Fo} = 10^{-7}$ для обеспечения сходимости точного решения следует использовать 2000 слагаемых ряда (формула (6.16), на стр. 87 из [90]). Для чисел $\mathrm{Fo} = 10^{-8}; 10^{-9}; 10^{-10}; 10^{-11}; 10^{-12}$ сходимость точного решения наступает соответственно при следующих числах членов ряда: $5 \cdot 10^3; 1 \cdot 10^4; 5 \cdot 10^4; 2 \cdot 10^5; 5 \cdot 10^5$.

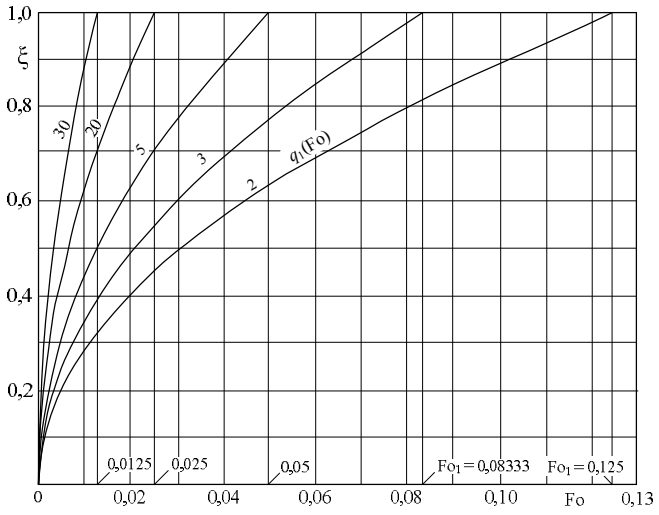


Рисунок 6.3. Перемещение фронта теплового возмущения $q_1(\mathrm{Fo})$: 2, 3, 5, 20, 30 – номер приближения

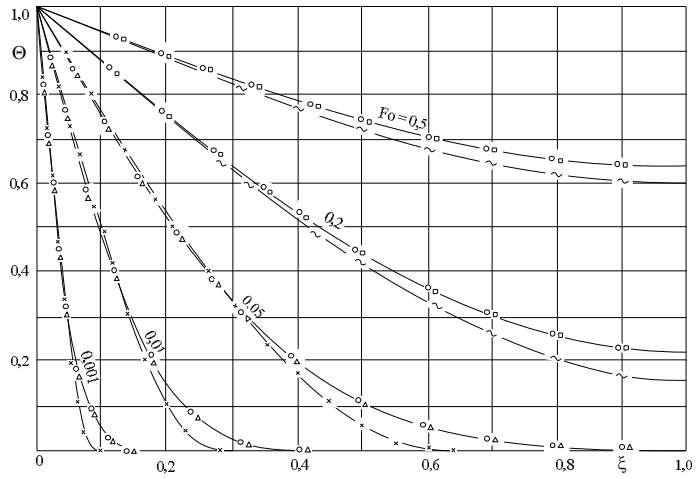


Рисунок 6.4. Распределение температуры: × – второе приближение первой стадии; △ – 20-ое приближение первой стадии; ∼ – второе приближение второй стадии; □ – десятое приближение второй стадии; ○ – точное решение

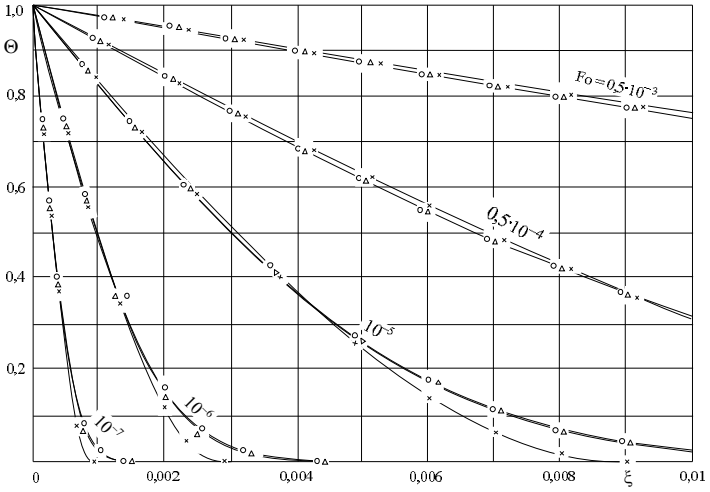


Рисунок 6.5: Распределение температуры. × – второе приближение первой стадии; △ – двадцатое приближение первой стадии; ○ – точное решение

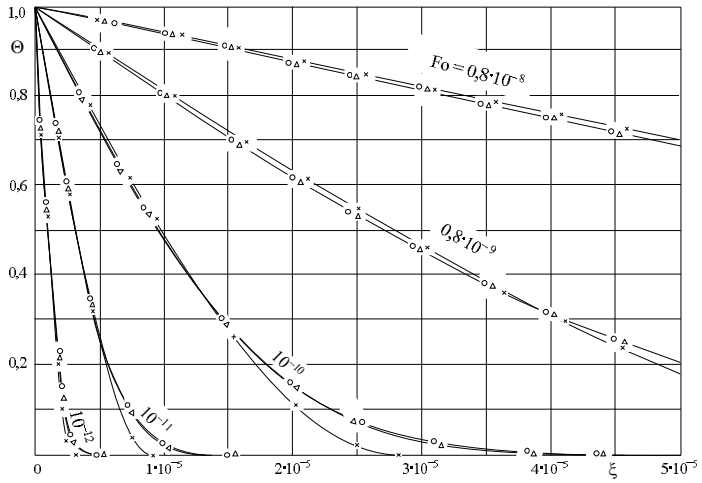


Рисунок 6.6. Распределение температуры: × – второе приближение первой стадии; △ – двадцатое приближение первой стадии; ○ – точное решение

Из анализа результатов можно прийти к заключению о низкой эффективности линейной суперпозиции частных решений, применяемой в классических методах для удовлетворения начального условия. Именно на данном этапе нахождения классического точного аналитического решения происходит его наибольшее усложнение – оно принимает форму бесконечного ряда, что связано с необходимостью подчинения решения начальному условию

(6.2) и граничному условию (6.3), которые при $\mathrm{Fo} \to 0$ могут быть выполнены лишь при бесконечно большом числе слагаемых ряда точного решения. Представление решаемой задачи в виде двух задач, рассматриваемых раздельно, позволяет избежать указанные трудности при возможности нахождения решений практически с наперед заданной точностью.

Постановка задачи для 2-ой стадии имеет вид

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} \ (\mathrm{Fo} \geq \mathrm{Fo}_1 \ ; \ 0 < \xi < 1); \tag{6.31}$$

$$\Theta(0,\mathrm{Fo}) = 1; \quad (6.32) \qquad \Theta(1,\mathrm{Fo}) = q_2(\mathrm{Fo}); \quad (6.33) \qquad \partial\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi = 0. \quad (6.34)$$

Начальным условием задачи (6.31) – (6.34) будет формула, характеризующая изменение температуры в конце 1-ой стадии, то есть при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1$. Следовательно, начальным условием будет соотношение (6.10), которое при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1$ ($q_1(\mathrm{Fo}_1) = 1$) будет

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 - 0{,}5(3 - \xi^2)\xi. \tag{6.35}$$

Приближенное решение задачи (6.31) – (6.34) разыскивается в виде соотношения

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k(q_2)\xi^{2k-1}, \tag{6.36}$$

где $b_k(q_2)$ ($k = 1, 2, \ldots$) – неизвестные коэффициенты.

Соотношение (6.36) удовлетворяет условию (6.32) при любых b_k ($k = 1, 2, \ldots$). Подставляя (6.36) в (6.33), (6.65) (ограничиваясь двумя слагаемыми ряда), относительно коэффициентов b_k $(k = 1, 2)$ получаем систему алгебраических уравнений. После определения коэффициентов b_k формула (6.36) принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 - 0{,}5(1 - q_2)(3 - \xi^2)\,\xi. \tag{6.37}$$

Отметим, что формула (6.37) при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1$ ($q_2(\mathrm{Fo}_1) = 0$) уже на данном этапе нахождения решения удовлетворяет начальному условию (6.35).

Для определения функции $q_2(\mathrm{Fo})$ потребуем, чтобы формула (6.37) удовлетворяла уравнению (6.31), осредненному в пределах ширины пластины, то есть

$$\int_0^1 \frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\,d\xi = \int_0^1 \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\,d\xi. \tag{6.38}$$

Подставляя (6.37) в (6.38), относительно $q_2(\mathrm{Fo})$ получаем уравнение вида

$$\frac{dq_2(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} + \frac{12}{5}q_2(\mathrm{Fo}) - \frac{12}{5} = 0. \tag{6.39}$$

Решение уравнения (6.39) записывается следующим образом:

$$q_2(\mathrm{Fo}) = 1 + C\exp(\nu_1\mathrm{Fo}), \tag{6.40}$$

где C – константа интегрирования; $\nu_1 = -2{,}4$.

Отметим, что величина ν_1 незначительно отличается от 1-ого собственного значения, получаемого при решении задачи с помощью классических точных аналитических методов. Его точное значение $\nu_1 = 2{,}4674011$ (с точностью до седьмого знака).

Формула для постоянной C, определяемой из начального условия $q_2(\mathrm{Fo}_1) = 0$, имеет вид $C = -\exp(2{,}4\mathrm{Fo}_1)$. Учитывая, что во 2-ом приближении первой стадии $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}125$, находим $C = -1{,}349859$. Подставляя (6.40) в (6.37), учитывая найденное значение постоянной интегрирования, получаем

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - 0{,}6749\exp(\nu_1 \mathrm{Fo})(3 - \xi^2)\xi \quad (\mathrm{Fo} \geq \mathrm{Fo}_1). \tag{6.41}$$

Формула (6.41) является решением задачи (6.31) – (6.65) во втором приближении. Оно удовлетворяет условию (6.35), условиям (6.32) – (6.34) и соотношению (6.38). Уравнение (6.31), как это следует из соотношения (6.38), выполняется лишь в среднем.

Данные расчетов по формуле (6.41) по отношению к точному решению представлены на рисунках 6.2, 6.4. Из их анализа следует, что максимальное отклонение от точного решения наблюдается при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1$ и составляет около 9 %. Повышение точности достигается увеличением числа слагаемых ряда (6.36). Для нахождения его неизвестных коэффициентов следует использовать дополнительные краевые условия, которые будем находить так, чтобы в граничных точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$ выполнялось дифференциальное уравнение (6.31). Такие условия в точке $\xi = 0$, как и в первой стадии, находятся из общей формулы (6.20). Для нахождения первого дополнительного условия для точки $\xi = 1$ продифференцируем (6.33) по Fo. Сравнивая найденное соотношение с уравнением (6.31), получаем дополнительное условие

$$\partial^2\Theta(1, \mathrm{Fo}) / \partial\xi^2 = \partial q_2(\mathrm{Fo}) / \partial \mathrm{Fo}. \tag{6.42}$$

Дифференцируя условие (6.34) по переменной Fo, с учетом уравнения (6.31) получаем 2-ое дополнительное краевое условие в точке $\xi = 1$:

$$\partial^3\Theta(1, \mathrm{Fo}) / \partial\xi^3 = 0. \tag{6.43}$$

Для определения следующих дополнительных условий продифференцируем соотношения (6.42), (6.43) по переменной Fo:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\Theta(1, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}\right) = \frac{dq_2(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}}; \qquad \frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial\Theta(1, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}\right) = 0.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\Theta(1, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}\right) = \frac{dq_2(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}}; \qquad \frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial\Theta(1, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}\right) = 0. \tag{6.44}$$

$$\partial^4\Theta(1, \mathrm{Fo}) / (\partial\xi^3\partial \mathrm{Fo}) = 0. \tag{6.45}$$

Соотношения (6.44), (6.45) с учетом (6.31) приводятся к дополнительным граничным условиям вида

$$\partial^4\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^4 = \partial^2 q_2(\mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo}^2; \quad (6.46) \qquad \partial^5\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^5 = 0. \quad (6.47)$$

Используя соотношения (6.42), (6.43), (6.46), (6.47), можно записать общие формулы для дополнительных краевых условий в точке $\xi = 1$:

$$\partial^{2i}\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^{2i} = d^i q_2(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}^i \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots); \quad (6.48)$$

$$\partial^i\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^i = 0 \quad (i = 3,\ 5,\ 7,\ \ldots). \quad (6.49)$$

Ввиду того, что дополнительные краевые условия (6.20), (6.48), (6.49) получены с использованием уравнения (6.31), то их выполнение искомым решением эквивалентно выполнению этого уравнения в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Расчеты показывают, что чем больше дополнительных условий будет принято, тем точнее искомое решение вида (6.36) будет удовлетворять уравнению (6.31).

При нахождении решения задачи в 3-ем приближении следует выполнить основные (6.32) – (6.34) и дополнительные (6.18), (6.42) условия. Отметим, что условия (6.18), (6.32) решением (6.36) удовлетворяются точно. Отметим, что все дополнительные условия, получаемые по общей формуле (6.20), для любого числа членов ряда (6.36) удовлетворяются точно. Поэтому в любом последующем приближении необходимо выполнять основные граничные условия (6.33), (6.65) и дополнительные условия, получаемые по формулам (6.48), (6.49).

Таким образом, в 3-ем приближении следует выполнить условия (6.64), (6.34) и дополнительное условие (6.42) (первое дополнительное условие, получаемое по общей формуле (6.48). Подставляя (6.36), ограничиваясь тремя слагаемыми ряда в указанные условия, для неизвестных коэффициентов b_k $(k = 1,2,3)$ получаем систему трех алгебраических уравнений. После нахождения неизвестных коэффициентов b_k соотношение (6.36) запишется так:

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \frac{1}{8}(15q_2^* + q_2')\xi - \frac{1}{4}(5q_2^* + q_2')\xi^3 + \frac{1}{8}(3q_2^* + q_2')\xi^5, \quad (6.50)$$

где $q_2^* = q_2 - 1$; $q_2' = dq_2/d\mathrm{Fo}$.

Соотношение (6.50) при $q_2 = 0$ совпадает с решением (6.22) в третьем приближении, которое в конце первой стадии, то есть при $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1 \approx 0{,}0833333$ ($q_1(\mathrm{Fo}_1) = 1$), имеет вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 - \frac{15}{8}\xi + \frac{5}{4}\xi^3 - \frac{3}{8}\xi^5. \quad (6.51)$$

Таким образом, соотношение (6.51), являющееся начальным условием краевой задачи (6.31) – (6.34) при получении ее решения в 3-ем приближении, решением (6.50)

удовлетворяется точно. Аналогично будут выполняться начальные условия задачи (6.31) – (6.34) и для любых других приближений, на чем мы далее не будем останавливаться.

Подставляя (6.50) в (6.38), получаем

$$q_2'' + 39q_2' + 80q_2 - 80 = 0, \qquad (6.52)$$

где $q_2'' = d^2 q_2 / d\mathrm{Fo}^2$.

Решая уравнение (6.52), находим

$$q_2(\mathrm{Fo}) = 1 + C_1 \exp(\nu_1 \mathrm{Fo}) + C_2 \exp(\nu_2 \mathrm{Fo}), \qquad (6.53)$$

где $\nu_1 = -2{,}463274$; $\nu_2 = -36{,}536725$; C_1, C_2 − постоянные интегрирования, которые находятся из начальных условий

$$q_2(\mathrm{Fo}_1) = 0; \quad (6.54) \qquad dq_2(\mathrm{Fo}_1)/d\mathrm{Fo} = 0. \qquad (6.55)$$

Отметим, что в 3-ем приближении происходит существенное повышение точности первого собственного числа ν_1. Точная величина второго собственного числа составляет $\nu_2 = -22{,}2066099$ (с точностью до седьмого знака).

Подставляя (6.53) в (6.54), (6.55), для постоянных интегрирования будем иметь систему алгебраических уравнений. Учитывая значения ν_1, ν_2 и $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}08333$, из решения данной системы получаем $C_1 = -1{,}316625$; $C_2 = 1{,}518466$.

Подставляя (6.53) в (6.50), находим окончательную формулу аналитического решения в 3-ем приближении:

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \xi\big[(C_1 \exp(\nu_1 \mathrm{Fo}) + C_2 \exp(\nu_2 \mathrm{Fo}))(15 - 10\xi^2 + 3\xi^4) +$$
$$+ (\nu_1 C_1 \exp(\nu_1 \mathrm{Fo}) + \nu_2 C_2 \exp(\nu_2 \mathrm{Fo}))(1 - \xi^2)^2\big]/8 \quad (\mathrm{Fo} \ge \mathrm{Fo}_1 = 0{,}08333). \qquad (6.56)$$

Анализ расчетов по соотношению (6.56) позволяет заключить о значительном повышении точности третьего приближения по сравнению со вторым. И, в частности, максимальное отклонение от точного решения уменьшается с 9 % (во втором) до 3,5 % (в третьем приближении).

В четвертом приближении неизвестные коэффициенты b_k ($k = \overline{1, 4}$) решения (6.36) находятся из удовлетворения основных (6.32), (6.34) и дополнительных краевых условий (6.42), (6.43) (первые дополнительные условия, получаемые из общих формул (6.48), (6.49)). Соотношение (6.36) после их определения будет

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \left(\frac{35}{16} q_2^* + \frac{1}{4} q_2'\right)\xi - \left(\frac{35}{16} q_2^* + \frac{5}{8} q_2'\right)\xi^3 +$$
$$+ \left(\frac{21}{16} q_2^* + \frac{1}{2} q_2'\right)\xi^5 - \left(\frac{5}{16} q_2^* + \frac{1}{8} q_2'\right)\xi^7 \quad (\mathrm{Fo} \ge \mathrm{Fo}_1 = 0{,}0625). \qquad (6.57)$$

Подставляя (6.57) в (6.38), для неизвестной функции $q_2(\mathrm{Fo})$ находим следующее уравнение:

$$\frac{7}{192}\frac{d^2q_2}{d\mathrm{Fo}^2}+\frac{125}{128}\frac{dq_2}{d\mathrm{Fo}}+\frac{35}{16}q_2-\frac{35}{16}=0. \qquad (6.58)$$

Решение уравнения (6.58) приводится к виду (6.53), где $\nu_1=-2{,}467262;\ \nu_2=24{,}318452.$ Отметим, что в четвертом приближении произошло значительное уточнение собственных чисел ν_1 и ν_2. Константы интегрирования C_1 и C_2, определяемые из условий (6.54), (6.55) (учитывая, что в четвертом приближении 1-ой стадии $\mathrm{Fo}_1=0{,}0625$), будут $C_1=-1{,}298466$ и $C_2=0{,}516209.$

В пятом приближении к основным и дополнительным условиям, использованным в четвертом приближении, необходимо добавить еще одно условие, получаемое по общей формуле (6.48) при $i=2$. Уравнение для $q_2(\mathrm{Fo})$ здесь будет:

$$\frac{1}{3840}\frac{d^3q_2}{d\mathrm{Fo}^3}+\frac{13}{256}\frac{d^2q_2}{d\mathrm{Fo}^2}+\frac{287}{256}\frac{dq_2}{d\mathrm{Fo}}+\frac{315}{128}q_2-\frac{315}{128}=0. \qquad (6.59)$$

Решение уравнения (6.59) имеет вид

$$q_2(\mathrm{Fo})=1+C_1\exp(\nu_1\mathrm{Fo})+C_2\exp(\nu_2\mathrm{Fo})+C_3\exp(\nu_3\mathrm{Fo}), \qquad (6.60)$$

где $\nu_1=-2{,}467;\ \nu_2=-22{,}529;\ \nu_3=-170.$

Постоянные $C_1,\ C_2,\ C_3$, определяемые из условий

$$q_2(\mathrm{Fo}_1)=0;\quad q_2'(\mathrm{Fo}_1)=0;\quad q_2''(\mathrm{Fo}_1)=0, \qquad (6.61)$$

учитывая, что в пятом приближении 1-ой стадии $\mathrm{Fo}_1=0{,}05$, принимают вид $C_1=-1{,}289099;$ $C_2=-11{,}056233;\ C_3=0{,}437269.$

Точно так же можно получить решения и для последующих приближений. При этом в каждом из них добавляется лишь одно новое дополнительное краевое условие, получаемое поочередно по общим формулам (6.48), (6.49). Таким путем были получены решения в десятом, двадцатом и тридцатом приближениях. Собственные числа, например, в десятом приближении будут:

$$\nu_1=-2{,}467401100;\quad \nu_2=-22{,}20660990;\quad \nu_3=-61{,}68502752;$$

$$\nu_4=-120{,}9026540;\quad \nu_5=-199{,}8601371;\quad \nu_6=-289{,}8573214;$$

$$\nu_7=-430{,}1902080;\quad \nu_8=-684{,}5731302;\quad \nu_9=-1422{,}703118;\quad \nu_{10}=-5439{,}141351. \qquad (6.62)$$

Первые четыре собственных числа с точностью до шестого знака совпадают с их точными величинами. Точные значения остальных собственных чисел следующие: $\nu_5=-199{,}85948;\ \nu_6=-298{,}55553;\ \nu_7=-416{,}99078;\ \nu_8=-555{,}16524;\ \nu_9=-713{,}07891;$ $\nu_{10}=-890{,}73179.$ Отметим, что собственные числа (6.62) полностью совпадают с их

значениями, получаемыми при совместном применении точных и приближенных аналитических методов [121].

По формуле (6.36) были выполнены расчеты для 2-ого, 3-его, 4-ого, 5-ого, 10-ого, 20-ого и 30-ого приближений (рисунки 6.2, 6.4). Из анализа результатов следует, что наибольшее расхождение с точным решением в десятом приближении составляет 1,5 %, в двадцатом – менее 1 %, а в тридцатом приближении – практически совпадает с ним.

Выводы

1. Путем введения фронта теплового возмущения исходная краевая задача представляется в виде двух задач, решение которых значительно упрощается, так как интегрированию подлежат обыкновенные дифференциальные уравнения для некоторых дополнительных искомых функций. Отмечается быстрая сходимость рядов приближенных решений, что объясняется отсутствием необходимости удовлетворения начального условия в каждой отдельной задаче во всей области определения пространственной переменной, заменив его выполнением лишь в одной граничной точке ($\xi = 0$ – в 1-ой и $\xi = 1$ – во 2-ой стадии).

2. Дополнительные условия не влияют на математическую постановку исходной краевой задачи и служат лишь средством нахождения более точных решений двух отдельных задач. Установлено, что при увеличении числа дополнительных краевых условий точность выполнения уравнения во всей области определения временно́й и пространственной переменных возрастает. Так, уже в 30-ом приближении найденные в обеих стадиях решения практически эквивалентны точным вплоть до $\mathrm{Fo} = 10^{-12}$, где для нахождения точного решения требуется около $5 \cdot 10^5$ членов ряда.

3. Изложенный метод решения основан на использовании предположения о конечной скорости перемещения теплоты, несмотря на то, что решению подлежит параболическое уравнение теплопроводности, найденное из условия ее бесконечной скорости. Использование данного предположения позволило разделить процесс теплопроводности на две стадии с последующим решением двух отдельных задач. Исследования полученных решений показали, что с увеличением числа приближений наблюдается возрастание скорости перемещения фронта температурного возмущения. И в пределе при $n \to \infty$ $\mathrm{Fo}_1 \to 0$, что эквивалентно приближению к бесконечной скорости переноса теплоты.

6.2 Применение теории обобщенных функций в краевых задачах теплопроводности для многослойных конструкций

Использование классических точных методов для решения задач теплопроводности применительно к многослойным телам затрудняется необходимостью удовлетворения условий сопряжения, задаваемых в виде равенства температур и тепловых потоков на контакте слоев

[17, 46, 59, 60]. Удовлетворение этих условий достигается решением характеристической системы, представляющей цепочное трансцендентное уравнение относительно собственных значений краевой задачи. Нахождение его решения возможно лишь численным путем. Для таких задач весьма эффективными являются методы сведения задач теплопроводности для многослойных тел к однослойным с разрывными физическими свойствами. К их числу относится метод, связанный с использованием асимметричной единичной функции (функции Хевисайда). Основное преимущество этого метода состоит в значительном упрощении процесса удовлетворения условий сопряжения – в случае использования асимметричной единичной функции эти условия выполняются точно ввиду особой конструкции исходного уравнения [2 –4, 8, 17, 21 – 23, 25, 46, 65, 81, 95, 96, 99, 100].

Эффективными методами нахождения решений для малых значений временно́й переменной являются интегральные методы теплового баланса [12, 26, 30, 81], согласно которым процесс теплообмена подразделяется на две стадии. В результате для каждой стадии решение уравнения, имеющего частные производные, сводится к интегрированию уравнения в обыкновенных производных. Использование предложенных выше дополнительных краевых условий позволяет находить приближенные решения практически с заданной точностью.

Идею метода поясним на примере нахождения решения задачи теплопроводности для *n*-слойной пластины в математической постановке вида (рисунок 6.7)

$$C(x)\frac{\partial\Theta(x,\tau)}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial\Theta(x,\tau)}{\partial x}\right]\quad(\tau>0;\ \ 0<x<x_n);\tag{6.63}$$

$$\Theta(x,0)=0;\quad(6.64)\qquad\Theta(0,\tau)=1;\quad(6.65)\qquad\partial\Theta(x_n,\tau)/\partial x=0,\tag{6.66}$$

где $\Theta=(T-T_0)/(T_{\text{ст}}-T_0)$ – безразмерная температура; x – координата; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки при $x=0$; T_0 – начальная температура; τ – время; n – число слоев; δ_i – толщина i-го слоя; $\lambda(x)$ – теплопроводность; $C(x)=c(x)\rho(x)$ – объемная теплоемкость; $c(x)$ – теплоемкость; $\rho(x)$ – плотность.

Представление многослойного тела как однослойного выполняется с помощью единичной функции, с помощью которой физические свойства описываются зависимостями вида

$$\lambda(x)=\lambda_1+\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)H(x-x_i);\quad(6.67)\qquad C(x)=C_1+\sum_{i=1}^{n-1}(C_{i+1}-C_i)H(x-x_i),\tag{6.68}$$

где $H(x-x_i)$ – функция Хевисайда, определяемая формулой

$$H(x-x_i)=\begin{cases}0\ \text{ при }\ x<x_i;\\ 1\ \text{ при }\ x\ge x_i.\end{cases}\tag{6.69}$$

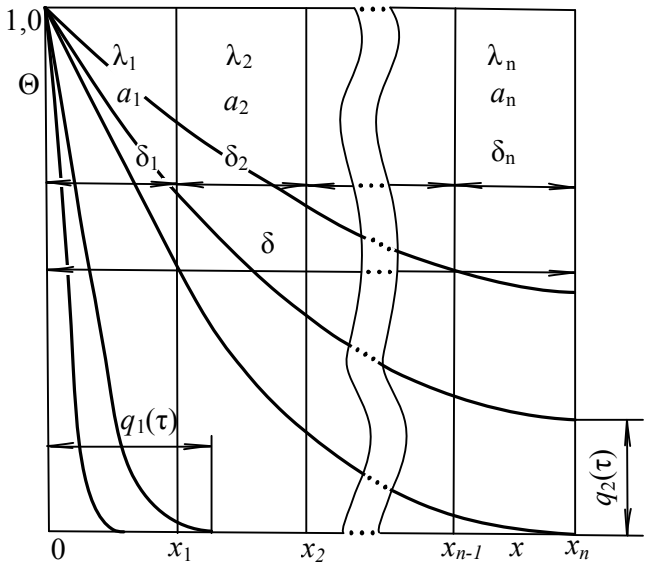


Рисунок 6.7. Схема теплообмена

Для упрощения уравнения (6.63) рассмотрим новую переменную $z = z(x)$:

$$z(x) = \int_{x_i}^{x} \frac{1}{\lambda(x)}\, dx \quad \left(i = \overline{0,n}\right), \tag{6.70}$$

где $\dfrac{1}{\lambda(x)}$ аналогично с (6.67) находится в виде

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{\lambda_1} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i}\right) H(x - x_i). \tag{6.71}$$

Подстановка (6.71) в (6.70), дает

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\lambda_1} + \int_{x_i}^{x} \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i}\right) H(x - x_i)\, dx\,. \tag{6.72}$$

Вычисляя интегралы в (6.72), получаем

$$z(x) = \frac{x - x_0}{\lambda_1} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i}\right)(x - x_i) H(x - x_i). \tag{6.73}$$

Из выражения (6.73) находим

$$z_n = \frac{x_n - x_0}{\lambda_1} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_i}\right)(x_n - x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}, \tag{6.74}$$

где δ_i – толщина i-го слоя.

Из (6.74) получаем

$$z_1 = \frac{x_1 - x_0}{\lambda_1} = \frac{\delta_1}{\lambda_1}; \qquad z_2 = \frac{x_1 - x_0}{\lambda_1} + \frac{x_2 - x_1}{\lambda_2} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\delta_i}{\lambda_i}\,. \tag{6.75}$$

Следовательно, новая переменная представляет термическое сопротивление $R = \delta / \lambda$ определенного участка стенки.

Для представления задачи (6.63) – (6.66) в новой переменной, продифференцируем выражение (6.70) по x:

$$\frac{dz(x)}{dx} = \frac{1}{\lambda(x)}. \tag{6.76}$$

Учитывая, что величина z является функцией x, находим

$$\lambda(x)\frac{\partial\Theta(x,\tau)}{\partial x} = \lambda(x)\frac{\partial\Theta(z,\tau)}{\partial z}\frac{dz}{dx} = \lambda(x)\frac{\partial\Theta(z,\tau)}{\partial z}\frac{1}{\lambda(x)} = \frac{\partial\Theta(z,\tau)}{\partial z}. \tag{6.77}$$

Следовательно, производная от температуры по z равна тепловому потоку

$$\frac{\partial\Theta(z,\tau)}{\partial z} = \lambda(x)\frac{\partial\Theta(x,\tau)}{\partial x}\ . \tag{6.78}$$

С учетом (6.76), (6.78) правая часть уравнения (6.63) будет

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial\Theta(x,\tau)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\Theta(z,\tau)}{\partial z}\right]\frac{dz}{dx} = \frac{\partial^2\Theta(z,\tau)}{\partial z^2}\frac{1}{\lambda(z)}. \tag{6.79}$$

Постановка задачи (6.63) – (6.66) для переменной z приводится к виду:

$$C(z)\frac{\partial\Theta(z,\tau)}{\partial\tau} = \frac{1}{\lambda(z)}\frac{\partial^2\Theta(z,\tau)}{\partial z^2} \quad (\tau > 0;\ \ 0 < z < z_n); \tag{6.80}$$

$$\Theta(z,0) = 0; \quad (6.81) \qquad \Theta(0,\tau) = 1; \quad (6.82) \qquad \partial\Theta(z_n,\tau)/\partial z = 0. \tag{6.83}$$

Отметим, что уравнение (6.80) является значительно более простым для интегрирования в сравнении с уравнением (6.63).

Задачу (6.80) – (6.83) будем решать при использовании интегрального метода теплового баланса с применением дополнительных краевых условий. Процесс нагрева разделяется на две стадии: $0 \le \tau \le \tau_1$ и $\tau_1 \le \tau < \infty$. При этом вводится перемещающаяся во времени граница, которая разделяет исследуемую область $0 \le z \le z_n$ на две: $0 \le z \le q_1(\tau)$ и $q_1(\tau) \le z \le z_n$, где $q_1(\tau)$ – функция, характеризующая перемещение границы во времени (рисунок 6.7). Температура за фронтом теплового возмущения равна начальной температуре. Первая стадия завершается при достижении подвижной границей координаты $z = z_n$, то есть, когда $\tau = \tau_1$. Применительно ко второй стадии, изменение температуры происходит во всем объеме. Понятие фронта теплового возмущения здесь не имеет смысла. Для этой стадии дополнительной искомой функцией является функция, определяющая изменение температуры в точке $z = z_n$, то есть $\Theta(z_n,\tau) = q_2(\tau)$.

Краевая задача для первой стадии включает уравнение (6.80) с граничным условием (6.82), а также условия, которые необходимо выполнять на фронте возмущения:

$$\Theta(q_1,\tau) = 0; \quad (6.84) \qquad \partial\Theta(q_1,\tau)/\partial z = 0 \quad (0 \le z \le q_1(\tau)). \tag{6.85}$$

Соотношения (6.84), (6.85) являются условиями сопряжения прогретой и непрогретой областей. Соотношение (6.84) означает равенство температуры в точке $z = q_1(\tau)$ начальной температуре. По условию (6.85) за пределами фронта теплового возмущения тепловой поток равен нулю. Математическое доказательство необходимости использования условий (6.84), (6.85) на фронте теплового возмущения дано в [55].

Очевидно, что применительно к первой стадии краевая задача (6.80), (6.82), (6.84), (6.85) за фронтом теплового возмущения не определена. Поэтому, в данном случае отсутствует необходимость выполнения начального условия (6.81) по всей толщине пластины – достаточным является удовлетворение граничного условия (6.84), согласно которому для всех $z = q_1(\tau)$ температура совпадает с начальной температурой. В этой задаче отсутствует и краевое условие вида (6.83), как не влияющее на теплообмен в 1-ой стадии процесса.

Рассматриваемый в задаче (6.80), (6.82), (6.84), (6.85) фронт теплового возмущения является аналогом перемещающейся изотермы. Ввиду того, что на фронте теплового возмущения в течение первой стадии поддерживается начальная температура $\Theta(q_1, \tau) = 0$, то, следовательно, он представляет нулевую изотерму (изотерму начального условия). Выше было показано, что с возрастанием количества приближений время τ_1 перемещения фронта возмущения $q_1(\tau)$ в интервале $0 \le z \le z_n$ уменьшается и в пределе при $n \to \infty$ $\tau_1 \to 0$. Следовательно, скорость фронта теплового возмущения с возрастанием количества приближений стремится к бесконечности, что согласуется с гипотезой о бесконечной скорости продвижения теплового возмущения, описываемой параболическим уравнением вида (6.63). С возрастанием количества приближений возрастает и точность решений. Исследования, выполненные в [70], показывают, что температура в центральной части пластины во 2-ом, 4-ом, 7-ом и 14-ом приближениях отличается от точных ее значений соответственно на 0,31 %, 0,0028 %, $0{,}26 \cdot 10^{-5}$ %, $0{,}28 \cdot 10^{-12}$ %.

Решение краевой задачи (6.80), (6.82), (6.84), (6.85) будем разыскивать в виде ряда

$$\Theta(z, \tau) = \sum_{k=0}^{n} a_k(q_1)\, z^k, \qquad (6.86)$$

где $a_k(q_1)$ − коэффициенты, которые находятся из условий (6.82), (6.84), (6.85). После их нахождения соотношение (6.86) в первом приближении будет

$$\Theta(z, \tau) = (1 - z / q_1)^2. \qquad (6.87)$$

Определим невязку уравнения (6.80) и найдем интеграл от нее в пределах глубины прогретого слоя

$$\int_0^{q_1} \lambda(z)C(z)\frac{\partial\Theta(z,\tau)}{\partial\tau}\,dz = \int_0^{q_1} \frac{\partial^2\Theta(z,\tau)}{\partial z^2}\,dz\,. \tag{6.88}$$

Вычисляя интеграл правой части выражения (6.88), с учетом (6.85) и (6.87) интегральное соотношение теплового баланса принимает вид

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial^2\Theta(z,\tau)}{\partial z^2}\,dz = \frac{\partial\Theta(q_1,\tau)}{\partial z} - \frac{\partial\Theta(0,\tau)}{\partial z} = \frac{2}{q_1}\,. \tag{6.89}$$

Произведение $\lambda(z)C(z)$ в левой части выражения (6.88), аналогично с (6.67), (6.68), представляется следующим образом:

$$\lambda(z)C(z) = \lambda_1 C_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\lambda_{i+1}C_{i+1} - \lambda_i C_i\right) H\left(z - z_i\right). \tag{6.90}$$

После подстановки (6.87), (6.89), (6.90) в (6.88), находим

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\int_0^{q_1}\left(1 - \frac{2}{q_1}z + \frac{z^2}{q_1^2}\right)\lambda_1 C_1 dz + \int_{z_i}^{q_1}\left(1 - \frac{2}{q_1}z + \frac{z^2}{q_1^2}\right)\sum_{i=1}^{n-1}\left(\lambda_{i+1}C_{i+1} - \lambda_i C_i\right)H\left(z - z_i\right)dz\right] = \frac{2}{q_1}\,.$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$\frac{dq_1}{d\tau}\left[q_1\lambda_1 C_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\lambda_{i+1}C_{i+1} - \lambda_i C_i\right)\left(q_1 - \frac{3z_i^2}{q_1} + \frac{2z_i^3}{q_1}\right)H\left(q_1 - z_i\right)\right] = 6\,. \tag{6.91}$$

Решение уравнения (6.91) при начальном условии $q_1(0) = 0$, имеет вид

$$q_1{}^2\lambda_1 C_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\lambda_{i+1}C_{i+1} - \lambda_i C_i\right)\left(q_1{}^2 - 6z_i^2\ln\frac{q_1}{z_i} - 4\frac{z_i{}^3}{q_1} + 3z_i{}^2\right)H\left(q_1 - z_i\right) = 12\tau\,. \tag{6.92}$$

Так, для двухслойной пластины

$$q_1{}^2\lambda_1 C_1 + \left(\lambda_2 C_2 - \lambda_1 C_1\right)\left(q_1{}^2 - 6z_1^2\ln\frac{q_1}{z_1} - 4\frac{z_1{}^3}{q_1} + 3z_1{}^2\right)H\left(q_1 - z_1\right) = 12\tau\,. \tag{6.93}$$

Приняв $q_1 = z_n$, из (6.92) получаем время завершения первой стадии $\tau = \tau_1$.

Выражение (6.93) относительно $q_1(\tau)$ представляет трансцендентное уравнение, которое может быть решено лишь численно. Невозможность явного нахождения величины $q_1(\tau)$ из (6.93) создает неудобства при расчетах движения фронта возмущения и температурного поля конструкции. Для нахождения приближенного решения уравнения (6.91) воспользуемся методом, приведенном в [70], согласно которому находим

$$q_1(\tau) = 0{,}00048\tau^{0{,}7}. \tag{6.94}$$

Соотношение (6.94) получено применительно к двухслойной пластине (сталь – титан) при исходных данных вида:

$\delta_1 = 0{,}002\ м$; $\delta_2 = 0{,}004\ м$; $a_1 = 12{,}5\cdot10^{-6}\ м^2/с$; $a_2 = 6\cdot10^{-6}\ м^2/с$; $\rho_1 = 7900\ кг/м^3$; $\rho_2 = 5136\ кг/м^3$;

$\lambda_1 = 45{,}24\ Вт/(м \cdot К)$; $\lambda_2 = 16{,}24\ Вт/(м \cdot К)$; $C_1 = 462\ Дж/(кг \cdot К)$; $C_2 = 527\ Дж/(кг \cdot К)$. (6.95)

Сопоставление результатов расчетов $q_1(\tau)$ по соотношениям (6.93) и (6.94) приводит к заключению об их практическом совпадении (см. рисунок 6.8). Следовательно, соотношение (6.94) с высокой точностью может быть использовано в качестве аналитического решения уравнения (6.91) применительно к двухслойной пластине (сталь – титан).

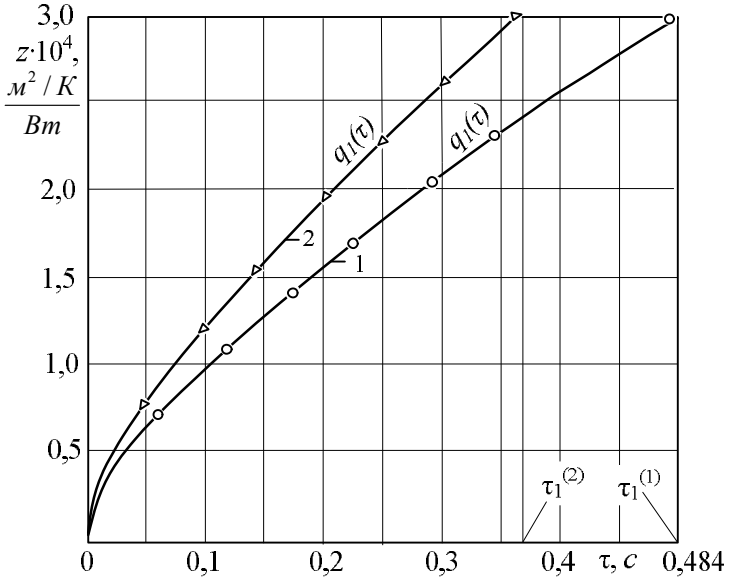


Рисунок 6.8. Продвижение фронта теплового возмущения $q_1(\tau)$: 1 – по (6.93); 2 – по (6.99); ∘ – по (6.94); △ – по (6.100); $\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}$ – время достижения фронтом возмущения $q_1(\tau)$ координаты $z = z_2$ соответственно в 1-ом и 2-ом приближениях

Формулы (6.87), (6.94) являются решением задачи (6.80), (6.82), (6.84), (6.85) в 1-ом приближении на 1-ой стадии.

Изменение безразмерной температуры, найденной по формуле (6.87), в переменных x и z представлено на рисунках 6.9, 6.10, где $\tau^* = 0{,}027\ c$ – время достижения движущимся фронтом координаты $x = x_1$ $(z = z_1)$; $\tau_1 = 0{,}484\ c$ – время достижения фронтом теплового возмущения координаты $x = x_2 = q_1(\tau_1)$. Сравнение полученных результатов с решением этой же задачи методом Канторовича Л.В. (восьмое приближение) [81] позволяет сделать заключение о том, что их расхождение в диапазоне $0{,}005 \le \tau \le 0{,}484$ находится в пределах 6 %. Отметим, что метод Л.В. Канторовича в указанном диапазоне времени в восьмом приближении позволяет получать практически точные решения. Такой результат оказывается возможным ввиду использования точно удовлетворяющих граничным условиям и условиям сопряжения координатных функций.

С целью увеличения точности следует увеличивать число слагаемых ряда (6.86). Новые неизвестные коэффициенты $a_k(q_1)$ определяются из заданных (6.82), (6.84), (6.85) и дополнительных краевых условий. При их нахождении применяется уравнение (6.80) и условия (6.82), (6.84), (6.85). В частности, 1-ое, 2-ое и 3-е дополнительные условия будут

$$\partial^2\Theta(0,\tau)/\partial z^2 = 0; \quad \partial^2\Theta(q_1,\tau)/\partial z^2 = 0; \quad \partial^3\Theta(q_1,\tau)/\partial z^3 = 0. \qquad (6.96)$$

Физический смысл дополнительных условий заключается в выполнении уравнения (6.80) в точке $z = 0$, а также на фронте возмущения $z = q_1(\tau)$. Так как диапазон продвижения фронта теплового возмущения $0 \le q_1(\tau) \le z_n$ охватывает всю область декартовой координаты $0 \le z \le z_n$, то чем большее число дополнительных условий будет задействовано, тем более точно будет удовлетворяться уравнение (6.80) внутри рассматриваемой области.

После подстановки (6.86) в (6.82), (6.84), (6.85) и (6.96), для нахождения коэффициентов $a_k(q_1)\left(k = \overline{0,5}\right)$ приходим к цепочной системе шести алгебраических уравнений. После вычисления этих коэффициентов соотношение (6.86) принимает вид

$$\Theta(z,\tau) = \left(1 + 1{,}5\frac{z}{q_1}\right)\left(1 - \frac{z}{q_1}\right)^4 . \qquad (6.97)$$

Подставляя (6.97) в (6.89), получаем

$$\frac{dq_1}{d\tau}\frac{1}{4q_1^2}\left[q_1{}^2\lambda_1 C_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\lambda_{i+1}C_{i+1} - \lambda_i C_i\right)\left(q_1{}^2 - 5z_i^3 + 15\frac{z_i^4}{q_1{}^2} - 16\frac{z_i^5}{q_1{}^3} + 5\frac{z_i^6}{q_1{}^4}\right)\right] H(q_1 - z_i) - \frac{5}{2q_1} = 0 . \quad (6.98)$$

Интегрируя уравнение (6.98), с начальным условием $q_1(0) = 0$, находим

$$q_1{}^2\lambda_1 C_1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\lambda_{i-1}C_{i+1} - \lambda_i C_i\right)\left[q_1{}^2 - 10z_i^2\ln\frac{q_1}{z_i} - 15z_i^2\left(\frac{z_i}{q_1}\right)^2 + \frac{32}{3}z_i^2\left(\frac{z_i}{q_1}\right)^3 - \frac{5}{2}z_i^2\left(\frac{z_i}{q_1}\right)^4 + \frac{35}{6}z_i^2\right] H(q_1 - z_i) = 20\tau .$$

Для двухслойной пластины последнее соотношение будет

$$q_1{}^2\lambda_1 C_1 + \left(\lambda_2 C_2 - \lambda_1 C_1\right)\left[q_1{}^2 - 10z_1^2\ln\frac{q_1}{z_1} - 15z_1^2\left(\frac{z_1}{q_1}\right)^2 + \frac{32}{3}z_1^2\left(\frac{z_1}{q_1}\right)^3 - \frac{5}{2}z_1^2\left(\frac{z_1}{q_1}\right)^4 + \frac{35}{6}z_1^2\right] H(q_1 - z_1) = 20\tau . \quad (6.99)$$

Полагая $q_1 = z_2$, из (6.99) находим время завершения первой стадии $\tau = \tau_1$.

Используя метод, изложенный в [70], при исходных данных (6.95) находим приближенное решение уравнения (6.98):

$$q_1(\tau) = 0{,}00061\tau^{0,7} . \qquad (6.100)$$

Расчеты $q_1(\tau)$ по (6.99) и (6.100) представлены на рисунке 6.8. Из анализа следует, что при увеличении количества приближений время τ_1, при котором фронт теплового возмущения достигает координаты $z = z_n$, уменьшается. В пределе при $n \to \infty$ $\tau_1 \to 0$ [70]. Полученный результат находится в согласии с гипотезой о бесконечной скорости перемещения теплоты, заложенной в основе получения параболического уравнения.

Данные расчетов температурного состояния по соотношениям (6.87) и (6.97) (в переменных x и z) приводятся на рисунках 6.9, 6.10. Из анализа следует, что температуры во втором приближении практически совпадают с их величинами, полученными методом

Л.В. Канторовича, что свидетельствует о существенном (на 4 – 5 %) повышении точности решения во 2-ом приближении в сравнении с первым.

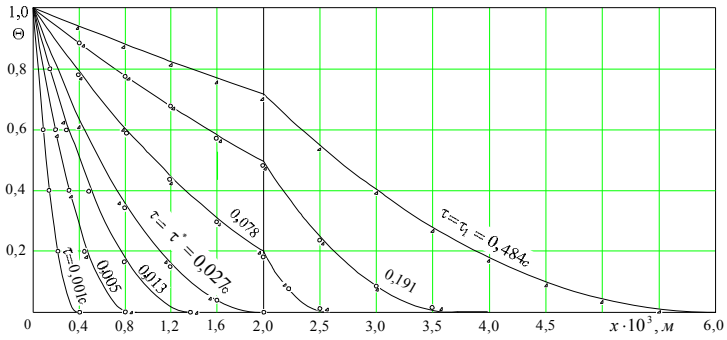


Рисунок 6.9. Изменение температуры в двухслойной стенке для переменной x: ——— – по (6.87); ∘ – по (6.97); △ – метод Л.В. Канторовича

Во второй стадии дополнительной искомой функцией является температура многослойной стенки при $z = z_n$ $\Theta(z_n, \tau) = q_2(\tau)$. Постановка задачи в данном случае имеет вид

$$C(z)\frac{\partial\Theta(z,\tau)}{\partial\tau} = \frac{1}{\lambda(z)}\frac{\partial^2\Theta(z,\tau)}{\partial z^2} \qquad (\tau \ge \tau_1;\ \ 0 \le z \le z_n); \tag{6.101}$$

$$\Theta(0,\tau) = 1; \quad (6.102) \qquad \Theta(z_n,\tau) = q_2(\tau); \quad (6.103) \qquad \partial\Theta(z_n,\tau)/\partial z = 0. \tag{6.104}$$

Следует обратить внимание на то, что задача (6.101) – (6.104) не включает начальное условие. Это объясняется следующими причинами. При $\tau = \tau_1$ $(q_1(\tau_1) = z_n;\ \ q_2(\tau_1) = 0)$ математические постановки задач (6.80), (6.82), (6.84), (6.85) и (6.101) – (6.104) совпадают, следовательно, совпадают и их решения. В данном случае имеем полное сопряжение решений для 1-ой и 2-ой стадий при отсутствии необходимости удовлетворения начального условия. Начальным условием здесь будет соотношение (6.87) при $q_1(\tau_1) = z_n$:

$$\Theta(z_n, \tau_1) = \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^2, \tag{6.105}$$

которое будет выполнено далее при нахождении решения задачи (6.101) – (6.104) (см. ниже).

Потребуем, чтобы получаемое решение удовлетворяло не исходному уравнению (6.101), а некоторому осредненному (интегралу теплового баланса). Для этого вычислим интеграл от уравнения (6.101) по переменной z в пределах толщины многослойной пластины:

$$\int_0^{z_n} \lambda(z)C(z)\frac{\partial\Theta(z,\tau)}{\partial\tau}\,dz = \int_0^{z_n}\frac{\partial^2\Theta(z,\tau)}{\partial z^2}\,dz. \tag{6.106}$$

Определяя интеграл в правой части соотношения (6.106), находим

$$\int_0^{z_n}\frac{\partial^2\Theta(z,\tau)}{\partial z^2}\,dz = \frac{\partial\Theta(z_n,\tau)}{\partial z} - \frac{\partial\Theta(0,\tau)}{\partial z}. \tag{6.107}$$

Подставляя (6.107) в (6.106), с учетом (6.104) получаем интегральное соотношение теплового баланса вида

$$\int_0^{z_n} \lambda(z) C(z) \frac{\partial \Theta(z,\tau)}{\partial \tau}\, dz = -\frac{\partial \Theta(0,\tau)}{\partial z}. \tag{6.108}$$

Решение краевой задачи (6.101) – (6.104) будем искать в виде

$$\Theta(z,\tau) = \sum_{k=0}^{n} b_k(q_2)\, z^k, \tag{6.109}$$

где $b_k(q_2)$ – коэффициенты.

Подставляя (6.109) (при трех слагаемых) в (6.102) – (6.104), для неизвестных коэффициентов $b_k(q_2)(k=0,1,2)$ будем иметь систему 3-х алгебраических уравнений, решение которой

$$b_0 = 1; \quad b_1 = -2(1-q_2)/z_n; \quad b_2 = (1-q_2)/z_n.$$

Подставляя полученные коэффициенты $b_k(q_2)$ в соотношение (6.109), находим

$$\Theta(z,\tau) = 1-(1-q_2)\left(2-\frac{z}{z_n}\right)\frac{z}{z_n}. \tag{6.110}$$

Подставляя (6.110) в (6.108), для неизвестной функции $q_2(\tau)$ будем иметь интегральное уравнение вида

$$\int_0^{z_n}\left[\lambda_i C_1 + \sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}C_{i+1} - \lambda_i C_i) H(z-z_i)\right]\left[1-(1-q_2)\left(2-\frac{z}{z_n}\right)\frac{z}{z_n}\right] dz = \frac{2}{z_n}(1-q_2).$$

Преобразовывая левую часть последнего соотношения, находим

$$\frac{1}{\tau}\left\{\int_0^{z_n}\lambda_i C_1\left[1-(1-q_2)\left(2-\frac{z}{z_n}\right)\frac{z}{z_n}\right]dz + \int_{z_i}^{z_n}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}C_{i+1}-\lambda_i C_i)H(z-z_i)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[1-(1-q_2)\left(2-\frac{z}{z_n}\right)\frac{z}{z_n}\right]dz\right\} = \frac{2}{z_n}(1-q_2). \tag{6.111}$$

Вычисляя интегралы в левой части выражения (6.111), получаем

$$\frac{q_2}{z}\left[\frac{2}{3}\lambda_i C_1 z_n + \sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}C_{i+1}-\lambda_i C_i)H(z-z_i)\left(\frac{2}{3}z_n - \frac{z_i^2}{z_n} + \frac{z_i^3}{z_n^2}\right)\right] = \frac{2}{z_n}(1-q_2). \tag{6.112}$$

Учитывая, что $H(z_n - z_i) = 1$, после некоторых преобразований находим

$$\frac{z_n}{3}\left[2\lambda_1 C_1 + 2\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}C_{i+1}-\lambda_i C_i) - \sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}C_{i+1}-\lambda_i C_i)\times\right.$$

$$\left.\times\left(3-\frac{z_i}{z_n}\right)\frac{z_i^2}{z_n^2}\right] + \frac{dq}{dz} = \frac{2}{z_n}(1-q_2). \tag{6.113}$$

Второе слагаемое левой части выражения (6.113) будет иметь вид

$$2\sum_{i=1}^{n-1}\left(\lambda_{i+1}C_{i+1}-\lambda_i C_i\right)=2\left(\lambda_n C_n-\lambda_1 C_1\right). \tag{6.114}$$

После подстановки (6.114) в (6.113) для неизвестной функции $q_2(\tau)$ находим дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{1-q_2}\frac{dq_2}{d\tau}=\frac{3}{\frac{2}{z_n}\left[\lambda_n C_n-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\lambda_{i+1}C_{i+1}-\lambda_i C_i\right)\left(3-\frac{z_i}{z_n}\right)\left(\frac{z_i}{z_n}\right)^2\right]}. \tag{6.115}$$

Интегрируя уравнение (6.115) при начальном условии $q_2(\tau_1)=0$, находим

$$q_2(\tau)=1-\exp\left\{-\frac{3(\tau-\tau_1)}{z_n^2\left[\lambda_n C_n-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\lambda_{i+1}C_{i+1}-\lambda_i C_i\right)\left(3-\frac{z_i}{z_n}\right)\left(\frac{z_i}{z_n}\right)^2\right]}\right\}. \tag{6.116}$$

Соотношения (6.110), (6.116) являются решением задачи (6.101) – (6.104) в первом приближении. Решение (6.109) удовлетворяет условиям (6.102) – (6.104), соотношению (6.108) и при $\tau=\tau_1$ – условию (6.105). Уравнение (6.101), как следует из (6.108), выполняется лишь в среднем.

Соотношение (6.113) для контакта двух тел будет

$$q_2(\tau)=1-\frac{\exp(-3(\tau-\tau_1))}{z_2^2\left[\lambda_2 C_2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\lambda_2 C_2-\lambda_1 C_1\right)\left(3-\frac{z_i}{z_2}\right)\left(\frac{z_i}{z_2}\right)^2\right]}. \tag{6.117}$$

Для увеличения точности получения решения задачи (6.101) – (6.104) требуется увеличение степени полинома (6.109). Для вычисления его коэффициентов будем применять дополнительные краевые условия, имеющие вид (физический смысл их такой же, как и условий (6.96)):

$$\partial^2\Theta(0,\tau)/\partial z^2=0;\qquad \frac{\partial^2\Theta(z_{\text{n}},\tau)}{\partial z^2}=\lambda_n C_n\frac{\partial q_2(\tau)}{\partial\tau};\qquad \partial^3\Theta(z_{\text{n}},\tau)/\partial z^3=0. \tag{6.118}$$

Подставляя (6.109), ограничиваясь шестью слагаемыми ряда, в исходные соотношения (6.102) – (6.104) и дополнительные условия (6.118), для неизвестных коэффициентов $b_k(q_2)\left(k=\overline{0,5}\right)$ приходим к цепочной системе шести алгебраических уравнений. После определения коэффициентов $b_k(q_2)$ выражение (6.109) принимает вид

$$\Theta(z,\tau)=1-\frac{1}{2}\left[5\frac{z}{z_n}-10\left(\frac{z}{z_n}\right)^3+10\left(\frac{z}{z_n}\right)^4-3\left(\frac{z}{z_n}\right)^5\right]\left(1-q_2\right)+$$

$$+\frac{1}{8}\lambda_n C_n z_n{}^2\left[3\frac{z}{z_n}-14\left(\frac{z}{z_n}\right)^3+16\left(\frac{z}{z_n}\right)^4-5\left(\frac{z}{z_n}\right)^5\right]\frac{dq_2}{d\tau}. \qquad (6.119)$$

Подставляя (6.119) в соотношении (6.108), находим

$$\frac{1}{4}z_n\left(\frac{dq_2}{d\tau}\right)\left\{3\lambda_n C_n-\sum_{i=1}^{n-1}\left(\lambda_{i+1}C_{i+1}-\lambda_i C_i\right)\left(\frac{z_i}{z_n}\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\left[5-5\left(\frac{z_i}{z_n}\right)^2+4\left(\frac{z_i}{z_n}\right)^3-\left(\frac{z_i}{z_n}\right)^4\right]\right\}+\frac{1}{240}\lambda_n C_n z_n{}^3\left(\frac{d^2q_2}{d\tau^2}\right)\times$$

$$=\frac{3}{8}\lambda_n C_n z_n\frac{dq_2}{d\tau}-\frac{5}{2z_n}(1-q_2). \qquad (6.120)$$

Из (6.120) для функции $q_2(\tau)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2q_2}{d\tau^2}+a\frac{dq_2}{d\tau}+600(q_2-1)/(lz_n{}^2)=0, \qquad (6.121)$$

где $a=\dfrac{30}{l}\left\{9\lambda_n C_n-2\sum_{i=1}^{n-1}\left(\lambda_{i+1}C_{i+1}-\lambda_i C_i\right)\left[5-5\left(\frac{z_i}{z_n}\right)^2+4\left(\frac{z_i}{z_n}\right)^3-\left(\frac{z_i}{z_n}\right)^4\right]\left(\frac{z_i}{z_n}\right)^2\right\};$

$$l=\lambda_n C_n z_n{}^2\left\{11\lambda_n C_n-\sum_{i=1}^{n-1}\left(\lambda_{i+1}C_{i+1}-\lambda_i C_i\right)\left[45-105\left(\frac{z_i}{z_n}\right)^2+96\left(\frac{z_i}{z_n}\right)^3-25\left(\frac{z_i}{z_n}\right)^4\right]\left(\frac{z_i}{z_n}\right)^2\right\}.$$

Решая уравнения (6.121) при начальных условиях $q_2(\tau_1)=0$; $\dfrac{dq_2(\tau_1)}{d\tau}=0$, находим

$$q_2(\tau)=1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\mu}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}(\mu-a)(\tau-\tau_1)\right]-\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{\mu}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}(\mu+a)(\tau-\tau_1)\right], \qquad (6.122)$$

где $\mu=\sqrt{a^2-2400/(lz_n{}^2)}$.

Для производной от $q_2(\tau)$ имеем

$$\frac{dq_2(\tau)}{d\tau}=\frac{600}{l\mu z_n{}^2}\left\{\exp\left[-\frac{1}{2}(\mu-a)(\tau-\tau_1)\right]-\exp\left[-\frac{1}{2}(\mu+a)(\tau-\tau_1)\right]\right\}. \qquad (6.123)$$

Выражение (6.119), учитывая (6.122), (6.123), является решением задачи (6.101) – (6.104) для второго приближения. Если положить $\lambda_1=\lambda_2$, $C_1=C_2$, то формулы (6.87), (6.97), (6.110), (6.119) приводятся к соотношениям, полностью совпадающим с решениями для 1-ой и 2-ой стадий процесса применительно к однослойной пластине (формулы (6.10), (6.41), (6.22), (6.57)).

Данные расчетов по формуле (6.119) даны на рисунке 6.10. Сравнение полученных результатов с решением задачи (6.63) – (6.66) по методу Л.В. Канторовича (восьмое приближение) [84] позволяет заключить, что при $\tau\geq 0{,}7$ их отличие не более 1,5 %. В

диапазоне $0{,}001 \le \tau \le \tau_1$ (где $\tau_1 = 0{,}342\,c$ – время достижения фронтом теплового возмущения координаты $x = x_2$ по методу Л.В. Канторовича) наибольшее расхождение составляет 2,5 % (отметим, что согласно формуле (6.100) $\tau_1 = 0{,}36\,c$). При $\tau < 0{,}001$ расхождение возрастает, что объясняется уменьшением точности решения, определяемого методом Канторовича Л.В.

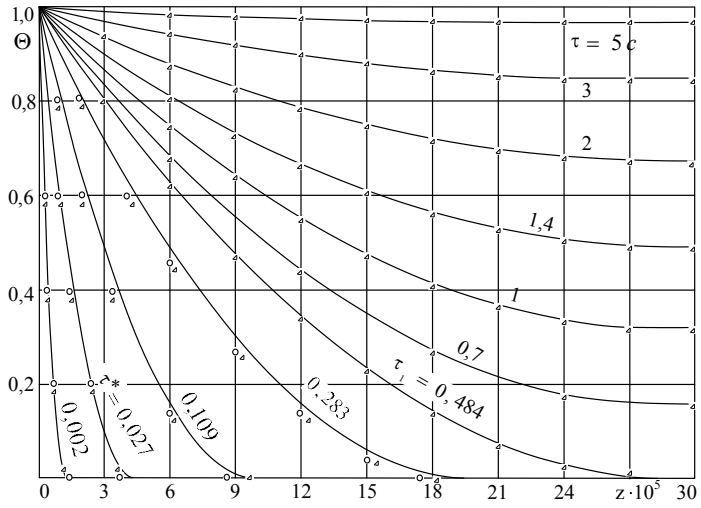


Рисунок 6.10. Распределение температуры в двухслойной пластине для переменной z: ——— – по формуле (6.87) (при $0{,}002 \le \tau \le 0{,}484$) и (6.119) ($\tau > 0{,}484$); ∘ – по формуле (6.97); △ – по методу Л.В. Канторовича

Результаты исследования задачи теплопроводности для многослойной конструкции были использованы в ходе выполнения энергетического аудита объектов СамГТУ с целью определения нестационарных температурных полей многослойных ограждающих конструкций зданий. Для автоматической системы управления на основании расчетов были заданы энергосберегающие режимы работы приточно-вытяжной вентиляции и системы водяного отопления, позволяющие экономить тепловую энергию в выходные и праздничные дни, ночное время.

На основе выполненных расчетов потерь теплоты через ограждающие конструкции в каждом отдельном помещении рассчитаны мощности приборов для их отопления, а также выполнена оценка мощности установленных в настоящее время отопительных приборов. По результатам расчетов даны рекомендации по корректировке (уменьшению или увеличению) мощности отопительных приборов в каждом помещении зданий СамГТУ.

Экономический эффект от внедрения энергосберегающих мероприятий, включенных в энергетический паспорт зданий СамГТУ, составляет более 5 млн. рублей в год (см. акт внедрения в приложении 1).

Выводы.

Используя математический аппарат обобщенных функций, путем введения фронта теплового возмущения и дополнительных краевых условий найдено приближенное решение нестационарной задачи теплопроводности для n- слойной конструкции. Разделение теплообмена на две стадии с помощью введения фронта теплового возмущения позволяет не

выполнять начальное условие по всей толщине конструкции, заменяя его начальным условием, которое удовлетворяется лишь в точке $z = 0$. Таким путем удается избежать используемую в классических методах линейную суперпозицию частных решений, которая приводит к существенному усложнению аналитического решения и, как правило, к плохой его сходимости при малых значениях времени. В данном случае для каждой стадии процесса получаются достаточного простого вида приближенные решения, позволяющие выполнять расчеты температурного поля практически во всем диапазоне времени. Ввиду использования дополнительных краевых условий возможно получение решений практически с заданной точностью, что особенно актуально для первой стадии ввиду возможности получений решений для малых значений времени.

6.3 Исследование теплообмена в турбулентном пограничном слое на основе вычисления фронта теплового возмущения и дополнительных краевых условий

При обтекании поверхности пластины потоком среды на стенке возникает ламинарный динамический пограничный слой $\delta_л$ (рисунок 6.11). В случае больших скоростей происходит срыв ламинарного течения и движение жидкости в пограничном слое становится турбулентным. В турбулентном слое $\delta_т$ на поверхности сохраняется вязкий подслой $\delta_п$, где течение жидкости остается ламинарным [14, 42, 93, 128].

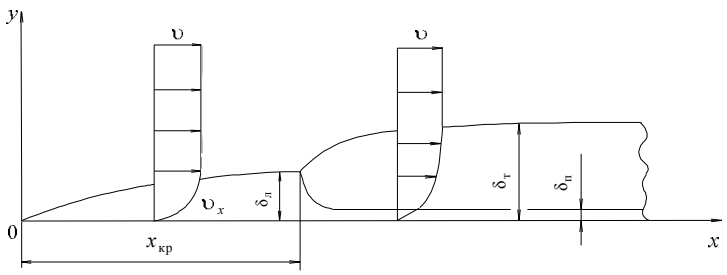


Рисунок 6.11. Схема ламинарного $\delta_л$ и турбулентного $\delta_т$ пограничных слоев: $\delta_п$ – ламинарный вязкий подслой; υ – скорость невозмущенного потока; $x_{кр}$ – критическая величина координаты x

В работах [68, 108], используя интегральные уравнения Т. Кармана и Г.Н. Кружилина соответственно для динамического и теплового пограничных слоев, путем введения дополнительных краевых условий найдены аналитические решения дифференциальных уравнений Л. Прандтля (для ламинарного динамического) и Польгаузена (для теплового) пограничного слоя.

При турбулентном движении происходят неравномерные колебания во времени скоростей, температур и давлений, называемые пульсациями. С целью анализа турбулентного движения выполняется его разложение на осредненное и пульсационное. Актуальная величина составляющей скорости υ, осредненная по времени, обозначается как $\overline{\upsilon}$, а пульсационная составляющая – как υ'. Тогда [87]

$$\upsilon = \overline{\upsilon} + \upsilon'; \quad \nu = \overline{\nu} + \nu'; \quad p = \overline{p} + p'; \quad t = \overline{t} + t', \tag{6.124}$$

где υ – скорость; ν – коэффициент кинематической вязкости; p – давление; t – время.

За осредненную величину принимается среднее значение физической величины на некотором интервале времени, выбранном так, чтобы осредненная величина не зависела от ширины этого интервала. Следовательно, пульсацией некоторой физической величины является разность между действительной и осредненной ее величинами.

Уравнения движения (равновесия) для турбулентного погранслоя находятся так же, как и для ламинарного, используя при этом соотношения (6.124). Выведенное таким образом уравнение равновесия имеет вид

$$\rho\overline{\upsilon}_x \frac{\partial \overline{\upsilon}_x}{\partial x} + \rho\overline{\upsilon}_y \frac{\partial \overline{\upsilon}_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \overline{\upsilon}_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\,\overline{\upsilon'_x \upsilon'_y}\right), \tag{6.125}$$

где υ'_x, υ'_y – пульсационные скорости.

В соотношении (6.125) 1-ый член правой части характеризует микроскопическое движение частиц, а второе – макроскопическое перемещение турбулентных объемов. Согласно Прандтлю осредненное по времени значение $\overline{\upsilon'_x \upsilon'_y}$ при предположении, что продольная пульсация скорости одинакова с поперечной ($\upsilon'_x = \upsilon'_y = l\,d\,\overline{\upsilon}_x / dy$), записывается в виде

$$\overline{\upsilon'_x \upsilon'_y} = -l\left|\frac{d\,\overline{\upsilon}_x}{dy}\right| l\frac{d\,\overline{\upsilon}_x}{dy} = -l^2\left|\frac{d\,\overline{\upsilon}_x}{dy}\right|\frac{d\,\overline{\upsilon}_x}{dy} = -l^2\left(\frac{d\,\overline{\upsilon}_x}{dy}\right)^2,$$

где l – длина пути смешивания – расстояние, на которое перемещается элементарный объем среды из одного слоя в другой, причем таким образом, чтобы разность скоростей данного элемента и близлежащего слоя равнялась бы осредненной пульсации скорости предыдущего слоя.

Прандтлем была предложена следующая зависимость пути смешивания от координаты y:

$$l = \chi y, \tag{6.126}$$

где $\chi = 0{,}4$ – коэффициент, найденный Прандтлем экспериментально.

Уравнение (6.125) содержит 4-е неизвестных $\overline{\upsilon_x}$, $\overline{\upsilon_y}$, υ'_x, υ'_y. Для исключения неизвестных υ'_x и υ'_y Буссинеск предположил, что турбулентное касательное напряжение находится по формуле, которая аналогична уравнению Ньютона $\tau = -\mu\, du / dy$, имеющей вид

$$\tau_т = -\rho\overline{\upsilon'_x \upsilon'_y} = -\mu_т\left(\frac{\partial \overline{\upsilon}_x}{\partial y}\right), \tag{6.127}$$

где μ – динамическая вязкость; $\mu_т$ – коэффициент динамической турбулентной вязкости.

В отличие от μ , $\mu_т$ характеризует режим движения жидкости, а не ее физическое свойство.

Уравнение (6.125) с учетом (6.127) будет

$$\overline{\upsilon}_x \frac{\partial \overline{\vartheta}_x}{\partial x} + \overline{\upsilon}_y \frac{\partial \overline{\upsilon}_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\nu + \nu_{\text{т}}\right) \frac{\partial \overline{\upsilon}_x}{\partial y} \right], \tag{6.128}$$

где $\nu = \mu/\rho$, $\nu_{\text{т}} = \mu_{\text{т}}/\rho$ – кинематическая и кинематическая турбулентная вязкость жидкости; ρ – плотность.

Кинематическая турбулентная вязкость согласно гипотезам Прандтля и Буссинеска находится из соотношения

$$\nu_{\text{т}} = l^2 \left| \frac{\partial \overline{\upsilon}_x}{\partial y} \right|. \tag{6.129}$$

Из уравнения (6.128) следует, что пульсационное движение со скоростями υ'_x и υ'_y оказывает влияние на осредненное движение с скоростями $\overline{\upsilon}_x$ и $\overline{\upsilon}_y$ так, что в осредненном течении будто бы возрастает вязкость.

В случае, если осредненные величины, которые характеризуют турбулентное движение, не меняются во времени, то оно является стационарным. Если осредненная скорость $\overline{\upsilon}_x$ зависит от времени, то в левую часть соотношения (6.128) необходимо прибавить слагаемое $\partial \overline{\upsilon}_x / \partial t$.

Сравнивая уравнения равновесия применительно к ламинарному и турбулентному пограничным слоям, можно отметить, что во втором уравнении возникает дополнительное слагаемое, которое представляет турбулентное касательное напряжение $\tau_{\text{т}} = \mu_{\text{т}} \partial \overline{\upsilon}_x / \partial y$. Тогда полное напряжение для турбулентного потока будет

$$\tau_{\text{п}} = \left(\mu + \mu_{\text{т}}\right) \frac{\partial \overline{\upsilon}_x}{\partial y}.$$

Уравнение (6.128) содержит две неизвестные $\overline{\upsilon}_x$ и $\overline{\upsilon}_y$. Для его замыкания следует добавить еще уравнение неразрывности, которое выполняется для пульсационных и осредненных скоростей

$$\partial \overline{\upsilon}_x / \partial x + \partial \overline{\upsilon}_y / \partial y = 0. \tag{6.130}$$

Нахождение решений уравнений (6.128), (6.130) осложняется тем, что постановка задачи включает также уравнение равновесия для ламинарного подслоя, что связано с необходимостью удовлетворения условий сопряжения на контакте между слоями. Такие задачи крайне сложны, их аналитические решения пока не получены. Поэтому для определения скоростей в турбулентном погранслое используются различные эмпирические зависимости. Так, при решении краевой задачи об изменении температуры в турбулентном погранслое для определения скорости будет использована эмпирическая формула

$$\upsilon_x / \upsilon = \left[y / \delta(x) \right]^n, \tag{6.131}$$

где υ – скорость невозмущенного потока; $\delta(x)$ – толщина турбулентного погранслоя; n – показатель степени, который принимается из эмпирических данных.

Толщина турбулентного погранслоя без учета вязкого подслоя (т. е. в предположение, что турбулентный погранслой формируется, начиная от кромки пластины) определяется по следующей формуле, найденной эмпирически [93]:

$$\delta(x) = 0{,}37x / \mathrm{Re}^{0.2}. \tag{6.132}$$

Уравнение энергии для погранслоя без учета диссипации имеет вид

$$\rho c_p \overline{\upsilon}_x \frac{\partial \bar{t}}{\partial x} + \rho c_p \overline{\upsilon}_y \frac{\partial \bar{t}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial \bar{t}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho c_p \overline{\upsilon'_y t'}\right), \tag{6.133}$$

где $\bar{t}$, t' – осредненная и пульсационная температуры; c_p – теплоемкость при постоянном давлении.

Замыкание уравнения (6.133) связано с необходимостью исключения из него пульсационной величины. Так же, как это было проделано для уравнения (6.125), положим, что содержащее пульсационные величины слагаемое можно представить через градиент осредненной температуры:

$$-\rho c_p \overline{\upsilon'_y t'} = \lambda_{\text{т}}\left(\frac{\partial \bar{t}}{\partial y}\right), \tag{6.134}$$

где $\lambda_{\text{т}}$ – коэффициент теплопроводности, характеризующий режим течения жидкости.

Уравнение (6.133) с учетом (6.134) будет (здесь и далее черту над осредненными величинами опускаем)

$$\upsilon_x \frac{\partial t}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(a + a_{\text{т}})\frac{\partial t}{\partial y}\right], \tag{6.135}$$

где $a_{\text{т}} = \lambda_{\text{т}} / (\rho c_p)$ – коэффициент турбулентной температуропроводности.

Получим решение уравнения (6.135) в случае, если суммарные коэффициенты молекулярной и турбулентной теплопроводности и температуропроводности представляются в виде

$$\lambda_{\text{э}} = \lambda + \lambda_{\text{т}}; \quad a_{\text{э}} = a + a_{\text{т}}. \tag{6.136}$$

Полный тепловой поток здесь будет

$$q_{\text{п}} = q + q_{\text{т}} = (\lambda + \lambda_{\text{т}})\frac{\partial t}{\partial y}. \tag{6.137}$$

Уравнение (6.135) с учетом (6.136) приводиться к виду

$$\upsilon_x \frac{\partial t}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial t}{\partial y} = a_{\text{э}} \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}. \tag{6.138}$$

Уравнение (6.138) имеет такой же вид, как и уравнение Польгаузена при ламинарном погранслое. Граничные условия для этого слоя будут (рисунок 6.12):

$$t(x,0)=t_{\text{ст}}\ ; \qquad (6.139) \qquad t(x,\Delta)=t_{\text{ср}}; \qquad (6.140) \qquad \frac{\partial t(x,\Delta)}{\partial y}=0, \qquad (6.141)$$

где $t_{\text{ст}}$ – температура стенки; $t_{\text{ср}}$ – температура невозмущенной среды; $\Delta(x)$ – толщина температурного погранслоя.

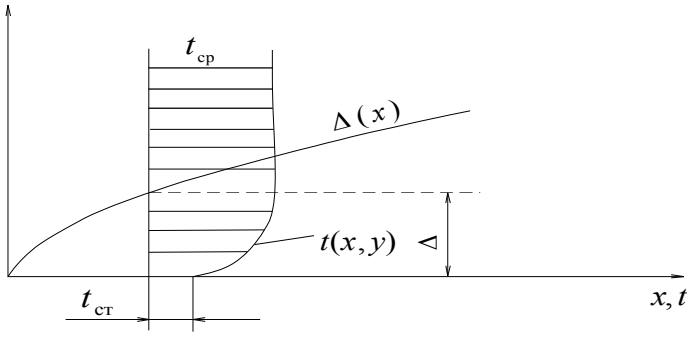


Рисунок 6.12. Схема теплового погранслоя при $t_{\text{ст}} < t_{\text{ср}}$ ($t_{\text{ст}}$ – температура стенки; $t_{\text{ср}}$ – температура невозмущенной жидкости); $\Delta(x)$ – толщина теплового погранслоя

Согласно соотношению (6.139), температура среды на стенке $(y=0)$ равна температуре стенки. Соотношения (6.140), (6.141) являются условиями сопряжения прогретой и непрогретой областей. Согласно (6.140) , температура на границе теплового погранслоя одинакова с температурой невозмущенного потока. Из (6.141) следует, что тепловой поток на фронте температурного возмущения равен нулю.

Потребуем, чтобы получаемое решение удовлетворяло не уравнению (6.138) , а некоторому осредненному, то есть уравнению (6.138), проинтегрированному в пределах теплового погранслоя $0 \le y \le \Delta(x)$:

$$\int_0^{\Delta} \upsilon_x \frac{\partial t(x,y)}{\partial x}dy+\int_0^{\Delta} \upsilon_y \frac{\partial t(x,y)}{\partial y}dy = a\int_0^{\Delta}\frac{\partial^2 t(x,y)}{\partial y^2}dy\,. \qquad (6.142)$$

Производя интегрирование по частям, с использованием уравнения сплошности (6.130) находим

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\Delta}\upsilon_x\left(t_{\text{ср}}-t(x,y)\right)dy = a\frac{\partial t(x,0)}{\partial y}\ . \qquad (6.143)$$

Соотношение (6.143) представляет интеграл теплового баланса.

Идея его применения состоит в том, что при решении задачи (6.138) – (6.141) требуется удовлетворение не основного уравнения (6.138), а осредненного по толщине теплового погранслоя, сводящегося в итоге к интегральному уравнению (6.143). Подобное осреднение понижает точность решения уравнения (6.138). Но, как будет показано далее, применение дополнительных краевых условий позволяет получить такое приближенное аналитическое решение, которое в зависимости от количества приближений удовлетворяет уравнению (6.138) практически с заданной точностью.

Первое краевое граничное условие находится из удовлетворения искомым решением уравнения (6.138) в точке $y = 0$. Так как при $y = 0$ $\upsilon_x = \upsilon_y = 0$, то уравнение (6.138) приводится к соотношению

$$\partial^2 t(x,0)/\partial y^2 = 0, \qquad (6.144)$$

которое используется как дополнительное краевое условие.

Введем избыточную температуру $T = t - t_{ст}$. Тогда $T_{ср} = t_{ср} - t_{ст}$. Интегральное уравнение (6.143) и граничные условия (6.139) – (6.141), (6.144) для избыточной температуры имеют вид:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\Delta} \upsilon_x \left[T_{ср} - T(x,y)\right] dy = a\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}\ ; \qquad (6.145)$$

$$T(x,0) = 0; \qquad (6.146) \qquad T(x,\Delta) = T_{ср}\ ; \qquad (6.147)$$

$$\partial T(x,\Delta)/\partial y = 0; \quad (6.148) \qquad \partial^2 T(x,0)/\partial y^2 = 0. \qquad (6.149)$$

Сопоставляя уравнения (6.128) и (6.135), можно заключить, что при $\nu_э = a_э$, где $\nu_э = \nu + \nu_т$, т. е., когда $\mathrm{Pr} = \nu_э / a_э = 1$, по форме они совпадают. Если представить математические постановки задач в безразмерном виде (принимая однослойную модель), то одинаковыми оказываются и граничные условия. Следовательно, безразмерные решения таких задач будут совпадать, а размерные изменения скоростей и температур по оси x взаимно подобны. Таким образом, отношение теплового и динамического погранслоев не зависит от координаты x. Данное условие будет применено далее при решении обыкновенного дифференциального уравнения для толщины теплового погранслоя $\Delta(x)$.

Появление динамического и теплового погранслоев связано с переносом импульса и теплоты в направлении поперечной координаты y. Отсюда следует, что толщина каждого из них зависит от интенсивности соответствующего процесса переноса. Интенсивность переноса импульса характеризует коэффициент кинематической вязкости, теплоты – коэффициент температуропроводности. Следовательно, отношение толщин этих пограничных слоев будет зависеть от отношения коэффициентов переноса, то есть от значения числа $\mathrm{Pr} = \nu / a$. Чем больше значение числа Прандтля, тем большим является перенос импульса в сравнении с переносом теплоты и, следовательно, тем большей здесь будет толщина пограничного динамического слоя в сравнении с тепловым.

Так как толщины динамического и теплового погранслоев подчиняются условию $\Delta(x) \le \delta(x)$, то величина числа Прандтля должна быть $\mathrm{Pr} \ge 1$. Данное условие выполняется для жидкостей (неэлектропроводных) $(\mathrm{Pr} > 1)$ и для газов $(\mathrm{Pr} \approx 0{,}75)$, но и не выполняется для жидких металлов вследствие их высокой температуропроводности ($10^{-3} \le \mathrm{Pr} \le 10^{-2}$).

Решение задачи (6.145) – (6.149) будем разыскивать в виде

$$T(x,y)=\sum_{k=0}^{n}a_k(\Delta)y^k\,, \tag{6.150}$$

где $a_k(\Delta)$ – коэффициенты, которые определяются из условий (6.146) – (6.149); $\Delta(x)$ − толщина теплового погранслоя.

Подставляя (6.150) (для четырех членов ряда) в (6.146) – (6.149), для неизвестных $a_k(\Delta)$ $(k=0,1,2,3)$ будем иметь систему алгебраических уравнений, решение которой будет

$$a_0=0;\quad a_1=\frac{3}{2}\frac{T_{\text{ср}}}{\Delta};\quad a_2=0;\quad a_3=-\frac{T_{\text{ср}}}{2\Delta^3}\,. \tag{6.151}$$

После подстановки (6.151) в (6.150) получим

$$\frac{T}{T_{\text{ср}}}=\frac{3}{2}\frac{y}{\Delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^3. \tag{6.152}$$

Подстановкой (6.131) и (6.152) в уравнение (6.145), относительно неизвестной функции $\Delta(x)$ приходим к уравнению вида:

$$\upsilon T_{\text{ср}}\frac{343}{1160}\frac{d}{dx}\left[\beta^{8/7}\delta(x)\right]=a\frac{3}{2}\frac{T_{\text{ср}}}{\beta\delta(x)}\,, \tag{6.153}$$

где $\beta=\Delta(x)/\delta(x)$.

Из-за независимости величины β от координаты x, последнее соотношение будет таким:

$$\frac{343}{1740}\upsilon\beta^{15/7}\delta(x)d\delta(x)=adx\,. \tag{6.154}$$

где $\delta(x)$ определяется по формуле (6.132) [93].

Интегрируя уравнение (6.154) с начальным условием $\Delta(0)=0$, находим

$$\Delta(x)=\frac{1{,}99625}{x^6\upsilon^7}\cdot\frac{(a\,\mathrm{Re}^{2/5}\upsilon^{14}x^{14})^{7/15}}{\mathrm{Re}^{1/5}}. \tag{6.155}$$

Выражения (6.152), (6.155) являются решением задачи (6.138) – (6.141), (6.144) для первого приближения. Подстановкой можно получить, что выражение (6.152) точно удовлетворяет условиям (6.139) – (6.141), (6.144) и уравнению (6.145). Основное уравнение (6.138), как следует из (6.145), выполняется в данном случае лишь в среднем.

Возрастание точности решения краевой задачи (6.138) – (6.141), (6.144) достигается увеличением степени полинома (6.150), неизвестные коэффициенты которого определяются из дополнительных краевых условий. Первое из них будет (6.149). При получении решения во 2-ом приближении к условиям (6.145) – (6.149) следует добавить следующие условия:

$$\partial T^2(x,\Delta)/\partial y^2=0;\qquad \partial^3T(x,\Delta)/\partial y^3=0\,, \tag{6.156}$$

которые выполняются на границе погранслоя.

Подставляя (6.150) (для шести членов ряда) в условия (6.146) – (6.149), (6.156), (6.157), для коэффициентов $a_k\ (k=\overline{0,5})$ будем иметь цепочную систему 6-и алгебраических уравнений. Подставляя полученные из ее решения значения коэффициентов a_k в (6.150), находим

$$\frac{T(x,y)}{T_{\text{ср}}}=\frac{5}{2}\frac{y}{\Delta}-5\left(\frac{y}{\Delta}\right)^3+5\left(\frac{y}{\Delta}\right)^4-\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^5. \qquad (6.157)$$

Подставляя (6.157) в интегральное уравнение (6.145), после вычисления интегралов для неизвестной функции $\Delta(x)$ получаем уравнение вида:

$$\upsilon T_{\text{ср}}\frac{16807}{89784}\frac{d}{dx}\left[\beta^{8/7}\delta(x)\right]=a\frac{5}{2}\frac{T_{\text{ср}}}{\beta\delta(x)}, \qquad (6.158)$$

где $\beta=\Delta(x)/\delta(x)$.

Из-за независимости величины β от координаты x соотношение (6.158) приводится к виду

$$\frac{16807}{224460}\upsilon\beta^{15/7}\delta(x)d\delta(x)=adx. \qquad (6.159)$$

Интегрируя уравнение (6.159) с начальным условием $\Delta(0)=0$, находим

$$\Delta(x)=\frac{3{,}137}{x^6\upsilon^7}\cdot\frac{(a\,\mathrm{Re}^{2/5}\upsilon^{14}x^{14})^{7/15}}{\mathrm{Re}^{1/5}}. \qquad (6.160)$$

Выражения (6.157), (6.160) являются решением задачи (6.138) – (18), (6.144) для второго приближения. Данные расчетов температур $\Theta=T/T_{\text{ср}}$ на основании соотношения (6.157) представлены на рисунке 6.13. Из его анализа следует, что повышение точности решения во 2-ом приближении в сравнении с 1-ым составляет около 3 % для $0{,}5\le\eta\le3{,}0$.

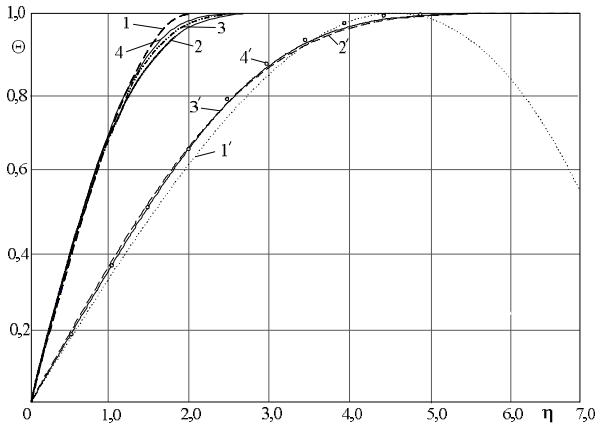


Рисунок 6.13. Распределение безразмерной температуры $\Theta=T/T_{\text{ср}}$: 1, 2, 3, 4 – 1-ое, 2-ое, 3-е, 4-ое приближения – турбулентное течение; 1′, 2′, 3′ – соответственно 1-ое, 2-ое, 3-ье приближения – ламинарное течение; 4′ – точное решение [128] (ламинарное течение)

Соотношение (6.157) точно удовлетворяет основным (6.139) – (6.141), (6.144) и дополнительным (6.156), (6.157) условиям и уравнению (6.145). В сравнении с первым приближением здесь более точно выполняется уравнение (6.138) ввиду удовлетворения

дополнительных условий, следуя которым уравнение (6.138) выполняется в точках $y=0$ и $y=\Delta(x)$, то есть на границе фронта возмущения. Так как фронт теплового возмущения перемещается во всем диапазоне координаты y, то уточнение решения уравнения (6.138) наблюдается во всей области изменения неизвестной функции.

Дополнительные условия для нахождения решения в 3-ем приближении будут

$$\partial T^3(x,0)/\partial y^3=0; \qquad \partial^4 T(x,\Delta)/\partial y^4=0; \qquad \partial^5 T(x,\Delta)/\partial y^5=0. \tag{6.161}$$

Общая формула для дополнительных условий при любом приближении имеет вид

$$\partial T^i(x,0)/\partial y^i=0; \qquad \partial^i T(x,\Delta)/\partial y^i=0; \qquad \partial^{i+1} T(x,\Delta)/\partial y^{i+1}=0, \tag{6.162}$$

где $i=2,3,4,\ldots$ – соответственно для 2-ого, 3-его, 4-ого и последующих приближений. В каждом следующем приближении, начиная с 3-его, необходимо применять по три дополнительных условия – использование меньшего их числа не приводит к существенному увеличению точности.

Граничные условия (6.146) – (6.149) , (6.156), (6.157), (6.161) позволяют найти 9 неизвестных коэффициентов $a_k(\Delta)$ $(k=\overline{0,8})$ соотношения (6.150) и получить решение в 3-ем приближении. Подставляя (6.150) в указанные граничные условия, для коэффициентов $a_k(\Delta)$ приходим к решению цепочной системы алгебраических уравнений. После их подстановки в (6.150) находим

$$\frac{T(x,y)}{T_{\text{ср}}}=\frac{8}{3}\frac{y}{\Delta}-\frac{70}{3}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^4+56\left(\frac{y}{\Delta}\right)^5-56\left(\frac{y}{\Delta}\right)^6+\frac{80}{3}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^7-5\left(\frac{y}{\Delta}\right)^8. \tag{6.163}$$

Подставляя (6.163) в интегральное уравнение (6.145), для функции $\Delta(x)$ получаем уравнение вида:

$$\upsilon T_{\text{ср}}\frac{5764801}{35294400}\frac{d}{dx}\left[\beta^{8/7}\delta(x)\right]=a\frac{8}{3}\frac{T_{\text{ср}}}{\beta\delta(x)}. \tag{6.164}$$

Учитывая, что $\beta=\Delta(x)/\delta(x)$ не зависит от координаты x, находим

$$\frac{17294403}{282355200}\upsilon\,\beta^{15/7}\delta(x)d\delta(x)=adx. \tag{6.165}$$

Решение уравнения (6.165) с учетом начального условия $\Delta(0)=0$ имеет вид

$$\Delta(x)=\frac{3{,}445}{x^6\upsilon^7}\cdot\frac{(a\,\mathrm{Re}^{2/5}\upsilon^{14}x^{14})^{7/15}}{\mathrm{Re}^{1/5}}. \tag{6.166}$$

Выражения (6.163), (6.166) являются решением задачи (6.138) – (6.141), (6.144) для третьего приближения. Данные расчетов по (6.163) даны на рисунке 6.13. Их анализ приводит к выводу, что отклонение температур, найденных по формуле (6.163), от их величин во 2-ом приближении не превышает 1 %, что подтверждает сходимость приближений.

Дополнительные условия при получении решения задачи (6.138) – (6.141), (6.144) в четвертом приближении получаются по формулам (6.162). После определения неизвестных коэффициентов $a_k(\Delta)$ $(k=\overline{0,11})$ соотношение (6.150) примет вид

$$\frac{T}{T_{\text{ср}}}=\frac{11}{4}\frac{y}{\Delta}-\frac{231}{2}\frac{y^5}{\Delta^5}+462\frac{y^6}{\Delta^6}-825\frac{y^7}{\Delta^7}+825\frac{y^8}{\Delta^8}-\frac{1925}{4}\frac{y^9}{\Delta^9}+154\frac{y^{10}}{\Delta^{10}}-21\frac{y^{11}}{\Delta^{11}}. \quad (6.167)$$

Уравнение относительно β будет

$$\upsilon T_{\text{ср}}\frac{3107227739}{20511275200}\frac{d}{dx}\left[\beta^{8/7}\delta(x)\right]=a\frac{11}{4}\frac{T_{\text{ср}}}{\beta\delta(x)}. \quad (6.168)$$

Учитывая, что $\beta=\Delta(x)/\delta(x)$ не изменяется от координаты x, получаем

$$\frac{3107227739}{20511275200}\upsilon\beta^{15/7}\delta(x)d\delta(x)=adx. \quad (6.169)$$

Решая уравнение (6.169) с учетом начального условия $\Delta(0)=0$, будем иметь:

$$\Delta(x)=\frac{3{,}62}{x^6\upsilon^7}\cdot\frac{(a\,\mathrm{Re}^{2/5}\upsilon^{14}x^{14})^{7/15}}{\mathrm{Re}^{1/5}}. \quad (6.170)$$

Выражения (6.167), (6.170) являются решением задачи (6.138) – (6.141), (6.144) для четвертого приближения. Данные расчетов по (6.167) представлены на рисунке 6.13 (кривая 4) . Здесь же даны результаты для ламинарного погранслоя (кривые $1'$, $2'$, $3'$, $4'$). Из анализа результатов следует, что ширина турбулентного теплового погранслоя почти в два раза меньше ширины ламинарного погранслоя.

На основе найденных формул для температуры в турбулентном погранслое, применяя уравнение конвективной теплоотдачи, можно определить коэффициент теплообмена:

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{y=0}=\alpha\left(T_{\text{ср}}-T_{\text{ст}}\right); \quad (6.171) \qquad \alpha=\frac{\lambda}{(T_{\text{ср}}-T_{\text{ст}})}\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}. \quad (6.172)$$

При использовании решения в 1-ом приближении (соотношение (6.152) для коэффициента теплообмена находим соотношение

$$\alpha=1{,}5\lambda/\Delta(x). \quad (6.173)$$

Для нахождения решения (6.167) в четвертом приближении получаем

$$\alpha=2{,}75\lambda/\Delta(x). \quad (6.174)$$

Подставляя (6.170) в (6.174), находим критериальное уравнение для определения коэффициентов теплоотдачи

$$\mathrm{Nu}_x=0{,}75\,\mathrm{Re}^{0{,}48}\,\mathrm{Pr}^{0.47}, \quad (6.175)$$

где $\mathrm{Nu}_x=\dfrac{\alpha x}{\lambda}$ – число Нуссельта; λ – коэффициент теплопроводности жидкости.

В диапазоне чисел Рейнольдса $20\,000 \le \mathrm{Re} \ge 50\,000$ отличие значений критерия Нуссельта, определяемого по критериальному уравнению (6.175), от экспериментальных его величин [93] не превышает 25 %.

6.4 Использование метода дополнительных краевых условий при решении задачи Стефана

Путем определения фронта теплового возмущения и дополнительных краевых условий найдено приближенное решение задачи теплопроводности, учитывая перемещение фронта плавления при удалении расплавленного вещества (задача с абляцией).

Определяемыми величинами в таких задачах являются температура в нерасплавленном слое вещества и закономерность движения во времени фронта плавления. Для их нахождения эффективными являются методы, связанные с вычислением фронта теплового возмущения дополнительных краевых условий. При этом, кроме фронта плавления следует находить еще закон движения во времени фронта теплового возмущения [30, 202, 224].

В качестве примера получим решение краевой задачи теплопроводности с учетом плавления тела в случае его нагрева тепловым потоком. Эта задача с использованием интегрального метода решается в два этапа. Сначала рассматривается задача прогрева тела от начальной температуры T_0 до температуры плавления $T_{\text{пл}}$. Затем решается задача, в которой учитывается перемещение фронта плавления при одновременном учете фронта теплового возмущения.

Математическая постановка задачи для первой стадии в случае задания граничных условий второго рода записывается в виде (рисунок 6.14):

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0\,; \quad 0 \le x < \infty)\,; \tag{6.176}$$

$$T(x,0) = T_0\,; \tag{6.177}$$

$$-\lambda \frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x} = F\,, \tag{6.178}$$

где x – координата, T – температура, τ – время, a – температуропроводность, T_0 – начальная температура, λ – теплопроводность, F – тепловой поток.

Вводя в рассмотрение фронт теплового возмущения (рисунок 6.14), считаем, что при $x = \delta(\tau)$ температура равна начальной, а тепловой поток на фронте тепловой волны отсутствует, т. е.

$$T(\delta,\tau) = T_0\,; \tag{6.179}$$

$$\partial T(\delta,\tau)/\partial x = 0\,. \tag{6.180}$$

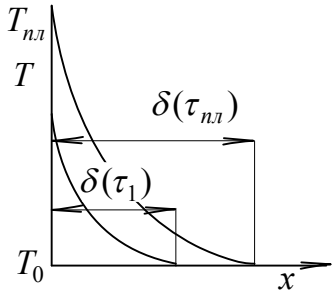


Рисунок 6.14. Расчетная схема теплообмена

Потребуем выполнения не основного уравнения, а некоторого осредненного – интеграла теплового баланса, который записывается в виде

$$\frac{d}{d\tau}\left[Q - T_0\delta(\tau)\right] = -a\frac{\partial T(0,\tau)}{\partial x}, \tag{6.181}$$

где $Q = \int_0^{\delta(\tau)} T(x,\tau)\,dx$.

Для безразмерной температуры имеем:

$$\frac{d}{d\tau}\int_0^{\delta(\tau)} \Theta(x,\tau)\,dx = -a\frac{\partial\Theta(0,\tau)}{\partial x}.$$

После определения фронта теплового возмущения постановка задачи принимает вид (6.176), (6.178) – (6.180). Эта задача не имеет начального условия (6.177), так как задача вида (6.176), (6.178) – (6.180) за фронтом теплового возмущения, т. е. при $x > \delta(\tau)$, не определена. Поэтому здесь не требуется выполнения начального условия по всей толщине пластины. В данном случае достаточно выполнить лишь условие (6.179).

Приближенное решение задачи (6.176), (6.178) – (6.180) будем искать в виде следующего ряда:

$$T(x,\tau) = \sum_{k=0}^{n} b_k(\delta)x^k. \tag{6.182}$$

Вычисляя неизвестные коэффициенты $b_k(\delta)$ $(k = 0, 1, 2)$ из условий (6.178) – (6.180) и подставляя их в (6.182), выражению (6.182) можно придать вид

$$T(x,\tau) = T_0 + F(x-\delta)^2/\left(2\lambda\delta\right). \tag{6.183}$$

После подстановки (6.183) в (6.181), для $\delta(\tau)$ будем иметь уравнение

$$\delta d\delta = 3ad\tau, \tag{6.184}$$

интегрирование которого с учетом начального условия $\delta(0) = 0$ приводит к соотношению

$$\delta(\tau) = \sqrt{6a\tau}. \tag{6.185}$$

Выражения (6.183), (6.185) являются решением задачи (6.176), (6.178) – (6.180) для первого приближения.

Соотношение (6.183) применительно к поверхности тела $(x = 0)$ будет

$$T(0,\tau) = T_0 + \frac{F}{\lambda}\sqrt{\frac{3}{2}a\tau}\,. \qquad (6.186)$$

Отличие точного решения этой задачи [12] от формулы (6.186) состоит лишь в числовом коэффициенте корня, равном $4/\pi$ [12]. Следовательно, отклонение найденного решения от точного составляет 9 %.

Повышение точности связано с необходимостью увеличения числа членов ряда (6.182). При этом возрастает количество коэффициентов b_k, определяемых из дополнительных краевых условий.

Для нахождения решения во втором приближении дополнительные условия имеют вид:

$$\partial^3 T(0,\tau)/\partial x^3 = 0; \quad \partial^2 T(\delta,\tau)/\partial x^2 = 0; \quad \partial^3 T(\delta,\tau)/\partial x^3 = 0. \qquad (6.187)$$

После подстановки (6.182) (для шести членов ряда) в (6.178) – (6.180) и (6.187) для неизвестных коэффициентов b_k $(k = \overline{0,5})$ будем иметь систему шести алгебраических уравнений. Подставляя коэффициенты, найденные из ее решения, в (6.182), находим

$$T(x,\tau) = T_0 + \frac{F\delta}{\lambda}\left[\frac{3}{10} - \frac{x}{\delta} + \left(\frac{x}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\delta}\right)^4 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{\delta}\right)^5\right]. \qquad (6.188)$$

После подстановки (6.188) в (6.181) будем иметь:

$$\delta\, d\delta = 7{,}5\, a d\tau\,. \qquad (6.189)$$

Решение уравнения (6.189) с учетом начального условия имеет вид

$$\delta(\tau) = \sqrt{15a\tau}\,. \qquad (6.190)$$

Выражения (6.188), (6.190) являются решением задачи (6.182), (6.178) – (6.180) для второго приближения.

Применительно к поверхности тела $(x = 0)$ соотношение (6.188) будет

$$T(0,\tau) = T_0 + \frac{F}{\lambda}\sqrt{\frac{27}{20}a\tau}\,. \qquad (6.191)$$

Отклонение коэффициента под корнем соотношения (6.191) от его точной величины [12, 26] составляет 2,6 %. Следовательно, происходит значительное повышение точности решения.

Дополнительные условия для решения в 3-ем приближении имеют вид

$$\partial^5 T(0,\tau)/\partial x^5 = 0; \quad \partial^4 T(\delta,\tau)/\partial x^4 = 0; \quad \partial^5 T(\delta,\tau)/\partial x^5 = 0. \qquad (6.192)$$

В результате нахождения неизвестных коэффициентов b_k $(k = \overline{0,8})$ из (6.178) – (6.180), (6.187), (6.192) формула (6.182) запишется так:

$$T(x,\tau) = T_0 + \frac{F\delta}{\lambda}\left[\frac{15}{64} - \frac{x}{\delta} + \frac{21}{16}\left(\frac{x}{\delta}\right)^2 - \frac{35}{32}\left(\frac{x}{\delta}\right)^4 + \frac{21}{16}\left(\frac{x}{\delta}\right)^6 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^7 + \frac{15}{64}\left(\frac{x}{\delta}\right)^8\right]. \qquad (6.193)$$

Уравнение для $\delta(\tau)$ здесь будет:

$$\delta d\delta = 12ad\tau . \qquad (6.194)$$

Интегрируя (6.194) при $\delta(0) = 0$, получаем

$$\delta(\tau) = \sqrt{24a\tau} . \qquad (6.195)$$

Формула (6.193) применительно к поверхности принимает вид

$$T(0,\tau) = T_0 + \frac{F}{\lambda}\sqrt{\frac{675}{512}a\tau} . \qquad (6.196)$$

Коэффициент под корнем отличается от его точного значения [12, 26] на 1,7 %.

Точно также можно найти решение в любом следующем приближении. Дополнительные условия в каждом из них находятся из общих формул вида

$$\partial^n T(0,\tau)/\partial x^n = 0; \quad \partial^{n-1} T(\delta,\tau)/\partial x^{n-1} = 0; \quad \partial^n T(\delta,\tau)/\partial x^n = 0 \quad (n = 7,9,11,...). \qquad (6.197)$$

При учете перемещения фронта плавления $s(\tau)$ началом отсчета будем считать время начала плавления $\tau_{пл} = 0$. Разместив координату $x = 0$ в точке плавления, определим начальное значение для функции $s(\tau)$, то есть $s(0) = 0$. Начальное значение фронта теплового возмущения $\delta(0)$ для первого приближения найдем из (6.183), приняв $T(0,\tau) = T_{пл}$ (при $x = 0$):

$$\delta(0) = 2\lambda\mu / F , \qquad (6.198)$$

где $\mu = T_{пл} - T_0$.

Начальное значение фронта теплового возмущения во 2-ом, 3-ем, 5-ом, 6-ом, 10-ом и 14-ом приближениях задается соответственно формулами:

$$\delta(0) = 10z/3; \quad (6.199) \qquad \delta(0) = 64z/15; \quad (6.200) \qquad \delta(0) = 256z/45; \qquad (6.201)$$

$$\delta(0) = 4352z/693; \quad (6.202) \qquad \delta(0) = 1900544z/230945; \qquad (6.203)$$

$$\delta(0) = 343932928z/35102025, \qquad (6.204)$$

где $z = \lambda\mu / F$.

Из анализа выражений (6.198) – (6.200) можно заключить, что время достижения фронтом возмущения одинаковой координаты по оси *x* уменьшается и в пределе это время стремится к нулю. Этот результат полностью соответствует гипотезе о бесконечной скорости распространения теплоты, описываемой параболическим уравнением (6.176).

Постановка задачи с учетом движения фронта теплового возмущения $\delta(\tau)$ и фронта плавления $s(\tau)$ будет (см. рисунок 6.15) [30]:

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial\tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0; \quad 0 \le x < \infty);$$

$$T(x,0) = T_н(x); \quad T(s,\tau) = T_{пл}; \quad T(\delta,\tau) = T_0; \qquad (6.205)$$

$$\frac{\partial T(\delta,\tau)}{\partial x}=0;\qquad F+\lambda\frac{\partial T(s,\tau)}{\partial x}-Q\rho\frac{\partial s}{d\tau}=0,$$

где $s(\tau)$ – функция, описывающая движение фронта плавления; $\delta(\tau)$ – функция, описывающая движение фронта теплового возмущения; $T_{\text{пл}}$ – температура плавления; Q – теплота плавления; ρ – плотность.

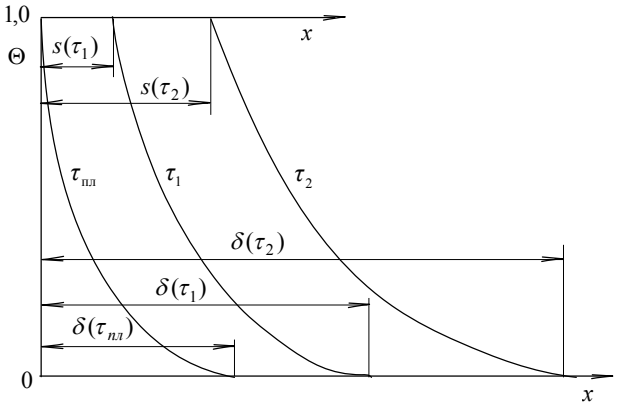


Рисунок 6.15. Расчетная схема с учетом движения фронта плавления

Начальная температура $T_{\text{н}}(x)$, следуя соотношению (6.183), при $\tau=\tau_{\text{пл}}$ принимается в виде

$$T_{\text{н}}(x)=T_0+F(x-\delta(\tau_{\text{пл}}))^2/(2\lambda\delta(\tau_{\text{пл}}))^2, \tag{6.206}$$

где $\delta(\tau_{\text{пл}})$ определяется из (6.198).

Так как при $\tau=\tau_{\text{пл}}$ задачи (6.176) – (6.180) и (6.205) совпадают, то необходимость выполнения начального условия (6.206) отпадает. Здесь достаточным будет выполнение условия $\tau(\delta,\tau)=T_0$.

Обозначим:

$$\Theta=(T-T_0)/(T_{\text{пл}}-T_0);\qquad F_1=Q\rho/(\lambda\mu);\qquad F_2=F/(\lambda\mu). \tag{6.207}$$

С учетом обозначений получаем

$$\frac{\partial\Theta(x,\tau)}{\partial\tau}=a\frac{\partial^2\Theta(x,\tau)}{\partial x^2}\quad(\tau>0;\quad 0\le x<\infty); \tag{6.208}$$

$$\Theta(s,\tau)=1; \tag{6.209}$$

$$\Theta(\delta,\tau)=0; \tag{6.210}$$

$$\frac{\partial\Theta(\delta,\tau)}{\partial x}=0; \tag{6.211}$$

$$\frac{\partial\Theta(s,\tau)}{\partial x}-F_1\frac{\partial s}{d\tau}+F_2=0. \tag{6.212}$$

Решение данной задачи будем искать в виде

$$\Theta(x,\tau)=\sum_{k=0}^{n}b_k x^k, \tag{6.213}$$

где коэффициенты b_k $(k = 0, 1, 2)$ определяются из условий (6.209) – (6.211).

Подставляя найденные из (6.209) – (6.211) коэффициенты b_k, формула (6.213) будет

$$\Theta(x,\tau) = (\delta - x)^2 / (\delta - s)^2 . \tag{6.214}$$

Будем считать, что начало координат расположено на фронте плавления и перемещается вместе с ним. Тогда определение температуры $\Theta(x,\tau)$ имеет смысл лишь в пределах $s(\tau) \le x \le \delta(\tau)$.

Потребуем, чтобы выражение (6.214) удовлетворяло осредненному в диапазоне двух фронтов ($s(\tau)$ и $\delta(\tau)$) уравнению (т. е. интегральному уравнению теплового баланса). Умножим (6.208) на dx и определим интегралы в диапазоне от $x = s(\tau)$ до $x = \delta(\tau)$. Учитывая условие (6.211), получаем

$$\frac{d}{d\tau}\int_{s(\tau)}^{\delta(\tau)} \Theta(x,\tau)\, dx = -a\frac{\partial\Theta(s,\tau)}{\partial x} . \tag{6.215}$$

Выразив $\partial\Theta(s,\tau)/\partial x$ из (6.212) и подставив его в (6.215), находим

$$\frac{d}{d\tau}\int_{s(\tau)}^{\delta(\tau)} \Theta(x,\tau)\, dx = -a\left(F_1\frac{ds}{d\tau} - F_2\right). \tag{6.216}$$

Подставка (6.214) в (6.216) дает

$$d(\delta - s)/d\tau + a\left(F_1 ds/d\tau - F_2\right) = 0 . \tag{6.217}$$

Соотношение (6.216) имеет две неизвестные величины $s(\tau)$ и $\delta(\tau)$. При их определении наряду с уравнением (6.216) используется условие (6.212). Подстановкой (6.214) в (6.212), получаем

$$F_2 - 2/(\delta - s) - F_1 ds/d\tau = 0 . \tag{6.218}$$

Выразив $ds/d\tau$ из (6.218) и подставив полученное в (6.216), будем иметь

$$d\nu(\tau)/d\tau = 6a/\nu(\tau) , \tag{6.219}$$

где $\nu(\tau) = \delta(\tau) - s(\tau)$.

Интегрируя уравнение (6.219), находим

$$\nu^2/2 = 6a\tau + C , \tag{6.220}$$

где C – константа, которая находится из условия $\nu(0) = \delta(0) - s(0) = 2\lambda\mu/F$, где $\delta(0)$ определяется из (6.198). Тогда $C = 2\lambda^2\mu^2/F^2$.

Учитывая полученное значение константы C, из уравнения (6.220) (используем лишь положительный корень) получаем

$$\nu(\tau) = 2f/F , \tag{6.221}$$

где $f = \left(\lambda^2\mu^2 + 3F^2 a\tau\right)^{1/2}$.

Соотношение (6.221) представляет решение для функции $\nu(\tau)=\delta(\tau)-s(\tau)$. Чтобы получить решение для каждой функции ($\delta(\tau)$ и $s(\tau)$) отдельно, подставим в (6.218) вместо $\delta-s$ выражение для $\nu=\delta-s$ из (6.221):

$$ds(\tau)/d\tau = F_2/F_1 - F/(F_1 f). \tag{6.222}$$

Интегрируя уравнение (6.222), получаем

$$s(\tau) = F_2\tau/F_1 - 2f/(3aFF_1) + C_1, \tag{6.223}$$

где C_1 – константа, определяемая из условия $s(0)=0$. Соотношение для этой константы будет $C_1 = 2\lambda\mu/(3aFF_1)$.

С учетом найденной величины C_1 соотношение (6.223) принимает вид

$$s(\tau) = F_2\tau/F_1 + 2(f_1 - f)/f_2, \tag{6.224}$$

где $f_1=\lambda\mu$; $f_2=3aFF_1$.

Подставляя (6.224) в (6.221), находим

$$\delta(\tau) = [2(3aF_1-1)f + 2f_1 + f_2]/f_2. \tag{6.225}$$

Решения для $s(\tau)$ и $\delta(\tau)$ получены в виде (6.224), (6.225). Распределение температуры определяется из (6.214). Расчетные данные на основе соотношений (6.214), (6.224), (6.225) приведены на рисунках 6.21, 6.23. Модельная задача решалась при следующих исходных данных:

$$\lambda = 0{,}19\ Вт/(м\cdot К);\quad Q = 60000\ Дж/кг;\quad \rho = 1600\ кг/м^3;\quad T_0 = 20\,°C;\quad T_{пл} = 80\,°C;$$

$$F = 50000\ Вт/м^2;\quad a = 1{,}35\cdot 10^{-6}\ м^2/с.$$

Для повышения точности решения следует увеличивать число слагаемых ряда (6.213), неизвестные коэффициенты b_k которого находятся из дополнительных краевых условий. С целью нахождения первого из них продифференцируем условие (6.210) по переменной τ. Ввиду того, что из (6.210) требуется искать значение $\Theta(x,\tau)$ в точке $x=\delta(\tau)$, то переменная x будет функцией τ. Исходя из правила дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\Theta(x,\tau)\right]_{x=\delta} = \frac{\partial\Theta(\delta,\tau)}{\partial x}\frac{d\delta}{d\tau} + \frac{\partial\Theta(\delta,\tau)}{\partial\tau} = 0. \tag{6.226}$$

Соотношение (6.226) с учетом (6.211) принимает вид

$$\partial\Theta(\delta,\tau)/\partial\tau = 0. \tag{6.227}$$

Сравнивая (6.227) и (6.208), для точки $x=\delta(\tau)$ находим первое дополнительное условие:

$$\partial^2\Theta(\delta,\tau)/\partial x^2 = 0. \tag{6.228}$$

Для нахождения второго условия продифференцируем (6.211) по τ с учетом того, что переменная x зависит от τ:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{\partial\Theta(x,\tau)}{\partial x}\right]_{x=\delta}=\frac{\partial^2\Theta(\delta,\tau)}{\partial x^2}\frac{d\delta}{d\tau}+\frac{\partial^2\Theta(\delta,\tau)}{\partial x\partial\tau}=0. \qquad (6.229)$$

Соотношение (6.229) с учетом (6.228) преобразуется к виду

$$\partial^2\Theta(\delta,\tau)/\left(\partial x\,\partial\tau\right)=0. \qquad (6.230)$$

Дифференцируя (6.208) по x и сравнивая найденное выражение с (6.230), для точки $x=\delta(\tau)$ находим второе дополнительное условие:

$$\partial^3\Theta(\delta,\tau)/\partial x^3=0. \qquad (6.231)$$

Применительно ко второму приближению формула (6.213) должна быть представлена в таком виде, чтобы удовлетворялись основные (6.209) – (6.211) и дополнительные (6.228), (6.231) условия. Функция, удовлетворяющая этим требованиям, будет

$$\Theta(x,\tau)=2\frac{(\delta-x)^4}{(\delta-s)^4}-\frac{(\delta-x)^5}{(\delta-s)^5}. \qquad (6.232)$$

После подстановки (6.232) в (6.216) получаем

$$7d(\delta-s)/d\tau+30a\left(F_1 ds/d\tau-F_2\right)=0. \qquad (6.233)$$

Выражая $ds/d\tau$ из (6.218) и подставляя в (6.233), получаем

$$d\nu(\tau)/d\tau=90a/\left(7\nu(\tau)\right). \qquad (6.234)$$

Интегрируя (6.234), находим

$$\nu^2/2=90a\tau/7+C, \qquad (6.235)$$

где C – константа, которая определяется из условия $\nu(0)=\delta(0)-s(0)$. Учитывая (6.199) и условие $s(0)=0$, будем иметь $C=50\lambda^2\mu^2/\left(9F^2\right)$.

Из корней квадратного уравнения (6.235) используем лишь положительный корень, т. к. отрицательный корень не имеет физического смысла:

$$\nu(\tau)=\delta(\tau)-s(\tau)=2\varphi/(21F), \qquad (6.236)$$

где $\varphi=\left(2835F^2a\tau+1225\lambda^2\mu^2\right)^{1/2}$.

Для определения функций $s(\tau)$ и $\delta(\tau)$ применяем условие (6.218). Подставляя (6.236) в (6.218), находим

$$ds/d\tau=F_2/F_1-63F/\left(2F_1\varphi\right). \qquad (6.237)$$

Интегрируя уравнение (6.237) с учетом начального условия $s(0)=0$, получаем

$$s(\tau)=F_2\tau/F_1+\left(30aF_1\varphi_1+7f_1-\varphi/5\right)/\left(9aFF_1\right), \qquad (6.238)$$

где $\varphi_1=\lambda\mu-f_1$.

Подставляя (6.238) в (6.236), находим

$$\delta(\tau)=\frac{F_2}{F_1}\tau+\frac{\varphi}{F}\left(\frac{1}{10{,}5}-\frac{1}{45aF_1}\right)+\frac{1}{9F}\left(30\varphi_1+\frac{7f_1}{aF_1}\right). \qquad (6.239)$$

Выражения (6.232), (6.237), (6.238) являются решением задачи (6.208) – (6.212) для второго приближения. Расчеты по (6.232) представлены на рисунках 6.16, 6.23.

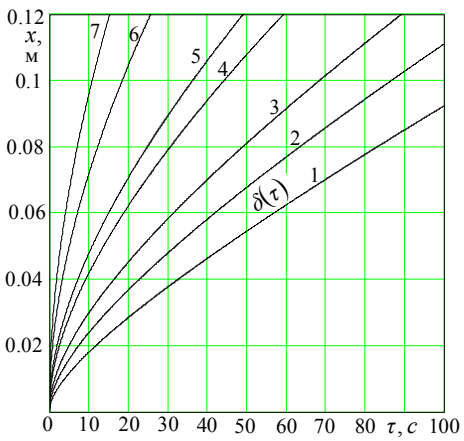


Рисунок 6.16. Изменение фронта теплового возмущения $\delta(\tau)$: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 – соответственно с 1-го по 14-ое приближения

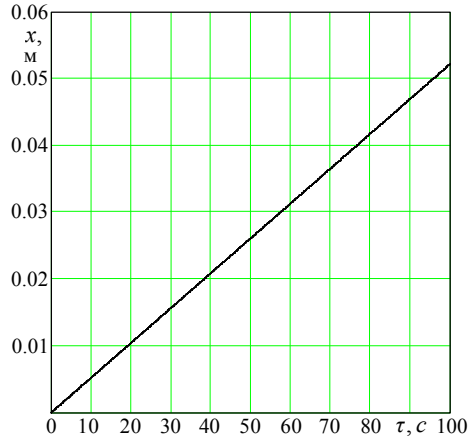


Рисунок 6.17. Изменение фронта плавления $s(\tau)$ (кривые всех приближений полностью совпадают)

Общие формулы дополнительных краевых условий в последующих приближениях записываются в виде

$$\partial^n\Theta(\delta,\tau)/\partial x^n=0\,;\qquad \partial^{n+1}\Theta(\delta,\tau)/\partial x^{n+1}=0\quad (n=4,6,8,\ldots). \qquad (6.240)$$

В каждом следующем приближении к дополнительным условиям предыдущих, следует добавлять по два условия.

Общая формула решения, удовлетворяющего всем основным (6.209) – (6.211), а также всем дополнительным краевым условиям, в любом приближении имеет вид

$$\Theta(x,\tau)=k\frac{(\delta-x)^{2k}}{(\delta-s)^{2k}}-(k-1)\frac{(\delta-x)^{2k+1}}{(\delta-s)^{2k+1}}\quad (k=1,\,2,\,3,\ldots). \qquad (6.241)$$

Уравнение для $\nu(\tau)$ в 3-м приближении имеет вид

$$d\nu / d\tau = 1512a / (97\nu). \qquad (6.242)$$

Интегрируя уравнение (6.242) и учитывая начальное условие $\nu(0) = \delta(0) - s(0) = 64\lambda\mu / (15F)$ (где $s(0) = 0$, а $\delta(0)$ взято из соотношения (6.200)), находим

$$\nu(\tau) = 2r / (1455F), \qquad (6.243)$$

где $r = \left(4124925F^2 a\tau + 2408704\lambda^2\mu^2\right)^{1/2}$.

В третьем приближении для функций $s(\tau)$ и $\delta(\tau)$ получаем формулы

$$s(\tau) = F_2\tau / F_1 + \left(r/2 - 4032aF\varphi_1 - 776f_1\right); \qquad (6.244)$$

$$\delta(\tau) = \frac{F_2}{F_1}\tau + \frac{1}{1890aFF_1}\left(r - \frac{7772}{48{,}5}f_1\right) + \frac{252(r + 1552\varphi_1)}{91665F}. \qquad (6.245)$$

Расчеты перемещения фронта теплового возмущения $\delta(\tau)$ и фронта плавления $s(\tau)$ с 1-го по 14-е приближения даны на рисунках 6.15, 6.16. Из их анализа можно сделать вывод, что время достижения фронтом теплового возмущения одинакового расстояния по x при увеличении количества приближений n уменьшается, и, следовательно, скорость его движения возрастает (рисунок 6.15). И в пределе при $n \to \infty$ время движения $\tau \to 0$, а расстояние, которое проходит фронт теплового возмущения, будет бесконечным. Этот результат соответствует гипотезе о бесконечной скорости распределения теплоты, описываемой параболическим уравнением (6.208).

Применительно к фронту плавления $s(\tau)$ при $\tau > 1$ наблюдается практически линейный закон его изменения от времени (рисунок 6.16) при совпадении кривых всех приближений. Отклонение от линейности имеет место лишь при $\tau < 1$ (рисунок 6.17). В этом же диапазоне времени наблюдается и различие решений в зависимости от приближения. Линии 1, 2 соответствуют 6-му приближению, а 3, 4 – 14-му. Кривые 2, 4 построены без учета влияния нелинейных членов в формулах для $s(\tau)$.

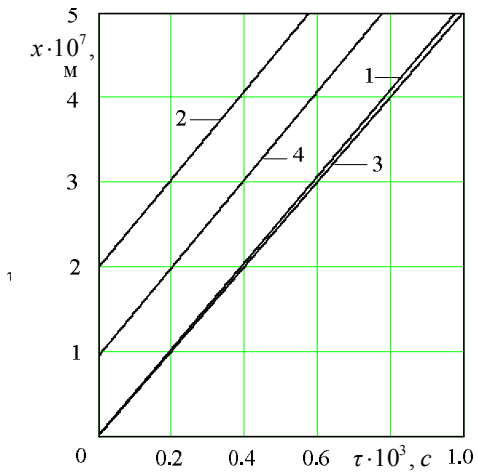


Рисунок 6.18. Движение фронта плавления $s(\tau)$ при малых значениях переменной x и времени: 1, 2 – 6-е приближение; 3, 4 – 14-е приближение

На рисунках 6.19, 6.20 дано распределение температуры в диапазоне координаты x, расположенной между двумя фронтами $s(\tau) \le x \le \delta(\tau)$. Из анализа можно сделать вывод, что в окрестности фронта плавления температура почти не зависит от номера приближения. Температуры в десятом и четырнадцатом приближениях практически одинаковы, что свидетельствует о сходимости метода с увеличением числа приближений.

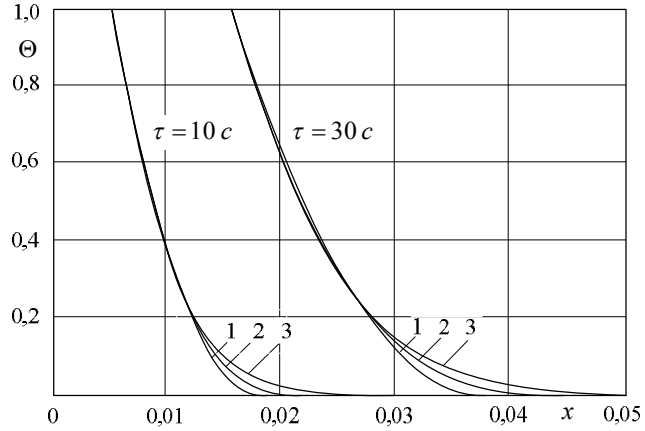


Рисунок 6.19. Распределение температуры на участке $s(\tau) \le x \le \delta(\tau)$: 1, 2, 3 – соответственно 1-ое, 2-ое и 14-ое приближения

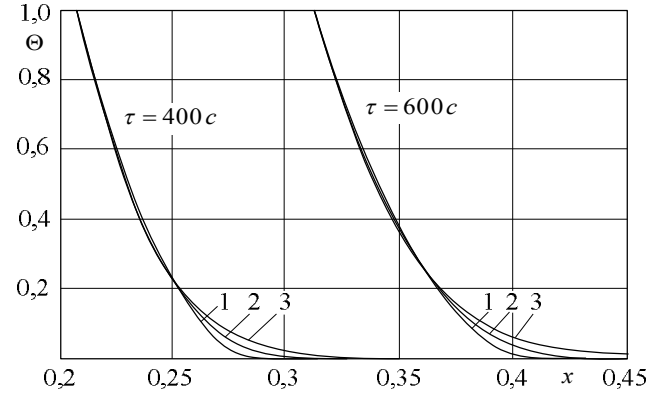


Рисунок 6.20. Распределение температуры на участке $s(\tau) \le x \le \delta(\tau)$; 1, 2, 3 соответственно 1-ое, 2-ое и 14-ое приближения

На рисунках 6.21, 6.22 дано распределение невязки уравнения (6.208) от времени для $x = 1$ *м* (рисунок 6.20) и по координате x для $\tau = 100$ с (рисунок 6.21). Из анализа следует, что при увеличении количества приближений участок изменения практически равной нулю невязки ε возрастает. Максимальная невязка ε имеет место в 1-ом и 2-ом приближениях и определяется по формуле

$$\varepsilon(x,\tau) = \frac{\partial \Theta(x,\tau)}{\partial \tau} - a\frac{\partial^2 \Theta(x,\tau)}{\partial x^2},$$

где $\Theta(x,\tau)$ – общее решение (6.241) задачи (6.208) – (6.212).

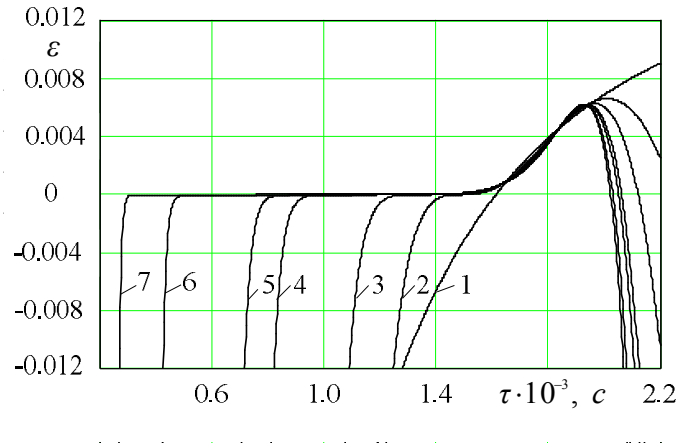


Рисунок 6.21. Распределение невязки ε уравнения (6.208) от времени τ для $x = 1{,}0$: 1, 2, 3,…, 7 – соответственно первое, второе, третье, пятое, шестое, десятое и четырнадцатое приближения

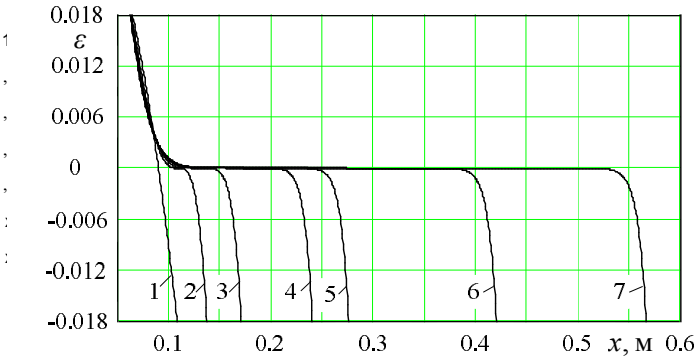


Рисунок 6.22. Распределение невязки ε уравнения (6.208) по переменной x для $\tau = 100\,c$: 1, 2, 3,…, 7 – соответственно первое, второе, третье, пятое, шестое, десятое и четырнадцатое приближения

6.5. Определение коэффициентов теплоотдачи на внутренней поверхности барабана парового котла БКЗ-420-140 НГМ

Изложенный в п. 6.1 метод решения, основанный на введении фронта возмущения и дополнительных краевых условий, был применен для решения крайне важной технической задачи теплообмена с переменным во времени коэффициентом теплоотдачи. И, в частности, найден переменный во времени коэффициент теплоотдачи на внутренней поверхности стенки барабана котла БКЗ – 420 – 140 НГМ (рисунок 6.23) в процессе аварийного сброса давления пара. При этом были использованы экспериментальные данные по изменению во времени температуры на внешней поверхности барабана (кривая 1 на рисунке 6.24).

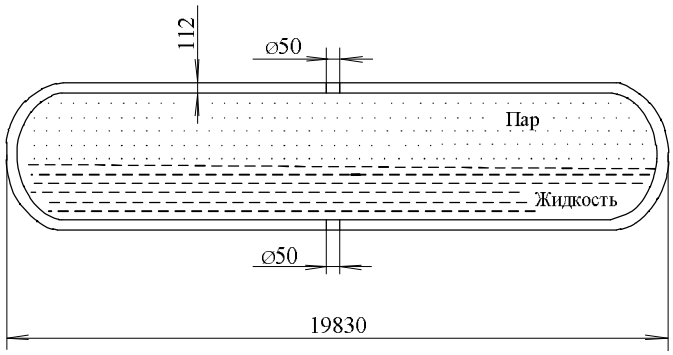


Рисунок 6.23. Схема барабана котла (размеры в *мм*)

Барабаны паровых котлов представляют цилиндрические конструкции, имеющие многочисленные отверстия в верхней и нижней частях для присоединения к ним труб пароперегревателя и экранных труб топки котла. В нижней части барабан заполнен жидкостью (вода), с температурой около $340^{\circ}C$, а в верхней – находится пар при давлении 130 *атм* (рабочие параметры барабана котла БКЗ – 420 – 140 НГМ).

Процесс планового (или аварийного) останова котла сопровождается уменьшением давления пара в барабане, что приводит к уменьшению температуры кипения находящейся в нем воды. В итоге происходит вскипание воды в барабане, сопровождающееся значительным понижением ее температуры (на несколько десятков градусов) и, как следствие, к изменению температуры металла барабана. Теоретическая оценка этого изменения может быть выполнена лишь в случае, если будут известны переменные во времени коэффициенты теплоотдачи на внутренней поверхности стенки барабана, определение которых из известных критериальных уравнений [93] не представляется возможным ввиду невозможности определения скорости течения воды в барабане. Кроме того, следует отметить, что в известные критериальные уравнения теплоотдачи время не входит, то есть считается, что коэффициент теплоотдачи не зависит от него [93]. Однако, в ряде работ [126] даны доказательства того, что во многих практических случаях коэффициент теплоотдачи существенно зависит от времени.

В настоящей работе зависящий от времени коэффициент теплоотдачи находился из решения обратной задачи [67]. Для этих целей использовалось решение прямой задачи с переменным во времени коэффициентом теплоотдачи и экспериментальные значения температуры на внешней поверхности барабана (см. рисунок 6.24). При решении прямой задачи принимались следующие допущения:

1. Стенка принимается плоской, что, ввиду достаточно большого диаметра барабана (2,8 *м*) и незначительной толщины его стенки (0,112 *м*), вполне допустимо.
2. Теплообмен с внешней средой отсутствует, что, ввиду наложенной на стенку тепловой изоляции толщиной 0,2 *м* с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 0{,}03\ Вт/(мК)$, также вполне оправдано.
3. Коэффициент теплоотдачи линейно зависит от времени

$$\alpha(t) = \alpha_0(1 + \beta t),$$

где α_0 – начальное значение коэффициента теплоотдачи (до начала кипения жидкости), β – коэффициент, характеризующий интенсивность изменения коэффициента теплоотдачи во времени.

Математическая постановка прямой задачи включает краевую задачу теплопроводности с переменным во времени коэффициентом теплоотдачи, записанную для второй стадии процесса (см. п. 6.1)

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}\quad(\mathrm{Fo}\ge\mathrm{Fo}_1;\ \ 0<\xi<1);\tag{6.246}$$

$$\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi-\mathrm{Bi}(1+\mathrm{Pd}\cdot\mathrm{Fo})/\Theta(0,\mathrm{Fo})-1=0;\tag{6.247}$$

$$\Theta(q_1,\mathrm{Fo})=q_2(\mathrm{Fo});\quad(6.248)\qquad\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi=0.\tag{6.249}$$

где $\mathrm{Bi}=\alpha_0\delta/\lambda$ – число Био, $\mathrm{Fo}=at/\delta^2$ – число Фурье, δ – толщина стенки, λ – коэффициент теплопроводности материала барабана, $\mathrm{Pd}=\beta\delta^2/a$ – критерий Предводителева, a – коэффициент температуропроводности, $\Theta=(T-T_0)/(T_{\text{ср}}-T_0)$, T_0 – начальная температура, $T_{\text{ср}}$ – температура воды в барабане после ее понижения в результате сброса давления.

Рассмотрение второй стадии процесса связано с тем, что наибольший интерес представляет диапазон времени, когда процесс теплообмена происходит по всей толщине пластины (предполагается, что решение для первой стадии известно).

Решение задачи (6.246) – (6.249), найденное по методу п. 6.1, получено в работе автора диссертации [191] (см. также [1]), которое в первом приближении имеет вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\frac{\mathrm{Bi}\left[(1+\mathrm{PdFo})\left(1+(q_2-1)\left(2\xi-\xi^2\right)\right)\right]+2q_2}{\mathrm{Bi}(1+\mathrm{PdFo})+2},\tag{6.250}$$

где $q_2(\mathrm{Fo})=\exp\frac{3\mathrm{BiFo}}{3+\mathrm{Bi}}-\exp\frac{3\mathrm{BiFo}_1}{3+\mathrm{Bi}}\exp\frac{-3\mathrm{BiFo}}{3+\mathrm{Bi}}$, (6.251)

Fo_1 – время окончания первой стадии процесса.

Неизвестный коэффициент β, характеризующий интенсивность изменения коэффициента теплоотдачи во времени, в соотношении (6.250) содержится в критерии Предводителева Pd. Для времени известных из эксперимента температур на поверхности барабана, описываемых кривой 1 на рисунке 6.24.

Исходные данные для решения задачи были следующие:

$$\delta=0{,}112\,м;\quad\alpha_0=120\,Вт/(м^2К);\quad a=11{,}2\cdot10^{-6}\ м^2/с;\quad T_0=336^\circ C\ ;$$

$$T_{\text{ср}}=316^\circ C\ ;\quad\lambda=48\ Вт/(мК);\quad\mathrm{Bi}=\alpha\delta/\lambda=0{,}28.\tag{6.252}$$

Аппроксимируем кривую 1 (рисунок 6.24) функцией вида

$$\Theta(0,\mathrm{Fo})=b_1+b_2\mathrm{Fo}+b_3\mathrm{Fo}^2+b_4\mathrm{Fo}^3,\tag{6.253}$$

где b_1, b_2, b_3, b_4 – неизвестные коэффициенты.

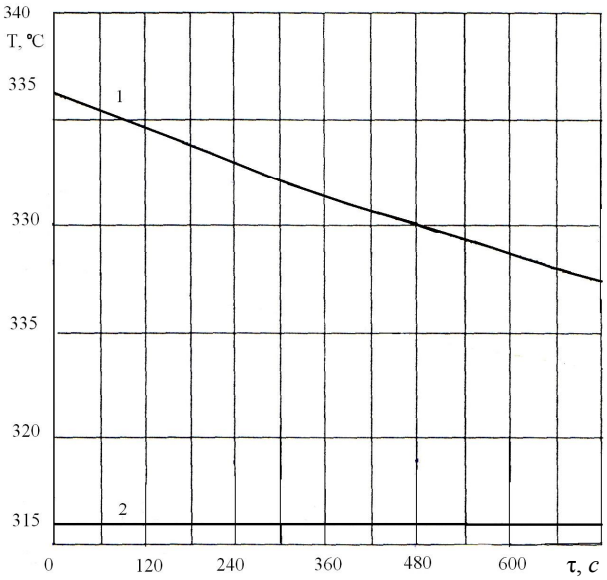


Рисунок 6.24. Изменение температуры: 1 – наружная поверхность стенки ($x = 0$); 2 – температура жидкости $T_{ср}$

Запишем соотношение (6.253) для точек 0, 1, 2, 3, в которых имеем следующие значения чисел Фурье и соответствующих им температур:

$$\mathrm{Fo}_0^* = 0;\quad \Theta(0,\mathrm{Fo}_0) = 0;\quad \mathrm{Fo}_1^* = 0{,}21;\quad \Theta(0,\mathrm{Fo}_1) = 0{,}15;\quad \mathrm{Fo}_2^* = 0{,}43;\quad \Theta(0,\mathrm{Fo}_2) = 0{,}3;$$

$$\mathrm{Fo}_3^* = 0{,}64;\quad \Theta(0,\mathrm{Fo}_3) = 0{,}43.$$

Отсюда для определения коэффициентов b_k $(k = \overline{1,4})$ на основе (6.253) получаем систему 4-х алгебраических уравнений, из решения которой находим

$$b_1 = 0{,}18;\quad b_2 = 1{,}4;\quad b_3 = -1{,}8;\quad b_4 = 1{,}3. \tag{6.254}$$

С учетом (6.254) соотношение (6.253) будет

$$\Theta(0,\mathrm{Fo}_0) = 0{,}18 + 1{,}4\mathrm{Fo} - 1{,}8\mathrm{Fo}^2 + 1{,}3\mathrm{Fo}^3. \tag{6.255}$$

Отметим, что расчеты по формуле (6.255) практически совпадают с результатами эксперимента, приведенными кривой на рисунке 6.24 (кривая 1).

Для идентификации числа Предводителова $\mathrm{Pd} = \beta\delta^2 / a$, включающего искомый коэффициент β, подставим (6.255) в левую часть соотношения (6.250) и вычислим интеграл в пределах $\mathrm{Fo}_0^* \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_3^*$:

$$\int_0^{\mathrm{Fo}_3^*} (0{,}18 + 1{,}4\mathrm{Fo} - 1{,}8\mathrm{Fo}^2 + 1{,}3\mathrm{Fo}^3)d\mathrm{Fo} = \int_0^{\mathrm{Fo}_3^*} \frac{B_i(1 + Pd\mathrm{Fo}) + 2\mathrm{q}_2(\mathrm{Fo})}{B_i(1 + Pd\mathrm{Fo}) + 2} d\mathrm{Fo}, \tag{6.256}$$

где $q_2(\mathrm{Fo})$ находится по формуле (6.251), в которой Fo_1 определяется из соотношения $q_1(\mathrm{Fo}_1) = 3{,}9\mathrm{Fo}^{0{,}5}$ (найденного в первой стадии процесса [191]), положив $q_1(\mathrm{Fo}_1) = 1$ (см. п. 6.1).

После вычисления интегралов в соотношении (6.256) относительно неизвестного Pd получаем трансцендентное уравнение, из решения которого находим $\mathrm{Pd} = 0{,}94$. По известной

величине Pd по формуле $\mathrm{Pd} = \beta\delta^2 / a$ находится коэффициент $\beta = 0{,}18$. Отсюда переменный во времени коэффициент теплоотдачи определяется по соотношению

$$\alpha(\tau) = \alpha_0(1 + \beta\tau) = 120(1 + 0{,}18\tau). \qquad (6.257)$$

Расчеты по формуле (6.257) позволяют заключить, что в конце переходного режима ($\tau = 720\ c$, см. рисунок 6.24) коэффициент теплоотдачи $\alpha = 15672\ Bm/(м^2 K)$. Большая величина α объясняется тем, что в процессе вскипания воды в барабане (при сбросе давления пара), по сути, наблюдается режим пузырькового кипения. Отметим, что при таких значениях коэффициента теплоотдачи $\mathrm{Bi} = \alpha\delta / \lambda = 38{,}2$. Большая величина Bi свидетельствует о том, что температура стенки барабана практически принимает температуру охладившейся (в результате дросселирования пара) жидкости, равную $T_{ср} = 315\ °C$ (см. рисунок 6.24), увеличивая тем самым перепад температуры по толщине стенки и создавая предпосылки для возникновения больших значений температурных напряжений (особенно в зоне отверстий барабана под экранные трубы).

По известной величине переменного во времени коэффициента теплоотдачи температурное состояние стенки котла определялось по формуле (6.250). Используя полученные температуры, методом конечных элементов были найдены температурные напряжения с учетом сил давления пара. Из их анализа следует , что напряжения растяжения на внутренних кромках отверстий барабана котла достигают 37 $кг/мм^2$, что превышает предел прочности ($\sigma_в = 35\ кг/мм^2$) для данного материала.

Используя результаты исследований, были разработаны рекомендации по проведению безопасных режимов сброса давления. Кроме того, с целью снижения температурных напряжений на внутренних кромках отверстий рекомендовано выполнять фаски, глубиной около 1 *см* (при толщине стенки барабана 11,2 *см*).

По результатам исследований, приведенных в шестой главе диссертации, получены следующие новые научные результаты:

1. Используя понятие фронта температурного возмущения, исходная краевая задача для уравнения в частных производных представляется в виде двух задач (соответственно для двух стадий процесса), в которых интегрированию подлежат обыкновенные дифференциальные уравнения относительно некоторых дополнительных искомых функций. Для первой стадии процесса отмечается быстрая сходимость рядов приближенных решений, что позволяет получать решения практически с заданной степенью точности. Так, уже в тридцатом приближении получаемое решение практически совпадает с точным, вплоть до $\mathrm{Fo} = 10^{-12}$, где

для сходимости классического точного аналитического решения необходимо использовать около 10^6 членов ряда.

2. Применительно к первой стадии процесса вводится допущение о конечной скорости распространения теплоты. Исследования полученных решений показали, что с увеличением числа приближений происходит возрастание скорости движения фронта температурного возмущения. И в пределе $n \to \infty \, \mathrm{Fo}_1 \to 0$, что свидетельствует о приближении к бесконечной скорости распространения теплоты и снимает противоречие, связанное с допущением о ее конечности.

3. Рассмотрение во второй стадии процесса функции $q_2(\mathrm{Fo})$ основано на свойстве параболического уравнения теплопроводности, связанном с бесконечной скоростью распространения теплоты, согласно которому температура в центре пластины начинает изменяться тотчас же после приложения граничного условия первого рода на ее поверхности. Использование этой функции в интегральном методе теплопроводного баланса позволило получить решение, практически совпадающее с классическим точным аналитическим решением.

4. Используя разработанный в п. 1 метод, получено приближенное аналитическое решение задачи теплопроводности для многослойной пластины, которая при использовании математического аппарата теории обобщенных функций приводит к задаче теплопроводности для однослойной пластины с разрывными (кусочно-однородными свойствами среды).

5. Используя разработанный в п. 1 метод, получено приближенное аналитическое решение задачи теплопроводности для турбулентного теплового пограничного слоя, на основе которого выведено критериальное уравнение для определения коэффициентов теплоотдачи на границе жидкость – стенка.

6. Используя разработанный в п. 1 метод, получено приближенное аналитическое решение задачи Стефана с абляцией (с удалением расплавляемого вещества). Показано, что закон движения фронта плавления на начальном временном участке описывается нелинейной функцией, переходящей с увеличением времени в линейную.

Новые научные результаты, полученные в шестой главе диссертации, были использованы при выполнении энергетического аудита объектов Самарского государственного технического университета (зданий различного назначения, котельных, трубопроводных систем и проч.). Экономический эффект, получаемый за счет экономии тепловой энергии, подтвержденной актом о внедрении, составляет пять миллионов рублей в год, начиная с 2013 года – энергетический аудит проводился в 2011 – 2012 гг. (см. приложение 1).

Полученные в шестой главе диссертации результаты были также использованы при расчетах распределения температуры в турбулентном пограничном слое. Из полученного в

диссертации критериального уравнения были найдены коэффициенты теплоотдачи, на основе которых, исходя из гидродинамической теории теплообмена, были найдены коэффициенты гидравлического сопротивления, используемые затем в компьютерных моделях трубопроводных систем (см. приложение 12). Экономический эффект, полученный в результате внедрения данных научных результатов, подтвержденный актами о внедрении, приведенными в приложениях диссертации, составляет 2,3 миллиона рублей (см. приложения 5,6).

7. МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ОСНОВАННЫЙ НА СВОЙСТВЕ БЕСКОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОТЫ

Научные результаты данной главы представлены в работах [260, 264, 265, 271, 273] автора диссертации. В седьмой главе диссертации рассматривается новое направление получения точных аналитических решений в форме бесконечных рядов, основанное на использовании свойства параболического уравнения теплопроводности, связанного с бесконечной скоростью распространения теплоты. Здесь, также как и в методе, изложенном в шестой главе, вводится дополнительная искомая функция и дополнительные граничные условия. Однако принципиальным отличием является отсутствие разделения процесса получения решения на две стадии по времени. Отличительной особенностью метода является возможность получения точного аналитического решения при использовании приближенного аналитического метода (интегрального метода теплового баланса), что связано с использованием дополнительной искомой функции, задаваемой в центре пластины, и ортогональных систем координатных функций, заранее точно удовлетворяющих граничным условиям краевой задачи. Данный метод был успешно апробирован применительно к решению следующих нестационарных задач теплопроводности: для бесконечной пластины (см. п. 7.1); с переменным начальным условием (см. п. 7.2); с переменными во времени граничными условиями первого рода (см. п. 7.3); с внутренним источником теплоты (см. п. 7.4).

7.1 Бесконечная пластина (граничные условия 1-го рода)

В аналитической теории теплопроводности известны методы, основанные на определении интеграла теплового баланса [12, 26, 81, 108]. К их преимуществам относится возможность получения простых по форме приближенных аналитических решений краевых задач, в том числе и нелинейных, однако к существенным недостаткам относится малая точность. Это связано с тем, что решение, точно удовлетворяя начальным и граничным условиям задачи, дифференциальному уравнению удовлетворяет лишь в среднем, так как искомым решением удовлетворяется не исходное уравнение, а некоторое осредненное (интегральное уравнение теплового баланса). Для повышения точности решения в диссертации избрано направление представления температуры в виде полиномов высоких степеней, для вычисления неизвестных коэффициентов которых используется дополнительная искомая функция, а также дополнительные краевые условия, определяемые в таком виде, чтобы их удовлетворение получаемым решением было эквивалентно удовлетворению дифференциального уравнения краевой задачи в граничных точках.

Метод решения краевых задач путем удоветворения уравнения в граничных точках использовали авторы: Л.В. Канторович [50], Ф.М. Федоров [109], Л.И. Кудряшов, Н.Л. Меньши́х [61]. Ф.М. Федоров в своих работах строго математически доказал, что удовлетворение уравнения лишь в граничных точках приводит к его выполнению и внутри области. Им была также доказана справедливость и обратного утверждения. Л.И. Кудряшов и Н.Л. Меньши́х удовлетворяли уравнение на фронте температурного возмущения, представляющего подвижную границу.

Принципиальным отличием метода настоящей работы является использование дополнительной искомой функции, введение которой связано с бесконечной скоростью распространения теплоты, описываемой параболическим уравнением теплопроводности. Рассмотрим краевую задачу теплопроводности для пластины в следующей постановке (рисунок 7.1):

$$\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo} = \partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})/\partial\xi^2\ ; \qquad (7.1)$$

$$\Theta(\xi,0) = 0\ ; \quad (7.2) \qquad \Theta(0,\mathrm{Fo}) = 1\ ; \quad (7.3) \qquad \partial\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi = 0\ , \qquad (7.4)$$

где $\Theta = (T - T_0)/(T_{\text{ст}} - T_0)$ – безразмерная температура; $\mathrm{Fo} = a\tau/(2\delta)^2$ – число Фурье; $\xi = x/2\delta$ – безразмерная координата; x – координата; 2δ – толщина пластины; a – температуро-проводность; τ – время; T_0 – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки.

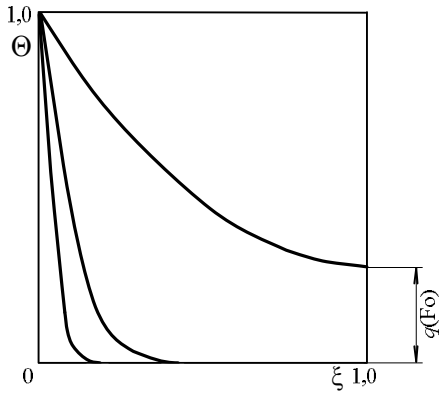


Рисунок 7.1. Схема теплообмена

Применительно к решению задачи (7.1) – (7.4) введем дополнительную искомую функцию

$$q(\mathrm{Fo}) = \Theta(1,\mathrm{Fo})\ , \qquad (7.5)$$

характеризующую изменение температуры во времени в точке $\xi = 1$. Ввиду того, что температура в этой точке является искомым параметром задачи (7.1) – (7.4), то введение функции $q(\mathrm{Fo})$ в математическую постановку никоим образом ее не изменяет. Ввиду бесконечной скорости распространения теплоты, заложенной в параболическом уравнении (7.1), температура в точке $\xi = 1$ будет изменяться сразу после начала действия граничного условия (7.3). Следовательно, диапазон временно́го и температурного изменения функции $q(\mathrm{Fo})$ включает весь диапазон времени $0 < \mathrm{Fo} < \infty$ и температуры $0 \le \Theta \le 1$. Ниже будет

показано, что нахождение закона изменения во времени функции $q(\mathrm{Fo})$ с привлечением некоторых дополнительных граничных условий позволяет полностью описать температурное состояние пластины во всем диапазоне времени нестационарного процесса, то есть получить точное решение задачи.

Решение краевой задачи (7.1) – (7.4) принимается в виде

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k(q) \sin(r\pi\xi/2) \quad (r = 2k-1), \tag{7.6}$$

где $b_k(q)$ $(k = \overline{1,n})$ – неизвестные коэффициенты; $\sin(r\pi\xi/2)$ $(r = 2k-1)$ – координатные функции.

Соотношение (7.6), ввиду особой конструкции координатных функций, при любом n удовлетворяет условиям (7.3), (7.4). Коэффициенты $b_k(q)$ $(k = \overline{1,n})$ находятся из условия (7.5) и некоторых дополнительных условий, для нахождения которых используется дифференциальное уравнение (7.1) и граничные условия (7.3), (7.4).

Для определения первого из них продифференцируем соотношение (7.3) по переменной Fo:

$$\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo} = 0 \ . \tag{7.7}$$

С учетом уравнения (7.1) для точки $\xi = 0$ получаем дополнительное условие

$$\partial^2\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^2 = 0 \ . \tag{7.8}$$

Дифференцируя (7.8) по Fo, имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right) = 0 \tag{7.9}$$

и с учетом уравнения (7.1) находим второе дополнительное условие

$$\partial^4\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^4 = 0 \ . \tag{7.10}$$

Аналогично можно найти и последующие условия. Общая формула для них будет

$$\partial^i\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^i = 0 \quad (i = 2,\ 4,\ 6\ \ldots). \tag{7.11}$$

Условия вида (7.11), благодаря принятой системе координатных функций, точно удовлетворяются решением (7.6) в любом приближении.

Для нахождения дополнительных граничных условий в точке $\xi = 1$ продифференцируем соотношение (7.5) и граничное условие (7.4) по переменной Fo:

$$\left(\frac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right) = \frac{dq(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} \ ; \quad (7.12) \qquad \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right) = 0 \ . \tag{7.13}$$

Соотношения (7.12), (7.13) с учетом уравнения (7.1) приводятся к следующим дополнительным граничным условиям:

$$\partial^2\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^2 = dq(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo} \ ; \quad (7.14) \qquad \partial^3\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^3 = 0 \ . \tag{7.15}$$

Дифференцируя соотношения (7.14), (7.15) по переменной Fo, находим:

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right)=\frac{dq^2(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^2};\quad (7.16)\qquad \frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right)=0\ , \qquad (7.17)$$

Соотношения (7.16), (7.17) с учетом уравнения (7.1) приводятся к дополнительным условиям вида

$$\partial\Theta^4(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^4=d^2q(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}^2\ ;\quad (7.18)\qquad \partial\Theta^5(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^5=0\ . \qquad (7.19)$$

На основе соотношений (7.14), (7.15), (7.18), (7.19) можно записать следующие общие формулы:

$$\partial^{2i}\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^{2i}=d^iq(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}^i\quad (i=1,2,3,\ldots); \qquad (7.20)$$

$$\partial^i\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^i=0\quad (i=3,5,7,\ldots). \qquad (7.21)$$

Очевидно, что дополнительные граничные условия вида (7.21) решением (7.6) удовлетворяются точно в любом приближении. Следовательно, из основных (7.3), (7.4) и дополнительных (7.11), (7.20), (7.21) граничных условий, включая также и условие (7.5), неудовлетворенными решением (7.6) оказываются лишь условия (7.5) и (7.20). Эти условия и будут использованы далее при нахождении неизвестных коэффициентов $b_k(q)$ $(k=\overline{1,n})$ соотношения (7.6).

Рассмотрим получение решения задачи $(7.1)-(7.4)$ в первом приближении. После подстановки (7.6) (оставляя один член ряда) в условие (7.5), для определения неизвестного коэффициента $b_1(q)$ будем иметь алгебраическое уравнение

$$1+b_1(q)\sin(\pi\xi/2)\big|_{\xi=1}=q(\mathrm{Fo}), \qquad (7.22)$$

в результате решения которого, получаем

$$b_1(q)=q(\mathrm{Fo})-1\,. \qquad (7.23)$$

Подставив (7.23) в (7.6), получаем

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=1+(q(\mathrm{Fo})-1)\sin(\pi\xi/2). \qquad (7.24)$$

Потребуем, чтобы выражение (7.24) удовлетворяло осредненному уравнению $(7.1)-$ интегральному уравнению теплового баланса

$$\int_0^1\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}d\xi=\int_0^1\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}d\xi\ . \qquad (7.25)$$

После подстановки (7.24) в (7.25) относительно неизвестной функции $q(\mathrm{Fo})$ будем иметь уравнение

$$dq/d\mathrm{Fo}=-\pi^2\left(q-1\right)/4\,. \qquad (7.26)$$

Интегрируя уравнение (7.26), получаем

$$q(\mathrm{Fo})=1+C_1\exp(-\pi^2\mathrm{Fo}/4)\,, \qquad (7.27)$$

где C_1 – константа интегрирования.

Подставляя (7.27) в (7.24), получаем

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + C_1 \exp(-\pi^2 \mathrm{Fo}/4) \sin(\pi\xi/2). \qquad (7.28)$$

Для определения константы интегрирования C_1 составляется невязка условия (7.2) и требуется ее ортогональность к функции $\sin(\pi\xi/2)$:

$$C_1 \int_0^1 \sin^2(\pi\xi/2)\, d\xi = -\int_0^1 \sin(\pi\xi/2)\, d\xi . \qquad (7.29)$$

Вычисляя интегралы в (7.29), получаем $C_1 = -4/\pi$. Подставляя найденное значение C_1 в (7.28), получаем

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - 4 \exp(-\pi^2 \mathrm{Fo}/4) \sin(\pi\xi/2)/\pi \ . \qquad (7.30)$$

Соотношение (7.30) представляет решение задачи (7.1) – (7.4) в первом приближении. Выполним проверку удовлетворения этим решением всех условий задачи (7.1) – (7.4). И, в частности, оно точно удовлетворяет граничным условиям (7.3) – (7.4) и уравнению (7.1) в замкнутой области $0 \le \xi \le 1$. Проверим выполнимость уравнения (7.1) в граничных точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$. После подстановки решения (7.30) в уравнение (7.1), получаем, что правая и левая части этого уравнения приводятся к одинаковой величине

$$N(\xi, \mathrm{Fo}) = \pi \exp(-\pi^2 \mathrm{Fo}/4) \sin(\pi\xi/2), \qquad (7.31)$$

которая в точке $\xi = 0$ имеет нулевое значение.

Отметим, что выражение (7.31) выполняется при любых $0 \le \xi \le 1$, включая и граничные точки $\xi = 0$ и $\xi = 1$ (невязка уравнения (7.1) равна нулю во всех точках замкнутой области). При этом отметим, что выражение (7.31) при $\xi = 0$, в отличие от всех остальных точек, выполняется через нулевые значения его левой и правой части (то есть, в предельном смысле [109]). В точке $\xi = 1$ уравнение (7.1), как и в любой другой точке пространственной переменной (исключая точку $\xi = 0$), выполняется через вполне определенные (ненулевые) значения левой и правой частей соотношения (7.31). На рисунке 7.2 приведено изменение равных между собой левой и правой частей соотношения (7.31) в пределах пространственной переменной $0 \le \xi \le 1$ для отдельных моментов во времени Fo. Очевидно, что с увеличением Fo величина $N(\xi, \mathrm{Fo})$ уменьшается и при $\mathrm{Fo} \to \infty$ $N(\xi, \mathrm{Fo}) \to 0$ во всем диапазоне изменения пространственной переменной $0 \le \xi \le 1$.

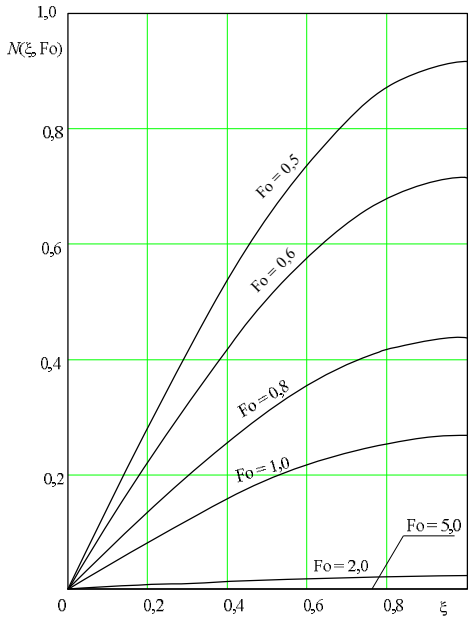


Рисунок 7.2. Изменение величины $N(\xi, \mathrm{Fo})$ по пространственной координате во времени

Отметим, что приведенный выше анализ справедлив и для любых других точных аналитических решений краевой задачи (7.1) – (7.4), полученных с помощью классических точных аналитических методов.

Расчеты температур по (7.34) в сравнении с точными их значениями [90] даны на рисунке 7.3. Из анализа следует, что в диапазоне $0{,}1 \le \mathrm{Fo} < \infty$ их расхождение составляет не более 5 %.

Таким образом, из всех условий задачи (7.1) – (7.4), точно выполняемых решением (7.30), приближенно (в первом приближении) выполняется лишь начальное условие (7.2). Для повышения точности условия (7.2) необходимо увеличивать количество членов ряда (7.6), неизвестные коэффициенты которого определяются из дополнительных граничных условий. В частности, при получении решения задачи (7.1) – (7.4) для второго приближения, подставляя (7.6) (оставляя два члена ряда) в (7.5), (7.14), для неизвестных коэффициентов $b_1(q)$ и $b_2(q)$ получаем систему двух алгебраических уравнений. После определения $b_1(q)$ и $b_2(q)$ формула (7.6) будет иметь вид

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + [-(4q' + 9\pi^2(q-1))\sin(\pi\xi/2) + (4q' + \pi^2(q-1))\sin(3\pi\xi/2)]/(8\pi^2), \qquad (7.32)$$

где $q' = dq/d\mathrm{Fo}$.

После подстановки (7.32) в (7.25) получаем

$$\frac{4}{3\pi^3}q'' + \frac{10}{3\pi}q' + \frac{3\pi}{4}q - \frac{3\pi}{4} = 0, \qquad (7.33)$$

где $q'' = d^2q/d\mathrm{Fo}^2$.

Интегрируя уравнение (7.33), находим

$$q(\mathrm{Fo}) = C_1 \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{9\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right) + 1, \tag{7.34}$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Подставляя (7.34) в (7.32), получаем

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - C_1 \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - C_2 \exp\left(-\frac{9\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right). \tag{7.35}$$

С целью нахождения постоянных интегрирования C_1 и C_2 составляется невязка условия (7.2) и требуется ортогональность невязки к функциям $\sin(j\pi\xi/2)$ $(j = 1, 3)$:

$$\int_0^1 \left(C_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + C_2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right)\right)\sin\left(\frac{j\pi}{2}\xi\right)d\xi = \int_0^1 \sin\left(\frac{j\pi}{2}\xi\right)d\xi \quad (j = 1,3). \tag{7.36}$$

Соотношение (7.36) для неизвестных постоянных C_1 и C_2 представляет систему алгебраических уравнений. Ввиду ортогональности тригонометрических координатных функций неизвестные в этой системе разделяются так, что каждое уравнение содержит лишь одно неизвестное. Общий вид этих уравнений

$$C_k \int_0^1 \sin^2\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right)d\xi = \int_0^1 \sin\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right)d\xi \quad (k = 1,2;\ r = 2k-1). \tag{7.37}$$

Вычисляя интегралы в (7.37), находим

$$C_k = 4/(r\pi) \quad (k = 1,2;\ r = 2k-1). \tag{7.38}$$

Формула (7.35) с учетом найденных постоянных интегрирования принимает вид

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - \sum_{k=1}^{2} \frac{4}{r\pi}\exp\left(-\frac{r^2\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right)\sin\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right) \quad (r = 2k-1). \tag{7.39}$$

В третьем приближении неизвестные коэффициенты $b_k(q)$ $(k = 1,2,3)$ определяются из соотношения (7.5) и двух дополнительных условий, получаемых по общей формуле (7.20) (при $i = 1, 2$). Для неизвестной функции $q(\mathrm{Fo})$ будем иметь уравнение третьего порядка

$$\frac{4}{15\pi^5}q''' + \frac{7}{3\pi^3}q'' + \frac{259}{60\pi}q' + \frac{15}{16}\pi q - \frac{15}{16}\pi = 0\ . \tag{7.40}$$

Подставляя решение уравнения (7.40) в соотношение (7.6) находим

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + C_1 \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) - C_2 \exp\left(-\frac{9\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right) +$$

$$+ C_3 \exp\left(-\frac{25\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{2}\xi\right). \tag{7.41}$$

С целью нахождения постоянных интегрирования C_k $(k = 1, 2, 3)$ составляется невязка условия (7.2) и требуется ортогональность невязки к функциям $\sin\left(j\pi\xi/2\right)$ $(j = 2k-1;\ k = 1, 2, 3)$:

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{3} C_k \exp\left(-\frac{r^2\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right)\sin\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right)\sin\left(j\frac{\pi}{2}\xi\right)d\xi = \int_0^1 \sin\left(j\frac{\pi}{2}\xi\right)d\xi . \qquad (7.42)$$

Выражение (7.42) ввиду ортогональности синусов принимает вид

$$C_k \int_0^1 \sin^2\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right)d\xi = \int_0^1 \sin\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right)d\xi \quad (k = 1, 2, 3;\ r = 2k-1). \qquad (7.43)$$

Вычисляя интегралы в (7.43), находим

$$C_k = \mp 4/\left(r\pi\right) \quad (k = 1, 2, 3;\ r = 2k-1). \qquad (7.44)$$

Формула (7.41) с учетом найденных значений постоянных интегрирования C_k $(k = 1,2,3)$ принимает вид

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 - \sum_{k=1}^{3} \frac{4}{r\pi}\exp\left(-\frac{r^2\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right)\sin\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right). \qquad (7.45)$$

Результаты расчетов во втором (по формуле (7.39)) и в третьем (по формуле (7.45)) приближениях в сравнении с точным решением [90, 91] даны на рисунке 7.3. Из анализа можно сделать вывод, что в диапазоне $0{,}1 \le \mathrm{Fo} < \infty$ рассогласование расчетных данных с точным решением по сравнению с первым приближением уменьшилось до 2 %, а решение в третьем приближении практически совпадает с точным.

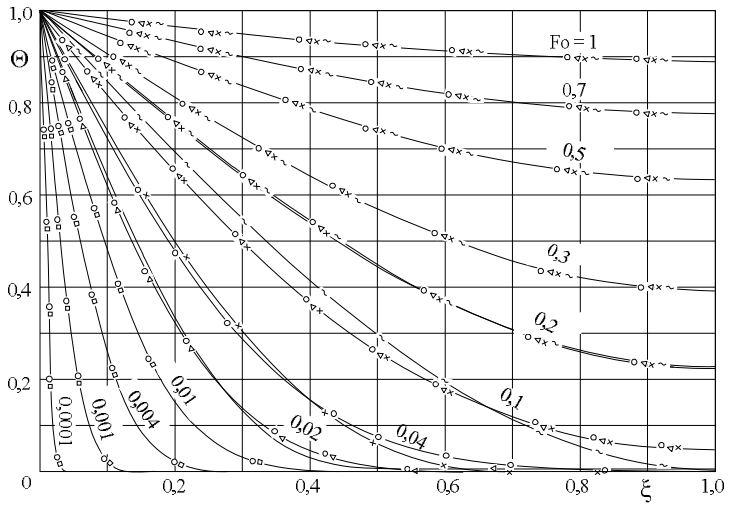


Рисунок 7.3: Распределение температуры в пластине. ~ – 1-ое приближение; × – 2-ое приближение (n = 2); △ – 3-е приближение (n = 3); □ – по формуле (7.46) при (n = 1000); ○ – точное решение (n = 1000)

На основе соотношений (7.30), (7.39), (7.45), а также из анализа решений, полученных в последующих приближениях, можно записать общую формулу решения задачи (7.1) – (7.4) для любого числа приближений в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 - \sum_{k=1}^{n} A_k \exp\left(-\nu_k \mathrm{Fo}\right)\sin\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right), \tag{7.46}$$

где $A_k = 4/(r\pi)$; $\nu_k = r^2\pi^2/4$, $(r = 2k-1;\ k = \overline{1,n})$; n – число приближений.

Анализируя решение (7.46), можно заметить, что формула для коэффициентов A_k по модулю совпадает с формулой для аналогичных коэффициентов (получаемых из удовлетворения начального условия) классического точного решения, а формула для ν_k – с формулой для собственных чисел этого решения. Расчеты на основе соотношения (7.46) в сравнении с точным решением [90] для различного числа членов ряда даны на рисунке 7.3. Из анализа можно сделать вывод, что результаты, полученные по формуле (7.46), при достаточно больших n во всем диапазоне числа Фурье полностью совпадают с точным аналитическим решением. Таким образом, используя дополнительную искомую функцию вида (7.5) и дополнительные граничные условия, определяемые по общей формуле (7.20), на основе интегрального метода получено точное аналитическое решение задачи (7.1) – (7.4).

При выполнении расчетов в качестве точного аналитического решения использовано соотношение (7.16) (см. стр. 87 из [90]), в котором для удобства сравнения выполнена замена переменных $\Theta(\xi,\mathrm{Fo})$ на $1-\Theta(\xi,\mathrm{Fo})$ и ξ на $1-\xi$. Соотношение (7.16) в этом случае принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{r\pi} \exp\left(-\frac{r^2\pi^2}{4}\mathrm{Fo}\right)\cos\left(\frac{r\pi}{2}(1-\xi)\right),$$

где $r = 2k-1$.

Для получения результатов, приведенных на рисунке 7.3, в точном решении было использовано 1000 членов ряда.

7.2 Переменное начальное условие

В аналитической теории теплопроводности известны методы, основанные на определении фронта теплового возмущения – глубины прогретого (термического) слоя [12, 13, 26, 30, 81, 108, 127]. При использовании данных методов процесс теплопроводности разделяется на две стадии. Первая из этих стадий основана на допущении о постепенном продвижении фронта теплового возмущения от поверхности к центру тела. Во второй стадии изменение температуры происходит в пределах всей области изменения пространственной переменной. Определение в первой стадии изменяющейся во времени глубины прогретого слоя означает принятие допущения о конечной скорости распространения теплоты, несмотря на то, что решению подлежит параболическое уравнение теплопроводности, характеризующее бесконечную ее скорость. Общим недостатком интегральных методов является низкая точность

получаемых решений. Для ее повышения в работах [68, 70, 74 – 76, 81, 108] применяются дополнительные краевые условия. На их основе показано, что при увеличении количества приближений n происходит уменьшение времени перемещения фронта возмущения Fo_1 от поверхности до центра пластины, то есть происходит возрастание скорости его движения. И в пределе при $n \to \infty$ скорость продвижения фронта также устремляется к бесконечной величине, а время его перемещения $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1 \to 0$, что подтверждает факт бесконечной скорости распространения теплоты и снимает противоречие, связанное с допущением о ее конечности. Отсюда следует, что с увеличением числа приближений диапазон времени, в котором определена первая стадия процесса, уменьшается, а второй стадии – увеличивается. В связи с этим решения для первой стадии могут быть использованы лишь при малых и сверхмалых значениях времени и пространственной переменной. При этом пространственно - временно́й диапазон второй стадии процесса возрастает. Учитывая этот факт, в настоящей работе рассматривается метод получения точного аналитического решения, позволяющий (основываясь на бесконечной скорости распределения теплоты) избежать рассмотрения первой стадии.

Основная идея метода связана с использованием дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий. Целью введения дополнительной искомой функции является сведение решения дифференциального уравнения в частных производных к интегрированию уравнения в обыкновенных производных. Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их удовлетворение искомым решением было эквивалентно удовлетворению дифференциального уравнения в граничных точках.

Метод решения, связанный с выполнением уравнения в граничных точках, использовался Л.В. Канторовичем [50], Ф.М. Федоровым [109], Л.И. Кудряшовым, Н.Л. Меньши́х [61] и др. И, в частности, Ф.М. Федоровым математически доказано, что выполнение уравнения в граничных точках приводит к его выполнению и внутри области.

Основные положения метода рассмотрим применительно к решению задачи теплопроводности для пластины при граничных условиях первого рода и при переменном начальном условии (начальная температура – линейная функция пространственной координаты). Постановка задачи имеет вид

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0;\quad 0 < x < \delta); \tag{7.47}$$

$$T(x,0) = T_0 - (x/\delta)(T_0 - T_{\text{ст}})\ ; \quad (7.48) \qquad T(0,\tau) = T_{\text{ст}}\ ; \quad (7.49) \qquad T(1,\tau) = T_{\text{ст}}\ , \tag{7.50}$$

где T – температура; τ – время; x – координата; T_0 – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки; a – температуропроводность; δ – толщина пластины.

Обозначим:

$$\Theta = (T - T_{\text{ст}})/(T_0 - T_{\text{ст}}) \ ; \quad \xi = x/\delta \ ; \quad \text{Fo} = a\tau/\delta^2 \ , \tag{7.51}$$

где ξ – безразмерная координата; Θ – безразмерная температура; Fo – число Фурье.

Учитывая обозначения, задача (7.98) – (7.50) будет следующей (рисунок 7.4):

$$\partial\Theta(\xi,\text{Fo})/\partial\text{Fo} = \partial^2\Theta(\xi,\text{Fo})/\partial\xi^2 \quad (\text{Fo} > 0 \ ; \ 0 < \xi < 1); \tag{7.52}$$

$$\Theta(\xi,0) = 1 - \xi \ ; \quad (7.53) \qquad \Theta(0,\text{Fo}) = 0 \ ; \quad (7.54) \qquad \Theta(1,\text{Fo}) = 0 \ . \tag{7.55}$$

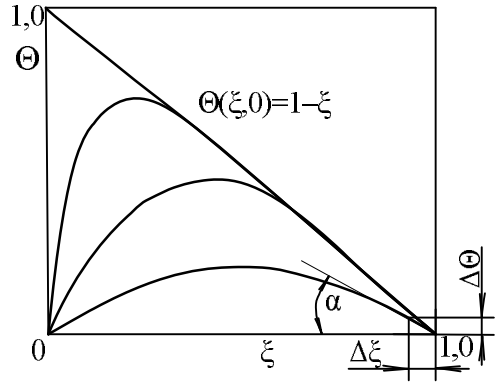


Рисунок 7.4. Схема теплообмена

Для упрощения получения решения введем дополнительную искомую функцию

$$q(\text{Fo}) = \partial\Theta(1,\text{Fo})/\partial\xi = \text{tg}\,\alpha \ , \tag{7.56}$$

представляющую изменение во времени скалярной величины градиента температуры на поверхности пластины $\xi = 1$ (рисунок 7.4). Очевидно, что величина $q(\text{Fo})$ представляет изменение тангенса угла наклона температурной кривой к оси ξ в точке $\xi = 1$. Ввиду описываемой уравнением (7.52) бесконечной скорости распространения теплоты функция $q(\text{Fo})$ начинает изменяться тотчас же после приложения граничного условия первого рода в точке $\xi = 0$. Следовательно, диапазон ее изменения охватывает весь диапазон времени нестационарного процесса $0 \le \text{Fo} < \infty$. И, в частности, при $\text{Fo} = 0 \quad \alpha = 45°$ и при $\text{Fo} \to \infty$ $\alpha \to 0$.

Решение задачи (7.52) – (7.55) разыскивается в виде ряда

$$\Theta(\xi,\text{Fo}) = \sum_{k=1}^{n} b_k(q)\varphi_k(\xi) \ , \tag{7.57}$$

где $\varphi_k(\xi) = \sin(k\pi\xi)$ $(k = \overline{1,n})$ – координатные функции; $b_k(q)$ – неизвестные коэффициенты.

Соотношение (7.57) (ввиду принятой системы координатных функций) точно удовлетворяет условиям (7.54), (7.55). Неизвестные коэффициенты $b_k(q)$ определяются из условия (7.56) и некоторых дополнительных условий, при нахождении которых используются условия (7.54) – (7.56) и уравнение (7.52). С целью получения дополнительных условий для точек $\xi = 0$ и $\xi = 1$ продифференцируем (7.54), (7.55) по Fo:

$$\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo}=0\ ;\quad (7.58)\qquad \partial\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo}=0\ .\qquad (7.59)$$

Сравнивая соотношения (7.58), (7.59) с уравнением (7.52), получаем дополнительные граничные условия вида

$$\partial^2\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^2=0\ ;\quad (7.60)\qquad \partial^2\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^2=0\ .\qquad (7.61)$$

Дифференцируя соотношения (7.60), (7.61) по переменной Fo, находим

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right)=0\ ;\quad (7.62)\qquad \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right)=0\ .\qquad (7.63)$$

Соотношения (7.62), (7.63) с учетом уравнения (7.52) приводятся к следующим дополнительным граничным условиям:

$$\partial^4\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^4=0\ ;\quad (7.64)\qquad \partial^4\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^4=0\ .\qquad (7.65)$$

Таким путем можно определить любое количество дополнительных условий в точках $\xi=0$ и $\xi=1$. Их общие формулы будут

$$\partial^i\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^i=0\ ;\quad (7.66)\qquad \partial^i\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^i=0\quad (i=2,\,4,\,6,\ldots)\ .\qquad (7.67)$$

Соотношение (7.57), ввиду использования тригонометрических координатных функций, в любом приближении точно удовлетворяет условиям (7.66), (7.67), что эквивалентно выполнению уравнения (7.52) в точках $\xi=0$ и $\xi=1$ (в предельном смысле – через равенство нулю его левой и правой часттq).

Непосредственное удовлетворение соотношением (7.57) дополнительных граничных условий, получаемых по формулам (7.66), (7.67), связано с линейностью дифференциального уравнения (7.52) и, как следствие, с простотой получаемых на его основе дополнительных граничных условий. Однако, например, для нелинейных дифференциальных уравнений, дополнительные граничные условия будут более сложными и в случаях, когда они не будут удовлетворяться искомым решением заранее, их необходимо выполнять за счет определения неизвестных коэффициентов $b_k(q)$ $(k=\overline{1,n})$ соотношения (7.57).

В данном случае коэффициенты $b_k(q)$ $(k=\overline{1,n})$ соотношения (7.57) будем находить из дополнительных граничных условий, получаемых на основе соотношения (7.56) и уравнения (7.52). Дифференцируя (7.56) по переменной Fo, находим

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right)=\frac{dq(\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\ .\qquad (7.68)$$

Соотношение (7.68) с учетом уравнения (7.52) приводится к следующему дополнительному граничному условию:

$$\partial^3\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^3=dq(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}\ .\qquad (7.69)$$

Дифференцируя (7.69) по переменной Fo и учитывая уравнение (7.52), находим следующее дополнительное граничное условие применительно к точке $\xi = 1$:

$$\partial^5(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^5 = d^2q(\mathrm{Fo})/\mathrm{dFo}^2 \ . \tag{7.70}$$

Используя дополнительные граничные условия (7.69), (7.70), можно записать общую формулу для них вида

$$\partial^{2i+1}\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^{2i+1} = d^iq(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}^i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots) . \tag{7.71}$$

Таким образом, из основных (7.54), (7.55) и дополнительных условий вида (7.66), (7.67), (7.71) невыполненными решением (7.57) остаются лишь условия (7.71). Эти условия, а также соотношение (7.56), и будут использованы далее при нахождении коэффициентов $b_k(q)$ ($k = \overline{1,n}$).

При определении решения задачи (7.52) – (7.55) для первого приближения подставим (7.57) (оставляя один член ряда) в (7.56). Отсюда для коэффициента $b_1(q)$ будем иметь алгебраическое уравнение. Из его решения находим $b_1(q) = q/\pi$. Формула (7.57), учитывая найденное значение $b_1(q)$, принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = -(q/\pi)\sin(\pi\xi) \ . \tag{7.72}$$

С целью определения функции $q(\mathrm{Fo})$ потребуем, чтобы решение (7.72) удовлетворяло осредненному уравнению (7.52)) вида

$$\int_0^1 \frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}d\xi = \int_0^1 \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}d\xi \ . \tag{7.73}$$

Подставляя (7.72) в (7.73), находим

$$dq/d\mathrm{Fo} + \pi^2 q = 0 \ . \tag{7.74}$$

Интегрируя уравнение (7.74), получаем

$$q(\mathrm{Fo}) = C_1\exp(-\pi^2\mathrm{Fo}) \ , \tag{7.75}$$

где C_1 – константа интегрирования.

Подставляя (7.75) в (7.72), определяем

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = (C_1\exp(-\pi^2\mathrm{Fo})\sin(\pi\xi))/\pi \ . \tag{7.76}$$

С целью определения константы интегрирования C_1 составляется невязка условия (7.53) и требуется выполнение ортогональности невязки к функции $\varphi_1(\xi) = \sin(\pi\xi)$, т. е.

$$(C_1/\pi)\int_0^1 \sin^2(\pi\xi)\,d\xi = \int_0^1 (1-\xi)\sin(\pi\xi)\,d\xi \ . \tag{7.77}$$

Соотношение (7.77) для константы интегрирования C_1 представляет алгебраическое уравнение. Вычисляя интегралы, получаем $C_1 = 2$. С учетом найденного значения C_1

соотношение (7.76), представляющее решение задачи (7.52) – (7.55) в первом приближении, приводится к виду

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 2(\exp(-\pi^2 \mathrm{Fo})\sin(\pi\xi))/\pi \ . \qquad (7.78)$$

Соотношение (7.78) удовлетворяет условиям (7.54), (7.55) и уравнению (7.52) в замкнутой области $0 \le \xi \le 1$. Подставляя (7.78) в (7.52), находим

$$2\pi \exp(-\pi^2 \mathrm{Fo})\sin(\pi\xi) = 2\pi \exp(-\pi^2 \mathrm{Fo})\sin(\pi\xi) \ . \qquad (7.79)$$

Соотношение (7.79) выполняется при любых значениях переменных $0 \le \xi \le 1$ и $0 \le \mathrm{Fo} < \infty$ (невязка уравнения (7.52) равна нулю во всем диапазоне переменных ξ и Fo). При этом отметим, что в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$ (в отличие от всех других точек) соотношение (7.79) выполняется через нулевые значения его левой и правой частей, то есть в предельном смысле [15]. На рисунке 7.5 приведены графики изменения равных между собой левой и правой частей соотношения (7.79) в диапазоне $0 \le \xi \le 1$ для некоторых значений времени Fo, где $N(\xi, \mathrm{Fo}) = 2\pi \exp(-\pi^2 \mathrm{Fo})\sin(\pi\xi)$. Их анализ позволяет сделать вывод, что в точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$ величина $N(\xi, \mathrm{Fo})$ в любой момент времени Fo равна нулю, тогда как в диапазоне $0 < \xi < 1$ уравнение (7.52) выполняется через ненулевые значения левой и правой частей соотношения (7.79). С увеличением Fo величина $N(\xi, \mathrm{Fo})$ уменьшается и при $\mathrm{Fo} \to \infty$ $N(\xi, \mathrm{Fo}) \to 0$ во всем диапазоне изменения пространственной переменной $0 \le \xi \le 1$.

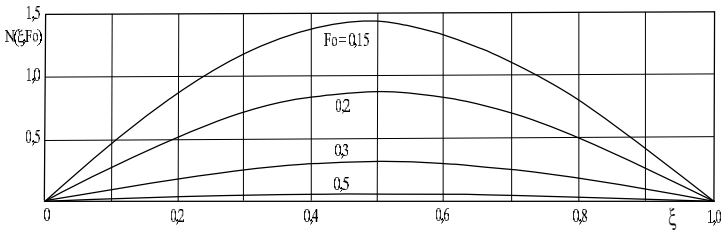


Рисунок 7.5. Изменение величины $N(\xi, \mathrm{Fo})$ по пространственной переменной во времени

Таким образом, соотношение (7.78), точно удовлетворяя уравнению (7.52) и условиям (7.54), (7.55), условию (7.53) удовлетворяет приближенно. С целью повышения точности его выполнения следует увеличивать количество слагаемых ряда (7.57), коэффициенты которого будем находить из условия (7.56) и дополнительных граничных условий, определяемых по общей формуле (7.71). Во втором приближении, подставляя (7.57) (оставляя два члена ряда) в (7.56), (7.71) (при $i = 1$), для коэффициентов $b_1(q)$ и $b_2(q)$ получим систему двух алгебраических линейных уравнений. Из ее решения получаем

$$b_1(q) = -(4\pi^2 q + dq/d\mathrm{Fo})/(3\pi^3) \ ; \quad b_2(q) = -(\pi^2 q + dq/d\mathrm{Fo})/(6\pi^3) \ . \qquad (7.80)$$

Учитывая найденные значения $b_1(q)$ и $b_2(q)$, соотношение (7.57) принимает вид

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = -\frac{1}{3\pi^3}(4\pi^2 q + q')\sin(\pi\xi) - \frac{1}{6\pi^3}(\pi^2 q + q')\sin(2\pi\xi) \ , \qquad (7.81)$$

где $q' = dq/d\mathrm{Fo}$.

Подставляя (7.81) в (7.73), для $q(\mathrm{Fo})$ будем иметь уравнение

$$\frac{d^2 q}{\partial \mathrm{Fo}^2} + 5\pi^2 \frac{\partial q}{\partial \mathrm{Fo}} + 4\pi^4 q = 0 \ . \qquad (7.82)$$

Интегрируя уравнение (7.82), получаем

$$q(\mathrm{Fo}) = C_1 \exp(-\pi^2 \mathrm{Fo}) + C_2 \exp(-4\pi^2 \mathrm{Fo}) \ , \qquad (7.83)$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования.

Формула (7.81) с учетом (7.83) запишется следующим образом:

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = -[2C_1 e^{-\pi^2 \mathrm{Fo}} \sin(\pi\xi) - C_2 e^{-4\pi^2 \mathrm{Fo}} \sin(2\pi\xi)]/2\pi \ . \qquad (7.84)$$

Для определения констант интегрирования C_1 и C_2 составляется невязка условия (7.53) и требуется выполнение ее ортогональности к функциям $\varphi_j = \sin(j\pi\xi)$ $(j = 1, 2)$:

$$-\int_0^1 [2C_1 \sin(\pi\xi) - C_2 \sin(2\pi\xi)] \sin(j\pi\xi) d\xi = 2\pi \int_0^1 (1-\xi)\sin(j\pi\xi)\, d\xi \quad (j = 1, 2): \qquad (7.85)$$

Относительно констант интегрирования C_1 и C_2 соотношение (7.85) представляет систему двух алгебраических уравнений, в которой ввиду ортогональности синусов неизвестные разделяются так, что в каждое уравнение входит лишь одна неизвестная постоянная. После вычисления интегралов в (7.85) и решения алгебраических уравнений получаем: $C_1 = -2$; $C_2 = 2$.

Зависимость (7.84) с учетом найденных значений постоянных интегрирования C_1 и C_2 принимает вид

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 2\left[\frac{1}{\pi} e^{-\pi^2 \mathrm{Fo}} \sin(\pi\xi) + \frac{1}{2\pi} e^{-4\pi^2 \mathrm{Fo}} \sin(2\pi\xi)\right] . \qquad (7.86)$$

Соотношение (7.86) является решением задачи (7.52) – (7.55) для второго приближения. Это решение точно удовлетворяет уравнению (7.52) и условиям (7.54), (7.55) и приближенно – начальному условию (7.53). Из анализа расчетов на основе соотношения (7.86) можно заключить, что в диапазоне $0{,}05 \le \mathrm{Fo} < \infty$ отклонение от точного решения [90] уменьшается с 6 % (в первом приближении) до 2 % – во втором.

При получении решения в третьем приближении, подставляя (7.57) (оставляя три члена ряда (в (7.56), (7.71) (при $i = 1, 2$), для неизвестных коэффициентов $b_k(q)$ $(k = 1, 2, 3)$ получаем систему трех алгебраических уравнений. Из ее решения будем иметь

$$b_1(q) = -\frac{1}{24\pi^5}(q'' + 13\pi^2 q' + 36\pi^4 q) \ ; \quad b_2(q) = -\frac{1}{30\pi^5}(q'' + 10\pi^2 q' + 9\pi^4 q) \ ;$$

$$b_3(q) = -\frac{1}{120\pi^5}(q'' + 5\pi^2 q' + 4\pi^4 q) \ , \tag{7.87}$$

где $q'' = d^2 q / d\mathrm{Fo}^2$.

Подставляя (7.57) (с учетом найденных значений $b_k(q) \quad (k = 1, 2, 3)$) в (7.73), после вычисления интегралов будем иметь

$$\frac{d^3 q}{d\mathrm{Fo}^3} + 14\pi^2 \frac{d^2 q}{d\mathrm{Fo}^2} + 49\pi^4 \frac{dq}{d\mathrm{Fo}} + 36\pi^6 q = 0 \ . \tag{7.88}$$

Интегрируя уравнение (7.88), получаем

$$q(\mathrm{Fo}) = C_1 \exp(-\pi^2 \mathrm{Fo}) + C_2 \exp(-4\pi^2 \mathrm{Fo}) + C_3 \exp(-9\pi^2 \mathrm{Fo}) \ , \tag{7.89}$$

где C_1, C_2, C_3 – константы интегрирования.

С учетом (7.87) и (7.89) соотношение (7.57) в третьем приближении принимает вид

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = -\frac{1}{6\pi}[6C_1 e^{-\pi^2 \mathrm{Fo}} \sin(\pi\xi) +$$

$$+ 3C_2 e^{-4\pi^2 \mathrm{Fo}} \sin(2\pi\xi) - 2C_3 e^{-9\pi^2 \mathrm{Fo}} \sin(3\pi\xi)] \ . \tag{7.90}$$

Для определения констант интегрирования составляется невязка условия (7.53) и требуется ее ортогональность к функциям $\varphi_j = \sin(j\pi\xi) \quad (j = 1, 2, 3)$:

$$\int_0^1 \Theta(\xi, 0) \sin(j\pi\xi) d\xi = \int_0^1 (1 - \xi) \sin(j\pi\xi) \, d\xi \qquad (j = 1, 2, 3) . \tag{7.91}$$

Выражение (7.91) для констант интегрирования $C_k \quad (k = 1, 2, 3)$ представляет систему трех алгебраических линейных уравнений, в которой в виду ортогональности тригонометрических функций неизвестные C_k разделяются. В связи с этим решение уравнения (7.91) можно записать в виде одной формулы

$$C_k = 2(-1)^k \quad (k = 1, 2, 3) . \tag{7.92}$$

С учетом найденных значений постоянных интегрирования $C_k \quad (k = 1, 2, 3)$ решение задачи в третьем приближении запишется следующим образом:

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 2\left[\frac{1}{\pi} e^{-\pi^2 \mathrm{Fo}} \sin(\pi\xi) + \frac{1}{2\pi} e^{-4\pi^2 \mathrm{Fo}} \sin(2\pi\xi) + \frac{1}{3\pi} e^{-9\pi^2 \mathrm{Fo}} \sin(3\pi\xi)\right]. \tag{7.93}$$

Отметим, что в диапазоне $0{,}05 \le \mathrm{Fo} < \infty$ безразмерные температуры, определяемые по формуле (7.93), практически совпадают с точными их величинами.

Аналогичным путем было также получено решение задачи (7.52) – (7.55) в четвертом приближении, которое имеет вид

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 2\left[\frac{1}{\pi} e^{-\pi^2 \mathrm{Fo}} \sin(\pi\xi) + \frac{1}{2\pi} e^{-4\pi^2 \mathrm{Fo}} \sin(2\pi\xi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3\pi} e^{-9\pi^2 \mathrm{Fo}} \sin(3\pi\xi) + \frac{1}{4\pi} e^{-16\pi^2 \mathrm{Fo}} \sin(4\pi\xi)\right]. \qquad (7.94)$$

Анализируя формулы (7.78), (7.86), (7.93), (7.94), можно заметить, что формирование их слагаемых происходит по определенной закономерности, позволяющей получить общую формулу для четырех приближений:

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi} \exp(-k^2 \pi^2 \mathrm{Fo}) \sin(k\pi\xi). \quad (n = 4) \qquad (7.95)$$

Расчеты для последующих приближений показывают, что выявленная закономерность формирования слагаемых получаемых решений соблюдается. В связи с чем, при $n \to \infty$ можно записать общую формулу получаемого решения, которая эквивалентна классическому точному аналитическому решению задачи (7.52) – (7.55) [90]:

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{n} A_k \exp(-\nu_k^2 \mathrm{Fo}) \sin(\nu_k \xi) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (7.96)$$

где

$$\nu_k = k\pi \ ; \qquad A_k = 2/\nu_k \ . \qquad (7.97)$$

Решение (7.96) точно удовлетворяет уравнению (7.52) и условиям (7.54), (7.55). Точность удовлетворения начального условия (7.53) зависит от числа приближений. Исследование решений для последующих приближений позволяет заключить, что все они (для всех $k = 1, 2, \ldots$) описываются соотношением (7.96), в котором общие формулы (7.97) для определения коэффициентов A_k и собственных чисел ν_k совпадают с точными формулами [90] для них.

Расчеты для бесконечной пластины по формуле (7.96) даны на рисунках 7.6, 7.7. Из анализа следует, что при $n = 1000$ вплоть до $\mathrm{Fo} = 10^{-6}$ наблюдается практически точное выполнение начального условия (7.53).

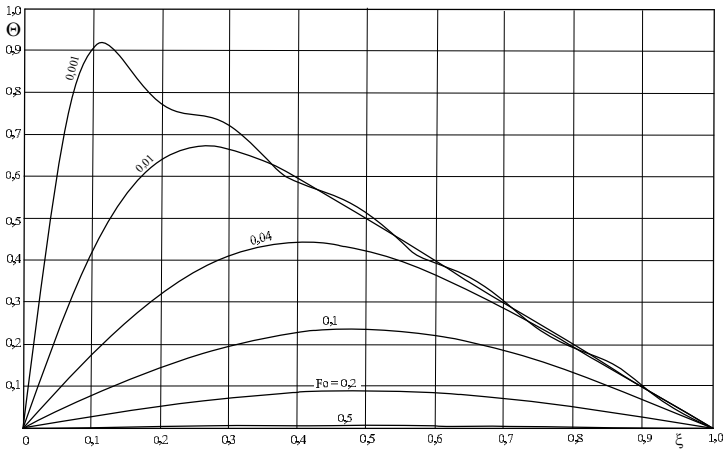


Рисунок 7.6. Распределение температуры в пластине (расчет по формуле (7.96) при $n = 10$)

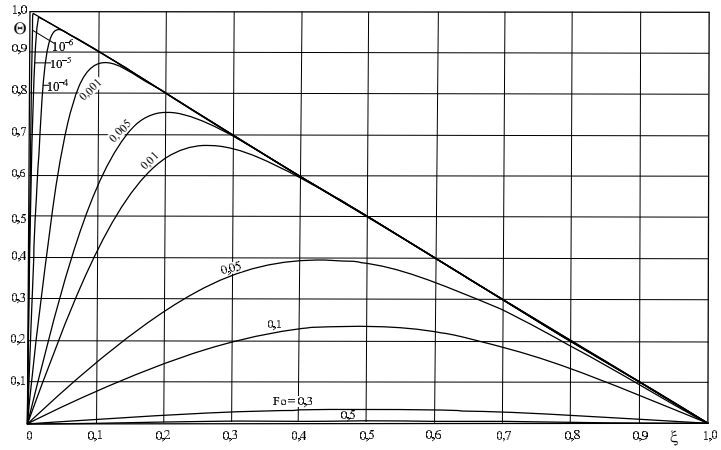


Рисунок 7.7. Распределение температуры в пластине (расчет по формуле (7.96) при $n = 1000$)

7.3 Переменные во времени граничные условия 1-го рода

Рассмотрим использование изложенного в пп. 7.2, 7.3 диссертации метода применительно к решению задачи теплопроводности для пластины с переменным во времени граничным условием 1-го рода (температура границы стенки – линейная функция времени) в математической постановке вида

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0;\ 0 < x < \delta); \tag{7.98}$$

$$T(x,0) = T_0; \quad (7.99) \qquad \partial T(0,\tau)/\partial x = 0; \quad (7.100) \qquad T(1,\tau) = T_0 + l\,\tau, \tag{7.101}$$

где T – температура, τ – время, x – координата, T_0 – начальная температура, a – коэффициент температуропроводности, $l = dT(1,\tau)/d\tau = const$ – скорость нагревания стенки, δ – толщина пластины.

Обозначим:

$$\Theta = (T - T_0)/T_0\ ; \qquad \mathrm{Fo} = a\tau/\delta^2\ ; \qquad \xi = x/\delta\ ; \qquad B = l\,\delta^2/(aT_0)\ , \tag{7.102}$$

где Θ – безразмерная температура; $\mathrm{Fo} = a\tau/\delta^2$ – число Фурье; ξ – безразмерная координата; $B = const$ – безразмерный комплекс.

Задача (7.98) – (7.101), учитывая (7.102), будет

$$\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo} = \partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})/\partial\xi^2 \quad (\mathrm{Fo}>0;\ 0<\xi<1); \tag{7.103}$$

$$\Theta(\xi,0)=0\ ; \tag{7.104}$$

$$\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi = 0\ ; \tag{7.105}$$

$$\Theta(1,\mathrm{Fo}) = B\mathrm{Fo}\ , \tag{7.106}$$

где $B = d\Theta(1,\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo} = \mathrm{const}$ – безразмерная скорость нагревания стенки.

С целью упрощения процесса получения аналитического решения введем дополнительную искомую функцию

$$q(\mathrm{Fo}) = \Theta(0,\mathrm{Fo})\ , \tag{7.107}$$

представляющую изменение температуры в центре пластины. Ввиду бесконечной скорости распределения теплоты, описываемой уравнением (7.103), температура в центре пластины начинает изменяться сразу после приложения граничного условия первого рода на ее поверхности. В связи с чем, диапазон временно́го изменения функции $q(\mathrm{Fo})$ охватывает весь диапазон времени нестационарного процесса ($0<\mathrm{Fo}<\infty$).

Решение задачи (7.103) – (7.106) разыскивается в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = B[\mathrm{Fo} - (1/2)(1-\xi^2) + \sum_{k=1}^{n} b_k(q)\varphi_k(\xi)]\ , \tag{7.108}$$

где $\varphi_k(\xi) = \cos(r\pi\xi/2)$ $(r=2k-1)$ – координатные функции; $b_k(q)$ $(\mathrm{k}=1,2,\ldots)$ – неизвестные коэффициенты.

Ввиду принятой системы координатных функций решение (7.108) точно удовлетворяет граничным условиям (7.105), (7.106). Неизвестные коэффициенты $b_k(q)$ будем находить из условия (7.107) и некоторых дополнительных граничных условий, определяемых так, чтобы их выполнение соотношением (7.108) было эквивалентно выполнению уравнения (7.104) в граничных точках $\xi=0$ и $\xi=1$. Отметим, что методы решения краевых задач путем выполнения уравнения на границах области рассматривались в работах [50, 61, 109].

Для получения дополнительных граничных условий, выполняемых в точках $\xi=0$ и $\xi=1$, продифференцируем условия (7.105), (7.106) по переменной Fo:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right)=0\ ; \tag{7.109}$$

$$\frac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = B\ . \tag{7.110}$$

Соотношения (7.109) и (7.110) с учетом уравнения (7.103) приводятся к следующим дополнительным граничным условиям:

$$\partial^3\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^3 = 0\ ; \tag{7.111}$$

$$\partial^2\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^2 = B\ . \tag{7.112}$$

Продифференцируем соотношения (7.111), (7.112) по переменной Fo:

$$\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right)=0\ ; \tag{7.113}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right)=0\ . \tag{7.114}$$

Подставляя правую часть уравнения (7.103) в соотношения (7.113), (7.114), получаем дополнительные граничные условия вида

$$\partial^5\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^5 = 0 \ ; \quad (7.115) \qquad \partial^4\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^4 = 0 \ . \quad (7.116)$$

Аналогично получаются и последующие дополнительные граничные условия:

$$\partial^7\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^7 = 0 \ ; \quad (7.117) \qquad \partial^6\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^6 = 0 \ . \quad (7.118)$$

Общие формулы для них запишутся следующим образом:

$$\partial^i\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^i = 0 \quad (i = 3,\ 5,\ 7, \ldots); \quad (7.119)$$

$$\partial^i\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^i = 0 \quad (i = 4,\ 6,\ 8, \ldots). \quad (7.120)$$

Соотношение (7.112) не входит в общую формулу (7.120), так как (с учетом $B = d\Theta(1,\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}$) оно, по сути, представляет математическую запись уравнения (7.103), которое в данной точке будет выполнено полученным решением в любом приближении.

Решение (7.108) ввиду принятой системы координатных функций точно удовлетворяет дополнительным условиям (7.119), (7.120). Отметим, что для краевых задач с более сложными дифференциальными операторами (нелинейных, с переменными коэффициентами и др.) дополнительные граничные условия могут иметь более сложный вид и, в случае, когда они не будут заранее удовлетворяться искомым решением, их необходимо выполнять за счет нахождения неизвестных коэффициентов $b_k(q) \quad k = \overline{1,n}$.

Неизвестные коэффициенты $b_k(q)$ $(\mathrm{k} = 1, 2, \ldots)$ соотношения (7.108) будем находить из соотношения (7.107) и получаемых на его основе дополнительных условий. Для нахождения первого из них продифференцируем (7.107) по переменной Fo:

$$dq(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo} = d\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\mathrm{Fo} \ . \quad (7.121)$$

Сравнивая соотношение (7.121) с уравнением (7.103), получаем дополнительное условие вида

$$\partial^2\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^2 = dq(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo} \ . \quad (7.122)$$

Дифференцируя (7.122) по переменной Fo, находим

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right) = \frac{d^2q(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^2} \ . \quad (7.123)$$

Соотношение (7.123) с учетом уравнения (7.103) приводится к следующему дополнительному граничному условию:

$$\partial^4\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^4 = d^2q(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}^2 \ . \quad (7.124)$$

С учетом (7.122), (7.124) можно записать общую формулу для этих дополнительных условий:

$$\partial^{2i}\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^{2i} = d^iq(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}^i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots). \quad (7.125)$$

Таким образом, из основных (7.105), (7.106) и всех дополнительных условий (7.107), (7.119), (7.120), (7.125) невыполненными решением (7.108) остаются лишь условия (7.107) и (7.125), которые и будут использованы далее при определении неизвестных коэффициентов $b_k(q)$ $(k=\overline{1,n})$ решения (7.108).

Для получения решения задачи в первом приближении, подставляя (7.108) (оставляя один член ряда) в соотношение (7.107), для определения неизвестного коэффициента $b_1(q)$ будем иметь алгебраическое уравнение. Из его решения получаем $b_1(q)=q(\mathrm{Fo})-B\mathrm{Fo}$. Выражение (7.108), учитывая найденное значение $b_1(q)$, принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=B[\mathrm{Fo}-(1/2)((1-\xi^2)+(2\mathrm{Fo}-1+2q/B)\cos(\pi\xi/2))]\ . \qquad (7.126)$$

Потребуем, чтобы формула (7.126) удовлетворяла осредненному уравнению (7.103):

$$\int_0^1 \frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}d\xi=\int_0^1 \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}d\xi\ . \qquad (7.127)$$

После подстановки (7.126) в (7.127) находим

$$8dq/d\mathrm{Fo}-2\pi^2q=B(8+\pi^2(2\mathrm{Fo}-1))\ . \qquad (7.128)$$

Интегрируя уравнение (7.128), получаем

$$q(\mathrm{Fo})=B(\mathrm{Fo}-(1/2))+C_1\exp(-\pi^2\mathrm{Fo}/4)\ . \qquad (7.129)$$

где C_1 – константа интегрирования.

После подстановки (7.129) в (7.128) будем иметь

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=B\left(\mathrm{Fo}-\frac{1}{2}(1-\xi^2)+\frac{C_1}{B}\exp\left(-\frac{\pi^2\mathrm{Fo}}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\right)\ . \qquad (7.130)$$

Для определения константы интегрирования C_1 составляется невязка условия (7.104) и требуется выполнение ее ортогональности к координатной функции $\varphi_1(\xi)=\cos(\pi\xi/2)$:

$$\int_0^1 \Theta(\xi,0)\cos(\pi\xi/2)\,d\xi=0\ . \qquad (7.131)$$

Подставляя (7.179) в (7.131), для константы интегрирования C_1 будем иметь алгебраическое уравнение. Его решение $C_1=16B/\pi^3$.

Формула (7.179), учитывая найденное значение интегрирования C_1, приводится к виду

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=B\left(\mathrm{Fo}-\frac{1}{2}(1-\xi^2)+\frac{16}{\pi^3}\exp\left(-\frac{\pi^2\mathrm{Fo}}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\right)\ . \qquad (7.132)$$

Соотношение (7.132) является решением задачи (7.103) – (7.106) в первом приближении. Оно точно удовлетворяет уравнению (7.103) и условиям (7.105), (7.106) и приближенно – начальному условию (7.104). Расчетные данные по формуле (7.132) и их сравнение с точным

решением [90] даны на рисунке 7.8. Из анализа заключаем, что в диапазоне $0{,}1 \le \mathrm{Fo} < \infty$ расхождение с точным решением [90] не более 0,08 %.

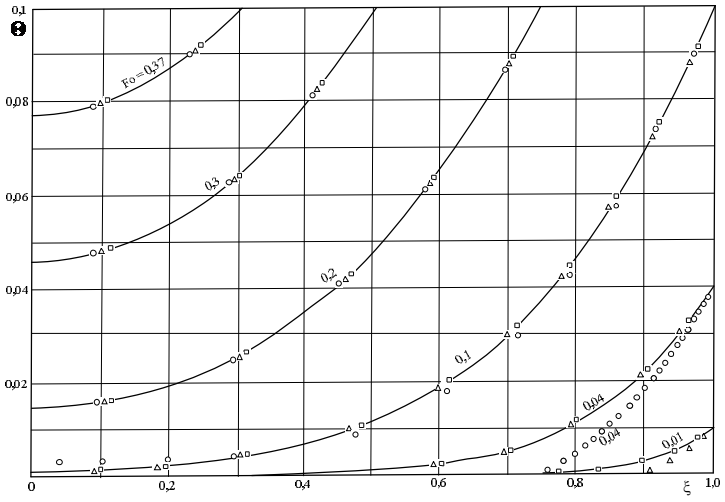


Рисунок 7.8. Распределение температуры в пластине: ○ – первое приближение (по (7.132)); △ – второе приближение (по (7.139)); □ – третье приближение (по (7.145)); ———— – точное решение

При получении решения для второго приближения подставим (7.108) (оставляя два члена ряда) в условия (7.107) и (7.125) (при $i = 1$). Тогда для неизвестных коэффициентов $b_k(q)$, ($k = 1, 2$) будем иметь систему алгебраических уравнений. И ее решения получаем

$$b_1(q) = \frac{1}{16\pi^2 B}(8q' + 18\pi^2 q - B\eta_1) \; ; \quad b_2(q) = -\frac{1}{\pi^2 B}(8q' + 2\pi^2 q - B\eta_2) \; , \qquad (7.133)$$

где $\eta_1 = 8 + 9\pi^2(2\mathrm{Fo} - 1)$; $\eta_2 = 8 + \pi^2(2\mathrm{Fo} - 1)$; $q' = dq(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}$.

Соотношение (7.108) с учетом соотношений (7.133) будет

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = B\,\mathrm{Fo} - (1/2)(1 - \xi^2) + \eta_3(8q' + 18\pi^2 q - B\eta_1) \times$$
$$\times \cos(\pi\xi/2) - \eta_4(8q' + 2\pi^2 q - B\eta_2)\cos(3\pi\xi/2), \qquad (7.134)$$

где $\eta_3 = 1/(16\pi^2 B)$; $\eta_4 = 1/(\pi^2 B)$.

Подставляя (7.134) в (7.127), для неизвестной функции $q(\mathrm{Fo})$ получаем уравнение

$$32q'' + 80\pi^2 q' + 18\pi^4 q - B\pi^2(80 + 9\pi^2(2\mathrm{Fo} - 1)) = 0 \; , \qquad (7.135)$$

где $q'' = d^2 q(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}^2$.

Интегрируя уравнение (7.135), получаем

$$q(\mathrm{Fo}) = B(\mathrm{Fo} - 1/2) + C_1 \exp(-\pi^2 \mathrm{Fo}/4) + C_2 \exp(-9\pi^2 \mathrm{Fo}/4) \; , \qquad (7.136)$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования.

Подставляя (7.136) в (7.134) и составляя невязку условия (7.104), получаем

$$\Theta(\xi, 0) = (1/2)B(\xi^2 - 1) + C_1 \cos(\pi\xi/2) + C_2 \cos(3\pi\xi/2) \; . \qquad (7.137)$$

Требуя ортогональности невязки (7.137) к координатным функциям $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$, относительно постоянных C_1 и C_2 будем иметь систему алгебраических уравнений

$$\int_0^1 \Theta(\xi,0)\cos(j\pi\xi/2)d\xi = 0 \quad (j=1,2). \tag{7.138}$$

Вследствие ортогональности косинусов неизвестные величины C_1 и C_2 в системе (7.138) разделяются. Из решения этих уравнений находим $C_1 = 16B/\pi^3$; $C_2 = -16B/(27\pi^3)$.

Учитывая (7.136) и найденные значения C_1 и C_2, формула (7.134) преобразуется к виду

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \frac{B}{54\pi^3}\left(27\pi^3(2\mathrm{Fo}-1+\xi^2)+864e^{-\frac{\pi^2\mathrm{Fo}}{4}}\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)-32e^{-\frac{9\pi^2\mathrm{Fo}}{4}}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right)\right). \tag{7.139}$$

Соотношение (7.139) является решением задачи (7.103) – (7.106) во втором приближении. Это решение точно удовлетворяет уравнению (7.103) и условиям (7.105), (7.106), и приближенно – начальному условию (7.104). Расчеты по (7.139) при сравнении с точным решением [90] даны на рисунке 7.8. Из анализа заключаем, что в диапазоне $0{,}1 \le \mathrm{Fo} < \infty$ отклонение от точного решения уменьшается с 0,08 % (для первого приближения) до 0,03 % – во втором.

При нахождении решения в 3-м приближении подставим (7.108) (оставляя три члена ряда) в (7.107), (7.125) (при $i = 1, 2$). Для неизвестных коэффициентов $b_k(q)$ $(k = 1, 2, 3)$ получаем систему алгебраических уравнений. Ее решение

$$b_1(q) = -\eta_5(B\eta_6 - 32q'' - 272\pi^2 q' - 450\pi^4 q);$$

$$b_2(q) = \eta_7(B\eta_8 - 32q'' - 208\pi^2 q' - 50\pi^4 q); \tag{7.140}$$

$$b_3(q) = -\eta_9(B\eta_{10} - 32q'' - 80\pi^2 q' - 18\pi^4 q),$$

где $q' = dq(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}$; $q'' = d^2q(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}^2$; $\eta_5 = 1/(384\pi^4 B)$; $\eta_6 = 225\pi^4(2\mathrm{Fo}-1)+272\pi^2$;

$\eta_7 = 1/(256\pi^4 B)$; $\eta_8 = 25\pi^4(2\mathrm{Fo}-1)+208\pi^2$; $\eta_9 = 1/(768\pi^4 B)$; $\eta_{10} = 9\pi^4(2\mathrm{Fo}-1)+80\pi^2$.

Подставляя (7.108) (с учетом найденных значений $b_k(q)$ $(k = 1, 2, 3)$) в соотношение (7.127), после вычисления интегралов для неизвестной функции $q(\mathrm{Fo})$ получаем уравнение

$$-128q''' - 1120\pi^2 q'' - 2072\pi^4 q' - 450\pi^6 q + B\pi^4(225\pi^2(2\mathrm{Fo}-1)+2072) = 0, \tag{7.141}$$

где $q''' = d^3q(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}^3$.

Интегрируя уравнение (7.141), получаем

$$q(\mathrm{Fo}) = B(\mathrm{Fo}-(1/2)) + C_1\exp(-\pi^2\mathrm{Fo}/4) +$$

$$+ C_2\exp(-9\pi^2\mathrm{Fo}/4) + C_3\exp(-25\pi^2\mathrm{Fo}/4), \tag{7.142}$$

где C_1, C_2, C_3 – константы интегрирования, которые находятся из условия (7.104). Составляя невязку начального условия (7.104), получаем

$$\Theta(\xi,0) = (1/2)B(\xi^2 - 1) + C_1\cos(\pi\xi/2) + C_2\cos(3\pi\xi/2) + C_3\cos(5\pi\xi/2) = 0\ . \qquad (7.143)$$

Требуя ортогональности невязки (7.143) к координатным функциям $\varphi_j(\xi)$, $(j = 1, 3, 5)$, относительно постоянных C_1, C_2, C_3 систему алгебраических уравнений

$$\int_0^1 \Theta(\xi,0)\cos(j\pi\xi/2)d\xi = 0 \quad (j = 1, 3, 5). \qquad (7.144)$$

Вследствие ортогональности косинусов, неизвестные C_1, C_2, C_3 в системе (7.144) разделяются и находятся в виде $C_1 = 16B/\pi^3$; $C_2 = -16B/(27\pi^3)$; $C_3 = 16B/(125\pi^3)$.

Учитывая (7.140), (7.142) и найденные значения констант интегрирования C_1, C_2, C_3, соотношение (7.108) в третьем приближении принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = \frac{B}{\pi^3}\left(\pi^3\left(\mathrm{Fo} - \frac{1}{2}(1-\xi^2)\right) + 16e^{-\frac{\pi^2\mathrm{Fo}}{4}}\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{16}{27}e^{-\frac{9\pi^2\mathrm{Fo}}{4}}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right) + \frac{16}{125}e^{-\frac{25\pi^2\mathrm{Fo}}{4}}\cos\left(\frac{5\pi}{2}\xi\right)\right). \qquad (7.145)$$

Решение (7.145) точно удовлетворяет уравнению (7.103) и условиям (7.105), (7.106). Начальное условие (7.104) в данном случае удовлетворяется лишь приближенно (в третьем приближении). Анализ результатов расчетов, приведенных на рисунке 7.8, приводит к выводу, что температуры, определенные по формуле (7.145), в диапазоне $0{,}1 \le \mathrm{Fo} < \infty$ практически совпадают с их точными значениями [90].

Исследование решений для последующих приближений показывает, что все они описываются соотношением (7.146)

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = B\left(\mathrm{Fo} - \frac{1}{2}(1-\xi^2) + \sum_{k=1}^{n}\frac{4(-1)^{k+1}}{r\pi}e^{-(r\pi/2)^2\mathrm{Fo}}\frac{1}{(r\pi/2)^2}\cos\left(\frac{r\pi\xi}{2}\right)\right), \qquad (7.146)$$

где $r = 2k - 1$, которое с увеличением n практически совпадает с классическим точным аналитическим решением [90]

Выводы

1. Путем использования дополнительной искомой функции и дополнительных краевых условий получено точное аналитическое решение задачи теплопроводности для переменных во времени граничных условий 1-го рода. Введение дополнительной искомой функции, характеризующей изменение во времени температуры в центре пластины, основывается на свойстве параболического уравнения, связанном с бесконечной скоростью передачи теплоты.

2. Дополнительные граничные условия, определяемые с использованием исходного дифференциального уравнения и заданных граничных условий, находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению в этих точках дифференциального уравнения краевой задачи. Показано, что выполнение уравнения в граничных точках приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области.

3. Отсутствие необходимости непосредственного интегрирования исходного уравнения в частных производных по пространственной переменной, заменив его выполнением интеграла теплового баланса, позволяет свести решение краевой задачи к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной искомой функции.

7.4 Бесконечная пластина с источником теплоты

Используя изложенные в пп. 7.1 – 7.3 теоретические положения, получим решение задачи теплопроводности для пластины с источником теплоты. Постановка задачи будет

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\omega}{c\rho} \quad (\tau > 0;\ \ 0 < x < \delta); \tag{7.147}$$

$$T(x,0) = T_0 \ ; \tag{7.148}$$

$$\partial T(0,\tau)/\partial x = 0 \ ; \tag{7.149}$$

$$T(1,\tau) = T_{\text{ст}} \ , \tag{7.150}$$

где T – температура; τ время; x – координата; T_0 – начальная температура; a – температуропроводность; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки; δ – толщина пластины; ω – мощность внутренних источников теплоты; c – теплоемкость; ρ – плотность.

Обозначим:

$$\Theta = (T - T_0)/(T_{\text{ст}} - T_0) \ ; \quad \xi = x/\delta \ ; \quad \text{Fo} = a\tau/\delta^2 \ ; \quad \text{Po} = \omega\delta^2/[\lambda(T_{\text{ст}} - T_0)], \tag{7.151}$$

где Θ – безразмерная температура; ξ – безразмерная координата; Fo – число Фурье; Po – число Померанцева.

Учитывая введенные обозначения, задача (7.147) – (7.150) принимает вид

$$\partial\Theta(\xi,\text{Fo})/\partial\text{Fo} = \partial^2\Theta(\xi,\text{Fo})/\partial\xi^2 + \text{Po} \quad (\text{Fo} > 0;\ \ 0 < \xi < 1); \tag{7.152}$$

$$\Theta(\xi,0) = 0 \ ; \tag{7.153}$$

$$\partial\Theta(0,\text{Fo})/\partial\xi = 0 \ ; \tag{7.154}$$

$$\Theta(1,\text{Fo}) = 1 \ . \tag{7.155}$$

Введем функцию

$$q(\text{Fo}) = \Theta(0,\text{Fo}), \tag{7.156}$$

представляющую изменение во времени температуры в центре пластины $\xi = 0$. Очевидно, что ввиду описываемой уравнением (7.152) бесконечной скорости распространения теплоты функция $q(\text{Fo})$ начинает изменяться тотчас же после приложения граничного условия первого рода в точке $\xi = 1$. Следовательно, диапазон ее изменения охватывает весь диапазон времени нестационарного процесса $0 < \text{Fo} < \infty$.

Решение задачи (7.152) – (7.155) будем искать в виде

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi) + \sum_{k=1}^{n} b_k(q)\varphi_k(\xi) \ , \qquad (7.157)$$

где $\varphi_k(\xi) = \cos(r\pi\xi/2)$ $(r = 2k-1;\ k = \overline{1,n})$ – координатные функции; $b_k(q)$ – неизвестные коэффициенты.

Решение (7.157) ввиду принятой системы координатных функций точно удовлетворяет условиям (7.154), (7.155). Неизвестные коэффициенты $b_k(q)$ определяются из условия (7.156) и некоторых дополнительных условий. При их нахождении применяются условия (7.154) – (7.156) и уравнение (7.152). Для получения таких условий продифференцируем (7.154), (7.155) по Fo:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right) = 0 \ ; \quad (7.158) \qquad \frac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = 0 \ . \qquad (7.159)$$

Соотношения (7.158), (7.159), учитывая уравнение (7.152), приводятся к следующим дополнительным граничным условиям:

$$\frac{\partial^3\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^3} = 0 \ ; \quad (7.160) \qquad \frac{\partial^2\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} + \mathrm{Po} = 0 \ . \qquad (7.161)$$

Продифференцируем соотношения (7.160), (7.161) по переменной Fo:

$$\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right) = 0 \ ; \quad (7.162) \qquad \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right) = 0 \ . \qquad (7.163)$$

Подставляя правую часть уравнения (7.152) в соотношения (7.162), (7.163), получаем дополнительные граничные условия вида

$$\frac{\partial^5\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^5} = 0 \ ; \quad (7.164) \qquad \frac{\partial^4\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^4} = 0 \ . \qquad (7.165)$$

Аналогично получаются и последующие дополнительные граничные условия:

$$\frac{\partial^7\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^7} = 0 \ ; \quad (7.166) \qquad \frac{\partial^6\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^6} = 0 \ . \qquad (7.167)$$

Анализируя соотношения (7.160), (7.164), (7.166) и (7.165), (7.167), можно записать общие формулы

$$\partial^i\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^i = 0 \quad (i = 3,\ 5,\ 7, \ldots); \qquad (7.168)$$

$$\partial^i\Theta(1,\mathrm{Fo})/\partial\xi^i = 0 \quad (i = 4,\ 6,\ 8, \ldots). \qquad (7.169)$$

Решение (7.157) удовлетворяет дополнительным условиям (7.161), (7.168), (7.169).

Коэффициенты $b_k(q)$ $(k = \overline{1,n})$ решения (7.157) будем находить из соотношения (7.156) и получаемых на его основе дополнительных условий. Для нахождения первого из этих условий продифференцируем выражение (7.156) по Fo:

$$\frac{dq(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} = \frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} \ . \tag{7.170}$$

Сравнивая соотношение (7.170) с уравнением (7.152), находим дополнительное условие

$$\mathrm{Po} + \frac{\partial^2\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} = \frac{dq(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} \ . \tag{7.171}$$

Дифференцируя (7.171) по переменной Fo, находим

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right) = \frac{d^2q(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^2} \ . \tag{7.172}$$

Соотношение (7.172) с учетом уравнения (7.152) будет следующим:

$$\frac{\partial^4\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^4} = \frac{d^2q(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^2} \ . \tag{7.173}$$

Общая формула для этих условий имеет вид

$$\partial^{2i}\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi^{2i} = d^iq(\mathrm{Fo})/d\mathrm{Fo}^i \quad (i = 2, 3, 4, \ldots) \ . \tag{7.174}$$

Таким образом, из основных (7.154), (7.155) и дополнительных условий вида (7.156), (7.161), (7.168), (7.169), (7.171), (7.174) невыполненными решением (7.157) являются условия (7.156), (7.171), (7.174), которые и будут использованы далее при определении неизвестных коэффициентов $b_k(q)$ $(k = \overline{1,n})$ решения (7.157). Для получения решения в первом приближении, подставляя (7.157) (оставляя один член ряда) в (7.156), для нахождения неизвестного коэффициента $b_1(q)$ $(k = \overline{1,n})$ будем иметь алгебраическое уравнение. Его решение $b_1(q) = q(\mathrm{Fo}) - 1 - \mathrm{Po}/2$. Формула (7.157), учитывая найденное значение $b_1(q)$, будет

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \mathrm{Po}(1-\xi^2)/2 + (q - 1 - \mathrm{Po}/2)\cos(\pi\xi/2) \ . \tag{7.175}$$

Потребуем, чтобы решение (7.175) удовлетворяло осредненному уравнению

$$\int_0^1 \frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}d\xi = \int_0^1\left(\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} + \mathrm{Po}\right)d\xi \ . \tag{7.176}$$

Подставим (7.175) в (7.176) и после вычисления интегралов для функции $q(\mathrm{Fo})$ получаем следующее уравнение:

$$8dq/d\mathrm{Fo} + 2\pi^2q - \pi^2(2 + \mathrm{Po}) = 0 \ . \tag{7.177}$$

Интегрируя уравнение (7.177), получаем

$$q(\mathrm{Fo}) = 1 + \mathrm{Po}/2 + C_1\exp(-\pi^2\mathrm{Fo}/4) \ , \tag{7.178}$$

где C_1 – константа интегрирования.

После подстановки (7.178) в (7.175) находим

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \mathrm{Po}(1-\xi^2)/2 + C_1\exp(-\pi^2\mathrm{Fo}/4)\cos(\pi\xi/2) \ . \tag{7.179}$$

С целью нахождения константы интегрирования C_1 составляется невязка условия (7.153) и требуется выполнение ее ортогональности к функции $\varphi_1(\xi) = \cos(\pi\xi/2)$:

$$\int_0^1 [1 + \mathrm{Po}(1-\xi^2)/2 + C_1 \cos(\pi\xi/2)]\cos(\pi\xi/2)\, d\xi = 0 \ . \qquad (7.180)$$

Соотношение (7.180) для константы интегрирования C_1 представляет алгебраическое уравнение. Вычисляя интегралы, получаем $C_1 = -4(\pi^2 - 4\mathrm{Po})/\pi^3$. Учитывая найденное значение C_1, соотношение (7.179), представляющее решение задачи (7.152) – (7.155) для первого приближения, будет иметь вид

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \mathrm{Po}(1-\xi^2)/2 - \frac{4(\pi^2 + 4\mathrm{Po})}{\pi^3} - \exp(-\pi^2 \mathrm{Fo}/4)\cos(\pi\xi/2) \ . \qquad (7.181)$$

Решение (7.178) точно удовлетворяет условиям (7.154), (7.155) и уравнению (7.152). Приближенно (в первом приближении) в данном случае выполняется лишь начальное условие (7.153). Для увеличения точности его выполнения следует увеличивать количество слагаемых ряда (7.157), неизвестные коэффициентов которого будем находить из условия (7.156) и дополнительных граничных условий, определяемых по общей формуле (7.174). Во втором приближении, подставляя (7.157) (оставляя два члена ряда) в (7.156), (7.171), для неизвестных коэффициентов $b_1(q)$ и $b_2(q)$ получаем систему алгебраических уравнений. Ее решение

$$b_1(q) = \frac{1}{2\pi^2}\frac{dq}{d\mathrm{Fo}} + 9(q - 1 - \mathrm{Po}/2)/8 \ ; \qquad b_2(q) = (1 + \mathrm{Po}/2q - q)/8 - \frac{1}{2\pi^2}\frac{dq}{d\mathrm{Fo}} \ . \qquad (7.182)$$

Учитывая полученные значения $b_1(q)$ и $b_2(q)$, соотношение (7.157) будет

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \mathrm{Po}(1-\xi^2)/2 + \left[\frac{q'}{2\pi^2} + \frac{9}{8}(q - 1 - \mathrm{Po}/2)\right]\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) +$$

$$+ \left[\frac{1}{8}\left(1 + \frac{\mathrm{Po}}{2} - q\right) - \frac{q'}{2\pi^2}\right]\cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right), \qquad (7.183)$$

где $q' = dq/d\mathrm{Fo}$.

Подставляя (7.183) в (7.176), для $q(\mathrm{Fo})$ получаем:

$$16q''/\pi^4 + 40q'/\pi^2 + 9(q - 1 - \mathrm{Po}/2) = 0 \ . \qquad (7.184)$$

Интегрируя уравнение (7.184), получаем

$$q(\mathrm{Fo}) = 1 + \mathrm{Po}/2 + C_1 \exp(-\pi^2 \mathrm{Fo}/4) + C_2 \exp(-9\pi^2/4), \qquad (7.185)$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования.

Соотношение (7.183) с учетом (7.185) преобразуется к виду

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2) + C_1 e^{-\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Fo}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) + C_2 e^{-\frac{9\pi^2}{4}\mathrm{Fo}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right). \qquad (7.186)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начального условия (7.153). С этой целью составляется невязка условия (7.153) и требуется выполнение ее ортогональности к функциям $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$:

$$\int_0^1 \left[1+\frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2)+C_1\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)+C_2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right)\right]\cos\left(\frac{j\pi}{2}\xi\right)d\xi=0 \qquad (j=1,\,3). \qquad (7.187)$$

Вследствие ортогональности косинусов неизвестные величины C_1 и C_2 в системе алгебраических уравнений (7.187) разделяются. В результате решения системы получены следующие их значения:

$$C_1=-4(\pi^2+4\mathrm{Po})/\pi^3; \qquad C_2=4(9\pi^2+4\mathrm{Po})/(27\pi^3). \qquad (7.188)$$

Решение (7.186), учитывая (7.188), принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=1+\frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2)-\frac{4}{\pi^3}(\pi^2+4\mathrm{Po})e^{-\frac{\pi^2}{4}\mathrm{Fo}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)+$$

$$+\frac{4}{27\pi^3}(9\pi^2+4\mathrm{Po})e^{-\frac{9\pi^2}{4}\mathrm{Fo}}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\xi\right). \qquad (7.189)$$

Соотношение (7.189) является решением задачи (7.152) – (7.155) для второго приближения. Это решение точно удовлетворяет уравнению (7.152), условиям (7.154), (7.155) и приближенно условию (7.153).

В третьем приближении при нахождении коэффициентов $b_k(q)$ $(k=1,2,3)$ используются условия (7.156), (7.171) и одно дополнительное граничное условие, получаемое по общей формуле (7.174) (при $i=1$). Для неизвестной функции $q(\mathrm{Fo})$ получаем уравнение третьего порядка, константы интегрирования которого находятся из условия (7.153). Решение задачи (7.152) – (7.155) приводится к виду

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=1+\frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2)-\sum_{k=1}^{3}\frac{4(-1)^{k+1}}{r\pi}\left(1+\frac{4\mathrm{Po}}{r^2\pi^2}\right)e^{-\frac{r^2\pi^2}{4}\mathrm{Fo}}\cos\left(\frac{r\pi}{2}\xi\right) \qquad (r=2k-1). \qquad (7.190)$$

Соотношение (7.190) можно записать следующим образом:

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=1+\frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2)-\sum_{k=1}^{3}A_k\left(1+\frac{\mathrm{Po}}{\mu_k^2}\right)e^{-\mu_k^2\mathrm{Fo}}\cos(\mu_k\xi), \qquad (7.191)$$

где $A_k=\dfrac{4(-1)^{k+1}}{r\pi}$; $\mu_k=\dfrac{r^2\pi^2}{4}$; $r=2k-1$. (7.192)

Анализируя соотношение (7.191), можно заметить, что формулы для коэффициентов A_k и собственных чисел μ_k совпадают с точными формулами для них. Исследования решений в последующих приближениях показали справедливость формул (7.192) при произвольных

значениях k. Следовательно, при $n \to \infty$ формула (7.191) совпадает с классическим точным аналитическим решением краевой задачи (7.152) – (7.155) [90].

По результатам исследований, приведенных в седьмой главе диссертации, получены следующие новые научные результаты:

1. Разработан новый метод получения точных аналитических решений в форме бесконечных рядов, основанный на использовании свойства параболического уравнения теплопроводности, связанного с бесконечной скоростью распространения теплоты. Благодаря использованию дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий, краевая задача теплопроводности в частных производных сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения относительно дополнительной искомой функции.

2. Используя разработанный по п. 1. метод, получены точные аналитические решения следующих нестационарных краевых задач теплопроводности: для бесконечной пластины при граничных условиях первого рода (см. п. 7.1); с переменным начальным условием (см. п. 7.2); с переменными во времени граничными условиями первого рода (см. п. 7.3); с внутренним источником теплоты (см. п. 7.4).

8. КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ЧИСЛЕННО - АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Научные результаты данной главы представлены в работах [191, 218, 220, 221, 234, 236, 237, 239, 242, 243, 247, 250 – 252, 259, 265, 276 – 279] автора диссертации. В восьмой главе диссертации приводится комплекс программ численно-аналитического решения разработанных в диссертации моделей. Программы реализованы в среде Mathcad 13. Кроме того, в этой главе приводится также программа расчета сложных трубопроводных систем, основанная на электрогидравлической аналогии, разработанная автором диссертации (см. приложение 12). Принципиальное отличие этой программы от известных состоит в возможности выполнения автоматической идентификации, позволяющей максимально приблизить компьютерную модель к реальной гидравлической системе. При разработке данной компьютерной модели были использованы научные результаты, полученные в третьей, четвертой и шестой главах диссертации.

8.1 Реализация метода решения задачи теплопроводности с учетом релаксации теплового потока численно - аналитическим методом в среде Mathcad 13

Решению проблем нахождения гиперболических (волновых) уравнений, учитывающих конечную скорость переноса теплоты, посвящено много публикаций [7, 40, 51, 67, 85, 86, 92, 107]. Необходимость их получения связана с парадоксами теории теплопроводности, вытекающими из решений параболического уравнения. В диссертации с учетом локальной неравновесности реальных процессов переноса тепла, массы, импульса были выведены дифференциальные уравнения, включающие производные высоких порядков, в том числе и смешанные производные. Для реализации алгоритма решения краевых задач, включающих такого вида уравнения, был разработан комплекс программ в системе компьютерной алгебры MathCAD 13.0 со встроенным языком программирования, который позволяет выполнить автоматизацию математических расчетов и получить решение задачи в удобном для использования виде. Она также содержит алгоритмы решения дифференциальных и алгебраических уравнений, операции с матрицами и векторами. Такие компьютерные программы были разработаны для задач, решения которых приводятся в пунктах 2.1 – 2.3, 3.1 – 3.5, в главах 4 – 7 настоящей диссертационной работы.

Каждая программа данного комплекса включает в себя постановку краевой задачи, задание исходных данных, расчет основных параметров, построение и исследование полей искомых функций при различных значениях коэффициента релаксации. Работу программ комплекса рассмотрим применительно к алгоритму решения задачи теплопроводности с учетом релаксации теплового потока, математическая постановка задачи которой имеет вид (2.5), (2.6), (п. 2.1).

Аналитическое решение гиперболического уравнения теплопроводности с учетом релаксации теплового потока в случае граничных условий 1-го рода

Математическая постановка задачи

$$Fo\alpha \cdot \frac{d^2}{dFo^2}\Theta(\xi, Fo) + \frac{d}{dFo}\Theta(\xi, Fo) = \frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi, Fo) \quad (1)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1 \quad (2) \qquad \frac{d}{dFo}\Theta(\xi, 0) = 0 \quad (3) \qquad \frac{d}{d\xi}\Theta(0, Fo) = 0 \quad (4) \qquad \Theta(1, Fo) = 0 \quad (5)$$

Решение задачи принимаем в следующем виде

$$\Theta(\xi, Fo) := \phi(Fo) \cdot \psi(\xi) \quad (6)$$

Подставляем (6) в основное дифференциальное уравнение (1) и делим обе части уравнения на $\phi(Fo) \cdot \psi(\xi)$

$$\frac{Fo\alpha \cdot \frac{d^2}{dFo^2}\Theta(\xi, Fo) + \frac{d}{dFo}\Theta(\xi, Fo)}{\phi(Fo) \cdot \psi(\xi)} = \frac{\frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi, Fo)}{\phi(Fo) \cdot \psi(\xi)} \text{ simplify } \rightarrow$$

$$\frac{Fo\alpha \cdot \frac{d}{dFo}\frac{d}{dFo}\phi(Fo) + \frac{d}{dFo}\phi(Fo)}{\phi(Fo)} = \frac{\frac{d}{d\xi}\frac{d}{d\xi}\psi(\xi)}{\psi(\xi)}$$

Приравниваем левую и правую части к константе $-\mu^2$

$$\frac{Fo\alpha \cdot \frac{d}{dFo}\frac{d}{dFo}\phi(Fo) + \frac{d}{dFo}\phi(Fo)}{\phi(Fo)} = -\mu^2 \qquad \frac{\frac{d}{d\xi}\frac{d}{d\xi}\psi(\xi)}{\psi(\xi)} = -\mu^2 \quad (7)$$

Подставим $\nu k = \mu^2$

$$Fo\alpha \cdot \frac{d^2}{dFo^2}\phi(Fo) + \frac{d}{dFo}\phi(Fo) + \nu k \cdot \phi(Fo) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi) + \nu k \cdot \psi(\xi) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{d}{d\xi}\psi(0) = 0 \quad (10) \qquad \psi(1) = 0 \quad (11)$$

Функцию $\psi(\xi)$ будем разыскивать в следующем виде, причем r = 1, 3, 5..., m.

В таком виде функция удовлетворяет граничным условиям (10) и (11)

$$\psi(\nu, \xi) := \cos\left(r \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \xi\right) \quad (12)$$

Подставляем (12) в уравнение (9)

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\nu,\xi) + \nu k\cdot\psi(\nu,\xi)\ \text{solve},\nu k \ \rightarrow \frac{1}{4}\cdot r^2\cdot\pi^2$$

Характеристическое уравнение для уравнения (8) будет

$$Fo\alpha\cdot z^2 + z + \nu(k) = 0\ \text{solve},z \ \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2\cdot Fo\alpha}\cdot\left[(-1)+(1-4\cdot Fo\alpha\cdot\nu(k))^{\frac{1}{2}}\right] \\ \frac{1}{2\cdot Fo\alpha}\cdot\left[(-1)-(1-4\cdot Fo\alpha\cdot\nu(k))^{\frac{1}{2}}\right] \end{bmatrix}$$

$$\Phi k(Fo) = C1k\cdot e^{z1k\cdot Fo} + C2k\cdot e^{z2k\cdot Fo}$$

Формула для температуры

$$\Theta(\xi,Fo) = \sum_{k=1}^{m}(\Phi k(Fo)\cdot\Psi k(\xi))$$

$$\Theta(\xi,Fo) := \sum_{k=1}^{m}\left[\left(C1(k)\cdot e^{z1(k)\cdot Fo} + C2(k)\cdot e^{z2(k)\cdot Fo}\right)\cdot\cos\left(r\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\xi\right)\right]$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты $C1k,\ C2k$ подставляем $\Theta(\xi,Fo)$ в начальные условия

$$\Theta(\xi,0) = 1 \rightarrow \sum_{k=1}^{m}\left[(C1(k)+C2(k))\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot\pi\cdot\xi\right)\right] = 1$$

$$\frac{d}{dFo}\Theta(\xi,Fo) = 0\ \text{substitute},Fo = 0 \ \rightarrow \sum_{k=1}^{m}\left[\left(C1(k)\cdot z1(k)\cdot e^{0} + C2(k)\cdot z2(k)\cdot e^{0}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot\pi\cdot\xi\right)\right] = 0$$

Из второго уравнения выразим C2(k) и подставим в первое

$$C2(k) = -C1\cdot\frac{z1(k)}{z2(k)}$$

В первом уравнении потребуем выполнения ортогональности невязки ко всем собственным функциям

$$\int_0^1\sum_{k=1}^{m}\left[\left[C1+(-C1)\cdot\frac{z1(k)}{z2(k)}\right]\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot\pi\cdot\xi\right)\right]\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot\pi\cdot\xi\right)d\xi - \int_0^1\cos\left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot\pi\cdot\xi\right)d\xi$$

Используя ортогональность косинусов, выражение примет следующий вид

$$\int_0^1\left[C1+(-C1)\cdot\frac{z1(k)}{z2(k)}\right]\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot\pi\cdot\xi\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot\pi\cdot\xi\right)d\xi - \int_0^1\cos\left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot\pi\cdot\xi\right)d\xi$$

$$\frac{-1}{2}\cdot C1\cdot\frac{-\sin(r\cdot\pi)\cdot z2(k)+\sin(r\cdot\pi)\cdot z1(k)-r\cdot\pi\cdot z2(k)+z1(k)\cdot r\cdot\pi}{r\cdot\pi\cdot z2(k)} - 2\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot\pi\right)}{r\cdot\pi} = 0\ \text{solve},C1$$

$$C1 = 4\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot\pi\right)\cdot\frac{z2(k)}{\sin(r\cdot\pi)\cdot z2(k)-\sin(r\cdot\pi)\cdot z1(k)+r\cdot\pi\cdot z2(k)-z1(k)\cdot r\cdot\pi}$$

Выражения для C2(k) и C1(k) будут следующими

$$C1(k) := 4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot r \cdot \pi\right) \cdot \frac{z2(k)}{\sin(r \cdot \pi) \cdot z2(k) - \sin(r \cdot \pi) \cdot z1(k) + r \cdot \pi \cdot z2(k) - z1(k) \cdot r \cdot \pi}$$

$$C2(k) := -4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot r \cdot \pi\right) \cdot \frac{z2(k)}{\sin(r \cdot \pi) \cdot z2(k) - \sin(r \cdot \pi) \cdot z1(k) + r \cdot \pi \cdot z2(k) - z1(k) \cdot r \cdot \pi} \cdot \frac{z1(k)}{z2(k)}$$

Подставляем в решение все известные величины

$$Fo\alpha := 0.1$$

$$r := 2 \cdot k - 1$$

$$\nu(k) := \frac{(2 \cdot k - 1)^2 \cdot \pi^2}{4}$$

$$z1(k) := \frac{1}{2 \cdot Fo\alpha} \cdot \left[(-1) + (1 - 4 \cdot Fo\alpha \cdot \nu(k))^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$z2(k) := \frac{1}{2 \cdot Fo\alpha} \cdot \left[(-1) - (1 - 4 \cdot Fo\alpha \cdot \nu(k))^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$C1(k) := \frac{4 \cdot \sin\left[\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot k - 1) \cdot \pi\right] \cdot z2(k)}{\sin[(2 \cdot k - 1) \cdot \pi] \cdot z2(k) - \sin[(2 \cdot k - 1) \cdot \pi] \cdot z1(k) + (2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot z2(k) - z1(k) \cdot (2 \cdot k - 1) \cdot \pi}$$

$$C2(k) := \frac{-4 \cdot \sin\left[\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot k - 1) \cdot \pi\right] \cdot z1(k)}{\sin[(2 \cdot k - 1) \cdot \pi] \cdot z2(k) - \sin[(2 \cdot k - 1) \cdot \pi] \cdot z1(k) + (2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot z2(k) - z1(k) \cdot (2 \cdot k - 1) \cdot \pi}$$

Построим графики изменения температур в пластине, используя 1000 членов ряда

$$\Theta(\xi, Fo) := \sum_{k=1}^{1000} \left[\left(C1(k) \cdot e^{z1(k) \cdot Fo} + C2(k) \cdot e^{z2(k) \cdot Fo} \right) \cdot \cos\left[(2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \xi \right] \right]$$

$$Fo\,\alpha \rightarrow \frac{1}{10000000}$$

Выведем на экран монитора графики изменения температурного состояния бесконечно-протяженной пластины при различных значениях безразмерного времени Fo.

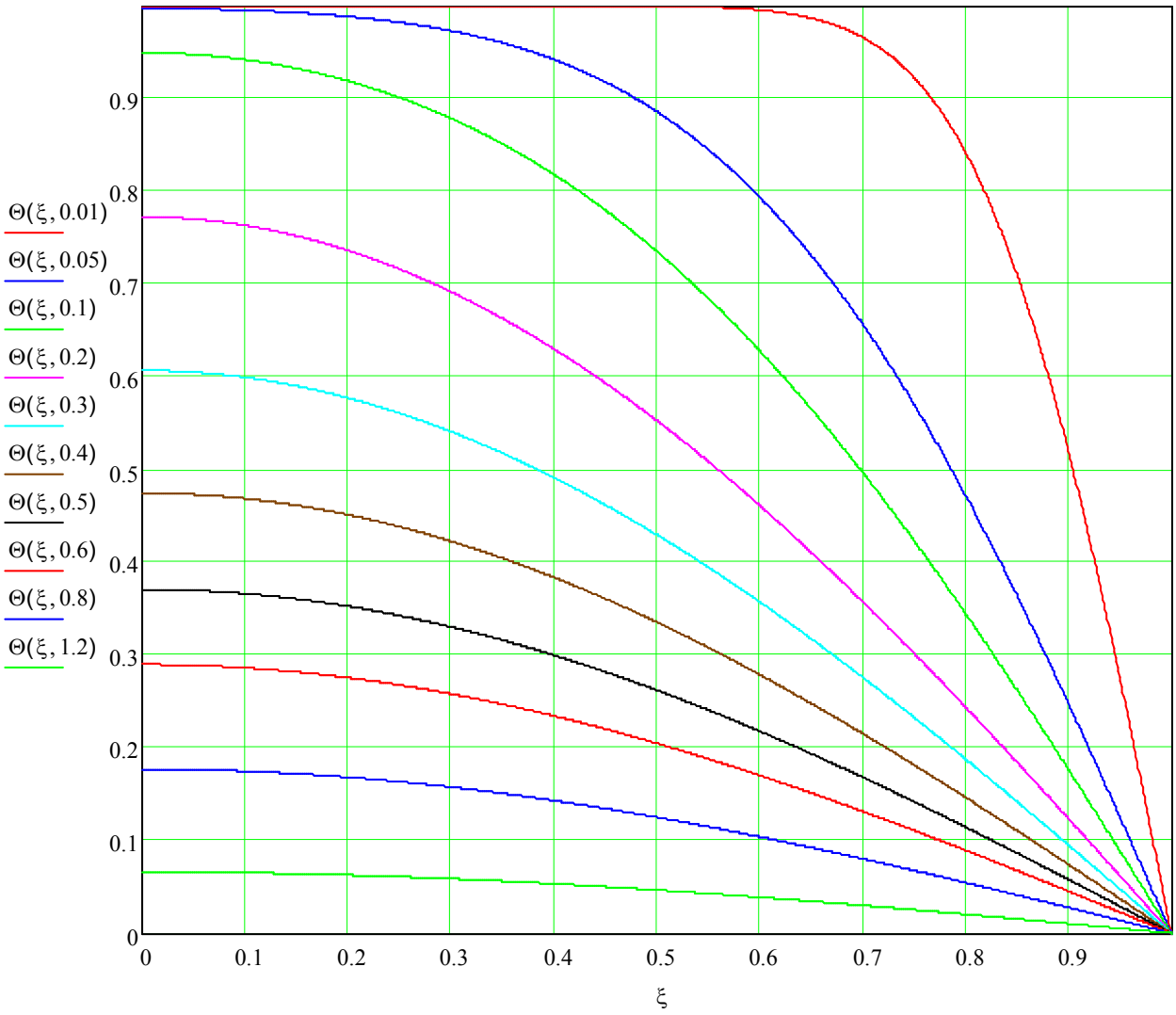


Рисунок 8.1. Распределение температуры в пластине при различных значениях Fo, Foα = 10^{-7}

Построим графики изменения температур в пластине, используя 1000 членов ряда

$$\Theta(\xi, Fo) := \sum_{k=1}^{1000} \left[\left(C1(k) \cdot e^{z1(k) \cdot Fo} + C2(k) \cdot e^{z2(k) \cdot Fo} \right) \cdot \cos\left[(2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \xi \right] \right]$$

$Fo\alpha \rightarrow .1$

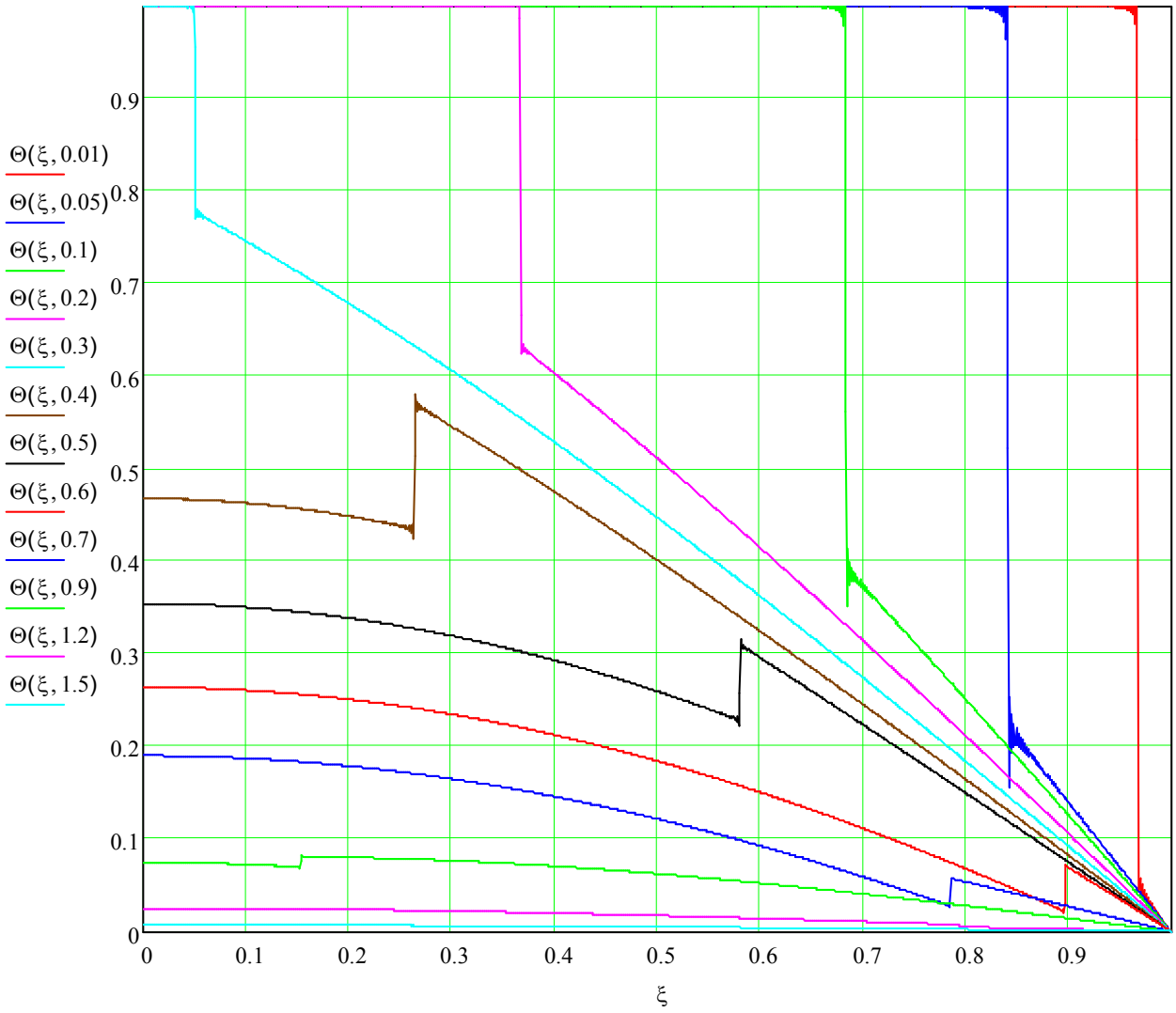


Рисунок 8.2. Распределение температуры в пластине при различных значениях Fo, Foα = 0,1

Построим графики изменения температур в пластине, используя 1000 членов ряда

$$\Theta(\xi, Fo) := \sum_{k=1}^{1000} \left[\left(C1(k) \cdot e^{z1(k) \cdot Fo} + C2(k) \cdot e^{z2(k) \cdot Fo} \right) \cdot \cos\left[(2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \xi \right] \right]$$

$Fo\alpha \to 1$

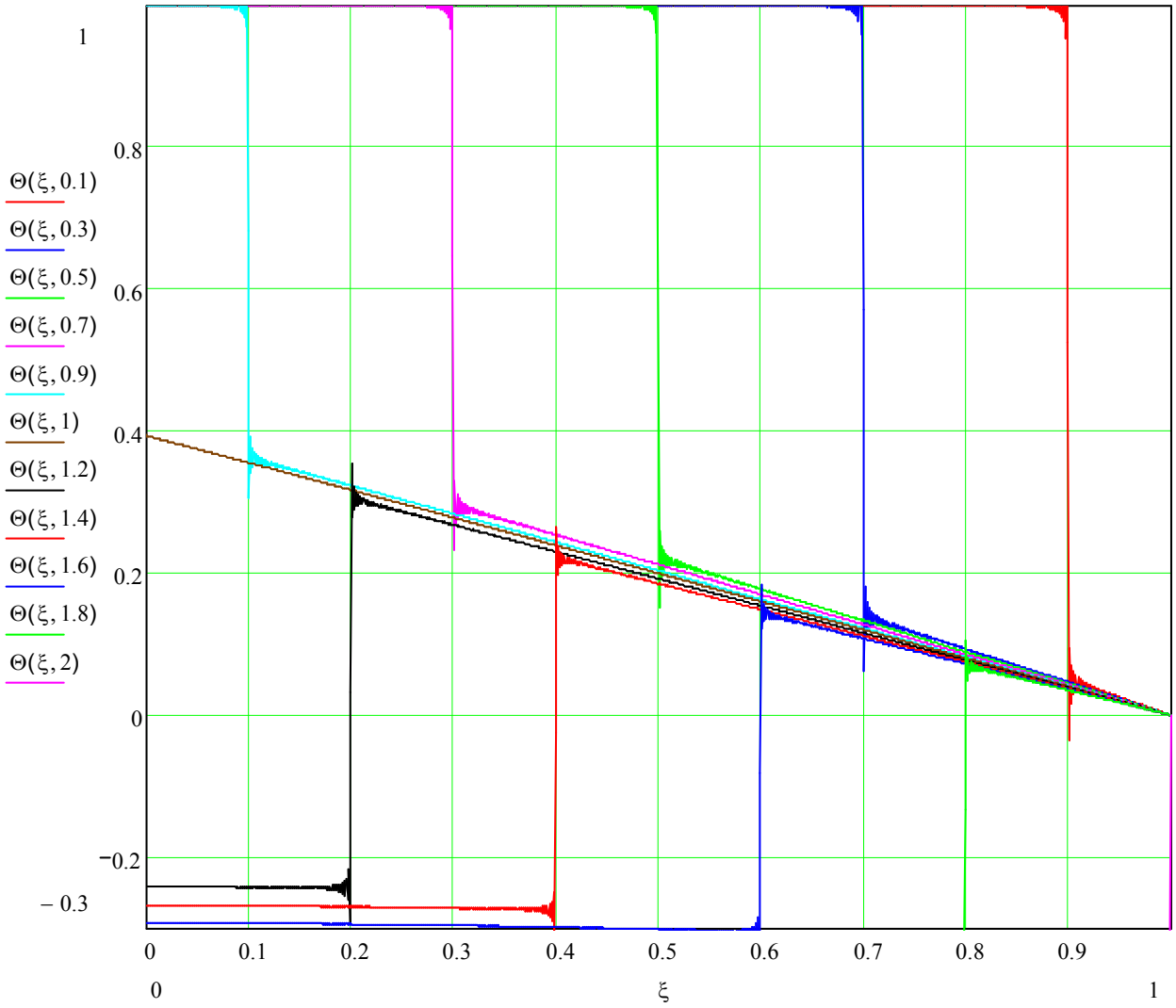


Рисунок 8.3. Распределение температуры в пластине при различных значениях Fo, Foα = 1

8.2 Реализация метода решения задачи теплопроводности с учетом релаксации теплового потока и градиента температуры численно - аналитическим методом в среде Mathcad 13

Разработана компьютерная программа для реализации изложенного в диссертации алгоритма решения задачи теплопроводности с учетом релаксации теплового потока и градиента температуры в формуле закона Фурье для теплового потока (п. 2.3).

Данная программа включает в себя постановку краевой задачи, задание исходных данных, расчет основных параметров, построение и исследование полей искомых функций при различных значениях коэффициента релаксации. Работу программы рассмотрим применительно к решению задачи теплопроводности (2.101) – (2.106).

Аналитическое решение гиперболического уравнения 4-ой степени со смешанными производными по координате и времени

Математическая постановка задачи

$$\frac{d}{dFo}\Theta(\xi, Fo) + Fo\alpha \cdot \frac{d^2}{dFo^2}\Theta(\xi, Fo) + Fo\beta \cdot \frac{d^3}{dFo^3}\Theta(\xi, Fo) =$$

$$= \frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi, Fo) + Fo\alpha \cdot \frac{d}{dFo}\frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi, Fo) + Fo\beta \cdot \frac{d^2}{dFo^2}\frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi, Fo) \quad (1)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1 \quad (2) \qquad \frac{d}{dFo}\Theta(\xi, 0) = 0 \quad (3) \qquad \frac{d^2}{dFo^2}\Theta(\xi, 0) = 0 \quad (4) \qquad \frac{d}{d\xi}\Theta(0, Fo) = 0 \quad (5) \qquad \Theta(1, Fo) = 0 \quad (6)$$

Решение задачи принимаем в следующем виде

$$\Theta(\xi, Fo) := \phi(Fo) \cdot \psi(\xi) \quad (7)$$

Подставляем (7) в основное дифференциальное уравнение (1) и разделим обе части уравнения на $\psi(\xi)$

$$\frac{d}{dFo}\phi(Fo) + Fo\alpha \cdot \frac{d^2}{dFo^2}\phi(Fo) + Fo\beta \cdot \frac{d^3}{dFo^3}\phi(Fo) = \frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi) \cdot \frac{\phi(Fo) + Fo\alpha \cdot \frac{d}{dFo}\phi(Fo) + Fo\beta \cdot \frac{d^2}{dFo^2}\phi(Fo)}{\psi(\xi)}$$

$$\frac{Fo\alpha \cdot \frac{d}{dFo}\frac{d}{dFo}\phi(Fo) + \frac{d}{dFo}\phi(Fo) + Fo\beta \cdot \frac{d^3}{dFo^3}\phi(Fo)}{\phi(Fo) + Fo\alpha \cdot \frac{d}{dFo}\phi(Fo) + Fo\beta \cdot \frac{d^2}{dFo^2}\phi(Fo)} = \frac{\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi)}{\psi(\xi)}$$

Приравниваем левую и правую части к константе $-\mu^2$

$$\frac{Fo\alpha \cdot \frac{d}{dFo}\frac{d}{dFo}\phi(Fo) + \frac{d}{dFo}\phi(Fo) + Fo\beta \cdot \frac{d}{dFo}\frac{d}{dFo}\frac{d}{dFo}\phi(Fo)}{\phi(Fo) + Fo\alpha \cdot \frac{d}{dFo}\phi(Fo) + Fo\beta \cdot \frac{d}{dFo}\frac{d}{dFo}\phi(Fo)} = -\mu^2 \qquad \frac{\frac{d}{d\xi}\frac{d}{d\xi}\psi(\xi)}{\psi(\xi)} = -\mu^2 \quad (8)$$

Подставим $\nu k = \mu^2$

$$Fo\alpha \cdot \frac{d}{dFo}\frac{d}{dFo}\phi(Fo) + \frac{d}{dFo}\phi(Fo) + Fo\beta \cdot \frac{d}{dFo}\frac{d}{dFo}\frac{d}{dFo}\phi(Fo) + \left(\phi(Fo) + Fo\alpha \cdot \frac{d}{dFo}\phi(Fo) + Fo\beta \cdot \frac{d}{dFo}\frac{d}{dFo}\phi(Fo)\right) \cdot \nu k = 0$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi) + \nu k \cdot \psi(\xi) = 0 \quad (9)$$

$$\psi(0) = 0 \quad (10) \qquad \psi(1) = 0 \quad (11)$$

Функцию $\psi(\xi)$ будем разыскивать в следующем виде, причем r = 1, 3, 5..., m.

В таком виде функция удовлетворяет граничным условиям (10) и (11)

$$\psi(\nu, \xi) := \cos\left[r \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (1 - 2 \cdot \xi)\right] \quad (12)$$

Подставим (12) в уравнение (9)

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\nu,\xi) + \nu k \cdot \psi(\nu,\xi) \right) \cdot \cos\left[r \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (1 - 2 \cdot \xi) \right] d\xi \text{ solve}, \nu k \rightarrow r^2 \cdot \pi^2$$

Характеристическое уравнение для уравнения (8) будет

$$Fo\alpha \cdot z^2 + z + Fo\beta \cdot z^3 + \left(1 + Fo\alpha \cdot z + Fo\beta \cdot z^2\right) \cdot \nu(k) = 0$$

$$Fo\alpha \cdot z^2 + z + Fo\beta \cdot z^3 + \left(1 + Fo\alpha \cdot z + Fo\beta \cdot z^2\right) \cdot \nu(k) = 0 \text{ solve}, z \rightarrow \begin{bmatrix} -\nu(k) \\ \frac{1}{2 \cdot Fo\beta} \cdot \left[(-Fo\alpha) + \left(Fo\alpha^2 - 4 \cdot Fo\beta \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ \frac{1}{2 \cdot Fo\beta} \cdot \left[(-Fo\alpha) - \left(Fo\alpha^2 - 4 \cdot Fo\beta \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{bmatrix}$$

$$\Phi k(Fo) = C1k \cdot e^{z1k \cdot Fo} + C2k \cdot e^{z2k \cdot Fo} + C3k \cdot e^{z3k \cdot Fo}$$

Формула для температуры

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{m} (\Phi k(Fo) \cdot \Psi k(\xi))$$

$$\Theta(\xi, Fo) := \sum_{k=1}^{m} \left[\left(C1(k) \cdot e^{z1(k) \cdot Fo} + C2(k) \cdot e^{z2(k) \cdot Fo} + C3(k) \cdot e^{z3(k) \cdot Fo} \right) \cdot \cos\left[r \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (1 - 2 \cdot \xi) \right] \right]$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты C1k, C2k, C3k подставляем $\Theta(\xi, Fo)$ в начальные условия (2), (3), (4)

$$\frac{d}{dFo}\Theta(\xi, Fo) \text{ substitute}, Fo = 0 \rightarrow \sum_{k=1}^{m} \left[\left(C1(k) \cdot z1(k) \cdot e^0 + C2(k) \cdot z2(k \right.\right.$$

$$\Theta(\xi, 0) \rightarrow \sum_{k=1}^{m} \left[(C1(k) + C2(k) + C3(k)) \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot r \cdot \pi \cdot (1 - 2 \cdot \xi) \right] \right]$$

$$\frac{d^2}{dFo^2}\Theta(\xi, Fo) \text{ substitute}, Fo = 0 \rightarrow \sum_{k=1}^{m} \left[\left(C1(k) \cdot z1(k)^2 \cdot e^0 + C2(k) \cdot z2(k)^2 \cdot e^0 + C3(k) \cdot z3(k)^2 \cdot e^0 \right) \cdot \cos\left[\frac{1}{2} \cdot r \cdot \pi \cdot (1 - 2 \cdot \xi) \right] \right]$$

Составим невязку начальных условий и потребуем выполнения ортогональности невязки к собственным функциям

$$\int_0^1 \left[(C1 + C2 + C3) \cdot \cos\left[r \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (1 - 2 \cdot \xi) \right]^2 \right] d\xi - \int_0^1 \cos\left[r \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (1 - 2 \cdot \xi) \right] d\xi$$

$$\int_0^1 \left(C1 \cdot z1(k) \cdot e^0 + C2 \cdot z2(k) \cdot e^0 + C3 \cdot z3(k) \cdot e^0 \right) \cdot \cos\left[r \cdot \frac{\pi}{2} \cdot (1 - 2 \cdot \xi) \right]^2 d\xi$$

После вычисления интегралов получается система трех алгебраических уравнений, из которой определяются константы интегрирования

Given

$$\sin(r\cdot\pi)\cdot C1+\sin(r\cdot\pi)\cdot C2+\sin(r\cdot\pi)\cdot C3+r\cdot\pi\cdot C1+r\cdot\pi\cdot C2+r\cdot\pi\cdot C3-4\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot r\cdot\pi\right)=0$$

$$\sin(r\cdot\pi)\cdot C1\cdot z1(k)+\sin(r\cdot\pi)\cdot C2\cdot z2(k)+\sin(r\cdot\pi)\cdot C3\cdot z3(k)+r\cdot\pi\cdot C1\cdot z1(k)+r\cdot\pi\cdot C2\cdot z2(k)+r\cdot\pi\cdot C3\cdot z3(k)=0$$

$$(\sin(r\cdot\pi)+r\cdot\pi)\cdot\left(C1\cdot z1(k)^2+C2\cdot z2(k)^2+C3\cdot z3(k)^2\right)=0$$

$\text{Find}(C1,C2,C3)\ \rightarrow$

$$\frac{4\cdot z2(k)\cdot z3(k)\cdot\sin\left[\frac{1}{2}\cdot(2\cdot k-1)\cdot\pi\right]}{(z1(k)-z3(k))\cdot(z1(k)-z2(k))\cdot[\sin[(2\cdot k-1)\cdot\pi]+(2\cdot k-1)\cdot\pi]}$$

$$\frac{-4\cdot z1(k)\cdot z3(k)\cdot\sin\left[\frac{1}{2}\cdot(2\cdot k-1)\cdot\pi\right]}{(z1(k)-z2(k))\cdot(z2(k)-z3(k))\cdot[\sin[(2\cdot k-1)\cdot\pi]+(2\cdot k-1)\cdot\pi]}$$

$$\frac{4\cdot z1(k)\cdot z2(k)\cdot\sin\left[\frac{1}{2}\cdot(2\cdot k-1)\cdot\pi\right]}{(z1(k)-z3(k))\cdot(z2(k)-z3(k))\cdot[\sin[(2\cdot k-1)\cdot\pi]+(2\cdot k-1)\cdot\pi]}$$

Подставляем в решение (7) найденные величины

$Fo\alpha := 10^{-3}$ $\qquad$ $Fo\beta := 10^{-6}$

$r := 2\cdot k-1$

$\nu(k) := (2\cdot k-1)^2\cdot\pi^2$

$$z1(k) := \frac{1}{2\cdot Fo\beta}\cdot\left[(-Fo\alpha)+\left(Fo\alpha^2-4\cdot Fo\beta\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$z2(k) := \frac{1}{2\cdot Fo\beta}\cdot\left[(-Fo\alpha)-\left(Fo\alpha^2-4\cdot Fo\beta\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$z3(k) := -\nu(k)$

$$C1(k) := \frac{4\cdot z2(k)\cdot z3(k)\cdot\sin\left[\frac{1}{2}\cdot(2\cdot k-1)\cdot\pi\right]}{(z1(k)-z3(k))\cdot(z1(k)-z2(k))\cdot[\sin[(2\cdot k-1)\cdot\pi]+(2\cdot k-1)\cdot\pi]}$$

$$C2(k) := \frac{-4\cdot z1(k)\cdot z3(k)\cdot\sin\left[\frac{1}{2}\cdot(2\cdot k-1)\cdot\pi\right]}{(z1(k)-z2(k))\cdot(z2(k)-z3(k))\cdot[\sin[(2\cdot k-1)\cdot\pi]+(2\cdot k-1)\cdot\pi]}$$

$$C3(k) := \frac{4\cdot z1(k)\cdot z2(k)\cdot\sin\left[\frac{1}{2}\cdot(2\cdot k-1)\cdot\pi\right]}{(z1(k)-z3(k))\cdot(z2(k)-z3(k))\cdot[\sin[(2\cdot k-1)\cdot\pi]+(2\cdot k-1)\cdot\pi]}$$

Построим графики изменения температур в пластине

$$\Theta(\xi,Fo) := \sum_{k=1}^{100}\left[\left(C1(k)\cdot e^{z1(k)\cdot Fo}+C2(k)\cdot e^{z2(k)\cdot Fo}+C3(k)\cdot e^{z3(k)\cdot Fo}\right)\cdot\cos\left[(2\cdot k-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(1-2\cdot\xi)\right]\right]$$

$$\frac{d}{dFo}\Theta(\xi, Fo) + Fo\alpha \cdot \frac{d^2}{dFo^2}\Theta(\xi, Fo) + Fo\beta \cdot \frac{d^3}{dFo^3}\Theta(\xi, Fo) = \frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi, Fo) + Fo\alpha \cdot \frac{d}{dFo}\frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi, Fo) + Fo\beta \cdot \frac{d^2}{dFo^2}\frac{d^2}{d\xi^2}\Theta(\xi, Fo)$$

Дифференциальное уравнение 4-ой степени со смешанными производными, 100 членов ряда.

Выведем на экран монитора графики изменения температурного состояния бесконечно-протяженной пластины при различных значениях безразмерного времени Fo.

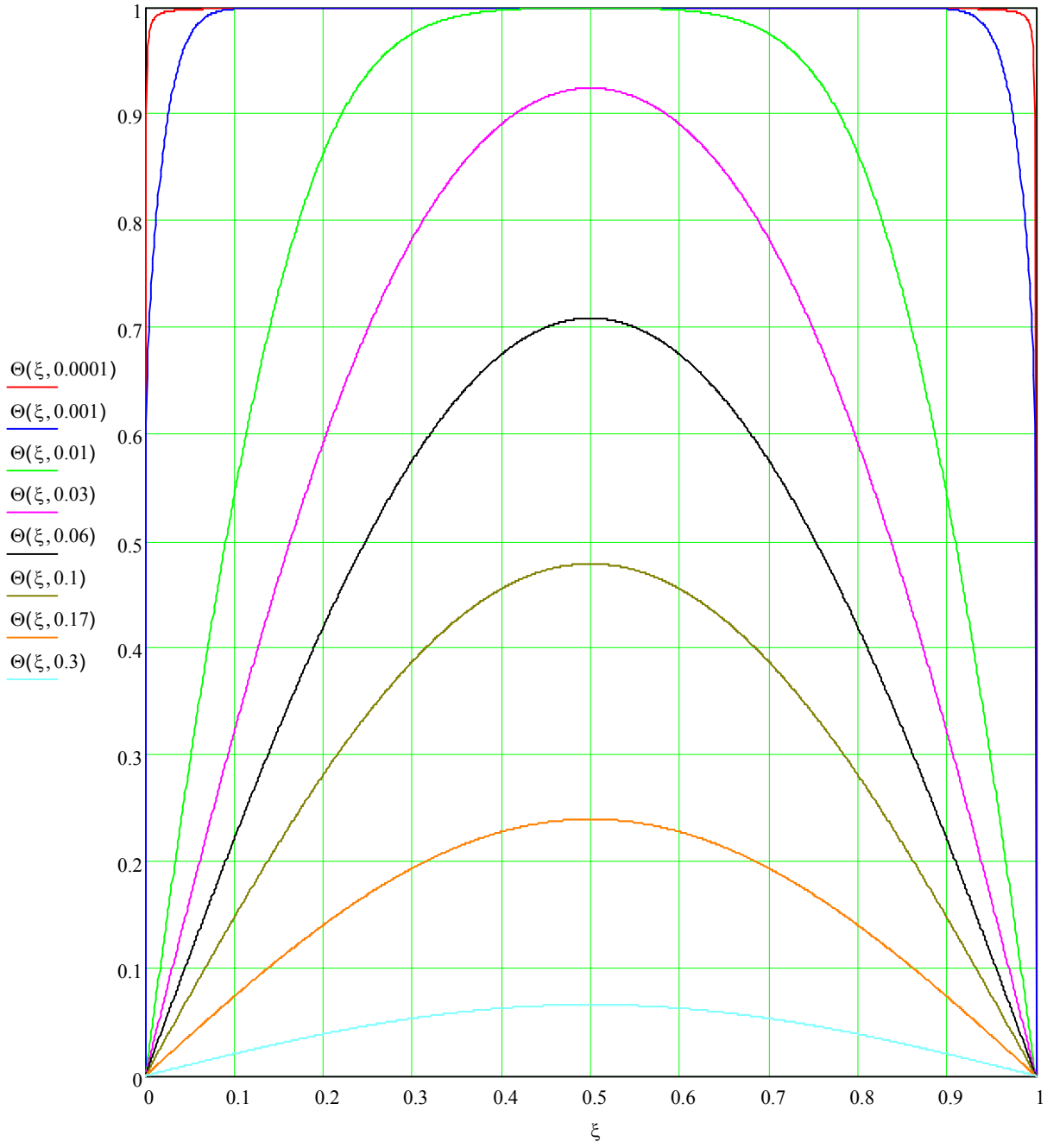


Рисунок 8.4. Распределение температуры в пластине при различных значениях Fo, $Fo\alpha = 10^{-3}$, $Fo\beta = 10^{-7}$

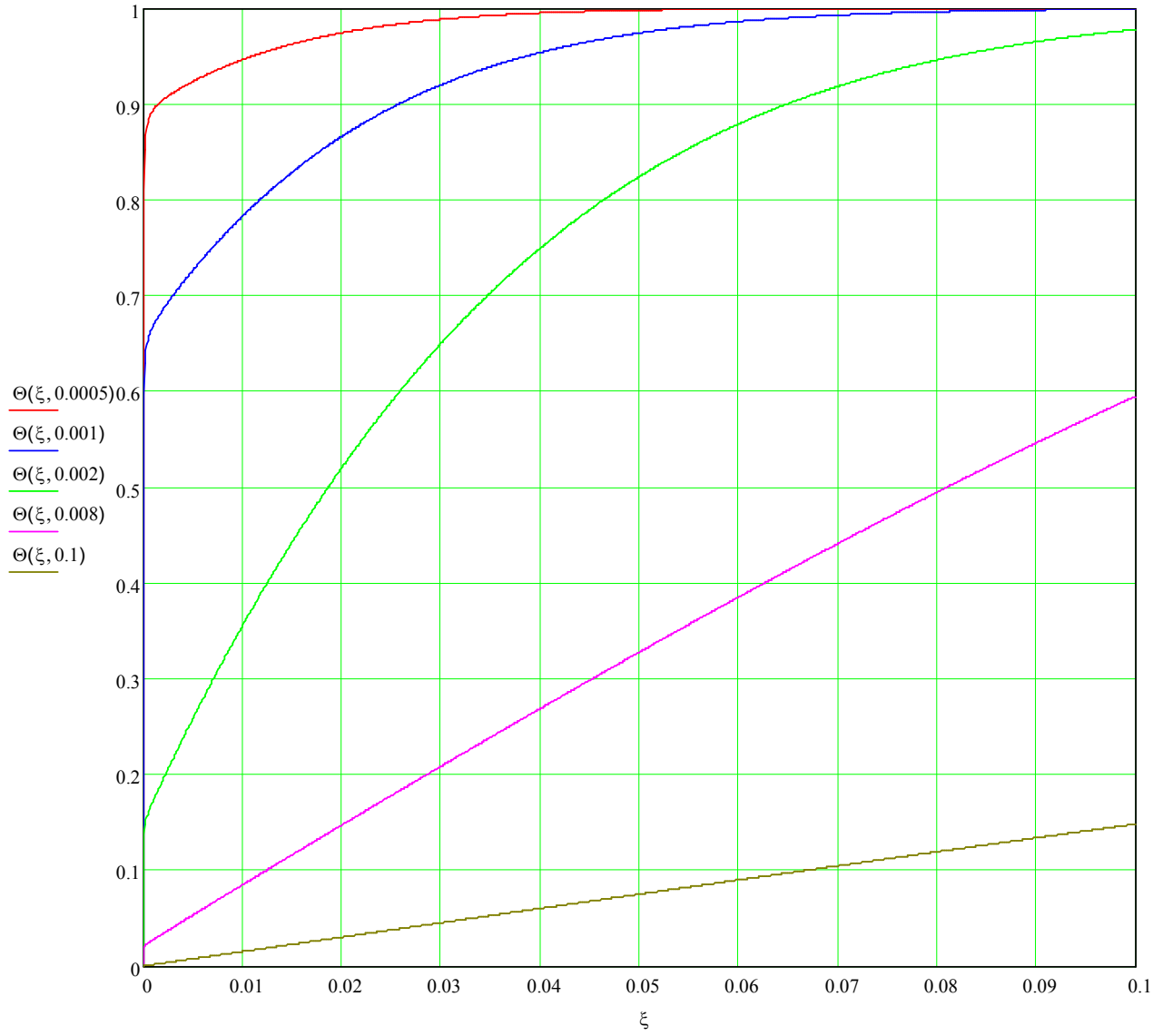


Рисунок 8.5. Распределение температуры в пластине при различных значениях Fo, $Fo\alpha = 10^{-3}$, $Fo\beta = 10^{-7}$

8.3 Реализация метода решения задачи динамической термоупругости с учетом релаксационных явлений численно - аналитическим методом в среде Mathcad 13

Разработана компьютерная программа для реализации изложенного в диссертации алгоритма решения задачи динамической термоупругости с учетом релаксации напряжения и деформации в формуле закона Гука (п. 5.4).

Данная программа включает в себя постановку краевой задачи, задание исходных данных, расчет основных параметров, построение и исследование полей искомых функций при различных значениях коэффициента релаксации. Работу программы рассмотрим на примере решения краевой задачи динамической термоупругости (5.74) – (5.78).

Динамическая задача термоупругости с учетом релаксационных свойств материалов

Математическая постановка задачи

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\sigma + Fo1\cdot\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{d}{dFo}\sigma - \frac{d^2}{dFo^2}\sigma - Fo3\cdot\frac{d}{dFo}\sigma - Fo2\cdot\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{d}{dFo}\Theta - \frac{d^2}{dFo^2}\Theta - Fo3\cdot\frac{d}{dFo}\Theta = 0 \quad (1)$$

$$\sigma(\xi,0) = 0 \quad (2) \qquad \frac{d}{dFo}\sigma(\xi,0) = 0 \quad (3)$$

$$\sigma(0,Fo) = 0 \quad (5) \qquad \sigma(1,Fo) = 0 \quad (6)$$

Найдем решение задачи (1) - (6), используя решение температурной задачи

Подставляем в решение все известные величины

$$Fo\alpha := 1$$

$$\nu(k) := (2\cdot k - 1)^2\cdot\pi^2$$

$$z1(k) := -\nu(k)$$

$$z2(k) := \frac{-1}{Fo\alpha}$$

$$C1(k) := \frac{(-4)\cdot\sin\left[\frac{1}{2}\cdot(2\cdot k-1)\cdot\pi\right]\cdot z2(k)}{-\sin[(2\cdot k-1)\cdot\pi]\cdot z2(k) + \sin[(2\cdot k-1)\cdot\pi]\cdot z1(k) - (2\cdot k-1)\cdot\pi\cdot z2(k) + z1(k)\cdot(2\cdot k-1)\cdot\pi}$$

$$C2(k) := \frac{4\cdot\sin\left[\frac{1}{2}\cdot(2\cdot k-1)\cdot\pi\right]\cdot z1(k)}{-\sin[(2\cdot k-1)\cdot\pi]\cdot z2(k) + \sin[(2\cdot k-1)\cdot\pi]\cdot z1(k) - (2\cdot k-1)\cdot\pi\cdot z2(k) + z1(k)\cdot(2\cdot k-1)\cdot\pi}$$

$$\Theta(\xi,Fo) := \sum_{k=1}^{1000}\left[\left(C1(k)\cdot e^{z1(k)\cdot Fo} + C2(k)\cdot e^{z2(k)\cdot Fo}\right)\cdot\cos\left[(2\cdot k-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(1-2\cdot\xi)\right]\right]$$

$$\Theta(\xi,Fo) = \left(C1(k)\cdot e^{z1(k)\cdot Fot} + C2(k)\cdot e^{z2(k)\cdot Fot}\right)\cdot\cos\left[(2\cdot k-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(1-2\cdot\xi)\right]$$

$$Fot = \frac{Fo\cdot a}{c\cdot\delta}$$

$$\Theta(\xi,Fo) = \left(C1(k)\cdot e^{z1(k)\cdot\frac{Fo\cdot a}{c\cdot\delta}} + C2(k)\cdot e^{z2(k)\cdot\frac{Fo\cdot a}{c\cdot\delta}}\right)\cdot\cos\left[(2\cdot k-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(1-2\cdot\xi)\right]$$

$$m = \frac{a}{c\cdot\delta}$$

$$\Theta(\xi,Fo) := \left(C1(k)\cdot e^{z1(k)\cdot m\cdot Fo} + C2(k)\cdot e^{z2(k)\cdot m\cdot Fo}\right)\cdot\cos\left[(2\cdot k-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(1-2\cdot\xi)\right]$$

$$\sigma(\xi,Fo) := \cos\left[(2\cdot k-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot(1-2\cdot\xi)\right]\cdot\phi(Fo)$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\sigma(\xi,Fo) + Fo1\cdot\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{d}{dFo}\sigma(\xi,Fo) - \frac{d^2}{dFo^2}\sigma(\xi,Fo) - Fo3\cdot\frac{d}{dFo}\sigma(\xi,Fo) - \blacksquare\rightarrow$$
$$-Fo2\cdot\frac{d^2}{d\xi^2}\frac{d}{dFo}\Theta(\xi,Fo) - \frac{d^2}{dFo^2}\Theta(\xi,Fo) - Fo3\cdot\frac{d}{dFo}\Theta(\xi,Fo)$$

Подставим формулу для нормального напряжения в основное уравнение.

Разделим обе части уравнения на $\cos\left[\frac{1}{2}\cdot(2\cdot k-1)\cdot\pi\cdot(1-2\cdot\xi)\right]$

$$-\nu k\cdot\phi(Fo)-Fo1\cdot\nu k\cdot\frac{d}{dFo}\phi(Fo)-\frac{d}{dFo}\frac{d}{dFo}\phi(Fo)-Fo3\cdot\frac{d}{dFo}\phi(Fo)+$$

$$\blacksquare+Fo2\cdot\left(C1(k)\cdot z1(k)\cdot m\cdot e^{z1(k)\cdot m\cdot Fo}+C2(k)\cdot z2(k)\cdot m\cdot e^{z2(k)\cdot m\cdot Fo}\right)\cdot\nu k-$$

$$-\left(C1(k)\cdot z1(k)^2\cdot m^2\cdot e^{z1(k)\cdot m\cdot Fo}+C2(k)\cdot z2(k)^2\cdot m^2\cdot e^{z2(k)\cdot m\cdot Fo}\right)-$$

$$-Fo3\cdot\left(C1(k)\cdot z1(k)\cdot m\cdot e^{z1(k)\cdot m\cdot Fo}+C2(k)\cdot z2(k)\cdot m\cdot e^{z2(k)\cdot m\cdot Fo}\right)$$

Произведем преобразования

$$-\nu k\cdot\phi(Fo)-Fo1\cdot\nu k\cdot\frac{d}{dFo}\phi(Fo)-\frac{d}{dFo}\frac{d}{dFo}\phi(Fo)-Fo3\cdot\frac{d}{dFo}\phi(Fo)+$$

$$\blacksquare+\left[e^{z1(k)\cdot m\cdot Fo}\cdot\left(Fo2\cdot C1(k)\cdot z1(k)\cdot m\cdot\nu k-C1(k)\cdot z1(k)^2\cdot m^2-Fo3\cdot C1(k)\cdot z1(k)\cdot m\right)\right]+\blacksquare\ \ldots$$
$$+e^{z2(k)\cdot m\cdot Fo}\cdot\left(Fo2\cdot C2(k)\cdot z2(k)\cdot m\cdot\nu k-C2(k)\cdot z2(k)^2\cdot m^2-Fo3\cdot C2(k)\cdot z2(k)\cdot m\right)$$

Преобразуем ДУ

$$A=-\left(Fo2\cdot C1(k)\cdot z1(k)\cdot m\cdot\nu k-C1(k)\cdot z1(k)^2\cdot m^2-Fo3\cdot C1(k)\cdot z1(k)\cdot m\right)$$

$$B=-\left(Fo2\cdot C2(k)\cdot z2(k)\cdot m\cdot\nu k-C2(k)\cdot z2(k)^2\cdot m^2-Fo3\cdot C2(k)\cdot z2(k)\cdot m\right)$$

$$-\nu k\cdot\phi(Fo)-Fo1\cdot\nu k\cdot\frac{d}{dFo}\phi(Fo)-\frac{d}{dFo}\frac{d}{dFo}\phi(Fo)-Fo3\cdot\frac{d}{dFo}\phi(Fo)-e^{z1(k)\cdot m\cdot Fo}\cdot A-e^{z2(k)\cdot m\cdot Fo}\cdot B=0$$

$$Fo4=Fo1\cdot\nu k+Fo3$$

$$-\nu k\cdot\phi(Fo)-Fo4\cdot\frac{d}{dFo}\phi(Fo)-\frac{d}{dFo}\frac{d}{dFo}\phi(Fo)-e^{z1(k)\cdot m\cdot Fo}\cdot A-e^{z2(k)\cdot m\cdot Fo}\cdot B=0$$

Находим решение дифференциального уравнения

$$dsolve\left(\left(-\nu k\cdot\varphi(Fo)-diff(\varphi(Fo),Fo\$2)-Fo4\cdot diff(\varphi(Fo),Fo)-A\cdot e^{z1k\cdot m\cdot Fo}-B\cdot e^{z2k\cdot m\cdot Fo}\right),\varphi(Fo)\right)$$

$$\varphi(Fo)=e^{\left(-\frac{1}{2}Fo4+\frac{1}{2}\sqrt{Fo4^2-4\,\nu k}\right)Fo}_C2+e^{\left(-\frac{1}{2}Fo4-\frac{1}{2}\sqrt{Fo4^2-4\,\nu k}\right)Fo}_C1$$
$$+\frac{-A\left(Fo4\,z2k\,m+\nu k+z2k^2\,m^2\right)e^{z1k\,m\,Fo}-B\,e^{z2k\,m\,Fo}\left(z1k\,m\,Fo4+\nu k+z1k^2\,m^2\right)}{\left(Fo4\,z2k\,m+\nu k+z2k^2\,m^2\right)\left(z1k\,m\,Fo4+\nu k+z1k^2\,m^2\right)}$$

Подставим решение дифференциального уравнения в формулу для напряжения

$$\sigma(\xi,Fo)=\sum_{k=1}^{m}\left[\phi(Fo)\cdot\cos\left[\frac{1}{2}\cdot(2\cdot k-1)\cdot\pi\cdot(1-2\cdot\xi)\right]\right]$$

$$\sigma(\xi,Fo)=\left[e^{\left(-\frac{Fo4}{2}+\frac{\sqrt{Fo4^2-4\cdot\nu k}}{2}\right)\cdot Fo}\cdot C2n(k)+e^{\left(-\frac{Fo4}{2}-\frac{\sqrt{Fo4^2-4\cdot\nu k}}{2}\right)\cdot Fo}\cdot C1n(k)+\blacksquare\right]\cdot\cos\left[\frac{1}{2}\cdot(2\cdot k-1)\cdot\pi\cdot(1-2\cdot\xi)\right]$$

$$+\frac{-A\cdot\left(Fo4\cdot z2(k)\cdot m+\nu k+z2(k)^2\cdot m^2\right)\cdot e^{z1(k)\cdot m\cdot Fo}-B\cdot\left(Fo4\cdot z1(k)\cdot m+\nu k+z1(k)^2\cdot m^2\right)\cdot e^{z2(k)\cdot m\cdot Fo}}{\left(Fo4\cdot z2(k)\cdot m+\nu k+z2(k)^2\cdot m^2\right)\cdot\left(Fo4\cdot z1(k)\cdot m+\nu k+z1(k)^2\cdot m^2\right)}$$

Чтобы найти неизвестный коэффициенты C1n(k), C2n(k) подставляем $\sigma(\xi, Fo)$ в начальные условия $\sigma(\xi, 0)=0$ (2), $\frac{d}{dFo}\sigma(\xi, 0) = 0$ (3)

$\sigma(\xi, 0)$ | substitute , C1n(k) = C01
substitute , C2n(k) = C02 $\rightarrow$

$\frac{d}{dFo}\sigma(\xi, Fo)$ | substitute , Fo = 0
substitute , C1n(k) = C01 $\rightarrow$
substitute , C2n(k) = C02
simplify

$$C_{1nk} = -0{,}5\left[mR_3R_6 + mR_4(B_3z_{1k}^2 + B_3z_{2k}^2) + 2z_{1k}z_{2k}\mathrm{Fo}_4m^2R_2 + \right.$$

;

$$C_{2nk} = 0{,}5\left[2m\mu_k R_5 + R_1(m^2(A_2z_{1k} + B_3z_{2k}) + \mathrm{Fo}_4R_3 + \mu_k R_2) + 2z_{1k}z_{2k}m^2(\mathrm{Fo}_4R_2 + R_3)\right]/D,$$

где $R_1 = \mathrm{Fo}_4 + \mathrm{Fo}_5$; $R_2 = A_2 + B_3$; $R_3 = m(A_2z_{2k} + B_3z_{1k})$; $R_4 = \mathrm{Fo}_4 - \mathrm{Fo}_5$; $R_5 = B_2z_{2k} + A_2z_{1k}$;

$$R_6 = 2z_{1k}z_{2k}m^2 + \mathrm{Fo}_4(1 - \mathrm{Fo}_5);\ \ \mathrm{Fo}_5 = (\mathrm{Fo}_4^2 - 4\mu_k)^{1/2};$$

$$D = \mathrm{Fo}_5\left[\mathrm{Fo}_4^2m^2z_{1k}z_{2k} + \mathrm{Fo}_4m(z_{1k} + z_{2k})(\mu_k m^2z_{1k}^2 + z_{2k}^2) + \mu_k m^2(z_{1k}^2 + z_{2k}^2) + z_{1k}^2z_{2k}^2m^4 + \mu_k^2\right].$$

$$\sigma(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[(\mathrm{C}_{1nk}\mathrm{e}^{-\nu_{1k}\mathrm{Fo}} + \mathrm{C}_{2nk}\mathrm{e}^{-\nu_{2k}\mathrm{Fo}}) - \right.$$

$$\left.(A_2H_3\mathrm{e}^{z_{1k}m\mathrm{Fo}} + B_2H_4\mathrm{e}^{z_{2k}m\mathrm{Fo}})/(H_3H_4)\right]\cos\left(r\frac{\pi}{2}(1-2\xi)\right),$$

где $\nu_{1k}, \nu_{2k} = 0{,}5(\mathrm{Fo}_4 \pm \sqrt{\mathrm{Fo}_4^2 - 4\mu_k})$.

Выведем на экран монитора графики изменения температурных напряжений для бесконечно-протяженной пластины при различных значениях безразмерного времени Fo.

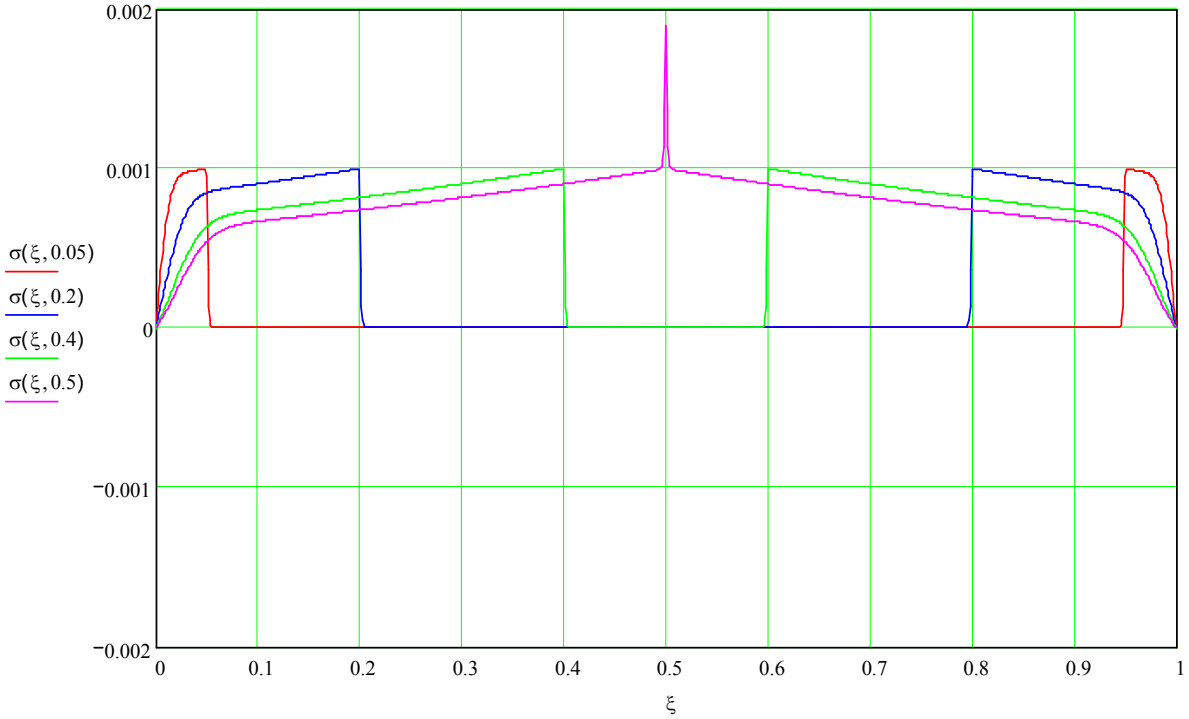


Рисунок 8.6. Распределение температурных напряжений в пластине при различных значениях Fo, Foα = 10

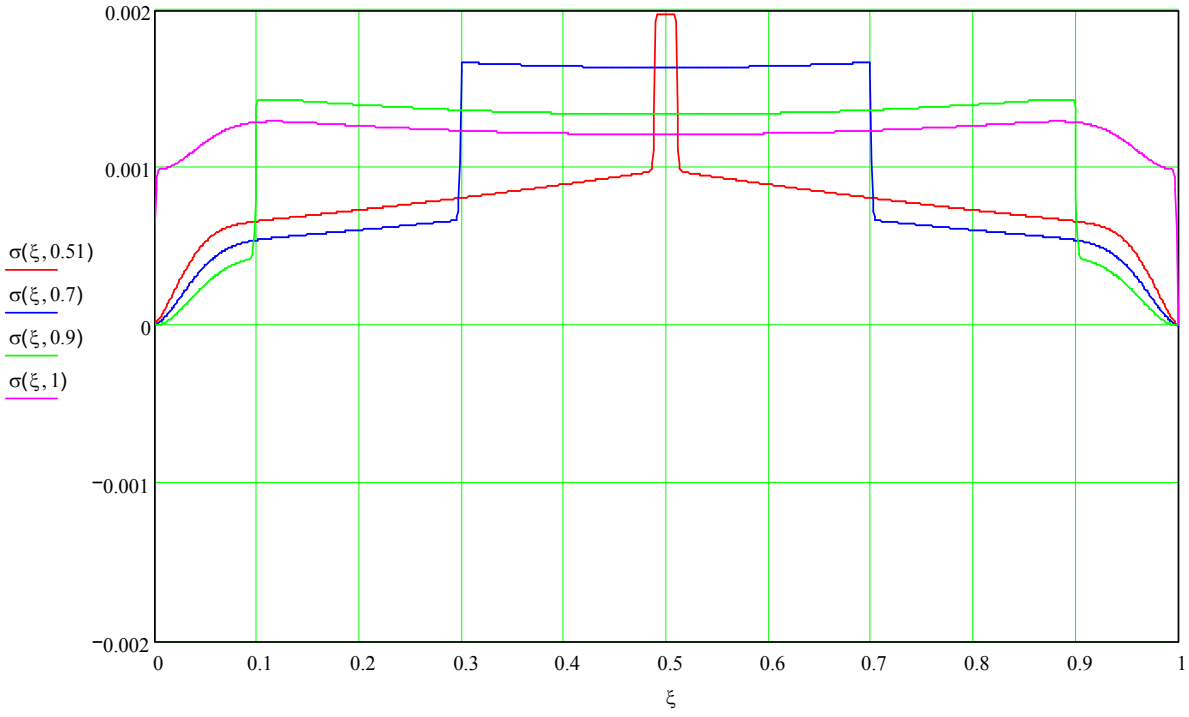


Рисунок 8.7. Распределение температурных напряжений в пластине при различных значениях Fo, Foα = 10^{-3}

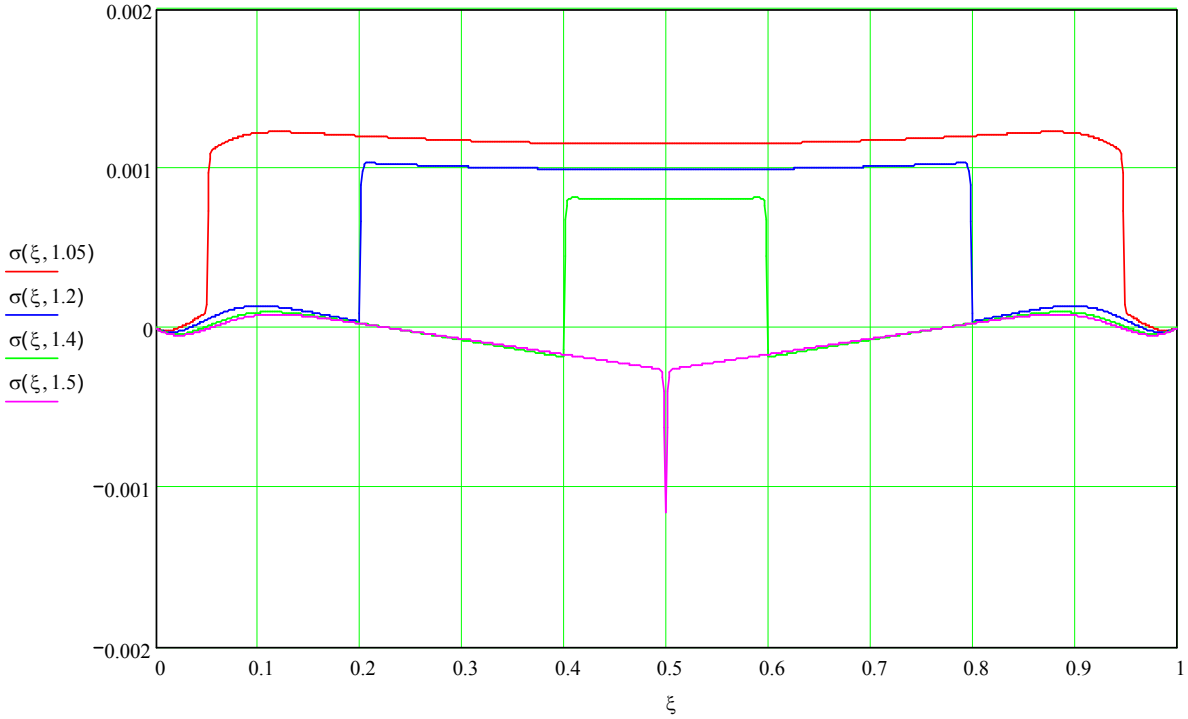


Рисунок 8.8. Распределение температурных напряжений в пластине при различных значениях Fo, Foα = 10^{-3}

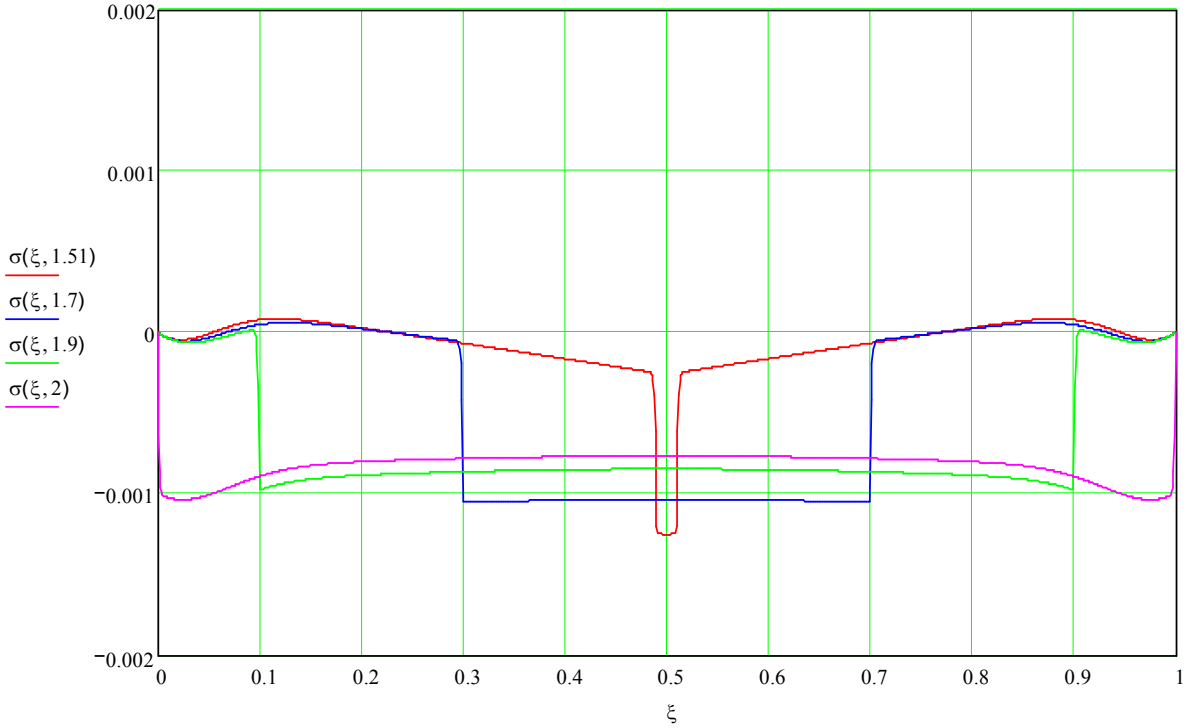
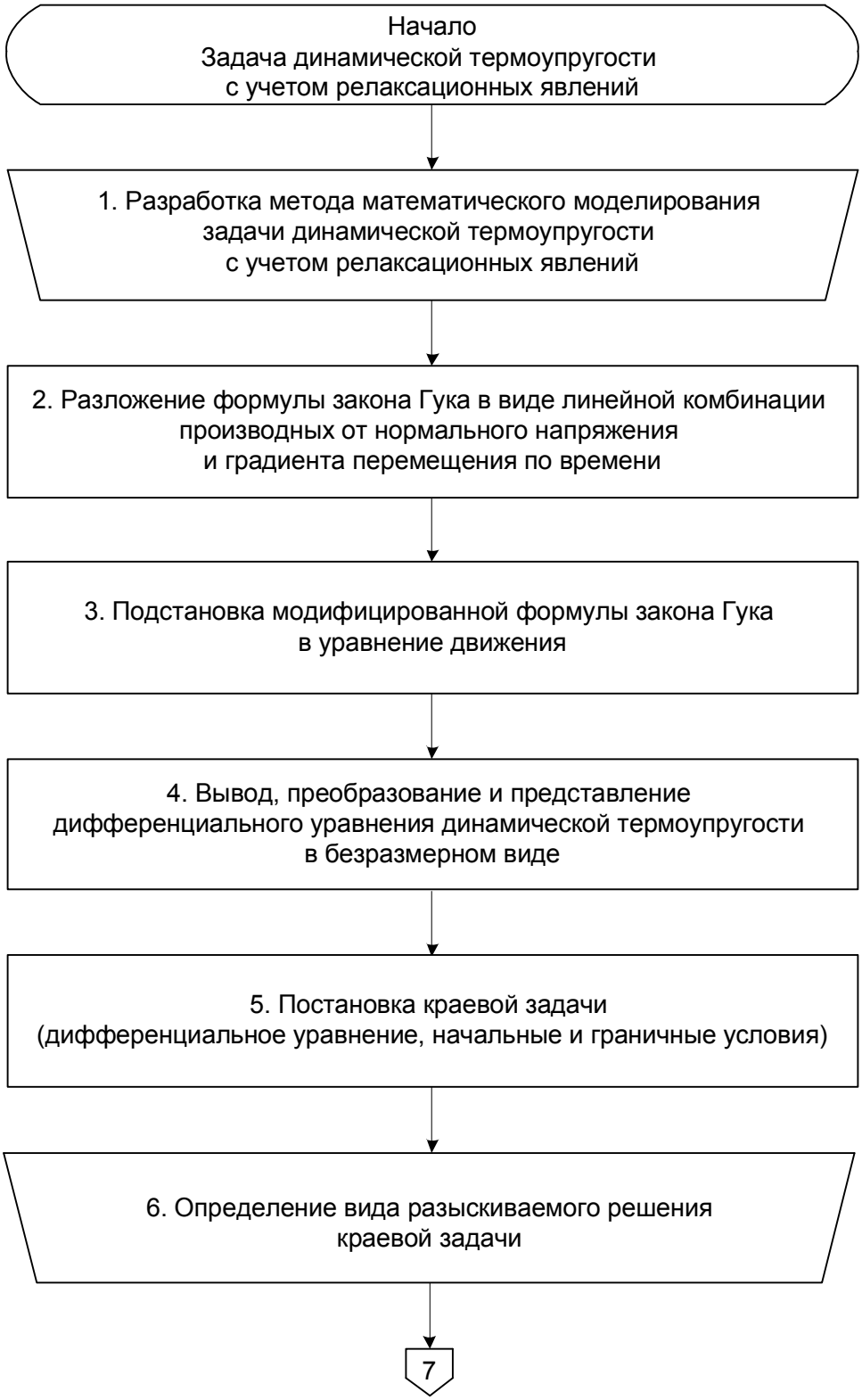


Рисунок 8.9. Распределение температурных напряжений в пластине при различных значениях Fo, Foα = 10^{-3}

8.4 Укрупненная блок - схема решения задачи динамической термоупругости с учетом релаксационных явлений на основе решения задачи теплопроводности с релаксацией теплового потока и градиента температуры



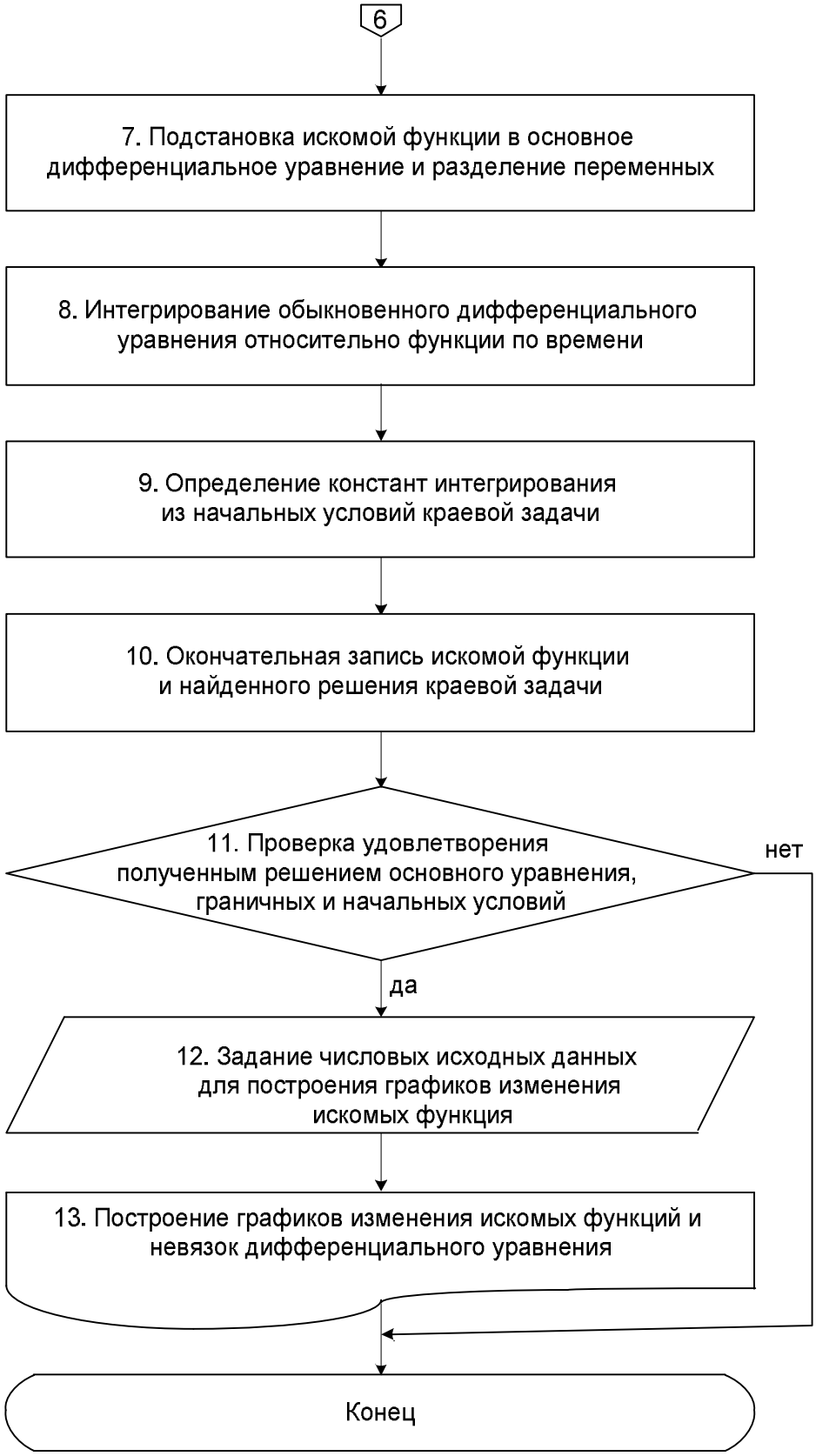


Рисунок 8.10. Укрупненная блок - схема решения задачи динамической термоупругости

8.5 Теория расчета сложных разветвленных гидравлических систем

Научные результаты, полученные в 3-ей, 4-ой и 6-ой главах были использованы при разработке программы расчета сложных трубопроводных систем, основанной на электрогидравлической аналогии. Принципиальное отличие этой программы от известных состоит в возможности выполнения автоматической идентификации, позволяющей максимально приблизить компьютерную модель к реальной гидравлической системе.

При расчетах сложных многокольцевых гидравлических сетей, запитываемых от ряда источников, весьма эффективным средством являются компьютерные модели, позволяющие воспроизводить гидравлические процессы, рассматривая их как единые гидравлические системы. Они позволяют находить давления, расходы, скорости, потери напора, расход электроэнергии и проч. Решение таких задач методами, применяемыми при параллельно-последовательном соединении трубопроводов, ввиду наличия кольцевых структур, не представляется возможным.

В основе создания компьютерной модели лежат два закона Кирхгофа, которые применяются в расчетах электрических цепей. Их использование применительно к расчетам гидравлических систем обосновывается аналогией процессов распределения тока в проводниках и жидкости в трубопроводах [1, 7, 9, 67, 85, 86, 92, 107].

В качестве примера найдем расходы в сети, включающей одно кольцо (см. рисунок 8.11), имеющее три ответвления. Расходы по участкам *a*, *b*, *c*, *d* обозначим через Q_a, Q_b, Q_c, Q_d, а по ответвлениям – через Q_1, Q_2, Q_3. Требуется определить расходы по ответвлениям при известном расходе Q на входе в кольцо. Расходы по ответвлениям от кольца Q_1, Q_2, Q_3 заданы, а их сумма равняется расходу Q на входе в кольцо: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$.

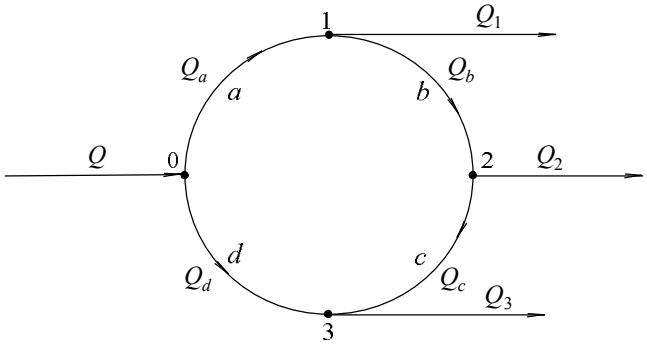


Рисунок 8.11. Схема однокольцевой сети

Для выполнения расчетов используем допущения: 1) приток среды в узел считается положительным, а отток – отрицательным; 2) потеря напора для среды, движущейся по часовой стрелке, считается положительной, а против часовой стрелки – отрицательной.

Применительно к расчету гидравлических сетей 1-ый закон Кирхгофа устанавливает равенство притока и оттока в каждом узле, т. е. необходимо выполнение уравнения баланса расходов

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = 0, \tag{8.1}$$

где n – число труб, объединяющихся в узле; Q_i $(i = \overline{1, n})$ – расходы по всем трубам, объединяющимся в узле.

По 2-ому закону Кирхгофа сумма напоров каждого замкнутого контура равна нулю

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} S_i Q_i^2 = 0, \tag{8.2}$$

где S_i $(i = \overline{1, n})$ – гидравлическое сопротивление i-того участка; Q_i $(i = \overline{1, n})$ – расходы на i-ом участке.

Используя уравнения (8.1), (8.2), путем итеративного расчета находятся расходы по всем участкам при заданном расходе Q на входе в кольцо. На первом итеративном шаге задаются произвольные расходы на каждом участке, то есть задаются значения Q_a, Q_b, Q_c, Q_d. Тогда для узлов 0, 1, 2 из 1-ого закона Кирхгофа находим

$$Q_d = Q - Q_a; \quad Q_a = Q_1 + Q_b; \quad Q_b = Q_2 + Q_c.$$

По 2-ому закону Кирхгофа, используя принятые расходы по участкам кольца, найдем невязку напоров, т. е.

$$\delta H = \sum_{i=1}^{4} S_i Q_i^2 = S_a Q_a^2 + S_b Q_b^2 + S_c Q_c^2 - S_d Q_d^2. \tag{8.3}$$

Если невязка δH положительная, то перегружены участки с направлением движения по часовой стрелке, и недогружены, – где движение противоположное.

Для приближения невязки δH к нулю введем увязочный расход δQ. Он должен вычитаться из расхода на перегруженных и прибавляться – на недогруженных участках. Увязочный расход δQ находится из (8.3), если положить $\delta H = 0$. Допуская, что невязка напоров из (8.3) положительна, увязочный расход δQ найдем из соотношения:

$$S_a (Q_a - \delta Q)^2 + S_b (Q_b - \delta Q)^2 + S_c (Q_c - \delta Q)^2 - S_d (Q_d + \delta Q)^2 = 0. \tag{8.4}$$

Если пренебречь слагаемыми, содержащими $(\delta Q)^2$, как величинами достаточно малыми, то (8.4) для увязочного расхода δQ будет алгебраическим линейным уравнением. Его решение

$$\delta Q = \delta H / \left(2 \sum_{i=1}^{n} S_i Q_i \right), \tag{8.5}$$

где $\sum_{i=1}^{n} S_i Q_i = S_a Q_a + S_b Q_b + S_c Q_c + S_d Q_d$ – величина положительная. Знаки δQ и δH должны быть одинаковыми.

После определения δQ уточняются расходы на участках и рассмотренная последовательность расчетов повторяется. Расчет продолжается до момента времени, пока расходы, определяемые из двух последних итераций, не будут отличаться на заданную величину.

Для примера получим решение задачи распределения расхода по участкам сети при исходных данных:

$$Q = 60\ м^3/ч;\quad S_a = 5\cdot 10^{-5}\ м\ ч^2/м^6;\quad S_b = 2\cdot 10^{-5}\ м\ ч^2/м^6;\quad S_c = 8\cdot 10^{-5}\ м\ ч^2/м^6;$$

$$S_d = 4\cdot 10^{-5}\ м\ ч^2/м^6;\quad Q_1 = 15\ м^3/ч;\quad Q_2 = 25\ м^3/ч;\quad Q_3 = 20\ м^3/ч.$$

На первом шаге итерации примем произвольные расходы по участкам:

$$Q_a = 50\ м^3/ч;\quad Q_b = 35\ м^3/ч;\quad Q_c = 10\ м^3/ч;\quad Q_d = 10\ м^3/ч.$$

Используя формулу (8.3), получаем

$$\delta H = 5\cdot 10^{-5}\cdot 50^2 + 2\cdot 10^{-5}\cdot 35^2 + 8\cdot 10^{-5}\cdot 10^2 - 4\cdot 10^{-5}\cdot 10^2 = 0{,}1535\ м. \qquad (8.6)$$

Величина увязочного расхода находится по формуле (8.5)

$$\delta Q = 0{,}1535 / \left[2\cdot\left(5\cdot 10^{-5}\cdot 50 + 2\cdot 10^{-5}\cdot 35 + 8\cdot 10^{-5}\cdot 10 + + 4\cdot 10^{-5}\cdot 10\right)\right] = 17{,}47\ м. \qquad (8.7)$$

На втором итеративном шаге расходы по участкам будут

$$Q_a = 32{,}53\ м^3/ч;\quad Q_b = 17{,}53\ м^3/ч;\quad Q_c = -7{,}47\ м^3/ч;\quad Q_d = 27{,}47\ м^3/ч.$$

Знак расхода Q_c в данном случае отрицательный

$$Q_c = 10 - 17{,}47 = -7{,}47\ м^3/ч.$$

Это означает, что направление движения необходимо сменить на противоположное. Тогда расход принимается положительным.

Отсюда получаем $\delta H = 0{,}024408\ м;\ \delta Q = 3{,}32\ м^3/ч.$

Уточняя расходы, находим

$$Q_a = 29{,}21\ м^3/ч;\quad Q_b = 14{,}21\ м^3/ч;\quad Q_c = 10{,}79\ м^3/ч;\quad Q_d = 30{,}79\ м^3/ч.$$

По (8.3) и (8.5) находим величины δH и δQ третьего итеративного шага: $\delta H = 0{,}0074\ м;\ \delta Q = 1{,}1\ м^3/ч.$

По результатам 3-ей итерации уточняются расходы по участкам

$$Q_a = 28{,}11\ м^3/ч;\quad Q_b = 13{,}11\ м^3/ч;\quad Q_c = 11{,}89\ м^3/ч;\quad Q_d = 31{,}89\ м^3/ч.$$

Определяя невязку 1-ого закона Кирхгофа для 1-го, 2-го и 3-го узлов сети, получаем

$$Q_1 = Q_a - Q_b = 28{,}11 - 13{,}11 = 15\ м^3/ч;$$

$$Q_2 = Q_b + Q_c = 13{,}11 + 11{,}89 = 25 \ м^3/ч;$$

$$Q_3 = Q_d - Q_c = 31{,}89 - 11{,}89 = 20 \ м^3/ч.$$

Следовательно, на третьем итеративном шаге получены расходы на участках, удовлетворяющие заданным Q_1, Q_2, Q_3, с точностью до второго знака после запятой.

Изложенный метод расчета кольцевых сетей лежит в основе разработки программного комплекса для построения моделей сложных многокольцевых гидравлических сетей (см. приложение 12).

8.6 Основные положения построения компьютерных моделей гидравлических систем

В случае многокольцевых гидравлических систем изложенный в п. 8.1 алгоритм может быть реализован лишь при использовании современных аппаратных средств и информационных технологий. Однако для этого необходимо создать компьютерную модель процесса потокораспределения. В ее основе лежат законы Кирхгофа, формулируемые в виде (8.1), (8.2), а также теория графов, позволяющая построить «дерево» теплосети. Его графическая интерпретация представлена на рисунке 8.12, где цифрами 1, 2, 3, …, 9 обозначены вершины, а буквами *а*, *б*, *в*,… – дуги графа. Вершины интерпретируют точки объединения трубопроводов, а дуги – участки трубопроводов. «Дерево» теплосети с помощью графа строится так, чтобы из точки 1 (вершина графа) можно было достичь любой другой точки теплосети. Для описания алгоритма расчета применяется специальная нумерация вершин и дуг.

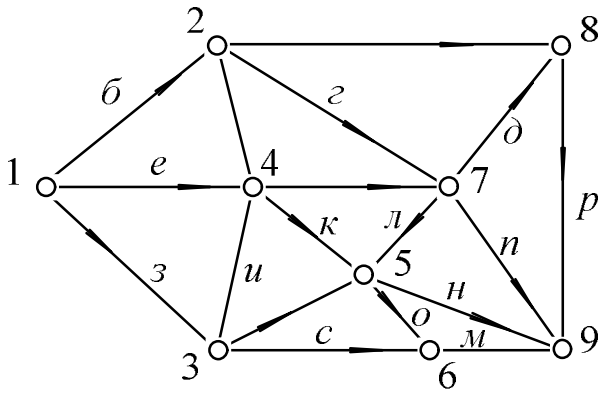


Рисунок 8.12. Схема графа теплосети

Соотношений (8.3), (8.5) достаточно для построения системы уравнений для неизвестных расходов на всех участках сети и давлений в ее узлах. Ввиду итеративного метода расчета в случае сложных кольцевых сетей возникает проблема сходимости итераций. В расчетной практике наибольшее распространение (благодаря быстрой сходимости) получил метод поконтурной увязки перепадов давлений, суть которого сводится к следующему.

1. Задается начальное приближение расходов на всех участках сети.

2. Находятся потери давления на участках и их суммарные невязки по всем контурам.

3. По найденным невязкам определяются увязочные расходы.

4. Расходы, полученные на данной итерации, используются при выполнении следующей итерации до совпадения в пределах заданной точности значений всех искомых величин.

При разработке модели находятся гидравлические характеристики трубопроводов сети.

Потери напора в каждом трубопроводе включают потери на трение и потери на местных сопротивлениях, т. е.

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d} \frac{\upsilon^2}{2g} + \sum \xi \frac{\upsilon^2}{2g}, \tag{8.8}$$

где Δh – потери напора, *м*; l – длина трубопровода, *м*; λ – коэффициент трения; d –диаметр, *м*; υ – скорость, *м/с*; $\sum \xi$ – сумма коэффициентов местных потерь.

Используя эквивалентную длину, потери напора в местных сопротивлениях можно свести к линейным. Эквивалентная длина местных сопротивлений определяется по формуле

$$l_э = d \sum \xi / \lambda. \tag{8.9}$$

С учетом (8.9) соотношение (8.8) принимает вид

$$\Delta h = \frac{\upsilon^2}{2g} \left(\lambda \frac{l}{d} + \lambda \frac{l_э}{d} \right) = \frac{\lambda \upsilon^2}{2dg} \left(l + l_э \right). \tag{8.10}$$

Если расход среды по участку Q *м*^{3}*/с*, то

$$\upsilon = 4Q / \left(\pi d^2 \right). \tag{8.11}$$

Подставляя (8.11) в (8.10), получаем

$$\Delta h = \frac{8\lambda \left(l + l_э \right)}{\pi^2 g d^5} Q^2 .$$

Тогда характеристика участка-трубы будет

$$\Delta h = sQ^2,$$

где $s = \frac{8\lambda \left(l + l_э \right)}{\pi^2 g d^5}$ – сопротивление участка, *с*^{2}*/м*^{5}.

Для любого участка-трубы вводятся следующие данные: диаметр, *мм*; длина, *м*; тип и количество местных сопротивлений.

Характеристика участка-задвижки будет

$$\Delta h = sQ^2,$$

где s – коэффициент сопротивления задвижки, зависящий от степени ее закрытия.

Участки-насосы представляются характеристиками, связывающими напор и подачу. Характеристика насоса выражается уравнением вида

$$H = H_ф - Q_н^m S_ф, \tag{8.12}$$

где $H_ф$ – напор при закрытой на выходе задвижке ($Q_н$= 0), *м*; $Q_н$ – подача насоса, *м³/с*; $S_ф$ – гидравлическое сопротивление насоса.

Искомые параметры $H_ф$ и $S_ф$ находятся по двум произвольным точкам характеристики насоса при использовании соотношений

$$S_ф = \frac{H_а - H_б}{Q_б^2 - Q_а^2}; \quad H_ф = H_а + S_ф Q_а^2, \tag{8.13}$$

где индексы «а» и «б» относятся к параметрам H и Q, значения которых взяты из паспортных данных насоса.

Число оборотов двигателя насоса *n* и диаметр *D* рабочего колеса насоса могут отличаться от их величин, приведенных в каталоге. В данном случае аналитическая характеристика насоса является базовой, а действительные параметры $H_ф^*$ и $S_ф^*$ определяются посредством пересчета на основе соотношений

$$S_ф^* = S_ф; \quad H_ф^* = H_ф\left(\frac{D^*}{D}\right)^2\left(\frac{n^*}{n}\right)^2,$$

где $S_ф^*, H_ф^*, n^*$ – параметры действительной характеристики; $S_ф, H_ф, n$ – параметры базовой характеристики.

Рассмотрим пример расчета параметров центробежного насоса СЭ-2500-180, где в качестве исходных данных используется график его паспортной характеристики. Значения расхода насоса от напора для отдельных режимов работы характеристики приведены в Таблице 8.1.

Таблица 8.1

Режим работы	1	2	3	4	5	6
Q, *м³,час*	0	1100	1500	1900	2500	3000
H, *м в. ст.*	240	230	222	209	180	144

В качестве расчетных режимов работы (соответствующих индексам «а» и «б» в формулах (8.13)), возьмем режимы с номерами 3 и 5. Используя табличные данные, по соотношениям (8.13) находим

$$S_ф = \frac{222 - 180}{2500^2 - 1500^2} = 1{,}05 \cdot 10^{-5};$$

$$H_ф = 222 + 1{,}05 \cdot 10^{-5} \cdot 1500^2 = 245{,}6.$$

Таким образом, для насоса СЭ-2500-180 получаем следующее приближенное выражение для описания его характеристики:

$$H_{ф} = 245{,}6 - 0{,}0000105 \cdot Q^2 .$$

Реальные характеристики насоса могут не соответствовать их паспортным значениям. В программе предусмотрена возможность уточнения характеристики любого из используемых насосов. Для этого вводятся два коэффициента, уточняющие как напор насоса (при закрытой задвижке на напорной линии) $H_{ф}$, так и его гидравлическое сопротивление $S_{ф}$. Значения этих коэффициентов могут быть найдены лишь путем экспериментальных исследований.

Таким образом, при построении компьютерной модели используется полная информация о сети – длины и диаметры труб, их шероховатость, состояние задвижек, отметки высот местности, сток и приток среды в точках сети, характеристики насосов и прочее. При этом строится модель с паспортными характеристиками. Однако реальные характеристики могут значительно отличаться от паспортных. Для максимального приближения модели к реальной сети выполняется ее идентификация. С этой целью используются экспериментально найденные расходы и давления в отдельных точках сети. Для приближения модели к реальной сети гидравлические сопротивления участков модели изменяют так, чтобы результаты, получаемые из расчета на модели, как можно менее отличались от экспериментальных данных. Процесс идентификации – итеративный, в модели он автоматизирован. Точность идентификации определяется количеством экспериментальных данных. При использовании моделей для проектирования новых сетей идентификация модели не требуется.

После процедуры идентификации компьютерная модель оказывается практически эквивалентной реальной теплосети. Она позволяет выполнять любое число расчетов для данной теплосети, что позволяет оперативно принимать меры по изменению режима, а также находить оптимальные варианты реконструкции сети. Модель позволяет оценивать способность теплосети принять дополнительную перспективную нагрузку, а также выполнять проектирование новых ее участков и проч.

8.7 Компьютерные модели систем теплоснабжения больших городов

При выполнении проектов новых теплосетей эффективным направлением является применение моделей, позволяющих воспроизводить гидравлические процессы, рассматривая теплосети как единые гидравлические системы.

При построении моделей вновь проектируемых сетей задаются: длина труб, отметки высоты, параметры теплоносителя (расход, давление и пр.), которые должны быть выдержаны при эксплуатации.

Рассмотрим пример проектирования нового тепловывода от Тольяттинской ТЭЦ (ТоТЭЦ) для отопления жилого района, запитываемого от ТЭЦ Волжского автозавода (ТЭЦ ВАЗ). Схема подсоединения нового (4-ого) вывода ТоТЭЦ к теплосети ТЭЦ ВАЗ дана на рисунке 8.13.

Ввиду различия схем теплоснабжения (открытая – на ТЭЦ ВАЗ и закрытая – на ТоТЭЦ) потери теплоносителя на горячее водоснабжение выполняются за счет ТЭЦ ВАЗ. На ТоТЭЦ вода будет только нагреваться. Новый вывода ТоТЭЦ должен обеспечить запитку потребителей $П_3$ (4575 *т/час* текущей нагрузки и 5800 *т/час* перспективной нагрузки) 3-го тепловывода и части потребителей $П_2$ (3000 *т/час*) 2-го тепловывода ТЭЦ ВАЗ. Кроме того, следует запитать нагрузку 2-й магистрали от нового вывода ТоТЭЦ в количестве 1600 *т/час*.

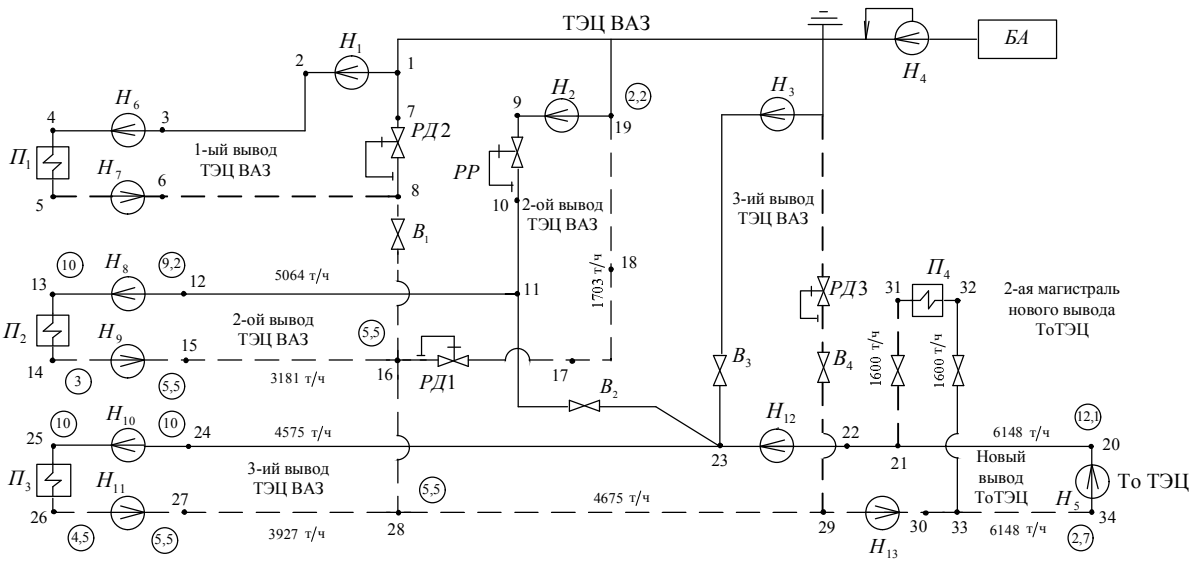


Рисунок 8.13. Схема подсоединения нового вывода ТоТЭЦ к теплосетям ТЭЦ ВАЗ. ——— − прямая магистраль; – – – – обратная магистраль; ⋈ – задвижки; РД1, РД2, РД3 – регуляторы давления; РР – регулятор расхода; $Н_1$, $Н_2$, $Н_3$, $Н_4$ – сетевые и подпиточные насосы ТЭЦ ВАЗ; $Н_5$ – сетевые насосы ТоТЭЦ; $Н_6$, $Н_8$, $Н_{10}$, $Н_{12}$, $Н_{13}$ – повысительные насосные; $Н_7$, $Н_9$, $Н_{11}$ – понизительные насосные; $П_1$, $П_2$, $П_3$ – потребители от 1-го, 2-го и 3-го выводов ТЭЦ ВАЗ; $П_4$ – потребители 2-ой магистрали нового вывода ТоТЭЦ; БА – баки-аккумуляторы; 1, 2, 3, …, 34 – характерные точки сети; 6148 – расход теплоносителя от ТоТЭЦ; ⑤,⑤ – давление, *кгс/см²*

Технические условия на проектирование были следующими:

Подсоединение нового вывода ТоТЭЦ к сетям ТЭЦ ВАЗ выполнить в точке 23 прямого и точке 29 обратного трубопроводов (см. Рисунок 8.13).

Давление в точке 23 должно быть не менее 11 *кгс/см²*.

Подпитку потребителей $П_3$ производить через перемычку 16 – 28 диаметром 1000 *мм*.

Давление в точке 16 должно быть не более 7 *кгс/см²*.

Давление перед насосами ТоТЭЦ, в точке 34, должно быть в пределах 1,5 – 3,5 *кгс/см²*.

Давление в точках 15 и 27 должно быть не менее 4,5 *кгс/см²*.

Расход среды в прямом трубопроводе 4-го тепловывода должен быть не меньше 10400 *т/час* (диаметр прямого и обратного трубопроводов 1200 *мм*).

Давление на выходе насосов ТоТЭЦ должно быть не выше 16 *кгс/см²*.

Сложность поставленной задачи в том, что здесь необходимо построить работу теплосети, запитываемой от двух теплоисточников, имеющих разные схемы теплоснабжения, открытую (ТЭЦ ВАЗ) и закрытую (ТоТЭЦ). Для обеспечения определямых техническими условиями параметров, необходимо найти распределение давления, скорости и расхода теплоносителя на всех участках объединенной теплосети. Для этого была построена компьютерная модель объединенной теплосети, рассматривая ее, как единую гидравлическую систему. За базовое было принято давление, создаваемое насосами $Н_4$ ТЭЦ ВАЗ, составляющее 2,2 *кгс/см*^{2}.

На модели были рассчитаны следующие варианты работы теплосети:

Новый вывод полностью обеспечивает нагрузку потребителей $П_3$ 3-го тепловывода ТЭЦ ВАЗ в режимах работы с существующей, перспективной и минимальной нагрузкой.

Новый вывод ТоТЭЦ частично обеспечивает нагрузку потребителей $П_2$ 2-го вывода ТЭЦ ВАЗ.

Исходные данные для первого варианта были следующими. Расход в подающем трубопроводе 3-го вывода ТЭЦ ВАЗ равен 4575 *т/час*, в обратном – 3097 *т/час*. Расход воды на горячее водоснабжение составлял 1478 *т/час*. Соответствующие данные для 2-ого вывода ТЭЦ ВАЗ были следующими: 5064 *т/час*, 3181 *т/час*, 1883 *т/час*. Подпитка 4-го вывода ТоТЭЦ, выполняемая через перемычку 16 – 28 (см. Рисунок 8.13), была равна расходу на горячее водоснабжение 3-го вывода ТЭЦ ВАЗ, 1478 *т/час*. Давление в обратной магистрали 2-го вывода ТЭЦ ВАЗ (точка 19) принималось равным 2,2 *кгс/см*^{2}. Давление в прямых трубопроводах после насосных $Н_8$ и $Н_{10}$ было на уровне 10 *кгс/см*^{2}. Давление в обратной магистрали перед понизительной $Н_9$ было 3,0 *кгс/см*^{2}, а перед насосной $Н_{11}$ – 4,5 *кгс/см*^{2}.

Учитывая нагрузку 2-й магистрали нового вывода ТоТЭЦ (1600 *т/час*) суммарный расход в трубопроводах 4-го вывода ТоТЭЦ составлял 6148 *т/час*.

Главным параметром регулирования является давление на всасе насосов $Н_5$ ТоТЭЦ (точка 34 на рисунке 8.13), которое должно быть в диапазоне 1,5 – 3,5 *кгс/см*^{2}. Поддержание этого давления обеспечивается настройкой регулятора давления РД1.

Результаты расчетов давления для первого варианта работы представлены на рисунке 8.14. На рисунках 8.14, 8.15, 8.16 введены следующие обозначения: ——— − прямая магистраль; – – – − обратная магистраль; *L* – длина труб, *км*; *P* – пьезометрическое давление, *м вод. ст.*; $Н_{11}$ – понизительная насосная; $\overline{\text{шшшш}}$ – отметка высоты местности. Различные участки теплосети на рисунках 8.14 – 8.16 отмечены точками, совпадающими с соответствующими точками на рисунке 8.13.

Анализ расчетов приводит к заключению, что для поддержания на входе сетевых насосов ТоТЭЦ (точка 34) давления 2,5 *кгс/см*^{2} РД1 необходимо настроить на давление 5,5 *кгс/см*^{2}

(давление в точке 16), которое не превышает давление в точке 16, определяемого техническими условиями.

Давление после насосной H_{10} на требуемом уровне – 10 *кгс/см*^{2} – может быть достигнуто сетевыми насосами H_5 ТоТЭЦ, следовательно повысительная насосная H_{10} может быть отключена. Давление на выходе насосов H_5 должно быть не меньше 11,5 *кгс/см*^{2} (пьезометрическое давление 202 *м вод. ст.,* точка 20 на рисунке 8.14).

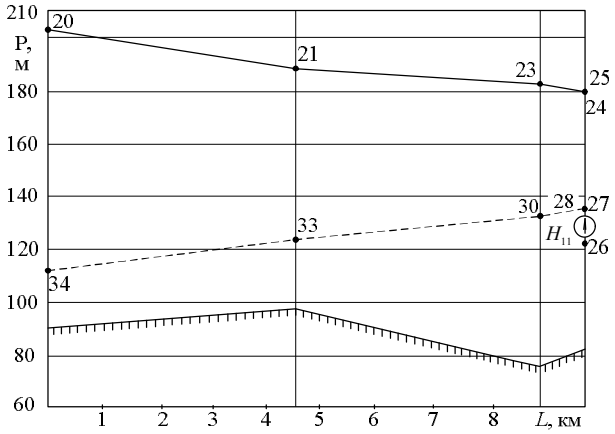


Рисунок 8.14. Распределение давлений (новый вывод ТоТЭЦ – 3-ий вывод ТЭЦ ВАЗ) без учета работы повысительной H_{12} и понизительной H_{13} насосных

Режимы обратных магистралей 2-го и 3-го тепловыводов ТЭЦ ВАЗ обеспечиваются понизительными насосными H_9 и H_{11}.

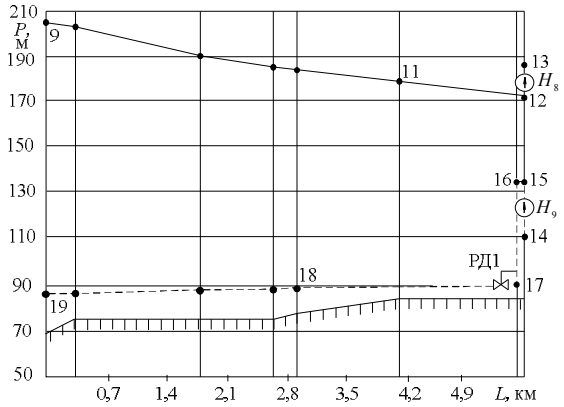


Рисунок 8.15. Распределение давлений на 2-ом выводе ТЭЦ ВАЗ

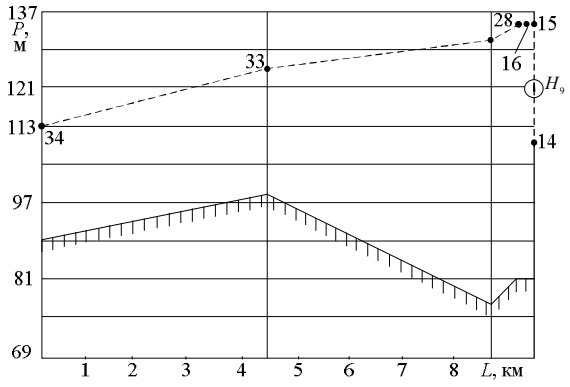


Рисунок 8.16. Распределение давлений в обратном трубопроводе нового вывода ТоТЭЦ (точки 34 − 28) и вывода ТЭЦ ВАЗ (точки 16 − 14)

Точно также насосная H_{11} обеспечивает перепад давлений у потребителей $П_3$, снижая давление в обратной магистрали от 135 *м вод. ст.* до 122 *м вод. ст.* (см. Рисунок 8.14).

Анализ распределения давления, представленного на рисунке 8.15, позволяет заключить, что на участке 19 – 17 (см. рисунок 8.13) избыточное давление понижается 10 *м вод. ст.* (1 *кгс/см*^{2}), что создает предпосылки для вскипания жидкости на данном участке. Поэтому рекомендуется давление, создаваемое насосами H_4 ТЭЦ ВАЗ, повысить до 3,5 *кгс/см*^{2}.

При расчете режима с перспективным возрастанием нагрузки на новом выводе ТоТЭЦ были использованы следующие данные. Расход теплоносителя в подающем трубопроводе ТоТЭЦ составлял 5800 *т/час*, в обратном – 3792 *т/час*. Расход воды горячего водоснабжения потребителей $П_3$ 4-ого вывода ТоТЭЦ был равен 1828 *т/час*, т. е подпитке контура 4-го вывода ТоТЭЦ. С учетом подачи воды на 2-ую магистраль 4-ого вывода ТоТЭЦ в количестве 1600 *т/час* суммарный расход на 4-ом выводе был 7373 *т/час*.

Анализ полученных результатов показал, что для обеспечения на входе насосов $Н_5$ ТоТЭЦ давления 2,5 *кгс/см*^{2} при учете перспективной нагрузки РД1 необходимо настроить на давление 6,6 *кгс/см*^{2}, которое не превышает величины 7 *кгс/см*^{2}, определенной техническими условиями. Однако, в данном случае могут возникнуть проблемы при снижении нагрузки на 4-ом выводе ТоТЭЦ, так как при некоторой минимальной нагрузке давление настройки РД1 будет равным минимально допустимому – 4,5 *кгс/см*^{2}. Такая ситуация будет иметь место при уменьшении нагрузки у потребителей $П_3$ до 3000 *т/ч*.

Давление в обратной магистрали у потребителей будет менее 4,5 *кгс/см*^{2}, что создает опасность вскипания жидкости в обратной магистрали повышенных участков местности. В связи с чем, настройку РД1 следует сохранить на уровне 5,5 *кгс/см*^{2}. Давление перед насосами $Н_5$ ТоТЭЦ в этом случае будет составлять 3,5 *кгс/см*^{2} (см. рисунок 8.16).

Рассмотрим работу объединенной теплосети в случае, когда с 4-ого вывода ТоТЭЦ запитывается вся нагрузка потребителей $П_3$ и часть нагрузки $П_2$. Расход воды на 4-ом выводе ТоТЭЦ при этом составит 10400 *т/час*. В схеме теплосети ввиду возрастания подпитки 4-ого вывода ТоТЭЦ обратную магистраль 2-го вывода ТЭЦ ВАЗ следует отключить, т.к. она оказывается полностью разгруженной. В результате отключения происходит потеря базы (условного нуля), расположенной на выходе подпиточных насосов ($Н_4$) ТЭЦ ВАЗ. Для ее восстановления следует перемычкой 8 – 16 связать обратные магистрали 1-го и 2-го выводов ТЭЦ ВАЗ (см. рисунок 8.13). Как и ранее, главным параметром регулирования будет давление на входе насосов $Н_5$ ТоТЭЦ. Для получения возможности регулирования данного давления в пределах 1,5 – 3,5 *кгс/см*^{2} необходимо использовать еще один регулятор давления (РД2) , который следует разместить на обратной магистрали 1-го вывода ТЭЦ ВАЗ. Причем, регулятор давления РД1 и обратную магистраль 2-го вывода ТЭЦ ВАЗ следует отключить. В качестве условного нуля теперь будет давление в обратной магистрали 1-го тепловывода ТЭЦ ВАЗ, которое по условиям работы должно быть равным 2,9 *кгс/см*^{2}.

Для обеспечения работы двух источников (ТоТЭЦ и ТЭЦ ВАЗ) на один прямой трубопровод, запитывающий потребителей $П_2$ 2-го тепловывода ТЭЦ ВАЗ, один из них необходимо принять как базовый с фиксированным расходом. Для этого на прямой магистрали 2-го вывода ТЭЦ ВАЗ необходимо предусмотреть регулятор расхода РР (см. рисунок 8.13).

Анализ расчетов теплосети с регулятором давлении РД2 позволяет заключить, что при его настройке на величину 5,7 *кгс/см*^{2} давление на входе насосов H_5 ТоТЭЦ будет отрицательным (-2,2 *кгс/см*^{2}), что недопустимо по условиям их безкавитационной работы. Кроме того, давление в точке 23 (см. рисунок 8.13) будет равным 9,2 *кгс/см*^{2}, что меньше значения давления, заданного техническими условиями (в этом варианте работы задвижка B_1 открыта, B_3, B_4 закрыты, клапан РД3 и насосные H_{12}, H_{13} отключены).

Для решения всех возникающих при этом варианте работы проблем следует на прямом трубопроводе 4-ого вывода ТоТЭЦ установить повысительную H_{12}, а на обратной магистрали – понизительной насосной H_{13}. Расчеты данного варианта теплосети приведены на рисунках 8.17 – 8.20 (на рисунке 8.17 дано распределение расхода и давления по отдельным участкам теплосети).

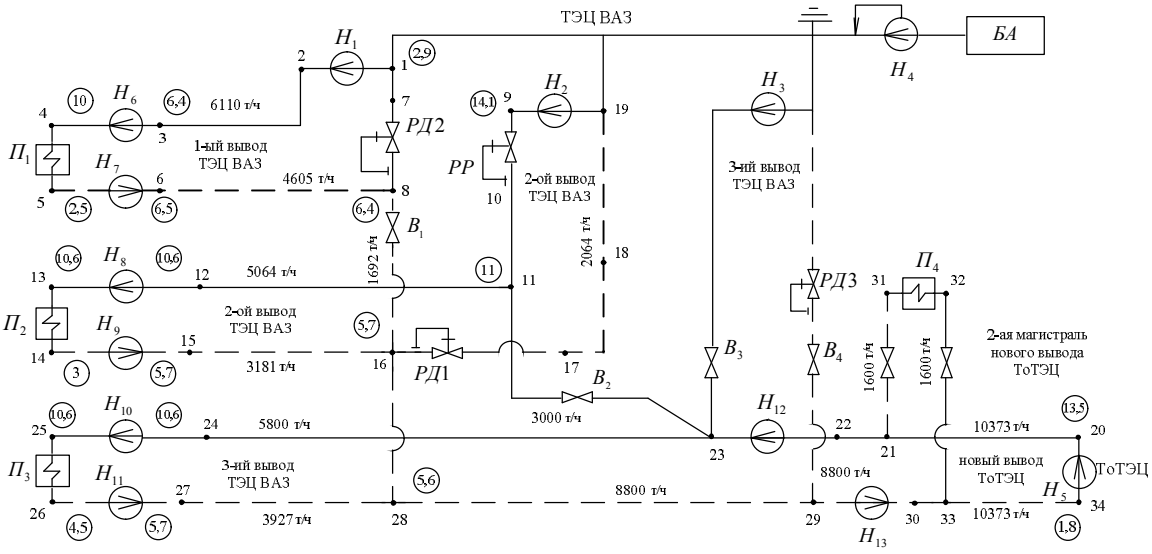


Рисунок 8.17. Распределение давлений и расходов теплоносителя по отдельным участкам объединенной теплосети

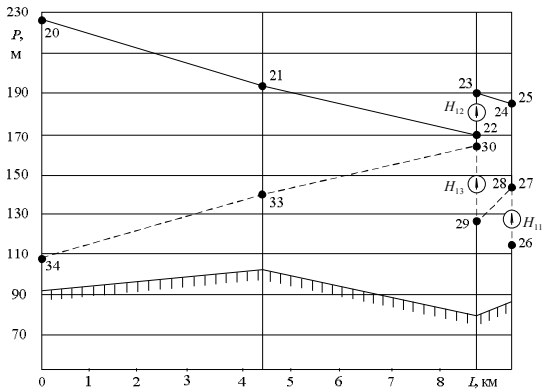


Рисунок 8.18. Распределение давлений (новый вывод ТоТЭЦ – 3-ий вывод ТЭЦ ВАЗ) с учетом работы повысительной H_{12} и понизительной H_{13} насосных

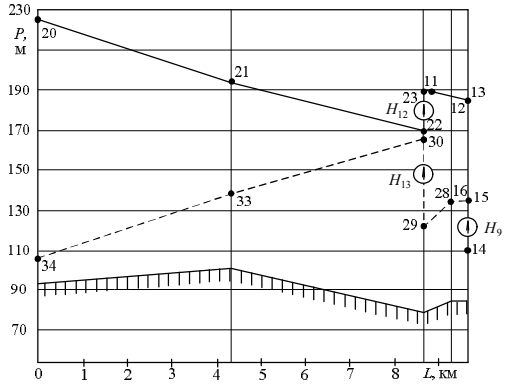


Рисунок 8.19. Распределение давлений (новый вывод ТоТЭЦ – 2-ой вывод ТЭЦ ВАЗ) с учетом работы повысительной H_{12} и понизительной H_{13} насосных

Из анализа результатов расчетов следует, что перепад давлений между прямым и обратным трубопроводами в точках присоединения 4-ого вывода ТоТЭЦ к теплосети ТЭЦ ВАЗ (точки 23, 29 на рисунке 8.17) составляет 5 *м вод. ст.*, что меньше минимально допустимого давления – 20 *м вод. ст.* Для решения данной проблемы предлагается увеличить давление на выходе насосов H_5 с 13,5 *кгс/см*^{2} до 16 *кгс/см*^{2} и понизить давление на их всасе с 1,8 *кгс/см*^{2} до 1,2 *кгс/см*^{2} (путем настройки РД2), что позволит увеличить располагаемый перепад давления до 3 *кгс/см*^{2}.

Более радикальным способом увеличения перепада давления между прямой и обратной магистралями является установка насосных H_{12}, H_{13} соответственно в точках 21 и 33. Результаты расчетов данного варианта представлены на рисунках 8.20, 8.21.

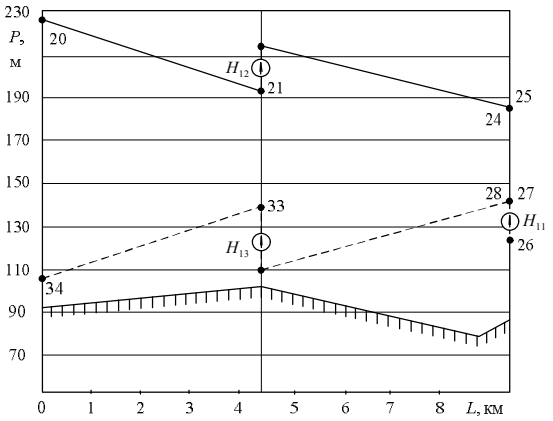


Рисунок 8.20. Распределение давлений (новый вывод ТоТЭЦ – 3-ий вывод ТЭЦ ВАЗ) при размещении насосных H_{12} и H_{13} в точках 21 и 23

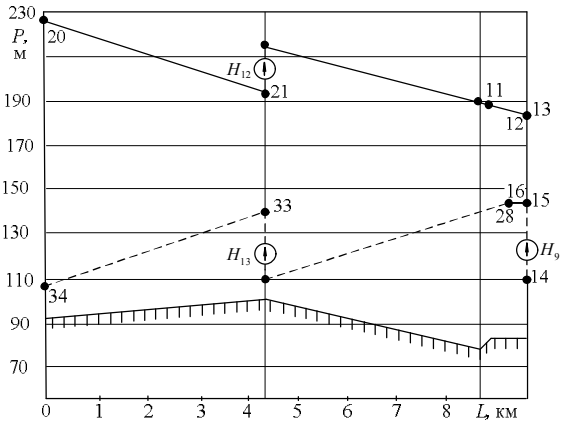


Рисунок 8.21. Распределение давлений (новый вывод ТоТЭЦ – 2-ой вывод ТЭЦ ВАЗ) при размещении насосных H_{12} и H_{13} в точках 21 и 23

Из их анализа следует, что требуемый перепад давлений обеспечивается. Однако здесь появляется проблема недостаточного (3 *м вод. ст.)* давления на входе насоса H_{13} (точка 29 на рисунке 8.17). Данная проблема решается с помощью настройки регулятора РД2 на более высокое давление, но не выше 7 *кгс/см*^{2}, что определено техническими условиями к проекту. Так как РД2 обеспечивает давление 5,7 *кгс/см*^{2}, то, следовательно, это давление можно повысить лишь на 1 *кгс/см*^{2}. Учитывая, что при эксплуатации теплосети сопротивление труб будет возрастать из-за отложений на их внутренних поверхностях, то такое увеличение давления может быть недостаточным. Поэтому можно заключить, что наиболее оптимальными местами расположения насосных H_{12} и H_{13} будут участки, расположенные в середине, между точками 21, 22 и 30, 33.

На модели были также проведены расчеты работы теплосети в случае, когда 4-ый вывод ТоТЭЦ запитывает всю нагрузку $П_3$ и часть нагрузки $П_2$, с использованием регулятора РД1. Регулятор давления РД2 и обратная магистраль 1-го вывода ТЭЦ ВАЗ (на участке 1 – 7 – 8)

здесь отключаются. Анализ расчетов данного варианта показал, что он мало отличается от результатов, полученных при использовании регулятора РД1 (задвижки $В_3$ и $В_4$ закрыты, насосные $Н_{12}$, $Н_{13}$ включены).

Были также выполнены расчеты работы теплосети с установкой регулятора РД3 на обратной магистрали 3-го вывода ТЭЦ ВАЗ. Здесь обратные магистрали 1-го и 2-го тепловыводов ТЭЦ ВАЗ выключались, и за условный нуль принималось давление в обратной магистрали 3-го вывода ТЭЦ ВАЗ.

Расчеты показали, что рассмотренные выше три варианта расположения регулятора давления незначительно отличаются друг от друга. Однако в условиях минимального водоразбора на горячее водоснабжение (ночное время), некоторые участки обратных магистралей трубопроводов могут быть перегруженными. В этом случае наиболее перегруженными (с расходом $G = 8000$ *т/час*) оказывается обратная магистраль 1-го вывода ТЭЦ ВАЗ, диаметр которой 900 *мм*, в отличие от обратных трубопроводов 2-го и 3-го выводов (диаметр 1000 *мм*). Если РД3 находится на обратной магистрали 3-го вывода ТЭЦ ВАЗ, еще более перегруженным ($G = 11713$ *т/час*) оказывается участок теплосети между точками 28 – 29.

В этой ситуации наиболее предпочтительным вариантом является размещение РД1 на обратной магистрали 2-го вывода ТЭЦ ВАЗ (при диаметре трубе 1000 *мм* расход теплоносителя будет около 8000 *т/час*. Данный вариант наиболее универсален и удобен при поэтапной реализации проекта.

Из анализа результатов исследований можно сформулировать следующие выводы:

1. Оптимальным вариантом объединения вновь проектируемого 4-ого тепловывода ТоТЭЦ с теплосетями ТЭЦ ВАЗ является вариант установки перемычки 16 – 28 (см. Рисунок 8.13) между обратными магистралями теплосетей 2-го и 3-го выводов ТЭЦ ВАЗ. Однако расчеты на модели показали, что давления в точках 16, 28, 34 обратных магистралей будут недостаточны для работы теплосетей. С целью увеличения давления в этих точках на обратной магистрали 2-го вывода ТЭЦ ВАЗ (между точками 16 – 17) следует разместить регулятор давления РД1 («до себя»). В этом случае базовым давлением (условным нулем), относительно которого распределяются давления во всех точках теплосети, будет давление, развиваемое подпиточными насосами $Н_4$ ТЭЦ ВАЗ. Главным параметром регулирования, относительно которого настраивается регулятор РД1, является давление на входе насосов $Н_5$ ТоТЭЦ (точка 34). По условиям их безкавитационной работы давление на входе должно находиться в интервале 1,5 – 3 *кгс/см*^{2}.

2. Для обеспечения в точке 34 давления 2,5 *кгс/см*^{2} РД1 необходимо настроить на давление 5,5 *кгс/см*^{2}. Базовое давление на ТЭЦ ВАЗ (точка 19) принимается равным 2,2 *кгс/см*^{2}. Давление 5,5 *кгс/см*^{2} (настройки РД1) достаточно для функционирования понизительных

насосных H_9 и H_{11}. Работа повысительной насосной H_8 не изменяется, т. к она работает в таком же режиме, что и до объединения. Повысительная насосная H_{10} отключается, т. к. требуемое давление в прямой магистрали 3-го вывода ТЭЦ ВАЗ обеспечивают насосы H_5 ТоТЭЦ.

3. Анализ расчетов работе теплосети с перспективной нагрузкой (нагрузка на 3-м тепловыводе ТЭЦ ВАЗ увеличивается с 4575 *т/час* до 5800 *т/час*) показал, что для обеспечения давления на входе насосов H_5 ТоТЭЦ 2,5 *кгс/см*^{2} РД1 необходимо настроить на давление 6,6 *кгс/см*^{2}. При нагрузках, меньше существующих (нагрузка $П_3$ снижается до 3000 *т/час*), давление настройки РД1 для поддержания требуемого давления в точке 34 будет ниже минимально допустимого давления – 1,5 *кгс/см*^{2}. Работа теплосети 3-го тепловывода ТЭЦ ВАЗ из-за вскипания жидкости в обратных трубопроводах будет невозможной.

4. Вариант работы, при котором нагрузка на 4-ом выводе ТоТЭЦ возрастает до 10373 *т/час*, возможен в случае, если ТоТЭЦ полностью покрывает перспективную нагрузку 5800 *т/час* 3-го тепловывода ТЭЦ ВАЗ, нагрузку на 15-ой магистрали (1573 *т/час*), и частично (3000 *т/час*) – нагрузку 2-го тепловывода ТЭЦ ВАЗ. Здесь подпитка на 3-ем тепловыводе ТЭЦ ВАЗ (4-й вывод ТоТЭЦ) составляет 4900 *т/час*. Обратная магистраль 2-го тепловывода ТЭЦ ВАЗ не может обеспечить эту подпитку и поэтому она должна быть соединена перемычкой 7 – 16 с обратной магистралью 1-го вывода. В данном случае обратные магистрали всех трех выводов ТЭЦ ВАЗ будут объединенными.

5. Регулятор давления РД может быть размещен на обратной магистрали любого из трех выводов ТЭЦ ВАЗ. Однако наиболее предпочтительной является установка РД на обратной магистрали 2-го вывода (РД1), что объясняется универсальностью данного варианта (имеется возможность поэтапной реализации проекта, переходя от малых нагрузок к повышенным, а также наблюдается наименьшая перегрузка обратной магистрали при малом водоразборе, например, в ночное время).

6. Общий анализ результатов исследований позволяет сделать вывод о том, что при запитке потребителей от двух источников теплоты, имеющих разные схемы теплоснабжения, возникают проблемы, без решения которых объединенная теплосеть в некоторых режимах работы может оказаться неработоспособной. Среди них наиболее важными являются определение необходимого расположения регуляторов расхода и давления, понизительных и повысительных насосных, а также обеспечение с их помощью заданных значений давлений и расходов теплоносителя в различных точках сети.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Разработана новая концепция математического моделирования реальных (локально - неравновесных) процессов с учётом релаксационных явлений, которую можно распространить на все случаи переноса энергии (теплоты, массы, импульса), основанная на представлении классических формул законов Фурье, Фика, Ньютона, Гука, Ома в модифицированном виде (с учетом пространственно - временной нелокальности реальных процессов). Получены дифференциальные уравнения локально - неравновесных процессов переноса (теплопроводности, теплового воспламенения, динамической термоупругости, колебаний упругих тел, жидкостей и газов), включающие производные более высокого порядка, чем в классических моделях.

2. Разработаны методы получения численно - аналитических решений краевых задач локально - неравновесного теплообмена, основанные на использовании метода разделения переменных и операционных методов, из которых однозначно следует отсутствие скачков температуры в рассматриваемой области и отрицательных значений температуры в обратной тепловой волне. Теоретические исследования позволили сделать заключение о физической невозможности мгновенного задания граничных условий первого рода.

3. Разработан метод математического моделирования нестационарного неравновесного теплообмена при ламинарном течении жидкости в цилиндрической трубе с учётом релаксационных членов для касательного напряжения и градиента скорости в модифицированном законе Ньютона. Из построенного решения следует невозможность мгновенного охлаждения жидкости на стенке – температура жидкости принимает температуру стенки за некоторый конечный интервал времени.

4. Разработан новый подход к математическому моделированию затухающих колебаний упругих тел (стержней, пружин, упругих жидкостей, газов и проч.), основанный на использовании модифицированного закона Гука в виде линейной комбинации производных для напряжения и деформации по времени. Расчеты колебаний стержня с учетом внешней гармонической нагрузки показали, что в резонансных частотах амплитуда, периодически возрастая и убывая, с течением времени устанавливается на некотором постоянном значении. При частотах, незначительно отличающихся от резонансных, возникают бифуркационные флаттерные колебания (биения). При частотах, существенно отличающихся от резонансных, каждая точка стержня участвует в двух колебательных процессах – высокочастотном с малой амплитудой и низкочастотном с большой амплитудой.

5. Сравнение результатов теоретических исследований колебаний стержня на основе модифицированного закона Гука с данными натурного эксперимента показали их качественное совпадение. Экспериментальные исследования подтвердили полученные расчетным путем

результаты, что в определенном временном диапазоне каждая точка стержня участвует в двух колебательных процессах.

6. Сравнение результатов теоретических расчётных данных колебаний упругой жидкости с учётом релаксационных явлений с данными натурного эксперимента показало их удовлетворительное совпадение. Используя экспериментальные данные и полученное точное аналитическое решение, путем решения обратной задачи теплопроводности найдены числовые значения коэффициентов релаксации для жидкости.

7. Разработан метод математического моделирования динамической термоупругости, основанный на представлении закона Гука в виде линейной комбинации производных напряжения и деформации и использовании локально - неравновесной модели теплопереноса. Впервые было показано, что распределение динамических напряжений подчиняется гармонической закономерности, в отличие от классических моделей, описывающих их скачкообразное (ступенчатое) изменение.

8. На основе нахождения фронта теплового возмущения (в предположении конечной скорости распространения теплоты) и дополнительных краевых условий разработан метод получения приближенных решений задач нестационарной теплопроводности, основанный на сведении исходной краевой задачи в частных производных к двум краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений.

9. Разработан численно - аналитический метод получения решений задач теплопроводности на основе уравнения параболического типа (включая уравнения с переменными физическими свойствами среды и нелинейные уравнения), основанный на определении дополнительной искомой функции, введение которой связано с описанием бесконечной скорости распространения теплоты.

10. Разработана математическая модель турбулентного теплового пограничного слоя и впервые найдено ее приближенное аналитическое решение, на основе которого теоретически получены параметры критериального уравнения теплоотдачи, согласующиеся с экспериментальными данными в диапазоне чисел Рейнольдса от 20 000 до 50 000.

11. Разработаны алгоритмы и комплексы программ для реализации предложенных методов расчёта и анализа математических моделей локально – неравновесных процессов, в том числе компьютерная модель объединенной теплосети ТЭЦ Волжского автомобильного завода и Тольяттинской ТЭЦ, позволяющая выполнять оптимальное (энергоэффективное) распределение тепловой нагрузки между источниками теплоты. На разработанные комплексы программ получены 4 свидетельства о регистрации в Роспатенте.

12. На основе разработанных математических моделей решён ряд технически важных задач: выполнено исследование теплового и термонапряженного состояний барабана парового

котла БКЗ-420-140 НГМ в условиях планового (или аварийного) сброса давления пара, приводящего к деформации и разрушению материала барабана в зоне присоединения экранных труб и разработаны рекомендации по проведению безопасных режимов работы; построена компьютерная модель объединенной теплосети ТЭЦ Волжского автомобильного завода и Тольяттинской ТЭЦ, позволяющая определять параметры теплоносителя в любой точке тепловой сети, находить энергосберегающие режимы работы, выполнять реконструкцию с указанием состава и расположения оборудования, проводить идентификацию параметров модели; разработана объединенная компьютерная модель теплосети г. Самара, включающая 5 крупных источников теплоты (Самарская ТЭЦ, Безымянская ТЭЦ, Самарская ГРЭС, Центральная отопительная котельная, Привокзальная отопительная котельная), позволяющая выполнять оптимальное перераспределение тепловой нагрузки между теплоисточниками; проведено исследование температурного состояния многослойных наружных ограждений в нестационарных условиях нагрева (охлаждения), определены режимы работы приточно-вытяжной вентиляции и системы водяного отопления, обеспечивающие экономию топливно – энергетических ресурсов. Экономический эффект, подтвержденный приведенными в приложениях диссертации актами о внедрении, составляет более 15 млн. руб.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания ФГБОУ ВО “СамГТУ” (проект № 1.5551.2017/8.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абишева Л.С.* Математическое моделирование процессов тепломассопереноса и термоупругости на основе параболических и гиперболических уравнений с учетом релаксационных явлений. Диссертация кандидата технических наук. Самара, СамГТУ. 2017. 122 с.

2. *Аверин Б.В.* Математическое моделирование температурных полей и термических напряжений в многослойных радиоукрытиях мощных передающих антенн. Автореф. канд. дисс. М.: Московская академия тонкой химической технологии, 1999. 22 с.

3. *Аверин Б.В., Колотилкин Д.И., Кудинов В.А.* Задача Штурма – Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами // Инженерно-физический журнал. 2000. Т. 73, № 4. С 748 – 753.

4. *Айзен А.М., Редчиц И.С.* Расчет стационарной нелинейной теплопроводности через многослойные стенки с источниками тепла // Теплофизика и теплотехника. Ин-т техн. теплофизики АН УССР. Вып. 27, 1974. С. 133 – 138.

5. *Анкилов А.В., Вельмисов П.А.* Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2009. 220 с.

6. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 297 с.

7. *Абрамов О.М.* Теория и методика системы подачи и распределения воды. М.: Стройиздат, 1972.

8. *Антимонов М.С.* Численно - аналитические методы решения задач и теплопроводности на основе ортогональных методов взвешенных невязок. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. Ульяновск. УлГТУ. 2008.

9. *Бранфилева А.Н.* Разработка математических и компьютерных моделей переноса тепла, массы, импульса для систем тепло – и водоснабжения. Диссертация кандидата технических наук. Москва. МЭИ. 2015. 172 с.

10. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004. 591 с.

11. *Баумейстер К.*, *Хамилл Д.* Гиперболическое уравнение теплопроводности: Решение задачи о полубесконечном теле // Теплопередача. 1969, № 4. С. 112 – 119.

12. *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978. 328 с.

13. *Био М.* Вариационные принципы в теории теплообмена. М.: Энергия, 1975. 208 с.

14. *Болгарский А.В., Мухачев Г.А., Щукин В.К.* Термодинамика и теплопередача. М.: Высшая школа. 1975. 495 с.

15. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М: Мир. 1964. 517 с.

16. *Бровкин Л.А.* К решению дифференциального уравнения теплопроводности // Известия вузов СССР. Энергетика. № 8. 1984. С. 111 – 113.

17. *Булавин П.Е.*, *Кащеев В.М.* Решение неоднородного уравнения теплопроводности для многослойных тел // Инженерно-физический журнал. 1964. Т. 13, № 9.

18. *Бубнов В.А*. замечания к волновым решениям нелинейного уравнения теплопроводности // Инженерно-физический журнал. 1981. Т. 40, № 5. С. 907 – 913.

19. *Ваничев А.П.* Приближенный метод решения задач теплопроводности при переменных константах // Известия АН СССР. ОТН. 1946, № 12. С. 1767 – 1774.

20. *Вельмисов П.А.* Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск. УлГТУ, 2011. 200 с.

21. *Вигак В.М.* О построении решения уравнения теплопроводности для кусочно - однородного тела // Докл. АН УССР, Сер. А, 1980, № 1. С 30.

22. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука. 1979. 320 с.

23. *Власов А.А.* Статистические функции распределения. М.: Наука. 1966.

24. *Волосевич П.П.*, *Леванов Е.И.* Анализ процессов переноса с учетом в среде релаксации теплового потока и объемных источников энергии // Изв. вузов. Математика. 2003. № 1. С. 38 – 44.

25. *Гельфанд И.М., Шилов Е.Г.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз. 1959. 470 с.

26. *Глазунов Ю.Т.* Вариационные методы. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований. 2006. 470 с.

27. *Гринберг Г.А.* О решении обобщенной задачи Стефана о промерзании жидкости, а также родственных задач теплопроводности, диффузии и других // Журнал технической физики. 1967. Т. 37. С. 1598 – 1606.

28. *Гейтвуд Б.В.* Температурные напряжения применительно к самолетам, трубинам и ядерным реакторам ИЛ. М.: 1959.

29. *Григорьев Л.Я., Маньковский О.Н.* Инженерные задачи нестационарного теплообмена. Л.: Энергия. 1968. 83 с.

30. *Гудмен Т.* Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена. Сборник научных трудов. М.: Атомиздат, 1967. С. 41 – 96.

31. *Диткин В.А., Прудников А.В.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1974. 524 с.

32. *Даниловская В.И.* Динамические температурные напряжения в бесконечной плите // Инженерный журнал. 1961. Т. 1, № 4. С. 86 – 94.

33. *Даниловская В.И.* Тепловые волны // Прикладная механика (укр.). 1965. Т. 1. Вып. 11. С. 126 – 129.

34. *Даниловская В.И.*, *Зубчанинова В.Н.* Температурные поля и напряжения, возникающие в пластинке вследствие потока лучистой энергии // Прикладная механика. 1968. Т. 4. Вып. 1. С. 103 – 110.

35. *Дей У.А.* Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1964.

36. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964.

37. *Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1974.*

38. *Ерёмин А.В.* Разработка численно - аналитических методов решения задач гидродинамики и теплообмена на основе параболических и гиперболических уравнений. Дисс. канд. техн. наук. Самара. СамГТУ. 2013.

39. *Ермоленко А.Г., Ермоленко Г.Ю., Макарова И.С.* Решение одной частной задачи термоупругости // Вестник СамГУПС. 2014. № 1 (23). С. 77 – 80.

40. *Ермоленко Г.Ю.* Метод проб для решения статических и динамических задач линейной анизотропной теории упругости // Изв. вузов. Машиностроение. 2003. № 2. С. 3.

41. *Жоу Д.*, *Касас – Баскес Х., Лебон Дж.* Расширенная необратимая термодинамика. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»: Институт компьютерных исследований. 2006. 528 с.

42. *Жуковский В.С.* Основы теплопередачи. М-Л.: Госэнергоиздат. 1960.

43. *Зарубин В.С.* Инженерные методы решения задач теплопроводности. М.: Энергоатомиздат, 1983. 328 с.

44. *Зарубин В.С.* Температурные поля в конструкции летательных аппаратов. М: Машиностроение, 1978. 184 с.

45. *Зельдович Я.Б.*, *Яглом И.М.* Высшая математика для начинающих физиков и химиков. М.: Наука, 1982. 512 с.

46. *Заричняк Ю.П., Муратова Б.Л.* Расчет теплового сопротивления составных конструкций из теплоизоляционных материалов // Механика композиционных материалов. 1979, № 6. С. 1048 – 1053.

47. *Ильченко О.Т.* Температурное поле двухслойной пластины при переменных во времени граничных условиях теплообмена // Инженерно – физический журнал. 1970. Т. 19, № 6. С. 1094 – 1099.

48. *Кабисов К.С., Камалов Т.Ф., Лурье В.А.* Колебания и волновые процессы: Теория. Задачи с решениями. М.: КомКнига, 2010. 360 с.

49. *Канторович Л.В.* Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Прикл. мат. и механ. Т. 6. № 1, 1942. С. 31 – 40.

50. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

51. *Колесников С.В., Кудинов И.В., Ерёмин А.В., Бранфилева А.Н.* Использование компьютерных моделей для проектирования сложных трубопроводных сетей // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. Минск: 2004 (5). С. 72 – 84.

52. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 656 с.

53. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Математические модели теплопроводности и термоупругости. Самара: Самарский государственный технический университет. 2013. 877 с.

54. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. школа, 1985. 480 с.

55. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. школа, 2001. 550 с.

56. *Карташов Э.М.* Интегральные соотношения для аналитических решений гиперболических моделей переноса // Известия РАН. Энергетика. 2011, № 8. С. 185 – 195.

57. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. Киев: Наукова Думка. 1970. 308 с.

58. *Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.* Волновые задачи теории поля и термомеханика. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. – 328 с.

59. *Коган М.Г.* Нестационарная теплопроводность в слоистых средах // Журнал технической физики. 1937. Т. 27, № 3. С. 522 – 531.

60. *Коган М.Г.* Применение методов Галеркина и Канторовича в теории теплопроводности // В сб.: исследование нестационарного тепло - и массообмена, Минск, 1986. С. 42 – 51.

61. *Кудряшов Л.И., Меньших Н.Л.* Приближенные решения нелинейных задач теплопроводности. М.: Машиностроение, 1979. 232 с.

62. *Коздоба Л.А.* Решение нелинейных задач теплопроводности. Киев: Наукова Думка. 1976. 136 с.

63. *Киреев В.И., Войновский А.С.* Численное моделирование газодинамических течений. М.: МАИ, 1991, 391 с.

64. *Кузнецова А.Э.* Разработка численно - аналитических методов решения задач тепломассопереноса и термоупругости для однослойных и многослойных тел. Дисс. канд. техн. наук. Самара. СамГТУ. 2014.

65. *Коляно Ю.М.* Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно - однородных тел // В кн. Математические методы и физико - механическое поле. Киев: Наукова Думка. Вып. 7, 1978. С. 7 – 11.

66. *Котова Е.В.* Математическое моделирование процессов теплопроводности термоупругости с переменными свойствами среды численно - аналитическими методами. Дисс. канд. техн. наук. Самара. СамГТУ. 2013.

67. *Коваленко А.Г., Туева К.С.* Система синтеза и анализа гидравлических сетей. Вычислительный центр АН СССР. 1989. 70 с.

68. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Стефанюк Е.В.* Техническая термодинамика и теплопередача. Учебник для бакалавров. 2-ое издание. Перераб. и доп. М.: Издательство «Юрайт», 2013. 566 с.

69. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Исследование теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 2. С. 301 – 310.

70. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. 280 с.

71. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Получение и анализ точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для плоской стенки // Теплофизика высоких температур. Т. 50, № 1. 2012. С. 118 – 125.

72. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Получение точных аналитических решений гиперболических уравнений движения при разгонном течении Куэтта // Известия АН. Энергетика, № 1. 2012. С. 119 – 133.

73. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Математическая модель локально - неравновесного теплопереноса с учетом пространственно - временно́й нелокальности // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88, № 2. С. 393 – 408.

74. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В.* Аналитический метод решения задач теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий // Инженерно-физический журнал. Т. 82, № 3. 2009. С. 540 – 558.

75. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В.* Задачи теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения // Известия Российской академии наук. Энергетика. № 5, 2008. С. 141 – 157.

76. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Антимонов М.С.* Аналитические решения задач теплообмена при течении жидкости в плоскопараллельных каналах на основе определения фронта температурного возмущения // Инженерно-физический журнал. 2007. Т. 80, № 4. С. 178 – 186.

77. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Исследование распределения давления при гидравлическом ударе в трубопроводе с учетом релаксационных свойств вязкой жидкости // Инженерно - физический журнал. 2014. Т. 87, № 2. С. 336 – 346.

78. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Исследование точного аналитического решения уравнения продольных волн в жидкости с учетом ее релаксационных свойств // Инженерно-физический журнал. 2013. Т. 86, № 5. С. 1116 – 1126.

79. *Кудинов И.В.*, *Кудинов В.А.* Получение точного аналитического решения гиперболического уравнения колебаний струны с учетом релаксационных свойств материалов // Механика твердого тела. № 5, 2014. С. 63 – 75.

80. *Кудинов И.В.*, *Кудинов В.А.* Определение динамических напряжений в пластине на основе точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88, № 2. С. 386 – 393.

81. *Кудинов В.А.*, *Аверин Б.В.*, *Стефанюк Е.В.* Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Высшая школа. 2008. 305 с.

82. *Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В.* Аналитические решения задач теплопроводности с переменным начальным условием на основе определения фронта температурного возмущения // Инженерно-физический журнал. Т. 80., № 3. 2007. С. 27 – 35.

83. *Кудинов В.А.*, *Аверин Б.В.*, *Стефанюк Е.В., Назаренко С.А.* Анализ нелинейной теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения // Теплофизика высоких температур. 2006. Т. 44, № 5. С. 577 – 585 с.

84. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В.* Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. Учеб. пос. для вузов. М.: Высшая школа, 2005. 340 с.

85. *Кудинов И.В.* Использование компьютерной модели для проектирования тепловых сетей // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Технические науки. 2010. № 4 (27). С. 174 – 181.

86. *Кудинов И.В.* Построение компьютерных моделей систем теплоснабжения больших городов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Технические науки. 2011. № 1 (29). С. 212 – 219.

87. *Лаптев А.Г.* Модели пограничного слоя и расчет тепломассообменных процессов. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2007. 500 с.

88. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. Учеб. пос. для вузов 7-ое изд. М.: Дрофа, 2003. 840 с.

89. *Лыков А.В.* Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло - и массообмена // Инженерно-физический журнал. Т. 9, № 3. 1956. С. 287 – 304.

90. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

91. *Лыков А.В.* Тепломассообмен. (Справочник). 2-ое изд., перераб. и доп. М.: Энергия, 1978. 480 с.

92. *Меренков А.П., Хасилев В.Я.* Теория гидравлических цепей. М.: Наука. 1985. 278 с.

93. *Михеев М.А., Михеева И.М.* Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. 343 с.

94. *Назаренко С.А.*. Математическое моделирование теплопроводности с использованием ортогональных методов взвешенных невязок и дополнительных граничных условий. Дисс. канд. физ.-мат. наук. Ульяновск. УлГТУ. 2008.

95. *Образцов И.Ф., Онанов Г.Г.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем. М.: Машиностроение, 1973. 659 с.

96. *Онанов Г.Г.* Уравнения с сингулярными коэффициентами типа дельта - функция и ее производных // Доклады АН СССР. Т. 191, № 5, 1970. С. 997 – 1000.

97. *Петухов Б.С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. 412 с.

98. *Петров Н., Бранное И.* Современные проблемы термодинамики. М.: Мир, 1986.

99. *Подстригач Я.С.*, *Коляно Ю.М.* Обобщенная термомеханика. Киев: Наукова думка, 1976. 312 с.

100. *Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368 с.

101. *Радченко В.П., Ерёмин Ю.А.* Реологическое деформирование и разрушение материалов. М.: Издательство «Машиностроение-1», 2004. 265 с.

102. *Радченко В.П., Саушкин М.Н.* Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. М.: Издательство «Машиностроение-1», 2005. 226 с.

103. *Семерак Ф.В.*, *Борисенко О.И.* Динамическая задача термоупругости для бесконечной пластины // Математические методы и физико - механические поля: Сборник научных трудов. Киев: Наукова думка, 1977. Вып. 6. С. 61 – 63.

104. *Соболев С.Л.* Локально - неравновесные модели процессов переноса // Успехи физических наук. Т. 167, № 10, 1997. С. 1096 – 1106.

105. *Соболев С.Л.* Автоволны в локально - неравновесных средах (средах с памятью). Препринт ОИХФ АН СССР. – Черноголовка, 1989.

106. *Соболев С.Л.* Процессы переноса и бегущие волны в локально - неравновесных системах // Успехи физических наук. 1991. Т. 161, № 3. С. 5 – 29.

107. *Соколов Е.Я.* Теплофикация и тепловые сети. М.: Энергоиздат. 1982. 360 с.

108. *Стефанюк Е.В.* Модельные представления аналитических решений краевых задач теории теплообмена на основе введения дополнительных граничных условий. Дисс. докт. техн. наук. Москва. МАТИ. 2010.

109. *Фёдоров Ф.М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск. Наука. 2000. 220 с.

110. *Темкин А.Г.* Обратные методы теплопроводности. М.: Энергия, 1973. 464 с.

111. *Темников А.В., Игонин В.И., Кудинов В.А.* Приближенные методы решения задач теплопроводности. Куйбышев: Издательство Куйбышевского авиационного института, 1982. 89 с.

112. Теория тепломассообмена. Учебник для вузов. Под ред. А.И. Леонтьева. М.: Высшая школа, 1979. 495 с.

113. *Франк-Каменецкий Д.А.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967. 492 с.

114. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1999. 798 с.

115. *Мержанов А.Г., Дубовицкий Ф.И.* Современное состояние теории теплового взрыва // Успехи химии. 1966. Т. 35. Вып. 4. С. 656 – 682.

116. *Филин А.П.* Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. 1. М: Наука, 1975. 832 с.

117. *Формалёв В.Ф., Ревизников Д.Л.* Численные методы. М.: Физматлит. 2004.

118. *Холмбоу Е.Л., Руло В.Т.* Влияние вязкого трения на распространение сигналов в гидравлических линиях // Теоретические основы инженерных расчетов. 1964, № 3. С. 203 – 209.

119. *Формалев В.Ф.* Тепломассоперенос в анизотропных телах. Обзор // Теплофизика высоких температур. 2001. Т. 39, № 5. С. 810 – 832.

120. *Формалев В.Ф.* Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.: Физматлит. 2015. 280 с.

121. *Цой П.В.* Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса. М: Издательство МЭИ, 2005. 568 с.

122. *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: «Недра», 1975. 296 с.

123. *Цирельман Н.М.* Прямые и обратные задачи тепломассопереноса. М.: Энергоатомиздат, 2005. 392 с.

124. *Цирельман Н.М.* Прямые и обратные задачи нестационарного теплопереноса. Учеб. пос. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа. 2001. 86 с.

125. *Цирельман Н.М.* Гидродинамические характеристики течения в канале // Изв. вузов РФ. Авиац. техн. 2003.№ 4. С. 37 – 40.

126. *Шумаков И.В.* Метод последовательных интервалов в теплометрии нестационарных процессов. М.: Атомиздат. 1979. 216 с.

127. *Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю.* Волновые явления теплопроводности: системно - структурный подход. Изд. 2-ое, доп. – М.: Едиториал УРСС, 2004. 296 с.

128. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 472 с.

129. *Abbott L.F., Wise M.B.* Demention of quantum - mechanical path // Am. J. Phys. 1981. V. 49 (1). 37 p.

130. *Aziz A.* A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 14 (2009). Pp. 1064 – 1068.

131. *Berry M.V.* Quantum fractals in boxes // J. Phys.A: Math.Gen. – 1996. V. 29. Pp. 6617 – 6629.

132. *Casati G., Guarneri I., Maspero G.* Fractal survival probability // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84 (1). 2000 p.

133. *Cattaneo G.* Sur une forme de l'eguation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantance // Comptes Rendus, 1958, Vol. 247, № 4, Pp. 431 – 433.

134. *Eckhardt B.* Irregular scataring // Physica D. 1984. V. Pp. 33 – 89.

135. *Ketzmerick R.* Fractal conduntance in generic chaotic cavities // Phys. Rev. B. 1996. V. 54. 10841 p.

136. *Kroger H.* Fractal geometry in quantum mechanics, field theory and spin system // Phys. Rep. 2000. V. 323 (2). Pp. 818 – 881.

137. *Rashevsky N.* «Mathematical Biophysics». Thrd Ed., Vol. 1, Chapter 1 Dover, New York, 1960.

138. *Vernott P.* Les paradoxe de la theorie continue de l'eguation de la chaleur // Comptes Rendus. 1958, Vol. 246, № 22, Pp. 3154 – 3155.

139. *Wojcik D.*, *Bialynicki-Birula I.*, *Zyczkowski K.* Time evolution of quantum fractals // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. Pp. 5022 – 5026.

140. *Sobolev S.*L. Nonlocal diffusion models: Application to rapid solidification of binary mixtures // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2014. № 71. Pp. 295 – 302.

141. *Sobolev S.*L. Effective temperature in nonequilibrium state with heat flux using discrete variable model // Physics Letters A. 2017. V. 381 . Pp. 2893 – 2897.

142. *Sobolev S.L.* Discrete space-time model for heat conduction: Application to size dependent thermal conductivity in nano-films // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2017. Vol. 108 . Pp. 933 – 939.

143. *Landahl H.D.* An Approximation Method for the Solution of Diffusion and Related Problems // Bulletin of mathematical biophysics, 1953. Vol. 15. Issue 1. Pp. 49–61.

144. *Landahl H.D.* On the spread of information with time and distance // Bulletin of mathematical biophysics, 1953. Vol. 15. Issue 3. Pp. 367 – 381.

145. *Armaghani T.; Maghrebi, M.J.; Chamkha, A. J.; Al-Mudhaf, A. F.* Forced Convection Heat Transfer of Nanofluids in a Channel Filled with Porous Media Under Local Thermal Non-Equilibrium Condition with Three New Models for Absorbed Heat Flux // Journal of Nanofluids, Volume 6, Number 2, April 2017, pp. 362 – 367.

146. *Bazant Z., Jirasek M.* Nonlocsl Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey of Progress // J. Eng. Mech., 2002. Vol. 128, no. 11. Pp. 1119 – 1149.

147. *Körner C., Bergmann H.W.* The physical defects of the hyperbolic heat conduction equation // Appl. Phys. A, 1998. Vol. 67. P. 397.

148. *Ahmadikia H., Rismanian M.* Analytical solution of non—Fourier heat conduction problem on a fin under periodic boundary conditions // Journal of Mechanical Science and Technology. 2011. Vol. 25(11). P. 2919 – 2926.

149. *Majumdar A.* Microscale Heat Conduction in Dielectric Thin Films // J. Heat Transfer 1993. Vol. 115(1). P. 7 – 16.

150. *Joshi A.A., Majumdar A.* Transient ballistic and diffusive phonon heat transport in thin films // Journal of Applied Physics 1993. Vol. 74(1). P. 31 – 39.

151. *Tzou D.Y.* The Generalized Lagging Response in Small—Scale and High—Rate Heating // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1995. Vol. 38. P. 3231 – 3240.

152. *Brorson S.D., Fujimoto J.G., Ippen E.P.* Femtosecond electron heat—transport dynamics in thin gold film // Physical Review Letters. 1987. Vol. 59. P. 1962 – 1965.

153. *Qiu T.Q., Tien C.L.* Size effects on Nonequilibrium Laser Heating of Metal Films // ASME Journal of Heat Transfer. 1993. Vol. 115. P. 842 – 847.

154. *Liu K.C., Chang P.C.* Analysis of dual—phase—lag heat conduction in cylindrical system with a hybrid method // Applied Mathematical Modeling. 2007. Vol. 31. P. 369 – 380.

155. *Joseph D.D., Preziosi L.* Heat Waves // Reviews of Modern Physics. 1989. Vol. 61. P. 41 – 73.

156. *Barletta A., Pulvirenti B.* Hyperbolic thermal waves in a solid cylinder with a non—stationary boundary heat flux // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1998. Vol. 41. Iss. 1. P. 107 – 116.

157. *Al – Nimr M.A., Naji M., Arbaci V.S.* Nonequilibrium Entropy Production Under the Effect of the Dual—Phase—Lag Heat Conduction Model // Journal of Heat Transfer, 2000. Vol. 122. P. 217 – 223.

158. *Xuefang L., Mingtian X., Christofer D.M.* Influence of size effect and boundary conditions on temperature overshooting in nanoscale thermal conduction // Chinese Science Bulletin. 2014. Vol. 59. Iss. 12. P. 1334 – 1339.

159. *Rukolaine S.A.* Unphysical effects of the dual—phase—lag model of heat conduction // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 78. P. 58 – 63.

160. *Fabrizio M., Giorgi C., Morro A.* Modeling of heat conduction via fractional derivatives // Heat and Mass Transfer. 2017. Vol. 53. Iss. 9. P. 2785 – 2797.

161. *Roy Choudhuri S.K.* On a thermoelastic three—phase—lag model // Journal of Thermal Stresses. 2007. Vol. 30. P. 231 – 238.

162. *Miranville A. A., Quintanilla R.* Phase—Field Model Based on a Three—Phase—Lag Heat Conduction // Applied Mathematics & Optimization. 2011. Vol. 63, Issue 1. P. 133 – 150.

163. *Akbarzadeh A.H., Pasini D.* Phase—lag heat conduction in multilayered cellular media with imperfect bonds // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 75. P. 656 – 667.

164. Polyanin A.D., Zhurov A. Exact solutions of linear and non—linear differential—difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // International Journal of Non—Linear Mechanics. 2013. Vol. 54. P. 115 – 126.

165. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V.* Exact solutions and qualitative features of nonlinear hyperbolic reaction—diffusion equations with delay // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2013. Vol. 49, Issue 5. P. 622 – 635.

166. *Kundu B. A., Lee K.* Non—Fourier analysis for transmitting heat in fins with internal heat generation // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2013. Vol. 64. P. 1153 – 1162.

167. *Kundu B., Lee K.* Fourier and non—Fourier heat conduction analysis in the absorber plates of a flat—plate solar collector // Solar Energy. 2012. Vol. 86. P. 3030 – 3039.

168. *Cai R., Gou C., Li H.* Algebraically explicit analytical solutions of unsteady 3—D nonlinear non—Fourier (hyperbolic) heat conduction // International Journal of Thermal Sciences. 2006. Vol. 45. P. 893 – 896.

169. *Fang X.Q., Hu C.* Dynamic effective thermal properties of functionally graded fibrous composites using non—Fourier heat conduction // Computational Materials Science. 2008. Vol. 42. P. 194.

170. *Moosaie A.A., Atefi G.* comparative study on various time integration schemes for heat wave simulation // Computational Mechanics. 2009. Vol. 43. P. 641 – 649.

171. *Shen W.A., Han S.* A Numerical solution of two—dimensional hyperbolic heat conduction with non—linear boundary conditions // Heat and Mass Transfer. 2003. Vol. 39. P. 499 – 507.

172. *Mishra S.C., Sahai H.* Analysis of non—Fourier conduction and radiation in a cylindrical medium using lattice Boltzmann method and finite volume method // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2013. Vol. 61. P. 41 – 55.

173. *Li Ji., Zhengfang Z., Dengying L.* Difference Scheme for Hyperbolic Heat Conduction Equation with Pulsed Heating Boundary // Journal of Thermal Science. 2000. Vol. 9, No. 2. P. 152 – 157.

174. *Yang C.Y.* Estimation of the periodic thermal conditions on the non—Fourier fin problem // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2005. Vol. 48. P. 3506 – 3515.

175. *Espinosa—Paredes G., Espinosa—Martínez E.G.* Fuel rod model based on Non—Fourier heat conduction equation // Annals of Nuclear Energy. 2009. Vol. 36. P. 680 – 693.

176. *Wu F., Gao Q., Zhong W.* Fast precise integration method for hyperbolic heat conduction problems // Applied Mathematics and Mechanics. 2013. Vol. 34, issue 7. P. 791 – 800.

177. *Mao Y., Xu M.* Lattice Boltzmann numerical analysis of heat transfer in nano—scale silicon films induced by ultra—fast laser heating // International Journal of Thermal Sciences. 2015. Vol. 89. P. 210 – 221.

178. *Sasmal A., Mishra S.C.* Analysis of non—Fourier conduction and radiation in a differentially heated 2—D square cavity // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 79. P. 116 – 125.

179. *Mitra K., Kumar S., Vedevarz A., Moallemi M.K.* Experimental Evidence of Hyperbolic Heat Conduction in Processed Meat // J. Heat Transfer. 1995. Vol. 117(3). P. 568 – 573.

180. *Herwig H., Beckert K.* Experimental evidence about controversy concerning Fourier or non—Fourier heat conduction in materials with nonhomogeneus inner structure // Heat and Mass Transfer. 2000. Vol. 36. P. 387 – 392.

181. *V'an P., Czel B., Fulop T., Grof G.Y., Gyenis A., Verhas J.* Experimental aspects of heat conduction beyond fourier // 12th Joint European Thermodynamics Conference Brescia. 2013. P. 519 – 524.

182. *Li L., Zhou L., Yang M.* An Expanded Lattice Boltzmann Method for Dual Phase Lag Model // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 93. P. 834 – 838.

183. *Singh S., Kumar S.* Numerical study on triple layer skin tissue freezing using dual phase lag bio—heat model // International Journal of Thermal Sciences. 2014. Vol. 86. P. 12 – 20.

184. *Mishra S.C., Sahai H.* Analyses of non-Fourier heat conduction in 1-D cylindrical and spherical geometry: an application of the lattice Boltzmann method // Int. J. Heat Mass Transf. 2012. Vol. 55. P. 7015 – 7023.

185. *Atefi G., Talaee M.R.:* Non-Fourier temperature field in a solid homogeneous finite hollow cylinder // Arch. Appl. Mech. 2011. Vol. 81. P. 569 – 583.

186. *Dai W., Han F., Sun Z.* Accurate numerical method for solving dual—phase—lagging equation with temperature jump boundary condition in nano heat conduction // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2013. Vol. 64. P. 966 – 975.

187. *Rahbari I., Mortazavi F., Rahimian M.H.* High order numerical simulation of non—Fourier heat conduction: An application of numerical Laplace transform inversion // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 51. P. 51 – 58.

188. *Shomali Z., Abbassi A.* Investigation of highly non—linear dual—phase—lag model in nanoscale solid argon with temperature—dependent properties // International Journal of Thermal Sciences. 2014. Vol. 83. P. 56 – 67.

189. *Tzou D.Y.* Macro to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior 2nd Edition — West Sussex, UK: John Wiley & Sons Ltd. 2015. 1298 p.

190. *Torabi M., Zhang K.* Multi—dimensional dual—phase—lag heat conduction in cylindrical coordinates: Analytical and numerical solutions // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 78. P. 960 — 966.

Основные публикации автора диссертационной работы

191. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Аналитические методы теплопроводности. Монография. Самара: Самарский государственный архитектурно - строительный университет. 2011. 272 с.

192. *Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Кудинов И.В.* Получение аналитического решения уравнений гидродинамического пограничного слоя на основе введения дополнительных граничных условий // Известия Самарского научного центра Российской Академии наук. Специальный выпуск. «Актуальные вопросы тепло - и массообмена, энергоэффективность, исследование вихревых закрученных потоков». 2008. С. 39 – 46.

193. *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В., Ларгина Е.В.* Построение приближенных аналитических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на основе использования дополнительных граничных условий // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. № 1 (18). 2009. С. 122 – 132.

194. *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В.* Построение аналитических решений уравнений динамического и теплового пограничных слоев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Технические науки. № 2 (24). 2009. С. 205 – 211.

195. *Радченко В.П., Кудинов И.В.* Получение аналитических решений нелинейных задач теплопроводности на основе введения дополнительных граничных условий // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико -математические науки. № 1 (20). 2010. С. 161 – 170.

196. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Об одном методе получения точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности на основе использования ортогональных методов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. № 5 (21). 2010. С. 159 – 170.

197. *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В.* Получение аналитического решения уравнения теплового пограничного слоя на основе введения дополнительных граничных условий // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева. № 1 (21). 2010. С. 174 – 184.

198. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Теоретические основы получения вихревых полей потенциалов // Известия РАН. Энергетика. № 1. 2011. С. 105 − 112.

199. *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В.* Аналитические решения уравнений динамического и теплового пограничного слоя при граничных условиях первого и третьего рода // Проблемы газодинамики и тепломассообмена в аэрокосмических технологиях: Труды XVII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН Леонтьева А.И. Т. 2. Жуковский: ЦАГИ. 2009. С. 139 – 142.

200. *Кудинов И.В., Ерёмин А.В.* Аналитическое решение уравнений теплового пограничного слоя с учетом диссипации энергии // Проблемы тепломассообмена и гидродинамики в энергомашиностроении. Материалы докладов VII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН Алемасова В.Е. Казань: КГТУ, 2010. С. 184 – 187.

201. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Теплообмен при течении Куэтта с учетом диссипации энергии // Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. Энергетика. 2011. № 2. С. 43 – 51.

202. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Математическое моделирование процессов теплообмена и фазовых превращений с учетом абляции // Инженерно-физический журнал. Т. 84. 2011. № 5. С. 1065 – 1074.

203. *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В., Ларгина Е.В.* Обобщенные функции в задачах теплопроводности для многослойных конструкций // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Математическая. 2008. № 2 (8). С. 41 – 56.

204. *Аверин Б.В., Кудинов И.В., Ларгина Е.В., Ерёмин А.В.* Обобщенные функции в нелинейных задачах теплопроводности для многослойных конструкций // Повышение энергоэффективности зданий и сооружений. Межвузовский сборник научных трудов. Самара: СГАСУ. 2009. С. 45 – 52.

205. *Кудинов И.В., Ларгина Е.В., Ерёмин А.В., Будыльников М.Н.* Теплообмен в плоском канале с учетом диссипации энергии // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Математическая. 2009. №2 (10). С. 38 – 47.

206. *Кудинов И.В., Ларгина Е.В., Котов В.В., Биктагирова Е.Ю.* Дополнительные граничные условия в задачах теплопроводности с переменными физическими свойствами среды // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Математическая. 2009. №2 (10). С. 48 – 55.

207. *Кудинов И.В.* Аналитические решения уравнений теплового пограничного слоя с учетом диссипации энергии // Повышение энергоэффективности зданий и сооружений. Межвузовский сборник научных трудов. Самара: СГАСУ. Вып. 5. 2010. С. 146 – 150.

208. *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В., Ларгина Е.В.* Математическое моделирование теплопроводности в многослойных конструкциях на основе теории обобщенных функций // Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов. Сборник трудов Седьмой Международной конференции. Ульяновск: УлГУ. 2009. С. 254.

209. *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В.* Математические модели гидродинамического и теплового пограничных слоев с учетом дополнительных граничных условий // Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов. Сборник трудов Седьмой Международной конференции. Ульяновск: УлГУ. 2009. С. 255.

210. *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В., Ларгина Е.В.* Построение аналитических решений уравнений динамического и теплового пограничных слоев // Математическое моделирование и краевые задачи. Сборник трудов Шестой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. Самара: СамГТУ. 2009. С. 187 – 191.

211. *Кудинов И.В., Ларгина Е.В., Ерёмин А.В., Будыльников М.Н.* Теплообмен в плоском канале с учетом диссипации энергии // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. Самара: СамГТУ. 2010. С. 148 – 152.

212. *Кудинов И.В., Ларгина Е.В., Котов В.В., Биктагирова Е.Ю.* Математическое моделирование теплопроводности при переменных физических свойствах среды // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. Самара: СамГТУ. 2010. С. 163 – 167.

213. *Кудинов И.В.* Получение приближенного аналитического решения задачи Стефана с удалением расплавляемой среды // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. Самара: СамГТУ. 2011. С. 66 – 72.

214. *Вытчиков Ю.С., Кудинов И.В.* Расчет и проектирование водонагревателей. СГАСУ. Самара, 2011. 88 с.

215. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений тепломассопереноса. М.: ИНФРА-М, 2013. 391 с.

216. *Кудинов И.В. Стефанюк Е.В., Ерёмин А.В., Котова Е.В.* Аналитические решения задач теплопроводности и термоупругости с переменными физическими свойствами среды. Самара: СамГТУ, 2013. 132 с.

217. *Кудинов И.В., Стефанюк Е.В.* Теоретические основы теплотехники. Ч. 1. Термодинамика. СГАСУ. Самара, 2013. 172 с.

218. *Кудинов И.В., Стефанюк Е.В.* Теоретические основы теплотехники. Ч. 2. Математическое моделирование процессов теплопроводности в многослойных ограждающих конструкциях. СГАСУ. Самара, 2013. 422 с.

219. *Кудинов И.В. Стефанюк Е.В., Ерёмин А.В., Котова Е.В.* Аналитические решения задач теплопроводности и термоупругости с переменными физическими свойствами среды. Самара: СамГТУ, 2016. 168 с.

220. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Получение точных аналитических решений гиперболических уравнений теплопроводности // Компьютерные технологии в науке, практике и образовании. Труды десятой Всероссийской межвузовской научно-практической конференции. Самара: СамГТУ. 2011. С. 54 – 56.

221. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Кудинов И.В.* Аналитические методы теплопроводности. LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG. 2011. 330 с.

222. *Кудинов И.В., Котова Е.В., Кузнецова А.Э., Тимофеев М.С.* Обобщенные функции в задачах теплопроводности для многослойных конструкций // Межвузовский сборник научных трудов «Повышение энергоэффективности зданий и сооружений». Вып. 7 / СГАСУ. – Самара, 2012, с. 86 – 102.

223. *Кудинов И.В.* Получение и анализ гиперболических уравнений движения при разгонном течении Куэтта // Межвузовский сборник научных трудов «Повышение энергоэффективности зданий и сооружений». Вып. 7 / СГАСУ. – Самара, 2012, с. 112 – 123.

224. *Кудинов В.А., Ерёмин А.В., Кудинов И.В.* Получение аналитического решения задачи Стефана с учетом абляции на основе определения фронта температурного возмущения // Тезисы докладов и сообщений XIV-го Минского международного форума по тепло- и массообмену. 2012. Том 1. Часть 2. С. 702 – 707.

225. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Гиперболические уравнения в теплопроводности и гидродинамике // Тезисы докладов и сообщений XIV-го Минского международного форума по тепло- и массообмену. 2012. Том 1. Часть 2. С. 707 – 711. 2012.

226. *Ерёмин А.В., Кудинов И.В.* Об одном методе решения нестационарных задач теплопроводности // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Технические науки, № 2 (34), Самара, СамГТУ, 2012, с. 158 – 164.

227. *Ерёмин А.В., Будыльников Н.М., Кудинов И.В.* Теплообмен при течении Куэтта с учетом диссипации энергии при граничных условиях третьего рода // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки», № 3 (28) − 2012. Самара, СамГТУ, 2012, с. 136 – 144.

228. *Кудинов В.А., Котова Е.В., Кузнецова А.Э., Кудинов И.В.* Ортогональные методы в задачах теплопроводности с переменными физическими свойствами среды // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. 2012. № 11 – 12. С. 49 – 59.

229. *Кудинов В.А., Ерёмин А.В., Кудинов И.В.* Получение аналитического решения задачи Стефана с учетом абляции на основе определения фронта температурного возмущения // Инженерно - физический журнал. – Минск, 2012. – Т. 85. − № 6. С. 1332 – 1342.

230. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Математическое моделирование затухающих колебаний упругих тел с учетом релаксационных свойств материалов // Материалы третьей международной конференции «Математическая физика и ее приложения». – Самара: СамГТУ, 2012, с. 182 – 183.

231. *Кудинов И.В., Ерёмин А.В., Колесников С.В., Кузнецова А.Э.* Получение точного аналитического решения гиперболического уравнения при гидравлическом ударе в трубопроводе // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки», № 3 (39) − 2013. Самара, СамГТУ, 2013, с. 203 – 210.

232. *Кудинов И.В., Кудинов В.А., Ерёмин А.В.* Исследование распределения скорости течения вязкой жидкости в трубопроводе при гидравлическом ударе // Инженерно - физический журнал, 2013, т. 86, № 2, с. 387 – 393.

233. *Кудинов И.В., Стефанюк Е.В., Кузнецова А.Э., Колесникова А.С.* Краевые задачи с нелинейностью в уравнении и граничном условии // Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием. «Математическое моделирование и краевые задачи» Ч. 2. – Самара: СамГТУ, 2013, с. 43 – 47.

234. *Кудинов И.В., Колесников С.В., Ерёмин А.В., Бранфилева А.Н.* Компьютерные модели сложных многокольцевых разветвленных трубопроводных систем // Теплоэнергетика, 2013, № 11, с. 64 – 69.

235. *Кудинов И.В., Кудинов В.А., Котова Е.В., Кузнецова А.Э.* Обобщенные функции в задачах теплопроводности для многослойных конструкций // Теплофизика высоких температур, 2013, т. 51, № 5, с. 1 – 11.

236. *Кудинов И.В.* Аналитические решения гиперболических уравнений тепломассопереноса и колебаний упругих тел. Самара. Самарский государственный архитектурно - строительный университет, 2013. – 144 с.

237. *Колесников С.В., Кудинов И.В., Ерёмин А.В., Колесникова А.С., Бранфилева А.Н.* Исследование гидравлических режимов работы циркуляционных систем ТЭЦ на компьютерных моделях // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. 2013, № 7 – 8, с. 112 – 122.

238. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Исследование теплопроводности, термоупругости, колебаний жидкостей и упругих тел с учетом конечной скорости распространения потенциалов исследуемых полей // Материалы четвертой международной конференции «Математическая физика и ее приложения». – Самара: СамГТУ, 2014, с. 212 – 213.

239. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Получение аналитических решений задач динамической термоупругости на основе решений гиперболических уравнений теплопроводности // Материалы четвертой международной конференции «Математическая физика и ее приложения». – Самара: СамГТУ, 2014, с. 214 – 215.

240. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Получение и исследование точного аналитического решения релятивстского уравнения Клейна – Гордона – Фока // Материалы четвертой международной конференции «Математическая физика и ее приложения». – Самара: СамГТУ, 2014, с. 216 – 217.

241. *Кудинов И.В. Абишева Л.С., Бранфилева А.Н.* Исследование сложного теплообмена в многослойной цилиндрической конструкции, включающей энергосберегающие газовые прослойки // Вестник СГАСУ. Градостроительство и архитектура: научно-технический журнал / СГАСУ. – Самара, 2014. – Вып. № 3 (16), с. 90 – 95.

242. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Гиперболические уравнения в процессах теплопроводности, термоупругости, гидромеханики и колебаний упругих тел // Тезисы Шестой

Российской национальной конференции по теплообмену. В 3 томах (27 − 31 октября 2014 г., Москва). Т. 3. – М.: Издательский дом МЭИ, 2014, с. 197 − 198.

243. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Динамическая термоупругость на основе аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности // Тезисы Шестой Российской национальной конференции по теплообмену. В 3 томах (27 − 31 октября 2014 г., Москва). Т. 3. – М.: Издательский дом МЭИ, 2014, с. 199 − 200.

244. *Кудинов И.В. Кудинов В.А.* Исследование процесса колебаний упругих тел с учетом релаксационных свойств материалов // Сборник научных трудов I международной научной конференции молодых ученых. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. С. 86 – 90.

245. *Ерёмин А.В., Кудинов И.В., Бранфилева А.Н., Муравьева А.В., Скворцова М.П.* Об одном методе решения задачи теплообмена при течении жидкости в цилиндрическом канале // Прикладная математика и механика: сборник научных трудов. – Ульяновск: УлГТУ, 2014. С. 71 – 77.

246. *Кудинов И.В., Кузнецова А.Э., Абишева Л.С., Бранфилева А.Н.* Математическое моделирование упругих продольных волн в жидкости с учетом ее релаксационных свойств // Прикладная математика и механика: сборник научных трудов. – Ульяновск: УлГТУ, 2014. С. 119 – 133.

247. *Колесников С.В., Кудинов И.В., Ерёмин А.В., Бранфилева А.Н.* Использование компьютерных моделей для проектирования сложных трубопроводных систем // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. – Минск, 2014(5). – С. 72 – 84.

248. *Кудинов И.В., Бранфилева А.Н., Ерёмин А.В., Скворцова М.П.* Моделирование теплообмена в турбулентном пограничном слое с использованием полуэмпирической теории турбулентности // Вестник СамГТУ. Серия Физ.-мат. науки, 2014, выпуск 4 (37), 157 – 169.

249. *Кудинов В.А., Кудинов И.В., Скворцова М.П.* Обобщенные функции и дополнительные граничные условия в задачах теплопроводности для многослойных тел // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2015, т. 55, № 4, с. 129 – 140.

250. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Задачи динамической термоупругости на основе аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности // Теплофизика высоких температур, 2015, т. 53, № 4, с. 551 – 555.

251. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Анализ точного аналитического решения динамической задачи термоупругости // Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы». Ч. 1. – Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2015, с. 115 – 120.

252. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности. М.: Книжный дом «Либроком», 2015. – 280 с.

253. *Кудинов И.В., Кудинов В.А., Ерёмин А.В., Колесников С.В.* Математическое моделирование гидродинамики и теплообмена в движущихся жидкостях. СПб.: Издательство «Лань», 2015. – 208 с.

254. *Ерёмин А.В., Кудинов И.В., Абишева Л.С., Жуков В.В.* Исследование теплообмена при течении жидкости в цилиндрическом канале // Вестник Самарского государственного технического университета.Серия»Технические науки». 2015, № 4 (48), с. 85 – 91.

255. *Ерёмин А.В., Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Математическая модель теплообмена в жидкости с учетом ее релаксационных свойств // Известия РАН. Механика жидкости и газа, 2016, № 1, с. 33 – 44.

256. *Ерёмин А.В., Кудинов В.А. Кудинов И.В.* Неравновесный теплообмен в плоском канале с учетом диссипации энергии // Тезисы докладов и сообщений XV-го Минского международного форума по тепло- и массообмену. 2016. Т. 2. С. 375 – 379.

257. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Математическая модель локально - неравновесной динамической термоупругости // Тезисы докладов и сообщений XV-го Минского международного форума по тепло- и массообмену. 2016. Т. 2. С. 379 – 383.

258. *Кудинов В.А., Ерёмин А.В., Кудинов И.В., Довгялло А.И., Жуков В.В.* Резонансные колебания стержня при воздействии внешней гармонической нагрузки // Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» Ч. 1. - Самара: СамГТУ, 2016, с. 140 – 143.

259. *Кудинов И.В., Кудинов В.А., Абишева Л.С., Федотенкова А.В., Скворцова М.П.* Математическая модель динамической термоупругости с учетом пространственно-временной нелокальности // Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Ч. 1. – Самара: СамГТУ, 2016, с. 143 – 145.

260. *Кудинов И.В., Стефанюк Е.В., Котова Е.В., Максименко Г.Н.* Метод получения аналитических решений задач теплопроводности на основе бесконечной скорости распространения теплоты // Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Ч. 2. - Самара: СамГТУ, 2016, с. 53 – 56.

261. *Кудинов И.В., Кудинов В.А. Котова Е.В.* Аналитические решения задач теплопроводности на основе определения фронта теплового возмущения // Известия вузов. Математика. 2016, № 11, с. 27 – 41.

262. *Ерёмин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В.* Об одном методе решения задач теплообмена при течении жидкостей в плоских каналах // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». 2016, т. 20, № 1, 109 – 120.

263. *Kudinov I.V., Eremin A.V., Branfileva A.N., Kolesnikov S.V.* Determination of Fluid Flow in a Pipeline Based on Solving the Inverse Problem of Heat Transfer // Measurement Techniques, Vol. 59, No. 7, October, 2016, pp. 728 – 733.

264. *Кудинов И.В., Стефанюк Е.В., Скворцова М.П., Котова Е.В., Синяев Г.М.* Об одном методе решения нестационарных задач теплопроводности с несимметричными граничными условиями // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки».2016, т. 20, № 2, 342 – 353.

265. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Методы решения параболических и гиперболических уравнений переноса тепла, массы и импульса. М.: Ленанд, 2016. – 336 с.

266. *Кудинов В.А., Ерёмин А.В., Кудинов И.В., Довгялло А.И.* Локально - неравновесные резонансные колебания стержня // Материалы третьей международной научно-технической конференции «Динамика и виброакустика машин». – Самара: Самарский университет, 2016, с. 17 – 18.

267. *Кудинов В.А., Некрасова С.О., Ерёмин А.В., Кудинов И.В.* Резонансные колебания газа с учетом его релаксационных свойств // Материалы третьей международной научно-технической конференции «Динамика и виброакустика машин». – Самара: Самарский университет, 2016, с. 61 – 63.

268. *Кудинов В.А., Ерёмин А.В., Кудинов И.В.* Математическая модель теплового воспламенения с учетом релаксационных свойств материалов // Тезисы докладов третьей международной конференции «Неизотермические явления и процессы». – Черноголовка, ИСМАН. – 2016, с. 132 – 133.

269. *Кудинов В.А., Ерёмин А.В., Кудинов И.В., Стефанюк Е.В.* Критические условия теплового взрыва в пластине с нелинейным источником теплоты с учетом локальной неравновесности процесса теплообмена // Тезисы докладов третьей международной конференции «Неизотермические явления и процессы». – Черноголовка, ИСМАН. – 2016, с. 134 – 135.

270. *Кудинов И.В., Абишева Л.С., Скворцова М.П., Максименко Г.Н.* Получение решений гиперболических уравнений теплопроводности при граничных условиях третьего рода // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». 2016, № 3 (51), с. 100 – 108.

271. *Кудинов И.В.* Получение точных аналитических решений задач теплопроводности с переменными во времени граничными условиями // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». 2016, № 4 (52), с. 108 – 117.

272. *Чулков А.А., Вытчиков Ю.С., Кудинов И.В.* Исследование динамических характеристик отопительных приборов // Градостроительство и архитектура. 2016, № 4 (25), с. 44 – 48.

273. *Кудинов И.В.* Аналитические методы решения краевых задач математической физики. Самара: Самарский госуд. тех. ун-т. 2017. 219 с.

274. *Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V., Dovgallo A.I.* Rod resonant oscillations considering material relaxation properties // Procedia Engineering 176 (2017). pp. 226 – 236.

275. *Kudinov V.A., Nekrasova S.O., Eremin A.V., Kudinov I.V.* Gas resonant oscillations considering gas relaxation properties // Procedia Engineering 176 (2017). pp. 237 – 245.

276. *Кудинов В.А., Ерёмин А.В., Кузнецова А.Э., Кудинов И.В., Колесников С.В., Котова Е.В., Губарева К.В.* Получение численного решения нестационарной задачи теплопроводности для двухслойной пластины при граничных условиях 3-го рода. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013618415. 2013 г.

277. *Кудинов В.А., Ерёмин А.В., Кузнецова А.Э., Кудинов И.В., Колесников С.В., Котова Е.В., Губарева К.В.* Решение нестационарной задачи теплопроводности для бесконечно - протяженной пластины при граничных условиях 3-го рода. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013616579. 2013 г.

278. *Кудинов В.А., Ерёмин А.В., Кузнецова А.Э., Кудинов И.В., Колесников С.В., Котова Е.В., Губарева К.В.* Получение численных решений нестационарных задач теплопроводности на основе конечно-разностных методов с использованием метода прогонки. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015613327. 2015 г.

279. *Кудинов И.В., Колесников С.В., Ерёмин А.В., Бранфилева А.Н., Абишева Л.С., Скворцова М.П.* Расчет кольцевой гидравлической сети итеративным методом. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015618298. 2015 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Акт о внедрении результатов диссертационной работы при проведении энергетического аудита объектов СамГТУ

«УТВЕРЖДАЮ»
Первый проректор –
проректор по научной работе
Самарского государственного
технического университета
д.т.н., профессор
М.В. Ненашев
июня 2017 г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы «Математическое моделирование локально-неравновесных процессов переноса теплоты, массы, импульса с учетом релаксационных явлений» И.В. Кудинова, представленной на соискание ученой степени доктора технических наук при проведении энергетического аудита объектов Самарского государственного технического университета

На основании Федерального закона от 23 ноября 2009 г. № 261 – ФЗ «Об энергосбережении и о повышении энергетической эффективности и о внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации», Приказа Ректора СамГТУ от 21 февраля 2011 г. № 1/80 «О проведении энергетического обследования объектов университета» в Самарском государственном техническом университете в 2011 – 2012 гг. было проведено энергетическое обследование.

Полученные в диссертационной работе Кудинова И.В. результаты были использованы для исследования процесса изменения температурного состояния наружных ограждений зданий СамГТУ. На основе решения задачи теплопроводности для многослойной плоской стенки, были исследованы температурные поля в наружных ограждениях в условиях прерывистого теплоснабжения, определены энергосберегающие режимы работы системы отопления и приточной вентиляции, даны рекомендации по изменению режима работы автоматической системы управления теплоснабжением зданий с тем, чтобы ограничить количество теплоты, поступающее в помещения зданий СамГТУ в нерабочие дни, а также в ночное время. Рекомендации по снижению потребления тепловой энергии, воды и других топливно-энергетических ресурсов отражены в энергетических паспортах зданий СамГТУ. Выполнение мероприятий, направленных на экономию тепловой энергии, позволило сократить расходы на оплату коммунальных услуг по всем объектам СамГТУ на 5 миллионов рублей в год (см. приложение).

Главный инженер _____ Ю.М. Иванов

Руководитель энергетического
аудита объектов СамГТУ,
зав. кафедрой ТОТиГ,
д.ф.-м.н., профессор _____ В.А. Кудинов

Начальник отдела энергосбережения _____ Л.В. Байгушова

Соотношение потребления энергоресурсов
за 2011 год – 2016 год

Период (год) / Вид энергоресурсов	Ед. изм.	2011 год		2012 год		2013 год		2014 год		2015 год		2016год	
		в натур. ед.изм.	в стоимост. выражении (руб.)	в натур. ед.изм.	в стоимост. выражении (руб.)	в натур. ед.изм.	в стоимост. выражении (руб.)	в натур. ед.изм.	в стоимост. выражении (руб.)	в натур. ед.изм.	в стоимост. выражении (руб.)	в натур. ед.изм.	в стоимост. выражении (руб.)
Тепловая энергия	Гкал	**23380**	24487401,84	**20683**	22526398,52	**22592**	26645494,61	**16478**	21534125,93	19994	29318470,42	19821	30049969,39
Тариф средний	Руб.	1047,36		1089,13		1179,42		1309,29		1466,40		1516,07	

Начальник ОЭС **Л.В. Байгушова**

Без Сызрани

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Акт о внедрении результатов научно – исследовательской работы на Безымянской ТЭЦ

«СОГЛАСОВАНО»
Проректор по научной работе
Самарского государственного
технического университета,
д.т.н., профессор

_____ М.В. Ненашев

«УТВЕРЖДАЮ»
Заместитель
директора-главного инженера
по эксплуатации.
Безымянской ТЭЦ

_____ В.Г. Казаков

АКТ

о внедрении результатов научно – исследовательской работы

Разработка Самарского государственного технического университета, «Компьютерная модель теплосети Безымянской ТЭЦ» выполненная по планам научно – исследовательских и опытно – конструкторских работ промышленных объектов Волжской территориальной генерирующей компании (ТГК – 7), внедрена на Безымянской ТЭЦ с 01.09.2011г.

Назначение внедренной продукции: расчёт тепловых и гидравлических режимов работы теплосети Безымянской ТЭЦ с целью разработки оптимальных режимов работы, снижения затрат энергии на транспорт теплоносителя и повышения надёжности работы оборудования.

Компьютерная модель позволяет определять давления, скорости и расходы в любой точке гидравлической сети, а также находить потери энергии на транспорт теплоносителя и затраты финансовых средств на привод сетевых насосов.

Компьютерная модель позволила рассчитать оптимальные режимы работы теплосети, а также разработать планы реконструкции и построения её новых участков.

Эффективность внедрения:

1. Организационно – технические преимущества: в основе компьютерной модели теплосети лежит математическая теория графов и два закона Кирхгофа. Модель позволяет выполнять расчёты теплосети, как единой целой системы без её разделения на отдельные участки. Расчёт сложных многокольцевых гидравлических систем с помощью каких – либо других в настоящее время не представляются возможным.

2. Социальный эффект – развитие науки и научных исследований.

3. Рассчитанный экономический эффект, полученный от внедрения компьютерной модели, составляет 560 тысяч рублей в год.

От Безымянской ТЭЦ:

Заместитель Директора-главного инженера по эксплуатации

_____ В.Г. Казаков

От Самарского государственного технического университета:

Канд. технических наук, докторант

_____ С.В. Колесников

Канд. технических наук, доцент

_____ И.В. Кудинов

Аспирант, ассистент

_____ А.В. Еремин

Ассистент

_____ Е.В. Котова

Аспирант, ассистент

_____ А.Э. Кузнецова

Аспирант

_____ А.С. Колесникова

Аспирант

_____ С.А. Шабанов

Аспирант

_____ Е.А. Телегина

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.

Акт о внедрении результатов научно – исследовательской работы на Самарской ТЭЦ

«СОГЛАСОВАНО»
Проректор по научной работе
Самарского государственного
технического университета,
д.т.н., профессор

М.В. Ненашев

«УТВЕРЖДАЮ»
Заместитель директора-главного
инженера по эксплуатации
Самарской ТЭЦ

С.В. Шикунов

АКТ

о внедрении результатов научно – исследовательской работы

Разработка Самарского государственного технического университета, «Компьютерная модель теплосети Самарской ТЭЦ» внедрена на Самарской ТЭЦ с 01.02.2012г.

Назначение внедренной продукции: расчёт тепловых и гидравлических режимов работы теплосети Самарской ТЭЦ с целью повышения эффективности и надёжности теплоснабжения.

Компьютерная модель позволяет определять давления, скорости и расходы в любой точке моделируемой системы, выполнять предварительные проекты реконструкции, а также составлять планы построения новых участков трубопроводных систем.

С помощью компьютерной модели теплосети Самарской ТЭЦ обоснована целесообразность применения одного класса насоса с регулируемым приводом на третьем подъёме насосов. Экономия мощности в зависимости от режима работы теплосети может составлять от 500 до 1200 кВт.

Эффективность внедрения:

1. Организационно – технические преимущества: компьютерная модель основана на теории графов и двух законах Кирхгофа. В отличии от известных компьютерных моделей процесс её идентификации выполняется в автоматическом режиме. Точность идентификации модели зависимости от количества экспериментальных данных составляет 3 – 5 %.

2. Социальный эффект – развитие науки и научных исследований.

Экономический эффект от внедрения компьютерной модели составляет 1 млн. 380 тыс. рублей в год.

От Самарской ТЭЦ

Заместитель директора – главного инженера по эксплуатации

_____ С.В. Шикунов

От Самарского государственного технического университета

Канд. технических наук, докторант
_____ С.В. Колесников

Канд. технических наук, доцент
_____ И.В. Кудинов

Аспирант, ассистент
_____ А.В. Еремин

Ассистент
_____ Е.В. Котова

Аспирант
_____ А.С. Колесникова

Аспирант, ассистент
_____ А.Э. Кузнецова

Аспирант
_____ М.С. Тимофеев

Аспирант
_____ С.А. Шабанов

ПРИЛОЖЕНИЕ 4.

Акт о внедрении результатов научно – исследовательской работы на Самарской ТЭЦ, Безымянской ТЭЦ, Самарской ГРЭС

«СОГЛАСОВАНО»
Проректор по научной работе
Самарского государственного
технического университета,
д.т.н., профессор

_____ М.В. Ненашев

«УТВЕРЖДАЮ»
Главный инженер
ТУ по теплоснабжению
в г. Самара

_____ А.В. Филимонов

АКТ

о внедрении результатов научно – исследовательской работы

Разработка Самарского государственного технического университета, «Объединённая компьютерная модель теплосети г. Самара» внедрена в Территориальном управлении по теплоснабжению в г. Самара с 01.12.2011г.

Работа выполнялась по планам научно – исследовательских и опытно – конструкторских работ Волжской территориальной генерирующей компании (ТГК – 7).

Назначение внедренной продукции: объединение в одной компьютерной модели тепловых сетей от следующих источников централизованного теплоснабжения г. Самары: Самарская ТЭЦ, Самарская ГРЭС, Безымянская ТЭЦ, Центральная отопительная котельная, Привокзальная отопительная котельная, функционирующих в настоящее время в раздельном режиме. С помощью модели произведен расчёт тепловых и гидравлических режимов работы объединенной теплосети и определены пути снижения затрат энергии на транспорт теплоносителя и повышения эффективности теплоснабжения потребителей тепловой энергии г. Самара.

Компьютерная модель позволяет выполнять наиболее оптимальное перераспределение тепловой нагрузки между различными тепловыми источниками путём выполнения многовариантных расчётов с целью оптимизации гидравлических потерь при транспортировке теплоносителя.

Эффективность внедрения:

1. Организационно – технические преимущества: Компьютерная модель позволяет выполнять расчёты всей теплосети г. Самара как единой целой гидравлической системы без её разделения по отдельным источникам теплоты. Такой подход позволяет построить оптимальное «дерево» теплосети г. Самары с минимальными затратами энергии на перемещение теплоносителя. Модель особенно полезна при составлении планов реконструкции теплосетей и строительства их новых участков.

2. Социальный эффект – развитие науки и научных исследований.

3. Экономический эффект от внедрения результатов работы составляет 1 млн. 800 тыс. рублей в год.

От «ТУ по теплоснабжению в г. Самара»;

Главный инженер

_____ А.В. Филимонов

От Самарского государственного технического университета

Канд. технических наук, докторант

_____ С.В. Колесников

Канд. технических наук, доцент

_____ И.В. Кудинов

Аспирант, ассистент

_____ А.В. Еремин

Доктор технических наук, доцент

_____ Е.В. Стефанюк

Аспирант

_____ А.Н. Бранфилева

Аспирант

_____ М.С. Тимофеев

Аспирант

_____ С.А. Шабанов

ПРИЛОЖЕНИЕ 5.

Акт о внедрении результатов научно – исследовательской работы в ПАО «Т Плюс»

«СОГЛАСОВАНО»
Первый проректор –
проректор по научной работе
Самарского государственного
технического университета,
д.т.н., профессор

М.В. Пеньшев

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор-главный инженер
Самарской ГРЭС

Д.В. Гаршин

АКТ

о внедрении результатов научно – исследовательской работы

Разработка Самарского государственного технического университета, а именно: «Компьютерная модель теплосети г. Самара, запитываемой от Самарской ГРЭС», а также «Методика расчёта процессов переноса тепла, массы, импульса с учётом локальной неравновесности», внедрены в территориальном управлении по теплоснабжению г. Самара с 10. 06. 2016 г.

Работа выполнялась по планам научно – исследовательских и опытно – конструкторских работ Филиала «Самарский» ПАО «Т Плюс».

Назначение внедрённой продукции:

– возможность оперативного расчёта давлений, скоростей, расходов, потерь напора и проч. при различных нагрузках и составе работающего оборудования теплосети;
– расчёт оптимальных вариантов реконструкции и построения новых участков теплосети;
– расчёт процессов переноса тепла, массы, импульса с учётом пространственно – временной нелокальности.

Эффективность внедрения

1. Организационно – технические преимущества:

– компьютерная модель основана на электрогидравлической аналогии при использовании двух законов Кирхгофа. В отличие от известных моделей разработана система автоматической идентификации, позволяющая по ограниченному объёму экспериментальных данных получать компьютерную модель, практически эквивалентную реальной теплосети;

– методика расчёта локально – неравновесных процессов переноса тепла, массы, импульса позволяют выполнять расчёты с учётом релаксационных свойств среды, включая расчёты отдельных параметров компьютерных моделей.

2. Социальный эффект – развитие науки и научных исследований.

3. Экономический эффект от внедрения составляет 1,1 миллиона рублей.

От «Самарской ГРЭС»:

Директор-главный инженер

_____ Д.В. Гаршин

От Самарского государственного технического университета:

Канд. техн. наук, докторант
_____ С.В. Колесников

Канд. техн. наук, доцент
_____ И.В. Кудинов

Канд. техн. наук, доцент
_____ А.В. Ерёмин

Аспирант
_____ К.А. Малыкова

Аспирант
_____ А.В. Федотенкова

Аспирант
_____ О.Ю. Курганова

Аспирант
_____ В.К. Ткачёв

ПРИЛОЖЕНИЕ 6.

Акт о внедрении результатов научно – исследовательской работы в ОАО «ПТС»

«СОГЛАСОВАНО»
Первый проректор –
проректор по научной работе
Самарского государственного
технического университета,
д.т.н., профессор

_____ М.В. Ненашев

«УТВЕРЖДАЮ»
Исполнительный директор
ОАО «ПТС»

_____ А.И. Лятлов

АКТ

о внедрении результатов научно – исследовательской работы

Разработка Самарского государственного технического университета, а именно: «Объединённая компьютерная модель теплосети г. Самара с автоматической идентификацией параметров», а также «Методика расчёта процессов тепломассопереноса с учётом пространственно – временной нелокальности», внедрены в ОАО «ПТС» с 01. 06. 2016 г.

Работа выполнялась по планам научно – исследовательских и опытно – конструкторских работ Филиала «Самарский» ПАО «Т Плюс».

Назначение внедрённой продукции:

– возможность оперативного расчёта гидравлических и тепловых режимов теплосети при различных нагрузках и составе работающего оборудования;
– расчёт оптимальных вариантов реконструкции теплосети и построения её новых участков;
– расчёт процессов тепломассопереноса с учётом конечной скорости распространения теплоты.

Эффективность внедрения

1. Организационно – технические преимущества:

– компьютерная модель основана на электрогидравлической аналогии с использованием двух законов Кирхгофа. Отличается от известных моделей, возможностью автоматической идентификации параметров, позволяющей по ограниченному объёму экспериментальных данных получать компьютерную модель, практически эквивалентную реальной теплосети;

– методика расчёта локально – неравновесных процессов переноса тепла, массы, импульса позволяет выполнять расчёты с учётом пространственно – временной нелокальности, в том числе, расчёты отдельных параметров (коэффициентов сопротивления трения) компьютерных моделей.

2. Социальный эффект – развитие науки и научных исследований.

3. Экономический эффект от внедрения составляет 1,2 миллиона рублей.

От ОАО «ПТС»

Исполнительный директор

_____ А.И. Дятлов

От Самарского государственного технического университета:

Канд. техн. наук, докторант
_____ С.В. Колесников

Канд. техн. наук, доцент
_____ И.В. Кудинов

Канд. техн. наук, доцент
_____ А.В. Ерёмин

Аспирант
_____ В.В. Жуков

Аспирант
_____ Л.С. Абишева

Аспирант
_____ М.П. Скворцова

Аспирант
_____ Г.Н. Максименко

ПРИЛОЖЕНИЕ 7.

Акт о внедрении результатов научно – исследовательской работы на Самарской ГРЭС

«СОГЛАСОВАНО»
Проректор по научной работе
Самарского государственного
технического университета,
д.т.н., профессор
_____ М.В. Ненашев

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор-главный инженер
ПП Самарская ГРЭС
_____ Д.В. Гаршин

АКТ

о внедрении результатов научно – исследовательской работы

Разработка Самарского государственного технического университета, «Компьютерная модель теплосети Самарской ГРЭС» выполненная по планам научно – исследовательских и опытно – конструкторских работ промышленных объектов Волжской территориальной генерирующей компании (ТГК – 7), внедрена на Самарской ГРЭС с 01.11.2011г.

Назначение внедренной продукции: расчёт тепловых и гидравлических режимов работы теплосети Самарской ГРЭС с целью снижения затрат энергии на транспорт теплоносителя и повышения эффективности теплоснабжения потребителей тепловой энергии г. Самара.

И, в частности, с целью снижения затрат энергии на перемещение теплоносителя обоснована необходимость установки второго подъёма насосов в схеме теплосети Самарской ГРЭС. Это позволит уменьшить единичную мощность насосов, работу которых можно организовать в наиболее экономичной области их характеристик.

С использованием компьютерной модели выполнены многовариантные расчёты реконструкции теплосети Самарской ГРЭС и построения ее новых участков.

Эффективность внедрения:

1. Организационно – технические преимущества: основное преимущество компьютерной модели теплосети Самарской ГРЭС в том, что она позволяет выполнять расчёты гидравлических режимов работы теплосети, рассматривая её как единую целую многокольцевую гидравлическую систему. В основу модели положены математическая теория графов и два закона Кирхгофа, применяемые для расчётов электрических сетей. Результаты работы являются новыми, так как они позволяют выполнять анализ гидравлических режимов работы сложных теплосетей, расчёты которых с помощью каких – либо других в настоящее время не представляются возможным

2. Социальный эффект – развитие науки и научных исследований.

Экономический эффект от внедрения результатов выполненных работ, полученной за счёт организации оптимальных режимов работы теплосети Самарской ГРЭС, составляет 945 тыс. рублей в год.

От Самарской ГРЭС:

Директор-главный инженер

_____ Д.В. Гаршин

От Самарского государственного технического университета:

Канд. технических наук, докторант

_____ С.В. Колесников

Канд. технических наук, доцент

_____ И.В. Кудинов

Доктор технических наук, доцент

_____ Е.В. Стефанюк

Аспирант, ассистент

_____ А.В. Еремин

Ассистент

_____ М.П. Дорожкина

Аспирант

_____ А.С. Колесникова

Аспирант, ассистент

_____ К.В. Губарева

ПРИЛОЖЕНИЕ 8.

Акт о внедрении результатов научно – исследовательской работы на Новокуйбышевской ТЭЦ-1

«СОГЛАСОВАНО»
Проректор по научной работе Самарского государственного технического университета, д.т.н.
_____ М.В. Ненашев

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор Новокуйбышевской ТЭЦ – 1, кандидат технических наук
_____ Ю.С. Панамарев

АКТ

о внедрении результатов научно – исследовательской работы

Разработка Самарского государственного технического университета, а именно «Методика построения компьютерных моделей энергетических процессов и систем» внедрена на Новокуйбышевской ТЭЦ – 1 с 01.11.2010 г.

Назначение внедренной продукции – построение компьютерных моделей теплосетей и циркуляционных систем ТЭЦ с целью расчета процессов гидравлики и температурного состояния потоков теплоносителя и циркуляционной воды.

Построенные для НК ТЭЦ – 1 компьютерные модели теплосети и цирксистемы позволили определить давления, скорости, расходы и потери напора в любой точке моделируемых систем, найти наиболее оптимальные режимы текущей работы, выполнить предварительные проекты реконструкции, а также составить планы построения новых участков трубопроводных систем.

Для исследования процессов теплообмена в основу математических и компьютерных моделей заложено новое научное направление, основывающееся на введении фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий. Применительно к расчетам температурного состояния труб барабанов котлов НК ТЭЦ – 1 внедренная методика позволила определить их температурное состояние как трехслойных конструкций (тепловая изоляция – металлическая стенка трубы – отложения накипи на внутренней поверхности труб) в нестационарном режиме прогрева.

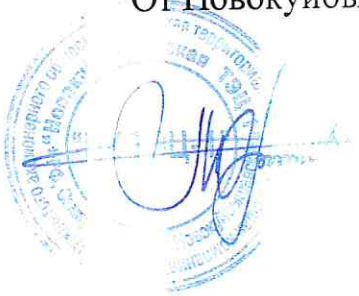
Эффективность внедрения:

1. Организационно – технические преимущества: внедренные методики позволяют выполнять большой комплекс расчетов по определению тепловых и гидравлических режимов работы оборудования, они являются новыми – их отечественные и зарубежные аналоги отсутствуют.

2. Социальный эффект – развитие науки и научных исследований.

3. Экономический эффект – в результате внедрения получен экономический эффект, составляющий 3000000 (Три миллиона) рублей.

От Новокуйбышевской ТЭЦ – 1



От Самарского государственного технического университета
Канд. техн. наук, доцент
_____Е.В. Стефанюк

Аспирант, ассистент
_____И.В. Кудинов

Аспирант, ассистент
_____Е.В. Ларгина

Аспирант, ассистент
_____А.В. Еремин

Аспирант, инженер
_____М.Н. Будыльников

Студент
_____А.С. Колесникова

ПРИЛОЖЕНИЕ 9.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

«Получение численного решения нестационарной задачи теплопроводности для двухслойной пластины при граничных условиях 3-го рода»

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2013618415

«Получение численного решения нестационарной задачи теплопроводности для двухслойной пластины при граничных условиях 3-го рода»

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный технический университет» (RU)***

Авторы: ***см. на обороте***

Заявка № **2013614035**

Дата поступления **14 мая 2013 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***09 сентября 2013 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов

Авторы: ***Кудинов Василий Александрович (RU), Еремин Антон Владимирович (RU), Кузнецова Анастасия Эдуардовна (RU), Кудинов Игорь Васильевич (RU), Колесников Сергей Владимирович (RU), Котова Евгения Валериевна (RU), Губарева Кристина Владимировна (RU)***

ПРИЛОЖЕНИЕ 10.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Решение нестационарной задачи теплопроводности для бесконечно-протяженной пластины при граничных условиях 3-го рода»

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2013616579

«Решение нестационарной задачи теплопроводности для бесконечно-протяженной пластины при граничных условиях 3-го рода»

Правообладатель: ***федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Самарский государственный технический университет" (RU)***

Авторы: ***см. на обороте***

Заявка № **2013614549**

Дата поступления **31 мая 2013 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***11 июля 2013 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов

Авторы: ***Кудинов Василий Александрович (RU), Еремин Антон Владимирович (RU), Кузнецова Анастасия Эдуардовна (RU), Кудинов Игорь Васильевич (RU), Колесников Сергей Владимирович (RU), Котова Евгения Валериевна (RU), Губарева Кристина Владимировна (RU)***

ПРИЛОЖЕНИЕ 11.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

«Получение численных решений нестационарных задач теплопроводности на основе конечно-разностных методов с использованием метода прогонки»

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015613327

«Получение численных решений нестационарных задач теплопроводности на основе конечно-разностных методов с использованием метода прогонки»

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный технический университет» (RU)***

Авторы: ***см. на обороте***

Заявка № **2015610017**
Дата поступления **12 января 2015 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ ***11 марта 2015 г.***

Врио руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий

Авторы: ***Кудинов Василий Александрович (RU), Еремин Антон Владимирович (RU), Кузнецова Анастасия Эдуардовна (RU), Кудинов Игорь Васильевич (RU), Колесников Сергей Владимирович (RU), Котова Евгения Валериевна (RU), Губарева Кристина Владимировна (RU)***

ПРИЛОЖЕНИЕ 12.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

«Расчет кольцевой гидравлической сети итеративным методом»

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015618298

«Расчет кольцевой гидравлической сети итеративным методом»

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Самарский государственный технический университет» (RU)***

Авторы: ***Кудинов Игорь Васильевич (RU), Колесников Сергей Владимирович (RU), Еремин Антон Владимирович (RU), Бранфилева Анастасия Николаевна (RU), Абишева Любовь Сергеевна (RU), Скворцова Марина Петровна (RU)***

Заявка № **2015614848**

Дата поступления **08 июня 2015 г.**

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ ***05 августа 2015 г.***

Врио руководителя Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Л.Л. Кирий