ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Левин Илья Сергеевич

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В УСЛОВИЯХ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК ОБЪЕКТА

Специальность 05.13.01 —
«Системный анализ, управление и обработка информации (промышленность)»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Рапопорт Эдгар Яковлевич

Самара — 2016

Оглавление

Введение

Актуальность проблемы. Классические методы построения алгоритмов и систем управления динамическими объектами разработаны применительно к соответствующим формальным моделям управляемых процессов с полным объемом необходимой информации об их свойствах. В связи с этим возникает актуальная задача синтеза управляющих алгоритмов в практически всегда реализуемых условиях неопределенности характеристик технических объектов, обусловленной прежде всего неточным знанием их параметров и действием неконтролируемых внешних возмущений.

Применение в этих условиях методов построения систем управления (СУ) детерминированными моделями объекта может привести к недопустимому снижению показателей эффективности функционирования СУ или, в отдельных случаях, вообще к потере их работоспособности.

В типичных ситуациях речь идет об ограниченной (интервальной) неопределенности неизвестных величин, вся информация о которых исчерпывается заданными границами диапазона изменения их возможных значений. Указанная проблема является одной из центральных и наиболее сложных в современной теории управления, способы решения которой разрабатываются в настоящее время [1—5]. Известные теоретические результаты приводят к весьма сложному с точки зрения технической реализации алгоритмическому обеспечению предлагаемых стратегий управления неопределенными объектами даже для сравнительно простых модельных постановок соответствующих задач.

Трудности решения указанной проблемы возрастают с увеличением порядка системы дифференциальных уравнений модели объекта и приобретают принципиальный характер применительно к широкому кругу бесконечномерных объектов с распределенными параметрами (ОРП), функции состояния которых характеризуются существенной неравномерностью их распределения в пределах пространственной области, занимаемой объектом [6—8].

Известные способы построения по принципу гарантированного результата программных управлений ансамблем траекторий ОРП, порождаемых всеми допустимыми реализациями неопределенных факторов, приводят к значительным потерям по рассматриваемым критериям качества работы СУ по сравнению с управлением детерминированной моделью объекта.

Представляющая наибольший интерес задача синтеза оптимальных алгоритмов обратных связей в замкнутых СУ ОРП даже в детерминированной постановке решена в настоящее время только применительно к наиболее простым частным случаям.

Решение такой задачи в условиях интервальной неопределенности характеристик ОРП приобретает особую актуальность применительно к целому классу промышленных энерготехнологических объектов ответственного назначения с ярко выраженной пространственной распределенностью управляемых величин.

В соответствии со сказанным самостоятельный интерес приобретает проблема развития прикладной теории управления динамическими объектами в условиях ограниченной неопределенности, позволяющей на основе дополнительной информации о фундаментальных закономерностях конкретной предметной области построить предельно упрощенные в рамках требуемой точности выполнения предъявляемых требований и технически реализуемые структуры замкнутой СУ [6; 9].

В настоящей диссертационной работе предлагаются возможные пути решения этой проблемы для класса технических объектов управления с распределенными параметрами, описываемых уравнениями в частных производных параболического типа, применительно к центральной задаче синтеза оптимальных по быстродействию регуляторов в характерных условиях интервальной неопределенности параметрических характеристик ОРП.

Получаемые результаты общего характера апробируются на примере ответственных объектов технологической теплофизики.

Целью диссертационной работы является разработка методов и алгоритмов синтеза замкнутых систем оптимального по быстродействию управления техническими объектами с распределенными параметрами, обеспечивающих требуемую степень приближения к предельно достижимым по базовым критериям эффективности показателям в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие основные **задачи**:

1. Разработать метод и алгоритмы структурно-параметрического синтеза замкнутой системы оптимального по быстродействию управления техническим объектом с распределенными параметрами в условиях интервальной неопределенности его параметрических характеристик.
2. Разработать метод построения и способы технической реализации идентификатора неопределенных параметров распределенного объекта управления.
3. Разработать процедуры структурно-параметрического синтеза оптимальной по быстродействию системы управления процессом индукционного нагрева металлических полуфабрикатов под обработку давлением с неполным измерением состояния в условиях интервальной неопределенности его параметрических характеристик для исходных моделей объекта различной степени сложности при различных энергетических и технологических ограничениях.
4. Исследовать алгоритмы оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева в замкнутой системе с идентификатором состояния и оценить точность их приближения к детерминированным алгоритмам оптимизации в условиях полного объема информации о параметрах модели объекта.

Научная новизна. В диссертации получены следующие основные результаты, отличающиеся научной новизной:

1. Предложен новый алгоритм идентификации в реальном масштабе времени неопределенных параметрических характеристик объекта, зависимость каждой из которых от наблюдаемых величин представлялся в форме суммы удерживаемых членов её разложения в степенной ряд Тейлора с коэффициентами, которые заранее фиксируются в номинальном режиме работы ОРП по правилам вычисления производных функций, неявно задаваемых решениями исследуемой краевой задачи.
2. Разработаны метод и алгоритмы структурно-параметрического синтеза системы оптимального по быстродействию управления распределенным объектом параболического типа с неполным измерением состояния в условиях интервальной неопределенности параметрических характеристик объекта, обеспечивающей удовлетворительную точность приближения к детерминированным алгоритмам оптимизации и отличающейся

от известных наличием в её структуре предлагаемого идентификатора неопределенных факторов.

3. Разработана не имеющая известных аналогов замкнутая система оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева металлических полуфабрикатов под обработку давлением с неполным измерением состояния и идентификацией в реальном масштабе времени неопределенных характеристик процесса, позволяющая получить требуемую точность приближения к показателям качества детерминированной системы при изменении в широких пределах начальных значений температуры и уровня тепловых потерь.
4. Разработанная методика структурно-параметрического синтеза оптимальной по быстродействию системы управления процессом индукционного нагрева металлических полуфабрикатов под обработку давлением распространена на задачи с фазовым ограничением на максимальную температуру в процессе нагрева.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Алгоритм идентификации в реальном времени неопределенных параметрических характеристик модели объекта с распределенными параметрами по неполному наблюдению состояния объекта.
2. Метод и алгоритмы структурно-параметрического синтеза системы оптимального по быстродействию управления распределенным объектом параболического типа с неполным измерением состояния в условиях интервальной неопределенности его параметрических характеристик.
3. Алгоритмы структурно-параметрического синтеза оптимальной по быстродействию системы управления процессами индукционного нагрева металлических полуфабрикатов перед обработкой давлением в условиях интервальной неопределенности начальных температур и уровня тепловых потерь применительно к моделям объекта различной степени сложности и различным энергетическим и технологическим ограничениям.
4. Результаты анализа температурных режимов индукционного нагрева в замкнутой системе оптимального быстродействия с идентификатором параметрических характеристик объекта управления.

Практическая значимость диссертации. Предложенные в работе методики, математическое и алгоритмическое обеспечение для моделирования, анализа и синтеза оптимальных по быстродействию алгоритмов управления техническими объектами с распределенными параметрами могут быть непосредственно использованы для решения задач оптимизации достаточно широкого круга ответственных энерготехнологических процессов в промышленности, в частности, применительно к процессам индукционного нагрева металлических полуфабрикатов (ПИНМП) перед обработкой давлением.

Применение разработанных методов и алгоритмов управления не полностью определенными моделями ПИНМП обеспечивает существенные технико-экономические преимущества перед типовыми технологиями и известными методами оптимизации ПИНМП по всем основным качественным показателям оптимизируемых процессов, обеспечивая сокращение длительности на интервале выравнивания температур до 70 % и повышение до 40 % точности достижения требуемых конечных температурных кондиций обрабатываемых изделий.

Практическая полезность полученных результатов подтверждается использованием результатов исследований в следующих научно-исследовательских работах:

– проект № 14-08-00446 Российского Фонда фундаментальных исследований по теме «Моделирование и управление объектами с распределёнными параметрами с применением нечёткой логики»;
– проект № 15-08-01347 Российского Фонда фундаментальных исследований по теме «Аналитические методы оценки и алгоритмы реализации программной управляемости детерминированных и не полностью определенных систем с распределенными параметрами»;
– проект №1271 «Теория, вычислительные алгоритмы и технические приложения специальных методов математического моделирования, идентификации и управления в сложноструктурированных системах» в рамках базовой части государственного задания ФГБОУ ВО «СамГТУ», проводимого по заказу Минобрнауки России (2013-2016 г.г.);
– грант DAAD фонда стипендиальных программ имени Леонарда Эйлера в период 2015-2016 г.г. по теме «Синтез замкнутой системы управления процессом индукционного нагрева».

Результаты диссертационных исследований использованы при разработке и проектировании систем автоматического управления процессами индукционного нагрева цилиндрических слитков из алюминиевых сплавов перед последующими операциями горячего прессования на горизонтальных гидравлических прессах в АО «Арконик СМЗ», а также в учебном процессе при подготовке в ФГБОУ ВО «СамГТУ» бакалавров и магистров по направлениям 27.03.04 и 27.04.04 «Управление в технических системах».

Методы исследования. Для решения поставленных в диссертационной работе задач использовались методы математического и компьютерного моделирования, методы теории автоматического управления, оптимального управления системами с распределенными параметрами, теории теплопроводности, теории индукционного нагрева.

Достоверность и обоснованность полученных в диссертационной работе научных результатов, выводов и рекомендаций обеспечивается корректным использованием применяемого математического аппарата, теории управления и методов моделирования систем с распределенными параметрами.

Справедливость выводов относительно достоверности, работоспособности и эффективности предложенных алгоритмов управления подтверждена результатами компьютерного моделирования разработанных структур замкнутых систем автоматического управления, использованием результатов диссертационной работы в проектных разработках АО «Арконик СМЗ» и при выполнении ряда проектов, поддержанных РФФИ, DAAD и Минобрнауки РФ.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались на Всероссийском конкурсе научно-исследовательских работ студентов и аспирантов в области математических наук (Ульяновск, 2012), XVI Международной конференции «Проблемы управления и моделирования в сложных системах» (Самара, 2014), Международной научной конференции студентов и аспирантов МНСК-2014 (Новосибирск, 2014), в рамках международной стажировки по программе DAAD (Ганновер, 2016).

Работа по теме диссертационного исследования была отмечена дипломом Министерства образования и науки Самарской области в рамках областного конкурса «Молодой ученый» в номинации «Аспирант» (Самара, 2014).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 8 печатных изданиях, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 — в трудах конференций.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка используемой литературы и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 144 страницы, включая 36 рисунков и 2 таблицы. Список литературы содержит 127 наименований.

В первой главе рассматриваются основные виды неопределенностей, причины их возникновения, а также методы учета и компенсации этих неопределенностей. Приведено описание методов управления в условиях ограниченной неопределенности, области их применения, основные преимущества и недостатки. Дается содержательная постановка задачи синтеза систем с распределенными параметрами в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта.

Во второй главе описан общий подход к синтезу оптимальной по быстродействию системы управления распределенным объектом в условиях интервальной неопределенности параметрических характеристик объекта. Приведены основные особенности задач управления системами с распределенными параметрами по сравнению с таковыми для систем с сосредоточенными параметрами. В общем виде дается постановка задачи программного оптимального управления ОРП в условиях ограниченной неопределенности. Рассматривается задача синтеза оптимальных по быстродействию систем управления детерминированными моделями ОРП, а полученная в результате решения этой задачи замкнутая структура затем дополняется идентификатором неопределенных факторов в реальном масштабе времени, построенном по предлагаемой в данной главе методике. Дается постановка задачи синтеза оптимальной по быстродействию системы управления ОРП с учетом фазового ограничения и описывается способ решения этой задачи.

Во третьей главе рассматривается представляющая самостоятельный практический интерес задача синтеза системы оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева в условиях интервальной неопределенности параметрических характеристик объекта. Процесс индукционного нагрева металлических полуфабрикатов перед обработкой давлением является типичным объектом с распределенными параметрами. Вначале дается математическая модель указанного объекта управления, затем определяются вид и параметры оптимального программного управления детерминированной моделью распределенного объекта в задаче оптимального по быстродействию программного управления с учетом и без учета фазового ограничения, в качестве которого рассматривается ограничение на максимальную температуру в процессе нагрева. Далее, для указанных случаев, решаются детерминированные задачи синтеза оптимальных по быстродействию регуляторов с неполным измерением состояния. По предложенной в главе 2 методике находятся выражения для линейных приближений алгоритмов идентификации, коэффициентов обратных связей и конечных температурных состояний и производится синтез оптимального регулятора для задачи с учетом и без учета ограничений на максимальную температуру в процессе нагрева. По результатам выполненного анализа замкнутой системы управления с идентификатором по сравнению с системой управления, синтезированной в условиях полной информации об объекте, сделан вывод о точности её функционирования.

В четвертой главе решается задача синтеза системы оптимального по быстродействию управления не полностью определенной нелинейной моделью объекта с распределенными параметрами. В качестве ОРП рассматривается нелинейная двухмерная модель процесса индукционного нагрева металлических заготовок цилиндрической формы, цифровая модель которой разработана во FLUX для заданных исходных данных. Приводятся результаты моделирования замкнутой системы управления с идентификатором и разомкнутой, расчет оптимальных параметров которой произведен в условиях полной информации об объекте на основе которого делается вывод о возможности использования предлагаемой в главе 2 методике для класса нелинейных ОРП.

Глава 1. Проблема управления в условиях ограниченной неопределенности

В современной теории автоматического управления (ТАУ) одним из наиболее значимых направлений её дальнейшего развития является поиск решения проблемы построения систем управления, эффективно функционирующих в типичных для реальных технических объектов условиях ограниченной неопределенности их базовых характеристик. Проблемы построения СУ в этом случае относятся к задачам структурного и алгоритмического характера, требующим развития новых подходов в теории управления. Классифицировать круг проблем автоматизации можно по степени полноты информации об управляемом процессе. С этих позиций все системы управления можно разделить на СУ с полным и неполным объемом априорной информации об объекте управления (ОУ). Под полным объемом понимается такой объем информации, который содержит все без исключения сведения, необходимые для построения СУ, а также известны все характеристики ОУ, в том числе информация о его статических и динамических свойствах в необходимой форме, информация об управляющих воздействиях, информация о других внешних воздействиях. Однако в реальности информация об ОУ всегда неполная.

Процесс разработки СУ, удовлетворяющей поставленным требованиям, как правило, наиболее затруднителен на начальных этапах в виду дефицита априорной информации.

1.1 Виды неопределенностей

Принято выделять несколько видов неопределенностей в СУ [4; 10]:

1. Неточное знание модели объекта, которое выражается в возможности непредсказуемых заранее отклонений расчетных характеристик модели от реализуемых параметров. К этой же категории относят и способность ОУ, в том числе ее отдельных подсистем, находится в иных состояниях, отличных от номинального, где переходы от одного состояния к другому чаще всего непредсказуемы.

2. Возмущающие воздействия, точная информация о которых практически всегда отсутствует в силу реальных особенностей, присущих любым техническим устройствам.
3. Неопределенность целей управления, заключающаяся в необходимости одновременно обеспечивать наилучшие показатели процесса управления по разным критериям.
4. Неопределенности, специально вводимые в формулировку задачи с целью облегчения её решения.

Рассмотрим далее каждый из этих видов подробнее.

1.1.1 Неопределенности моделей объекта

К источникам первого вида неопределенности можно отнести упрощенный характер самой модели ОУ, что обусловливает неполную её адекватность реальным процессам с точки зрения влияния неопределенностей. С другой стороны, модель может описываться достаточно точно соответствующими уравнениями, коэффициенты которых изменяются заранее непредсказуемым образом. То есть эта неопределенность может быть структурной или параметрической. Такой вид неопределенности характерен для ситуаций, когда меняются характеристики рабочих узлов ОУ вследствие износа; варьируются условий эксплуатации; изменяются режимы работы; возникают отказы функциональных узлов и программного обеспечения (ПО) [4].

Структурная неопределенность означает, что структура математической модели является неточно известной. Структурная неопределенность, как правило, выражается в том, что динамический порядок реального объекта оказывается выше порядка его математической модели.

Параметрическая неопределенность означает, что неизвестными остаются постоянные (неизменные во времени) параметры математической модели. Значения параметров, используемые при синтезе алгоритмов управления, называют номинальными. В практических случаях реальные значения параметров могут существенно отличаться от номинальных. Чаще всего такая неопределенность ограничивается интервалом, заданным максимально и минимально возможными значениями параметра, в пределах которого этот параметр может изменяться. В ситуациях, когда исходная информация позволяет сформировать статистические характеристики, соответствующие изменению параметра в рамках заданного интервала, можно использовать плотность усеченного в этом интервале распределения значений неопределенного параметра, в частности, нормальный закон распределения [4].

Не менее важную роль играют детерминированные подходы к учету неопределенностей в виду того, что при разработке СУ чаще всего необходимо ориентироваться на задание допустимого поведения системы во всей совокупности состояний.

Для моделей, в которых меняются параметры ОУ в широких диапазонах, может применяться теория чувствительности, основанная на гипотезе малости вариаций параметров относительно их номинальных значений и с помощью функций чувствительности позволяющая оценивать влияние параметрической неопределенности на траектории системы и показатели их качества. Другой подход заключается в использовании аппарата теории интервальных систем, допускающей гипотезу произвольной неопределенности параметров, принадлежащих прямоугольному параллелепипеду в пространстве параметров, и решающей задачу поиска условий устойчивости Гурвица для значений вектора параметров, соответствующих угловым точкам параллелепипеда [11]. Еще одним способом борьбы с такой неопределенностью является подход, при котором можно считать, что имеем дело не с одним объектом с ограниченной неопределенностью его параметров, а с множеством объектов, но детерминированных, каждый из которых имеет свои определененные значения параметров в известном диапазоне их возможного изменения, а все вместе они исчерпывают все возможные варианты реализации этих неопределенных параметров. Такая задача в теории управления получила название управление ансамблем траекторий.

1.1.2 Возмущающие воздействия

Возмущающие воздействия (ВВ), относящиеся ко второму типу неопределенностей в СУ, в виде помех или возмущений, вызванных непредсказуемыми флуктуациями параметров внешней среды, можно разделить на 2 больших класса.

1.1.2.1 Возмущения, задаваемые их стохастическими оценками

К первому классу относят факторы, для которых известны статистические характеристики ВВ. Это дает возможность впоследствии оценить поведение системы, используя методы статистической динамики. Применительно к статистической неопределенности, когда необходимо учитывать стохастические сигнальные возмущения, используются положения теории непрерывной и цифровой фильтрации [12]. Успешное применение методов данной теории зависит от объема и качества исходной информации, а также от принципиальной применимости соответствующей модели в той или ситуации. Статистические модели позволяют реализовать байесовский подход, ориентированный на последовательное снятие неопределенностей по мере накопления знаний об ОУ и СУ, что позволяет сгладить последствия ошибочных значений априорных вероятностей выдвинутых гипотез путем увеличения числа выполняемых шагов с пересчетом текущих вероятностных характеристик [13]. Статистический подход является наиболее традиционным в задачах учета возможных отказов аппаратуры и ПО [4].

1.1.2.2 Множественные возмущения, задаваемые границами возможных изменений

Второй класс возмущающих воздействий объединяет неопределенности с неизвестными статистическими характеристиками. Свободой от недостатка или низкого качества исходных статистических данных обладает теория нечетких множеств [14]. Нечеткое управление на базе экспертных знаний позволяет получить соответствующие алгоритмы управления. Методы данной теории позволяют получить нечеткие модели управляемого процесса с использованием импликаций, описывающих возможные состояния системы [15].

Существует подкласс задач, решаемых на основе интервального подхода, предполагающий использование вероятностных моделей и теории нечетких множеств. Рассмотрим пример, показанный в [4]. Если на базе интервальных ограничений на параметры ОУ α_i, $i = \overline{1..k}$ вида

$$\alpha_{i\,\min} \le \alpha_i \le \alpha_{i\,\max},$$

где $\alpha_{i\,\min}$, $\alpha_{i\,\max}$ - соответственно нижняя и верхняя границы величины α_i, сформирован k-мерный параллелепипед A возможных значений указанных параметров, то вопрос о наличии определенных свойств системы с параметрами из A может быть поставлен следующим образом.

Обозначим B - множество параметров, при которых системы обладает требуемым свойством. Найдем

$$C = A \cap B.$$

Пусть имеется заданная совокупность A^+ сочетаний значений параметров, для которых разработчик убедился, что

$$A^+ \cap B \neq \varnothing$$

(обычно это сочетания границ интервалов).

Известны также значения переменных α_i, $i = \{\overline{1,k}\}$, объединенные в множество A^-, для которых

$$A^- \cap B \neq \varnothing\,.$$

Другими словами, функция принадлежности $\mu(\alpha)$, где α - набор величин $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$, равна

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \in A^+, \\ 0, & \text{если } \alpha \in A^-, \\ ?, & \text{если } \alpha \in \big(A \setminus \big(A^+ \cup A^-\big)\big)\,. \end{cases}$$

Таким образом, задача анализа системы с интервальной параметрической неопределенностью может рассматриваться как проблема оценки $\mu(\alpha)$ при $\alpha \in (A \setminus (A^+ \cup A^-))$.

1.1.3 Неопределенности целей

Во всех задачах управления в явной или неявной форме задается критерий качества управления, который можно рассматривать в качестве целей управления. Очень часто, в особенности в инженерных задачах, таких критериев предъявляется одновременно несколько, то есть целей управления может быть много. Например, желательно иметь предельное быстродействие и одновременно высокие оценки качества переходных процессов (минимальную динамическую ошибку, минимальные колебательные процессы и прочее):

$$\begin{cases} I_1 \to \min\left(\max f_1(\cdot)\right), \\ I_2 \to \min\left(\max f_2(\cdot)\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ I_k \to \min\left(\max f_k(\cdot)\right). \end{cases}$$

Отсюда получаем противоречивые требования, когда улучшение одного показателя приводит к ухудшению другого и наоборот. Из-за противоречивости оценок от 1 до k такая задача, как правило, не разрешима. Создается неопределенная ситуация, поскольку каждую задачу решить в отдельности нельзя. Такая задача называется задачей многокритериальной или векторной оптимизации [4]. Для решения подобных задач чаще всего используются способы, сводящие эту задачу к задаче с одним критерием компромиссного характера на базе всех заданных с учетом выбираемой различными методами степени значимости каждого из них. Рассмотрим несколько таких возможных способов [9].

Простейшим способом является способ линейной свертки критериев:

$$I_{\sum} = \sum_{i=1}^{k} C_i I_i,$$

где C_i – весовые коэффициенты, выбираемые в соответствии с установленными проектировщиком степенями значимости каждого критерия, либо эти величины в приведении критериев к стоимостному виду представляет собой объективно устанавливаемую удельную стоимость каждого критерия.

В качестве еще одного способа используется минимаксный подход. В этом случае все критерии приводятся к одной операции - min или max, тогда

$$I_{\sum} = \max_{i \in \{\overline{1;k}\}} I_i \to \min .$$

Также можно принять один из совокупных критериев I_j в качестве главного и решить задачу оптимизации:

$$I_j \to \min_{j \in \{\overline{1;k}\}}$$

с ограничениями, в роли которых учитываются другие критерии:

$$I_{i\,\min} \leq I_i \leq I_{i\,\max}, i = 1{,}2, \ldots,\ j-1,\ j+1, \ldots,\ k,$$

где $I_{i\,\min}$ и $I_{i\,\max}$ определяются заранее по заданным техническим требованиям.

Таким образом неопределенность целей ликвидируется при переходе к задаче с одним определенным видом критерия качества управления, полученному в результате применения одного из известных способов.

1.1.4 Неопределенности, специально вводимые в формулировку задачи

Этот вид неопределенности вводится с целью облегчения решения задач управления в тех случаях, когда решение задачи с полной информацией об определенных характеристиках процесса управления оказывается слишком трудным или невозможным, а ее неточное решение может быть получено сравнительно просто [16]. В таких случаях эта «неточность» может рассматриваться как допустимая степень неопределенности характеристик процесса. Часто, такого рода неточности вытекают из реальных требований к системе.

Наиболее характерным примером такого типа неопределенности является требование к конечному состоянию объекта в конце процесса управления. В особенности это касается задач оптимального управления объектами с распределенными параметрами [7].

Если требуется, чтобы выход ОРП $Q(x,t_1)$ в конце оптимального процесса $t = t_1$ в точности совпадал с его заранее заданным пространственным распределением $Q^{**}(x)$, то такая двухточечная задача рассматривается в условиях фиксации начала и конца фазовой траектории движения объекта в соответствующем бесконечномерном для систем с распределенными параметрами (СРП) фазовом пространстве.

Решение двухточечных задач оптимизации сопряжено с рядом существенных затруднений, увеличивающихся с ростом порядка дифференциальных уравнений, моделирующих ОУ [7; 8; 17; 18]. Проблема точного попадания в заданную конечную точку при управлении бесконечномерными СРП становится принципиально более сложной. Затруднения возникают либо по причине возможной неуправляемости объекта относительно состояния $Q^{**}(x)$, либо из-за технически неосуществимых алгоритмов управления. Стандартные процедуры принципа максимума или метода моментов [7], в принципе не позволяют фактически получить точные решения таких задач при бесконечном числе переменных.

Эффективным способом преодоления указанного затруднения состоит в отказе от традиционной схемы с фиксированным концом фазовой траектории на стадии постановки задачи. В любой практической задаче существуют ненулевые допуски на отклонение показателей от конечного значения, то есть равенство $Q(x,t_1) = Q^{**}(x)$ допускается выполнить с некоторой погрешностью. Это означает, что достаточно задать некоторое допустимое множество конечных состояний $Q(x,t_1) \in G$ в окрестности точки $Q^{**}(x)$.

С формальной точки зрения при этом осуществляется переход к задаче с подвижным правым концом траектории. В этом случае, задача оптимального управления резко упрощается и имеет технически реализуемые и, как правило, простые алгоритмически точные решения [6; 7; 16].

Формальное описание целевого множества определяется выбором оценок качества приближения к номинальной точке. К числу наиболее распространенных относят величину ошибки интегрального квадратичного приближения, равную $\beta_{\text{ск}}$ и тогда множество *G* задается неравенством [19]:

$$\beta_{\text{ск}} = \int_{x_0}^{x_1} \left(Q(x,t_1) - Q^{**}(x)\right)^2 x^n dx,\ n = 0,1,2\,,$$

где x_0, x_1 - начальная и конечная пространственные координаты *x*.

Однако минимизация $\beta_{\text{ск}}$ не исключает недопустимо больших локальных отклонений конечного состояния оптимального процесса от заданного. Поэтому на практике чаще всего точность приближения $Q(x,t_1)$ к $Q^{**}(x)$ оценивается по заданной величине ε ошибки равномерного приближения к заданному состоянию [6; 7]:

$$\max_{x \in [x_0,x_1]} |Q(x,t_1) - Q^{**}(x)| \leq \varepsilon.$$

Таким образом, переход от жесткой фиксации требуемого конечного состояния объекта к заданию целевых множеств, образуемых практически всегда существующими допусками на возможные отклонения от этого состояния, позволяет во многих случаях найти точные, технически реализуемые решения соответствующих задач оптимизации.

1.2 Методы управления в условиях ограниченной неопределенности

В настоящее время разработан ряд различных методов построения алгоритмов управления техническими системами в условиях неполной информации об управляемом процессе. Ниже приводится краткая характеристика основных из этих подходов.

1.2.1 Робастные системы управления

Робастные системы управления относятся к классу систем с ограниченной степенью неполноты информации об объекте. В них используются такие алгоритмы управления, которые не требуют своей коррекции по ходу процесса (одинаковый алгоритм управления), они призваны обеспечить удовлетворительное качество процесса управления при любых возможных вариациях характеристик объекта в ограниченных пределах. В таких СУ используется фиксируемый заранее алгоритм управления, который должен обеспечить требуемые, достижимые показатели качества работы в условиях реализации неопределенных факторов, изменяющихся в некотором заранее известном и ограниченном диапазоне их возможных значений. К преимуществам подхода относят принципиально более простую структуру управления, не требующую применения идентификаторов, адаптеров, устройств автоматического изменения алгоритма управления, то есть система одноконтурного вида. Недостатками являются возникающие проблемы робастной устойчивости и качества [3] и снижение показателей работы системы по выбираемым показателям её эффективности по сравнению с идеализированным вариантом наличия полного объема информации об объекте.

Суть задачи сводится к следующему: если объект обладает неопределенными характеристиками и допускается, что они произвольно могут меняться в заданном ограниченном диапазоне, то при фиксированном законе управления, получается, что регулятор должен выбираться в задаче управления бесконечным множеством объектов, порождаемых всеми возможными комбинациями значений неопределенных факторов.

Неопределенности характеристик объекта могут принимать различные формы, в числе которых:

1. Интервальные параметрические неопределенности;
2. Структурные неопределенности.

В первом случае объекты, структура которых может быть известна и задана, например, в виде передаточной функции, однако параметры этой передаточной функции могут принимать любые значения в заданных ограниченных пределах; например, при описании модели объекта простым апериодическим звеном будем иметь:

$$W_{obj} = \frac{k}{(Tp+1)};$$

$$k_{\min} \leq k \leq k_{\max};\ T_{\min} \leq T \leq T_{\max}.$$

Любой фиксированной комбинации значений k и T в допустимых пределах их изменения отвечает своя модель объекта, а ей отвечает своя траектория движения. Все множество траекторий движения при регуляторе с фиксированным значением параметров его настроек получило название ансамбля траекторий, а задача - задачей управления ансамблем траекторий.

Во втором случае, неизвестна структура объекта, а структурные неопределенности записываются в аддитивной или мультипликативной форме. В простейшем варианте, применительно к одномерным объектам, если амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) объекта $W_{obj}(j\omega)$ не полностью известна по своей структуре, то она может быть представлена в виде:

– $W_{obj}(j\omega) = W^0_{obj}(j\omega) + \eta_1(j\omega)$ - аддитивная неопределенность;

– $W_{obj}(j\omega) = W^0_{obj}(j\omega)\eta_2(j\omega)$ - мультипликативная неопределенность.

Здесь W^0_{obj} - заданная АФХ с точно известной структурой и параметрами, а η_1 и η_2 - неизвестные дополнения, учитывающие структурные неопределенности объекта с интервальными ограничениями на их амплитудно-частотные характеристики

$$|\eta_1(j\omega)| \leq f_1(\omega);\ |\eta_2(j\omega)| \leq f_2(\omega),$$

где f_1 и f_2 - заданные функции частоты.

В итоге вновь возникает задача управления ансамблем траекторий.

Робастные системы управления могут строиться применительно к различным постановкам задач. Это могут быть классические задачи построения систем стабилизации, когда главное требование заключается в обеспечении устойчивости и качества процесса управления. При этом возникают центральные проблемы робастной устойчивости и робастного качества, подразумевая, что указанные свойства будут иметь место для всех допустимых сочетаний неопределенных параметров из соответствующих интервалов. Применительно к задачам оптимального управления ансамблем траекторий могут быть использованы методы построения игровых систем управления, H^∞-оптимизации, минимаксной оптимизации [3; 16; 20].

1.2.1.1 Устойчивость и качество в робастных СУ

Как отмечалось ранее, ключевым понятием является устойчивость систем управления.

Непрерывная система, заданная в пространстве состояний

$$\dot{x} = Ax + u, \tag{1.1}$$

где A - матрица $n \times n$, называется устойчивой, если $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ для любого $x(0)$ при $u \equiv 0$. При наличии внешнего входа u система называется устойчивой, если $x(t)$ остается ограниченным при любом ограниченном входе $u(t)$ (BIBO-устойчивость). При этом для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ_i матрицы A лежали в левой полуплоскости: $Re\lambda_i < 0, i = \overline{1,n}$, т.е. матрица А гурвицева.

Устойчивость линейной системы эквивалентна существованию квадратичной функции Ляпунова, которая положительна и монотонно убывает на решениях $x(t)$ системы.

Проверка устойчивости в этом случае выполняется на основе критерия Михайлова по поведению годографа, либо алгоритму Рауса, основанному на понижении степени полинома [3; 4].

Об устойчивости замкнутой СУ можно судить по поведению годографа передаточной функции разомкнутой системы по критерию Найквиста.

Для многомерных систем критерии устойчивости формулируются с помощью собственных значений матрицы состояний. Для устойчивых систем представляет интерес более точное описание всех состояний, в которые может быть переведена система с помощью ограниченных управлений [3; 4].

Современное состояние проблемы анализа и синтеза СУ в условиях интервальной неопределенности параметров объекта произведено в [4]. Здесь выделены следующие основные сформировавшиеся направления:

– Анализ и синтез с использованием интервальных характеристических полиномов [3; 4; 21];
– Анализ и синтез в частотной области [3; 4];
– Исследование на основе интервальных моделей в пространстве состояний, сопряженное с рядом серьезных трудностей, в числе которых отсутствие сформулированных необходимых и достаточных условий робастной устойчивости [22; 23], за исключением частного случая - «симметричных» матриц [24];
– Решение задач оптимизации для систем с параметрической неопределенностью, рассмотренные в ряде работ [25; 26].

Рассмотрим первое направление. Для робастной устойчивости нулевого решения описанной ранее непрерывной системы (1.1) при $u \equiv 0$ считается, что характеристический полином

$$B(p) = p^n + b_1 p^{n-1} + \cdots + b_n,$$

где p - переменная Лапласа, при любых сочетаниях значений коэффициентов $b_i,\ b_{i\,\min} < b_i < b_{i\,\max},\ i = \overline{1,n}$, ограниченных своими интервалами, имел корни только в левой половине комплексной плоскости. В этом случае $B(p)$ относят к классу интервальных характеристических полиномов [4].

Фундаментальные результаты, определяющие необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости получены Харитоновым [27].

Еще одной проблемой, связанной с робастной устойчивостью, является оценка запасов устойчивости с точки зрения определения допустимых пределов варьирования параметров [28; 29].

Для определения уровня качества управления вводится понятие относительной устойчивости. Линейная динамическая система считается относительно устойчивой, если все корни характеристического полинома этой системы локализованы в заданной области комплексной области, которая, в частном случае, может быть замкнутой и может быть распространена на случай систем с интервальной неопределенностью характеристик объекта, подразумевая разнообразные варианты расположения корней полинома при различных сочетаниях варьируемых параметров в пределах заданных интервалов. При этом качество робастного управления будет определятся принадлежностью полюсов системы некоторой желаемой области.

Процедуры решения указанной задачи восходят к классическим методам, таким как метод корневого годографа и алгоритм построения областей устойчивости для систем с большим коэффициентом усиления, а близкую к современной трактовку вопроса и развитие получила в работах [30; 31]. Работа [32], в которой предлагается алгоритм, основанный на теории линейных матричных уравнений, способствовал продвижению в определении условий, при которых корни интервальных характеристических полиномов будут лежать в наперед заданной области. В интервальной постановке задача об относительной устойчивости впервые включена в работу [33], а свое развитие в работе [34]. Приближенное нахождение границ области, в которой гарантировано располагаются корни интервального характеристического полинома, рассмотрено в работах [35; 36]. Построение области гарантированного расположения корней полинома опирается на информацию о номинальных значениях его коэффициентов и данные относительно области их изменения в пространстве указанных переменных. В [4] предлагаются два подхода, позволяющие устранить недостаток ранее разработанных методов, заключающийся в возрастании погрешности оценки свойств СУ при большом количестве операций стандартной интервальной арифметики и игнорировании взаимосвязанности значений чисел внутри заданных интервалов. Первый поход заключается в переходе к операциям нестандартной интервальной арифметики [37]. Второй подход состоит в минимальном использовании операций над интервалами на этапах анализа и синтеза, предусматривающих большие объемы вычислений [38; 39].

В [4] к основным направлениям исследований в области анализа и синтеза СУ с интервальной неопределенностью в частотной области относят:

– Определение робастности известных методов анализа и синтеза СУ в частотной области;
– Адаптация известных подходов к различным моделям неопределенности и разработка новых [40; 41].

В [42] сформулирован аналог критерия устойчивости Михайлова применительно к СУ с интервальной параметрической моделью неопределенности, однако переход от характеристик разомкнутых СУ к характеристикам замкнутых приводит к «загрублению» выводов о свойствах системы. В [29; 43] дано обобщение теоремы Харитонова на случай характеристического уравнения замкнутой СУ с интервальной неопределенностью характеристик объекта, однако анализ устойчивости требует значительного объема вычислений. В [43] предложена частотная функция, обеспечивающая робастную устойчивость замкнутой СУ, определение которой также сопряжено с большим объемом вычислений. В [29] рассмотрены параметрическая и непараметрическая модели влияния неопределенных факторов, а также методы определения устойчивости, требующие гораздо меньшего объема вычислений.

Недостатком методов, ориентированных на анализ частотных характеристик системы с неопределенными параметрами, является загрубление конечного результата при применении правил интервальной арифметики [4]. Альтернативой являются методы, позволяющие определять устойчивость и динамические характеристики замкнутой СУ с интервальной неопределенностью по передаточной функции или АФХ разомкнутой системы.

Для моделей со структурной неопределенностью предложен модифицированный робастный критерий Найквиста [44], а в работе [45] - частотные методы синтеза робастных регуляторов, такие как метод многомерных обратных частотных характеристик и метод характеристического годографа.

В работах [46; 47] описан обобщенный многомерный метод Найквиста, применимый к широкому классу объектов и оценены методы определения его робастности по отношению к аддитивным возмущениям. В [48; 49] сформулирован частотный графоаналитический критерий робастной устойчивости применительно к параметрической неопределенности и исследован вопрос о робастной устойчивости замкнутой системы, однако критерий сложен в использовании. В [4] определены пути уточнения методик синтеза СУ с интервальной параметрической неопределенностью.

Анализ качества управления с использованием интервальных частотных характеристик сопряжен с вычислением запасов устойчивости СУ, оценки величин запасов устойчивости которых также отражают неопределенность и варьируются в пределах интервалов своих возможных значений. В [4] приведено описание способов определения запаса устойчивости по фазе и по амплитуде для интервальной модели системы. По полученным значениям границ диапазонов варьирования запасов устойчивости интервальной системы можно установить в каких пределах находятся показатели качества управления.

Распространение подхода, предполагающего построение годографов Найквиста, на случай многомерных систем представляет собой отдельную сложную задачу, где основным аппаратом является метод характеристических годографов [50], который, однако не может быть применен к анализу и синтезу СУ объектами с произвольным числом интервальных параметров по причинам, приведенным в [4]. Однако для систем невысокой размерности задача исследования свойств может быть решена по известным выражениям для их характеристических полиномов [51].

1.2.1.2 Теоретические основы оптимального управления в робастных СУ

Как было указано в § 1.2.1 задача управления ансамблем траекторий возникает в тех случаях, когда точные значения параметров или начальное положение системы неизвестны, в связи с чем возникает необходимость описания всех траекторий движения, исходящих из допустимых начальных состояний при всех возможных значениях параметров.

Описание поведения модели СУ в условиях неопределенности в форме дифференциальных уравнений с параметром записывается следующим образом [52]:

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t),a),\ a \in \alpha; x(t_0) = s,\ s \in \sigma,$$

где x – вектор состояния системы, $x \in R^n$; u – вектор управления, t – время, $a \in R^k$ – вектор параметров; $s \in R^n$ – начальное состояние системы; $R^n,\ R^k$ n- и k-мерное евклидово пространство; значения a и s определяются соответствующими заданными множествами $\alpha,\ \sigma$ возможных значений.

Полагая, что $x_{n+1} = a_1, \ldots, x_{n+k} = a_k;\ \dot{x}_{n+1} = 0, \ldots, \dot{x}_{n+k} = 0$ в модели исключаются параметры a путем ввода дополнительных переменных состояния $x_{n+i},\ i = \overline{1,k}$ и считается, что ансамбль траекторий порождается только неопределенностью начального состояния $x(t_0) \in \sigma \times \alpha$.

Тогда модель объекта управления будет описываться дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t,s) = f(t,x(t,s),u(t)),\ x(t_0,s) = s \in \sigma, \tag{1.2}$$

где u – вектор управления, $u \in U$, U – заданное множество допустимых значений управления; t – время, заданное промежутком функционирования системы $t \in [t_0,t_1]$ с известными моментами начала и завершения процесса $t_0,\ t_1$; s – начальное состояние системы, $s \in \sigma \subset R^n$, σ – заданное компактное множество допустимых начальных состояний; $x(t,s)$ – значение вектора состояния системы в момент времени t, соответствующее фиксированному начальному состоянию s и управлению $u(\cdot)$; $f(t,x,u)$ – непрерывная вместе со своими частными производными вектор-функция.

Рассматривается задача со свободным правым концом траектории с программным управлением $u(t)$.

Множество допустимых управлений U_0 образуют кусочно-непрерывные функции $u(\cdot)$ со значениями в множестве U.

Для каждого допустимого управления $u(\cdot) \in U_0$ имеется совокупность решений $x(t,s)$ уравнения (1.2) для различных фиксированных начальных состояний $s \in \sigma$. Объединение этих решений $\bigcup x(\cdot, s)$ называется ансамблем траекторий системы (1.2), порожденным управлением $u(\cdot)$ и множеством σ [1; 53; 54].

Функционал качества управления определяется следующим образом:

$$I(s,u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t,s),u(t))dt + F(x(t_1,s)), \tag{1.3}$$

где $f^0(t,x,u),\ F(x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Качество управления $u(\cdot) \in U_0$ ансамблем траекторий оценивается максимальным значением этого функционала:

$$I_\Gamma(u(\cdot)) = \max_{s\in\sigma} I(s,u(\cdot)). \tag{1.4}$$

При фиксированном управлении величина $I_\Gamma(u(\cdot))$ равна значению функционала (1.3), полученному для наихудшей траектории в пучке при самом неблагоприятном выборе начального условия s.

Требуется найти допустимое управление $u^*(\cdot) \in U_0$, на котором достигается минимум функционала (1.4):

$$I_\Gamma(u^*(\cdot)) = \min_{u(\cdot)\in U_0} \max_{s\in\sigma} I(s,u(\cdot)).$$

Такое управление $u^*(\cdot)$ называется оптимальным гарантирующим, а задача – задачей синтеза оптимального гарантирующего управления.

В [54] сформулированы необходимые условия оптимальности.

Пусть $u^*(\cdot)$ – оптимальное гарантирующее управление, а $\bigcup x(\cdot,\,s)$ – соответствующий этому управлению ансамбль траекторий, описываемых уравнением

$$\begin{gathered} \dot{x}(t,s) = f(t,x(t,s),u^*(t)),\ t\in T, \\ x(t_0,s) = s \in \sigma. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Тогда существует скалярная функция $\phi(t,s)$ и вектор-функция $\Psi(t,s) = (\Psi_1(t,s),\ldots,\Psi_n(t,s))^T$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{gathered} \dot{\phi}(t,s) = -f^0(t,x(t,s),u^*(t)),\ t\in T,\ s\in\sigma, \\ \dot{\Psi}_j(t,s) = -\frac{\partial H(t,\Psi(t,s),x(t,s),u^*(t,s))}{\partial x_j},\ j=\overline{1,n}, \end{gathered} \tag{1.6}$$

с условиями

$$\begin{gathered}\phi(t_1,s) = F(x(t_1,s)),\\ \Psi_j(t_1,s) = -\frac{\partial F(x(t_1,s))}{\partial x_j},\ j = \overline{1,n},\end{gathered} \tag{1.7}$$

такие, что в каждой точке непрерывности управления выполняется соотношение

$$u^*(t) = \arg\max_{u\in U}\min_{s\in\sigma^*}\left\{H(t,\Psi(t,s),x(t,s),u) - H(t,\Psi(t,s),x(t,s),u^*(t,s))\right\}. \tag{1.8}$$

где $H(t,\Psi(t,s),x(t,s),u) = \sum_{j=1}^{n}\Psi_j \cdot f_j(t,x,u) - f^0(t,x,u)$ – гамильтониан, $\sigma^* =$ $= \{s^* \in \sigma | \phi(t_0,s^*) = \max_{s\in\sigma}\phi(t_0,s)\}$ – совокупность точек глобальных максимумов функции $\phi(t_0,s)$ на множестве σ.

Соотношения (1.5)–(1.8) представляют собой краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром s.

Оптимальное гарантирующее управление $u^*_\Gamma(t,x)$ с полной обратной связью для любого ансамбля траекторий системы (1.3) совпадает с оптимальным управлением $u^*(t,x)$ для функционала (1.2).

Примером может служить рассмотренная в [55] задача параметрической оптимизации не полностью определенных линейных бесконечных систем с распределенными параметрами параболического типа, где предлагается конструктивный подход к её решению, заключающийся в переходе к программной реализации в реальном масштабе времени принципа обратной связи, а текущие состояния объекта, оцениваемые по измеряемым сигналам обратных связей в заранее задаваемые моменты времени, рассматриваются в качестве известных начальных состояний при построении в соответствии со стратегией гарантированного результата оптимальных программных управляющих воздействий для порождаемых неопределенными факторами моделей системы на последующих стадиях процесса управления.

1.2.1.3 H^∞-оптимальные системы

Классические частотные методы, отличающиеся простотой, наглядностью, удобством инженерной интерпретации [56—58], широко используемые для решения типичных задач анализа и синтеза одномерных СУ, получили свое развитие в направлении проектирования регуляторов в условиях ограниченной неопределенности характеристик ОУ в форме H^∞-теории управления, получившей широкое применение в инженерной практике [16].

Ряд важных задач аналитического конструирования линейных СУ может быть сведен к задаче минимизации H^∞-нормы матрицы передаточных функций замкнутой системы от внешнего входа к внешнему выходу на множестве стабилизирующих регуляторов [59; 60].

В рамках H^∞-теории формулируются задачи слежения, компенсации, оптимального приближения к заданным эталонам в частотной области, минимаксные аналоги классических линейно-квадратичных задач [59; 61].

Проблема разработки конструктивных процедур синтеза H^∞-оптимальных регуляторов, решающих отмеченный круг задач, является центральной в развитии H^∞-теории управления. В частности, выделяют спектральный метод и метод пространства состояний, техника вычисления которых достаточно сложна [59; 61—63].

Самостоятельное значение приобретают частные варианты параметрического синтеза ввиду эффективности и широкого распространения в инженерной практике подобной интерпретации оптимизационных задач. Типичными задачами параметрического синтеза является синтез замкнутых СУ по выбору настроек стандартных регуляторов или параметров корректирующих звеньев, часто сводящихся к соответствующим задачам полубесконечной оптимизации [16; 62; 64].

Если Δ есть ветор искомых параметров регулирующих устройств, а $I(\Delta)$ – заданная целевая функция, характеризующая выбранный критерий оптимальности синтезируемой системы, то проблема сводится к выбору Δ минимизирующего $I(\Delta)$ на параметрически заданном множестве $G_n \ni \Delta$ стабилизирующих регуляторов

$$I(\Delta) \to \min,\ \Delta \in G_n \tag{1.9}$$

в условиях дополнительных ограничений на учитываемые показатели качества [64].

При этом в роли достаточно представительной количественной характеристики как целевой функции, так и функциональных ограничений могут быть использованы H^∞-нормы частотных характеристик линейной системы, сводимые к функциям максимума максимальных сингулярных чисел соответствующих передаточных матриц замкнутой системы в частотной области [61; 62; 64—66].

В скалярном случае указанные H^∞-нормы совпадают с максимумами АЧХ. В частности, в ряде конкретных ситуаций в качестве критерия оптимизации $I(\Delta)$, характеризующего реакцию системы на внешние возмущения с ограниченной дисперсией в условиях неполной информации о частотном спектре воздействий, целесообразно рассматривать H^∞-норму передаточной функции $W_w(p,\Delta)$ замкнутой системы по рассматриваемому возмущению [61; 62; 64] , и тогда для одномерной системы задача (1.9) сводится к задаче на минимакс соответствующей АЧХ $|W_w(j\omega,\Delta)|$:

$$I(\Delta) = \max\left\{|W_w(j\omega,\Delta)| : \omega \in L_1\right\} \to \min, \Delta \in G_n. \tag{1.10}$$

Требования к качественным показателям часто могут быть сформулированы в виде ограничения на H^∞-норму передаточной функции $W_u(p,\Delta)$ системы по управляющему воздействию, что по определению приводит в одномерном случае к ограничению на величину максимума АЧХ $|W_u(j\omega,\Delta)|$ [61; 62; 64]:

$$\max\left\{|W_u(j\omega,\Delta)| : \omega \in L_1\right\} \leq M. \tag{1.11}$$

В итоге получаем минимаксную задачу полубесконечной оптимизации (1.10) и (1.11), которая представляет собой типичную инженерную задачу выбора настроек регулятора заданной структуры, минимизирующего реактивность системы управления по отношению к аддитивным возмущениям с ограниченной дисперсией в условиях заданного ограничения на величину показателя колебательности [62; 67].

Требования, предъявляемые к грубости синтезируемой системы по отношению к неструктурированным мультипликативным неопределенностям $\eta(p)$ [61; 62; 64; 66] характеристик модели объекта, могут быть учтены в форме дополнительных ограничений на H^∞-норму $W_u(p,\Delta)$ в зависимости от оценок $\|\eta(p)\|_\infty$.

Соответствующее достаточное условие робастной устойчивости [3] на классе устойчивых возмущений $\eta(p)$ для случая устойчивой порождающей одномерной системы принимает вид [61; 62; 64; 65]:

$$\max\{|W_u(j\omega,\Delta)v(j\omega)| : \omega \in L_1\} \leq \gamma < 1, \tag{1.12}$$

где $v(p)$ - заданная устойчивая функция, ограничивающая возмущение $\eta(p)$ по его H^∞-норме, а заданное число γ определяет требуемую степень близости к границе области устойчивости.

Проблема параметрического синтеза робастных регуляторов в многомерных линейных СУ, принимающая в одномерном варианте вид задачи полубесконечной оптимизации (1.10)–(1.12) рассматривается в [16].

1.2.1.4 Методы матричных неравенств в задачах синтеза робастных СУ

Синтез робастных законов управления динамическими системами может быть произведен на основе численного решения линейных матричных неравенств.

Свое развитие это направление получило с появлением вычислительных методов и алгоритмов реализации, что способствовало активному применению линейных матричных неравенств в различных областях теории управления [68—71], в том числе при синтезе H^∞-регуляторов [72; 73].

Основная идея синтеза регуляторов по данному методу заключается в формулировании цели управления в виде неравенства относительно квадратичной функции Ляпунова замкнутой системы, которое затем может быть представлено в виде линейного матричного неравенства относительно неизвестной матрицы параметров регулятора специального вида, после чего решается задача отыскания параметров регулятора [69].

Первыми работами, в которых систематически изложена техника аппарата линейных матричных неравенств, являются [3; 68; 69; 74].

В [69] изучаются основные проблемы теории управления, которые могут быть решены с помощью линейных матричных неравенств, в частности, задачи стабилизации, модельного управления, оптимального гашения внешних возмущений в рамках теории H^∞-управления, робастной устойчивости, стабилизации и робастного H^∞-управления. Результаты, позволяющие переформулировать проблему подавления ограниченных внешних возмущений в терминах инвариантных эллипсоидов на основе использования аппарата линейных матричных неравенств, показаны в [75].

1.2.1.5 Методы теории игр в задачах управления в условиях ограниченной неопределенности

Ряд практических задач в экономике, военном деле, промышленном производстве и др. связан с необходимостью реализации стратегии поведения, обеспечивающей достижение гарантированного результата в обстановке несовпадающих целей оперирующей стороны и её партнера/противника [2; 16; 20; 76].

Постановка задачи и её решение рассматривается в [52]. Модель ОУ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, а её движение происходит под управлением двух сторон. При этом, если оперирующая сторона и партнер/противник располагают возможностями выбора векторов Δ, y соответственно и стремятся к достижению максимума своих целевых функций F_0, f_0, зависящих от поведения друг друга [16]

$$F_0(y,\Delta) \to \max,\ \Delta \in G_n;\ f_0(y,\Delta) \to \max,\ y \in L_r,$$

стратегия наилучшего гарантированного результата для оперирующей стороны определяется процедурой отыскания максимина [2; 20; 77] (при отсутствии информации о выборе вектора y противником):

$$I(\Delta) = \min\{F_0(y,\Delta) : y \in L_r\} \to \max,\ \Delta \in G_n.$$

Частным примером оптимизационной задачи с экстремальными ограничениями [78] является задача максимина со связанными переменными [2; 20; 76; 77]:

$$I(\Delta) = \min\{F_0(y,\Delta) : y \in B(\Delta)\} \to \max,\ \Delta \in G_n;$$
$$B(\Delta) = \{y \in L_r : f_0(y,\Delta) = \max\{f_0(z,\Delta) : z \in L_r\}\}.$$

в случае, если выбор вектора Δ оперирующей стороной известен партнеру/противнику. К таким задачам относятся задачи обратной оптимизации [79], проблемы теории игр [80], иерархических систем управления [81].

1.2.1.6 Минимаксная оптимизация в задаче построения робастных СУ

При минимаксном подходе к синтезу робастных СУ в качестве робастного оптимального можно рассматривать фиксированный алгоритм управления, являющийся решением соответствующей детерминированной минимаксной задачи оптимизации [16] поведения всего ансамбля траекторий процесса, порождаемого всеми возможными реализациями неопределенных факторов на заданных допустимых множествах их изменения и выступающего в роли соответствующего ОУ [82].

Главным принципом при решении минимаксных задач оптимизации является обеспечение наилучшего результата в наихудшем случае, или, другими словами, обеспечение гарантированного решения задачи управления ансамблем (принцип гарантированного результата, см. §1.2.1.2) [77; 83].

Применительно к параметризуемым управляющим воздействиям и неопределенным факторам формальная постановка минимаксной задачи сводится к следующему виду:

$$\begin{gathered} I(\Delta) = \max\{F_0(y,\Delta) : y \in L_r\} \to \min,\ \Delta \in G_n; \\ \Phi(\Delta) = \max\{F(x,\Delta) : x \in \Omega_m\} \le \varepsilon. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Здесь $F_0(\cdot), F(\cdot)$ – заданные известные функции своих аргументов; $I(\cdot)$ – критерий оптимальности; $\Phi(\cdot)$ – функциональные ограничения; $\Delta = (\Delta_1 \dots \Delta_i),\ i = \overline{1,n}$ – вектор параметров, однозначно характеризующий искомое управление задачи (1.13); $y = (y_1 \dots y_j),\ j = \overline{1,r};\ x = (x_1 \dots x_s),\ s = \overline{1,m};$ – параметры, интерпретация которых зависит от конкретной задачи, где под y может подразумеваться вектор неопределенных параметров; ε – заданная величина, характеризующая допустимый уровень ограничений по величине функций $\Phi(\cdot)$; $L_r,\ G_n,\ \Omega_m$ – допустимые области изменения соответствующих параметров.

Приведенная постановка задачи подобна типичной задаче математического программирования [16], однако её принципиальное отличие заключается в наличии функции максимума в функциях $I(\Delta),\ \Phi(\Delta)$, что приводит к соответствующим задачам недифференцируемой оптимизации [84] с бесконечным числом функциональных ограничений в (1.13), которые должны выполнятся для всех $x \in \Omega_m$. Такие задачи называют задачами полубесконечной оптимизации [16; 64].

К виду (1.13) сводится ряд актуальных задач управления, в том числе рассмотренная ранее задача управления в конфликтных ситуациях, а также характерные задачи оптимального управления объектами с распределенными параметрами в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта [6; 9; 55].

1.2.2 Адаптивные системы управления

Адаптивные системы управления принадлежат к классу систем, в которых неопределенность характеристик их элементов ликвидируется в процессе работы системы на основании рабочей информации, получаемой в процессе управления по различным оценкам поведения объекта, и, если необходимо, корректируются настройки регулятора по заданному алгоритму в зависимости от измеряемых характеристик объекта. Их основным преимуществом по сравнению с робастными СУ являются более высокие качественные показатели, близкие к системам с полным объемом информации.

Общий вид типичной адаптивной СУ, состоящей из двух контуров, показан на рисунке 1.1, где А – адаптер, оценивающий реальное состояние объекта и воздействующий на регулятор Р, δ – ошибка, взятая как разность между уставкой x и выходом объекта системы z, u – управляющее воздействие с регулятора, а h – возмущающее воздействие.

Если изменяются только параметры закона управления, то такая адаптивная система называется самонастраивающейся системой, в случае изменения закона управления, адаптивная система будет называться самоорганизующейся.

Адаптивные системы могут быть подразделены на две группы:

– Поисковые адаптивные СУ, основанные на непрерывном поиске точки экстремума;

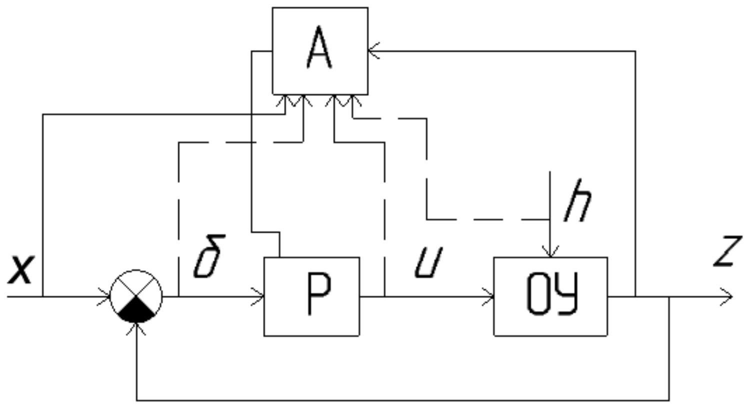


Рисунок 1.1 — Обобщенная структура адаптивной системы управления.

– Беспоисковые адаптивные СУ, в которой управляющее воздействие вырабатывается в результате сравнения истинного значения управляемой величины с заданным значением.

Наибольшее распространение получила вторая группа адаптивных СУ, которая в свою очередь делится на адаптивные системы с эталонной моделью и адаптивные системы с идентификатором, задача которого заключается в оценке реальных значений параметров объекта по информации о поведении системы и выработке корректирующего воздействия на регулятор.

Беспоисковые самонастраивающиеся СУ с эталонной моделью наиболее привлекательны ввиду относительной конструктивной простоты, быстродействия и высокой эффективности работы [4]. Информация о наличии параметрической неопределенности определяется рассогласованием движения основного контура и эталонной модели, которая представляет собой стационарное динамическое звено, структура и параметры которого выбираются на основе имеющейся априорной информации и требований к качеству управления.

Интересными с точки зрения практического применения являются беспоисковые самонастраивающиеся системы с эталонной моделью на базе концепции обобщенного настраиваемого объекта, подстраивающегося под эталонную модель и включающего в себя совокупность объекта управления, исполнительного механизма и перенастраиваемых корректирующих устройств [85; 86].

Структура беспоисковой самонастраивающейся системы управления с эталонной моделью представлена на рисунке 1.2. Первый контур включает в себя объект управления ОУ и регулятор Р и предназначен для устранения рассогласования δ между заданным x и текущим z значениями выхода объекта ОУ. Второй контур содержит эталонную модель ЭМ, задающую динамические характеристики ОУ, а также управляющее устройство УУ, которое минимизирует разницу между выходом эталонной модели и реального объекта путем настройки параметров регулятора Р в соответствии с заданными алгоритмами самонастройки.

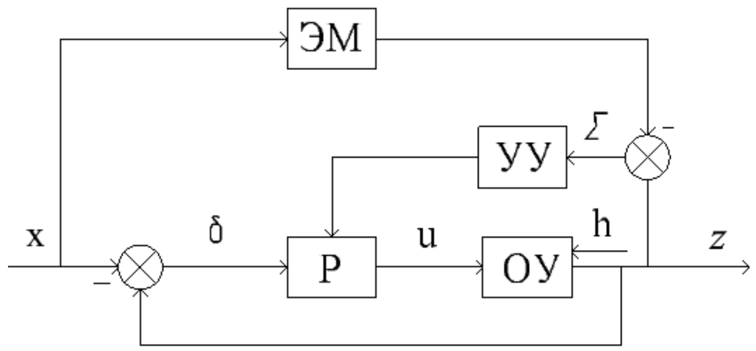


Рисунок 1.2 — Структура беспоисковой самонастраивающейся системы управления с эталонной моделью.

В итоге, задача синтеза регулятора Р сводится к традиционной задаче синтеза регулятора для линейного стационарного объекта.

1.2.3 Интеллектуальные системы управления

Интеллектуальные системы управления принято использовать в условиях неточных модельных представлений, для которых характерно отсутствие точных математических моделей ОУ или их чрезмерная сложность, высокая размерность пространства состояний, иерархичность, высокий уровень шумов и внешних возмущений [4; 10]. Классический подход к построению СУ с такими объектами невозможен.

Интеллектуальные СУ ориентированы на обработку и использование знаний в соответствующей предметной области, в частности, путем применения логико-лингвистической аппроксимации характеристик объекта и продукционных правил логического вывода [87; 88].

Классификация интеллектуальных систем по уровню их интеллектуальности производится на основе слоев интеллектуальности [89] (в порядке убывания):

– Слой интерактивного человеко-машинного диалога;

– Слой прогноза событий;
– Слой самообучения и адаптации;
– Слой обработки и использования базы знаний и формирования управляющих решений;
– Слой исполнительный.

Применительно к этой классификации, в [89] вводится понятие степени интеллектуальности:

– В малом (задействованы два нижних слоя);
– В большом (задействованы три нижних слоя);
– В целом (задействованы все слои).

Наибольшее распространение получили интеллектуальные системы в малом, как наиболее разработанные и относительно простые в реализации.

Выделяют, в частности, нечеткие системы управления и СУ, построенные на базе нейронных сетей.

1.2.3.1 Общие принципы построения нечетких систем управления

Применение аппарата нечеткой логики позволяет решить задачи, в которых данные, цели и ограничения являются слишком сложными или недостаточно определенными, что приводит к невозможности точного математического описания.

К ситуациям, в которых могут использоваться нечеткие модели, относятся [4; 90]:

– ситуация, когда имеется лингвистическое описание, отражающее качественное понимание процесса и позволяющее построить множество нечетких логических правил;
– ситуация, в которой имеются известные уравнения с неточно идентифицируемыми параметрами, хотя бы грубо описывающие поведение процесса;
– ситуация, в которой имеется известное сложное математическое описание процесса, которое можно интерпретировать нечетким образом.

К первым результатам практического применения алгоритмов нечеткой логики относят работы Э. Х. Мамдани [91; 92], где под нечетким управлением понимается стратегия управления, основанная на эмпирически приобретенных знаниях относительно функционирования процесса, представленных в лингвистической форме, как некоторая совокупность правил. Реализация нечеткого управления, по своей сути, воспроизводит некоторую заданную функциональную зависимость. При этом нечеткий регулятор реализует, образно говоря, функции человека, как оператора, управляющего процессом и выбирающего наиболее подходящий способ управления в зависимости от текущей ситуации.

Формирование управляющих воздействий складывается из следующих этапов [4]:

– Фаззификация или преобразование полученных входных значений к нечеткому виду, в форме лингвистических переменных;
– Определение нечетких значений выходных переменных, заданных в виде функций их принадлежности соответствующим нечетким множествам, на основе сформулированных правил логического вывода, записанных в базе правил;
– Дефаззификация или вычисление реальных числовых значений выходов, используемых для управления объектом.

Предпосылками к применению нечетких регуляторов являются:

– Большие число входных параметров, подлежащих оценке;
– Многомерность;
– Сильные возмущения;
– Нелинейности
– Неточности математических моделей программы регулирования;
– Использование технических знаний.

Таким образом, наиболее эффективными областями применения [93] нечетких регуляторов будут приложения, в которых работа оператора, управляющего процессом, может быть описана в виде свода нечетких правил, а также приложения, в которых управляемые процессы описываются слишком сложными математическими моделями и для управления которыми используется эмпирические знания и измерительная информация.

1.2.3.2 Общие принципы построения систем управления на базе нейронных сетей

Нейронная сеть представляет собой математическую модель, построенную по принципу организации и функционирования сетей нервных клеток живого организма [94].

Нейронные сети успешно справляются с тремя категориями трудностей при построении СУ, модель которых чрезмерно сложна [4; 95]: вычислительной сложностью, наличием нелинейностей и неопределенностью. Высокая скорость расчетов обеспечивается параллельной структурой нейронных сетей. Нелинейные компоненты таких сетей могут использоваться для аппроксимации нелинейных отображений с любой степенью точности. Параметры нейронных сетей могут подстраиваться в реальном времени с учетом входных и выходных данных, что обеспечивает высокое качество функционирования СУ в условиях существенной неопределенности информации об ОУ.

Включение нейронной сети в СУ позволяет накапливать знания в процессе её функционирования и использовать их для улучшения своих качественных характеристик.

Существуют различные сферы применения нейронных сетей [4; 95—97]. Одним из направлений применения таких сетей является задача идентификации (см. рисунок 1.3), когда выход объекта X и выход нейронной сети U сравниваются при одинаковом входном воздействии $X_{вх}$, а процедура обучения сети состоит в изменении весов её связей с целью уменьшения рассогласования ”e” до некоторой заданной допустимой величины.

Возможно включение нейронной сети в качестве регулятора в замкнутый контур управления объектом (см. рисунок 1.4), где целью обучения нейронной сети является уменьшение рассогласования между выходами объекта Z и эталонной модели Z*, что позволяет достигнуть желаемой динамики СУ и качественного управления объектом в широком диапазоне изменения режимов его работы в силу нелинейно природы нейросетей.

Нейронные сети используются в качестве адаптера для подстройки параметров регулятора. На рисунке 1.5 показана структура СУ с адаптером, подстраивающим коэффициенты типового ПИД-регулятора. В таких системах целью обуче-

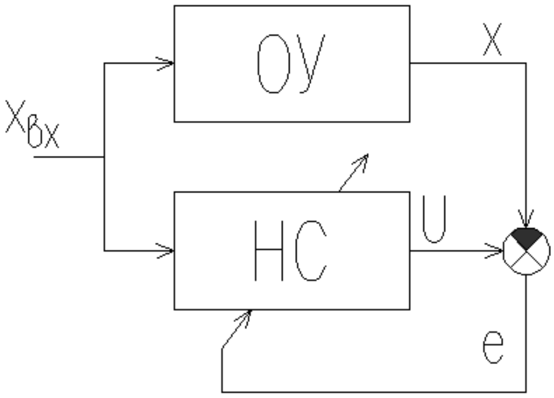


Рисунок 1.3 — Структура системы управления с нейронной сетью в качестве идентификатора.

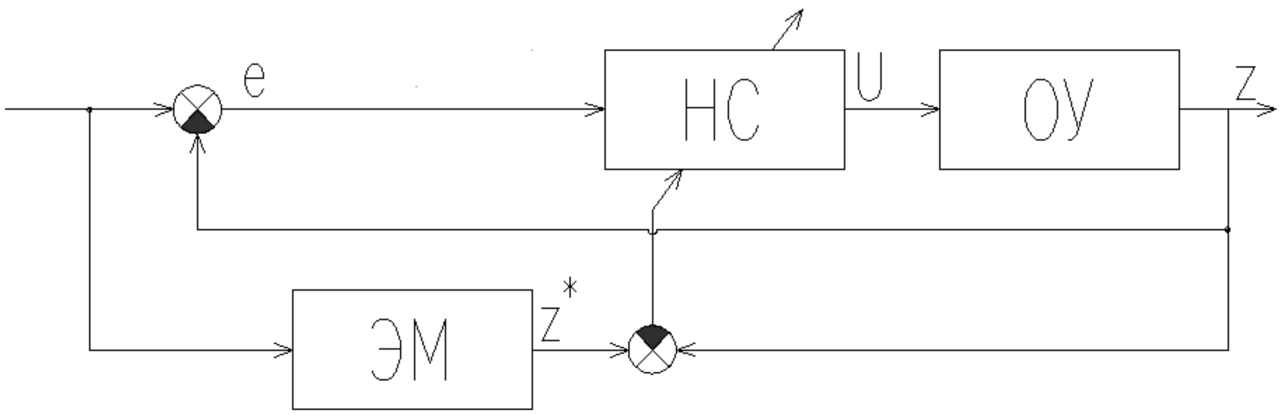


Рисунок 1.4 — Структура системы управления с нейронной сетью в качестве регулятора.

ния нейронной сети является формирование такого вектора коэффициентов ПИД-регулятора, который бы обеспечивал минимальное рассогласование между выходами объекта и эталонной модели.

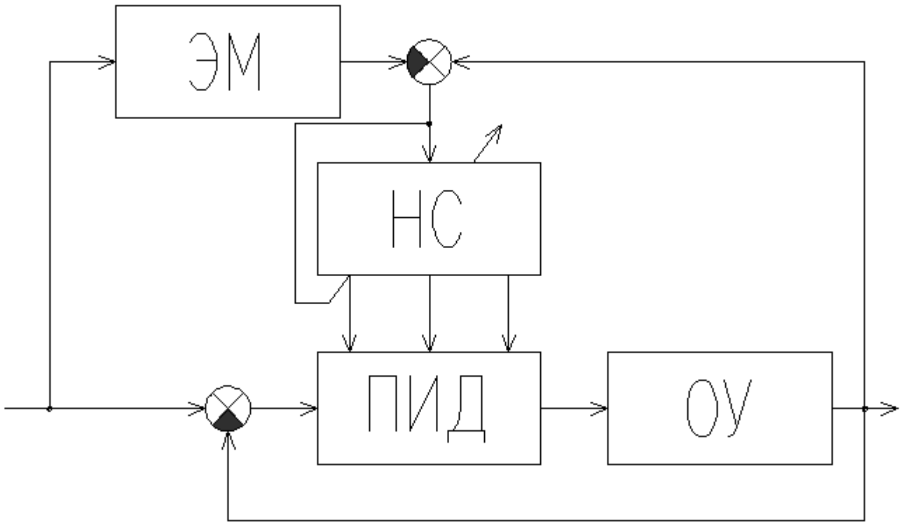


Рисунок 1.5 — Структура системы управления с нейронной сетью в качестве адаптера.

Возможны иные варианты комбинированного применения нейронных сетей наряду с традиционными алгоритмами управления, например, параллельного подключения, что позволяет использовать преимущества как линейных регуляторов, в качестве которых выступают точность, простота и удобство доводки, так и помехозащищенность, нелинейный характер и способность к обучению нейронной сети.

1.3 Содержательная постановка задачи

Указанные выше трудности создания систем управления не полностью определенными динамическими объектами существенно увеличиваются применительно к бесконечномерным объектам с распределенными параметрами, для которых наиболее характерной является интервальная неопределенность его параметрических характеристик, в первом приближении неизменных во времени на протяжении процесса управления [9; 98]. Применение описанных выше подходов для построения СУ ОРП в таких условиях отличается глубокой спецификой. Известные результаты по синтезу алгоритмов управления подобными ОРП в основном ограничиваются распространением этих подходов для систем с сосредоточенными параметрами на дискретные аппроксимации моделей ОРП, что связано с целым рядом известных недостатков [99]. В настоящей работе ставится центральная для целого ряда технических объектов задача построения оптимальных по быстродействию систем управления бесконечномерными ОРП, описываемыми управлениями в частных производных параболического типа с интервальными неопределенностями параметров используемых моделей.

Выбор между двумя базовыми подходами к синтезу алгоритмов управления ОРП путем построения робастных или адаптивных систем управления сделан в пользу адаптивной системы с идентификатором, обеспечивающей при эффективном построении процедуры идентификации качественные характеристики по выбранному критерию оптимальности, близкие к системе с полным объемом информации об объекте управления, в отличие от управления ансамблем траекторий в робастной СУ, гарантирующей лишь наилучший из возможных результат только при наиболее неблагоприятном сочетании неопределенных факторов.

Центральной проблемой при синтезе подобной адаптивной системы является построение идентификатора максимально упрощенной структуры в рамках требуемой точности функционирования с целью обеспечения максимальной простоты его технической реализации.

В диссертации предлагается способ построения идентификатора, удовлетворяющего этим требованиям и метод синтеза, построенный на этой основе адаптивной системы оптимального быстродействия для достаточно широкого класса СУ не полностью определенными моделями ОРП.

1.4 Выводы по первой главе

– На основе проведенного анализа причин возникновения основных видов неопределенностей и методов борьбы с ними установлено, что рассматриваемая проблема управления динамическими объектами в условиях неопределенности характеризуется усложнением постановки задач и поиска её решений. Указанная проблема ещё более усложняется в наименее исследованной области оптимального управления ОРП, для которых характерна интервальная неопределенность его параметрических характеристик.

- Анализ существующих методов управления в условиях ограниченной неопределенности позволил выявить преимущества и недостатки каждого из этих методов. Так, робастные СУ обеспечивают гарантированно наилучший результат лишь в случае наиболее неблагоприятного сочетания неопределенных факторов. Адаптивные СУ с идентификатором способны обеспечить качественные характеристики по выбранному критерию оптимальности, близкие к СУ с полным объемом информации в условиях достаточной эффективности и простоты технической реализации процедуры идентификации. При этом возникает задача построения идентификатора упрощенной структуры в рамках требуемой точности функционирования.
- На основе сделанных выводов дается содержательная постановка задачи: необходимо разработать метод синтеза адаптивной системы оптимального по быстродействию управления с идентификатором состояния для не полностью определенных моделей ОРП.

Глава 2. Оптимальное по быстродействию управление системами с распределенными параметрами в условиях интервальной неопределенности параметрических характеристик объекта

2.1 Базовая математическая модель технических объектов с распределенными параметрами

Большинство классических результаты ТАУ получены применительно к системам с сосредоточенными параметрами (ССП), поведение которых однозначно характеризуется изменением во времени управляемых величин и описывается конечной системой N обыкновенных дифференциальных уравнений [100],

$$\frac{dz_i}{dt} = f_i(z_1(t),z_2(t),\ldots,z_N(t);u_1(t),u_2(t),\ldots,u_N(t);t),\, u_i(t) \in U, i = \overline{1,N}, \quad (2.1)$$

где $z_i(t)$ – управляемые величины, заданные функции $f_i(\cdot)$ своих аргументов предполагаются непрерывными по совокупности всех аргументов и имеют непрерывные производные по фазовым координатам $z_i(t)$, U – заданная замкнутая область допустимых значений управляющих воздействий $u_i(t)$.

Однако в технических приложениях подобное описание ОУ не всегда соответствует реальности. Основная особенность многих технических объектов состоит в том, что они имеют пространственную протяженность. Состояние таких объектов должно задаваться не только в каждый момент времени t, но и в каждой точке x геометрической области физического пространства, которую занимает данный объект. Состояние объекта с распределенными параметрами в этом случае будет описываться как функция двух аргументов $Q(x,t)$, где x - скалярная пространственная переменная. Объектам с распределенными параметрами, а также задачам управления ОРП посвящены работы Андреева Ю.Н., Бутковского А.Г., Дегтярева Г.Л., Егорова А.И., Егорова Ю.В., Коваля В.А., Лионса Ж.-Л., Лурье К.А., Малого С.А., Першина И.М., Плотникова В.И., Пустыльникова Л.М., Рапопорта Э.Я., Сиразетдинова Т.К., Черноусько Ф.Л. и других отечественных и зарубежных ученых [7; 8; 17—19].

Базовая детерминированная математическая модель целого ряда технических ОРП, удобная для аналитического исследования, получения фундаментальных результатов общего характера и ориентированная в первую очередь на широкий круг объектов технологической теплофизики [6; 7; 9], в простейшем случае описывает пространственное распределение $Q(x,t)$ по одной координате x, изменяющейся на отрезке $x \in [x_0,x_1]$ линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка параболического типа в канонической форме [19]:

$$A_1\frac{\partial Q}{\partial t} = C(x)\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + B_1(x)\frac{\partial Q}{\partial x} + C_1(x)Q + f(x,t,u_{\text{в}}(x,t)); \\ x \in (x_0,x_1),\ t > 0; \tag{2.2}$$

с типовыми начальными и граничными условиями:

$$Q(x,0) = Q_0(x); \tag{2.3}$$

$$\alpha_0 Q(x_0,t) + \beta_0\frac{\partial Q(x_0,0)}{\partial x} = g_0(t,u_0(t)); \tag{2.4}$$

$$\alpha_1 Q(x_1,t) + \beta_1\frac{\partial Q(x_1,0)}{\partial x} = g_1(t,u_1(t)). \tag{2.5}$$

Уравнение (2.2) относится к числу классических уравнений математической физики. Здесь $A_1,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \beta_0,\ \beta_1$ – постоянные, а $C(x),\ B_1(x),\ C_1(x)$ в общем случае координатно-зависимые коэффициенты. Так, например, типичным представителем уравнения параболического типа ($A_1 = 1$) является уравнение теплопроводности, описывающее процесс тепло- и массопереноса в твердых телах. Функция $f(x,t,u_{\text{в}}(x,t))$ известного вида характеризует внешнее воздействие на процесс, где $u_{\text{в}}(x,t)$ может рассматриваться в качестве пространственно-временного, сосредоточенного или пространственно распределенного внутреннего управляющего воздействия на входе ОРП.

Функции $Q_0(x)$ в (2.3) должны задавать начальные распределения во всей замкнутой области $x \in [x_0,x_1]$ определения функции состояния $Q(x,t)$.

Физический смысл граничных условий (2.4) и (2.5) состоит в задании условий взаимодействия объекта с окружающей средой на геометрической границе в пространственной области, занимаемой объектом, где $g_i(t,u_i(t)), i = 0,1$ – заданные функции своих аргументов, которые могут рассматриваться в качестве как управляющих, так и возмущающих сосредоточенных граничных воздействий.

В частных случаях при $\alpha_i > 0, \beta_i = 0$; $\alpha_i = 0, \beta_i > 0$; $\alpha_i > 0, \beta_i > 0$; $i = 0{,}1$ получаем, соответственно, граничные условия первого, второго и третьего рода [19].

В совокупности, уравнения (2.2)–(2.5) составляют краевую задачу и полностью описывают базовую математическую модель ОРП.

Таким образом, задачи управления ОРП оказываются более сложными, чем аналогичные для ССП ввиду следующих причин:

1. Состояние ОРП описывается функциями нескольких переменных.
2. Движение таких систем может описываться дифференциальными уравнениями с частными производными, интегральными уравнениями, а также более сложными функциональными уравнениями смешанного типа.
3. Управляющие воздействия на ОРП носят разнообразный характер. Управление может быть как сосредоточенным (описывается как функция одной временной переменной), так и распределенным (описывается функциями, зависящими от пространственных переменных).
4. Детальный анализ показывает, что методы классической ТАУ для анализа и построения СУ ОРП либо оказываются неприменимыми, либо требуют основательной доработки с учетом необходимости применения нетипичного для ССП математического аппарата [7; 18; 19].
5. Задача реализации систем управления ОРП усложняется тем обстоятельством, что необходимо осуществлять пространственно-распределенный контроль состояния объекта в целях наблюдения за результатами процесса управления и использования соответствующих сигналов обратных связей, а также за счет необходимости построения регуляторов с пространственно-распределенными управляющими воздействиями.

2.2 Общая постановка задачи программного оптимального управления СРП в условиях ограниченной неопределенности

Указанные в § 2.1 особенности ОРП существенно усложняют по сравнению с ССП постановку и методы решения задач оптимального управления распределенными системами [7]. Содержательная постановка такой задачи сводится, согласно [7; 8; 17], к отысканию таких допустимых управляющих воздействий, которые обеспечивают допустимый перевод объекта из некоторого начального в желаемое конечное состояние с наилучшими из возможных значениями заранее выбираемых качественных показателей.

В соответствии с вышеизложенным, для постановки задачи оптимального управления ОРП необходимо, во-первых, задать математическую модель объекта управления. Она может быть представлена в виде уравнений (2.2)–(2.5), модельного представления ОРП и других возможных формах [19]. Во-вторых, необходимо выбрать критерий оптимальности, экстремальная величина которого будет ассоциироваться с понятием наилучшего из возможных показателей оптимизируемого процесса. Именно на данном этапе может возникнуть ситуация, описанная в § 1.1.3. В-третьих, должны быть заданы ограничения на управляющее воздействие и поведение управляемого выхода ОРП, что характеризует допустимость процесса перехода из начального в конечное состояние. В-четвертых, должны быть формализованы требования к желаемому состоянию объекта в момент окончания процесса управления. При этом задача может рассматриваться как с фиксированным, так и со свободным концом траектории (см. § 1.1.4). В-пятых, следует учесть возмущения, характерные для систем, работающих в реальных условиях, где объем априорной информации никогда не бывает полным, что накладывает дополнительные трудности при поиске решения и конструировании таких систем.

Используя метод конечных интегральных преобразований, можно получить решение краевой задачи (2.2)–(2.5) в форме разложения управляемого состояния $Q(x,t)$ в бесконечный, сходящийся в среднем ряд по ортонормированной системе собственных функций $\varphi_n(\mu_n,x)$ моделей объекта [19]

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t)\varphi_n(\mu_n,x),\ n = 1,2,\dots\ , \tag{2.6}$$

с коэффициентами (временными модами) $z_n(t)$, определяемыми интегральными соотношениями

$$z_n(t) = \int_{x_0}^{x_1} Q(x,t)\varphi_n(\mu_n,x)r(x)dx. \tag{2.7}$$

Здесь $x \in [x_0,x_1]$ – пространственный аргумент; система собственных функций $\varphi(\mu_n,x)$ находится решением соответствующей задачи Штурмана-Лиувилля [101; 102], и μ_n^2 – собственные числа, такие что $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$; $r(x)$ – весовая функция конечного интегрального преобразования.

Применительно к рассматриваемому далее варианту выбора сосредоточенного внутреннего или граничного скалярного управления $u_{\text{в}}(t)$ или $u_0(t),\ u_1(t)$ в (2.2), (2.4), (2.5) управляемая функция состояния $Q(x{,}t)$ ОРП описывается в таком случае в зависимости от пространственной координаты $x \in [x_0{,}x_1]$ и времени $t \in [0{,}T]$ бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений для временных мод $z_n(t)$ [7]

$$\begin{gathered}\frac{dz_n}{dt} = \frac{1}{A_1}\left[-\mu_n^2 z_n + f_n(\mu_n{,}u_{\text{в}}(t)) + R(\mu_n{,}u_0(t){,}u_1(t))\right],\\ z_n(0) = z_n^0,\ t \in [0{,}T], n = 1{,}2{,}\dots\end{gathered} \tag{2.8}$$

с последующим восстановлением $Q(x{,}t)$ по значениям $z_n(t)$ в форме (2.6).

Здесь $z = (z_n)$ – бесконечномерный вектор фазовых координат; $u_{\text{в}}(t)$ – сосредоточенное скалярное управляющее воздействие, принадлежащее к классу кусочно-непрерывных функций; $f_n(\mu_n{,}u_{\text{в}}(t))$ – изображение функции $f(x{,}t{,}u_{\text{в}}(x{,}t))$ в (2.2) вида (2.7) и $R(\mu_n{,}u_0(t){,}u_1(t))$ – известная функция, определяется граничными воздействиями $u_0(t),\ u_1(t)$ в (2.4) и (2.5) [19].

Принципиальным отличием модели (2.8) от описания ССП в (2.1) является её бесконечный порядок.

Согласно [19], после интегрирования (2.8) и подстановки результата в (2.6) получим полное решение уравнений детерминированной модели объекта (2.2)–(2.5) с заданными значениями его параметров в следующей форме:

$$\begin{gathered}Q(x{,}t) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\mu_n{,}x)\int_0^t\int_{x_0}^{x_1} f(\xi{,}\tau{,}u(\xi{,}\tau))\varphi_n(\mu_n{,}\xi)r(\xi)G_n^*(\mu_n{,}t-\tau)d\xi d\tau +\\ +\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\mu_n{,}x)\int_0^t R(\mu_n{,}\tau)G_n^*(\mu_n{,}t-\tau)d\tau + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\mu_n{,}x)\times\\ \times\int_{x_0}^{x_1}\left[Q_0(\xi)A_1G_n^*(\mu_n{,}t)\right]\varphi_n(\mu_n{,}\xi)r(\xi)d\xi,\end{gathered} \tag{2.9}$$

где $\xi,\ \tau$ обозначают пространственный и временной аргумент на входе, а *x* и *t* – соответствующие аргументы на выходе объекта; $G_n^*(\mu_n{,}t)$ – функция Грина для *n*-ой временной моды z_n, являющаяся её реакцией на внешнее воздействие в виде δ-функции при нулевых начальных условиях.

Математическая модель ОРП (2.2)–(2.5) и (2.9) описывает его поведение в пространственно-временной области при полном объеме априорной информации о векторе $w \in E^q$, $1 \leq q < \infty$, неизменных во времени параметрических характеристик объекта, фиксируемых в уравнениях (2.2)–(2.5), и его начальном состоянии.

Пусть далее информация о начальном состоянии $z^0 = (z_n^0)$ и значениях w исчерпывается условиями

$$z^0 \in Z^0; w \in W \tag{2.10}$$

их принадлежности заданным компактным множествам Z^0 и W, а допустимые значения управления $u(t) \in \{u_{\text{в}}(t),\ u_0(t),\ u_1(t)\}$ стеснены ограничением

$$u(t) \in U, \forall t \in [0,T];\ U = u(t) : u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \forall t \in [0,T] \tag{2.11}$$

с заданными величинами $u_{\min}$ и $u_{\max}$.

Каждой фиксированной паре $y = (z^0,w) \in Y = Z^0 \times W$ значений неопределенных факторов при любом допустимом управлении $u(t)$ соответствует определяемая решением системы уравнений (2.8) траектория процесса $z(t,u(\cdot),y)$, оканчивающаяся в точке $z^1(y,T) = z(T,u(\cdot),y)$ в заданный или нефиксируемый заранее конечный момент времени $t = T$, и управляемая функция состояния

$$Q(x,u(\cdot),y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(u(\cdot),y,t)\varphi_n(\mu_n,x) \tag{2.12}$$

согласно (2.6), а объединение этих траекторий по всем возможным величинам y при одном и том же управляющем воздействии образует ансамбль [1]

$$Z(u(\cdot),y,t) = Z(u(\cdot),z^0,w,t) = \bigcup z(u(\cdot),z^0,w,t) | z^0 \in Z^0, w \in W, t \in [0,T]. \tag{2.13}$$

При заданных достижимых целевых множествах требования к конечному состоянию системы, которые должны быть выполнены для всех $y \in Y$, в достаточно общем случае предъявляются в виде некоторого условия, гарантирующего «попадание» ансамбля с допустимой погрешностью ε_0 в заданную конечную точку z^* при любой возможной реализации значений z^0 и w в предположении управляемости объекта (2.6), (2.8) и (2.10)–(2.13) относительно области фазового пространства, удовлетворяющей этим требованиям. Если при этом целевое множество определяется характерными для приложений чебышёвскими оценками допусков отклонения от z^* [103], то такое условие может быть задано в форме допустимой точности $\varepsilon_0 > 0$ равномерного приближения конечного состояния объекта $Q(x,u(\cdot),y,T)$ к заданному распределению $Q^*(x)$ для всех возможных величин $y \in Y$ [7]:

$$\max_{y\in Y}\left[\max_{x\in[x_0,x_1]}|Q(x,u(\cdot),y,T)-Q^*(x)|\right]\le\varepsilon_0, \tag{2.14}$$

где $Q^*(x)$ и z^* связаны соотношением (2.6).

Пусть качество процесса управления оценивается функционалом

$$I_1(u(\cdot),y,T)=\int_0^T f_0(z(u(\cdot),y,t),u(t),y,t)dt+F_0(z(u(\cdot),y,T),y,T)\to\min_{u(\cdot)\in U}, \tag{2.15}$$

где f_0 и F_0 - заданные достаточно гладкие функции своих аргументов.

Выбор критерия оптимальности во многом определяет характер соответствующих алгоритмов оптимального управления. Особое значение, в прикладном смысле, имеют задачи оптимизации быстродействия, когда $f_0(\cdot)=1,\ F_0(\cdot)=0$; задачи на максимум точности приближения к конечному состоянию, где в качестве критерия оптимальности может быть принят минимум среднеквадратичной погрешности $f_0(\cdot)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(z_n(t)-z_n^{(1)}\right)^2,\ F_0(\cdot)=0$; задачи на минимум расхода энергии, в которых во многих случаях $f_0(\cdot)=u(t)$ при $F_0(\cdot)=0$ [6; 7; 17]. При необходимости учесть более одного критерия часто рассматривают задачу оптимизации на минимум взвешенной суммы указанных показателей (см. § 1.1.3)

$$I_{\sum}=\sum_{i=2}^{N}C_iI_i+C_tt_1\to\min, \tag{2.16}$$

где $C_i,\ C_t$ - весовые коэффициенты, t_1 - время процесса нагрева.

При отсутствии дополнительной информации, снижающей степень неопределенности исходных данных (2.10), можно теперь сформулировать в соответствии с принципом гарантированного результата следующую минимаксную задачу робастной оптимизации при управлении ансамблем траекторий (2.13) управляемого процесса.

Требуется найти программное оптимальное управление $u^*(t)\in U$, которое обеспечивает для объекта (2.6), (2.8) и (2.10)–(2.13) выполнение условия (2.14) при минимальном значении критерия оптимальности:

$$I_2(u(\cdot),T) = \max_{y \in Y} I_1(u(\cdot),y,T) \to \min_{u(\cdot) \in U}. \tag{2.17}$$

Способ решения этой задачи на основе альтернансного метода решения параметризуемых задач программного управления СРП предложен в [82].

2.3 Задача синтеза оптимальных по быстродействию систем управления детерминированными моделями ОРП

Если в другой крайней ситуации в СУ может быть получена в реальном масштабе времени достоверная информация о реализуемой в каждом конкретном случае величине $y = \tilde{y} \in Y$ путем наблюдения за поведением управляемой величины, то дальнейшая проблема сводится к детерминированной задаче построения замкнутой системы оптимального управления с обратными связями, обеспечивающей перевод объекта (2.8), (2.11) в конечное состояние вида (2.14) с заданной точностью $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y}) \leq \varepsilon_0$

$$\max_{x \in [x_0,x_1]} |Q(x,u(\cdot),\tilde{y},T) - Q^*(x)| \leq \tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y}) \tag{2.18}$$

при минимальном значении функционала (2.15) для каждой из допустимых величин $y = \tilde{y} = (\tilde{z}^0,\tilde{w}) \in Y$.

Очевидно, что в таком случае может быть обеспечен значительный выигрыш как по величине критерия (2.17), так и по предельно достижимым значениям $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y})$ в (2.18) по сравнению с ε_0 в (2.14). В пренебрежении инерционностью и погрешностями процедур наблюдения и идентификации величина $\tilde{y}$ должна быть определена по некоторой заранее фиксируемой детерминированной зависимости $F(Q(x,t))$ от результатов всегда неполного наблюдения за текущим состоянием $Q(x,t)$ ОРП:

$$\tilde{y} = (\tilde{z}^0,\tilde{w}) = F(Q(x,t)), \tag{2.19}$$

где $F(Q(x,t))$ следует выбрать из условий минимальной сложности технической реализации СУ на множестве возможных вариантов, обеспечивающих требуемую точность вычисления $\tilde{y}$.

Достаточным основанием для подобного используемого всюду далее идеализированного описания идентификатора, реализуемого в форме (2.19), является известная теорема разделения [104], согласно которой такое представление становится возможным при надлежащем проектировании наблюдателя состояния с требуемыми динамическими свойствами, эффективно функционирующего в условиях воздействия случайных помех.

В итоге возникает задача проектирования идентификатора (2.19) и синтеза регулятора $u^* = u^*(Q(x,t))$, обеспечивающих решение детерминированной краевой задачи (2.8), (2.11), (2.18), (2.19) с минимальным значением критерия оптимальности (2.15) при $z^0 = \tilde{z}^0, w = \tilde{w}$ в (2.10).

Рассмотрим сначала соответствующую детерминированную задачу (2.8) – (2.12), (2.15), (2.18), (2.19) синтеза оптимальной по быстродействию СУ с $f_0(\cdot) \equiv 1$, $F_0(\cdot) \equiv 0$ в (2.15) для любого заранее фиксируемого значения $y = \tilde{y} = (\tilde{z}^0,\tilde{w} \in Y)$. Выбор характерной задачи оптимального быстродействия в качестве базовой обосновывается её наглядностью и простотой, но в тоже время возможностью распространить полученные выводы на более сложные постановки задач оптимального управления [7]. Подобная задача, в рамках исследуемой модели ОРП, соответствует в частности, исследуемому далее оптимальному процессу индукционного нагрева металлических слитков перед прокатом, обеспечивая максимальную производительность индукционных установок при заданных температурных кондициях нагреваемого изделия [9; 17]. Применительно к критерию быстродействия оптимальное программное управление $u^*(t)$ объектом (2.8), (2.11), (2.18) при $y = \tilde{y}$ следует искать в классе релейных функций, попеременно принимающих на промежутке $[0,T]$ только свои предельно допустимые значения $u_{\min}$ и $u_{\max}$ в (2.11) [8]. Тем самым $u^*(t)$ определяется априори с точностью до числа N и длительностей Δ_i, $i = \overline{1,N}$ интервалов своего постоянства.

Таким образом, все бесконечномерное фазовое пространство переменных z_n делится на два полупространства, каждое из которых характеризуется одним из двух значений оптимального по быстродействию управления $u^*(t)$. На границе, разделяющей эти полупространства и называемой гиперповерхностью переключения, происходит переход значений u^* с одного из предельно допустимых значений в (2.11) на другое.

Если определить уравнение гиперповерхности переключения некоторой известной функцией $h(z)$, то алгоритм релейного управления, определяющий процедуру синтеза замкнутой системы оптимального быстродействия при полном измерении состояния объекта [105], описывается следующим уравнением:

$$u^*(z) = \frac{u_{\max} + u_{\min}}{2} \pm \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2} \operatorname{sign}(h(z)) \tag{2.20}$$

с обратными связями по всем координатам вектора z и $h(z) = 0$ в бесконечномерном пространстве состояний объекта (2.8).

Попытка синтеза замкнутой системы, функционирующей по такому закону, приводит к практически невыполнимой задаче определения уравнения гиперповерхности переключения и последующего моделирования функции $h(z)$ при нереальном требовании контроля по всем компонентам бесконечного вектора Z.

Переход к реализуемой замкнутой СУ с неполным измерением состояния $\tilde{Q}(x,t) = (Q(\tilde{x}_j,t)) = Q_j(t)), j = \overline{1,N}$ в некоторых N точках $\tilde{x}_j \in [x_0,x_1]$ обеспечивается выбором другой, отличной от $h(z)$, функции переключения $h_1(\tilde{Q},\tilde{y})$ в форме линейной комбинации N сигналов обратной связи по измеряемым величинам $Q_j(t)$ с коэффициентами передачи $\hat{\rho}_j(\tilde{y})$ [16]:

$$h_1(\tilde{Q},\tilde{y}) = \sum_{j=1}^{N} \hat{\rho}_j(\tilde{y})(Q_j^T(\tilde{y}) - Q_j(t)), \tag{2.21}$$

где $Q_j^T(\tilde{y})$ - значения Q_j в конце оптимального процесса управления.

Если выбрать в качестве $\hat{\rho}_j(\tilde{y})$ нетривиальные решения однородной системы $N - 1$ линейных уравнений с N неизвестными

$$\sum_{j=1}^{N} \hat{\rho}_j(\tilde{y})(Q_j^T(\tilde{y}) - Q_j(\tilde{t}_s)) = 0,\ s = \overline{1,N-1}, \tag{2.22}$$

где $\tilde{t}_s,\ s = \overline{1,N-1}$, – расчетные моменты переключения оптимального по быстродействию программного управления $u^*(t)$ релейной формы с N интервалами постоянства длительностью $\Delta_i,\ i = \overline{1,N}$, определяемые вместе с $Q_j^T(\tilde{y}),\ Q_j(\tilde{t}_s)$ для заданной величины $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y})$ при расчете $u^*(t)$ альтернансным методом [16], то

$h_1(\tilde{Q},\tilde{y})$ в (2.21) меняет знак при переходе через нуль вместе с $h(z)$ при $t = \tilde{t}_s$, и только в эти моменты времени, в силу чебышёвских свойств функции $h_1(\tilde{Q},\tilde{y})$, которая не может иметь более $N - 1$ нулей на $[0,T] \ni t$ (см. рисунок 2.1) [7].

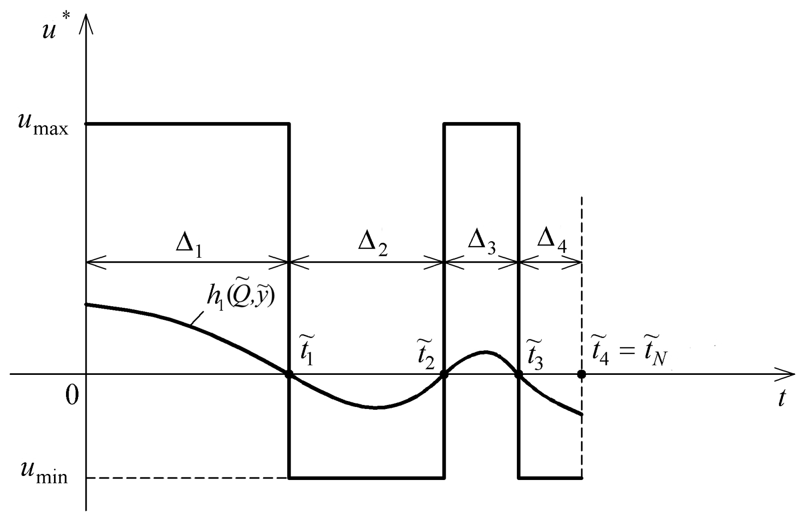


Рисунок 2.1 — Требования к функции переключения $h_1(z)$ при $N = 4$.

Здесь предполагается, что $N = \text{const} \ \forall \ \tilde{y} \ni Y$, например, в характерной ситуации равенства $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y}) = \varepsilon^{(N)}_{\min}(\tilde{y})$, когда допустимая погрешность равномерного приближения $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y})$ в (2.18) принимается равной её минимально достижимой величине $\varepsilon^{(N)}_{\min}(\tilde{y})$ в классе релейных управлений рассматриваемого вида с N интервалами постоянства [7; 16].

Таким образом, при замене $h(z)$ в (2.20) на $h_1(\tilde{Q},\tilde{y})$ в (2.21), алгоритм (2.21) обеспечивает автоматическую отработку оптимального по быстродействию программного управления $u^*(t)$ для заранее фиксируемого значения $\tilde{y} \in Y$. В итоге получаем уравнение оптимального регулятора в детерминированной задаче быстродействия следующего вида

$$u^*(\tilde{Q},\tilde{y}) = \frac{u_{\max} + u_{\min}}{2} \pm \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2} \text{sign} h_1(\tilde{Q},\tilde{y}). \tag{2.23}$$

Конкретный выбор N точек контроля $\tilde{x}_j$ может быть выполнен исходя из соображений максимальной простоты реализации измерительных устройств, минимальной чувствительности алгоритма управления $u^*(t)$ к неточностям измерения и т.д.

Так как значения $\tilde{t}_s$ и $Q_j(\tilde{t}_s)$ принимают различные значения для разных начальных состояний объекта, то коэффициенты обратной связи $\hat{\rho}_j(\tilde{y})$ должны изменяться вместе с $Q(x,0)$.

Если для рассматриваемого объекта характерен некоторой набор существенно различающихся, но мало варьируемых функциональных зависимостей $Q(x,0)$, которые заранее фиксируются в качестве известных исходных данных, то перевод объекта за минимальное время в требуемое конечное состояние можно выполнить с помощью системы квазиоптимального управления с перестраиваемым набором заранее рассчитанных коэффициентов обратной связи. В случаях когда пренебрежение вариациями $Q(x,0)$ недопустимо, структура замкнутой системы должна быть дополнена вычислительным устройством, рассчитывающим значения $\hat{\rho}_j(\tilde{y})$, по заранее нефиксируемому начальному состоянию.

В итоге, синтез детерминированной системы оптимального по быстродействию управления объектом сводится к построению релейной системы автоматического регулирования с линейными обратными связями по значениям управляемой величины в некоторых точках пространственной области её распределения, число которых должно быть равно числу интервалов постоянства оптимальной программы для управляющего воздействия релейной формы (см. рисунок 2.2). Релейный элемент учитывает характеристики регулирующих органов на входе объекта.

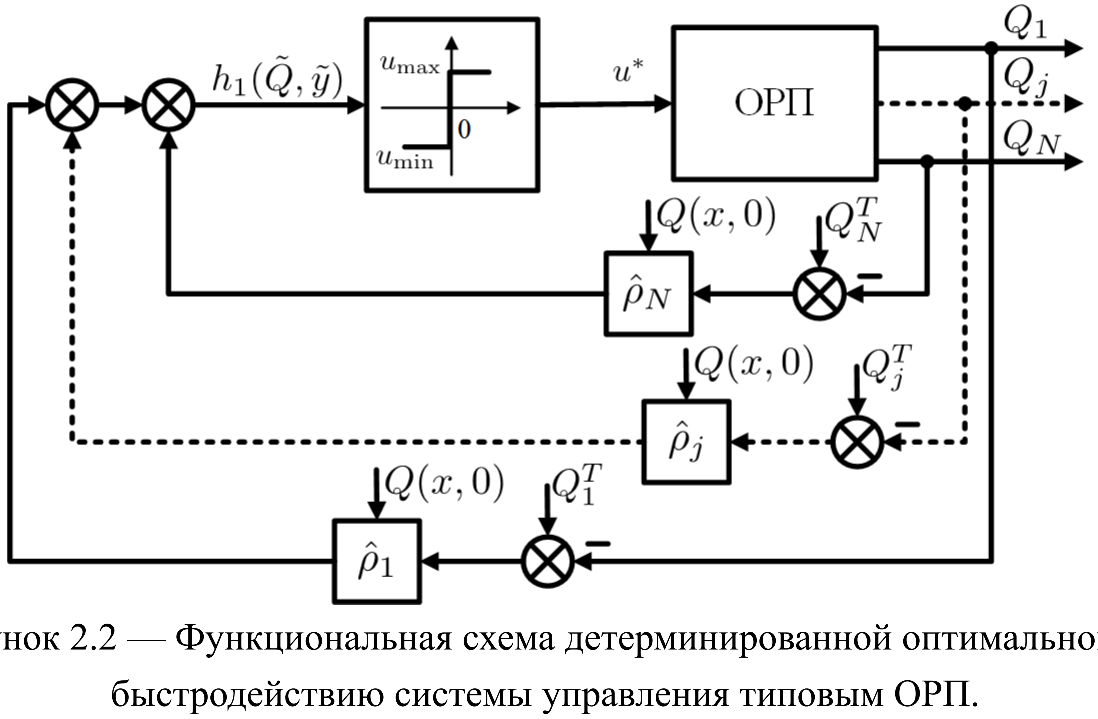


Рисунок 2.2 — Функциональная схема детерминированной оптимальной по быстродействию системы управления типовым ОРП.

Коэффициенты обратной связи остаются постоянными в процессе отработки каждой из оптимальных траекторий движения объекта, а их возможные изменения при переходе от одной траектории к другой осуществляются указанными выше способами в зависимости от характера изменений начального состояния ОРП и требований к точности реализации оптимального процесса.

Окончание оптимального процесса фиксируется равенством нулю функции $h_1(\tilde{Q},\tilde{y})$ при $t = T$.

2.4 Идентификация неопределенных факторов в реальном масштабе времени

Построение замкнутой системы оптимального по быстродействию управления с регулятором (2.21)–(2.23) в условиях интервальной неопределенности значений y требует дополнения ее структуры идентификатором (2.19) реализуемых величин $y = \tilde{y}$ по результатам наблюдения текущего состояния $\bar{Q}_C(x,t) = = (Q(\bar{x}_j,t)) = \bar{Q}_j(t))$ в некоторых r точках $\bar{x}_j \in [x_0,x_1]$, $j = \overline{1,r}$, частично или полностью совпадающего с измеряемыми величинами $Q_C(\tilde{x}_j,t)$ в (2.21)–(2.23) в зависимости от соотношения между числом N интервалов постоянства $u^*(t)$ и размерностью r вектора $y = (y_m), m = \overline{1,r}$, учитываемого в рассматриваемой конкретной ситуации:

$$Q_j(t) = \bar{Q}_j(t),\ j = \overline{1,\mu},\ \mu = \min\{N,r\}. \tag{2.24}$$

Для некоторого заданного момента времени $t^0 \in (0,\Delta_1^*)$ в пределах первого интервала постоянства оптимального управления $u^*(t)$ интегрирование уравнений (2.8) модели ОРП позволяет найти в форме (2.6) непрерывные и непрерывно дифференцируемые зависимости $g_j(y,t^0)$ от y для каждой из величин $\bar{Q}_j(t^0)$, $j = = \overline{1,r}$, при всех $y \in Y$. Соответствующая система равенств

$$\bar{Q}_j(t^0) = g_j(y_1,y_2,\ldots,y_r,t^0),\ j = \overline{1,r},\ y \in Y, \tag{2.25}$$

определяет значения y в окрестности некоторой заданной номинальной точки $y = y_H = (y_{mH}), m = \overline{1,r}$, как неявно заданные, однозначные, непрерывные и непрерывно дифференцируемые по всем аргументам функции

$$y_m = F_m(\bar{Q}_1(t^0),\bar{Q}_2(t^0),\ldots,\bar{Q}_r(t^0)),\ m = \overline{1,r}, \tag{2.26}$$

от наблюдаемых переменных $\bar{Q}_j(t^0)$, если якобиан системы (2.25)

$$J = \frac{D(g_1^0, \dots, g_r^0)}{D(y_1, \dots, y_r)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_r}{\partial y_1} & \frac{\partial g_r}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r} \end{vmatrix}_{y=y_H} \tag{2.27}$$

отличен от нуля в точке $y = y_H$ [106]. Последнее условие, как правило, можно считать выполненным для системы *r* линейно независимых функций $\bar{Q}_j(t),\ j = \overline{1,r}$. По известным правилам дифференцирования неявно заданных функций [106] могут быть заранее вычислены при заданных зависимостях $g_j(y,t^0)$ в (2.25) производные всех функций F_m в (2.26) любого порядка по соответствующей комбинации переменных $\bar{Q}_j$ в точке $y = y_H$ при $\bar{Q}_j = \bar{Q}_j(y_H,t^0),\ j = \overline{1,r}$. В частности, здесь

$$\left(\frac{\partial y_m}{\partial \bar{Q}_j}\right)_{y=y_H} = -\frac{1}{J}\left[\frac{D(g_1^0, \dots, g_r^0)}{D(y_1, \dots, y_{m-1}, \bar{Q}_j, y_{m+1}, \dots, y_r)}\right]_{y=y_H} =$$
$$= \frac{1}{J}\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^0}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_1^0}{\partial y_{m-1}} & 0 & \frac{\partial g_1^0}{\partial y_{m+1}} & \dots & \frac{\partial g_1^0}{\partial y_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_j^0}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_j^0}{\partial y_{m-1}} & 1 & \frac{\partial g_j^0}{\partial y_{m+1}} & \dots & \frac{\partial g_j^0}{\partial y_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_r^0}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_r^0}{\partial y_{m-1}} & 0 & \frac{\partial g_r^0}{\partial y_{m+1}} & \dots & \frac{\partial g_r^0}{\partial y_r} \end{vmatrix}_{y=y_H}, \tag{2.28}$$

$$g_k^0 = g_k(y_1, \dots, y_r, t^0) - \bar{Q}_k(t^0),\ k,m,j = \overline{1,r}.$$

Аналогичным образом можно получить по правилам [106] и производные более высокого порядка, например, следующие выражения для вторых производных $\partial^2 y_m / \partial\bar{Q}_j \partial\bar{Q}_s$:

$$\left(\frac{\partial^2 y_m}{\partial \bar{Q}_j \partial \bar{Q}_s}\right)_{y=y_H} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1^0}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_1^0}{\partial y_{m-1}} & \Phi_{1js} & \frac{\partial g_1^0}{\partial y_{m+1}} & \dots & \frac{\partial g_1^0}{\partial y_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_r^0}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_r^0}{\partial y_{m-1}} & \Phi_{rjs} & \frac{\partial g_r^0}{\partial y_{m+1}} & \dots & \frac{\partial g_r^0}{\partial y_r} \end{vmatrix}_{y=y_H}, \tag{2.29}$$

где

$$\Phi_{kjs} = \left\{ \left[\frac{\partial^2 g_k^0}{\partial y_1^2} \frac{\partial y_1}{\partial \bar{Q}_s} + \dots + \frac{\partial^2 g_k^0}{\partial y_1 \partial y_r} \frac{\partial y_r}{\partial \bar{Q}_s} \right] \frac{\partial y_1}{\partial \bar{Q}_j} + \dots + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial^2 g_k^0}{\partial y_r^2} \frac{\partial y_r}{\partial \bar{Q}_s} + \dots + \frac{\partial^2 g_k^0}{\partial y_r \partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial \bar{Q}_s} \right] \frac{\partial y_r}{\partial \bar{Q}_j} \right\}_{y=y_H}, \ k,j,s = \overline{1,r}, \tag{2.30}$$

и значения $(\partial y_m / \partial \bar{Q}_j)_{y=yH}$, $j = \overline{1,r}$, вычисляются согласно (2.28).

По значениям вычисленных указанным способом производных в точке $y = y_H$ каждая из функций F_m в (2.26) восстанавливается в форме её разложения в этой точке в бесконечный сходящийся кратный ряд Тейлора по переменным $\bar{Q}_j$. В линейном приближении, которым как показывает последующий анализ, можно ограничиваться в типичных ситуациях по требуемой точности определения реализуемых значений $\tilde{y}$, подобное представление зависимости (2.19) приводит к алгоритму идентификации неопределенных величин y в реальном масштабе времени в форме суммы сигналов линейных обратных связей по наблюдаемым переменным $\bar{Q}_j(t^0)$ с заранее вычисляемыми по выражениям (2.28) коэффициентами передачи $\hat{\alpha}_{mj}$:

$$y_m = y_{mH} + \sum_{j=1}^{r} \hat{\alpha}_{mj} (\bar{Q}_j(t^0) - Q_{jH}), \hat{\alpha}_{mj} = \left(\frac{\partial y_m}{\partial \bar{Q}_j} \right)_{y=y_H}, \\ Q_{jH} = g_j(y_H, t^0), \ m = \overline{1,r}. \tag{2.31}$$

При необходимости уточнения алгоритма идентификации, можно учесть последующие члены разложения F_m в степенной ряд Тейлора, но при этом алгоритм идентификации становится нелинейным, и техническая реализация идентификатора значительно усложняется. Такая необходимость может появиться при последующей оценке степени приближения характеристик оптимального процесса в замкнутой системе с линейным идентификатором (2.31) к показателям детерминированной системы при изменении неопределенных факторов в пределах допустимого множества их возможных значений. Усложнение алгоритма идентификации требуется в том случае, когда точность приближения оказывается недостаточной.

2.5 Синтез оптимальной по быстродействию системы управления не полностью определенными моделями ОРП

При наличии идентификатора (2.31) могут быть найдены подобные алгоритмы определения в реальном времени коэффициентов $\hat{\rho}(\tilde{y})$ обратных связей и требуемые конечные значения $Q_j^T(\tilde{y})$ наблюдаемых переменных в структуре функции переключения (2.21) для реализуемых в процессе управления значений y.

По известным зависимостям $\hat{\rho}_i(y),\ i=\overline{1,N}$, которые определяются предварительным решением систем уравнений (2.22) для различных значений $y \in Y$, находятся их линейные приближения в форме первых членов разложения $\hat{\rho}_i(y)$ в ряд Тейлора по степеням y_m в точке $y = y_H$ с заранее рассчитанными коэффициентами $\hat{\beta}_{mi}$:

$$\hat{\rho}_i(y) = \hat{\rho}_i(y_H) + \sum_{m=1}^{r} \hat{\beta}_{mi}(y_m - y_{mH}),\ \hat{\beta}_{mi} = \left(\frac{\partial \hat{\rho}_i}{\partial y_m}\right)_{y=y_H},\ i=\overline{1,N}. \tag{2.32}$$

После подстановки в (2.32) разностей $y_m - y_{mH}$ из (2.31), получим следующий алгоритм вычисления в реальном времени коэффициентов обратных связей в (2.21) по наблюдаемым переменным $\bar{Q}_j(t^0)$:

$$\hat{\rho}_i(y) = \hat{\rho}_i(y_H) + \sum_{j=1}^{r} \hat{\gamma}_{ij}(\bar{Q}_j(t^0) - \bar{Q}_{jH}),\ \hat{\gamma}_{ij} = \sum_{m=1}^{r} \hat{\alpha}_{mj}\hat{\beta}_{mi},\ i=\overline{1,N}, \tag{2.33}$$

где $\hat{\gamma}_{ij}$ находятся по уже известным величинам $\hat{\alpha}_{mj}$ и $\hat{\beta}_{mi}$.

Подобным способом вычисляются значения $Q_i^T(\tilde{y}), i=\overline{1,N}$, в (2.21):

$$\begin{gathered} Q_i^T(y) = Q_i^T(y_H) + \sum_{j=1}^{r} \hat{\gamma}^*_{ij}(\bar{Q}_j(t^0) - \bar{Q}_{jH}), \\ \hat{\gamma}^*_{ij} = \sum_{m=1}^{r} \hat{\alpha}_{mj}\hat{\beta}^*_{mi},\ \hat{\beta}^*_{mi} = \left(\frac{\partial Q_i^T}{\partial y_m}\right)_{y=y_H},\ i=\overline{1,N}. \end{gathered} \tag{2.34}$$

Здесь, аналогично (2.32), коэффициенты $\hat{\beta}^*_{mi}$ должны быть найдены по предварительно рассчитываемым при поиске оптимального программного управления альтернансным методом значениям $Q_i^T(y)$ для $y \in Y$.

Алгоритм управления (2.21)–(2.23) с заменой $\hat{\rho}_j(\tilde{y}),\ Q_j^T(\tilde{y})$ на $\hat{\rho}_j(y),\ Q_j^T(y)$ согласно (2.33), (2.34) с априори фиксируемыми указанным выше способом коэффициентами $\hat{\gamma}_{ij},\ \hat{\gamma}_{ij}^*$ и значениями $\hat{\rho}_i(y_H),\ \bar{Q}_{jH},\ Q_i^T(y_H)$ определяет в совокупности процедуру структурно-параметрического синтеза замкнутой системы оптимального по быстродействию управления ОРП с идентификатором (2.31) при неполном измерении состояния объекта в реальном времени в условиях интервальной неопределенности его параметров $y \in Y$.

На рисунке 2.3 изображена соответствующая полученному алгоритму управления функциональная схема замкнутой системы управления, где структура идентификатора ИД определяется линейными приближениями (2.33) и (2.34).

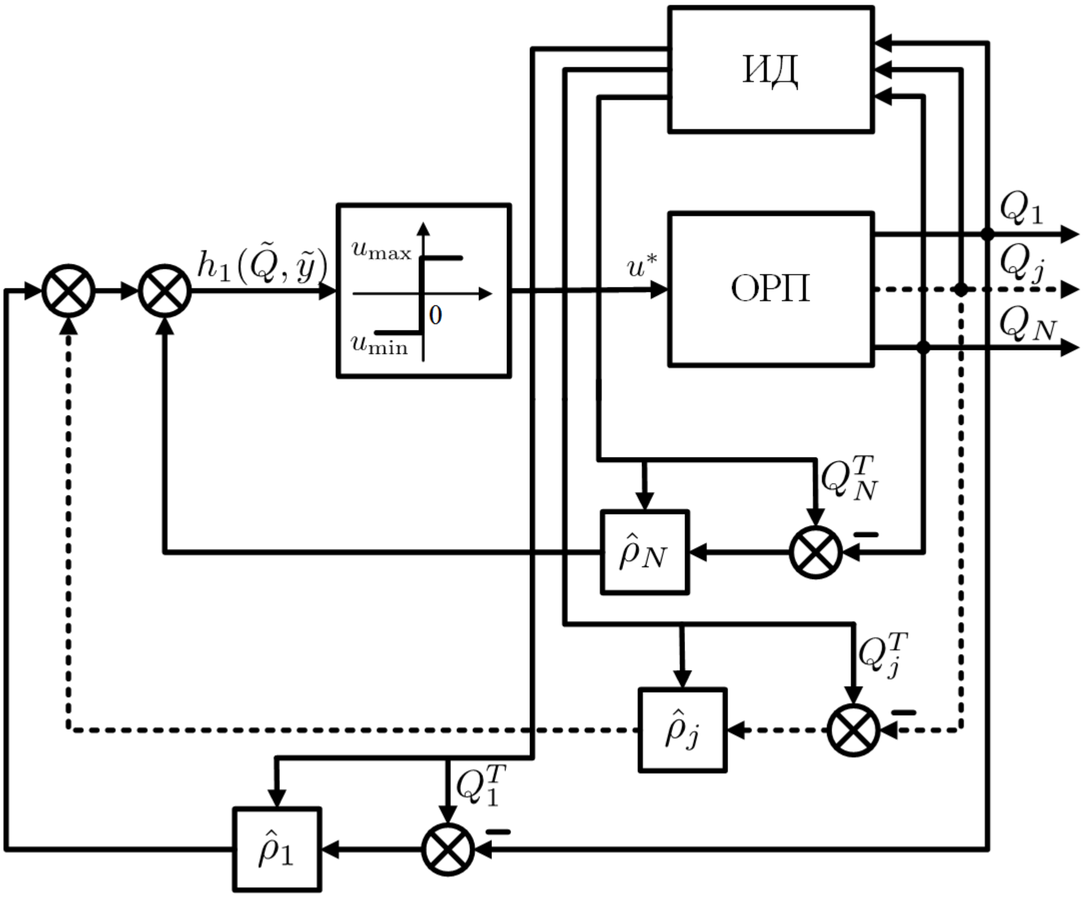


Рисунок 2.3 — Функциональная схема оптимальной по быстродействию системы управления ОРП с идентификатором параметрических характеристик объекта.

Предлагаемый метод синтеза замкнутых систем оптимального быстродействия может быть распространен на более сложные пространственно-многомерные, а также нелинейные модели ОРП с предварительным определением с конечно-разностных аппроксимаций производных в (2.31)–(2.34) при вычислении коэффициентов $\hat{\alpha}_{mj}$, $\hat{\beta}_{mi}$ и $\hat{\beta}^*_{mi}$ по результатам численного моделирования процессов оптимального программного управления.

2.6 Учет фазовых ограничений в задаче синтеза оптимальной по быстродействию СУ ОРП

Предлагаемый метод структурно-параметрического синтеза оптимальной по быстродействию системы управления ОРП может быть распространен на более сложные постановки задач оптимизации с учетом заданных ограничений на поведение в оптимальном процессе управляемой функции состояния ОРП (фазовые ограничения), имеющих существенное прикладное значение [6; 107; 108].

Для типичных ситуаций подобные дополнительные ограничения, накладываемые на функцию состояния ОРП $Q(x,t)$ по ходу оптимального процесса в некоторых точках x_q^H, $q = \overline{1,N_1}$, и её интегральные характеристики, могут быть представлены в первом приближении следующим образом [6]:

$$\begin{gathered} H_q(x_q^H,t) = b_{1q}\int_{x_0}^{x_1} Q(x,t)x^{\Pi}dx + b_{2q}\frac{\partial Q(x_q^H,t)}{\partial x} + \\ +b_{3q}Q(x_q^H,t) \le 1,\ t \in [0,T];\ x_q^H \in [x_0,x_1],\ q = \overline{1,N_1}. \end{gathered} \tag{2.35}$$

Отсюда могут быть получены на основании знаний предметной области [6] все основные модели фазовых ограничений при различных значениях заданных коэффициентов b_{1q}, b_{1q}, b_{1q} [16; 17; 109].

Таким образом, сформулированная ранее базовая детерминированная задача быстродействия усложняется теперь следующим образом.

Необходимо найти такое программное управляющее воздействие $u^*(t)$, которое переводит объект (2.6) и (2.8) из заданного начального (2.10) в требуемое конечное состояние, согласно (2.14), за минимально возможное время $t \to \min$ в условиях ограничений (2.11) и (2.35).

Согласно [16], оптимальное управление $u^*(t)$ в базовой задаче быстродействия с учетом дополнительных ограничений (2.35) следует искать в классе кусочно-непрерывных функций, отличающихся от релейных возможностью существования в пределах каждого интервала участков движения по фазовым ограничениям под управлением $u^{qH}(t)$ длительностью t_{q0} начинающихся при достижении равенства $H_q(x_q^H,t) = 1$ в (2.35) для q-го ограничения в момент времени $t = t_{qH}$. Т. е. оптимальное управление $u^*(t)$ либо принимает свои предельно допустимые значения в (2.11), либо определяется из условий поддержания одной из N дополнительно ограничиваемых величин в (2.35) на предельно допустимом уровне при заведомо выполняемом неравенстве (2.11).

При известном порядке чередования соответствующих участков в пределах каждого интервала управления, фиксации моментов t_{qH} выхода на ограничения условием достижения соответствующих равенств в (2.35) и известных управлениях $u^{qH}(t)$, оптимальное управление $u^*(t)$ в заданной форме, которая может быть установлена исходя из физических представлений о конкретных исследуемых процессах [6], также характеризуется с точностью до числа N и длительностей $\Delta_i^*,\ i = \overline{1,N}$ интервалов с заданным поведением управляющих воздействий на каждом из них. Значения N и Δ_i^*, отличающиеся от решений, полученных для задачи без фазовых ограничений, так же могут быть найдены альтернансным методом [6]. При этом результирующее выражение управляемой функции состояния ОРП $Q(x,t)$ под управлением $u^*(t)$ становится функцией $Q(x,\mathbf{\Delta}^*)$ длительностей интервалов Δ_i^* и пространственной координаты x, отличных от выражений $Q(x,\mathbf{\Delta})$ без учета фазовых ограничений.

Таким образом, описанное выше обстоятельство приводит к необходимости замены оптимального регулятора (2.23) на новый, обеспечивающий автоматическую отработку программного оптимального управления $u^*(t)$, найденного в условиях дополнительных ограничений (2.35) на поведение управляемого состояния ОРП, при $y = \tilde{y} \in Y$ в детерминированной задаче синтеза оптимальной по быстродействию СУ ОРП. В различных конкретных задачах [9] вид управляющих алгоритмов будет принимать различную форму, что приведет к соответствующим структурным изменениям.

Полученные выражения для функции переключения в (2.21) и коэффициентов обратных связей (2.22) остаются справедливыми с учетом необходимости пересчета N длительностей интервалов $\Delta_i^*,\ i = \overline{1,N}$ оптимального по быстродействию программного управления $u^*(t)$ с фазовыми ограничениями (2.35) и величин $Q_j^T(\tilde{y}),\ Q_j(\tilde{t}_s)$.

Рассмотренная в § 2.3 постановка задачи синтеза оптимальных по быстродействию систем управления моделями ОРП в условиях неопределенности дополняется фазовыми ограничениями (2.35), а её решение может быть получено по прежним алгоритмам идентификации неопределенных величин (2.31), определения коэффициентов обратных связей (2.33) и требуемых конечных значений (2.34).

Решение указанной задачи синтеза оптимальной по быстродействию СУ ОРП на примере нестационарного процесса теплопроводности с типичными фазовыми ограничениями приведено в главе 3 настоящей диссертации.

2.7 Выводы по второй главе

- Дана общая постановка задачи программного оптимального управления СРП в условиях ограниченной неопределенности. Отмечены основные причины по которым задачи управления СРП усложняется по сравнению с таковыми для систем с сосредоточенными параметрами.
- Рассмотрена задача синтеза оптимальных по быстродействию систем управления детерминированными моделями ОРП при некотором фиксированном номинальном значении вектора неопределенного параметра в результате решения которой получена структура замкнутой СУ и соответствующий оптимальный регулятор.
- Полученная замкнутая структура дополнена идентификатором неопределенных величин объекта по результатам всегда неполного наблюдения за текущим состоянием управляемой величины, уточняющим отклонения от номинальных значений параметров вблизи точек начального приближения.
- Определена процедура структурно-параметрического синтеза замкнутой системы оптимального по быстродействию управления объектом с распределенными параметрами в условиях неопределенности его параметрических характеристик.
- Предложен способ распространения указанной методики на сложные постановки задач оптимизации с учетом фазовых ограничений.

Глава 3. Система оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева в условиях интервальной неопределенности параметрических характеристик объекта

Типичным объектом с распределенными параметрами является процесс индукционного нагрева металла.

В настоящем разделе работы по описанной в главе 2 методике решается представляющая самостоятельный теоретический и практический интерес задача синтеза системы оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева металлических полуфабрикатов перед обработкой давлением.

3.1 Базовая математическая модель процесса индукционного нагрева

Температурное поле $Q(x,t)$ в процессе индукционного нагрева металлических изделий цилиндрической формы с сосредоточенным управляющим воздействием по мощности внутреннего тепловыделения $u(t)$ описывается в зависимости от времени *t* и радиальной координаты *x* (подобно модели (2.2)–(2.5)) в первом приближении линейным, неоднородным и пространственно-одномерным уравнением теплопроводности в цилиндрических координатах следующего вида [19]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \frac{1}{c\gamma}F_{b1}\left(\frac{x}{R},v\right)u(t);\ x \in [0,R],\ t \in [0,T]; \tag{3.1}$$

с краевыми условиями

$$Q(x,0) = Q_0 = \text{const}; \tag{3.2}$$

$$\alpha Q(R,t) + \lambda\frac{\partial Q(R,t)}{\partial x} = \alpha Q_C(t);\ \frac{\partial Q(0,t)}{\partial x} = 0, \tag{3.3}$$

где на управляющее воздействие $u(t)$ по мощности нагрева накладывается следующее ограничение:

$$0 \le u(t) \le u_{\max}\forall t \in [0,T],\ u_{\max} = \frac{P_{0\max}}{R}. \tag{3.4}$$

В уравнениях (3.1)–(3.4) приняты следующие обозначения: R – радиус цилиндра; c, γ – удельная теплоемкость и плотность нагреваемого материала; a – коэффициент температуропроводности нагреваемого изделия; λ, α – коэффициенты теплопроводности и конвективной теплопередачи; Q_0 – начальное распределение температур; $Q_C(t)$ – температура окружающей среды; $P_{0\max}$ – максимальная поверхностная плотность мощности нагрева; $F_{b1}\left(\frac{x}{R},v\right)$ – функция пространственного распределения по радиусу цилиндра внутренних электромагнитных источников тепла, определяемая путем решения уравнений электромагнитного поля индуктора по выражению [6; 7]

$$F_{b1}\left(\frac{x}{R},v\right) = v\frac{ber'^2\left(\frac{x}{R}v\right) + bei'^2\left(\frac{x}{R}v\right)}{ber\,v\,ber'v + bei\,v\,bei'\,v},\ v = R\sqrt{2\pi\mu_a f\sigma}, \tag{3.5}$$

где f – частота питающего индуктор тока; σ – электропроводность нагреваемого материала; μ_a – абсолютная магнитная проницаемость нагреваемого материала; $ber\,v,\ ber'v,\ bei\,v,\ bei'v$ – функции Кельвина и их первые производные.

Выражение для температурного состояния в задаче управления по мощности источника тепла $u(t)$ процессом индукционного нагрева металлических изделий цилиндрической формы находится путем решения краевой задачи (3.1)-(3.3) с использованием метода конечных интегральных преобразований [19] и для типичного случая $Q = Q_C(t) = \text{const}$ представляется в виде его разложения в бесконечный ряд с улучшенной сходимостью по собственным функциям $J_0\left(\eta_n\frac{x}{R}\right)$ краевой задачи (3.1)–(3.3) [7]

$$Q(x,t) = Q_0 + \frac{1}{c\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\bar{F}_{b1n}(\eta_n,v)\eta_n^2 J_0\left(\eta_n\frac{x}{R}\right)}{(\eta_n^2 + Bi^2)J_0^2(\eta_n)}\int_0^T e^{-\mu_n^2(t-\tau)}u(\tau)d\tau, \tag{3.6}$$

где $\mu_n^2 = \frac{a\eta_n^2}{R^2}$ – собственные числа, $\eta_n,\ n = 1,2,\ldots$ – бесконечно возрастающая последовательность корней уравнения $BiJ_0(\eta) - \eta J_1(\eta) = 0$; Bi – безразмерный критерий Био, характеризующий уровень тепловых потерь с поверхности цилиндра в процессе нагрева; $J_i(\eta),\ i = 0,1$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка; $\bar{F}_{b1n}(\eta_n, v)$ – моды функции (3.5):

$$\bar{F}_{b1n}(\eta_n, v) = \int_0^R F_{b1}\left(\frac{x}{R},v\right)J_0\left(\eta_n\frac{x}{R}\right)\frac{x}{R}dx,\ n = 1,2,\ldots. \tag{3.7}$$

Применение к уравнениям (3.1)–(3.4) конечного интегрального преобразования с ядром, равным собственным функциям краевой задачи, приводит подобно (2.6) и (2.8) к описанию модели объекта бесконечной системой дифференциальных уравнений для временных мод $Q_n(\mu_n, t)$ разложения температурного поля $Q(x,t)$ в ряд вида (2.6) по собственным функциям $J_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right)$ [19]:

$$\begin{gathered}\frac{dQ_n}{dt} = -\mu_n^2 Q_n(\mu_n, t) + \frac{1}{c\gamma}\bar{F}_{b1n}(\mu_n, v)u(t) + d_{1n}Q_C(t),\ n = 1,2,\ldots;\\ Q_n(\mu_n, 0) = Q_n^{(0)}(\mu_n);\\ Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(\mu_n, t) J_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right),\end{gathered} \tag{3.8}$$

где $Q_n^{(0)}(\mu_n)$ – моды разложения заданных равномерных начальных распределений температур $Q(x,0)$ в бесконечные ряды по системе собственных функций; d_{1n} – известные коэффициенты [19].

Пусть далее вся информация о начальной температуре Q_0 и тепловых потерях с боковой поверхности цилиндра в процессе индукционного нагрева, оцениваемых по величине критерия Bi, исчерпывается сведениями об их принадлежности допустимым интервалам возможных значений:

$$Q_0 \in [Q_{0\,\min}, Q_{0\,\max}];\ Bi \in [Bi_{\min}, Bi_{\max}] \tag{3.9}$$

с известными границами $Q_{0\,\min},\ Q_{0\,\max},\ Bi_{\min},\ Bi_{\max}$.

В соответствии с § 2.2, сформулируем сначала содержательную постановку задачи оптимального по быстродействию управления объектом (3.8) в условиях ограниченной неопределенности его характеристик, порождаемой вектором $y = (y_1, y_2) \in Y,\ y_1 = Q_0,\ y_2 = Bi$, не полностью определенных факторов (3.9), где Y – множество всех допустимых по ограничениям (3.9) комбинаций величин Q_0 и Bi.

В задаче оптимального программного управления необходимо найти такое управляющее воздействие $u^*(t)$ в условиях заданных ограничений (3.4), которое переводит объект, описываемый бесконечной системой уравнений (3.8) из заданного начального (в типичной ситуации $Q_0 = \text{const}$) в требуемое конечное состояние (2.18) за минимально возможное время $T \to \min$ для каждой из допустимых величин $y = (Q_0, Bi)$, полагая в соответствии с типичными требованиями технологии последующей обработки давлением

$$Q^*(x) = Q^* = \text{const}\, \forall\, x \in [0,R]$$

для желаемого равномерного распределения температур в конце оптимального процесса нагрева.

В задаче синтеза оптимального управления необходимо найти алгоритм $u^*(t,Q(x,t))$ обратной связи, автоматически обеспечивающего достижение этих же целей.

3.2 Задача оптимального программного управления детерминированным процессом индукционного нагрева

Прежде чем переходить к задаче синтеза СУ в условиях (3.9) интервальной неопределенности, определим вид и параметры оптимального программного управляющего воздействия для детерминированной модели объекта.

3.2.1 Строгая постановка задачи оптимального программного управления

Зададим критерий оптимальности и требования к конечному состоянию объекта.

Одним из базовых показателей качества при управлении объектом (3.1)–(3.3) является время T перевода из заданного начального в требуемое конечное состояния. Интегральная форма этого критерия, называемого критерием быстродействия, представлена следующим выражением:

$$I = \int_0^T dt = T \to \min\,. \tag{3.10}$$

Требования к конечному температурному состоянию (2.18) для детерминированного случая записываются в виде неравенства:

$$\max_{x\in[0,R]} |Q(x,T) - Q^*| \le \varepsilon_0. \tag{3.11}$$

Применительно к модальному представлению объекта (3.8), требования (3.11) с учетом разложения $Q(x,T)$ в ряд (3.8) принимают следующий вид:

$$\max_{x\in[0,R]} \left| \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(\mu_n,T) J_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right) - Q^* \right| \le \varepsilon_0. \tag{3.12}$$

Теперь задача оптимального быстродействия может быть сформулирована следующим образом.

Необходимо найти такое допустимое в условиях заданных ограничений (3.4) управляющее воздействие $u(t)$ которое переводит объект, описываемый бесконечной системой уравнений (3.8) из заданного начального в требуемое конечное состояние (3.11) за минимально возможное время $T \to \min$.

3.2.2 Алгоритмы оптимального программного управления

Для определения оптимальной по быстродействию программы управления $u^*(t)$ бесконечномерным объектом (3.8) можно использовать принцип максимума Понтрягина [7; 100]. Функция Понтрягина для критерия оптимальности (3.10) и уравнений объекта (3.8) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} H(Q_n, u, \psi, t) &= -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \left[-\mu_n^2 Q_n(\mu_n,t) + \frac{1}{c\gamma} \bar{F}_{b1n}(\mu_n, v) u(t) + d_{1n} Q_C(t) \right] = \\ &= -1 - \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \left[\mu_n^2 Q_n(\mu_n,t) - d_{1n} Q_C(t) \right] + u(t) \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \frac{1}{c\gamma} \bar{F}_{b1n}(\mu_n, v), \end{aligned} \tag{3.13}$$

где сопряженные переменные $\psi_n(t)$ определяются из системы уравнений:

$$\frac{d\psi_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_j} = \mu_j^2 \psi_j, \ j = 1,2,\ldots . \tag{3.14}$$

Полученная система уравнений для сопряженных переменных решается независимо от уравнений объекта. Решение каждого из таких типовых дифференциальных уравнений первого порядка записывается следующим образом:

$$\psi_n(t) = \psi_n^T e^{-\mu_n^2(T-t)},\ n = 1{,}2,\ldots, \tag{3.15}$$

здесь ψ_n^T - значения $\psi_n(T)$ в конце оптимального процесса.

Подстановка выражения (3.15) в функцию Понтрягина (3.14) определяет в явной форме её зависимость от управляющего воздействия:

$$\begin{aligned} H(Q_n,u,\psi,t) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^T e^{-\mu_n^2(T-t)} \left[\mu_n^2 Q_n^*(\mu_n,t) d_{1n} Q_C(t)\right] + \\ + u(t) \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^T e^{-\mu_n^2(T-t)} \frac{1}{c\gamma} \bar{F}_{b1n}(\mu_n,v). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Тогда основное соотношение принципа максимума Понтрягина

$$\max_{u\in U} H(Q^*,u,\psi^*,t) = H(\bar{Q}^*,u^*,\psi^*,t),\ t\in(0,T) \tag{3.17}$$

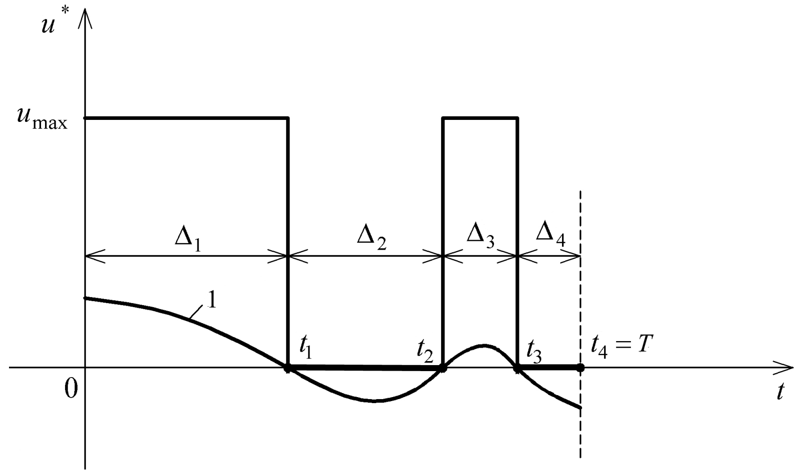
для оптимального процесса $Q^*(t) = (Q_n^*(t)),\ \psi^*(t) = (\psi_n^*(t)),\ u^*(t)$ определяет с учётом (3.15) выражение для оптимального управления по мощности источников тепла в форме релейной функции времени:

$$u^*(t) = \frac{u_{\max}}{2}\left[1 + \operatorname{sign} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c\gamma} \bar{F}_{b1n}(\mu_n,v) \psi_n^T e^{-\mu_n^2(T-t)}\right]. \tag{3.18}$$

Равномерно сходящийся бесконечный ряд экспонент в (3.18) не равен тождественно нулю на любом интервале $(t',t'') \ni t,\ 0 \le t' < t'' \le T$, и, следовательно, оптимальная программа $u^*(t)$ не имеет особых участков [6] (см. рисунок 3.1).

Выражение (3.18) определяет кусочно-постоянную структуру алгоритма оптимального по быстродействию управления для сосредоточенного внутреннего управляющего воздействия с точностью до конечного в условиях (3.11) числа N [16] и длительностей Δ_i интервалов их постоянства во времени:

$$u^* = \frac{u_{\max}}{2}\left[1 + (-1)^j\right],\ \sum_{m=0}^{j-1} \Delta_m < t < \sum_{m=0}^{j} \Delta_m;\ j = \overline{1,N},\ \Delta_0 = 0. \tag{3.19}$$



1 - Кривая $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c\gamma} \bar{F}_{b1n}(\mu_n, v) \psi_n^T e^{-\mu_n^2 (T-t)}$.

Рисунок 3.1 — Вид оптимального программного управления $u^*(t)$.

Дальнейшая проблема сводится к определению этих параметров.

Температурное поле в конце оптимального по быстродействию процесса управления является функцией $Q(x,\mathbf{\Delta})$ искомых величин $\mathbf{\Delta} = (\Delta_i),\ i = \overline{1,N}$, для всех $x \in [0,R]$, получаемой по выражению (3.6) при управлении $u(t)$ вида (3.19).

3.2.3 Алгоритмы программного оптимального управления с учетом фазовых ограничений

Постановка задачи в § 3.2.1 может быть дополнена типовыми для технологических процессов нагрева металла перед обработкой давлением ограничениями вида (2.35) на максимальные значения температуры $Q_{\max}$ (при $x_q^H = x_{\max}(t) \le x_1,\ b_{1q} = b_{2q} = 0,\ b_{3q} = \frac{1}{Q_{\text{доп}}},\ N_1 = 1$) и растягивающих термонапряжений $\sigma_{\max}$ (при $b_{2q} = 0,\ N_1 = 1,\ x_q^H = 0$) , которые на всем протяжении процесса не должны превышать допустимых пределов, соответственно $\sigma_{\text{доп}}$ и $Q_{\text{доп}}$:

$$Q_{\max}(t) = \max\{Q(x,t):\ x \in [x_0,x_1]\} \le Q_{\text{доп}},\ Q_{\text{доп}} \ge Q^*; \qquad (3.20)$$

$$\sigma_{\max}(t) \le \sigma_{\text{доп}}; t \in [0,T]. \qquad (3.21)$$

В случае, если оптимальный процесс с управлением вида (3.18), рассчитанный без учета этих условий, не нарушает их, то он является оптимальным и с учетом данных ограничений, выполняющихся автоматически. Как следствие, необходимость коррекции оптимального управления возникает только в случае не удовлетворения неравенствам (3.20) и (3.21).

Характер кривых $Q_{\max}(t)$ и $\sigma_{\max}(t)$ в режиме нагрева с максимальной постоянной мощностью $u_{\max}$ при равномерном начальном распределении температур устанавливается из физических соображений (см. рисунок 3.2). Из рисунка видно, что неравенства (3.20) и (3.21) нарушаются в интервале (t_1, t_2) из-за превышения допустимого предела для растягивающих термонапряжений в случае конвективного характера теплоотдачи [9], а в момент t_3 - из-за недопустимой величины температурного максимума.

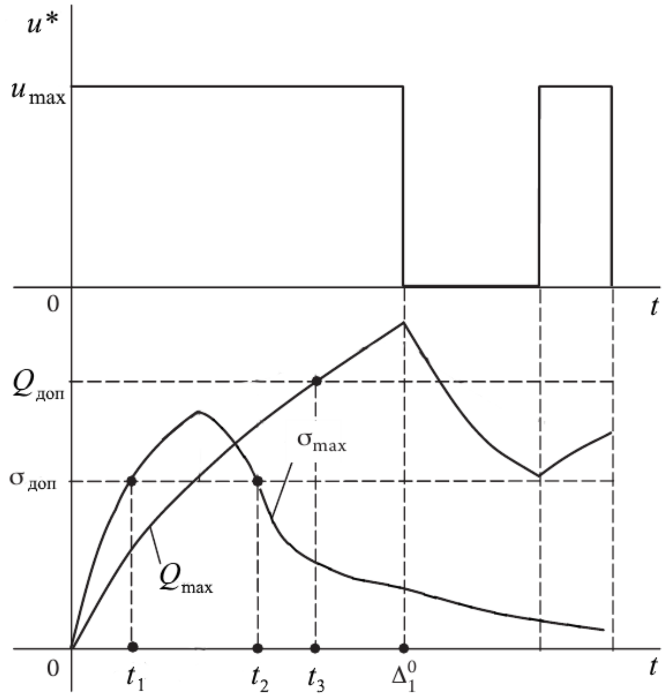


Рисунок 3.2 — Формы кривых $Q_{\max}(t)$ и $\sigma_{\max}(t)$ в оптимальном по быстродействию процессе нагрева без фазовых ограничений.

В большинстве практических случаев коррекция оптимальных режимов в связи с рассматриваемыми технологическими ограничениями оказывается необходимой только в пределах первого интервала $(0,\Delta_1^*) \ni t$ управления процессом нагрева при $u_{\max}$. Она сводится к подбору управляющих воздействий на соответствующих участках в пределах этого интервала, поддерживающих $Q_{\max}(t)$ и/или $\sigma_{\max}$ на предельно допустимых уровнях $Q_{доп}$ и $\sigma_{доп}$ согласно (3.20) и (3.21).

Для рассматриваемой модели (3.1)–(3.3) в условиях равномерного начального распределения температур $Q_0 = \text{const}$ анализ поведения температурного поля в классе рассматриваемых управляющих воздействий (см. § 2.6) приводит, с учетом физических представлений о процессах нестационарной теплопроводности для большинства практически интересных ситуаций, к базовому варианту алгоритма оптимального управления, для которого фазовые ограничения заведомо не нарушаются при $t > \Delta_1^*$ (см. рисунок 3.3) [6; 8; 17; 109; 110]:

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & t \in (0,t_\sigma); \\ u^\sigma(t), & t \in (t_\sigma,t_p); \\ u_{\max}, & t \in (t_p,t_Q); \\ u^Q(t), & t \in (t_Q,\Delta_1^*); \\ \dfrac{u_{\max}}{2}[1+(-1)^{j+1}], & t_{j-1} < t < t_j,\ j = \overline{2,N}. \end{cases} \tag{3.22}$$

Здесь t_σ – момент достижения ограничения по величине растягивающих термонапряжений [9], t_p – момент времени при котором управляющее воздействие u^σ достигает значения $u_{\max}$, t_Q – момент выхода на ограничение температуры заготовки заданным значением $Q_{доп}$. Управления $u^\sigma(t),\ u^Q(t)$ соответствуют участкам движения по ограничениям на термонапряжение и максимальную температуру. В

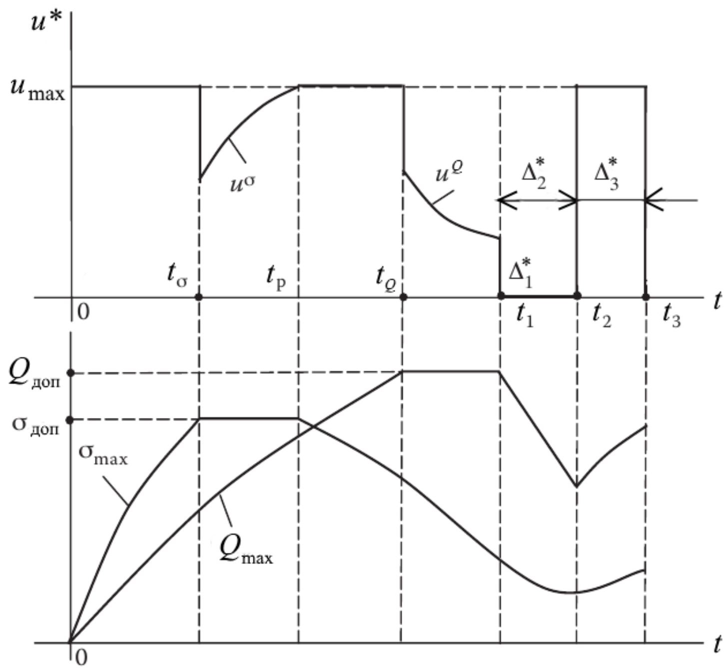


Рисунок 3.3 — Оптимальное управление $u^*(t)$, максимальная температура $Q_{\max}(t)$ и максимальные термонапряжения $\sigma_{\max}$ в оптимальном по быстродействию процессе нагрева с фазовыми ограничениями.

различных частных случаях алгоритм (3.22) может иметь более простой вид.

Далее будем рассматривать наиболее распространенный частный случай, когда учитывается только основное ограничение (3.20) на максимальную температуру в процессе нагрева. Тогда вместо (3.22) будем иметь (см. рисунок 3.4):

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & t \in (0, t_Q); \\ u^Q(t), & t \in [t_Q, \Delta_1^*); \\ \dfrac{u_{\max}}{2}[1 + (-1)^{j+1}], & \sum\limits_{m=1}^{j-1} \Delta_m^* < t < \sum\limits_{m=1}^{j} \Delta_m^*;\ j = \overline{2, N}. \end{cases} \tag{3.23}$$

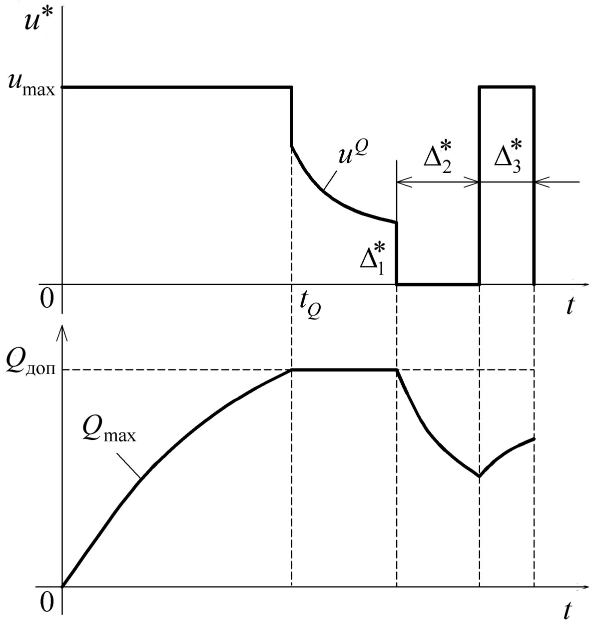


Рисунок 3.4 — Оптимальное управление $u^*(t)$ и максимальная температура $Q_{\max}(t)$ в задаче оптимального по быстродействию управления процессом нагрева с фазовым ограничением.

Здесь на первом интервале длительностью Δ_1^* сначала производится форсированный нагрев с $u^*(t) = u_{\max}$ до момента $t = t_Q$ достижения равенства $Q_{\max}(t_Q) = Q_{\text{доп}}$, которое поддерживается управляющим воздействием $u^Q(t)$ на промежутке $t \in [t_Q, \Delta_1^*)$. Далее идет попеременное чередование предельно допустимых значений управляющего воздействия $u_{\min} = 0$ и $u_{\max}$, не приводящее к нарушению ограничения (3.20).

Используя формулу (3.6) для расчета температурного поля объекта (3.1)–(3.3) найдем t_Q и $u^Q(t)$.

Момент времени t_Q, в котором достигается предельное значение $Q_{\text{доп}}$ и внутреннюю точку $x = x_{\max}$ температурного максимума в (3.20), являющейся точкой экстремума температурной кривой $Q(x,t_Q)$, можно найти из следующей системы уравнений:

$$Q_{\max}(t_Q) = Q(x_{\max},t_Q) = Q_{\text{доп}};\ \frac{\partial Q(x_{\max},t_Q)}{\partial x} = 0. \tag{3.24}$$

Данная система уравнений может быть решена численными методами.

Полагая длительность участка поддержания $Q_{\max}$ на уровне $Q_{\text{доп}}$ сравнительно малой, можно пренебречь смещением температурного максимума за это время и найти $u^Q(t)$ из условия стабилизации температуры в точке $x_{\max}$. Тогда первое равенство в (3.24) вновь определяет с достаточной точностью стабилизирующее управление $u^Q(t)$ в экспоненциальной форме [6]:

$$u^Q(t) = u_{\max}\left(a_Q + b_Q e^{-\beta_Q(t-t_Q)}\right),\ t \in [t_Q, \Delta_1^*], \tag{3.25}$$

где коэффициенты $a_Q,\ b_Q,\ \beta_Q$ определяются по формулам:

$$\begin{gathered} a_Q = \frac{L_1\eta_2^2 + L_2\eta_1^2}{E_1\eta_2^2 + E_2\eta_1^2};\ b_Q = \frac{(\eta_2^2 - \eta_1^2)(E_1L_2 - E_2L_1)}{(E_1\eta_2^2 + E_2\eta_1^2)(E_1 + E_2)}; \\ \beta_Q = \frac{(E_1\eta_2^2 + E_2\eta_1^2)a}{(E_1 + E_2)R^2}. \end{gathered} \tag{3.26}$$

Здесь

$$\begin{gathered} L_n = A_n^Q\left[\overset{*}{Q}_n\ \eta_n^2 - \eta_n Q_0 J_1(\eta_n)\right]; E_n = A_n^Q \bar{F}_{1bn}(\eta_n,v); A_n^Q = \frac{2\eta_n^2 J_0\left(\eta_n \dfrac{x_{\max}}{R}\right)}{(\eta_n^2 + Bi^2)J_0^2(\eta_n)}; \\ \overset{*}{Q}_n = \int_0^1 Q(l,t_Q)J_0(\eta_n l)l dl; n = 1,2. \end{gathered}$$

Таким образом, оптимальное управляющее воздействие определяется заранее с точностью до N параметров $\Delta_i^*,\ i = \overline{1,N}$, при вычисленных значениях t_Q и $u^Q(t)$ в форме (3.23), (3.25).

3.2.4 Редукция к задаче полубесконечной оптимизации

При заданной в (3.11) допустимой абсолютной точности ε_0 приближения результирующего температурного поля $Q(x,\mathbf{\Delta})$ к требуемому распределению температур $Q^* = \text{const}$ в пределах заданной пространственной области $x \in [0,R]$ исходная задача быстродействия может быть сформулирована в виде следующей задачи параметрической оптимизации с линейной целевой функцией:

$$I\left(\mathbf{\Delta}\right) = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i \to \min_{\mathbf{\Delta}\in\Omega};\ \Omega = \left\{\mathbf{\Delta} : 0 < \Delta_i < \infty, i = \overline{1,N}\right\}; \tag{3.27}$$

$$\Phi\left(\mathbf{\Delta}\right) = \max_{x\in[0,R]} |Q(x,\mathbf{\Delta}) - Q^*| \le \varepsilon_0. \tag{3.28}$$

Выражение для $Q(x,\mathbf{\Delta})$ может быть получено в форме явных функций своих аргументов путем вычисления интеграла в (3.6) с управляющим воздействием (3.19) в задаче без учета фазовых ограничений в следующем виде [6]:

$$\begin{aligned} Q(x,\mathbf{\Delta}) = Q_0 + \frac{u_{\max}R^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\bar{F}_{b1n}(\eta_n, \upsilon)\eta_n^2 J_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right)}{(\eta_n^2 + Bi^2)J_0^2(\eta_n)} \times \\ \times \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+1} \left[1 - \exp\left(-\mu_n^2 \sum_{m=j}^{N} \Delta_m\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Для типичного случая учета фазового ограничения на максимальную температуру после подстановки в (3.6) управления $u^*(t)$ в виде (3.23), (3.25) будем иметь вместо (3.29):

$$\begin{aligned} Q(x, \overset{*}{\mathbf{\Delta}}) = Q_0 + \frac{u_{\max}R^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\bar{F}_{b1n}(\eta_n, \upsilon) J_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right)}{(\eta_n^2 + Bi^2)J_0^2(\eta_n)} \exp\left(-\mu_n^2 \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^*\right) \times \\ \times \left[e^{\mu_n^2 t_Q} - 1 + a_Q \left(e^{\mu_n^2 \Delta_1^*} - e^{\mu_n^2 t_Q}\right) + \right. \\ \left. + \frac{b_Q \eta_n^2}{\eta_n^2 - \beta_Q^*} \left(e^{\mu_n^2 \Delta_1^* - \beta_Q(\Delta_1^* - t_Q)} - e^{\mu_n^2 t_Q}\right)\right] + \\ + \sum_{j=3}^{N} (-1)^{j+1} \left[1 - \exp\left(-\mu_n^2 \sum_{m=j}^{N} \Delta_m^*\right)\right], \beta_Q^* = \frac{\beta_Q R^2}{a}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

где $\overset{*}{\mathbf{\Delta}} = (\Delta_i^*),\ i = \overline{1,N}$.

В итоге задача оптимизации сводится к специальной задаче математического программирования (задача полубесконечной оптимизации [6; 16]) на экстремум функции (3.27) конечного числа N переменных Δ_i или Δ_i^* с бесконечным числом ограничений в форме неравенства (3.28), которое эквивалентно требованию выполнения неравенства $|Q(x,\mathbf{\Delta}) - Q^*| \leq \varepsilon_0$ для всех $x \in [0,R]$.

Решения $\mathbf{\Delta}^0,\ N = N_0$ задачи (3.27) и (3.28) при достаточно малостеснительных допущениях для многих типичных приложений обладают рядом замечательных («альтернансных») свойств [16]. Основное отличительное свойство оптимального конечного состояния управляемой величины состоит в том, что число R_x точек $x_j^0 \in [0,R],\ j = \overline{1,R_x}$, в которых достигаются предельно допустимые абсолютные отклонения $Q(x,T)$ от Q^*, равные ε_0, всегда оказывается не меньшим числа искомых параметров оптимального процесса.

Тогда альтернансные свойства записываются следующим образом [6]:

$$\left|Q\left(x_j^0, \mathbf{\Delta}^0\right) - Q^*\right| = \varepsilon_0,\ j = \overline{1,R_x};\ \mathbf{\Delta}^0 = \left(\Delta_1^0, \Delta_2^0, \ldots, \Delta_{N_0}^0\right), \tag{3.31}$$

где

$$R_x = \begin{cases} N_0 + 1 & \text{при } \varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(N_0)}; \\ N_0 & \text{при } \varepsilon_0 > \varepsilon_{\min}^{(N_0)}. \end{cases} \tag{3.32}$$

Здесь $\varepsilon_{\min}^{(N_0)}$ – минимально достижимая погрешность равномерного приближения $Q(x,\mathbf{\Delta})$ или $Q(x,\ \overset{*}{\mathbf{\Delta}})$ к Q^* в классе управляющих воздействий вида (3.19) или (3.25) в задачах без учета или с учетом фазового ограничения соответственно с N_0 интервалами постоянства.

Главной отличительной особенностью этих соотношений является их замкнутость относительно всех параметров оптимального процесса, к которым относятся искомые значения $\Delta_i^0,\ i = \overline{1,N_0}$ при заданной конкретным числом величине $\varepsilon_0 > \varepsilon_{\min}^{(N_0)}$, и сама заранее неизвестная величина $\varepsilon_{\min}^{(N_0)}$, если $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(N_0)}$, что создает потенциальные возможности перевода такой системы равенств в системы уравнений относительно данных параметров, последующее решение которых исчерпывает решение исходной задачи. Однако процедура реализации подобных возможностей оказывается наиболее сложным этапом при разработке конструктивных методик поиска оптимальных алгоритмов управления с использованием их альтернансных свойств. Основные затруднения заключаются в том, что равенствам (3.31) формально соответствует бесчисленное множество вариантов по форме кривой зависимости $Q(x,\boldsymbol{\Delta}^0)$ от пространственной координаты для разных величин $\boldsymbol{\Delta}^0$ с различными точками x_j^0, порождающих бесконечное множество различных систем уравнений относительно $\boldsymbol{\Delta}^0$. Выбор на этом множестве единственного варианта, который действительно отвечает оптимальному процессу, оказывается невозможным вне связи с конкретными физическими закономерностями предметной области, т.е. в данном случае с физическими особенностями процесса индукционного нагрева. При выполнении некоторых более жестких ограничений, обычно выполняющихся для используемых моделей процесса индукционного нагрева [16], можно существенным образом уточнить альтернансные свойства $Q(x,\boldsymbol{\Delta}^0)$, которые в соответствующей более детальной формулировке резко ограничивают число формально возможных вариантов по форме кривой $Q(x,\boldsymbol{\Delta}^0)$ на отрезке $[0,R]$ и значительно упрощают тем самым задачу ее определения. Основной результат при этом заключается в том, что максимально допустимые отклонения $Q(x,\boldsymbol{\Delta}^0)$ от Q^* оказываются знакочередующимися в точках x_j^0, где $0 \leq x_1^0 < x_2^0 < \cdots < x_{R_x}^0 \leq R$ [16]. Тогда равенства (3.31) уточняются следующим образом:

$$\begin{gathered} Q(x_j^0,\boldsymbol{\Delta}^0) - Q^*(x_j^0) = \mu\,(-1)^j \varepsilon_0;\ j = j = \overline{1,R_x};\ \mu = \pm 1; \\ 0 \leq x_1^0 < x_2^0 < \cdots < x_{R_x}^0 \leq R, \end{gathered} \tag{3.33}$$

т.е. точки x_j^0 образуют чебышёвский альтернанс [16]. Однако и в этом случае установить форму кривой $Q(x,\boldsymbol{\Delta}^0)$ без дополнительной информации о числе ее точек экстремума на отрезке $[0,R]$ и о принадлежности его границ к числу точек x_j^0 в (3.33) невозможно без привлечения базовых закономерностей процесса индукционного нагрева.

В подавляющем большинстве случаев для практических задач нагрева всегда имеет место простое правило определения числа N_0 интервалов управления в задаче (3.27) непосредственно по месту заданной точности ε_0 в неравенствах

$$\varepsilon_{\min}^{(1)} > \varepsilon_{\min}^{(2)} > \cdots > \varepsilon_{\min}^{(j)} > \varepsilon_{\min}^{(j+1)} > \cdots > \varepsilon_{\min}^{(P)} = \varepsilon_{\inf} \geq 0, \tag{3.34}$$

где $\varepsilon_{\inf} > 0,\ P < \infty$ в задаче управления по мощности источников тепла [16].

В [16] доказано, что это правило имеет вид:

$$N_0 = j \text{ для всех } \varepsilon_{\min}^{(j)} \leq \varepsilon_0 < \varepsilon_{\min}^{(j-1)}. \tag{3.35}$$

Ключевым свойством, позволяющим определить действительную форму кривой $Q(x,\mathbf{\Delta}^0)$ наряду с правилом (3.35), является установление максимально возможного числа M_N точек экстремума x_j^{ext}, $j = \overline{1,M_N}$, на кривой результирующего пространственного распределения температурного поля в зависимости от числа N интервалов оптимального управления. Это свойство вытекает из физических свойств температурного поля в процессе индукционного нагрева и формулируется следующим образом [6; 9]: максимальное число M_N точек x_j^{ext}, $j = \overline{1,M_N}$, экстремума функции $Q(x,\mathbf{\Delta})$ на отрезке $[0,R] \ni x$ при управляющем воздействии вида (3.19) или (3.25), характеризуемом произвольным вектором параметров $\mathbf{\Delta} = (\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_N)$, определяется следующим соотношением при внутреннем сосредоточенном управлении $u(t)$:

$$M_N = \begin{cases} N+1 & \text{при нечетных } N; \\ N & \text{при четных } N. \end{cases} \tag{3.36}$$

В рассматриваемой задаче индукционного нагрева металлических заготовок цилиндрической формы под обработку давлением типичными являются требования (3.28) достижения точности нагрева ε_0, равной предельно достижимой величине $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ в классе оптимальных по быстродействию двухинтервальных управляющих воздействий (см. рисунок 3.1) [6; 9].

При $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ согласно (3.35) находим $N_0 = 2$. Выражение (3.29) принимает в таком случае следующий вид:

$$\begin{aligned} Q(x,\Delta_1,\Delta_2) = Q_0 + \frac{u_{\max}R^2}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\bar{F}_{b1n}(\eta_n,v)\eta_n^2 J_0\left(\eta_n\frac{x}{R}\right)}{(\eta_n^2+Bi^2)J_0^2(\eta_n)}\times \\ \times\left[e^{-\mu_n^2\Delta_2} - e^{-\mu_n^2(\Delta_1+\Delta_2)}\right]. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Выражение (3.30) в задаче с учетом фазового ограничения при управляющем воздействии (3.23) с $N = 2$ видоизменяется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
Q(x,\Delta_1^*, \Delta_2^*) = Q_0 + \frac{u_{\max} R^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\bar{F}_{b1n}(\eta_n, v) J_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right)}{(\eta_n^2 + Bi^2) J_0^2(\eta_n)} e^{\left(-\mu_n^2(\Delta_1^* + \Delta_2^*)\right)} \times \\
\times \left[e^{\mu_n^2 t_Q} - 1 + a_Q \left(e^{\mu_n^2 \Delta_1^*} - e^{\mu_n^2 t_Q} \right) + \right. \\
\left. + \frac{b_Q \eta_n^2}{\eta_n^2 - \beta_Q^*} \left(e^{\mu_n^2 \Delta_1^* - \beta_Q(\Delta_1^* - t_Q)} - e^{\mu_n^2 t_Q} \right) \right], \beta_Q^* = \frac{\beta_Q R^2}{a}.
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

В условиях равенств $R_x = 3$, $M_N = 2$ при $N_0 = 2$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\text{min}}^{(2)}$, выполняющихся согласно базовым свойствам (3.32), (3.36) оптимальных решений задачи полубесконечной оптимизации (3.27), (3.28), однозначным образом фиксируется показанная на рисунке 3.5 форма кривой $Q(x,\mathbf{\Delta}^0)$ на отрезке $[0,R] \ni x$, отвечающая альтернансным знакочередующимся соотношениям (3.33) при $x_1^0 = 0$; $x_2^0 = x_2^{ext}$; $x_3^0 = R$, которым тем самым отвечает единственно возможный вариант расчетной системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными Δ_1^0, Δ_2^0, x_2^{ext} и $\varepsilon_{\text{min}}^{(2)}$

$$
\begin{cases}
Q(0,\Delta_1^0,\Delta_2^0) - Q^* = -\varepsilon_{\text{min}}^{(2)}; \\
Q(x_2^{ext},\Delta_1^0,\Delta_2^0) - Q^* = \varepsilon_{\text{min}}^{(2)}; \\
Q(R,\Delta_1^0,\Delta_2^0) - Q^* = -\varepsilon_{\text{min}}^{(2)}; \\
\dfrac{\partial Q(x_2^{ext},\Delta_1^0,\Delta_2^0)}{\partial x} = 0.
\end{cases}
\tag{3.39}
$$

Решая эту систему уравнений с подстановкой (3.29) или (3.30) известными численными методами, находим искомые неизвестные длительности интервалов постоянства оптимального программного управления Δ_1^0, Δ_2^0, выступающую в роли промежуточной неизвестной координату точки $x_2^{ext} \in (0,R)$ максимума $Q(x,\mathbf{\Delta}^0)$ и саму величину минимакса $\varepsilon_{\text{min}}^{(2)}$.

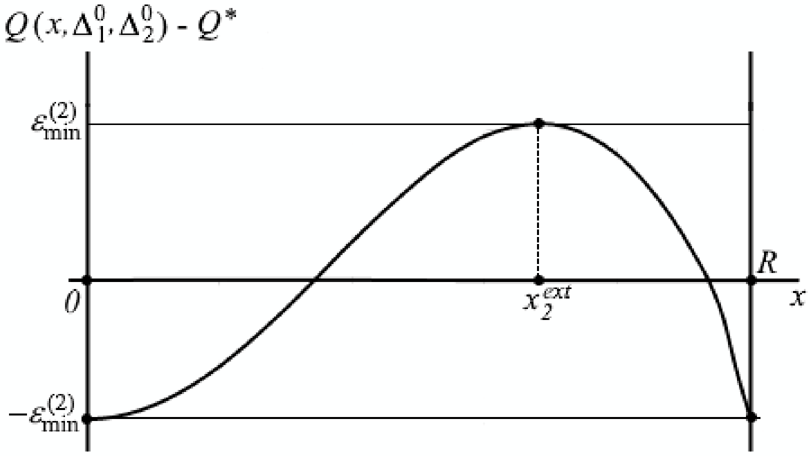


Рисунок 3.5 — Распределение температур по радиусу цилиндра в конце оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева.

3.3 Синтез детерминированного оптимального по быстродействию регулятора с неполным измерением состояния в задаче без учета фазовых ограничений

В соответствии с § 2.3 сформулируем следующую детерминированную задачу синтеза оптимальной по быстродействию системы управления.

Пусть в соответствии с требованиями вида (3.11) к конечному температурному состоянию требуется обеспечить равномерный нагрев тела до заданной температуры $Q^* = \text{const}$ с предельно достижимой точностью $\tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y}) = \varepsilon_{\min}^{(2)}(\tilde{y})$ в классе оптимальных по быстродействию двухинтервальных управляющих воздействий релейной формы (см. рисунок 3.6) для любого заранее фиксируемого значения $\tilde{y}$ в пределах заданного множества Y возможных величин вектора неопределенных факторов в (3.9) [6; 9].

В этом случае функция переключения (2.21) формируется в соответствии с правилом (3.35) при $N = 2$ интервалах постоянства оптимального управления по сигналам обратной связи по непосредственно измеряемым температурам $Q_1(t), Q_2(t)$ в точках $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ по радиусу цилиндра, в качестве которых удобно принять точки $\tilde{x}_1 = R,\ \tilde{x}_2 = 0$, где результирующие значения температур Q_1^T и Q_2^T в конце оптимального процесса независимо от начальной температуры будут одинаковы и равны $Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)}(\tilde{y})$, согласно равенствам (3.39). Если принять для определенности $\hat{\rho}_1 = 1$, то функция переключения (2.21) принимает в таком случае

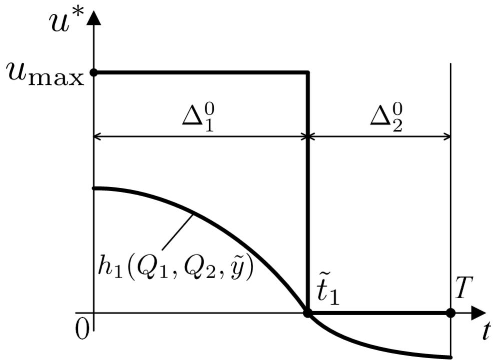


Рисунок 3.6 — Оптимальное по быстродействию двухинтервальное управление по мощности внутренних источников тепла.

следующий вид:

$$h_1(Q_1,Q_2,\tilde{y}) = Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)}(\tilde{y}) - Q_1(t) + \hat{\rho}_2(\tilde{y})\left(Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)}(\tilde{y}) - Q_2(t)\right). \quad (3.40)$$

Соответствующий алгоритм оптимального управления с обратными связями (2.23) определяется выражением:

$$\begin{aligned} u^*(Q_1,Q_2,\tilde{y}) = \frac{u_{\max}}{2} \pm \frac{u_{\max}}{2}\mathrm{sign}\Big[Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)}(\tilde{y}) - Q_1(t) + \\ + \hat{\rho}_2(\tilde{y})\left(Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)}(\tilde{y}) - Q_2(t)\right)\Big], \end{aligned} \quad (3.41)$$

где для любого фиксированного значения $\tilde{y} \in Y$ коэффициент обратной связи $\hat{\rho}_2$, соответствующий какому-либо одному фиксированному значению Q_0, что отвечает квазиоптимальному управлению, допустимому при пренебрежимо малых вариациях Q_0, может быть найден как решение системы уравнений (2.22):

$$\hat{\rho}_2(\tilde{y}) = \frac{Q_1(\tilde{t}_1) - Q^* + \varepsilon_{\min}^{(2)}(\tilde{y})}{Q^* - Q_2(\tilde{t}_1) - \varepsilon_{\min}^{(2)}(\tilde{y})}. \quad (3.42)$$

Здесь $Q_1(\tilde{t}_1),\ Q_2(\tilde{t}_1)$ – значения температур Q_1 и Q_2 в момент времени $\tilde{t}_1 = \Delta_1$ переключения двухинтервального управления, вычисляемые согласно (3.37) при $\Delta_2 = 0$:

$$Q(x,\Delta_1) = Q_0 + \frac{u_{\max}R^2}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\bar{F}_{b1n}(\eta_n,v)\eta_n^2 J_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right)}{(\eta_n^2 + Bi^2)J_0^2(\eta_n)}\left[1 - e^{-\mu_n^2\Delta_1}\right], \quad (3.43)$$

по значению Δ_1, определяемому при расчете альтернансным методом оптимального программного управления путем решения системы уравнений (3.39).

Строго оптимальным процесс в замкнутой системе управления (с полным объемом информации об объекте) остается только при равенстве начальной температуры ее расчетному значению, однако при небольших отклонениях основные показатели процесса нагрева обычно мало отличаются от строго оптимальных характеристик [6].

На рисунке 3.7 изображена функциональная схема соответствующей замкнутой СУ.

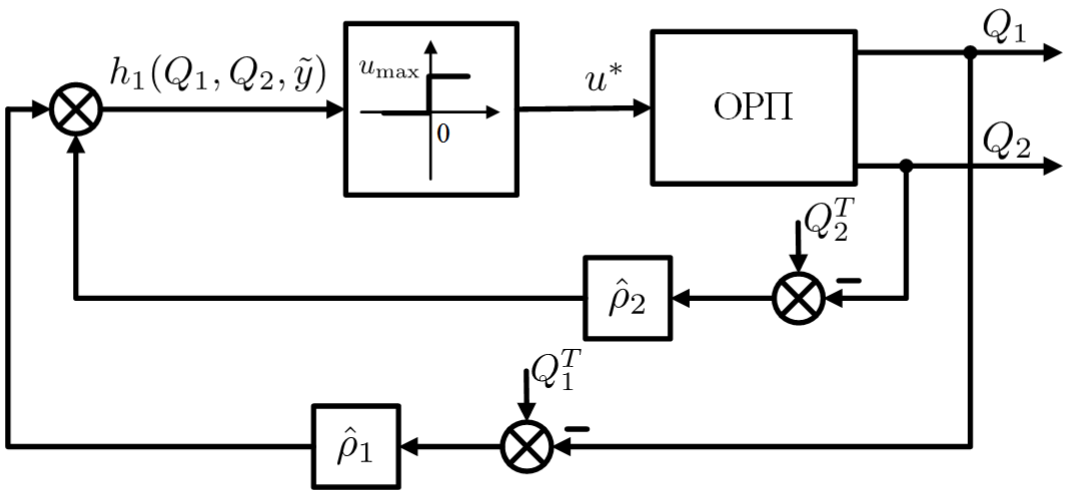


Рисунок 3.7 — Функциональная схема замкнутой системы оптимального по быстродействию управления детерминированным процессом индукционного нагрева без учета фазовых ограничений при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(2)}$.

3.4 Синтез детерминированного оптимального по быстродействию регулятора с неполным измерением состояния в задаче с учетом фазовых ограничений

Дополним задачу синтеза оптимальной по быстродействию СУ детерминированным процессом индукционного нагрева, рассмотренную в § 3.3, фазовым ограничением (3.20) на максимальную температуру $Q_{\max}(t)$ в процессе нагрева.

Как было показано в § 3.2.3, в этом случае оптимальный по быстродействию алгоритм программного управления усложняется участком поддержания $Q_{\max}(t)$ на предельно допустимом уровне $Q_{\text{доп}}$ и для рассматриваемого случая

$\varepsilon_0 = \varepsilon^{(2)}_{\min},\ N = 2$, $u^*(t)$ в (3.23) принимает вид (см. рисунок 3.8):

$$u^*(t) = \begin{cases} u_{\max}, & \text{при } 0 < t < t_Q; \\ u^Q(t), & \text{при } t_Q \le t < \Delta_1^*; \\ 0, & \text{при } \Delta_1^* < t < \Delta_1^* + \Delta_2^*. \end{cases} \tag{3.44}$$

Здесь, по сравнению с задачей в § 3.2.1 без учета ограничения на $Q_{\max}(t)$, про-

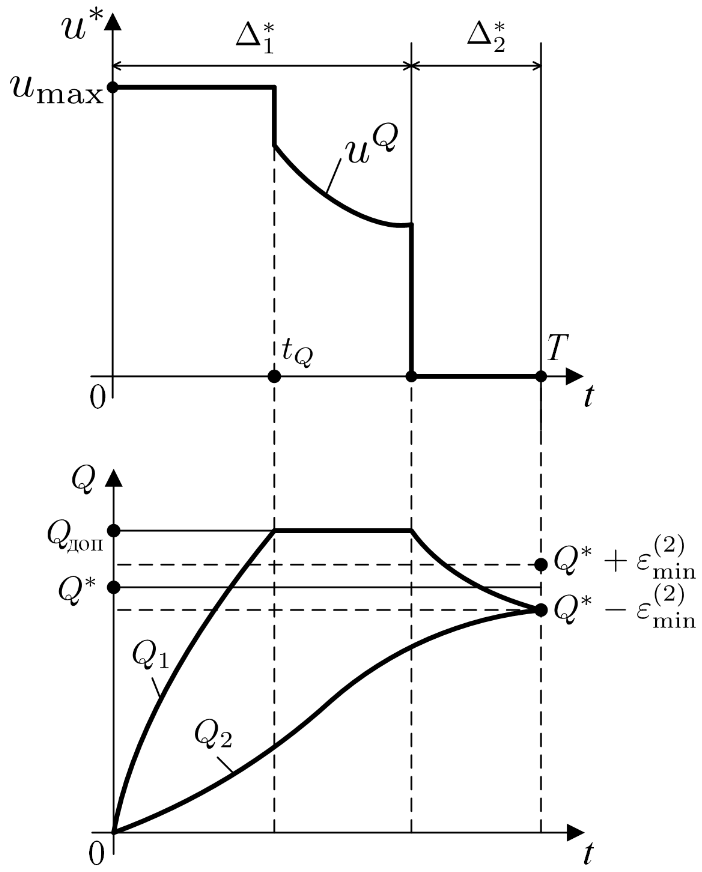


Рисунок 3.8 — Управляющее воздействие и температурное поле в оптимальном по быстродействию процессе нагрева с ограничением на максимальную температуру.

исходит замена на первом интервале управления постоянной величины $u_{\max}$ воздействием u^Q с момента времени $t = t_Q$ и до окончания первого интервала оптимальной программы $u^*(t)$, когда происходит переключение на $u_{\min} = 0$, под управлением которого происходит процесс выравнивания температур вплоть до окончания оптимального процесса в момент $t = T = \Delta_1^* + \Delta_2^*$. Длительности интервалов $\Delta_1^*,\ \Delta_2^*$ оптимального процесса управления предварительно находятся путем решения системы уравнений (3.39) с подстановкой выражения (3.38).

Таким образом, для автоматической отработки оптимальной программы (3.44) в рассматриваемой замкнутой системе необходимо учитывать соотношение между $Q_{\max}(t)$ и $Q_{\text{доп}}$ наряду со знаком функции переключения $h_1(Q_1,Q_2,\tilde{y})$ в (3.40).

Часто в реальных ситуациях за $Q_{\max}(t)$ можно принять с допустимой погрешностью температуру поверхности $Q(x_{\max},t) = Q(R,t) = Q_1(t)$ нагреваемого металлического изделия для всех $t \in (0,\Delta_1^*)$ [6].

Тогда вместо (3.41) получаем следующий алгоритм управления

$$u^*(Q_1,Q_2,\tilde{y}) = \begin{cases} u_{\max}, & \forall\, Q_1,Q_2 : h_1(Q_1,Q_2,\tilde{y}) > 0;\ Q_1 < Q_{\text{доп}}; \\ u^Q(t), & \forall\, Q_1,Q_2 : h_1(Q_1,Q_2,\tilde{y}) > 0;\ Q_1 = Q_{\text{доп}}; \\ 0, & \forall\, Q_1,Q_2 : h_1(Q_1,Q_2,\tilde{y}) \le 0;\ Q_1 < Q_{\text{доп}}, \end{cases} \tag{3.45}$$

который будет в любой момент времени соответствовать оптимальному по быстродействию режиму нагрева, если функция переключения $h_1(Q_1,Q_2,\tilde{y})$ меняет знак в расчетный момент времени Δ_1^*.

Требуемое поведение $h_1(Q_1,Q_2,\tilde{y})$ обеспечивается выбором вновь рассчитанного коэффициента $\hat{\rho}_2(\tilde{y})$ по формуле (3.42) с учетом новых значений $\varepsilon^{(2)}_{\min}(\tilde{y}),\ \tilde{t}_1 = \Delta_1^*$, полученных ранее при вычислении значений параметров оптимального программного управления $u^*(t)$ в (3.44), а также значений температур в конце первого интервала управления $Q_1(\tilde{t}_1),\ Q_2(\tilde{t}_1)$, которые могут быть найдены по формуле

$$\begin{aligned} Q(x,\Delta_1^*) = Q_0 + \frac{u_{\max}R^2}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\bar{F}_{b1n}(\eta_n,v)J_0\left(\eta_n\frac{x}{R}\right)}{(\eta_n^2+Bi^2)J_0^2(\eta_n)}e^{\mu_n^2\Delta_1^*}\times \\ \times\Bigg[e^{\mu_n^2 t_Q} - 1 + a_Q\left(e^{\mu_n^2\Delta_1^*} - e^{\mu_n^2 t_Q}\right) + \\ + \frac{b_Q\eta_n^2}{\eta_n^2-\beta_Q^*}\left(e^{\mu_n^2\Delta_1^* - \beta_Q(\Delta_1^*-t_Q)} - e^{\mu_n^2 t_Q}\right)\Bigg], \beta_Q^* = \frac{\beta_Q R^2}{a}, \end{aligned} \tag{3.46}$$

полученной из выражения (3.38) для $Q(x,\Delta_1^*,\Delta_2^*)$ при $\Delta_2^* = 0$.

Структура замкнутой системы на рисунке 3.7 должна быть дополнена, в соответствии с новым алгоритмом управления (3.45), задержанной обратной связью по $Q_1(t)$ с коэффициентами передачи $\hat{\rho}_3$, обеспечивающей поддержание Q_1 на уровне $Q_{\text{доп}}$ с требуемой точностью, определяемой выбором величины $\hat{\rho}_3$. Задержанный характер дополнительной обратной связи по Q_1 обеспечивается нелинейным элементом НЭ с зоной нечувствительности, отсекающим ее воздействие при $Q_1 < Q_{\text{доп}}$.

В итоге задача синтеза оптимального по быстродействию регулятора в рассматриваемом случае сводится к построению релейной системы автоматического управления с линейными обратными связями по температурам Q_1 и Q_2, а также дополнительной нелинейной связью по Q_1 (см. рисунок 3.9).

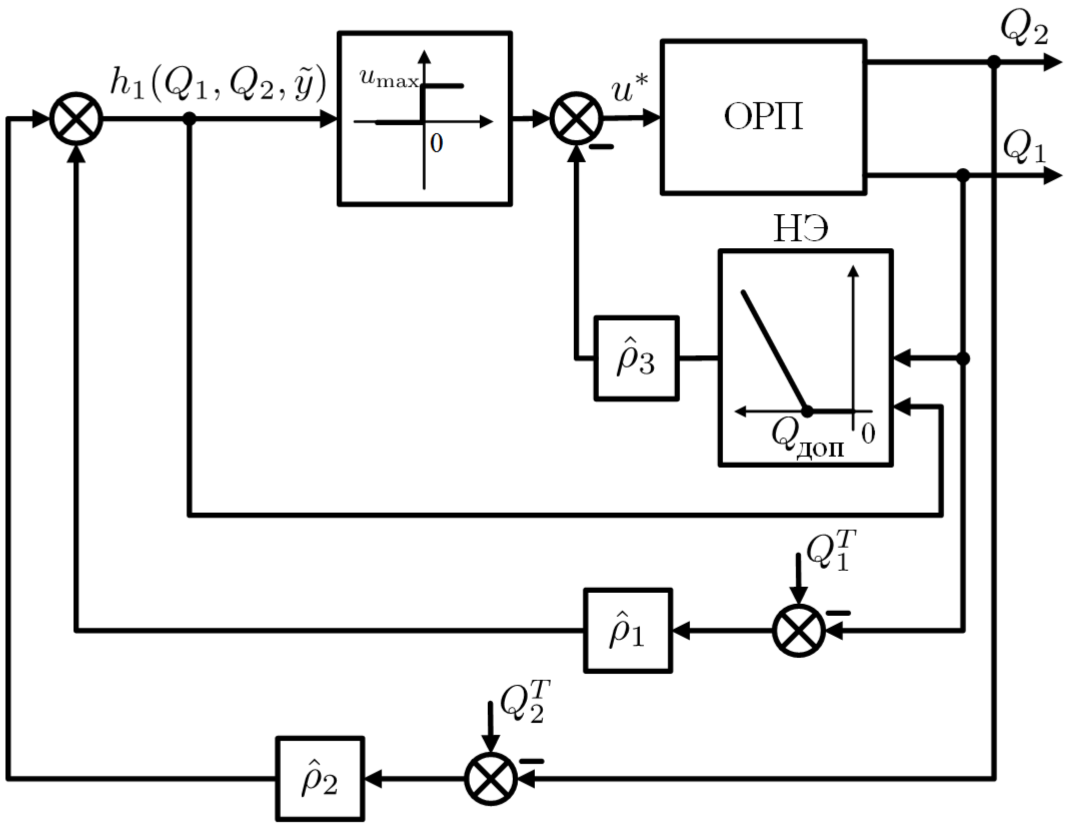


Рисунок 3.9 — Функциональная схема системы оптимального по быстродействию управления детерминированным процессом индукционного нагрева с учетом фазового ограничения на максимальную температуру.

Задержанная обратная связь вступает в работу только на втором участке управления, при выполнении соответствующих условий в (3.45), а выбор величины коэффициента $\hat{\rho}_3$ определяется допуском отклонения Q_1 от $Q_{\text{доп}}$.

3.5 Синтез оптимальной по быстродействию СУ процессом индукционного нагрева в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта в задаче быстродействия без учета фазовых ограничений

Как было показано в § 2.4, для построения замкнутой системы оптимального по быстродействию управления с регулятором (3.41) в условиях интервальной неопределенности $y \in Y$ необходимо дополнить её структуру идентификатором, который принимает в линейном приближении вид (2.31), где для рассматриваемого случая (3.9) $r = 2$. Зависимости $g_j(y_1, y_2, t^0),\ j = 1{,}2$, в (2.25), (2.27) и (2.28) определяются выражением (3.6) и (3.43) для выбранного момента $t = t^0$ в пределах первого интервала постоянства $[0{,}\Delta_1] \ni t$ оптимального управления $u^*(t)$

$$g_j(Q_0, Bi, t^0) = Q_0 + \frac{u_{\max} R^2}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\bar{F}_{b1n}(\eta_n, v)\eta_n^2 J_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right)}{(\eta_n^2 + Bi^2) J_0^2(\eta_n)} \left[1 - e^{-\mu_n^2 \Delta_1}\right], \qquad (3.47)$$
$$\tilde{x}_j = \{R, 0\},\ j = 1{,}2.$$

Якобиан (2.27) системы (2.25) принимает в этом случае следующий вид:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_r}{\partial y_1} & \frac{\partial g_r}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r} \end{vmatrix}_{y=y_H} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial Q_0} & \frac{\partial g_1}{\partial Bi} \\ \frac{\partial g_2}{\partial Q_0} & \frac{\partial g_2}{\partial Bi} \end{vmatrix}_{y=y_H} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial g_1}{\partial Bi} \\ 1 & \frac{\partial g_2}{\partial Bi} \end{vmatrix}_{y=y_H} = \qquad (3.48)$$
$$= \frac{\partial g_2}{\partial Bi} - \frac{\partial g_1}{\partial Bi},$$

где $\frac{\partial g_2}{\partial Bi}$, $\frac{\partial g_1}{\partial Bi}$ находятся путем дифференцирования выражения (3.43):

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial Bi} &= \frac{2u_{\max}R^2}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dF(\cdot)k-\bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi),v)K_1(\cdot)k}{b^2}+\\ &\qquad+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi),v)d\mu(\cdot)e^{-\mu_n^2t^0}t^0b}{b^2};\\ \frac{\partial g_2}{\partial Bi} &= \frac{2u_{\max}R^2}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dF(\cdot)J_0(\eta_n(Bi))k}{b^2J_0^2(\eta_n(Bi))}-\\ &\qquad-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi),v)K_2(\cdot)k}{b^2J_0^2(\eta_n(Bi))}-\\ &\qquad-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d\mu(\cdot)e^{-\mu_n^2t^0}t^0J_0(\eta_n(Bi))\bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi),v)b}{b^2J_0^2(\eta_n(Bi))}.\end{aligned}\tag{3.49}$$

На основании (2.28) и (3.49) получим выражения для коэффициентов передачи $\hat{\alpha}_{mj},\ m,j=1,2$ в (2.31)

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{11}=\left(\frac{\partial y_1}{\partial\bar{Q}_1}\right)_{y=y_H} &= \frac{1}{J}\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1^0}{\partial Q_1} & \frac{\partial g_1^0}{\partial Bi}\\ \frac{\partial g_2^0}{\partial Q_1} & \frac{\partial g_2^0}{\partial Bi}\end{vmatrix}_{y=y_H}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix}1 & \frac{\partial g_1^0}{\partial Bi}\\ 0 & \frac{\partial g_2^0}{\partial Bi}\end{vmatrix}_{y=y_H}=\\ &=\frac{1}{J}\frac{\partial g_2^0}{\partial Bi}=1-\frac{\partial g_2/\partial Bi}{\partial g_1/\partial Bi}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_1}{N_1};\end{aligned}\tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{12}=\left(\frac{\partial y_1}{\partial\bar{Q}_2}\right)_{y=y_H} &= \frac{1}{J}\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1^0}{\partial Q_2} & \frac{\partial g_1^0}{\partial Bi}\\ \frac{\partial g_2^0}{\partial Q_2} & \frac{\partial g_2^0}{\partial Bi}\end{vmatrix}_{y=y_H}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix}0 & \frac{\partial g_1^0}{\partial Bi}\\ 1 & \frac{\partial g_2^0}{\partial Bi}\end{vmatrix}_{y=y_H}=\\ &=-\frac{1}{J}\frac{\partial g_1^0}{\partial Bi}=1-\frac{\partial g_1/\partial Bi}{\partial g_2/\partial Bi}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_1}{M_1};\end{aligned}\tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{21}=\left(\frac{\partial y_2}{\partial\bar{Q}_1}\right)_{y=y_H} &= \frac{1}{J}\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1^0}{\partial Q_0} & \frac{\partial g_1^0}{\partial Q_1}\\ \frac{\partial g_2^0}{\partial Q_0} & \frac{\partial g_2^0}{\partial Q_1}\end{vmatrix}_{y=y_H}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1^0}{\partial Q_0} & 1\\ \frac{\partial g_2^0}{\partial Q_0} & 0\end{vmatrix}_{y=y_H}=\\ &=-\frac{1}{J}\frac{\partial g_2^0}{\partial Q_0}=-\frac{\lambda}{2u_{\max}R^2}\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_2+N_3}{b^2J_0^2(\eta_n(Bi))}};\end{aligned}\tag{3.52}$$

$$\hat{\alpha}_{22}=\left(\frac{\partial y_2}{\partial \bar{Q}_2}\right)_{y=y_H}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1^0}{\partial Q_0} & \frac{\partial g_1^0}{\partial Q_2}\\ \frac{\partial g_2^0}{\partial Q_0} & \frac{\partial g_2^0}{\partial Q_2}\end{vmatrix}_{y=y_H}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1^0}{\partial Q_0} & 0\\ \frac{\partial g_2^0}{\partial Q_0} & 1\end{vmatrix}_{y=y_H}= \\ =\frac{1}{J}\frac{\partial g_1^0}{\partial Q_0}=\frac{\lambda}{2u_{\max}R^2}\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_2+N_3}{b^2J_0^2(\eta_n(Bi))}}. \tag{3.53}$$

В (3.49)–(3.53) введены следующие обозначения:

$$dF(\cdot)=\frac{\partial\bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi),v)}{\partial Bi}b;\ \frac{\partial\bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi),v)}{\partial Bi}=\int_0^1 F_{b1}(l,v)(-l^2)J_1(\eta_n(Bi)l)\frac{d\eta_n}{dBi}dl;$$

$$b=(\eta_n^2(Bi)+Bi^2)J_0^2(\eta_n(Bi));\ k=\left(1-e^{-\mu_n^2t^0}\right);$$

$$d\mu(\cdot)=\frac{d\mu_n^2(\cdot)}{dBi}=\frac{2a}{R^2}\eta_n(Bi)\frac{d\eta_n(Bi)}{dBi};$$

$$K_1(\cdot)=2J_0(\eta_n(Bi))\left(Bi+\eta_n(Bi)\frac{d\eta_n}{dBi}\right)-J_1(\eta_n(Bi))\frac{d\eta_n}{dBi}\left(\eta_n^2(Bi)+Bi^2\right);$$

$$K_2(\cdot)=2J_0^2(\eta_n(Bi))\left(Bi+\eta_n(Bi)\frac{d\eta_n}{dBi}\right)-b\left(J_1(\eta_n(Bi))\frac{d\eta_n}{dBi}\right);$$

$$M_1=k\left(dF(\cdot)J_0(\eta_n(Bi))-\bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi),v)K_2\right)- \\ -\bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi),v)bJ_0(\eta_n(Bi))d\mu(\cdot)e^{-\mu_n^2t^0}t^0;$$

$$N_1=J_0^2(\eta_n(Bi))\left[\left(dF(\cdot)-\bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi),v)K_1\right)-\bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi),v)bd\mu(\cdot)e^{-\mu_n^2t^0}t^0\right];$$

$$N_2=k\left[dF(\cdot)\left(1-J_0(\eta_n(Bi))\right)J_0(\eta_n(Bi))- \\ -\bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi),v)\left(K_2-K_1J_0(\eta_n(Bi))\right)\right];$$

$$N_3=\bar{F}_{b1n}(\eta_n(Bi),v)bJ_0(\eta_n(Bi))d\mu(\cdot)e^{-\mu_n^2t^0}t^0b\left(J_0(\eta_n(Bi))-1\right)J_0(\eta_n(Bi));$$

$$y_H=(Q_{0H},Bi_H).$$

Теперь функция переключения (2.21) при замене $\hat{\rho}_2(\tilde{y})$, $Q_j^T(\tilde{y})$ на $\hat{\rho}_2(y)$, $Q_j^T(y)$ для рассматриваемого случая $N=2$, $\hat{\rho}_1=1$ приобретает следующий вид:

$$h_1(Q_1,Q_2,y)=Q_1^T(y)-Q_1(t)+\hat{\rho}_2(y)\left(Q_2^T(y)-Q_2(t)\right). \tag{3.54}$$

Здесь линейные приближения зависимостей коэффициента обратной связи $\hat{\rho}_2(y)$ и значений температур

$$Q_1^T(y) = Q_2^T(y) = Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)}(y);$$
$$\varepsilon_{\min}^{(2)}(y) = \varepsilon_{\min}^{(2)}(y_H) - \sum_{j=1}^{2} \hat{\gamma}_{ij}^*(\bar{Q}_j(t^0) - \bar{Q}_{jH}), \tag{3.55}$$

от $y \in (Q_0, Bi)$ принимают вид (2.33) и (2.34), где должны быть предварительно найдены, наряду с $\hat{\alpha}_{mj}$, коэффициенты $\hat{\beta}_{mj}$ и $\hat{\beta}_{mi}^*$ для $m,j,i = 1,2$ в (2.32) и (2.34).

Поскольку определение аналитических выражений для коэффициентов $\hat{\beta}_{mj},\ \hat{\beta}_{mi}^*$ оказывается затруднительным ввиду их сложной и неявной зависимости от параметров $y_H = (Q_{0H}, Bi_H)$, значения этих коэффициентов могут быть найдены с удовлетворительной точностью по их конечно-разностным аппроксимациям

$$\hat{\beta}_{mi} = \left(\frac{\partial \hat{\rho}_i}{\partial y_m}\right)_{y=y_H} \approx \frac{\hat{\rho}_i(y^{(m)}) - \hat{\rho}_i(y_H)}{y_m - y_{mH}};$$
$$\hat{\beta}_{mi}^* = \left(\frac{\partial Q_i^T}{\partial y_m}\right)_{y=y_H} \approx \frac{Q_i^T(y^{(m)}) - Q_i^T(y_H)}{y_m - y_{mH}}; \tag{3.56}$$
$$m,i = 1,2;$$
$$y^{(1)} = (y_1, y_{2H})\,; y^{(2)} = (y_{1H}, y_2)$$

при достаточно малых фиксированных значениях приращений $y_m - y_{mH},\ m = 1,2$. Здесь соответствующие значения $\hat{\rho}_i(y^{(m)}),\ \varepsilon_{\min}^{(2)}(y^{(m)})$ в $Q_i^T(y^{(m)}) = Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)}(y^{(m)})$ находятся по выражениям (2.22), (3.37) и (3.39) с применением методик, описанных в § 3.2.4 и § 3.3.

В итоге алгоритм управления $u^*(Q_1,Q_2,y)$ с идентификацией состояния (2.31) по наблюдаемым значениям $\bar{Q}_1(t) = Q_1(t),\ \bar{Q}_2(t) = Q_2(t)$ в соответствии с (2.24) для случая $N = r = 2$, автоматической коррекцией обратных связей по алгоритму (2.33) и требуемых конечных температур согласно (3.55) при априори фиксируемых коэффициентах в выражениях (2.33) и (2.34) согласно (3.50)–(3.53) и (3.56) полностью определяют структуру замкнутой системы оптимального по быстродействию управления объектом (3.6) и (3.7) в условиях (3.9) интервальной неопределённости параметров $Q_0,\ Bi$ (см. рисунок 3.10), принимая следующий вид:

$$u^*(Q_1,Q_2,y) = \frac{u_{\max}}{2} \pm \frac{u_{\max}}{2}\text{sign}\left[Q^* - \varepsilon^{(2)}_{\min}(y) - Q_1(t) + \right.$$
$$\left. + \hat{\rho}_2(y)\left(Q^* - \varepsilon^{(2)}_{\min}(y) - Q_2(t)\right)\right]. \tag{3.57}$$

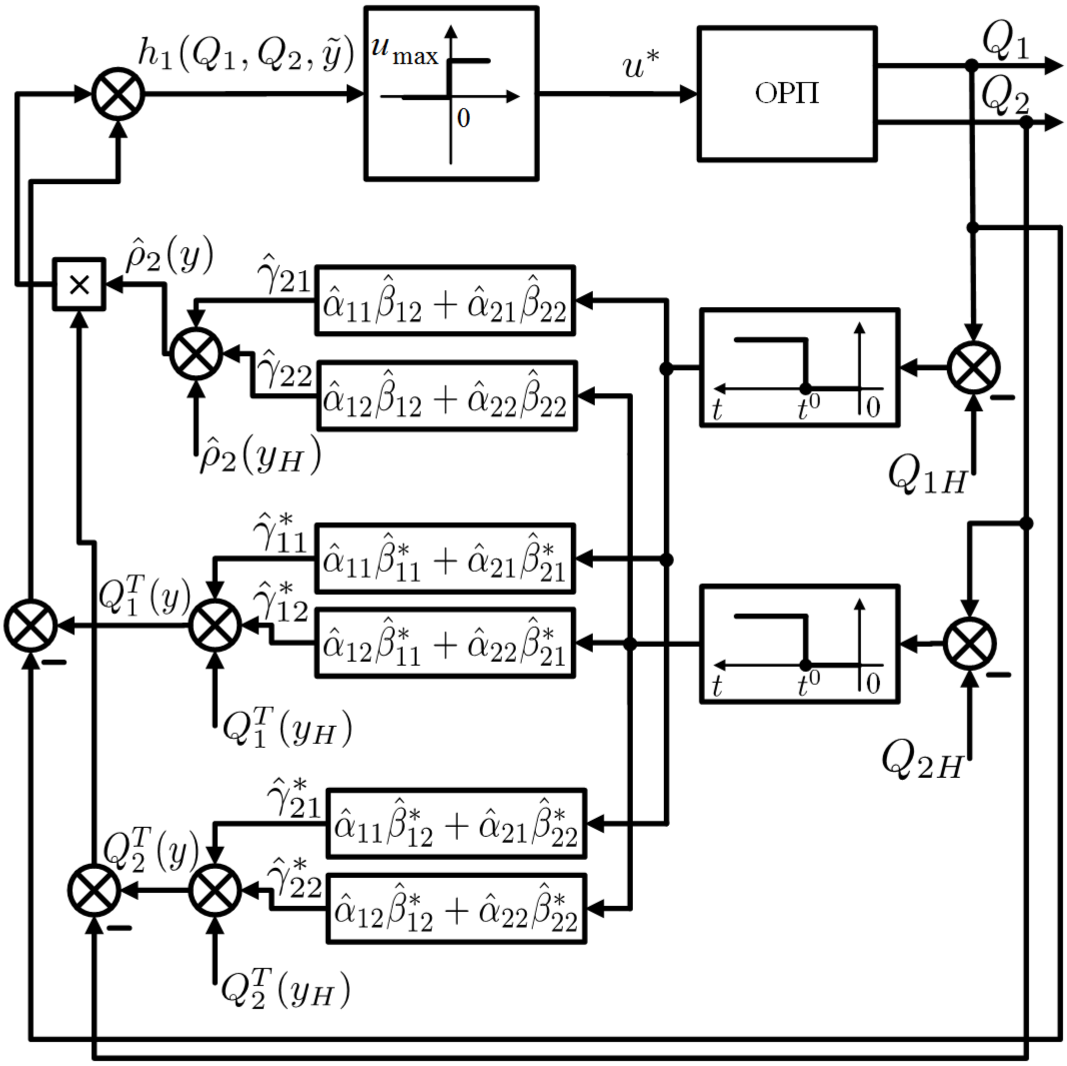


Рисунок 3.10 — Структурная схема замкнутой системы оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева с идентификатором параметров объекта.

3.6 Синтез оптимальной по быстродействию СУ процессом индукционного нагрева в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта в задаче быстродействия с учетом фазовых ограничений

Согласно методике, описанной в главе 2, по аналогии с решением в § 3.5, полученный в § 3.4 регулятор (3.45) для детерминированной задачи должен быть дополнен идентификатором (2.31) при $r = 2$, и таким образом искомый алгоритм управления приобретает следующий вид:

$$u^*(Q_1,Q_2,y) = \begin{cases} \dfrac{u_{\max}}{2}[1 \pm \mathrm{sign} h_1(Q_1,Q_2,y)] = u_{\max} \forall\, Q_1,Q_2 : h_1(\cdot) > 0;\ Q_1 < Q_{\text{доп}}; \\ u^Q(t)\, \forall\, Q_1,Q_2 : h_1(\cdot) > 0;\ Q_1 = Q_{\text{доп}}; \\ \dfrac{u_{\max}}{2}[1 \pm \mathrm{sign} h_1(Q_1,Q_2,y)] = 0\, \forall\, Q_1,Q_2 : h_1(\cdot) \leq 0;\ Q_1 < Q_{\text{доп}}. \end{cases} \tag{3.58}$$

Здесь $h_1(Q_1,Q_2,y)$ сохраняется в форме (3.54), где остаются справедливыми выражения (2.33), (2.34) и (3.55) для линейных приближений $\hat{\rho}_2(y), Q_i^T(y)$ с предварительно рассчитанными в ходе решения задач программного оптимального управления в § 3.2.3 и синтеза детерминированной оптимальной СУ в § 3.4 с учетом фазового ограничения значениями $\hat{\rho}_2(y_H),\ \varepsilon_{\min}^{(2)}(y_H),\ Q_{jH},\ j = 1{,}2$. При этом используются измененные по сравнению с (3.37) и (3.43) выражения (3.38) и (3.46) для расчета $Q(x,\Delta_1^*,\Delta_2^*),\ Q(x,\Delta_1^*)$ при $y = y_H$. При $t^0 < t_Q$ сохраняется форма выражений для $g_j(\cdot)$ в (3.47), а, следовательно, и выражения (3.50)–(3.53) для расчета коэффициентов $\hat{\alpha}_{mj},\ m = j = 1{,}2$ идентификатора (2.31). Однако из-за изменившихся значений $\hat{\rho}_2(y_H),\ \varepsilon_{\min}^{(2)}(y_H)$ необходимо пересчитать коэффициенты $\hat{\beta}_{mi},\ \hat{\beta}_{mi}^*,\ m = i = 1{,}2$ и, как следствие, коэффициенты $\hat{\gamma}_{ij},\ \hat{\gamma}_{ij}^*,\ i = j = 1{,}2$ соответственно в (3.56), (2.33) и (2.34).

В целях реализации закона управления (3.58) структура замкнутой СУ с оптимальным по быстродействию регулятором (3.58) с учетом фазового ограничения (3.20), по сравнению с таковой без учета ограничений (см. рисунок 3.10), дополняется, по аналогии с детерминированной замкнутой структурой на рисунке 3.9, задержанной обратной связью по температуре Q_1 (см. рисунок 3.11) с аналогичным условием выбора коэффициента $\hat{\rho}_3$.

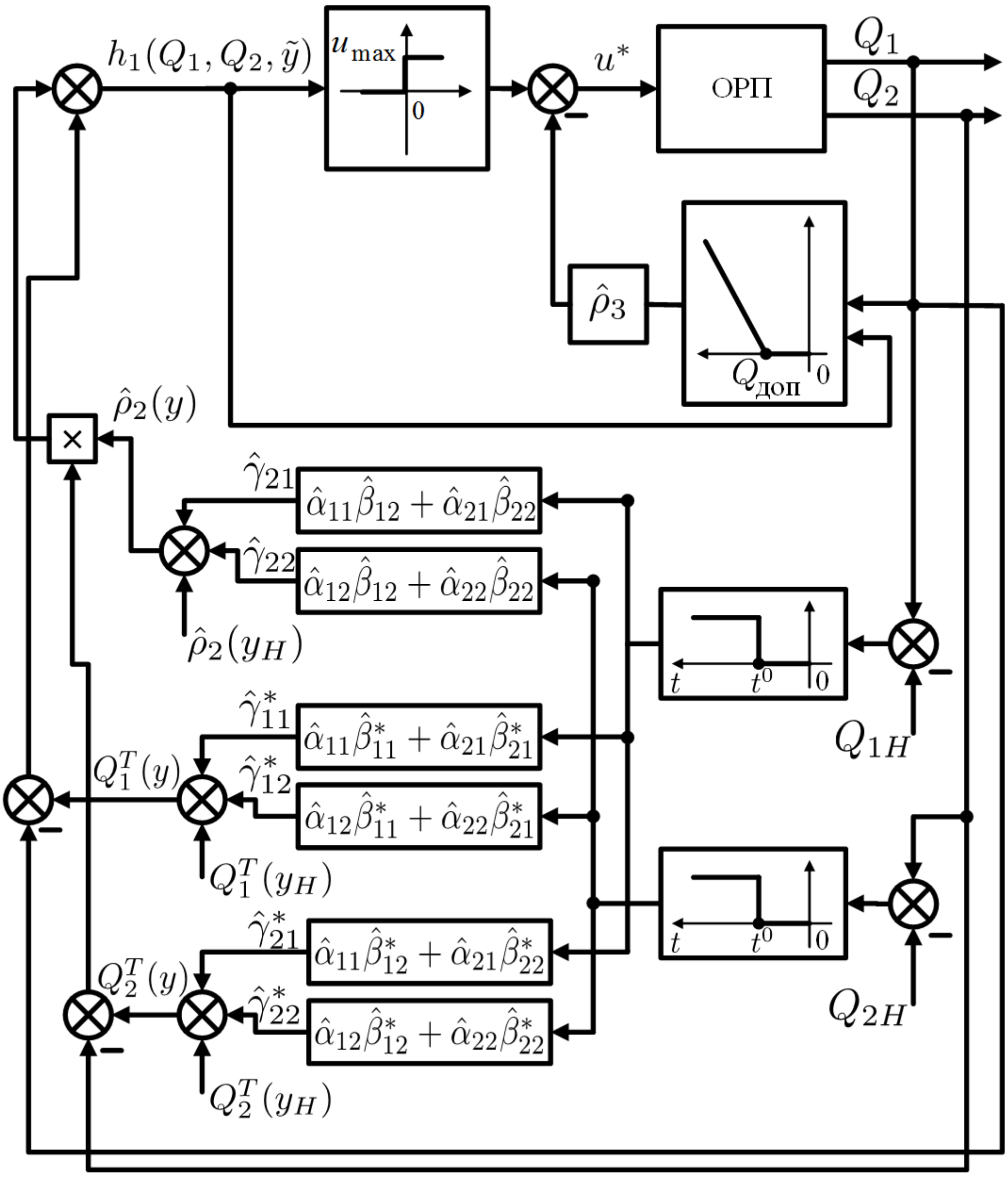


Рисунок 3.11 — Структурная схема замкнутой системы оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева с ограничением на максимальную температуру с учетом интервальной неопределенности характеристик объекта.

3.7 Моделирование замкнутых оптимальных по быстродействию СУ процессом индукционного нагрева

С целью апробации полученных оптимальных по быстродействию алгоритмов управления, а также проведения сравнительного анализа рассмотренных СУ, было выполнено компьютерное моделирование замкнутой системы оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева в условиях интервальной неопределенности параметрических характеристик объекта. В этих целях используется пакет прикладных программ MATLAB с такими приложениями, как Simulink (интерактивная среда для моделирования и анализа широкого класса динамических систем) и Stateflow (интерактивный инструмент разработки в области моделирования управляемых событиями систем, основанный на теории конечных автоматов), разработанный компанией MathWorks [111—114].

3.7.1 Способы моделирования ОРП

Вначале необходимо выбрать способ моделирования распределенного объекта управления (3.1)–(3.3). Существует ряд аналитических способов построения приближенных моделей объектов с распределенными параметрами [19]. Все они могут быть условно подразделены на две основные группы.

К первой группе относятся способы упрощенного представления самих исходных дифференциальных уравнении объекта. К ним можно отнести методы перехода к упрощенным распределенным блокам (напр., методы малого параметра и линеаризации) и конечномерной аппроксимации (модальное описание объекта и разностные модели) [19]. Методы данной группы позволяют получить удовлетворительные по точности в определенных конкретных условиях описания свойств ОРП в сравнительно простом виде.

Методы второй группы базируются на приближенном представлении, как правило, в форме соответствующих передаточных функций, точных решений уравнений в частных производных, моделирующих поведение ОРП. В частности, широко используется разложение передаточных функций в бесконечные ряды или, основываясь, к примеру, на физических представлениях об объекте, аппроксимирующие передаточные функции задаются с точностью до значений коэффициентов в форме заданной типовой структуры, выбранной по тем или иным соображениям [19].

Воспользуемся методом второй группы, в виду того, что рассматривается типовой упрощенный ОРП, описываемый краевой задачей (3.1)–(3.3) для которой имеются точные решения, и, соответственно, при использовании метода конечных интегральных преобразований, могут быть получены точные выражения для передаточных функций в форме разложения в бесконечный ряд по собственным функциям, что позволит смоделировать объект с любой требуемой точностью.

3.7.2 Передаточная функция распределенного объекта управления

Воспользуемся методом конечных интегральных преобразований для получения основных характеристик ОРП.

Для начала необходимо определить выражение для функции Грина $G(x,\xi,t-\tau)$, представляющей собой реакцию объекта на входное воздействие в виде δ-функции, сосредоточенной в некоторой точке на пространственно временной области (x,t) при однородных граничных и нулевых начальных условиях. Полагая в (2.9) все слагаемые равными нулю, кроме первого, в котором $f(\cdot) = \delta(\cdot)$, получим следующее выражение для $G(x,\xi,t-\tau)$ [19]:

$$G(x,\xi,t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\mu_n,x)\varphi_n(\mu_n,\xi)r(\xi)G_n^*(\mu_n,t-\tau). \tag{3.59}$$

Основное вход-выходное соотношение ОРП однозначно определяется его функцией Грина. Подстановка (3.59) в (2.9) приводит к следующему выражению для выхода ОРП при любом значении стандартизирующей функции $w(\xi,\tau)$ на его входе, учитывающей все внешние воздействия на ОРП [19]:

$$Q(x,t) = \int_0^T \int_0^R G(x,\xi,t-\tau)w(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{3.60}$$

Для случая однородных граничных и нулевых начальных условий в (3.1), (3.3) здесь [19]

$$w(\xi,\tau) = \frac{1}{c\gamma}F_{b1}(\frac{\xi}{R},v)u(\tau), \tag{3.61}$$

и вместо (3.60) будем иметь

$$Q(x,t) = \int_0^T \int_0^R G(x,\xi,t-\tau)\frac{1}{c\gamma}F_{b1}(\frac{\xi}{R},v)u(\tau)d\xi d\tau = \int_0^T S(x,t-\tau)u(\tau)d\tau;$$
$$S(x,t-\tau) = \int_0^R G(x,\xi,t-\tau)\frac{1}{c\gamma}F_{b1}(\frac{\xi}{R},v)u(\tau)d\xi. \tag{3.62}$$

В этом случае представление распределенного объекта (3.1)–(3.3) выглядит неким аналогом сложного звена в сосредоточенных системах управления, главным отличием которого является зависимость выходного сигнала от пространственного аргумента. Для рассматриваемого случая сосредоточенного внутреннего управления им является согласно (3.61) и (3.62) распределенный *x*-блок (см. рисунок 3.12) [99].

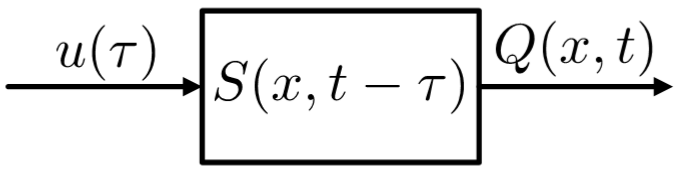


Рисунок 3.12 — Структурное представление *x*-блока.

В выражении (3.59) необходимо найти собственные функции $\varphi_n(\mu_n,x)$, $\varphi_n(\mu_n,\xi)$; весовую функцию конечного интервального преобразования $r(\xi)$ и импульсную переходную функцию $G_n^*(\mu_n,t-\tau)$, для поиска которых выполняется процедура конечного интегрального преобразования, примененная к уравнениям объекта (3.3) и описанная в [19].

Весовая функция принимает следующий вид:

$$r(\xi) = \frac{\xi}{a}. \tag{3.63}$$

Задача Штурма-Лиувилля с краевыми условиями вида (3.2) и (3.3) приводится к дифференциальному уравнению Бесселя относительно искомых собственных функций

$$a\frac{d^2\varphi(\mu,x)}{dx^2} + \frac{a}{x}\frac{d\varphi(\mu,x)}{dx} = -\mu^2\varphi(\mu,x). \tag{3.64}$$

Решение этой задачи принимает вид [115; 116]

$$\varphi(\mu,x) = J_0\left(\frac{\mu}{\sqrt{a}}x\right). \tag{3.65}$$

Собственные числа μ_n^2 находятся из граничного условия при $x = R$:

$$BiJ_0(\eta) - \eta J_1(\eta) = 0,\ Bi = \frac{\alpha R}{\lambda},\ \eta = \frac{\mu}{\sqrt{a}}. \tag{3.66}$$

Здесь, как и в (3.6), (3.7), $J_0(z), J_1(z)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно. Отсюда находим $\mu_n^2 = a\eta_n^2/R^2,\ n = 1,2,\ldots$, где η_n – корни трансцендентных уравнений (3.66). В соответствии со свойствами функции в (3.65) [101; 102; 117] ортонормированная система собственных функций приобретает вид:

$$\varphi_n(\mu_n,x) = \frac{1}{E_n}J_0\left(\eta_n\frac{x}{R}\right), \tag{3.67}$$

где норма собственных функций E_n может быть найдена из выражения:

$$\begin{gathered} E_n^2 = \int_0^R J_0^2\left(\eta_n\frac{x}{R}\right)r(x)dx = \frac{R^2J_0^2(\eta_n)}{a}\left[\frac{1}{2} + \frac{Bi^2}{2\eta_n^2}\right] \Rightarrow \\ \Rightarrow E_n = \frac{RJ_0(\eta_n)}{a}\sqrt{\left[\frac{1}{2} + \frac{Bi^2}{2\eta_n^2}\right]}. \end{gathered} \tag{3.68}$$

Функция $G_n^*(\mu_n,t-\tau)$ находится путем решения *n*-го уравнения в (3.8) при нулевых начальных условиях и внешнем воздействии в виде δ-функции и для рассматриваемого случая принимает следующий вид:

$$G_n^*(\mu_n,t-\tau) = e^{-\mu_n^2(t-\tau)}. \tag{3.69}$$

Тогда, с учетом (3.63) и (3.67)–(3.69), функция Грина (3.59) распределенного объекта (3.1)–(3.3) примет вид:

$$G(x,\xi,t-\tau) = \frac{2\xi}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_n^2J_0\left(\eta_n\frac{x}{R}\right)J_0\left(\eta_n\frac{\xi}{R}\right)}{J_0^2(\eta_n)(\eta_n^2+Bi^2)}e^{-\mu_n^2(t-\tau)}. \tag{3.70}$$

Применив теперь к уравнению (3.60) оператор преобразования Лапласа по временной переменной

$$\tilde{Q}(x,p) = L_t \left\{ \int_0^T S(x,t-\tau)u(\tau)d\tau \right\} = \tilde{S}(x,p)\tilde{u}(p), \tag{3.71}$$

по аналогии с сосредоточенной системой будем называть $\tilde{S}(x,p)$ передаточной функцией $W_x(x,p)$ распределенного *x*-блока, что, с учетом (3.70), приводит к следующему выражению:

$$W_x(x,p) = L_t \left[\int_0^R \frac{2\xi}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2 J_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right) J_0\left(\eta_n \frac{\xi}{R}\right)}{J_0^2(\eta_n)(\eta_n^2 + Bi^2)} e^{-\mu_n^2(t-\tau)} \frac{1}{c\gamma} F_{b1}\left(\frac{\xi}{R}, v\right) d\xi \right] = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2K_n(x)}{c\gamma R^2(T_n p + 1)}, \tag{3.72}$$

где

$$K_n(x) = \frac{\eta_n^2 J_0\left(\eta_n \frac{x}{R}\right) \int_0^R \xi J_0\left(\eta_n \frac{\xi}{R}\right) F_{b1}\left(\frac{\xi}{R}, v\right) d\xi}{\mu_n^2 J_0^2(\eta_n)(\eta_n^2 + Bi^2)}; \; T_n = \frac{1}{\mu_n^2}.$$

По виду выражения (3.72) можно сделать вывод, что объект управления (3.1)–(3.3) в структурном отношении представляет собой бесконечное число параллельно соединенных типовых апериодических звеньев (см. рисунок 3.13). Очевидно, что промоделировать такую систему невозможно, поэтому необходимо провести процедуру усечения или, другими словами, представить объект укороченной структурой. Следует помнить, что такая процедура приводит к искажению представления о свойствах распределенного объекта, однако её использование возможно с некоторой заданной точностью.

Выбор количества учитываемых звеньев по виду переходного процесса на отрезке времени $0 < t \leq 0.01 \times (R^2/a)$ является одним из возможных вариантов решения указанной проблемы. Выбирается такое количество звеньев, при котором картина теплового поля на обозначенном отрезке времени практически перестает меняться.

В качестве примера здесь и далее будем рассматривать процесс индукционного нагрева цилиндрических слитков из титанового сплава на промышленной частоте тока $f = 50$ Гц для исходных данных, представленных в табли-

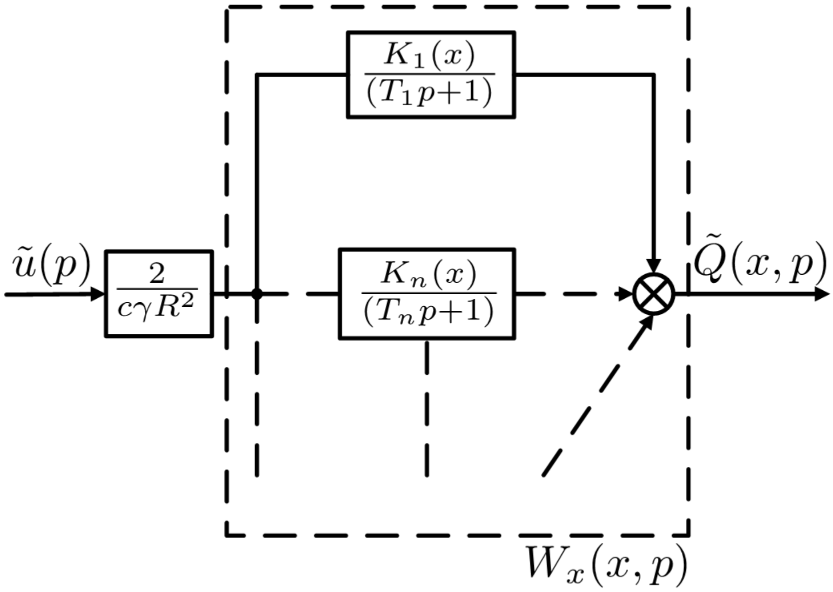


Рисунок 3.13 — Структурная представление *x*-блока в форме параллельного соединения бесконечного числа типовых апериодических звеньев.

це 1. Температура окружающей среды принимается равной начальной температуре $Q_C(t) = Q_0 = \text{const}$ в (3.3).

Таблица 1 — Исходные данные для процесса индукционного нагрева

Обозначение	Параметр	Значение	Единицы измерения
R	Радиус заготовки	0.27	м
λ	Теплопроводности	14	Вт / (м $\cdot$°C)
a	Коэффициент температуропроводности	$4.34 \cdot 10^{-6}$	м^2/с
v	Характерный параметр	4	-
Bi_H	Критерий Био	0.7	-
Q_{0H}	Начальная температура	30	°C
Q^*	Требуемая температура	1050	°C
$Q_{\text{доп}}$	Предельно допустимая температура	1100	°C
$P_{0\max}$	Максимальная поверхностная плотность мощности нагрева	$106 \cdot 10^3$	кВт/м^2

Для выбора количества звеньев *N* была построена модель системы управления ОРП в Matlab/Simulink [112; 113], где сам распределенный объект представлен в форме передаточной функции (3.72), в котором верхний предел суммы заменяется на *N*, а автоматический расчет коэффициентов по вышеприведенным

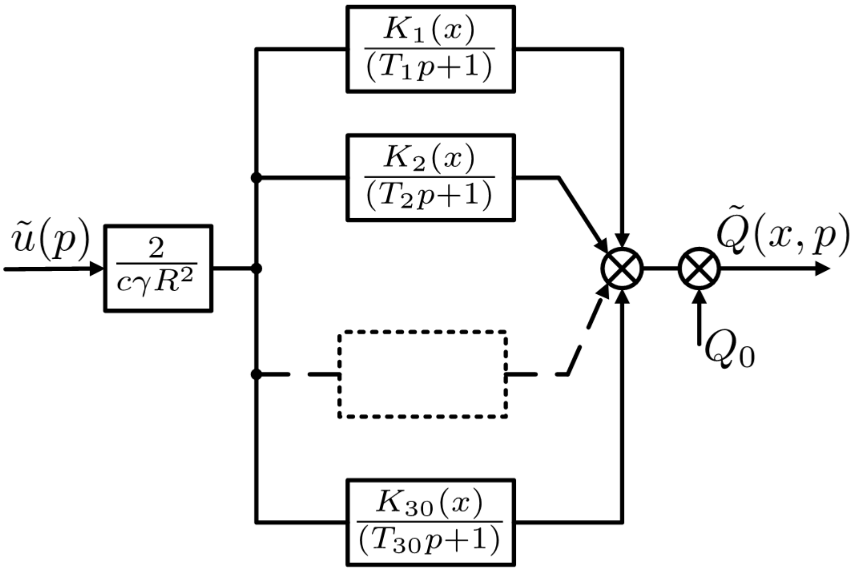
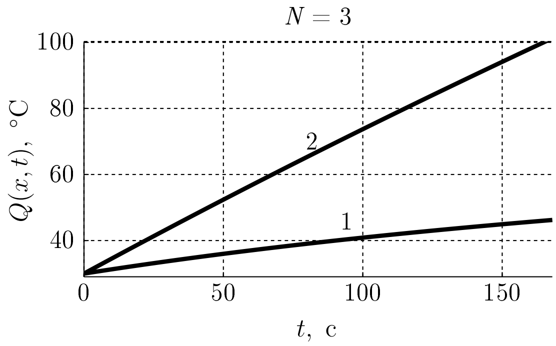
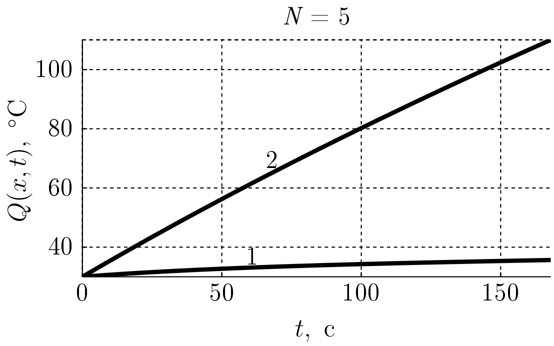


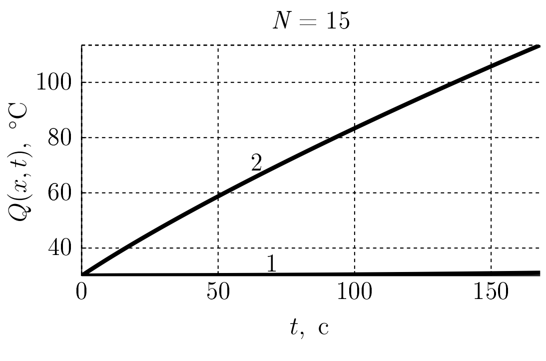
Рисунок 3.14 — Структурное представление моделируемого объекта в форме параллельного соединения $N = 30$ апериодических звеньев.



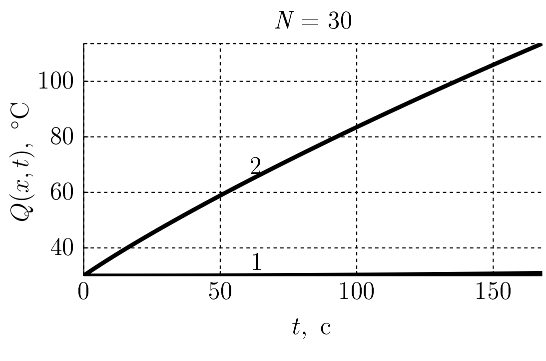
а)



б)



в)



г)

1 - Температура в центре заготовки $x = 0$;

2 - Температура на поверхности заготовки $x = R$.

Рисунок 3.15 — Температурное поле цилиндрического слитка в процессе индукционного нагрева при разном количестве учитываемых апериодических звеньев в структуре распределенного объекта.

формулам выполняется с помощью Matlab-скрипта. На вход объекта подается сосредоточенное управляющее воздействие $u_{\max}$.

На рисунке 3.15 представлены температурное поле в центре и на поверхности цилиндрического слитка в процессе индукционного нагрева на отрезке времени $0 \leq t \leq 168$ сек. при различном количестве учитываемых звеньев в передаточной функции (3.72) объекта (3.1)–(3.3).

Как видно из графиков, при $N \geq 15$ в (3.72) вид температурных полей меняется несущественно. Примем далее количество учитываемых звеньев $N = 30$ (см. рисунок 3.14).

3.7.3 Расчет параметров для оптимальных алгоритмов управления с обратными связями полученных систем управления

Для рассмотренных в § 3.3, § 3.4 замкнутых систем оптимального по быстродействию управления детерминированными процессами индукционного нагрева были построены компьютерные модели в Matlab/Simulink по соответствующим структурным схемам на рисунках 3.7, 3.9, где ОРП представлен структурой на рисунке 3.14. Исполнительный орган релейного действия и нелинейный элемент задержанной обратной связи в системе управления с учетом фазового ограничения представлены в форме конечных автоматов (см. рисунки 3.16, 3.17), построенных в Stateflow.

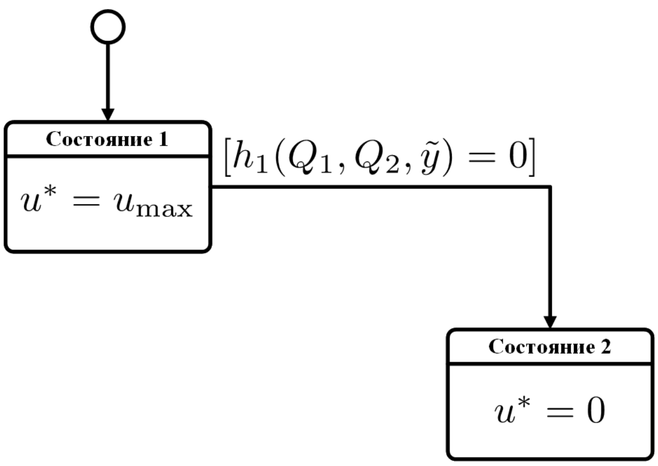


Рисунок 3.16 — Конечный автомат управляющего элемента в замкнутых СУ без учета фазовых ограничений.

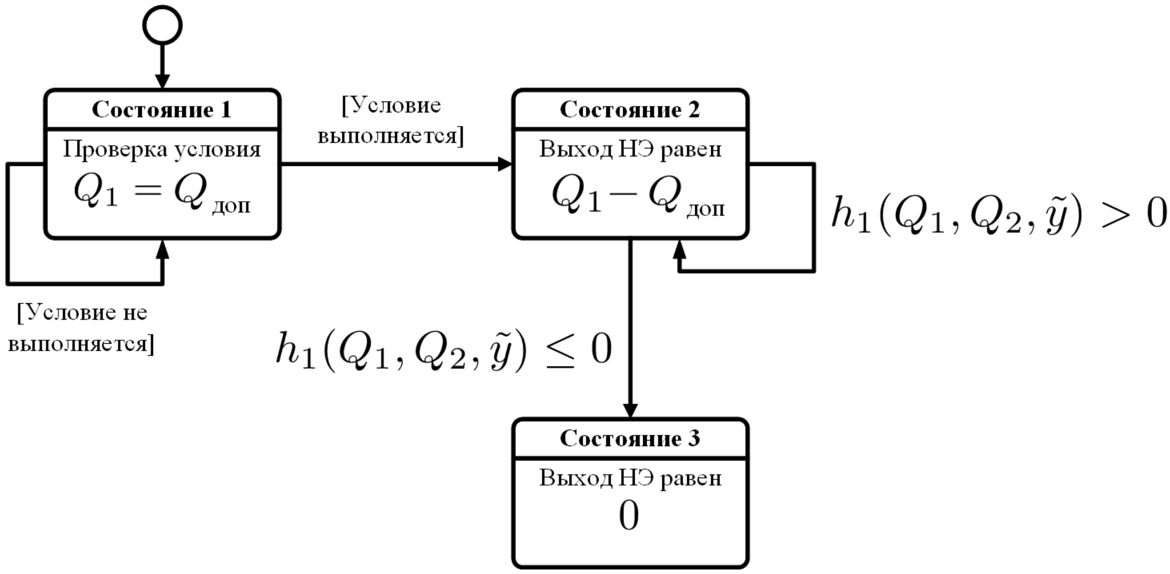


Рисунок 3.17 — Конечный автомат нелинейного элемента (НЭ) в структуре замкнутой СУ с учетом фазовых ограничений.

Вначале решались задачи поиска оптимальных по быстродействию параметров $\mathbf{\Delta}^0$, $\overset{*}{\mathbf{\Delta}}{}^0$, $N = N_0 = 2$ программных алгоритмов управления в § 3.2 в детерминированной задаче быстродействия с номинальными величинами $Bi_H,\ Q_{0H}$, представленными в таблице 1. Автоматический расчет этих параметров производился Matlab-скриптом, реализующим решение системы уравнений (3.39). Полученные значения оптимальных параметров $\Delta_1^0,\ \Delta_2^0,\ \varepsilon_{\min}^{(2)}$ для задачи (3.27), (3.28) в условиях отсутствия фазовых ограничений для заданных исходных данных в таблице 1:

$$\Delta_1^0 = 5879.8 \text{ сек.};\ \Delta_2^0 = 678.7 \text{ сек.};\ \varepsilon_{\min}^{(2)} = 52.1\,^\circ\text{C}.$$

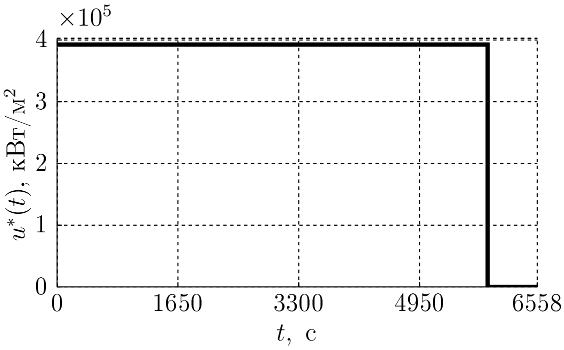
Для случая, учитывающего фазовые ограничения:

$$\Delta_1^0 = 6306.1 \text{ сек.};\ \Delta_2^0 = 363.7 \text{ сек.};\ \varepsilon_{\min}^{(2)} = 49.5\,^\circ\text{C}.$$

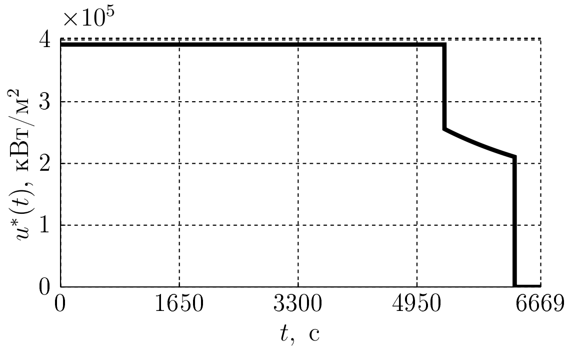
Соответствующие этим случаям оптимальные программы управления и конечные температурные распределения показаны на рисунке 3.18.

Далее производился автоматический расчет необходимых значений параметров в структурах замкнутых СУ (см. рисунки 3.7, 3.9).

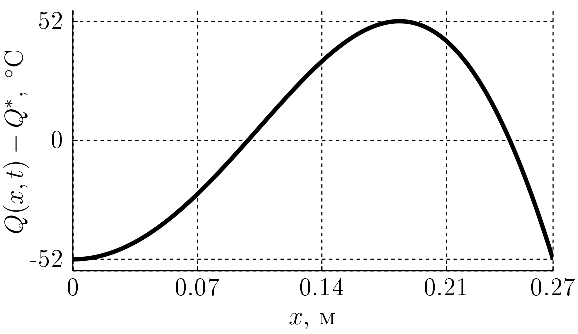
Для задачи, рассмотренной в § 3.3, коэффициент обратной связи $\hat{\rho}_{2H}$ и конечные значения температур $Q_{1H}^T = Q_{2H}^T = Q^* - \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в (3.40)–(3.43) равны следу-



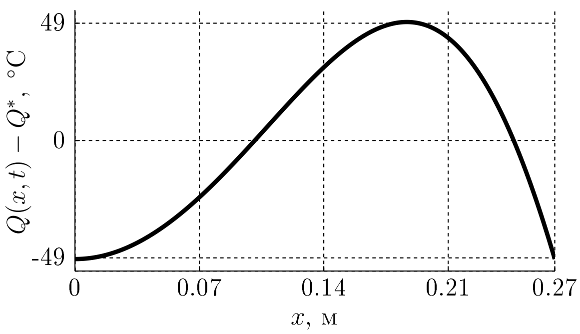
а) Оптимальное управление без учета фазового ограничения



б) Оптимальное управление с учетом фазового ограничения



в) Конечное температурное распределение без учета фазового ограничения



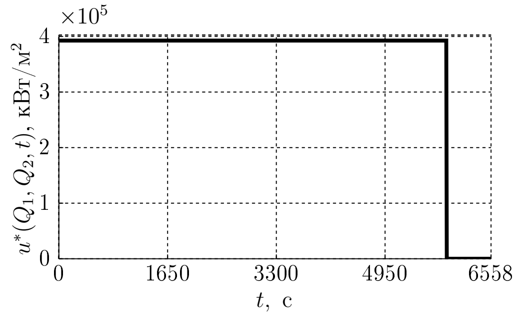
г) Конечное температурное распределение с учетом фазового ограничения

Рисунок 3.18 — Оптимальное программное управление и конечное температурное распределение по радиусу цилиндра.

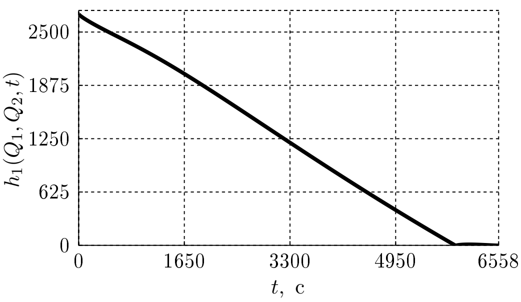
ющим значениям:

$$\hat{\rho}_{2H} = 1.796;\ Q_{1H}^{T} = Q_{2H}^{T} = 997.9\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

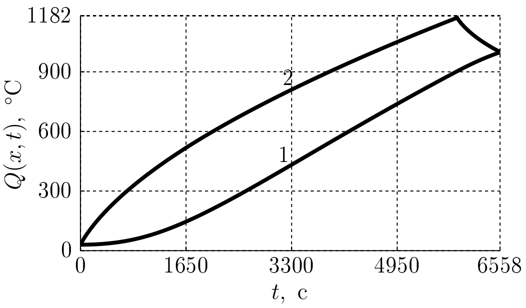
Результаты моделирования замкнутой системы управления ОРП без учета фазовых ограничений приведены на рисунке 3.19. Отметим, что функция переключения имеет отличный от рисунка 3.6 вид (см. рисунок 3.20а). Поведение функции $h_1(Q_1,Q_2) > 0$ на втором интервале может быть объяснено тем фактом, что, при замене $h(Q_1,Q_2)$ на $h_1(Q_1,Q_2)$ в (2.20), гарантируется равенство функции $h_1(Q_1,Q_2)$ нулю только в моменты переключения управления, однако поведение, подобное $h(Q_1,Q_2)$, в промежутке между переключениями не гарантируется. Данное обстоятельство может быть учтено посредством введения новой функции



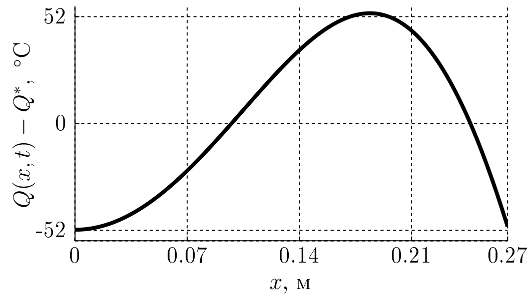
а) Управляющее воздействие



б) Функция переключения



в) Температурное поле



г) Результирующее распределение температур по радиусу заготовки x

1 - Температура в центре заготовки $x = 0$;

2 - Температура на поверхности заготовки $x = R$.

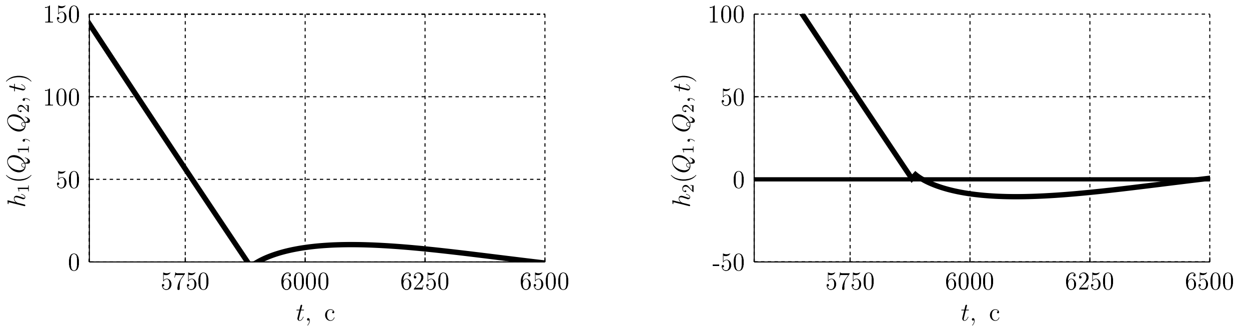
Рисунок 3.19 — Результаты компьютерного моделирования замкнутой СУ детерминированным процессом индукционного нагрева.

$h_2(Q_1{,}Q_2{,}t)$ (см. рисунок 3.20б), имеющей вид

$$\begin{gathered} h_2(Q_1{,}Q_2{,}t) = |h_1(Q_1{,}Q_2{,}t)|\,\mathrm{sign}\left[(-1)^{j+1}\right], \\ \sum_{i=0}^{j} \Delta_i < t < \sum_{i=0}^{j} \Delta_i;\ j = \overline{1{,}N},\ \Delta_0 = 0, \end{gathered} \tag{3.73}$$

которая теперь может быть использована вместо $h_1(Q_1{,}Q_2)$ в (2.23) и (3.45).

Как было показано в § 3.4, чтобы получить замкнутую СУ ОРП (3.1)–(3.3), учитывающую фазовое ограничение (3.20), полученная ранее структура замкнутой системы управления процессом индукционного нагрева цилиндрических слитков без учета ограничения на максимальную температуру дополняется локальной обратной связью по температуре $Q_{\max}(t) = Q(R{,}t)$ (см. рисунок 3.9). Таким образом, помимо перерасчета коэффициента обратной связи $\hat{\rho}_{2H}$ и конечных температур $Q^T_{1H},\ Q^T_{2H}$ в центре заготовки и на её поверхности, необходимо рас-



а) Функция переключения $h_1(Q_1,Q_2)$ б) Функция переключения $h_2(Q_1,Q_2)$

Рисунок 3.20 — Графики функций переключения $h_1(Q_1,Q_2),\ h_2(Q_1,Q_2)$ в момент переключения управления на участок оптимального управления $u_{\min} = 0$.

считать коэффициент локальной обратной связи $\hat{\rho}_3$, удерживающий температуру $Q(R,t)$ на допустимом уровне $Q_{\text{доп}}$ с заданной погрешностью.

Предлагается следующий метод расчета коэффициента $\hat{\rho}_3$. Рассмотрим контур задержанной обратной связи в режиме поддержания равенства $Q(R,t) \equiv Q_{\text{доп}}$ (см. рисунок 3.21), предварительно выполнив соответствующие преобразования структурной схемы по правилам эквивалентных преобразований. В статическом

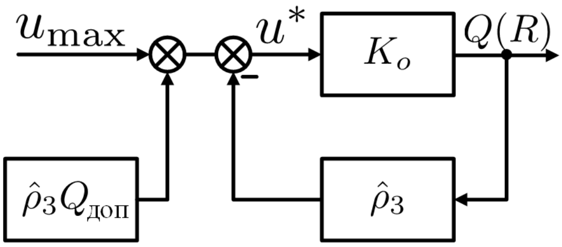


Рисунок 3.21 — Контур задержанной обратной связи в статике.

режиме поведение объекта (3.8), передаточная функция $W_x(x,p)$ в (3.72) которого была получена ранее, будет характеризоваться только суммарным коэффициентом усиления:

$$W_x(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2K_n}{c\gamma R^2} = K_o. \tag{3.74}$$

Тогда, для замкнутого контура с отрицательной обратной связью, можно записать следующее соотношение между входом и выходом структуры на рисунке 3.21:

$$Q_1(R) = (u_{\max} + \hat{\rho}_3 Q_{\text{доп}}) \frac{K_o}{1 + \hat{\rho}_3 K_o}. \tag{3.75}$$

Задаваясь допустимой погрешностью Ω поддержания $Q_{\max}$ на уровне $Q_{\text{доп}}$ в замкнутом контуре задержанной обратной связи согласно равенству

$$Q_1(R) = Q_{\text{доп}}(1+\Omega), \tag{3.76}$$

получим, приравнивая правые части выражений (3.75) и (3.76), следующее выражение для коэффициента обратной связи $\hat{\rho}_3$:

$$\hat{\rho}_3 = \frac{u_{\max}K_o - Q_{\text{доп}}(1+\Omega)}{\Omega K_o Q_{\text{доп}}}. \tag{3.77}$$

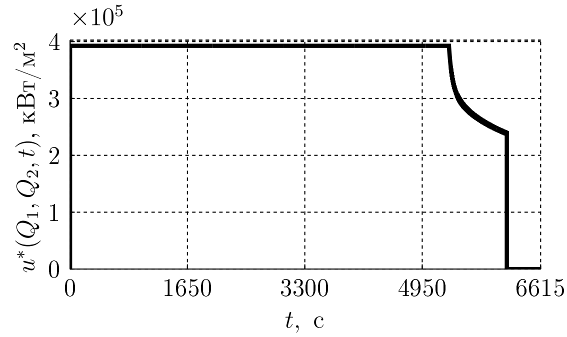
В итоге, для исходных данных рассматриваемого процесса индукционного нагрева цилиндрических слитков, представленных в таблице 1, были получены следующие значения коэффициентов при $\Omega = 0.01$:

$$\hat{\rho}_{2H} = 1.850;\ \hat{\rho}_3 = 14693;\ Q_{1H}^T = Q_{2H}^T = 999\,^\circ\text{C}.$$

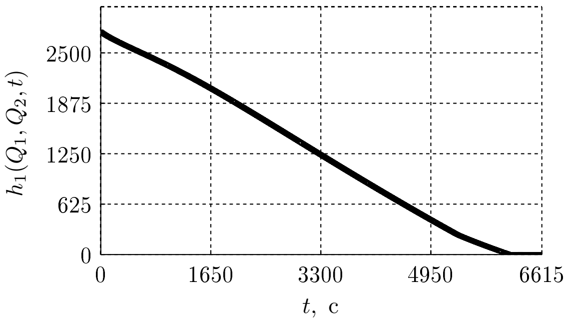
Результаты компьютерного моделирования показаны на рисунке 3.22. Отметим, что вид управляющего воздействия на рисунке 3.22а отличен от полученной оптимальной программы в задаче оптимального программного управления ОРП с учетом фазовых ограничений (см. рисунок 3.18б) и объясняется тем обстоятельством, что рассчитываемые коэффициенты (3.26) в формуле (3.25) не дают удовлетворительного описания поведения оптимальной программы управления на участке движения по ограничению $Q_{\max} = Q_{\text{доп}}$ при его значительной протяженности [6]. В этом случае предлагается найти аппроксимированные значения коэффициентов в (3.25) методом наименьших квадратов исходя из полученного вида оптимального управления на участке стабилизации температуры и заново выполнить расчет оптимальных параметров процесса:

$$\Delta_1^0 = 6136.4 \text{ сек.};\ \Delta_2^0 = 478.7 \text{ сек.};\ \varepsilon_{\min}^{(2)} = 50.8\,^\circ\text{C}.$$

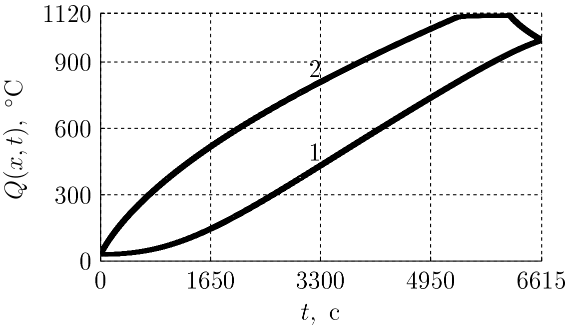
Ранее было показано, что структуры замкнутых систем управления процесса индукционного нагрева в условиях интервальной неопределенности параметров объекта $Q_0,\ Bi$ включают в себя идентификатор состояния (см. рисунки 3.10, 3.11). Рассчитаем коэффициенты $\hat{\alpha}_{mj},\ m,j = 1,2$ по форму-



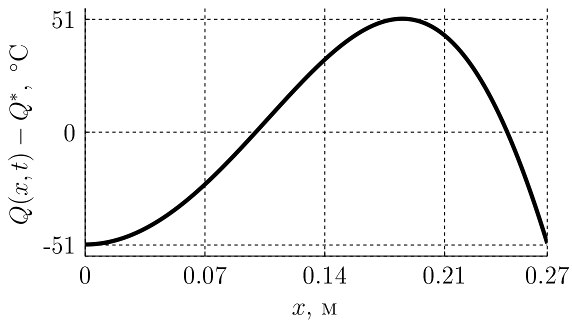
а) Управляющее воздействие



б) Функция переключения



в) Температурное поле



г) Результирующее распределение температур по радиусу заготовки x

1 - Температура в центре заготовки $x = 0$;

2 - Температура на поверхности заготовки $x = R$.

Рисунок 3.22 — Результаты компьютерного моделирования замкнутой СУ детерминированным процессом индукционного нагрева с учетом фазовых ограничений.

лам (3.50)–(3.53) для идентификатора (2.31) и $\hat{\gamma}_{ij},\ \hat{\gamma}^*_{ij},\ \hat{\beta}_{mi},\ \hat{\beta}^*_{mi},\ m,i,j = 1,2$ для линейных приближений коэффициента обратной связи $\hat{\rho}_2(y)$ и требуемых конечных значений температуры $Q_i^T(y)$ в (2.33), (2.34) и (3.56). При отсутствии фазовых ограничений, принимая в качестве номинальных параметров неопределенных величин значения, указанные в таблице 1, и $t^0 = 300$ сек. получим

$$\hat{\alpha}_{11} = -0.19;\ \hat{\alpha}_{12} = 1.19;\ \hat{\alpha}_{21} = -0.06;\ \hat{\alpha}_{22} = 0.06;$$

$$\hat{\beta}_{11} = 0;\ \hat{\beta}_{12} = -0.002;\ \hat{\beta}_{21} = 0;\ \hat{\beta}_{22} = 2.07;$$

$$\hat{\beta}^*_{11} = 0.04;\ \hat{\beta}^*_{12} = 0.04;\ \hat{\beta}^*_{21} = -48.33;\ \hat{\beta}^*_{22} = -48.33;$$

$$\hat{\gamma}_{11} = 0;\ \hat{\gamma}_{12} = 0;\ \hat{\gamma}_{21} = -0.12;\ \hat{\gamma}_{22} = 0.12;$$

$$\hat{\gamma}^*_{11} = 2.88;\ \hat{\gamma}^*_{12} = -2.86;\ \hat{\gamma}^*_{21} = 2.88;\ \hat{\gamma}^*_{22} = -2.86.$$

Перерасчет параметров для задачи синтеза замкнутой системы оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта с учетом фазовых ограничений дает следующие результаты:

$$\hat{\alpha}_{11} = 0.1;\ \hat{\alpha}_{12} = 0.9;\ \hat{\alpha}_{21} = -0.1;\ \hat{\alpha}_{22} = 0.1;$$
$$\hat{\beta}_{11} = 0;\ \hat{\beta}_{12} = -0.01;\ \hat{\beta}_{21} = 0;\ \hat{\beta}_{22} = 3.55;$$
$$\hat{\beta}^*_{11} = 0.001;\ \hat{\beta}^*_{12} = 0.001;\ \hat{\beta}^*_{21} = -43.8;\ \hat{\beta}^*_{22} = -43.8;$$
$$\hat{\gamma}_{11} = 0;\ \hat{\gamma}_{12} = 0;\ \hat{\gamma}_{21} = -0.22;\ \hat{\gamma}_{22} = 0.21;$$
$$\hat{\gamma}^*_{11} = 2.7;\ \hat{\gamma}^*_{12} = -2.7;\ \hat{\gamma}^*_{21} = 2.7;\ \hat{\gamma}^*_{22} = -2.7.$$

3.7.4 Сравнительный анализ замкнутой СУ с детерминированным регулятором и СУ с автокоррекцией коэффициентов обратных связей

Для оценки эффективности полученной оптимальной по быстродействию системы управления процессом индукционного нагрева в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта по сравнению с СУ, синтезированной в условиях полной информации об объекте, были построены их Simulink-модели в соответствии со структурными схемами (см. рисунки 3.10 и 3.11).

Предлагается следующий алгоритм сравнительного анализа полученных моделей:

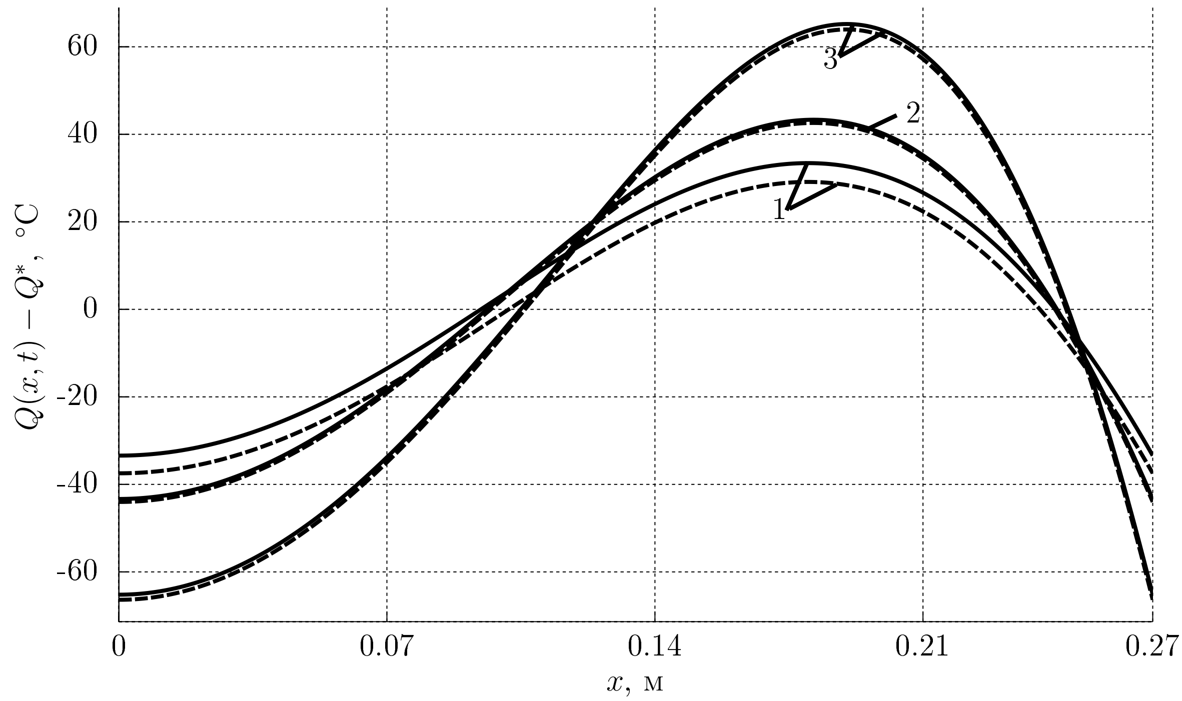
1. Для каждого из фиксируемых значений $Q_0,\ Bi$ в заданном диапазоне их изменения (3.9) решается задача оптимального по быстродействию программного управления объектом (3.8) по методике в § 3.2 и строятся результирующие распределения температур $Q(x,T)-Q^*$ по радиусу слитка в конце оптимального процесса. Найденные указанным путем характеристики оптимальных процессов будем считать эталонными.
2. Находятся значения параметров передаточных функций (3.72) объекта при фиксированных номинальных значениях неопределенных параметров $Q_0 = Q_{0H},\ Bi = Bi_H$. Полученная модель объекта затем используется в замкнутой системе оптимального по быстродействию управления

процессом индукционного нагрева не полностью определенными моделями с идентификацией неопределенных параметров.

3. По результатам компьютерного моделирования также строятся результирующие распределения температур для всех значений неопределенных параметров Q_0 и Bi, отличных от номинальных $Q_{0H},\ Bi_H$.
4. Производится оценка эффективности СУ с идентификатором путем сравнения полученных результатов с эталонными характеристиками по степени сокращения длительности интервала выравнивания температур и точности равномерного приближения результирующих температурных распределений по радиусу цилиндра.

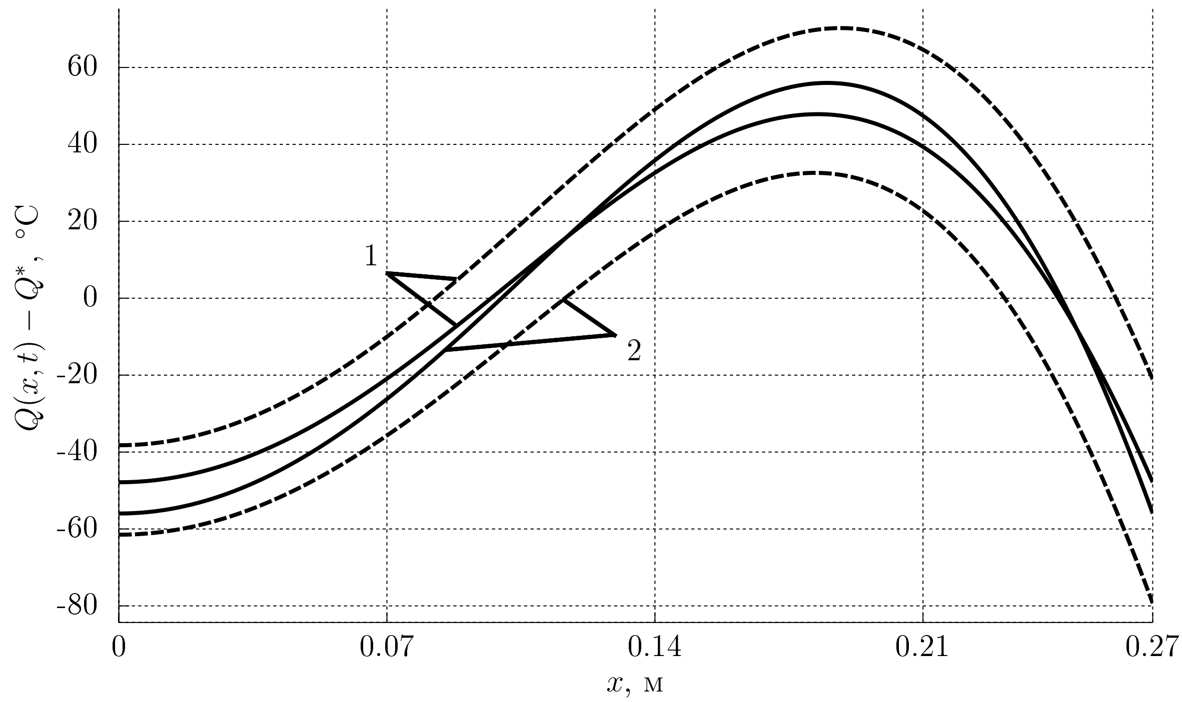
На рисунке 3.23 приведены результаты моделирования замкнутой системы (рисунок 3.10) для указанных в таблице 1 значений параметров объекта в виде передаточной функции (3.72) с $N = 30$ апериодических звеньев и заданных номинальных значений неопределенных параметров $Q_{0H} = 30\,^{\circ}\mathrm{C},\ Bi_H = 0.7$. Полученные данные свидетельствуют об удовлетворительной точности приближения оптимальных процессов в замкнутом контуре с идентификатором (2.31) в характерном для типовых ситуаций широком диапазоне изменения значения $Bi \in [0.4Bi_H, 1.4Bi_H]$ к детерминированным оптимальным программным алгоритмам управления (3.19) при $N_0 = 2,\ \mathbf{\Delta} = \{\Delta_1^0,\ \Delta_2^0\}$ для соответствующих заранее фиксируемых значений $\tilde{Bi} = [0.4Bi_H, 0.8Bi_H, 1.4Bi_H]$ по результирующему температурному распределению. Аналогичным образом, сопоставлены результаты моделирования замкнутой СУ ОРП с идентификатором в случае учета фазового ограничения (3.20) при заданном диапазоне изменения значения $Bi \in [0.9Bi_H, 1.1Bi_H]$ с результатами моделирования детерминированного оптимального программного управления с участком стабилизации температуры на допустимом уровне $Q_{\text{доп}}$ для зафиксированных значений неопределенной величины $\tilde{Bi} = [0.9Bi_H, 1.1Bi_H]$ (см. рисунок 3.24).

При этом обеспечивается существенное сокращение длительности интервала выравнивания температур Δ_2^0 и выигрыш по точности $\varepsilon_{\min}^{(2)}$ приближения к Q^* по сравнению с управлением по принципу гарантированного результата, предельные возможности которого ограничиваются достижением наилучших показателей по критерию оптимальности при наиболее неблагоприятном сочетании неопределенных факторов в (3.9). Нижние оценки получаемого эффекта определяются отношениями $\frac{\Delta^0_{2\max}}{\Delta^0_{2\min}}$ и $\frac{\left(\varepsilon_{\min}^{(2)}\right)_{\max}}{\left(\varepsilon_{\min}^{(2)}\right)_{\min}}$, где $\Delta^0_{2\max},\ \left(\varepsilon_{\min}^{(2)}\right)_{\max}$ и $\Delta^0_{2\min},\ \left(\varepsilon_{\min}^{(2)}\right)_{\min}$ – параметры



1 - $Q_0 = Q_{0H},\ Bi = 0.42$; 2 - $Q_0 = Q_{0H},\ Bi = 0.56$; 3 - $Q_0 = Q_{0H},\ Bi = 0.98$

Рисунок 3.23 — Результирующее распределение температур $Q(x,T) - Q^*$ по радиусу слитка при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\text{min}}^{(2)}$ в оптимальном по быстродействию процессе с двухинтервальным управлением u^* (сплошные линии) и в системе оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева для не полностью определенных (пунктир) моделей ОРП.



1 - $Q_0 = Q_{0H},\ Bi = 0.63$; 2 - $Q_0 = Q_{0H},\ Bi = 0.77$

Рисунок 3.24 — Результирующее распределение температур $Q(x,T) - Q^*$ по радиусу слитка при $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(2)}$ в оптимальном по быстродействию процессе с двухинтервальным управлением u^* (сплошные линии) и в системе оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева для не полностью определенных (пунктир) моделей ОРП с учетом фазового ограничения.

эталонных процессов при максимальном и минимальном из фиксируемых значений $\tilde{Bi}$. При $\tilde{Bi}_{\max} = 1.4Bi_H$; $\tilde{Bi}_{\min} = 0.4Bi_H$ и $\Delta^0_{2\max} = 1236$ сек.; $\left(\varepsilon^{(2)}_{\min}\right)_{\max} = 65.2\,^\circ\mathrm{C}$; $\Delta^0_{2\min} = 325$ сек.; $\left(\varepsilon^{(2)}_{\min}\right)_{\min} = 33.4\,^\circ\mathrm{C}$ за счет применения СУ с идентификатором достигается сокращение длительности на интервале выравнивания температур до 74% и повышается точность достижения требуемых конечных температурных кондиций до 43% соответственно.

3.8 Выводы по третьей главе

- Рассмотрена детерминированная задача оптимального программного управления типовым линейным ОРП, в качестве которого выступает процесс индукционного нагрева металлических полуфабрикатов перед обработкой давлением. В случае учета фазового ограничения, постановка задачи дополняется типовым для технологических процессов нагрева металла ограничением на максимальную температуру в процессе нагрева, что приводит к появлению специального участка управления, поддерживающего максимальную температуру на заданном допустимом уровне. По установленным универсальным свойствам пространственных распределений температуры по объему заготовки в конце оптимального процесса в зависимости от заданной абсолютной точности приближения к требуемым температурным кондициям была произведена процедура редукции исходной задачи оптимизации с параметризируемыми управляющими воздействиями к решению трансцендентных систем уравнений, замкнутых относительно всех искомых параметров программных алгоритмов оптимального управления.
- Решена задача синтеза детерминированной системы оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева с неполным измерением состояния объекта с учетом и без учета фазовых ограничений. Получены соответствующие структуры замкнутых систем управления и оптимальные алгоритмы управления с обратными связями.
- Выполнен структурно-параметрический синтез замкнутой системы оптимального по быстродействию управления процессом индукционного на-

грева с идентификатором неопределенных величин начальной температуры и уровня тепловых потерь.

– Определен способ моделирования ОРП, получен вид передаточной функции распределенного объекта и необходимые выражения для расчета её коэффициентов.
– Произведено компьютерное моделирование рассматриваемых замкнутых оптимальных систем управления для заданных исходных данных, выполнен расчет оптимальных параметров программного управления для задач с учетом и без учета фазовых ограничений, а также значений коэффициентов обратных связей, конечных температур и коэффициентов передачи для их линейных приближений наряду с коэффициентами линейных приближений алгоритма идентификации. Полученные значения коэффициентов не требуют пересчета в процессе работы систем управления.
– Выполнен сравнительный анализ полученных СУ с детерминированным регулятором и СУ с автокоррекцией коэффициентов обратных связей. Полученные данные свидетельствуют об удовлетворительной точности приближения оптимального процесса в замкнутом контуре с идентификатором к детерминированному оптимальному программному алгоритму управления, полученному в условиях полной информации об объекте, и о существенном выигрыше по точности приближения к требуемому конечному температурному состоянию и сокращении длительности интервала выравнивания температур по сравнению с управлением по принципу гарантированного результата в условиях интервальной неопределенности характеристик нагрева.

Глава 4. Синтез оптимальной по быстродействию системы управления нелинейной моделью процесса индукционного нагрева

Данная глава посвящена решению задачи синтеза системы оптимального по быстродействию управления не полностью определенной нелинейной моделью объекта с распределенными параметрами, в качестве которого рассматривается процесс индукционного нагрева, во многих практически реализуемых ситуациях описываемый взаимосвязанными нелинейными уравнениями электромагнитного и температурного полей [118—120]. Наибольшие возможности при учете нелинейностей и других существенных факторов дает применение методов цифрового моделирования, позволяющего получить с требуемой точностью численную модель температурного поля, описываемого решением краевой задачи практически любой сложности [118—120].

Учет существенных нелинейностей характеристик объекта может привести к изменению вида оптимальных управлений, однако для центральной задачи оптимизации по быстродействию процесса индукционного нагрева с управлением по напряжению на индукторе можно строго показать [121], что форма алгоритмов оптимального управления сохраняется и в большинстве практических случаев, основные качественные характеристики оптимальных процессов остаются неизменными [9].

Отсутствие в явном виде аналитического описания температурных полей при численном моделировании приводит к необходимости адаптации методики построения идентификатора неопределенных величин для нелинейной модели объекта при сохранении рассмотренного в главе 2 подхода к задаче синтеза замкнутой системы управления.

4.1 Нелинейная математическая модель процесса индукционного нагрева

В общем случае пространственно-временное распределение температуры по объему заготовки в процессе индукционного нагрева описывается сложной системой уравнений Максвелла и Фурье для электромагнитных и температурных полей [6; 118; 120; 122]:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t}; \\ \mathrm{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t}; \\ \mathrm{div}\mathbf{B} &= 0; \\ \mathrm{div}\mathbf{E} &= 0; \\ c(Q)\gamma(Q)\frac{\partial Q}{\partial \tau} - \mathrm{div}(\lambda(Q)\mathrm{grad}Q) &= -\mathrm{div}[\mathbf{EH}]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь **E** – вектор напряженности электрического поля; **D** – вектор электрической индукции; **B** – вектор магнитной индукции; **H** – вектор напряженности магнитного поля; **J** – плотность тока проводимости; t – время; $c(Q),\ \gamma(Q),\ \lambda(Q)$ – заданные температурные зависимости теплофизических характеристик.

Для получения однозначного решения системы уравнений Максвелла относительно всех неизвестных необходимо дополнить эту систему следующими базовыми соотношениями, выполняющимися в линейных изотропных средах [118; 120; 122]:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}; \\ \mathbf{B} &= \mu_r\mu_0\mathbf{H}; \\ \mathbf{J} &= \sigma\mathbf{E}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Дополнив систему уравнений (4.1), (4.2) соответствующими граничными и начальными условиями в результате можно получить трехмерное описание температурного распределения в любой момент времени для любой точки по объему нагреваемой заготовки.

С достаточной для практических целей точностью процесс индукционного нагрева металлических заготовок цилиндрической формы с сосредоточенным управляющим воздействием по мощности внутреннего тепловыделения $u(t)$ может быть описан следующим двумерным нелинейным уравнением теплопроводности [6]:

$$\begin{gathered} c(Q)\gamma(Q)\frac{\partial Q(x,l,t)}{\partial t} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(Q)x\frac{\partial Q(x,l,t)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial l}\left(\lambda(Q)\frac{\partial Q(x,l,t)}{\partial l}\right) + \\ + F(x,l,u(t)); \end{gathered} \tag{4.3}$$

$$0 < x < R;\ 0 < l < L;\ 0 < t < T;$$

с краевыми условиями третьего рода

$$\begin{gathered}
\lambda(Q)\frac{\partial Q(R,l,t)}{\partial x} = \alpha\left(Q_C(t) - Q(R,l,t)\right);\\
\lambda(Q)\frac{\partial Q(x,L,t)}{\partial l} = \alpha\left(Q_C(t) - Q(x,L,t)\right);\\
\lambda(Q)\frac{\partial Q(x,0,t)}{\partial x} = -\alpha\left(Q_C(t) - Q(x,0,t)\right);\\
\frac{\partial Q(0,l,t)}{\partial x} = 0;\\
Q(x,l,0) = Q_0(x,l) = Q_0 = \text{const.}
\end{gathered} \tag{4.4}$$

На управляющее воздействие $u(t)$ накладывается следующее ограничение:

$$0 \leq u(t) \leq u_{\max} \, \forall t \in [0,T]. \tag{4.5}$$

Здесь $Q(x,l,t)$ – температурное поле нагреваемого металлического изделия; *x* и l – соответственно радиальная и продольная пространственные координаты; *R*, L – радиус и длина цилиндра; α – коэффициент теплоотдачи, определяющий уровень тепловых потерь с боковой и торцевых поверхностей цилиндра в окружающую среду с температурой $Q_C(t)$; $F(x,l,u(t))$ – функция, характеризующая пространственно-временное распределение электромагнитных источников тепла по объему заготовки и определяемая величиной $\mathrm{div}[\mathbf{EH}]$ в (4.1) в процессе совместного решения взаимосвязанной системой уравнений (4.1)–(4.4) краевой электротепловой задачи; Q_0 – начальное распределение температур.

4.2 Численное моделирование процесса индукционного нагрева цилиндрических заготовок

Решение взаимосвязанной задачи (4.1)–(4.4) возможно только численными методами и представляет собой самостоятельную проблему [118—120; 122]. Согласно [9; 123] наибольшими возможностями при решении этой задачи обладают методы цифрового моделирования с помощью которых разработаны эффективные комплексные электротепловые модели [118—120]. В [123] проведен сравнительный анализ современных программных пакетов, на базе которых производится компьютерное моделирование процессов индукционного нагрева, а также современных методов математического моделирования. В частности, показано, что наиболее распространенным численным методом расчета электромагнитных и тепловых полей является метод конечных элементов (МКЭ), суть которого сводится к разбиению области, в которой ищется решение, на конечное количество подобластей, в пределах которых вычисляются значения искомого решения по заданным конечно-разностным аппроксимациям исходных дифференциальных уравнений [124; 125].

В целях адаптации и апробации методики идентификации неопределенных параметров процесса индукционного нагрева, в данной работе была использована цифровая модель, созданная в специализированном конечно-элементном программном пакете FLUX [124; 126], разработанном компанией Cedrat. Данное ПО предоставляет возможность симуляции статических, гармонических и переходных состояний для магнитных и электромагнитных приложений, включая механическую и электрическую привязку к модели, анализ тепловых процессов, а также интеграцию с математическим пакетом прикладных программ Matlab и Simulink [127].

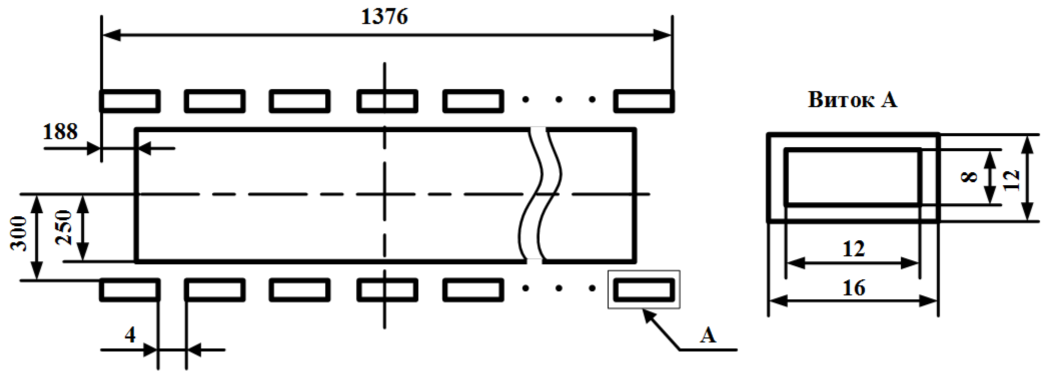


Рисунок 4.1 — Конструктивные параметры индуктора и заготовки.

Исходные данные, использованные для построения двумерной цифровой модели процесса сквозного периодического индукционного нагрева алюминиевых цилиндрических слитков, представлены в таблице 2. Конструктивные характеристики индуктора и алюминиевой цилиндрической заготовки (в мм) показаны на рисунке 4.1. Алгоритм моделирования во Flux представлен на рисунке 4.2.

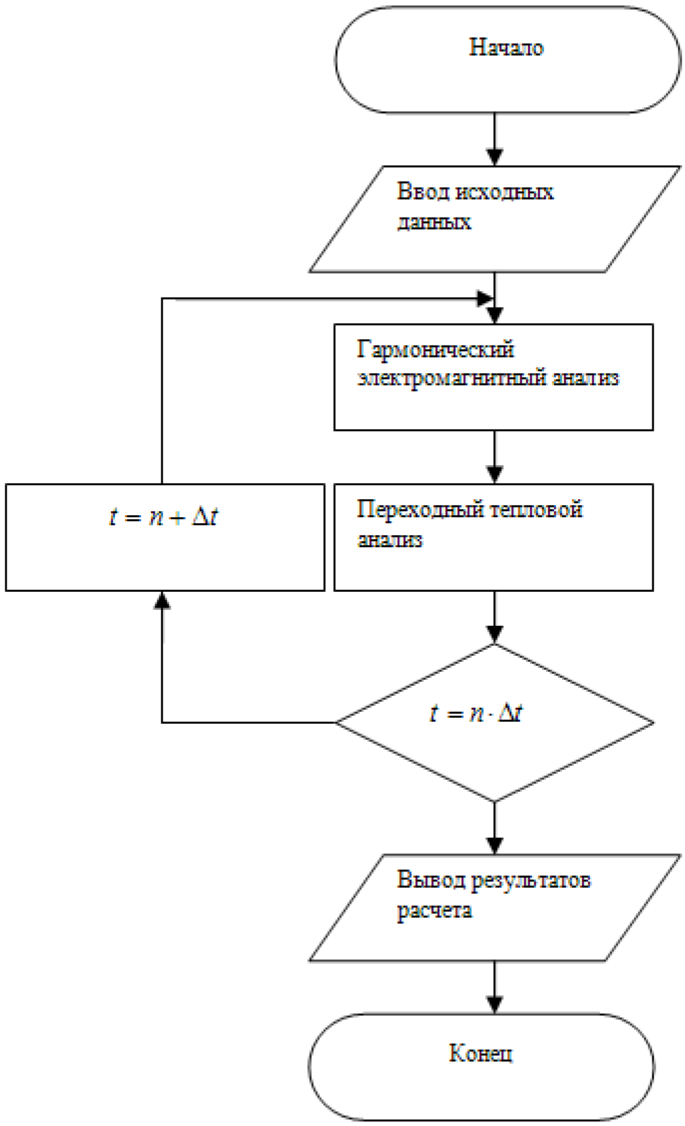


Рисунок 4.2 — Алгоритм моделирования процесса индукционного нагрева во Flux [124].

Таблица 2 — Исходные данные для цифровой модели процесса индукционного нагрева

Обозначение	Параметр	Значение	Единицы измерения
R	Радиус заготовки	0.25	м
L	Длина заготовки	1	м
N_i	Число витков	69	-
f	Частота питающего тока	50	Гц
$u_{\max}$	Напряжение на индукторе	470	В
λ	Теплопроводность	$115(1+8\cdot10^{-4}Q)$	Вт / (м $\cdot$°С)
$\rho(Q)$	Сопротивление материала	$3\cdot10^{-8}(1+7\cdot10^{-3}Q)$	Ом
$C_p(Q)$	Объемная теплоемкость	$2.34\cdot10^{6}(1+5.7\cdot10^{-4}Q)$	Дж/(м^3 $\cdot$ °С)
α	Коэффициент конвективного теплообмена	20	-
$B(H)$	Зависимость индукции B от напряженности H магнитного поля	$4\pi\cdot10^{-7}H$	Тл
Q_0	Начальная температура	20	°С
Q^*	Требуемая температура	460	°С

4.3 Постановка задачи

Постановка задачи синтеза замкнутой системы оптимального по быстродействию управления процессом индукционного нагрева цилиндрических слитков, описываемая нелинейным неоднородным уравнением теплопроводности, в условиях интервальной неопределенности параметров объекта не отличается от общей постановки, приведенной в § 2.2.

Качество процесса управления оценивается по критерию оптимального быстродействия (3.10).

Определяя начальную температуру Q_0 и коэффициент теплоотдачи α с точностью до принадлежности заданным интервалам их возможных значений $Q_0 \in [Q_{0\,\min}, Q_{0\,\max}]$, $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, переопределим вектор неопределенных факторов как $y = (Q_0, \alpha) \in Y$, где Y теперь множество всех допустимых по указанным ограничениям комбинаций величин Q_0 и α по сравнению с (3.9) для линейной модели объекта в § 3.1.

В случае, когда в системе управления может быть получена в реальном масштабе времени достоверная информация о реализуемой в каждом конкретном случае величине $y = \tilde{y} \in Y$ путем наблюдения за поведением управляемой величины, требования к конечному температурному состоянию $Q(x,l,\tilde{y},T)$ записываются в виде неравенства, подобно (2.14) для линейной модели:

$$\max_{x\in[0,R];l\in[0,L]} |Q(x,l,\tilde{y},T) - Q^*(x,l)| \le \tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y}). \tag{4.6}$$

с учетом заданного в равномерной метрике допуска $\varepsilon_0 \ge \tilde{\varepsilon}_0(\tilde{y})$ на отклонение конечного температурного состояния $Q(x,l,\tilde{y},T)$ от требуемого равномерного распределения температур $Q^*(x,l) = Q^* = \text{const}$.

Сформулируем задачу оптимального быстродействия.

Если пренебречь инерционностью и погрешностями процедур наблюдения и идентификации величина $\tilde{y}$ по-прежнему может быть определена подобно (2.19) по некоторой заранее фиксируемой детерминированной зависимости $F(Q_c(x,l,t))$ от результатов всегда неполного наблюдения $Q_c(x,l,t)$ за текущим состоянием $Q(x,l,t)$ объекта:

$$\tilde{y} = F(Q_c(x,l,t)), \tag{4.7}$$

где $Q_c(x,l,t)$ и $F(Q_c(x,l,t))$ выбираются из условия минимальной сложности технической реализации системы управления.

Таким образом возникает задача проектирования идентификатора (4.7) и синтеза регулятора $u^* = u^*(Q_c(x,l,t))$, обеспечивающих перевод объекта, описываемого системой уравнений (4.3) и (4.4) из заданного начального в требуемое конечное состояние (4.6) за минимально возможное время для каждой из допустимых величин $\tilde{y} = (\tilde{Q}_0, \tilde{\alpha}) \in Y$ в условиях ограничения (4.5).

4.4 Структурно-параметрический синтез замкнутой системы управления

Рассмотрим задачу синтеза такой системы на примере построения оптимальной по быстродействию системы управления процессом индукционного нагрева металлических изделий цилиндрической формы, численная модель которого описана выше, для типового случая, когда мощность нагрева в первом приближении равномерно распределена по всей длине заготовки, а тепловые потери на торцах $l = 0$ и $l = L$ цилиндра мало отличаются друг от друга. В таком случае можно ограничиться контролем температурного поля в среднем сечении цилиндра $l = \frac{L}{2}$ с нулевым температурным градиентом $\frac{\partial Q\left(x, \frac{L}{2}\right)}{\partial l}$, в пределах которого радиальное распределение температур описывается одномерным уравнением теплопроводности.

Применительно к нелинейной модели объекта (4.3) и (4.4) сохраняется релейная форма оптимального по быстродействию программного управления процессом индукционного нагрева [121], что позволяет распространить на данный случай метод структурно-параметрического синтеза замкнутой системы оптимального быстродействия, разработанный для линейных моделей.

Тогда решение детерминированной задачи синтеза замкнутой оптимальной по быстродействию системы управления для любых заранее фиксируемых значений вектора $\tilde{y} = (\tilde{Q}_0, \tilde{\alpha}) \in Y$ с выбором контролируемых температур Q_1 и Q_2 соответственно в точках $x_1 = R,\ l = \frac{L}{2}$ и $x_2 = 0,\ l = \frac{L}{2}$ приводит к совпадающему с линейным случаем виду (3.41) алгоритма обратной связи:

$$\begin{aligned} u^*(Q_1,Q_2,\tilde{y}) = \frac{u_{\max}}{2} \pm \frac{u_{\max}}{2} \operatorname{sign} \Bigg[Q^* - \varepsilon^{(2)}_{\min}(\tilde{y}) - Q_1 \left(R, \frac{L}{2}, t \right) + \\ + \hat{\rho}_2(\tilde{y}) \left(Q^* - \varepsilon^{(2)}_{\min}(\tilde{y}) - Q_2 \left(0, \frac{L}{2}, t \right) \right) \Bigg]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Коэффициенты обратных связей $\hat{\rho}_1(\tilde{y}),\ \hat{\rho}_2(\tilde{y})$ находятся из системы уравнений (2.22), где $N = 2$. В частности, при $\hat{\rho}_1(\tilde{y}) = 1$ коэффициент $\hat{\rho}_2(\tilde{y})$ может быть найден по формуле (3.42). Момент переключения $\tilde{t}_1$ оптимальной программы $u^*(Q_1,Q_2,\tilde{y})$, интервалы управления Δ_1^0 и Δ_2^0, а также значение минимакса $\varepsilon^{(2)}_{\min}(\tilde{y})$ могут быть найдены альтернасным методом в условиях отсутствия аналитических выражений для результирующего температурного поля, усложняющих вычислительную технологию его применения [6; 9]. При этом все основные выводы в § 3.2.4 остаются справедливы и для рассматриваемого случая [6]. Расчетная система уравнений сохраняет вид (3.39), а процедура поиска решений этой системы уравнений сводится в данном случае к поиску на численной модели искомых значений оптимальных длительностей интервалов, обеспечивающих соответствующее конечное температурное распределение по радиусу заготовки $Q_u(x,\frac{L}{2},\Delta_1^0,\Delta_2^0)$ [9].

Для представленной в § 4.2 модели и указанных в таблице 2 исходных номинальных данных в результате расчета оптимального программного управления получены следующие значения параметров:

$$\Delta_1^0 = 1835 \text{ сек.},\ \Delta_2^0 = 140 \text{ сек.},\ \varepsilon_{\min}^{(2)}(\tilde{y}) = 1.8\,^\circ\text{C}.$$

Вид конечного температурного распределения в центральном сечении модели цилиндрической заготовки $\frac{L}{2}$ показан на рисунке 4.3

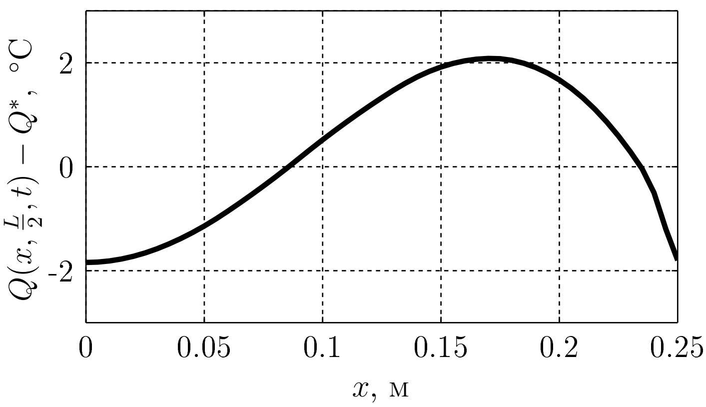


Рисунок 4.3 — Температурное распределение по радиусу центрального сечения цилиндра $Q(x,\frac{L}{2},\Delta_1^0,\Delta_2^0)$.

Получаемая структура замкнутой системы управления с детерминированным регулятором для численной модели сохраняет вид, показанный на рисунке 3.7. Дополнив её идентификатором (2.31) при $r = 2$, $\bar{Q}_1(t^0) = Q(R,\frac{L}{2},t^0)$, $\bar{Q}_2(t^0) = Q(0,\frac{L}{2},t^0)$, $t^0 \in (0,\Delta_1^0)$ получаем замкнутую СУ оптимального по быстродействию управления с регулятором (3.57) в условиях интервальной неопределенности объекта (см. рисунок 3.10), где линейные приближения коэффициентов обратных связей и наблюдаемых температур в конце оптимального процесса вычисляются по формулам (2.33) и (2.34) с учетом (3.55) и при $\hat{\rho}_1 = 1,\ N = 2$. Значения Q_{jH} температур на поверхности и в центре заготовки определяются в зафиксированный момент времени t^0 при номинальных значениях неопределенных параметров $y_H = (Q_{0H}, \alpha_H)$.

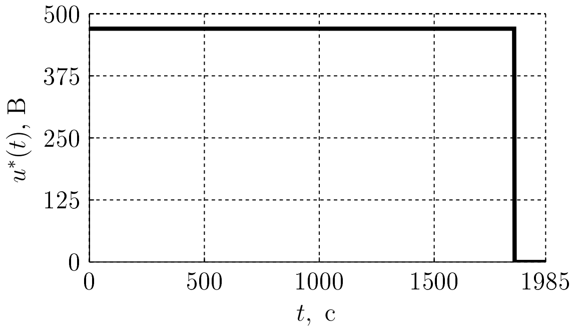
Ввиду отсутствия аналитических выражений для исследуемых нелинейных моделей, все производные в формулах (2.31), (2.32) и (2.34) для коэффициентов $\hat{\alpha}_{mj},\ \hat{\beta}_{mi},\ \hat{\beta}^*_{mi},\ m = i = j = 2$, могут быть найдены с требуемой точностью путем замены соответствующих производных их конечно-разностными аппроксимациями, вычисляемыми непосредственно на цифровой модели объекта:

$$\begin{gathered}
\hat{\alpha}_{11} \cong \frac{\frac{\Delta Q_2}{\Delta\alpha}}{\frac{\Delta Q_2}{\Delta\alpha} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta\alpha}};\ \hat{\alpha}_{12} \cong \frac{\frac{\Delta Q_1}{\Delta\alpha}}{\frac{\Delta Q_2}{\Delta\alpha} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta\alpha}};\\
\hat{\alpha}_{21} \cong -\frac{1}{\frac{\Delta Q_2}{\Delta\alpha} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta\alpha}};\ \hat{\alpha}_{22} \cong \frac{1}{\frac{\Delta Q_2}{\Delta\alpha} - \frac{\Delta Q_1}{\Delta\alpha}};\\
\hat{\beta}_{1i} \cong \frac{\Delta\hat{\rho}_i}{\Delta Q_0};\ \hat{\beta}_{2i} \cong \frac{\Delta\hat{\rho}_i}{\Delta\alpha};\ \hat{\beta}^*_{1i} \cong \frac{\Delta Q_i^T}{\Delta Q_0};\ \hat{\beta}^*_{2i} \cong \frac{\Delta Q_i^T}{\Delta\alpha}.
\end{gathered} \tag{4.9}$$

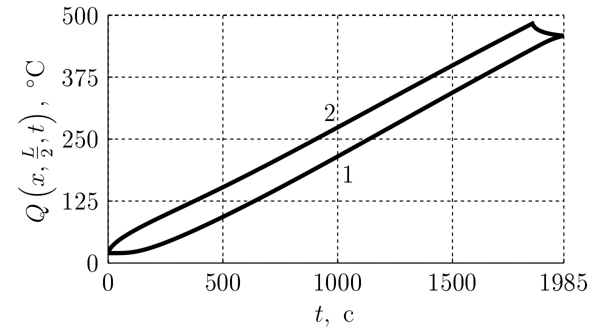
Для исходных номинальных данных, представленных в таблице 2, а также $Q_{0H} = 20\,°\mathrm{C},\ \alpha_H = 20,\ t^0 = 500$ сек., получены следующие значения коэффициентов в (2.33), (2.34) и (4.9):

$$\begin{gathered}
\hat{\alpha}_{11} = 0.13;\ \hat{\alpha}_{12} = 0.87;\ \hat{\alpha}_{21} = 0.31;\ \hat{\alpha}_{22} = -0.31;\\
\hat{\beta}_{11} = 0;\ \hat{\beta}_{12} = 0.03;\ \hat{\beta}_{21} = 0;\ \hat{\beta}_{22} = -0.06;\\
\hat{\beta}^*_{11} = 0.35;\ \hat{\beta}^*_{12} = 0.44;\ \hat{\beta}^*_{21} = 0.13;\ \hat{\beta}^*_{22} = 0.44;\\
\hat{\gamma}_{11} = 0;\ \hat{\gamma}_{12} = 0;\ \hat{\gamma}_{21} = -0.02;\ \hat{\gamma}_{22} = 0.05;\\
\hat{\gamma}^*_{11} = 0.08;\ \hat{\gamma}^*_{12} = 0.26;\ \hat{\gamma}^*_{21} = 0.19;\ \hat{\gamma}^*_{22} = 0.24;\\
\hat{\rho}_1 = 1;\ \hat{\rho}_2(y_H) = 0.89.
\end{gathered}$$

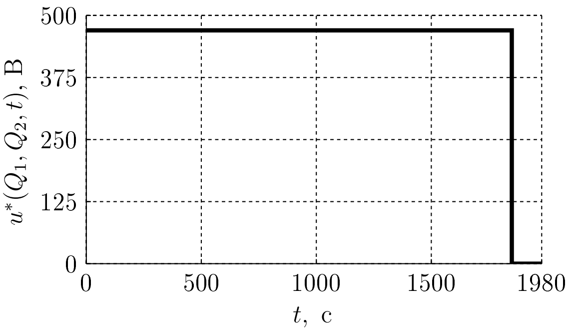
На графиках (см. рисунок 4.4) представлены результаты моделирования двух систем управления нелинейным объектом (4.3) и (4.4), исходные данные которого представлены в таблице 2: разомкнутой, под управлением оптимальной программы, и замкнутой системы управления под управлением оптимального алгоритма (4.8) с идентификатором неопределенных величин α и Q_0, для заранее фиксируемой величины $\tilde{\alpha} = 22$ при $Q_0 = Q_{0H}$.



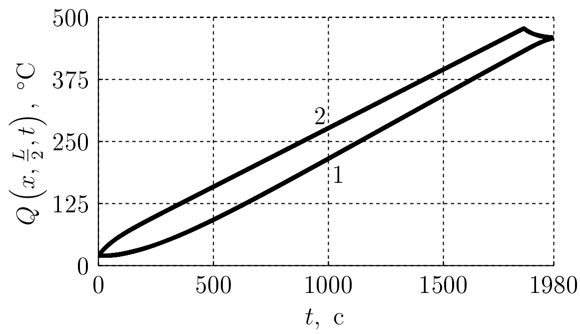
а) Управляющее воздействие



б) Температурное поле



в) Управляющее воздействие



г) Температурное поле

1 - Температура в точке $x = 0$;

2 - Температура в точке $x = R$.

Рисунок 4.4 — Результаты компьютерного моделирования (а,б) СУ программного оптимального управления нелинейной моделью объекта и (в,г) замкнутой СУ с идентификатором неопределенных величин при $Q_0 = Q_{0H},\ \alpha = 22$.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что предложенная методика синтеза системы оптимального быстродействия распространяется также на сложные нелинейные модели с учетом особенностей реальных объектов.

4.5 Выводы по четвертой главе

- Рассмотрена не полностью определенная нелинейная двухмерная модель процесса индукционного нагрева металлических заготовок цилиндрической формы, численная модель которой создана во FLUX.
- Решена задача синтеза оптимальной по быстродействию системы управления указанным распределенным объектом в условиях интервальной неопределенности начальной температуры и уровня тепловых потерь. Показано, что для рассматриваемого случая все основные выводы главы 2 остаются справедливы. Получено уравнение оптимального регулятора для данного случая.
- Произведено компьютерное моделирование и представлены его результаты для замкнутой системы с идентификатором и разомкнутой системы управления, оптимальные параметры которой рассчитаны в условиях полной информации об объекте, на основе которых можно сделать вывод о возможности использования предлагаемой в главе 2 методики для сложных нелинейных моделей ОРП.
- Выполнен расчет оптимального по быстродействию программного управления детерминированной нелинейной моделью процесса индукционного нагрева.
- Выполнена процедура структурно-параметрического синтеза замкнутой системы оптимального по быстродействию управления нелинейной цифровой моделью процесса индукционного нагрева с идентификатором неопределенных характеристик объекта.

Заключение

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Рассмотрены и проанализированы причины возникновения основных видов неопределенностей и методов борьбы с ними. Установлено, что проблема управления динамическими объектами в условиях того или иного типа неопределенностей характерны для широкого круга практических задач и является одной из наиболее сложных задач современной теории управления. Указанная проблема ещё более усложняется в наименее исследованной области оптимального управления СРП, для которых характерна интервальная неопределенность параметрических характеристик объекта. В этой связи ставится актуальная задача разработки метода синтеза, построенного на основе адаптивной системы оптимального быстродействия с идентификатором максимально упрощенного вида для достаточно широкого класса СУ не полностью определенными моделями ОРП.
2. Разработана процедура структурно-параметрического синтеза замкнутой системы оптимального по быстродействию управления объектом с распределенными параметрами в условиях интервальной неопределенности его параметрических характеристик. На первом этапе была решена детерминированная задача синтеза системы оптимального по быстродействию управления распределенным объектом при некоторых фиксированных номинальных значениях неопределенных параметров, в результате решения которой получен оптимальный регулятор с линейными обратными связями по значениям неполного измерения состояния объекта и соответствующая структура замкнутой СУ. Затем полученная структура была дополнена специального вида идентификатором неопределенных величин объекта в реальном масштабе времени, определяющим в линейном приближении отклонения от номинальных значений параметров. Указанная процедура распространена на более сложную задачу оптимизации с учетом заданных ограничений на поведение в оптимальном процессе управляемой функции состояния ОРП.

3. Произведен синтез замкнутых систем оптимальных по быстродействию управления типовым ОРП, в качестве которого рассматривается процесс индукционного нагрева металлических изделий цилиндрической формы, в условиях интервальной неопределенности его параметрических характеристик в задаче с учетом и без учета фазового ограничения на максимальную температуру в процессе нагрева. Согласно предложенной методике были определены выражения для линейных приближений алгоритма идентификации и его коэффициентов, а также линейные приближения коэффициентов обратных связей и конечных значений температур. Для полученных оптимальных регуляторов приведены соответствующие структуры замкнутых систем управления.
4. Произведено компьютерное моделирование полученных оптимальных по быстродействию замкнутых СУ процессом индукционного нагрева. Для заданных исходных данных был выполнен расчет оптимальных параметров программного управления, коэффициентов обратных связей для детерминированных задач синтеза замкнутых оптимальных СУ, а также всех коэффициентов для линейных приближений алгоритма идентификации, коэффициентов обратных связей и конечных значений температурных состояний. Определены вид и коэффициенты передаточной функции моделируемого объекта.
5. Выполнен сравнительный анализ, по результатам которого был сделан вывод об удовлетворительной точности приближения оптимальных процессов в замкнутом контуре с идентификатором к детерминированному алгоритму оптимизации по критерию быстродействия в условиях полного объема информации о параметрах объекта, и получении преимуществ по сравнению с программным управлением по принципу гарантированного результата.
6. Решена задача синтеза системы оптимального по быстродействию управления не полностью определенной нелинейной двухмерной моделью процесса индукционного нагрева металлических заготовок цилиндрической формы в условиях интервальной неопределенности его параметрических характеристик. Использована цифровая модель объекта, разработанная во FLUX. При этом остаются справедливы все основные положения и выводы предлагаемой процедуры структурно-

параметрического синтеза замкнутой СУ в условиях интервальной неопределенности, что подтверждается результатами компьютерного моделирования и расчетами.

Дальнейшим возможным направлением развития работы является исследование возможностей уточнения предлагаемого алгоритма идентификации за счет учета нелинейных его составляющих в целях повышения точности работы замкнутой системы управления ОРП в условиях расширенного диапазона реализуемых значений неопределенных параметров объекта.

Другим направлением является распространение предлагаемого метода структурно-параметрического синтеза замкнутых системы управления объектом с распределенными параметрами в условиях интервальной неопределенности его параметрических характеристик для широкого круга технико-экономических критериев оптимальности.

Список сокращений и условных обозначений

АФХ	Амплитудно фазовая характеристика
АЧХ	Амплитудно-частотная характеристика
ВВ	Возмущающие воздействия
МКЭ	Метод конечных элементов
ОРП	Объект с распределенными параметрами
ОУ	Объект управления
ПИНМП	Процесс индукционного нагрева металлических полуфабрикатов
ПО	Программное обеспечение
СРП	Система с распределенными параметрами
ССП	Система с сосредоточенными параметрами
СУ	Система управления
ТАУ	Теория автоматического управления

Список литературы

1. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М. : Наука, 1977. — 392 с.
2. *Федоров В. В.* Численные методы максимина. — М. : Наука, 1979. — 278 с.
3. *Поляк Б. Т.*, *Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М. : Наука, 2002. — 303 с.
4. Управление динамическими системами в условиях неопределенности / С. Т. Кусимов [и др.]. — М. : Наука, 1998. — 452 с.
5. *Афанасьев В. Н.* Управление неопределенными динамическими объектами. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 208 с.
6. *Рапопорт Э. Я.* Оптимизация процессов индукционного нагрева металла. — М. : Металлургия, 1993. — 279 с.
7. *Рапопорт Э. Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами: Учеб. пособие. — М. : Высш. шк., 2009. — 677 с.
8. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1975. — 568 с.
9. *Рапопорт Э. Я.*, *Плешивцева Ю. Э.* Оптимальное управление температурными режимами индукционного нагрева. — М. : Наука, 2012. — 309 с.
10. *Рапопорт Э. Я.* Полубесконечная оптимизация управляемых систем в условиях ограниченной неопределенности // Известия СНЦ РАН. — 2000. — Т. 2, № 1. — С. 81—88.
11. *Никифоров В. О.*, *Слита О. В.*, *Ушаков А. В.* Интеллектуальное управление в условиях неопределенности: учебное пособие. — СПб. : СПбГУ ИТМО, 2009. — 232 с.
12. *Красовский А. А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. — М. : Наука, 1973. — 560 с.
13. *Налимов В. В.* Теория эксперимента. — М. : Наука, 1971. — 207 с.
14. *Заде Л. А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. — М. : Мир, 1976. — 165 с.

15. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / А. В. Аверкин [и др.]. — М. : Наука, 1986. — 312 с.

16. *Рапопорт Э. Я.* Альтернасный метод в прикладных задачах оптимизации. — М. : Наука, 2000. — 336 с.

17. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами (Серия «Теоретические основы технической кибернетики). — М. : Наука, 1965. — 476 с.

18. *Рапопорт Э. Я.* Анализ и синтез систем автоматического управления с распределенными параметрами: Учеб. пособие. — М. : Высш. шк., 2005. — 292 с.

19. *Рапопорт Э. Я.* Структурное моделирование объектов и систем управления с распределенными параметрами: Учеб. пособие. — М. : Высш. шк., 2003. — 299 с.

20. *Гермейер Ю. Б.* Введение в теорию исследования операций. — М. : Наука, 1971. — 384 с.

21. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем / Ю. М. Гусев [и др.] // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1991. — № 1. — С. 3—23.

22. *Bialas S.* A necessary and sufficient condition for the stability of interval matrices // International Journal of Control. — 1983. — Vol. 37, no. 4. — Pp. 712–722.

23. *Chung-Li J.* Sufficient and necessary condition for the asymptotic stability of discrete linear interval systems // International Journal of Control. — 1988. — Vol. 47, no. 5. — Pp. 1563–1565.

24. *Soh C.* Necessary and sufficient conditions for stability of symmetric interval matrices // International Journal of Control. — 1990. — Vol. 51, no. 1. — Pp. 243–248.

25. *Chen Y. H.* Decentralized Robust Control System Design for Large-Scale Uncertain Systems // International Journal of Control. — 1988. — Vol. 47, no. 5. — Pp. 1195–1205.

26. *WANG W.-J., CHENG C.-F.* Robustness of perturbed large-scale systems with local constant state feedback // International Journal of Control. — 1989. — Vol. 50, no. 1. — Pp. 373–384.

27. *Харитонов В. Л.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1978. — Т. 14, вып. 11. — С. 2086—2088.

28. *Tannenbaum A.* On the multivariable gain margin problem // Automatica. — 1986. — Vol. 22, issue 3. — Pp. 381–383.

29. *Barmish B.* Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1984. — Vol. 29, no. 10. — Pp. 935–936.

30. *Липатов А. В., Голубничая Т. Ф.* Суждение об устойчивости нестационарных систем одного класса по устойчивости множества «замороженных» систем // Вопросы исследования и проектирования систем управления. — М.:МАИ, 1980. — С. 18—26.

31. *Ackermann J.* Parameter space design of robust control systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1980. — Vol. 25, no. 6. — Pp. 1058–1072.

32. *Харитонов В. Л.* Задача распределения корней характеристического полинома автономной системы // Автоматика и телемеханика. — 1981. — № 5. — С. 42—47.

33. *Хлебалин Н. А.* Построение интервальных полиномов с заданной областью расположения корней // Аналитические методы синтеза регуляторов. — Саратов: Саратовский политехн. ин-т, 1982. — С. 92—98.

34. *Хлебалин Н. А.* Аналитический синтез регуляторов в условиях неопределенности параметров объекта управления: дис. ... канд. техн. наук. — Саратов, 1982. — 187 с.

35. *Сиразетдинов Р. Т.* К построению гарантированной области расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы // Изв. вузов. Авиационная техника. — 1984. — № 4. — С. 72—76.

36. *Сиразетдинов Р. Т.* Построение гарантированной области расположения нулей и полюсов передаточных функций динамических систем // Автоматика и телемеханика. — 1988. — № 7. — С. 51—58.

37. *Калмыков С. А.*, *Шокин Ю. И.*, *Юлдашев З. Х.* Методы интервального анализа. — Новосибирск : Наука, 1986. — 222 с.

38. *Petersen I. R.* A new extension to Kharitonov's theorem // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1990. — Vol. 35, no. 7. — Pp. 825–828.

39. *Soh Y. C.*, *Foo Y. K.* Generalization of strong Kharitonov theorems to the left sector // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1990. — Vol. 35, no. 12. — Pp. 1378–1382.

40. *Doyle J.*, *Stein G.* Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1981. — Vol. 26, no. 1. — Pp. 4–16.

41. *Daniel R.*, *Kouvaritakis B.* A new robust stability criterion for linear and nonlinear multivariable feedback systems // International Journal Of Control. — 1985. — Vol. 41, issue 6. — Pp. 1349–1379.

42. *Mori T.*, *Kokame H.* On Extended Kharitonov's Theorems // Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers. — 1989. — Vol. 25, issue 1. — Pp. 22–27.

43. *Bartlett A. C.*, *Tesi A.*, *Vicino A.* Frequency response of uncertain systems with interval plants // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1993. — Vol. 38, no. 6. — Pp. 929–933.

44. *Поляк Б. Т.*, *Цыпкин Я. З.* Робастный критерий Найквиста // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 7. — С. 25—31.

45. *Lin H.*, *Hollot C.*, *Bartlett A.* Stability of families of polynomials: geometric considerations in coefficient space // International Journal Of Control. — 1987. — Vol. 45, issue 2. — Pp. 649–660.

46. *Desoer C. A.*, *Wang Y. T.* On the generalized Nyquist stability criterion // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1979. — Vol. 2. — Pp. 580–586.

47. *Юсупбеков Н. Р.*, *Цацкин М. Л.* Робастность многосвязных систем управления. — М. : Наука, 1990. — 149 с.

48. *Лан Л. Х.* Модифицированный частотный критерий робастной устойчивости замкнутых систем // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 8. — С. 119—130.

49. *Лан Л. Х.* Построение области значений интервальной передаточной функции и ее использование в задачах робастного управления // Автоматика и телемеханика. — 1994. — № 1. — С. 148—161.

50. *Соболев О. С.* Методы исследования линейных многосвязных систем. — М. : Энергоатомиздат, 1986. — 120 с.

51. *Боднер В. А.*, *Рязанов Ю. А.*, *Шаймарданов Ф. А.* Системы автоматического управления двигателями летательных аппаратов. — М. : Машиностроение, 1973. — 248 с.

52. *Пантелеев А. В.*, *Бортаковский А. С.* Теория управления в примерах и задачах. — М. : Высш.шк., 2003. — 583 с.

53. *Овсянников Д. А.* Математические методы управления пучками. — Л. : Изд-во ЛГУ, 1980. — 228 с.

54. *Пантелеев А. В.*, *Бортаковский А. С.*, *Летова Т. А.* Оптимальное управление в примерах и задачах. — М. : Изд-во МАИ, 1996. — 211 с.

55. *Рапопорт Э. Я.* Программная реализация обратных связей в задачах параметрической оптимизации не полностью определенных систем с распределенными параметрами // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2016. — № 3. — С. 36—50.

56. *Бесекерский В. А.* Динамический синтез систем автоматического регулирования. — М. : Наука, 1970. — 576 с.

57. *Бесекерский В. А.*, *Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. — М. : Наука, 1975. — 768 с.

58. *Топчеев Ю. И.* Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. — М. : Машиностроение, 1989. — 752 с.

59. Новые результаты в H^{∞}-теории управления / А. С. Позняк [и др.] // Известия РАН. Техническая кибернетика. — 1991. — № 6. — С. 10—39.

60. *Поляк Б. Т.* Введение в оптимизацию. — М. : Наука, 1983. — 384 с.

61. *Себряков Г. Г.*, *Семенов А. В.* Проектирование линейных стационарных многомерных систем на основе вход-выходных отображений. Методы H^{∞}-теории управления // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1989. — № 2. — С. 3—16.

62. *Барабанов А. Е.*, *Первозванский А. А.* Оптимизация по равномерно-частотным показателям (H^{∞}-теория) // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 9. — С. 3—32.

63. *Первозванский А. А.*, *Чечурин Л. С.* Синтез обратной связи по критерию робастности с помощью уравнений Риккати // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 11. — С. 152—161.

64. *Полак Э.*, *Мейни Д. К.*, *Стимлер Д. М.* Применение методов полубесконечной оптимизации для синтеза систем автоматического управления: Обзор // ТИИЭР. — 1984. — Т. 72, № 12. — С. 132—153.

65. *Первозванский А. А.* Чувствительность грубость и эффективность адаптации // Известия РАН. Техническая кибернетика. — 1992. — № 6. — С. 30—41.

66. *Lunze J.* Robust multivariable feedback control. — Prentice Hall, 1989. — 237 pp.

67. *Бимбиреков Б. Л.* Определение параметров регулятора для линейной системы по частотным критериям // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 5. — С. 3—10.

68. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Vol. 15 / S. Boyd [et al.]. — Philadelphia, PA : SIAM, 1994.

69. *Баландин Д. В.*, *Коган М. М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 280 с.

70. *Abedor J.*, *Nagpal K.*, *Poolla K.* A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 1996. — Vol. 6. — Pp. 899–927.

71. *Blanchini F.*, *Sznaier M.* Persistent disturbance rejection via static-state feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1995. — Vol. 40, no. 6. — Pp. 1127–1131.

72. *Gahinet P.*, *Apkarian P.* A Linear Matrix Inequality Approach to H^{∞} Control // INTERNATIONAL JOURNAL OF ROBUST AND NONLINEAR CONTROL. — 1994. — Vol. 4. — Pp. 421–448.

73. *Iwasaki T.*, *Skelton R. E.* All Controllers for the General H_∞ Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas // Automatica. — 1994. — Vol. 30, no. 8. — Pp. 1307–1317.

74. *Поляк Б. Т.*, *Щербаков П. С.* Техника D-разбиения при решении линейных матричных неравенств // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 11. — С. 159—174.

75. *Поляк Б. Т.*, *Хлебников М. В.*, *Щербаков П. С.* Управление линейными системами при внешних возмущениях. Техника линейных матричных неравенств. — М. : Ленанд, 2014. — 560 с.

76. *Кукушкин Н. С.*, *Морозов В. В.* Теория неантагонистических игр. — М. : МГУ, 1984. — 104 с.

77. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. — М. : Наука, 1981. — 488 с.

78. *Левитин Е. С.* Оптимизационные задачи с экстремальными ограничениями. I. Общие понятия, постановка и основные проблемы // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 7. — С. 3—15.

79. Обратные задачи математического программирования (Сб. статей). — М. : ВЦ РАН, 1992. — 155 с.

80. *Гермейер Ю. Б.* Игры с непротивоположными интересами. — М. : Наука, 1976. — 326 с.

81. *Бурков В. Н.* Основы математической теории активных систем. — М. : Наука, 1977. — 255 с.

82. *Рапопорт Э. Я.* Робастная параметрическая оптимизация динамических систем в условиях ограниченной неопределенности // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 3. — С. 86—96.

83. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. — М. : Наука, 1985. — 520 с.

84. *Демьянов В. Ф.*, *Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. — М. : Наука, 1990. — 432 с.

85. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления / Б. Н. Петров [и др.]. — М. : Машиностроение, 1972. — 260 с.

86. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами / Б. Н. Петров [и др.]. — М. : Наука, 1980. — 244 с.

87. *Захаров В. Н.* Интеллектуальные системы управления: основные понятия и определения // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1997. — № 3. — С. 138—145.

88. *Захаров В. Н.* Современная информационная технология в системах управления // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2000. — № 1. — С. 70—78.

89. *Макаров И. М.*, *Лохин В. М.* Интеллектуальные системы автоматического управления. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 576 с.

90. *DuBois D.* Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. — Orlando, FL, USA : Academic Press, Inc., 1997. — 393 pp.

91. *Mamdani E. H.* Application of fuzzy algorithm for simple dynamic plant // Proceedings of the Institution of Electrical Engineers. — 1974. — Vol. 121, no. 12. — Pp. 1585–1588.

92. *Mamdani E. H.*, *Assilian S.* A case study on the application of fuzzy set theory to automatic control // Proc. IFAC Stochastic Control Symposium. — Budapest, 1974. — Pp. 102–110.

93. *Zimmermann H.* Fuzzy Set Theory—and Its Applications. — Springer Netherlands, 2001. — 514 pp.

94. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс. — 2-е изд. — М. : Издательский дом Вильямс, 2008. — 1104 с.

95. *White D.*, *Sofge D.* Handbook of Intelligent Control: Neural, Fuzzy, and Adaptative Approaches. — Van Nostrand Reinhold, 1992. — 568 pp.

96. *Свечников С. В.*, *Шквар А. М.* Нейротехнические системы обработки информации. — Киев : Наукова думка, 1983. — 222 с.

97. *Yamada T.*, *Yabuta T.* Application of learning type feedforward feedback neural network controller to dynamic systems // 1993 International Conference on Intelligent Robots and Systems. — Publ by IEEE, 12/1993. — Pp. 225–231.

98. *Левин И. С.*, *Рапопорт Э. Я.* Структурно-параметрический синтез оптимальных по быстро-действию систем управления с распределенными параметрами в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта // Автометрия. — 2015. — Т. 51, № 5. — С. 3—16.

99. *Бутковский А. Г.* Структурная теория распределенных систем. — М. : Наука, 1977. — 320 с.

100. *Понтрягин Л. С.* Принцип максимума в оптимальном управлении. — 2-е изд,стереотипное. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 64 с.

101. *Кошляков Н. С.*, *Глинер Э. Б.*, *Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. — М. : Высшая школа, 1970. — 712 с.

102. *Мартыненко Н. А.*, *Пустыльников Л. М.* Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1986. — 304 с.

103. *Коллатц Л.*, *Крабс В.* Теория приближений. Чебышевские приближения. — М. : Наука, 1978. — 272 с.

104. *Дегтярев Г. Л.*, *Сиразетдинов Т. К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами. — М. : Машиностроение, 1986. — 214 с.

105. *Фельдбаум А. А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. — М. : Наука, 1966. — 623 с.

106. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х томах). — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 616 с. — 1 т.

107. *Вигак В. М.* Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. — Киев : Наукова Думка, 1979. — 360 с.

108. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. — Киев : Наукова Думка, 1979. — 313 с.

109. *Бутковский А. Г.*, *Малый С. А.*, *Андреев Ю. Н.* Управление нагревом металла. — М. : Металлургия, 1981. — 272 с.

110. *Бутковский А. Г.*, *Пустыльников Л. М.* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. — М. : Наука, 1980. — 383 с.

111. Products and Services - MATLAB [Электронный ресурс]. — США : The MathWorks Inc., 1994. — Режим доступа: http://www.mathworks.com/products, свободный. – Загл. с экрана.

112. *Потемкин В. Г.* Введение в Matlab [Электронный ресурс]. — М. : Softline Co, 2001. — Режим доступа: http://matlab.exponenta.ru/ml/book1/index.php, свободный. – Загл. с экрана.

113. *Черных И. В.* Simulink: Инструмент моделирования динамических систем [Электронный ресурс]. — М. : Softline Co, 2001. — Режим доступа: http://matlab.exponenta.ru/simulink/book1/index.php, свободный. – Загл. с экрана.

114. *Рогачев Г. Н.* Примеры использования Stateflow [Электронный ресурс]. — М. : Softline Co, 2001. — Режим доступа: http://matlab.exponenta.ru/stateflow/book2/index.php, свободный. – Загл. с экрана.

115. *Шевяков А. А.*, *Яковлев Р. В.* Управление тепловыми объектами с распределенными параметрами. — М. : Энергоатомиздат, 1986. — 208 с.

116. *Янке Е.*, *Эмде Ф.*, *Лёш Ф.* Специальные функции. Формулы. Графики. Таблицы. — М. : Наука, 1968. — 344 с.

117. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. — 3-е изд, перераб. и доп. — М. : Высшая школа, 2001. — 550 с.

118. *Немков В. С.*, *Демидович В. Б.* Теория и расчет установок индукционного нагрева. — Л. : Энергоатомиздат, 1988. — 280 с.

119. *Mühlbauer A.* Industrielle Elektrowärmetechnik. — Essen : Vulkan Verlag, 1992. — 408 pp.

120. Handbook of Induction Heating / V. Rudnev [et al.]. — New York : Marcel Dekker, 2002. — 796 pp.

121. *Плешивцева Ю. Э.*, *Рапопорт Э. Я.* Оптимальное управление нелинейными объектами технологической теплофизики // Автометрия. — 2012. — Т. 48, № 5. — С. 3—13.

122. Установки индукционного нагрева / А. Слухоцкий [и др.]. — Л. : Энергоиздат, 1981. — 326 с.

123. *Шарапова О. Ю.* Численное моделирование и оптимальное управление процессами индукционного нагрева цилиндрических заготовок под обработку давлением: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.06. — Самара, 2011. — 175 с.

124. *Попов А. В.*, *Дьяконов А. И.* Моделирование процесса индукционного нагрева металла в конечно-элементном программном пакете FLUX // Сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30.09.2013 г.: в 34 частях. Часть 4. — Тамбов, 2013. — С. 119—124.

125. *Зенкевич О.*, *Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. — М. : Мир, 1986. — 318 с.

126. *Плешивцева Ю. Э.*, *Попов А. В.*, *Дьяконов А. И.* Двумерная задача оптимального по типовым критериям качества управления процессом сквозного индукционного нагрева // Вестник СамГТУ. Серия «Технические науки». — Самара, 2014. — № 2 (42). — С. 148—163.

127. Flux electromagnetic and thermal finite element software [Электронный ресурс]. — FRANCE : Altair Engineering, Inc., 2016. — Режим доступа: http://www.cedrat.com/en/software/flux, свободный. – Загл. с экрана.

Приложение А

Справка об использовании результатов кандидатской диссертации

ARCONIC

Арконик Россия

Акционерное общество
«Арконик СМЗ»
(АО «Арконик СМЗ»)

ул. Алма-Атинская, 29, корп.33/34
г. Самара 443051 Россия

Info.smz@arconic.com
Тел.: 8 846 958 94 82
Факс: 8 846 954 31 77

№ 800/140

«_30_» _ноября________ 2016 г

По месту требования

СПРАВКА
об использовании результатов,
полученных в кандидатской диссертации И.С. Левина
«Синтез оптимальных по быстродействию систем управления с распределенными параметрами в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта»

Основные выводы и рекомендации, полученные в диссертации Левина Ильи Сергеевича «Синтез оптимальных по быстродействию систем управления с распределенными параметрами в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, использовались в процессе анализа технологии, разработки и проектирования систем автоматического управления процессами индукционного нагрева цилиндрических слитков из деформируемых алюминиевых сплавов перед последующими операциями горячего прессования на горизонтальных гидравлических прессах, что способствовало повышению производительности нагревательных установок и точности достижения требуемых температурных кондиций прессованных полуфабрикатов.

Директор по качеству и технологии Павленко А.В.

Акционерное общество «Арконик СМЗ» * г. Самара *
Дирекция по качеству и технологии

Innovation, engineered.

Приложение Б

Акт об использовании в учебном процессе ФГБОУ ВО СамГТУ

Утверждаю:
Проректор по учебной работе
ФГБОУ ВО «СамГТУ»
профессор
__________ Юсупова О.В.
«30» 11 2016 г.

АКТ

научно-технической комиссии о внедрении положений и выводов

диссертации Левина Ильи Сергеевича

«Синтез оптимальных по быстродействию систем управления с распределенными параметрами в условиях интервальной неопределенности характеристик объекта», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук.

Комиссия в составе д.т.н., зав. кафедрой АУТС Митрошина В.Н., к.т.н., доцента, зам. зав. кафедрой АУТС Колпащикова С.А., д.т.н., профессора кафедры АУТС Рогачева Г.Н. составила настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы Левина И.С. внедрены в учебный процесс на кафедре «Автоматика и управление в технических системах» Самарского государственного технического университета при подготовке бакалавров и магистров по направлениям 27.03.04 и 27.04.04 «Управление в технических системах».

Результаты научных исследований, проведенных Левиным И.С., использованы при проведении выпускных квалификационных работ, а также при выполнении курсовых работ и при изучении учебных дисциплин: «Теория автоматического управления», «Управление системами с распределенными параметрами» и «Проектирование систем автоматизации и управления».

Реализация полученных автором результатов исследований позволила повысить эффективность и качество учебного процесса.

Заведующий кафедрой «Автоматика и управление в технических системах», д.т.н., профессор	подпись	В. Н. Митрошин
Зам. зав. кафедрой «Автоматика и управление в технических системах», к.т.н., доцент	подпись	С. А. Колпащиков
Д.т.н., профессор каф. АУТС	подпись	Г. Н. Рогачев