

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»

На правах рукописи

**Липилина Людмила Владимировна**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА  
НЕМАРКОВСКИХ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ НА  
ОСНОВЕ ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:

**Тарасов Вениамин Николаевич**

доктор технических наук, профессор

Самара - 2021

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
ГЛАВА 1. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ .....	11
1.1 Теория массового обслуживания и ее применение при моделировании трафика вычислительной сети .....	11
1.1.1 Теория сетей массового обслуживания .....	12
1.1.2 Применение теории массового обслуживания для моделирования сетевого оборудования. ....	17
1.1.3 Системы массового обслуживания .....	20
Выводы .....	26
ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В СЛУЧАЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВАРИАЦИЙ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ $c_\lambda \geq 1, c_\mu \geq 1$ .....	27
2.1 Исследование математической модели трафика на основе СМО $H_2/H_2/1$ .	28
2.1.1 Построение механизма аппроксимации произвольных законов распределений (G) с тяжелыми хвостами гиперэкспоненциальным распределением. ....	35
2.1.2 Результаты проведенных вычислительных экспериментов и их анализ .....	38
2.2 Математическая модель трафика на основе СМО $H_2/M/1$ .....	40
2.2.1 Аппроксимация закона распределения на уровне двух первых моментов .....	44
2.2.2 Результаты проведенных вычислительных экспериментов и их анализ .....	47
Выводы .....	51
ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В СЛУЧАЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВАРИАЦИЙ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ $c_\lambda < 1, c_\mu < 1$ .....	53
3.1 Исследование математической модели трафика на основе СМО $M/M/1$ с запаздыванием .....	53
3.2 Описание разработанного программного комплекса для оценки производительности компьютерных сетей .....	59
Выводы .....	66

ГЛАВА 4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАФИКА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ БАЛАНСА ПОТОКОВ.....	67
4.1 Постановка задачи. ....	67
4.2 Математическое мультиплексирование двух потоков.....	69
4.3 Вероятностное разрежение потока.....	71
4.4 Определение характеристик выходного потока .....	74
4.5 Марковские (экспоненциальные) сети массового обслуживания .....	81
Выводы.....	88
ГЛАВА 5. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ К АНАЛИЗУ ЛВС .....	89
5.1 Моделирование сети в системе Riverbed Modeler .....	90
5.2 Результаты имитационного моделирования .....	104
5.3 Аналитическое моделирование ЛВС на основе уравнений равновесия ..	107
Выводы.....	115
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	116
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	118
ЛИТЕРАТУРА .....	119
ПРИЛОЖЕНИЕ А. СВИДЕТЕЛЬСТВО ОБ ОФИЦИАЛЬНОЙ РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММЫ .....	133
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. АКТ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ. ....	134
ПРИЛОЖЕНИЕ В. АКТ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ. ....	135

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Работа посвящена исследованию немарковских сетей массового обслуживания, широко востребованных при математическом моделировании процессов функционирования различных систем, включая телекоммуникационные и компьютерные сети, транспорт, логистику, сферу обслуживания и т.д. Одним из главных подходов к оценке важнейших показателей этих систем является вероятностное моделирование на основе теории массового обслуживания. Такое моделирование подразумевает представление этих систем в виде совокупности ресурсов, т.е. сети массового обслуживания (сети МО). Этому подходу посвящены работы многих отечественных и зарубежных авторов, как Вишневский В.М., Цыбаков Б.С., Алиев Т.И., L. Kleinrock, A.R. Ward, P.W. Glinn, и другие.

Существующие методы анализа этих систем на основе современной теории массового обслуживания используют в основном модели  $M/M/1$ ,  $M/D/1$ ,  $M/G/1$  и др., основанные на пуассоновских входных потоках. Отличие реального трафика в современных компьютерных и телекоммуникационных сетях от пуассоновского потока отмечены во многих работах (Цыбаков Б.С., Петров В.В., Шелухин О.И., Осин А.В., Тарасов В.Н., D.Wilson, W.Leland, W.Willinger, Taggu M.S. и многие другие). Кроме того, этот факт послужил появлению теории самоподобного трафика, интервалы в котором описываются тяжелохвостными распределениями.

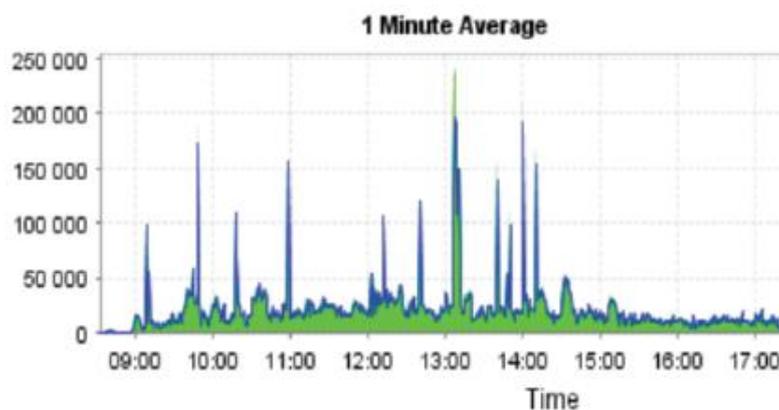


Рис.1 – Трафик на входе прокси-сервера ВУЗа

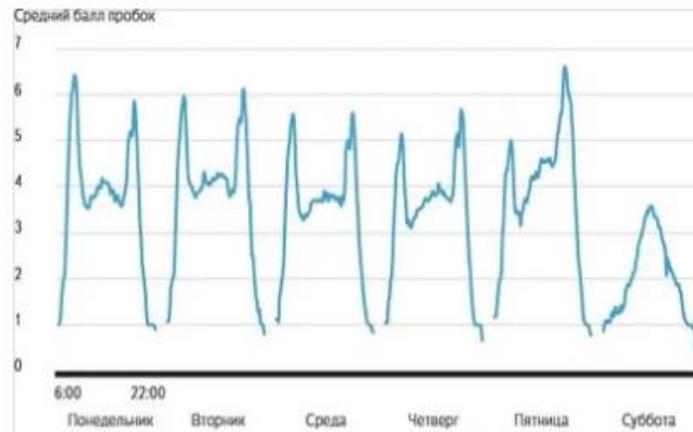


Рис.2 – Транспортные потоки в больших городах

В этом случае необходимо опираться на общую теорию массового обслуживания, а именно на системы типа G/G/1 и G/G/m, для расчета характеристик которых аналитические результаты в конечной форме отсутствуют. Поэтому разработка новых моделей массового обслуживания типа G/G/1 для описания потоков и расчета основных его характеристик на сегодняшний день является актуальной задачей теоретического анализа функционирования сетей МО.

Как известно из теории массового обслуживания, среднее время ожидания  $\bar{W}$  является основной характеристикой системы массового обслуживания (СМО), остальные характеристики являются производными от  $\bar{W}$ . Для СМО

$$G/G/1 \quad \bar{W} = \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + (\bar{t})^2 (1-\rho)^2}{2\bar{t}(1-\rho)} - \frac{\bar{I}^2}{2\bar{I}}, \text{ здесь } \rho - \text{ загрузка системы, } \bar{t} = 1/\lambda -$$

средний интервал между поступлениями требований,  $\lambda$  - интенсивность входного потока,  $\sigma_a^2$  и  $\sigma_b^2$  - соответственно дисперсии интервалов поступления и

времени обслуживания,  $\bar{I}$  и  $\bar{I}^2$  - соответственно среднее значение и второй начальный момент периода простоя, которые в общем случае неизвестны.

Поэтому эту формулу назовем незавершенной. Из формулы для  $\bar{W}$  следует, что время ожидания в системе G/G/1 связано квадратичной зависимостью с коэффициентами вариаций интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени

обслуживания  $C_{\mu}$ , т.е. напрямую зависит от вторых моментов распределения временных интервалов трафика. Поэтому применение известной теории марковских сетей (для которых коэффициенты вариаций интервалов поступления и времени обслуживания равны единице) к исследованию функционирования сетей МО может приводить к большим погрешностям в десятки и сотни процентов.

**Целью** диссертационной работы является разработка и исследование математических моделей узлов функционирования сетей МО при коэффициентах вариаций интервалов поступления и времени обслуживания требований как больших единицы, так и меньших единицы, а также программная реализация этих моделей для экспериментального исследования сетей МО путем расчета их характеристик.

**Основные задачи**, решение которых необходимо для реализации цели:

1. Построение математической модели узла сети МО в виде СМО с гиперэкспоненциальными входными распределениями  $H_2$ , обеспечивающих коэффициенты вариаций временных интервалов потока, большие 1, с обоснованием возможности аппроксимации произвольных законов с использованием как двух, так и трех начальных моментов.

2. Построение математической модели узла сети МО в виде СМО со сдвинутыми экспоненциальными распределениями  $M^-$ , обеспечивающих коэффициенты вариаций временных интервалов потока, меньшие 1.

3. Исследование математической модели трафика сети МО в виде уравнений баланса потоков на уровне нескольких первых моментов распределений временных интервалов в потоках.

4. Разработка программного обеспечения расчета оценок показателей производительности узлов сети МО на основе уравнений баланса потоков и проведение вычислительных экспериментов для широкого диапазона изменения параметров потоков, подтверждающих приемлемость предложенного подхода.

**Объектом исследования** являются математические модели и методы для анализа функционирования сети МО.

**Предметом исследования** являются математические модели и методы для анализа немарковских сетей МО.

**Соответствие паспорту научной специальности.**

Область исследований соответствует паспорту специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по пунктам: 1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений; 2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.

**Методы исследования** основаны на теории вероятностей, теории массового обслуживания и методе спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли, теории случайных процессов, имитационном моделировании, численных методах решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений, в том числе, реализованные в пакете Mathcad для проведения вычислительных экспериментов.

**Научная новизна:**

1. В качестве математической модели узла сети МО для описания ее функционирования впервые предложена СМО  $H_2/H_2/1$  с гиперэкспоненциальными входными распределениями, позволяющая в отличие от классической СМО  $M/M/1$  учитывать коэффициенты вариаций временных интервалов, большие единицы (05.13.18, пункт 1).

2. Впервые предложена новая СМО с запаздыванием во времени  $M^-/M^-/1$  со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями в качестве математической модели узла сети МО для описания его функционирования и позволяющая в отличие от классической СМО  $M/M/1$  учитывать коэффициенты вариаций временных интервалов, меньшие единицы (05.13.18, пункт 1).

3. Предложена система уравнений баланса потоков с использованием нескольких первых моментов распределений временных интервалов потоков

для расчета характеристик немарковской сети МО, в которой в качестве узлов выступают предложенные СМО, позволяющая в отличие от марковской сети учитывать широкий диапазон изменения параметров потоков, а также обеспечивающая относительную погрешность не более 5-6% (05.13.18, пункт 2).

4. Разработано программное обеспечение, с использованием которого проведены экспериментальные исследования сети МО как модели реальной компьютерной сети, результаты которых отличаются от результатов марковских сетей МО (05.13.18, пункт 2).

**Практическая ценность работы** состоит в следующем:

Использование предложенных моделей массового обслуживания  $H_2/H_2/1$  и  $M^-/M^-/1$  для оценки показателей производительности узлов сетей МО позволяет учитывать особенности потоков, когда коэффициенты вариаций интервалов между требованиями входящего потока и времени их обслуживания могут быть как меньше, так и больше единицы. Использование классической СМО в первом случае завышает реальные задержки в связи с квадратичной зависимостью от коэффициентов вариаций. Во втором случае использование классической СМО дает слишком оптимистичные результаты, т.к. реальные задержки могут быть значительно больше в связи с квадратичной зависимостью от коэффициентов вариаций.

Разработанные методы и модели реализованы в виде программного комплекса «Программный комплекс расчета характеристик систем массового обслуживания типа  $H_2/H_2/1$ ,  $H_2/M/1$  и  $M/M/1$  с запаздыванием во времени» и позволяют использовать его в проектных организациях, специализирующихся в сетевых технологиях для оптимизации как структуры, так и показателей производительности телекоммуникационных и компьютерных сетей.

**Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций, а также достоверность полученных результатов исследований** обеспечиваются согласованностью результатов вычислительных экспериментов с квадратичной зависимостью среднего времени ожидания от

коэффициентов вариаций временных интервалов, что соответствует теории СМО G/G/1, а также совпадением результатов экспериментов в частном случае с данными марковских (экспоненциальных) сетей.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Математическая модель узла сети массового обслуживания в виде СМО  $H_2/H_2/1$  с гиперэкспоненциальными входными распределениями второго порядка для случая, когда коэффициенты вариаций временных интервалов в потоках больше единицы.

2. Математическая модель узла сети массового обслуживания в виде СМО  $M^-/M^-/1$  с запаздыванием во времени со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями для случая, когда коэффициенты вариаций временных интервалов в потоках меньше единицы.

3. Уравнения баланса потоков сети массового обслуживания для восстановления числовых характеристик распределений временных интервалов в потоках.

4. Результаты экспериментальных исследований с помощью разработанного программного комплекса по расчету характеристик сети МО для оценки показателей ее функционирования.

**Реализация и внедрение.** Компоненты программного обеспечения официально зарегистрированы свидетельством о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016612657 «Программный комплекс расчета характеристик систем массового обслуживания типа  $H_2/H_2/1$ ,  $H_2/M/1$  и  $M/M/1$  с запаздыванием во времени». Результаты диссертационной работы внедрены и использованы в проектной деятельности компании «ИнтерСвязьСервис» при модернизации сетей последней мили абонентов FTTb, что позволило сократить затраты на проектирование подключений абонентских узлов Интернет. Результаты работы также внедрены в учебном процессе дисциплины «Проектирование и моделирование сетей связи» при подготовке магистров по направлениям подготовки 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника» и 27.04.04 «Управление в технических системах».

**Апробация работы.** Основные положения диссертационной работы обсуждались в форме докладов на следующих конференциях: Материалы XXII Всероссийской научной конференции ППС, НС и аспирантов ПГУТИ (Самара, 2015, 2016, 2017), Международная НТК «Перспективные информационные технологии» СНЦ РАН (Самара, 2017), Всероссийской научной конференции Росинфоком-2017 «Актуальные вопросы телекоммуникаций» (Самара, 2017), XIV международная НТК «Новые информационные технологии и системы НИТиС-2017» (Пенза, 2017), 4th International Scientific and Practical Conference «Problems of Infocommunications. Science and Technology» (Харьков, Украина, 2017), IX Всероссийская конференция с международным участием «Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии» (Оренбург, 2019), IV Международная НПК «Вопросы науки и практики 2019» (Москва, 2019).

**Публикации.** По материалам диссертационной работы опубликовано 20 работ, из них 7 в изданиях из перечня ВАК, 1 в изданиях Scopus и Web of Science.

**Личный вклад автора.** Работы [31,34,38,40,30] выполнены полностью самостоятельно, в [37] автору принадлежит совместная разработка алгоритмов и их программная реализация с проведением численных экспериментов, в остальных – совместная разработка математических моделей и самостоятельное проведение численных экспериментов.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, библиографического списка и приложения. Объем работы: 135 страниц основного текста, 42 рисунка и 18 таблиц, приложение на 3 страницах.

# ГЛАВА 1. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

## 1.1. Теория массового обслуживания и ее применение при моделировании трафика вычислительной сети

Достаточно разностороннее применение нашла теория массового обслуживания в производственных, научных и экономических областях, что объясняется тем, что «теория массового обслуживания изучает широко распространенные в человеческой практике ситуации, в которых имеется некоторый ограниченный ресурс и множество (поток) запросов на его использование, следствием чего являются задержки или отказы в обслуживании некоторых запросов. Стремление понять объективные причины этих задержек или отказов и по возможности уменьшить их воздействие является побудительным мотивом развития теории массового обслуживания» [1, с.17].

В связи с тем, что запросы (или их группы) поступают в случайные моменты времени и для их обработки необходима случайная часть ограниченного ресурса (или случайное время его использования), «изучение процесса удовлетворения потребности в ресурсе (процесса обслуживания) обычно проводится в рамках теории случайных процессов как специальной области теории вероятностей». [1, с.17].

Для оценки показателей производительности сети, прежде всего, необходим определенный математический аппарат. «Стохастический характер поступления данных (пакетов данных) и обработка их в узлах коммутации и каналах передачи позволяет использовать различные модели теории массового обслуживания для проектирования и моделирования показателей производительности компьютерной сети. Теория массового обслуживания позволяет рассчитать основные характеристики функционирования сетей, в том числе оценку вероятностно-временных характеристик узлов коммутации» [1].

«Модели массового обслуживания делятся на базовые модели в виде систем массового обслуживания (СМО) и сетевые модели в виде сетей массового обслуживания, которые представляют собой математические объекты, описываемые терминами соответствующего математического аппарата» [3, с.77].

### **1.1.1 Теория сетей массового обслуживания**

В СМО обслуживающий прибор (канал) обрабатывает поступающий поток заявок (требований) из очереди согласно закону распределения вероятностей обслуживания. Каналы характеризуются параметрами обслуживания, такими как: среднее время обслуживания, а также моментами высшего порядка времени обслуживания. Правила, задающие длительности обслуживания заявок, возможности прерывания их обслуживания или же дообслуживания заявок после завершения прерывания обслуживания и т.п., называют дисциплиной обслуживания.

В ряде случаев модели распределенных вычислительных систем и компьютерных сетей, могут быть представлены в виде совокупности взаимосвязанных систем массового обслуживания (сетей массового обслуживания СеМО), в которой заявки с определенной вероятностью переходят от одной СМО к другой. Математический аппарат теории массового обслуживания получил широкое применение в сфере построения моделей производительности вычислительных систем и компьютерных сетей. Наличие очередей, где поступившие заявки ждут, когда освободятся устройства обслуживания, которые заняты обслуживанием других, раньше поступивших заявок, является главным аспектом функционирования сети массового обслуживания. В связи с этим, сети массового обслуживания зачастую называют сетями очередей, а теорию массового обслуживания называют теорией очередей.

Описать сети массового обслуживания можно:

- параметрами - интенсивностью и моментами высших порядков интервалов между требованиями в потоке;

- структурой связей;

- параметрами узлов сети.

Параметры функционирования сети массового обслуживания задаются набором узловых характеристик всей сети массового обслуживания. Узловые характеристики дают оценку каждой СМО сети массового обслуживания по показателям производительности:

- Средняя длина очереди.

- Среднее время ожидания требований.

- Загрузка системы.

- Среднее время нахождения требований в системе массового обслуживания.

Сетевые характеристики оценивают показатели производительности функционирования сети в целом.

СМО могут дополняться специальными узлами для расширения возможности моделирования различных способов организации функционирования вычислительных систем и компьютерных сетей. Например, в сетевые модели могут быть добавлены узлы памяти, которые моделируют работу оперативной памяти. К примеру, обслуживание заявки, поступившей на вход узла памяти, потребует выделения затребованной емкости памяти. Если в таком узле не обнаружится область необходимого размера, заявка помещается в очередь и ждет когда произойдет освобождение памяти, которая занята ранее поступившими заявками.

Для моделирования вычислительных систем и компьютерных сетей используют разомкнутые и замкнутые стохастические сети. В разомкнутой или открытой сети интенсивность входного потока заявок определяется внешним источником вне зависимости от состояния сети. Когда обслуживание заявки завершается в сети массового обслуживания, требования ее покидают.

«Для построения модели сети массового обслуживания, которая будет описывать функционирование базовой сети из  $M$  каналов передачи данных и  $W$  узлов коммутации пакетов, необходимо ввести некоторые упрощающие предположения» [1,с.261]. «Первое предположение - о независимости позволяет устранить зависимость между временами обслуживания в каналах. Оно состоит в следующем: длина пакета, поступающего в  $m$ -й канал, задается независимо в соответствии с плотностью распределения  $f(x) = b \cdot \exp(-bx)$ , где  $1/b$  - средняя длина пакета, измеряемая в битах (байтах)» [1, с.261].

«Второе предположение - процесс поступления пакетов в сеть является пуассоновским с параметром  $\lambda$  (пакетов/с). Маршрут пакетов  $m$ -го класса (передаваемых в  $m$ -ой паре источник-адресат) определяется матрицей  $P^{(m)} = \{p_{ij}\}$ , где  $p_{ij}$  - вероятность того, что пакет  $m$ -го класса, закончивший обслуживание в  $i$ -ой СМО, поступит потом в  $j$ -ю СМО ( $i, j = 1, \dots, n$ )» [1, с.261].

«Тип маршрутизации пакета в базовой сети определяют различные способы задания матрицы  $P = \{p_{ij}\}$ . Например, при использовании постоянных виртуальных соединений и фиксированной маршрутизации соответствующие элементы  $p_{ij}$  принимают лишь два значения: 0 и 1. В рассматриваемой модели предполагается, что объемы буферных накопителей не ограничены и подтверждение об успешной доставке пакета передается мгновенно» [1, с.261].

«Таким образом, введенные выше предположения позволяют полностью определить открытую неоднородную сеть массового обслуживания, моделирующую функционирование базовой сети передачи данных. В указанную сеть массового обслуживания поступают  $m$  классов пуассоновских потоков заявок с интенсивностями  $\lambda^{(m)}$  ( $m = 1, \dots, M$ ), маршрут каждого из которых характеризуется матрицей  $P^{(m)} = \{p_{ij}\}$ . Функция распределения длительности обслуживания заявок  $m$ -го класса в  $i$ -й СМО сети массового обслуживания, которая моделирует соответствующий канал передачи данных, является экспоненциальной с параметром  $\mu_i^{(m)} = C_i b^{(m)}$  (пакетов/с), где  $C_i$  -

пропускная способность  $i$ -го канала, измеряемая в бит/с, а  $1/b^{(m)}$ - средняя длина пакета  $m$ -го класса» [1, с.261].

«Интенсивность потока заявок класса  $m$ , поступающих в  $i$ -ю СМО  $\lambda_i^{(m)}$  удовлетворяет уравнению баланса потоков

$$\lambda_i^{(m)} = \lambda_{0i}^{(m)} + \sum_{j=1}^n p_{ji} \lambda_j^{(m)}.$$

Здесь  $\lambda_{0i}^{(m)}$  - это интенсивность потока от внешнего источника  $S_0$  в сеть (на вход  $i$ -ой СМО) многомерного потока заявок.

Обозначим также через  $\rho_i^{(m)}$  загрузку  $i$ -й СМО заявками  $m$ -го класса и  $\rho_{i\Sigma}$  полную загрузку  $i$ -й СМО:

$$\rho_i^{(m)} = \frac{\lambda_i^{(m)}}{b^{(m)} C^{(m)}} \quad \text{и} \quad \rho_{i\Sigma} = \sum_{m=1}^M \rho_i^{(m)}.$$

Таким образом, представленная выше неоднородная сеть массового обслуживания удовлетворяет всем условиям теоремы о произведении вероятностей состояний сети (BCMP)» [1, с. 262]. «Следовательно, для ее расчета могут быть использованы соответствующие результаты теории экспоненциальных СеМО. В частности, вероятность стационарного состояния сети  $P(n)$ , где  $n = (n_1, \dots, n_m)$  и координаты  $n_i$  ( $i = 1, M$ ) означают число заявок, ожидающих передачи и передаваемых по  $i$ - й СМО, имеет вид:

$$P(n) = \prod_{i=1}^M P_i(n_i).$$

Здесь

$$P_i(n_i) = \begin{cases} (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i}, \\ e^{-\rho_i} \rho_i^{n_i} / n_i!. \end{cases}$$

Верхняя часть последней формулы справедлива при дисциплинах обслуживания в узле FCFS, LCFS или PS, а вторая часть - при дисциплине обслуживания в узле IS.

Из последнего выражения определяется среднее количество заявок в  $i$ -й СМО -  $N_i = \rho_i / (1 - \rho_i)$  и среднее число заявок в сети в целом (предполагая, что передача пакетов по каналу осуществляется в соответствии с дисциплиной FCFS):

$$N = \sum_{i=1}^M \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} .$$

Учитывая, что в соответствии с формулой Литтла  $N = \lambda T$ , где  $T$  - среднее время пребывания заявки в сети (задержка заявки) можем определить  $T$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} \lambda T &= \sum_{i=1}^M \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} \quad \text{и} \\ T &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i}{bC_i - \lambda_i} . \end{aligned} \quad (1.1)$$

Выражение (1.1), впервые полученное Клейнроком [10], широко используется при анализе и проектировании компьютерных сетей и имеет важное прикладное значение» [1, с.262-263].

«Для расчета задержки доставки  $T$  от источника до адресата, определяющей время задержки заявок  $m$ -го класса, необходимо рассматривать более детально состояние сети  $S = n_1, n_2, \dots, n_m$ , где  $n = (n_i^{(1)}, \dots, n_i^{(m)})$  и  $n_i^{(m)}$  означает число заявок  $m$ -го класса в  $i$ -ой СМО  $m = 1, \dots, M; i = 1, \dots, n$ .» [1].

Среднее число заявок  $m$ -го класса в  $i$ -ой СМО рассчитывается по формуле [1]:

$$N_i^{(m)} = \rho_i^{(m)} / (1 - \rho_i^{(m)}) .$$

«Использование формулы Литтла позволяет определить среднюю задержку заявок  $m$ -го класса в  $i$ -ой СМО

$$T_i^{(m)} = N_i^{(m)} / \lambda_i^{(m)} = 1 / bC_i (1 - \rho_i^{(m)}) .$$

Средняя задержка заявки  $m$ -го класса в  $i$ -ой СМО зависит только от общей загрузки канала  $\rho_i$  и остается постоянной для пакетов разных классов, проходящих через этот канал» [1, с.263].

### 1.1.2 Применение теории массового обслуживания для моделирования сетевого оборудования.

Теория очередей применяется в любом сетевом устройстве, в котором используется коммутация пакетов. Примерами таких устройств являются маршрутизатор, коммутатор локальной либо глобальной сети, конечный узел.

Потребность в очереди появляется во время перегрузок, в тот момент, когда сетевое устройство поступающие пакеты не успевают передаваться сетевым устройством на выходной интерфейс.

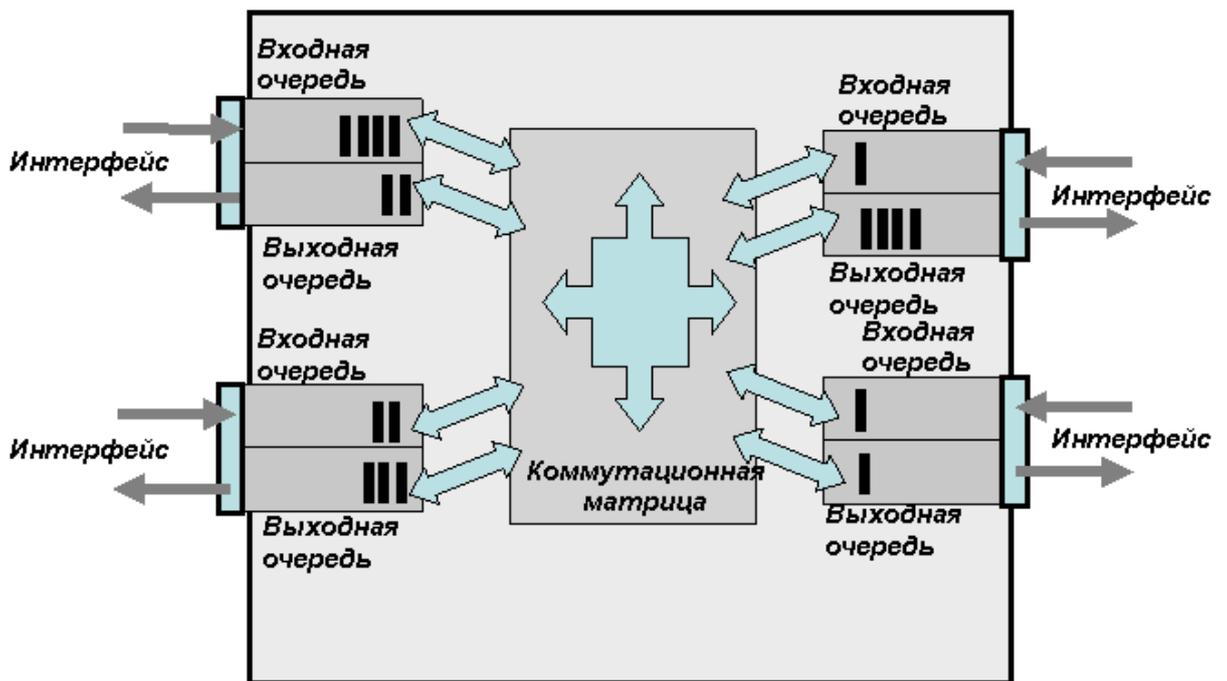


Рис.1.1 – Функциональная схема пакетного коммутатора в терминах теории очередей

### Математические модели алгоритмов маршрутизации.

«Применение математического моделирования при анализе алгоритмов маршрутизации в сетях передачи данных представляет значительный интерес по следующим причинам:

– к настоящему времени разработан достаточно полный математический аппарат, позволяющий использовать его как в «чистом виде», так и осуществлять необходимую модификацию существующих моделей, учитывающую специфику конкретной сети;

– использование математических моделей не требуют значительных ресурсов (вычислительных, временных и т. п.), что позволяет при необходимости проводить многократный анализ в процессе разработки и эксплуатации сети;

– математические модели, в отличие от других вышеперечисленных средств, позволяют делать выводы о тенденциях развития сети передачи данных, что является чрезвычайно важным при построении крупномасштабных сетей передачи данных» [1, с.300].

### **Реализаций функций маршрутизатора на сетевом процессе.**

Маршрутизация сетевых пакетов – задача, которая выполняется на маршрутизаторах всех уровней. Под маршрутизацией понимается определение сетевого интерфейса адреса следующего маршрутизатора, через которые пакет будет отправлен дальше к своему узлу назначения. Эта операция относится к сетевому уровню модели OSI.

В общем случае процесс маршрутизации состоит из трех этапов:

- выделение из заголовков пакета адреса назначения;
- поиск в таблице маршрутизации выходного интерфейса и адреса следующего маршрутизатора, соответствующих этому адресу назначения;
- обновление заголовка пакета и передача его на блок коммутации

Функции, выполняемые на маршрутизаторе при обработке сетевых пакетов разделяются на три уровня:

- уровень интерфейсов
- уровень сетевого протокола (уровень данных)
- уровень протокола маршрутизации (уровень управления)

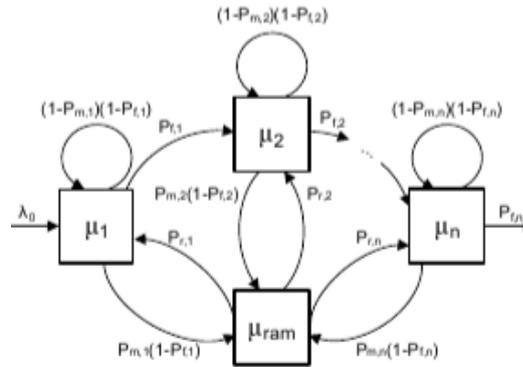


Рис 1.2 – Сеть СМО, моделирующая работу маршрутизатора

Многоядерный сетевой процессор можно представить сетью массового обслуживания (рис.1.2). Узлы  $\mu_1 - \mu_n$  моделируют работу этапов конвейера обработки пакетов. Каждый узел содержит обслуживающие устройства, моделирующие вычислительные ядра, выделенные для выполнения соответствующего этапа конвейера.

Узел  $\mu_{ram}$  моделирует работу блока ОЗУ. Он имеет одно обслуживающее устройство, его интенсивность обработки зависит от характеристик используемого оборудования.

При поступлении пакета на вычислительное ядро выполняется одна инструкция из алгоритма его обработки, после чего, с вероятностью  $P_{fi} (i = \overline{1, n})$  обработка может завершиться. Вероятность  $P_{fi}$  зависит от среднего числа инструкций ( $N_{ins,i}$ ), необходимых для обработки пакета на  $i$ -м этапе конвейера:

$$P_{fi} = \frac{1}{N_{ins,i} + 1} \quad (1.2)$$

В случае если обработка не завершилась, то с вероятностью  $P_{mi} (i = \overline{1, n})$  потребуется обращение к оперативной памяти за данными или кодом. Вероятность  $P_{mi}$  зависит от интенсивности обращений к ОЗУ и вероятностей промаха кэшей:

$$P_{mi} = P_{dc,i} P_{d,i} + P_{ic,i} \quad (1.3)$$

Где  $P_{d,i}$  - вероятность обращений за данными, во время обработки пакета на  $i$ -м этапе конвейера,  $P_{dc,i}$  - вероятность промаха кэша данных,  $P_{ic,i}$  - вероятность промаха кэша команд.

Вероятность  $P_{d,i}$  может быть рассчитана как отношение обращений к ОЗУ за время обработки одного пакета ( $N_{d,i}$ ) к общему количеству инструкций, выполненных за время его обработки ( $N_{prc,i}$ ):

$$P_{mi} = \frac{N_{d,i}}{N_{prc,i}} \quad (1.4)$$

После завершения обращения к ОЗУ обработка пакета продолжается на том же этапе конвейера, на котором она была прервана для обращения к памяти. Все этапы конвейера используют один модуль ОЗУ. Необходимо определить, какая часть выходного потока ОЗУ адресуется каждому отдельному этапу конвейера. Поскольку входной поток от  $i$ -го этапа конвейера к ОЗУ равен  $P_{mi} = (1 - P_{fi})$ , то вероятность перехода пакета из ОЗУ на  $i$ -й этап конвейера  $P_{r,i}$  определяется по формуле:

$$P_{r,i} = \frac{P_{m,i}(1 - P_{f,i})}{\sum_{k=1}^n P_{m,k}(1 - P_{f,k})} \quad (1.5)$$

Если пакет не завершил обработку, и не было обращения к оперативной памяти то, с вероятностью  $(1 - P_{mi})(1 - P_{f,i})$ , он вновь поступает в очередь обработки этого же этапа конвейера.

По завершению обработки с вероятностью  $P_{fi}$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ) пакет передается следующему этапу конвейера. Выходной поток  $P_{fn}$  моделирует исходящий поток обработанных пакетов.

### 1.1.3 Системы массового обслуживания

«Исследование сложных систем подразумевает разработку математических моделей, описанных на языке математических

отношений в терминах определенной математической теории, которая позволит определить функциональные зависимости характеристик исследуемой системы от параметров. Изучение процессов, протекающих в дискретных системах со стохастическим характером функционирования, проводится в рамках теории массового обслуживания (ТМО) и теории случайных процессов» [3, с.77]

Предметом теории массового обслуживания является определение зависимостей между характером потока заявок, производительностью отдельного канала и эффективным обслуживанием с целью отыскания оптимальных путей управления этими процессами [9].

**Задача теории массового обслуживания** заключается в установлении зависимости результирующих показателей работы системы массового обслуживания (вероятности того, что заявка будет обслужена; математического ожидания числа обслуженных заявок и т.д.), от входных показателей (количества каналов в системе, параметров входящего потока заявок и т.д.). Результирующими показателями являются показатели эффективности СМО, которые описывают, способна ли данная система справиться с потоком заявок[9].

### **Классификация систем массового обслуживания.**

Системы массового обслуживания можно классифицировать по различным признакам. В зависимости от дисциплины обслуживания системы массового обслуживания делятся на следующие виды:

- Системы массового обслуживания с потерями (отказами);
- Системы массового обслуживания с ожиданием;
- Системы массового обслуживания с ограниченной длиной очереди;
- Системы массового обслуживания с ограниченным временем ожидания.

Если требования поступают, когда все приборы обслуживания заняты и получают отказ и впоследствии теряются, то такие СМО называют *системами с потерями или отказами*.

Если в СМО возможно появление, какой угодно длины очереди требований к обслуживаемому устройству, то такие СМО называют *системами с ожиданием*.

Если СМО допускает очередь, но только с ограниченным числом мест в ней, то такие СМО называют *системами с ограниченной длиной очереди*.

В случае, когда СМО допускают очередь, но только с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней, такие системы считают *системами с ограниченным временем ожидания*.

Исходя из числа каналов либо приборов системы делятся на *одноканальные* и *многоканальные*.

В зависимости от ограничения потока требований, системы массового обслуживания подразделяются на:

- *Разомкнутые*.
- *Замкнутые*.

В случае, когда поток требований ограничен и требования, которые уже покинули систему, могут вернуться, то системы считают замкнутыми, иначе разомкнутыми (открытыми). К замкнутому типу, к примеру, относится станочный участок, где станки являются причиной неисправностей, и как следствие требований для их обслуживания.

Кодовая (символьная) *классификация Д.Кендалла* – это общепринятая форма классификации систем массового обслуживания. Такой тип классификации подразумевает запись характеристики системы в виде трех, четырех или пяти символов, к примеру,  $A/B/K$ , где

- $A$  — распределение входящего потока требований.
- $B$  — распределение времени обслуживания.
- $K$  — количество каналов обслуживания.

Приняты обозначения следующими символами:

$M$  - экспоненциальное распределение.

$G$  - произвольное распределение.

Так, к примеру,  $G/M/K$  подразумевает пуассоновский (простейший) входящий поток требований, экспоненциальный закон распределения времени обслуживания, с количеством каналов обслуживания равным  $K$ .

Четвертый символ при записи – допустимая длина очереди, а пятый содержит правила определения приоритетности требований.

### **Однолинейные марковские системы массового обслуживания.**

«Наиболее хорошо исследованными являются однолинейные системы массового обслуживания с простейшим входящим потоком или (и) показательным распределением времени обслуживания. Это объясняется тем, что процессы, которые в первую очередь интересуют исследователей, а именно: число запросов в системе в момент времени  $t$ , время ожидания запроса, который поступит (или может поступить) в момент времени  $t$  и др., являются одномерными и, кроме того, либо являются марковскими, либо легко подвергаются марковизации за счет рассмотрения их только во вложенные моменты времени или расширения фазового пространства процесса.

Для простейшего потока частота поступления требований в систему подчиняется распределению Пуассона:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

где  $P_k(t)$  - вероятность того, что на интервале за время  $t$  будет  $k$  требований;  $\lambda$  - интенсивность входящего потока, т.е. среднее число требований, поступающих в систему в единицу времени;  $\lambda t$  - среднее число требований, поступающих за время  $t$ » [1, с.34].

Главной характеристикой системы массового обслуживания считается время обслуживания требований, которое в свою очередь чаще всего является случайной величиной. На текущий момент наиболее распространенным является показательный закон распределения времени обслуживания:

$$F(t) = e^{-\mu t}$$

«Рассмотрим систему типа M/M/1, то есть, одноканальную СМО с бесконечным ожиданием (буфером неограниченной емкости), в которую поступает простейший поток запросов интенсивности  $\lambda$ , а время обслуживания запросов имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\mu$ .

Параметр  $\rho$  определяется соотношением интенсивности входящего потока и интенсивности обслуживания и представляет собой коэффициент загрузки системы:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} .$$

Проверяя условие существования стационарного распределения, можно легко убедиться, что стационарное распределение числа запросов в рассматриваемой системе существует, если выполняется условие:  $\rho < 1$ .

Т.е. чтобы в системе не накапливалась бесконечная очередь, необходимо, чтобы в среднем запросы в системе обслуживались быстрее, чем они поступают»[1, с.35].

Теперь запишем наиболее известные и часто используемые результаты теории массового обслуживания [9]:

- среднее время ожидания в классической системе M/M/1

$$\bar{W} = \frac{\rho / \mu}{1 - \rho} ,$$

- среднее время ожидания в системе M/G/1:

$$\bar{W} = \frac{\lambda \overline{\tau_{\mu}^2}}{2(1 - \rho)} ,$$

где  $\overline{\tau_{\mu}^2}$  - второй начальный момент времени обслуживания.

### **Другие направления исследования моделей СМО**

«К числу других популярных моделей СМО можно отнести различные виды систем с многими классами входящих потоков (включая приоритетные системы и системы с циклическим опросом различных видов); модели с «тяжелыми хвостами» распределений, характеризующих входящий поток и

процесс обслуживания, включая исчерпывающее обслуживание, при котором на прибор в момент его освобождения берутся одновременно все находящиеся в системе запросы; модели с профилактиками прибора, поиском запросов в буфере или на орбите. Также актуальным является исследование управляемых СМО и систем, функционирующих в случайной среде»[1, с.89].

На текущий момент теория массового обслуживания в основном ограничивается аналитическими результатами для систем массового обслуживания (СМО)  $M/M/1$ ,  $M/G/1$  и др., предполагающими пуассоновские входные потоки, как и в марковских сетях МО. Современный телетрафик не может быть корректно описан этими классическими моделями теории массового обслуживания. Моделирование сетей с помощью программных средств также не охватывает реальные свойства и характеристики сетей МО.

Таким образом, вопрос определения вероятностно-временных характеристик производительности сети МО остается открытым. В связи с этим создание математического и программного инструментария для решения проблемы оценки производительности сетей МО на сегодняшний день является актуальной задачей.

## Выводы

1. В данной главе описаны различные сферы применения методов моделирования на основе теории массового обслуживания. Отмечено, что теория очередей получила широкое применение, как при моделировании сетевого оборудования, так и при моделировании трафика вычислительной сети.

2. Методы теории СМО, ограниченные моделями  $M/M/1$  и  $M/G/1$  при моделировании современного трафика являются неадекватными в случае описания непуассоновского входящего трафика. В данном случае требуется использование моделей массового обслуживания типа  $G/G/1$  или  $G/G/m$  с тяжелохвостными входными распределениями.

3. Разработка собственного математического и программного инструмента анализа производительности сетевых структур потребует разработки соответствующего математического аппарата для описания и анализа трафика компьютерной сети на основе новых систем массового обслуживания.

## ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В СЛУЧАЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВАРИАЦИЙ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ $c_\lambda \geq 1, c_\mu \geq 1$

Среднее время ожидания  $\bar{W}$  является основной характеристикой системы массового обслуживания (СМО), остальные характеристики являются производными от  $\bar{W}$ . Как известно из классики теории массового обслуживания [10], для систем типа G/G/1 среднее время ожидания в очереди дается выражением:

$$\bar{W} = \frac{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + (\bar{t})^2 (1-\rho)^2}{2\bar{t}(1-\rho)} - \frac{\bar{I}^2}{2\bar{I}}, \quad (2.1)$$

Здесь:

- $0 < \rho = \lambda/\mu < 1$  - коэффициент загрузки системы.
- $\bar{t} = 1/\lambda$  - средний интервал между поступлениями требований.
- $\lambda$  - интенсивность входящего потока требований.
- $\mu$  - интенсивность обслуживания требований.
- $\sigma_a^2$  и  $\sigma_b^2$  - дисперсии интервалов между соседними требованиями и времени обслуживания соответственно.
- $\bar{I}, \bar{I}^2$  - первый и второй начальный моменты периода простоя соответственно.

Отсюда следует, что среднее время ожидания требований в очереди прямо пропорционально связано с квадратами коэффициентов вариаций интервалов между поступлениями и случайного времени обслуживания в системе. Вторая часть формулы (2.1) в общем случае законов распределений, описывающих работу СМО, не может быть определена и формулу (2.1) будем считать не завершенной формулой теории массового обслуживания. Вполне возможно, что вторая часть формулы (2.1) может включать моменты временных интервалов более высокого порядка, чем первые два. Вычислительные эксперименты на примере СМО с законами распределений  $H_2$  только подтверждают такой факт.

## 2.1 Исследование математической модели трафика на основе СМО $H_2/H_2/1$

Система  $H_2/H_2/1$  описывается гиперэкспоненциальными входными распределениями 2-го порядка, при этом функции плотностей задаются следующими выражениями:

$$a(t) = p\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \quad (2.2)$$

$$b(t) = q\mu_1 e^{-\mu_1 t} + (1-q)\mu_2 e^{-\mu_2 t} \quad (2.3)$$

В функциях (2.2) и (2.3) содержится по 3 неизвестных параметра, что позволяет аппроксимировать законы распределения на уровне 3-х первых моментов в случае, когда коэффициенты вариации интервалов поступлений и времени обслуживания  $c_\lambda \geq 1, c_\mu \geq 1$ .

### Определение гиперэкспоненциального закона распределения.

«Распределение с плотностью  $f(t) = \sum_{i=1}^R \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}$ , где  $t \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^R \alpha_i = 1$  называют гиперэкспоненциальным (гиперпоказательным) и обозначают  $H_R$ » [9]. В этой же работе доказывается, что коэффициент вариации случайной величины, распределенной по такому закону, больше либо равен единице. В работе [11] аналогично приводится определение  $H_R$ , только относительно функции распределения.

В работе [3] замечено: «Представление о гиперэкспоненциальном распределении будет неполным, если не обратить внимания на «хвост» этого распределения. На рис.2.1 представлен график плотности гиперэкспоненциального распределения для значений случайной величины больше 4. Напомним, что математическое ожидание случайной величины равно 1.

Это означает, что при гиперэкспоненциальном распределении вероятность появления больших значений случайной величины значительно выше, чем, например, для экспоненциального распределения. Таким образом,

основное отличие гиперэкспоненциального распределения от экспоненциального состоит в том, что гиперэкспоненциальное распределение характеризуется большей вероятностью появления маленьких значений случайной величины и, в то же время, большей вероятностью появления больших значений случайной величины. Тем самым, гиперэкспоненциальное распределение позволяет аппроксимировать произвольные распределения с «тяжелым хвостом»[3,с.54]. На рис. 2.1 коэффициент вариации случайной величины  $X$  обозначен  $\nu[X]$ .

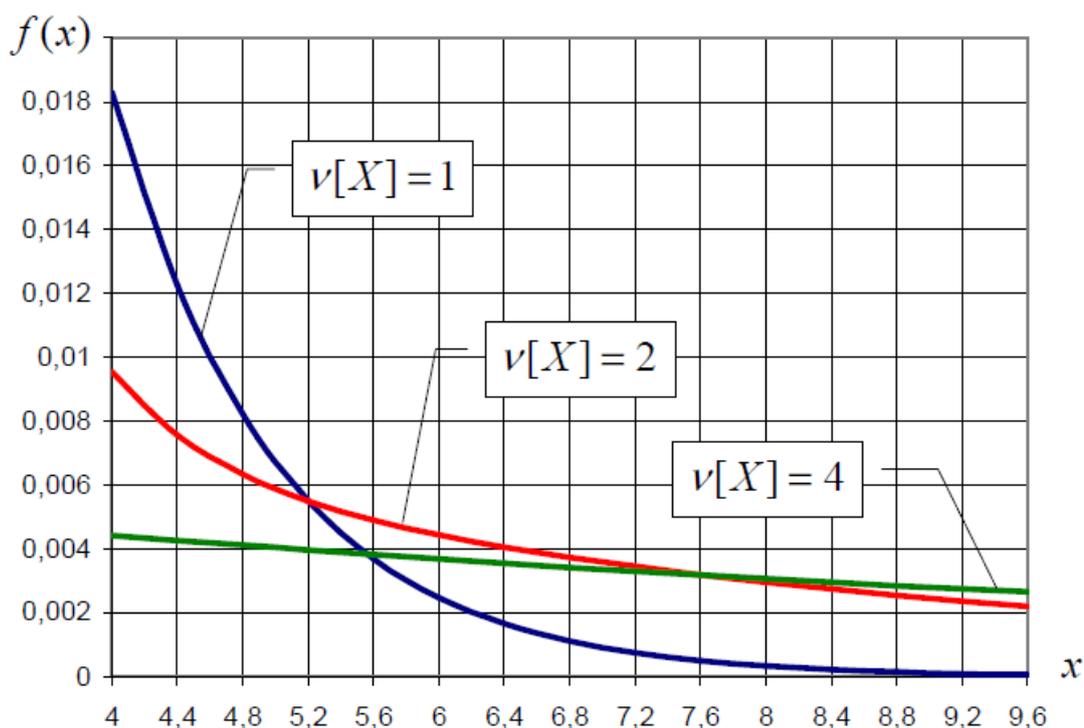


Рис. 2.1 – «Хвост» гиперэкспоненциального распределения

Кроме того, распределение  $H_2$  обладает уникальным свойством, его возможно описать как с помощью 2-х первых моментов, так и с помощью 3-х моментов. Поэтому в том случае, когда в сети массового обслуживания будут использованы СМО  $M^G / M^G / 1$ , в которой потоки определяются на уровне 2-х первых моментов и СМО  $H_2 / H_2 / 1$ , то в последней системе потоки надо будет задавать также на уровне 2-х моментов. В том случае, когда интервалы в потоках имеют коэффициент вариации больше 1, в сети массового

обслуживания будут фигурировать только СМО  $H_2/H_2/1$  и потоки можно описывать тремя моментами.

С помощью классического метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли:  $W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u)dC(u), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0 \end{cases}$ , где  $W(y)$  – функция распределения вероятностей (ФРВ) времени ожидания в очереди,  $C(u) = P(\tilde{u} < u)$  – ФРВ случайной величины  $\tilde{u} = \tilde{x} - \tilde{t}$ , где в свою очередь  $\tilde{x}$  – случайное время обслуживания требования,  $\tilde{t}$  – случайная величина, интервал времени между поступлениями требований, было получено преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания в работе [13]

$$W^*(s) = \frac{s_1 s_2 (s + \mu_1)(s + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2 (s + s_1)(s + s_2)}, \quad (2.4)$$

где  $s_1$  и  $s_2$  абсолютные значения вещественных частей отрицательных корней многочлена  $s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0$  с коэффициентами  $c_0 = a_0 b_1 - a_1 b_0 - a_0(\mu_1 + \mu_2) + b_0(\lambda_1 + \lambda_2)$ ,  $c_1 = -a_1 b_1 - a_0 - b_0 + (\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2)$ , и  $c_2 = \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2$ , а параметры  $a_0 = \lambda_1 \lambda_2$ ,  $a_1 = p \lambda_1 + (1-p) \lambda_2$ ,  $b_0 = \mu_1 \mu_2$ ,  $b_1 = q \mu_1 + (1-q) \mu_2$  зависят от параметров распределений (2.2) и (2.3).

При использовании метода спектрального разложения решения уравнения Линдли будем использовать специальные обозначения [1]. Поэтому преобразования Лапласа плотностей распределения интервалов между соседними требованиями и времени обслуживания обозначим соответственно через  $A^*(s)$  и  $B^*(s)$ .

Заметим, что преобразованием Лапласа функции плотности распределения  $f(t)$  неотрицательной непрерывной случайной величины  $T$ , называется функция  $F^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ .

Метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли заключается в приведении выражения  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1$  к произведению

двух множителей, которое давало бы некоторую рациональную функцию. Поэтому строим следующее спектральное разложение:  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ , где  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  некоторые дробно-рациональные функции  $s$ , которые могут быть разложены на множители.

Преобразование (2.4) получено следующим образом. Преобразование Лапласа функции (2.2) имеет вид  $A^*(s) = p \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + (1-p) \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2}$ , а функции (2.3)

$$B^*(s) = q \frac{\mu_1}{s + \mu_1} + (1-q) \frac{\mu_2}{s + \mu_2}.$$

Далее строим спектральное разложение в виде отношения двух рациональных функций  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \psi_+(s) / \psi_-(s)$ :

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \left[ p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] \cdot \left[ q \frac{\mu_1}{s + \mu_1} + (1-q) \frac{\mu_2}{s + \mu_2} \right] - 1.$$

Первый сомножитель в правой части в квадратных скобках равен:

$$\left[ p \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - s} + (1-p) \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right] = \frac{\lambda_1 \lambda_2 - [p \lambda_1 + (1-p) \lambda_2] s}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)} = \frac{a_0 - a_1 s}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)}.$$

Аналогично второй сомножитель:

$$\left[ q \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} + (1-q) \frac{\mu_2}{\mu_2 + s} \right] = \frac{\mu_1 \mu_2 - [q \mu_1 + (1-q) \mu_2] s}{(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)} = \frac{b_0 + b_1 s}{(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}.$$

Спектральное разложение будет иметь вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{(a_0 - a_1 s)(b_0 + b_1 s) - (\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}.$$

В числителе дроби в правой части разложения получили многочлен 4-й степени  $-s^4 + c_2 s^3 + c_1 s^2 + c_0 s$  с выше приведенными коэффициентами  $c_0, c_1, c_2$ . Тогда отношение рациональных функций  $\psi_+(s) / \psi_-(s)$  можно разложить на следующие множители:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{s(s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0)}{(s - \lambda_1)(\lambda_2 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}.$$

Для окончательного разложения на простые множители полученного выражения потребуется определить нули кубического многочлена

$s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0$ . В соответствии с правилами метода спектрального разложения нам необходимо, чтобы многочлен  $s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0$  имел либо два действительных отрицательных корня  $-s_1$  и  $-s_2$  либо два комплексно сопряженных корня с отрицательными действительными частями и один положительный корень  $s_3$ . Наличие таких корней обусловлено самим существованием и единственностью спектрального разложения [1].

Убедимся в этом на примере многочлена  $s^3 - c_2s^2 - c_1s - c_0$ . Для этого исследуем знак младшего коэффициента многочлена  $c_0$  по формуле Виета. В стационарном режиме функционирования СМО ее коэффициент загрузки должен удовлетворять условию  $\rho = \frac{\bar{\tau}_\mu}{\bar{\tau}_\lambda} = \frac{\lambda_1\lambda_2 [\mu_1(1-q) + \mu_2q]}{\mu_1\mu_2 [\lambda_1(1-p) + \lambda_2p]} < 1$ . Коэффициент загрузки также как и при имитационном моделировании определяется отношением средних интервалов: времени обслуживания  $\bar{\tau}_\mu$  и интервала между требованиями во входящем потоке  $\bar{\tau}_\lambda$ .

Выражение в развернутом виде для коэффициента  $c_0$  имеет вид:

$c_0 = -\lambda_1\lambda_2[\mu_1(1-q) + \mu_2q] + \mu_1\mu_2[\lambda_1(1-p) + \lambda_2p]$ . Теперь, сравнивая выражения для младшего коэффициента  $c_0$  и загрузки  $\rho$ , получим что коэффициент  $c_0 > 0$ . Из формулы Виета следует, что произведение трех корней  $s_1s_2s_3 = c_0 > 0$ , что и подтверждает наши допущения о знаках корней многочлена.

Теперь для удобства обозначим через  $-s_1$  и  $-s_2$  отрицательные действительные части корней многочлена, а через  $s_3$  положительный действительный корень. Дробно-рациональные функции как компоненты спектрального разложения  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  запишем согласно условиям, приведенным ниже, в виде:  $\psi_+(s) = \frac{s(s+s_1)(s+s_2)}{(s+\mu_1)(s+\mu_2)}$ ,  $\psi_-(s) = \frac{(s-\lambda_1)(\lambda_2-s)}{s-s_3}$ .

Функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны удовлетворять следующим условиям метода спектрального разложения:

<p>В случае <math>\text{Re}(s) &gt; 0</math> <math>\psi_+(s)</math> является аналитической функцией, не содержащей нулей в этой полуплоскости;</p> <p>В случае <math>\text{Re}(s) &lt; D</math> <math>\psi_-(s)</math> является аналитической функцией, не содержащей нулей в этой полуплоскости, где константа <math>D &gt; 0</math>, для которой: <math>\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a(t)}{e^{-Dt}} &lt; \infty</math>.</p>	(2.5)
--	-------

Также для функций  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  должны быть выполнены следующие условия:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) > 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = 1; \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty, \text{Re}(s) < D} \frac{\psi_-(s)}{s} = -1. \quad (2.6)$$

Построенные нами функции  $\psi_+(s)$  и  $\psi_-(s)$  удовлетворяют перечисленным условиям (2.5) и (2.6).

Тогда согласно условиям (2.5) и (2.6) функция  $\psi_+(s)$  будет включать только отрицательные действительные части корней  $-s_1$  и  $-s_2$  многочлена, а функция  $\psi_-(s)$  - только положительный действительный корень  $s_3$ . Теперь сосредоточимся на функции  $\psi_+(s)$ , содержащей в числителе отрицательные корни, и при их определении численным методом Ньютона адаптируем его к нахождению только отрицательных корней.

Действуя по методу спектрального разложения, определим константу  $K$ :

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s + s_1)(s + s_2)}{(s + \mu_1)(s + \mu_2)} = \frac{s_1 s_2}{\mu_1 \mu_2}. \text{ Константа } K \text{ в решении задачи означает}$$

вероятность того, что поступающее в систему очередное требование, застает систему свободной. Эта величина потребуется далее в главе 4. Далее через

функцию  $\psi_+(s)$  определяем преобразование Лапласа  $W^*(s)$  функции распределения времени ожидания  $W(y): \Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{s_1 s_2 (s + \mu_1)(s + \mu_2)}{s \mu_1 \mu_2 (s + s_1)(s + s_2)}$ . Через

нее выражаем преобразование Лапласа функции плотности распределения вероятностей времени ожидания  $s \cdot \Phi_+(s)$ , определенное выражением (2.4).

Применяя свойство преобразования Лапласа, через ее первую производную

$$\frac{dW^*(s)}{ds} = \frac{s_1 s_2 (2s + \mu_1 + \mu_2) \mu_1 \mu_2 (s + s_1)(s + s_2) - s_1 s_2 (s + \mu_1)(s + \mu_2) \mu_1 \mu_2 (2s + s_1 + s_2)}{\mu_1^2 \mu_2^2 (s + s_1)^2 (s + s_2)^2}$$

получаем среднее время ожидания требований в очереди как значение производной от преобразования Лапласа функции плотности (2.4) со знаком минус точке  $s = 0$ :

$$-\left. \frac{dW^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{s_1 s_2 \mu_1^2 \mu_2^2 (s_1 + s_2) - s_1^2 s_2^2 \mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1^2 \mu_2^2 s_1^2 s_2^2} = \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} - \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}.$$

т.е.

$$-\left. \frac{dW^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}.$$

Тогда итоговая расчетная формула для среднего времени ожидания в очереди для СМО  $H_2/H_2/1$  будет иметь вид:

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \quad (2.7)$$

Начальные моменты второго и третьего порядков для времени ожидания также можно определить из спектрального разложения (2.4). Так, вторая производная от преобразования (2.4) в точке  $s = 0$  даст второй начальный момент времени ожидания [13]:

$$\bar{W}^2 = \frac{d^2 W^*(s)}{ds^2} = \frac{2}{\mu_1 \mu_2} - \frac{2}{s_1 s_2} - \frac{2(s_1 + s_2)}{\mu_1 \mu_2 s_1^2 s_2^2} [s_1 s_2 (\mu_1 + \mu_2) - \mu_1 \mu_2 (s_1 + s_2)],$$

через которое можно определить дисперсию времени ожидания. В телекоммуникациях понятие джиттер определено как разброс (колебания) времени ожидания от его среднего значения, тогда значение джиттера можно определить через дисперсию. Это касается практического приложения СМО для анализа трафика.

### 2.1.1 Построение механизма аппроксимации произвольных законов распределений (G) с тяжелыми хвостами гиперэкспоненциальным распределением.

Так как у распределенной по гиперэкспоненциальному закону  $H_2$  случайной величины значение коэффициента вариации больше 1, гиперэкспоненциальный закон распределения может использоваться для аппроксимации распределения с тяжелыми хвостами. Учитывая тот факт, что распределение  $H_2$  является трехпараметрическим, в работе приводится механизм аппроксимации произвольных законов распределений с тяжелым хвостом гиперэкспоненциальным распределением не только на уровне двух первых моментов, но и на уровне трех первых моментов.

#### Аппроксимация законов распределений на уровне двух первых моментов.

При аппроксимации потоков на уровне 2-х первых моментов распределений временных интервалов, для нахождения параметров распределений (2.2) и (2.3) методом моментов решается система 2-х уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2} &= \bar{\tau}_\lambda, \\ \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2} &= \overline{\tau_\lambda^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Используя равенства (2.8) для метода моментов, определим неизвестные пока параметры  $\lambda_1, \lambda_2, p$  методом подстановки. Отметим, что система уравнений (2.8) с тремя неизвестными является недоопределенной.

Решение системы (2.8) имеет вид:

$$\lambda_1 = 2p / \bar{\tau}_\lambda, \quad \lambda_2 = 2(1-p) / \bar{\tau}_\lambda, \quad p = [1 \pm \sqrt{(c_\lambda^2 - 1) / (c_\lambda^2 + 1)}] / 2. \quad (2.9)$$

Аналогично находим параметры распределения (2.3):

$$\mu_1 = 2q / \bar{\tau}_\mu, \quad \mu_2 = 2(1-q) / \bar{\tau}_\mu, \quad q = [1 \pm \sqrt{(c_\mu^2 - 1) / (c_\mu^2 + 1)}] / 2. \quad (2.10)$$

Полученные решения (2.9) и (2.10) перекрывают диапазон изменения коэффициента вариации от 1 до  $\infty$  [13].

Таким образом, гиперэкспоненциальный закон распределения  $H_2$  может быть описан на уровне двух первых моментов и он обеспечивает коэффициент вариации  $c_\tau \geq 1$ .

### **Аппроксимация на уровне трех моментов.**

В связи с тем, что рассматриваемое распределение  $H_2$  содержит три параметра, аппроксимацию закона распределения проведем на уровне трех первых начальных моментов и сравним полученные результаты с предыдущими. С точки зрения теории вероятностей три момента более полно характеризуют случайную величину, следовательно, такая аппроксимация будет точнее [13].

Через преобразования Лапласа функций (2.2) и (2.3) получим выражения для начальных моментов третьего порядка:

– для интервалов между соседними требованиями во входящем потоке:

$$\frac{6p}{\lambda_1^3} + \frac{6(1-p)}{\lambda_2^3} = \overline{\tau_\lambda^3} \quad (2.11)$$

– для случайного времени обслуживания:

$$\frac{6q}{\mu_1^3} + \frac{6(1-q)}{\mu_2^3} = \overline{\tau_\mu^3} \quad (2.12)$$

Численное решение систем 3-х нелинейных уравнений даст необходимые значения параметров  $(\lambda_1, \lambda_2, p)$ ,  $(\mu_1, \mu_2, q)$  распределений (2.2) и (2.3). Для существования и единственности решения системы (2.8), (2.11) для входного потока необходимо и достаточно выполнение условия:  $\overline{\tau_\lambda^3} \cdot \overline{\tau_\lambda} \geq 1,5 \cdot \overline{\tau_\lambda^2}$ . Аналогично обстоит дело и с процессом обслуживания.

На практике для нахождения начальных моментов до 3-го порядка включительно для системы уравнений (2.8) и (2.11), т.е. для восстановления начальных моментов, можно воспользоваться сетевыми анализаторами при

анализе трафика, так, как это сделано в работе [14]. Здесь показан механизм работы с анализатором Wireshark. Wireshark — это приложение, сканирующее структуру самых различных сетевых протоколов, и позволяющее рассмотреть сетевой пакет, путем отображения значения каждого поля протокола любого уровня. Захват пакетов осуществляется с помощью библиотеки Pcap.

Для расчета моментов интервала между соседними пакетами, был разработан программный механизм, позволяющий выбирать из входного файла с данными о захвате сетевого трафика только те данные, которые имеют отношение к поступившим пакетам, и уже для этих данных производится расчет интервалов, а также их моментов.

«Авторской программой был проанализирован файл с данными о трафике, поступающим на прокси-сервер ВУЗа почти за час съема. Входной файл содержал более 2150000 строк, обработка вручную которых не представляется возможным. Были получены следующие результаты (рис. 2.2):

Файл	Справка
Начальный момент 1-го порядка:	5,097781e-003
Начальный момент 2-го порядка:	3,325837e-004
Начальный момент 3-го порядка:	5,505049e-005
Дисперсия:	3,065963e-004
Коэффициент вариации:	3,434807e+000
Асимметрия:	9,356323e+000
Количество пакетов:	628183

Рис. 2.2 – Результат работы программы анализа лог-файлов

Результаты программы подтверждают предположение о том, что анализируемый трафик сильно отличается от пуассоновского (коэффициент вариации  $c=3,43$  вместо 1), значение асимметрии, равной  $A_s=10,25$  свидетельствует о том, что распределение интервалов между пакетами трафика необходимо отнести к распределениям с тяжелыми хвостами. К примеру, у экспоненциального закона  $A_s=2$ . Расчет характеристик трафика такого типа требует соответствующий математический аппарат» [14].

Таким аппаратом и будет предложенный подход к аппроксимации потоков гиперэкспоненциальным законом распределения 2-го порядка.

### 2.1.2 Результаты проведенных вычислительных экспериментов и их анализ

С использованием выражения (2.7) проведены вычислительные эксперименты над временем ожидания в работе [13]. При этом использован достаточно широкий диапазон изменения параметров трафика, а именно: загрузки системы  $\rho$  от 0,1 до 0,9, а коэффициентов вариаций интервалов поступления и времени обслуживания  $c_\lambda, c_\mu$  от 2 до 10. Это касается входных параметров. Выходными характеристиками являлись: среднее время ожидания  $\bar{W}$ , определенное по выражению (2.7) на уровне двух первых моментов интервалов поступления и обслуживания, дисперсия времени ожидания и неизвестное второе слагаемое в правой части выражения (2.1)  $\bar{I}^2/(2\bar{I})$ . Результаты экспериментов сведены в таблицу 2. 1.

Таблица 2.1. Результаты экспериментов

Входные параметры		Выходные характеристики		
$\rho$	$(c_\lambda, c_\mu)$	$\bar{W}$	$D_w$	$\bar{I}^2/(2\bar{I})$
0,1	(2,2)	0,45	3,7	26,50
	(4,4)	1,78	59,9	92,50
	(6,6)	4,0	303,7	202,50
	(8,8)	7,11	960,2	356,49
	(10,10)	11,11	2345	558,49
0,3	(2,2)	1,72	16,5	9,82
	(4,4)	6,88	265,4	35,81
	(6,6)	15,46	1346	79,14
	(8,8)	27,46	4258	139,80
	(10,10)	42,89	10400	233,23
0,5	(2,2)	4,04	47,69	6,46
	(4,4)	16,13	765,5	24,37

	(6,6)	36,16	3882	54,34
	(8,8)	64,18	12276	96,32
	(10,10)	100,19	29981	186,32
0,7	(2,2)	9,44	161,3	4,96
	(4,4)	37,72	2585	19,26
	(6,6)	84,53	13094	43,39
	(8,8)	149,95	41396	77,31
	(10,10)	233,99	101086	120,98
0,9	(2,2)	36,20	1583	4,08
	(4,4)	144,83	25340	16,11
	(6,6)	325,40	128294	36,66
	(8,8)	577,86	405483	65,75
	(10,10)	902,23	989966	103,38

Анализ данных в таблице 2.1 подтверждает квадратичную зависимость времени ожидания (2.1) и (2.7) от коэффициентов вариаций интервалов поступления и времени обслуживания. Кроме того, время ожидания резко возрастает с ростом коэффициента загрузки  $\rho$ .

Это говорит об адекватности полученного результата (2.7). Значения дисперсий времени ожидания  $D_w$  позволяют находить разброс времени ожидания от его среднего значения (джиттер) например, с использованием правила  $3 \cdot \sigma$ . И наконец, можно оценить поведение неизвестного второго слагаемого в выражении (2.1): оно также связано квадратичной зависимостью от коэффициентов вариаций интервалов поступления и времени обслуживания. Кроме этого, второе слагаемое убывает с ростом коэффициента загрузки  $\rho$ .

Перейдем теперь к исследованию зависимости результатов (2.1) и (2.7) от моментов высших порядков. С учетом зависимости конечного результата времени ожидания для системы G/G/1 (2.1) от моментов высших порядков, проведем расчеты по установлению степени такой зависимости. В связи с тем, что время ожидания в данном случае будет зависеть от многих параметров трафика, отображение расчетных данных в одной таблице практически неосуществимо. Поэтому эти данные ниже будут представлены в текстовом виде[13].

Для этого рассмотрим случаи малой нагрузки ( $\rho=0,1$ ), средней нагрузки ( $\rho=0,5$ ) и высокой нагрузки ( $\rho=0,9$ ). Проведенные расчеты дают следующие результаты.

Время ожидания при малой нагрузке  $\rho=0,1$ , при коэффициентах вариаций  $(c_\lambda, c_\mu) = 2$  и при изменении коэффициентов асимметрии  $(A_{s\lambda}, A_{s\mu})$  от 4 до 15 варьирует от 0,72 до 0,32. При  $(c_\lambda, c_\mu) = 4$  и изменении  $(A_{s\lambda}, A_{s\mu})$  от 7 до 15  $\bar{W}$  варьирует от 4,82 до 1,50. При  $(c_\lambda, c_\mu) = 6$  и изменении  $(A_{s\lambda}, A_{s\mu})$  от 10 до 15  $\bar{W}$  варьирует от 13,48 до 4,98.

При средней нагрузке  $\rho=0,5$ ,  $(c_\lambda, c_\mu)=2$  и изменении  $(A_{s\lambda}, A_{s\mu})$  от 4 до 15 время ожидания  $\bar{W}$  варьирует от 4,85 до 3,02. При  $(c_\lambda, c_\mu)=4$  и изменении  $(A_{s\lambda}, A_{s\mu})$  от 7 до 15  $\bar{W}$  варьирует от 21,79 до 14,33.

При высокой нагрузке  $\rho=0,9$ ,  $(c_\lambda, c_\mu)=2$  и изменении  $(A_{s\lambda}, A_{s\mu})$  от 4 до 15 время ожидания  $\bar{W}$  варьирует от 37,05 до 32,87. При  $(c_\lambda, c_\mu)=4$  и изменении  $(A_{s\lambda}, A_{s\mu})$  от 7 до 15 время ожидания варьирует от 150,36 до 141,68. При  $(c_\lambda, c_\mu)=6$  и изменении  $(A_{s\lambda}, A_{s\mu})$  от 10 до 15 время ожидания варьирует от 339,65 до 330,62 [13].

Последние данные показывают, что с ростом коэффициентов асимметрий при одной и той же нагрузке, время ожидания уменьшается.

Следовательно, влияние моментов высшего порядка на время ожидания в системе G/G/1 нельзя считать не существенным и им нельзя пренебрегать.

## 2.2 Математическая модель трафика на основе СМО $H_2/M/1$

В случае коэффициента вариации интервалов поступления требований  $c_\lambda$  больше 1 и неопределенного значения коэффициента вариации времени обслуживания можно воспользоваться известными результатами для системы  $H_2/M/1$ [15].

В этом случае функция плотности  $a(t)$  имеет вид (2.2), а время обслуживания

$$b(t) = \mu e^{-\mu t}. \quad (2.13)$$

Неизвестные параметры  $\lambda_1, \lambda_2, p$  распределения  $a(t)$  определяются точно также, как и в случае СМО  $H_2/H_2/1$ .

Ниже приведены полученные в работах [14,15] результаты для времени ожидания в системе  $H_2/M/1$ . В этом случае преобразование Лапласа для функции плотности времени ожидания для системы, полученное решением интегрального уравнения Линдли методом спектрального разложения [9] имеет следующий вид:

$$W^*(s) = \frac{\sigma_1(s + \mu)}{\mu(s + \sigma_1)} \quad (2.14)$$

откуда получено среднее время ожидания:

$$\bar{W} = 1/\sigma_1 - 1/\mu, \quad (2.15)$$

где  $\sigma_1$  - абсолютное значение отрицательного корня многочлена

$s^2 - l_1 s - l_0$  с коэффициентами  $l_0 = \mu[\lambda_1(1-p) + \lambda_2 p] - \lambda_1 \lambda_2$  и  $l_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \mu$ , связанными с параметрами распределений (2.2) и (2.13).

Выражение (2.14) на основе свойств преобразования Лапласа, позволяет также определить моменты высших порядков для времени ожидания. Например, начальный момент 2-го порядка времени ожидания равен значению второй производной от преобразования (2.14) в точке  $s = 0$  и он будет иметь вид [20]:

$$\overline{W^2} = \frac{d^2 W^*(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{2\sigma_1(\mu - \sigma_1)}{\mu(s + \sigma_1)^3} \Big|_{s=0} = \frac{2(\mu - \sigma_1)}{\mu\sigma_1^2} \quad (2.16)$$

В свою очередь, начальный момент 2-го порядка позволяет определить дисперсию времени ожидания:  $D_W = \overline{W^2} - \bar{W}^2$ . Учитывая определение джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания от его среднего значения [1], тем самым получим возможность определения джиттера через дисперсию.

Это является важным результатом для анализа трафика, чувствительного к задержкам.

В отличие от системы  $H_2/H_2/1$ , для системы  $H_2/M/1$  найден зарубежный аналог [16] решения для среднего времени ожидания:

$$\bar{W} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \left\{ 1 + \frac{1}{\rho} [\sqrt{(1-\theta)^2 + (r-1)} - (1-\theta)] \right\} \quad (2.17)$$

где промежуточные параметры:  $\theta = \frac{\rho(q-r) - (q-r^2)}{2\rho(r-1)}$ ,  $q = \frac{\bar{\tau}_\lambda^3}{6(\bar{\tau}_\lambda)^3}$ ,  $r = \frac{\bar{\tau}_\lambda^2}{6(\bar{\tau}_\lambda)^2}$ ,

$\rho$  – коэффициент загрузки системы.

Данное решение в работе [16] получено с использованием результата [9]:

$$W = \frac{\sigma}{\mu(1-\sigma)}, \quad (2.18)$$

где  $0 < \sigma < 1$  – корень уравнения

$$\sigma = \int_0^{\infty} e^{-\mu(1-\sigma)t} dF(t) = F^*(\mu(1-\sigma)) \quad (2.19)$$

Здесь  $F^*$  – преобразование Лапласа-Стильтеса для функции гиперэкспоненциального распределения  $F(t) = 1 - pe^{-\lambda_1 t} - (1-p)e^{-\lambda_2 t}$ .

Далее в [9] найден нужный корень уравнения (2.19) в виде

$$\sigma = \frac{1}{2\mu} \left\{ \mu + \lambda_1 + \lambda_2 - \sqrt{(\mu + \lambda_1 + \lambda_2)^2 - 4p\mu(\lambda_1 - \lambda_2)} \right\}.$$

Здесь  $\mu$  – интенсивность обслуживания экспоненциального закона  $M$ , а  $p$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  – параметры гиперэкспоненциального распределения, которые должны быть определены методом моментов из системы уравнений:

$$\begin{cases} \bar{\tau}_\lambda = \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2}, \\ \bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2}, \\ \bar{\tau}_\lambda^3 = \frac{6p}{\lambda_1^3} + \frac{6(1-p)}{\lambda_2^3} \end{cases} \quad (2.20)$$

В работах [17,18] значения  $p$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  для широкого диапазона изменения параметров трафика определялись с использованием пакета Mathcad.

В работе [16] автору вместо использования пакета удалось выразить параметры гиперэкспоненциального распределения  $p$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  через начальные моменты интервалов между поступлениями требований в систему  $\bar{\tau}_\lambda$ ,  $\bar{\tau}_\lambda^2$ ,  $\bar{\tau}_\lambda^3$ , до 3-го порядка включительно. Окончательно, значение корня уравнения (2.19) имеет вид:

$$\sigma = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \rho \frac{q-r}{q-r^2} - \sqrt{\left(1 - \rho \frac{q-3r+2}{q-r^2}\right)^2 + \rho^2 \frac{4(r-1)^3}{(q-r^2)^2}} \right\} \quad (2.21)$$

После подстановки последнего выражения (2.21) для  $\sigma$  в (2.18) и получится окончательный результат (2.17) для среднего времени ожидания в системе  $H_2/M/1$ . В этом случае, указанные начальные моменты будут входными параметрами для расчета характеристик системы.

Сравнение аналога с результатом (2.14) с помощью расчетов, показало их полную идентичность.

Возникает вопрос: любые ли значения начальных моментов  $\bar{\tau}_\lambda$ ,  $\bar{\tau}_\lambda^2$ ,  $\bar{\tau}_\lambda^3$  позволяют аппроксимировать произвольные распределения гиперэкспоненциальным законом распределения вида  $F(t) = 1 - pe^{-\lambda_1 t} - (1-p)e^{-\lambda_2 t}$ ? Т.е.: при любых ли значениях начальных моментов:  $\bar{\tau}_\lambda$ ,  $\bar{\tau}_\lambda^2$ ,  $\bar{\tau}_\lambda^3$  система (2.20) имеет решение относительно параметров  $p$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  гиперэкспоненциального закона распределения? [19].

Эти вопросы исследованы в работе [21] и ответ получен в виде следующего ограничения:

$$\overline{\tau_\lambda^3} \cdot \overline{\tau_\lambda} \geq 1,5 \cdot \overline{\tau_\lambda^2}. \quad (2.22)$$

Следовательно, при аппроксимации произвольных законов распределений гиперэкспоненциальным законом, необходимо придерживаться ограничения (2.22).

Для практического применения результатов (2.15) и (2.16) необходимо определить входящие в них параметры. Определение этих неизвестных параметров рассматривается ниже. Как оказалось, неизвестные параметры закона распределения (2.2) можно определить путем его аппроксимации с использованием двух первых моментов, а также с использованием трех первых моментов случайного интервала между поступлениями. Таким образом, у нас появится возможность оценки точности обоих подходов [20].

### 2.2.1 Аппроксимация закона распределения на уровне двух первых моментов

Рассмотрим пример 1. Пусть коэффициент загрузки СМО  $\rho = \overline{\tau_\mu} / \overline{\tau_\lambda} = 0,9$ , где  $\overline{\tau_\lambda}$  и  $\overline{\tau_\mu}$  средние значения интервалов между поступлениями и времени обслуживания. Рассмотрим случай нормированного обслуживания  $\overline{\tau_\mu} = \mu^{-1} = 1$  (1 единица времени). Тогда средний интервал между поступлениями  $\overline{\tau_\lambda} = 10/9$  (единиц времени). Пусть коэффициент вариации случайной величины – интервала времени между поступлениями  $c_\lambda = 4$ . Аппроксимация на уровне двух первых моментов дает:

$$p \approx 0,9697, \lambda_1 \approx 1,7454, \lambda_2 \approx 0,0546 \quad (2.23-25)$$

Таким образом, неизвестные параметры распределения (2.2) однозначно определены. График функции плотности (2.2) с этими параметрами приведен на рисунке 2.2 (кривая 1). Теперь воспользуемся результатом для системы  $H_2/M/1$

(2.15), приведенным выше. Коэффициенты квадратного уравнения  $s^2 - l_1 s - l_0$  в этом примере равны:  $c_1 \approx 0,0106$ ;  $c_2 = 0,80$ . Найдем отрицательный корень квадратного уравнения  $s^2 - l_1 s - l_0$  с помощью пакета Mathcad:  $-\sigma_1 \approx -0,0130$ . Тогда среднее время ожидания (2.15) равно  $\bar{W} \approx 75,786$  единиц времени [20].

### Аппроксимация на уровне трех первых моментов.

Рассмотрим еще один пример.

В рассмотренный выше пример 1 введем в качестве третьего момента коэффициент асимметрии  $A_{S_\lambda}$  и для определенности положим  $A_{S_\lambda} = 7$ . Коэффициент вариации случайной величины – интервала времени между поступлениями  $c_\lambda = 4$  оставляем прежним, чтобы понять, как момент 3-го порядка влияет на конечный результат. Как известно, для пуассоновского потока параметры  $c_\lambda = 1$  и  $A_{S_\lambda} = 2$ .

При тех же значениях входных параметров СМО начальные моменты 2-го и 3-го порядков для распределения (2.2) соответственно будут:  $\bar{\tau}_\lambda^2 = 17 \cdot (10/9)^2$ ,  $\bar{\tau}_\lambda^3 = 497 \cdot (10/9)^3$ . При таких исходных данных, для определения неизвестных параметров входного распределения (2.2):  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $p$  запишем следующую систему уравнений на основе метода моментов [20]:

$$\begin{cases} \frac{p}{\lambda_1} + \frac{(1-p)}{\lambda_2} = 10/9 \\ \frac{2p}{\lambda_1^2} + \frac{2(1-p)}{\lambda_2^2} = 17 \cdot (10/9)^2 \\ \frac{6p}{\lambda_1^3} + \frac{6(1-p)}{\lambda_2^3} = 497 \cdot (10/9)^3 \end{cases} \quad (2.26)$$

решив которые найдем искомые параметры. Решение системы (2.26) в пакете Mathcad после округления дает следующие результаты:

$$p \approx 0,9111, \lambda_1 \approx 6,2291, \lambda_2 \approx 0,0922. \quad (2.27)$$

График функции плотности (2.2) с этими параметрами приведен на рис. 1 (кривая 2).

При этих параметрах коэффициенты квадратного уравнения  $s^2 - l_1 s - l_0$  будут равны;  $c_1 \approx 0,0638$ ;  $c_2 \approx 5,3213$  и его решение дает следующий отрицательный корень:  $-\sigma_1 \approx -0,012$ . Воспользуемся результатом (2.15) и определим среднее время ожидания:  $\bar{W} \approx 82,62$  единиц времени. Дисперсия времени ожидания  $D_W = \overline{W^2} - \bar{W}^2 = 6,991 \cdot 10^3$ . Относительная погрешность среднего времени ожидания в сравнении с результатом аппроксимации на уровне двух моментов составляет 8,27%. Такая разница в полученных результатах объясняется существенным отличием двух функций плотностей, графики которых приведены на рис.2.2, т.к. результаты (2.25) и (2.27) для параметров распределения (2.2), полученные различными способами, сильно разнятся [20].

Таким образом, учет моментов третьего порядка интервалов поступления показывает существенную зависимость конечного результата (2.15) от моментов высших порядков. Поэтому результат (2.15), полученный на уровне 3-х первых моментов случайной величины, точнее результата, полученного аппроксимацией закона распределения (2.3) на уровне 2-х первых моментов.

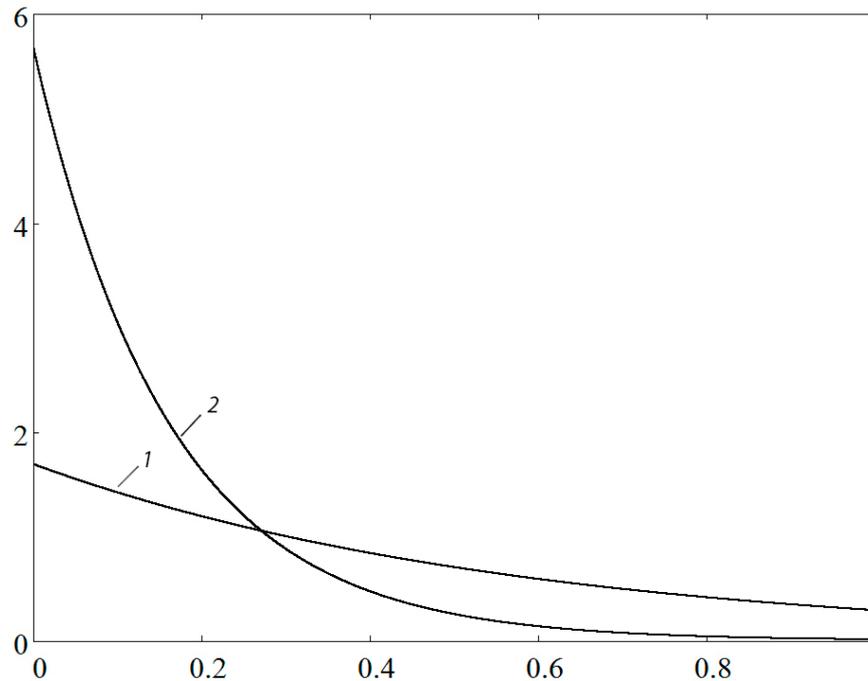


Рис. 2.3 – Графики функции плотности (2.3): 1 – аппроксимация закона распределения  $N_2$  на уровне 2-х моментов; 2 – на уровне 3-х моментов

### 2.2.2 Результаты проведенных вычислительных экспериментов и их анализ

С использованием полученных соотношений (2.15) и (2.16) проведены вычислительные эксперименты над временем ожидания в системе в работе [20]. Результаты экспериментов сведены в таблицу 2.2. При этом использован достаточно широкий диапазон изменения параметров трафика, а именно: загрузки системы  $\rho$  от 0,1 до 0,9, а коэффициента вариации интервалов поступления  $c_\lambda$  от 2 до 10. Это касается входных параметров. Выходными характеристиками являются: среднее время ожидания  $\bar{W}$ , определенное по выражению (2.15) на уровне двух первых моментов интервалов поступления, дисперсия времени ожидания, определенное через (2.15). Для сравнения полученных результатов, в таблице 2.2 приведены также результаты классической системы М/М/1.

Анализ данных таблицы 2.2 подтверждает квадратичную зависимость времени ожидания от коэффициента вариации интервалов поступления. Кроме того, время ожидания резко возрастает с ростом коэффициента загрузки  $\rho$ .

Следует заметить, что классическая система М/М/1, использующая только средние значения временных интервалов, как следует из таблицы 2.2, дает слишком оптимистичные результаты по задержкам.

Это говорит об адекватности полученного результата (2.15). Значения дисперсий времени ожидания  $D_W$  позволяют находить разброс времени ожидания от его среднего значения (джиттер) например, с использованием правила  $3\sigma$ .

Таблица 2.2. Результаты экспериментов с использованием 2-х моментов

Входные параметры		Выходные характеристики		
$\rho$	$c_\lambda$	$\bar{W}$ H <sub>2</sub> /M/1	$D_W$	$\bar{W}$ M/M/1
0,1	2	0,187	0,41	0,11
	4	0,230	0,51	
	6	0,241	0,54	
	8	0,245	0,55	
	10	0,247	0,55	
0,3	2	0,811	2,28	0,43
	4	1,201	3,84	
	6	1,344	4,49	
	8	1,407	4,9	
	10	1,438	4,94	
0,5	2	2,162	9,0	1,0
	4	4,831	33,0	
	6	7,602	73,0	
	8	10,402	129,0	
	10	13,213	201,0	
0,7	2	5,573	42,21	2,33
	4	17,391	337,24	
	6	36,582	1411	
	8	63,311	4135	
	10	97,629	9727	
0,9	2	22,409	547	9,0
	4	75,786	5895	
	6	164,685	27451	
	8	289,134	84177	
	10	449,135	202621	

Перейдем теперь к исследованию зависимости результатов (2.15) от моментов высших порядков. С учетом зависимости конечного результата

времени ожидания для системы G/M/1 от моментов высших порядков, проведем расчеты по установлению степени такой зависимости.

Для этого рассмотрим следующие характерные случаи: малой нагрузки  $\rho = 0,1$ ; средней нагрузки  $\rho = 0,5$  и высокой нагрузки  $\rho = 0,9$ .

Расчеты, проведенные по методике аппроксимации гиперэкспоненциальным законом распределения на уровне трех первых моментов для этих случаев, приведены в таблице 2.3. Данные таблицы 2.3 необходимо воспринимать следующим образом: например, при малой нагрузке  $\rho = 0,1$ , при коэффициенте вариации интервала между поступлениями  $c_\lambda = 2$  и увеличении и коэффициента асимметрии  $A_{s\lambda}$  с 4 до 18, время ожидания убывает с 0,34 до 0,13 единиц времени. При  $c_\lambda = 4$  и увеличении  $A_{s\lambda}$  с 7 до 18 время ожидания убывает с 1,26 до 0,17 единиц времени и т.д. [20].

Таблица 2.3. Результаты экспериментов с использованием 3-х моментов

Входные параметры		Диапазоны изменения коэффициента асимметрии и времени ожидания	
$\rho$	$c_\lambda$	$A_{s\lambda}$	$\bar{W}$
0,1	2	(4;18)	(0,34;0,13)
	4	(7;18)	(1,26;0,17)
	6	(10;18)	(3,79;0,24)
0,5	2	(4;18)	(3,14;1,23)
	4	(7;18)	(13,6;2,34)
	6	(10,18)	(32,1;7,6)
0,9	2	(4;18)	(23,5;18,3)
	4	(7;18)	(82,6;67,8)
	6	(10;18)	(182;165)

Анализ данных таблицы 2.3 показывает, что с ростом коэффициентов асимметрий (3-го момента) при одной и той же нагрузке, время ожидания уменьшается.

Результаты проведенных экспериментов по системе  $H_2/M/1$  подтверждают зависимость основной характеристики – времени ожидания в системе G/M/1 от моментов высших порядков случайной величины – интервала

между поступлениями. При этом при фиксированных значениях коэффициентов загрузки  $\rho$  и вариации интервала между поступлениями  $c_\lambda$ , увеличение коэффициента асимметрии (момента 3-го порядка) приводит к уменьшению времени ожидания (таблица 2.3). Таким образом, влияние моментов высшего порядка на время ожидания в системе G/M/1 нельзя считать не существенным и им нельзя пренебрегать. В отличие от двойственной системы M/G/1, характеристики которой определяются двумя первыми моментами времени обслуживания, система G/M/1 зависит от моментов высших порядков интервала между поступлениями.

Также можно сделать вывод о том, что классическая система M/M/1, которая использует только средние значения временных интервалов, что следует из таблицы 2.2, выдает сильно оптимистичные результаты по задержкам. Таким образом, полученные результаты могут успешно применяться в теории современного телетрафика, чувствительного к задержкам пакетов.

## Выводы

1. Разработанная математическая модель узла немарковской сети массового обслуживания в виде СМО  $H_2/H_2/1$  с гиперэкспоненциальными входными распределениями позволяет рассчитать ее основные характеристики, в случае коэффициентов вариаций  $c_\lambda \geq 1, c_\mu \geq 1$ .

2. При значениях коэффициентов вариации интервалов поступления требований  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  больше 1, допустимо использование системы  $H_2/H_2/1$ . В силу специфики гиперэкспоненциального закона распределения  $H_2$  становится возможным аппроксимирование распределения не только на уровне 2-х, но и на уровне 3-х первых моментов. При этом результаты аппроксимации гиперэкспоненциального распределения на уровне двух и трех моментов могут существенно отличаться. Результат аппроксимации на уровне 3-х моментов с точки зрения теории вероятностей является более точным, так как три первых момента позволяют более полно характеризовать случайную величину – интервала между поступлениями или же интервала обслуживания.

3. При значении коэффициента вариации интервалов поступления требований  $c_\lambda$  больше 1 и неопределенного значения коэффициента вариации времени обслуживания, допустимо использование системы  $H_2/M/1$ .

4. В работе для рассмотренных СМО были найдены решения для среднего времени ожидания требований в очереди. Для этих целей использовался классический метод спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли. Для практического применения полученных результатов использован метод моментов.

5. Проанализировав результаты проведенных вычислительных экспериментов над временем ожидания в системе  $H_2/H_2/1$ , можно сделать вывод о том, что при одном и том же значении нагрузки при росте коэффициентов асимметрий время ожидания уменьшается. Отсюда можно сделать вывод -

влиянием моментов высшего порядка на время ожидания в системе  $G/G/1$  нельзя пренебрегать и считать его не существенным.

6. В работе ставилась задача исследования зависимости времени ожидания для СМО  $G/M/1$  от моментов высших порядков случайного интервала между поступлениями, а также построения механизма аппроксимации произвольных законов распределений ( $G$ ) с тяжелым хвостом гиперэкспоненциальным распределением на примере системы  $H_2/M/1$ . Результат проведенных вычислительных экспериментов для СМО  $H_2/M/1$  приводит к выводу о том, что при учете моментов третьего порядка интервалов поступления можно увидеть существенную зависимость конечного результата от моментов высших порядков. Как следствие, результат, который получен на уровне 3-х первых моментов случайной величины является более точным, чем результат, полученный аппроксимацией закона распределения на уровне 2-х первых моментов.

### ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В СЛУЧАЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВАРИАЦИЙ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ

$$c_\lambda < 1, c_\mu < 1$$

#### 3.1 Исследование математической модели трафика на основе СМО М/М/1 с запаздыванием

В основу описания СМО с запаздыванием положим понятие рекуррентного потока [9], определяемого совокупностью функций распределения  $F_1(t) = F_2(t) = \dots = F_n(t) = \dots = F(t)$  между поступающими требованиями.

Далее рассмотрим случай, когда СМО образована двумя потоками, определяемыми функциями вида

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\gamma(t-t_0)}, & t \geq t_0 \\ 0, & 0 \leq t < t_0 \end{cases}, \gamma > 0,$$

и потоки имеют одинаковое время запаздывания  $t_0$ .

В качестве одной математической модели таких систем предлагается ниже рассматриваемая система массового обслуживания с запаздыванием.

Рассмотрим СМО, на вход которой поступают требования, случайные интервалы между которыми распределены с функцией плотности [22]:

$$a(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & t \geq t_0 \\ 0, & 0 \leq t < t_0 \end{cases}. \quad (3.1)$$

Аналогично распределено и время обслуживания:

$$b(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu(t-t_0)}, & t \geq t_0 \\ 0, & 0 \leq t < t_0 \end{cases}. \quad (3.2)$$

Функции плотности (3.1) и (3.2) являются «сдвинутыми вправо от нулевой точки на величину  $t_0$  экспоненциальными распределениями с двумя

параметрами  $(\lambda, t_0)$  и  $(\mu, t_0)$ , причем  $\lambda < \mu$ . Таким образом, имеем немарковскую СМО с запаздыванием во времени на величину  $t_0 > 0$ »[23].

Заметим, что законы распределения (3.1) и (3.2) содержит два параметра, следовательно, они могут быть описаны двумя первыми моментами и аппроксимировать произвольные распределения на уровне 2-х первых моментов в случае  $c_\lambda < 1, c_\mu < 1$ . Новую СМО, в отличие от классической, обозначим  $M^-/M^-/1$  и она не будет марковской, т.к. коэффициенты вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания  $c_\lambda < 1, c_\mu < 1$ .

Запишем преобразования Лапласа функций (3.1) и (3.2):

$$A^*(s) = \frac{\lambda e^{-t_0 s}}{s + \lambda}, \quad (3.3)$$

$$B^*(s) = \frac{\mu e^{-t_0 s}}{s + \mu}. \quad (3.4)$$

Воспользуемся свойством преобразования Лапласа воспроизводить моменты:

$$-\left. \frac{dA^*(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{\lambda^2 t_0 + \lambda}{\lambda^2} = \lambda^{-1} + t_0.$$

Отсюда среднее значение интервалов между соседними требованиями:

$$\bar{\tau}_\lambda = \lambda^{-1} + t_0. \quad (3.5)$$

Теперь определим начальный момент 2-го порядка интервалов поступления. Для этого находим значение второй производной от преобразования (3.3) при  $s=0$ . Тогда начальный момент 2-го порядка

$$\bar{\tau}_\lambda^2 = t_0^2 + \frac{2t_0}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}.$$

Коэффициент вариации интервалов входного потока будет равен

$$c_\lambda = (1 + \lambda t_0)^{-1}. \quad (3.6)$$

Аналогично поступим с распределением (3.2).

Находим среднее время обслуживания в системе

$$\bar{\tau}_\mu = \mu^{-1} + t_0, \quad (3.7)$$

а коэффициент вариации времени обслуживания

$$c_\mu = (1 + \mu t_0)^{-1} \quad (3.8)$$

Заметим, что коэффициенты вариации  $c_\lambda$  и  $c_\mu$  меньше единицы при  $t_0, \lambda, \mu > 0$  и поэтому имеем немарковскую модель массового обслуживания.

С помощью классического метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли будем искать преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания.

Спектральное разложение  $A^*(-s) \cdot B^*(s) - 1 = \frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)}$  с учетом преобразований

Лапласа (3.3) и (3.4) будет иметь вид:

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{\lambda e^{t_0 s}}{\lambda - s} \cdot \frac{\mu e^{-t_0 s}}{\mu + s} - 1, \quad \text{где } \psi_+(s) \text{ и } \psi_-(s) \text{ - должны быть}$$

рациональными функциями.

После несложных преобразований, получим

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{\lambda\mu - (\lambda - s)(\mu + s)}{(\lambda - s)(\mu + s)} = \frac{s(s + \mu - \lambda)}{(\lambda - s)(\mu + s)}. \quad (3.9)$$

Таким образом, показатели степени у экспонент в числителе дроби обнуляются и тем самым операция сдвига нивелируется.

При внимательном рассмотрении видно, что функция (3.9)

$$\frac{\psi_+(s)}{\psi_-(s)} = \frac{s(s + \mu - \lambda)}{(\lambda - s)(\mu + s)}$$

также является спектральным разложением для классической системы М/М/1. Здесь это совпадение чисто внешнее, т.к. параметры  $\lambda$  и  $\mu$  не являются для системы с запаздыванием интенсивностями поступления и обслуживания соответственно, в отличие от классической системы М/М/1.

Следуя работе [9], в качестве функции  $\psi_+(s)$  выбираем  $\psi_+(s) = \frac{s(s + \mu - \lambda)}{(\mu + s)}$ , которая не имеет нулей и полюсов в области  $\text{Re}(s) > 0$ , а в качестве функции  $\psi_-(s) = \lambda - s$ , которая не имеет нулей в области  $\text{Re}(s) < \lambda$ .

Постоянную  $K$  определяем из условия:

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\psi_+(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s + \mu - \lambda}{s + \mu} = 1 - \lambda/\mu, \text{ где параметры } \lambda \text{ и } \mu \text{ определяются}$$

выражениями (3.5) и (3.7) и отношение  $\lambda/\mu$  здесь не определяет коэффициент загрузки как в случае системы M/M/1.

Преобразование Лапласа для функции распределения времени ожидания, следуя [23] имеет вид:

$$\Phi_+(s) = \frac{K}{\psi_+(s)} = \frac{(1 - \lambda/\mu)(\mu + s)}{(s + \mu - \lambda)}, \text{ а преобразование Лапласа функции плотности}$$

$$W^*(s) = s\Phi_+(s) = \frac{(1 - \lambda/\mu)(\mu + s)}{(s + \mu - \lambda)}. \quad (3.10)$$

Найдем первую производную от функции (3.10):

$$\frac{dW^*(s)}{ds} = \frac{(1 - \lambda/\mu)(s + \mu - \lambda) - (1 - \lambda/\mu)(\mu + s)}{(s + \mu - \lambda)^2} = \frac{-\lambda(1 - \lambda/\mu)}{(s + \mu - \lambda)^2}.$$

Далее найдем среднее время ожидания через значение первой производной  $W^*(s)$  со знаком минус при  $s=0$ :

$$\bar{W} = \frac{\lambda/\mu}{\mu - \lambda} \quad (3.11)$$

Заметим, что коэффициенты вариации  $c_\lambda$  и  $c_\mu$ , определяемые (3.6) и (3.8) меньше единицы при  $t_0, \lambda, \mu > 0$ , в связи с чем мы имеем немарковскую модель массового обслуживания типа G/G/1. Среднее время ожидания требования в очереди в такой системе будет меньше, чем в системе M/M/1 при одинаковом коэффициенте загрузки, в связи с тем, что в системе G/G/1 среднее время связано с коэффициентами вариаций интервалов входного потока и времени обслуживания квадратичной зависимостью (2.1). Кроме того, использование функций плотности (3.1) и (3.2) позволяет аппроксимировать исходные

входные распределения на уровне двух первых моментов, в отличие от классической системы М/М/1.

Неизвестные параметры распределений (3.1) и (3.2) можем определить известным методом моментов:

$$\begin{cases} \lambda^{-1} + t_0 = \bar{\tau}_\lambda \\ (1 + \lambda t_0)^{-1} = c_\lambda \\ \mu^{-1} + t_0 = \bar{\tau}_\mu \\ (1 + \mu t_0)^{-1} = c_\mu \end{cases}, \quad (3.12)$$

где числовые характеристики в правых частях системы будут входными параметрами системы для определения неизвестных параметров.

Из выражений (3.6) и (3.8) следует, что коэффициенты вариаций  $c_\lambda$  и  $c_\mu$  будут меньше 1. Таким образом, операция сдвига в законе распределения трансформирует классическую марковскую СМО М/М/1 в не марковскую  $M^-/M^-/1$ .

Решение переопределенной системы (3.12) дает следующие значения неизвестных параметров:

$$\lambda = 1/(c_\lambda \bar{\tau}_\lambda), \quad \mu = 1/[\bar{\tau}_\mu - \bar{\tau}_\lambda (1 - c_\lambda)], \quad t_0 = \bar{\tau}_\lambda - \lambda^{-1} \quad (3.13)$$

Из уравнений (3.12) следует, что интенсивности поступления и обслуживания требований  $\lambda' = 1/\bar{\tau}_\lambda$ ,  $\mu' = 1/\bar{\tau}_\mu$  в СМО  $M^-/M^-/1$  определяется через параметры распределения (3.1) и (3.2):

$$\lambda' = \lambda/(1 + \lambda t_0) \quad (3.14)$$

$$\mu' = \mu/(1 + \mu t_0) \quad (3.15)$$

Таким образом, интенсивности поступления  $\lambda'$  и обслуживания  $\mu'$  в системе  $M^-/M^-/1$  напрямую зависят от интенсивностей  $\lambda$  и  $\mu$  классической системы М/М/1, а также параметра сдвига  $t_0$ . Тогда, для использования выражения (3.4) вычисления времени ожидания в системе  $M^-/M^-/1$  нужно вместо  $\lambda$  и  $\mu$  ставить  $\lambda'$  и  $\mu'$ , которые определяются выражениями (3.14) и (3.15).

Следовательно, «загрузка рассматриваемой системы, определяемая отношением интенсивностей поступления (3.14) и обслуживания (3.15), возросла в  $\frac{1+\mu t_0}{1+\lambda t_0}$  раз, по сравнению с системой М/М/1 [23]»

$$\rho = \frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\lambda(1+\mu t_0)}{\mu(1+\lambda t_0)}. \quad (3.16)$$

**Примечание.** Найденные преобразования Лапласа для трех моделей массового обслуживания, кроме среднего времени ожидания, позволяют также определить дисперсию времени ожидания. Учитывая определение джиттера в телекоммуникациях как разброс времени ожидания вокруг среднего значения, мы можем определить джиттер через дисперсию времени ожидания.

В качестве примера рассмотрим случай высокой нагрузки при параметрах:  $\bar{\tau}_\mu = 1$ ,  $\bar{\tau}_\lambda = \frac{10}{9}$  и  $c_\mu = 0.5$ . В этом случае получим загрузку  $\rho = 0.9$ , а ограничение дает значение  $c_\lambda = 0.55$ , а равенства (3.13) – значения  $\lambda = 18/11$  и  $\mu = 2$ .

Тогда среднее время ожидания по формуле (3.11)

$$\bar{W} = \frac{18/11/2}{2-18/11} = \frac{18 \cdot 11}{4 \cdot 22} = \frac{9}{4}.$$

Система М/М/1 при той же нагрузке дает  $\bar{W} = \frac{0.9/1}{1-0.9} = 9$ , т.е. в 4 раза большую задержку.

Таким образом, рассмотренная система массового обслуживания с запаздыванием позволяет рассчитать ее характеристики при коэффициентах вариации интервалов между поступлениями требований  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$ , меньших 1 при некоторых ограничениях на входные параметры системы [22].

Таблица 3.1. Результаты экспериментов

Входные параметры		Выходные характеристики		
$\rho$	$c_\mu$	$\bar{W}$ М/М/1	$D_W$	$\bar{W}$ М/М/1
0,1	0,1	0,0011	0,0002	0,11
	0,3	0,0100	0,0062	
	0,5	0,0278	0,0293	
	0,7	0,0544	0,0822	
	0,9	0,0900	0,1782	
0,3	0,1	0,0043	0,0009	0,43
	0,3	0,0386	0,0261	
	0,5	0,1071	0,1301	
	0,7	0,2100	0,3822	
	0,9	0,3471	0,8659	
0,5	0,1	0,0100	0,0022	1
	0,3	0,0900	0,0702	
	0,5	0,2500	0,3750	
	0,7	0,4900	1,1662	
	0,9	0,8100	2,7702	
0,7	0,1	0,0233	0,0058	2,33
	0,3	0,2100	0,2142	
	0,5	0,5833	1,2639	
	0,7	1,1433	4,2151	
	0,9	1,8900	10,5462	
0,9	0,1	0,0900	0,0342	9
	0,3	0,8100	1,7982	
	0,5	2,2500	12,3750	
	0,7	4,4100	45,0702	
	0,9	7,2900	119,4102	

### 3.2 Описание разработанного программного комплекса для оценки производительности компьютерных сетей

Результаты исследования СМО М/М/1 с запаздыванием во времени,  $H_2/M/1$  и  $H_2/H_2/1$  с гиперэкспоненциальными входными распределениями 2-го порядка легли в основу алгоритма разработанного программного комплекса

расчета характеристик СМО G/G/1, входные распределения которых имеют коэффициенты вариаций интервала между поступлениями требований и временами обслуживания меньше и больше 1, т.е. перекрывающими весь интервал  $(0, \infty)$ .

В качестве выходных характеристик использованы среднее время ожидания требований в очереди и дисперсия времени ожидания. Остальные характеристики рассматриваемых систем являются производными от среднего времени ожидания.

Алгоритмизация приведенных в работе методов расчета характеристик трех систем позволила получить эти характеристики для широкого диапазона изменения их параметров. В программе реализованы численные методы решения систем нелинейных уравнений Ньютона с учетом выше приведенных условий их разрешимости и кубических уравнений Виета-Кардано. При полном тестировании программы использованы параллельные вычисления в Mathcad [24]. На рис. 3.1 приведена укрупненная схема алгоритма программы [24].

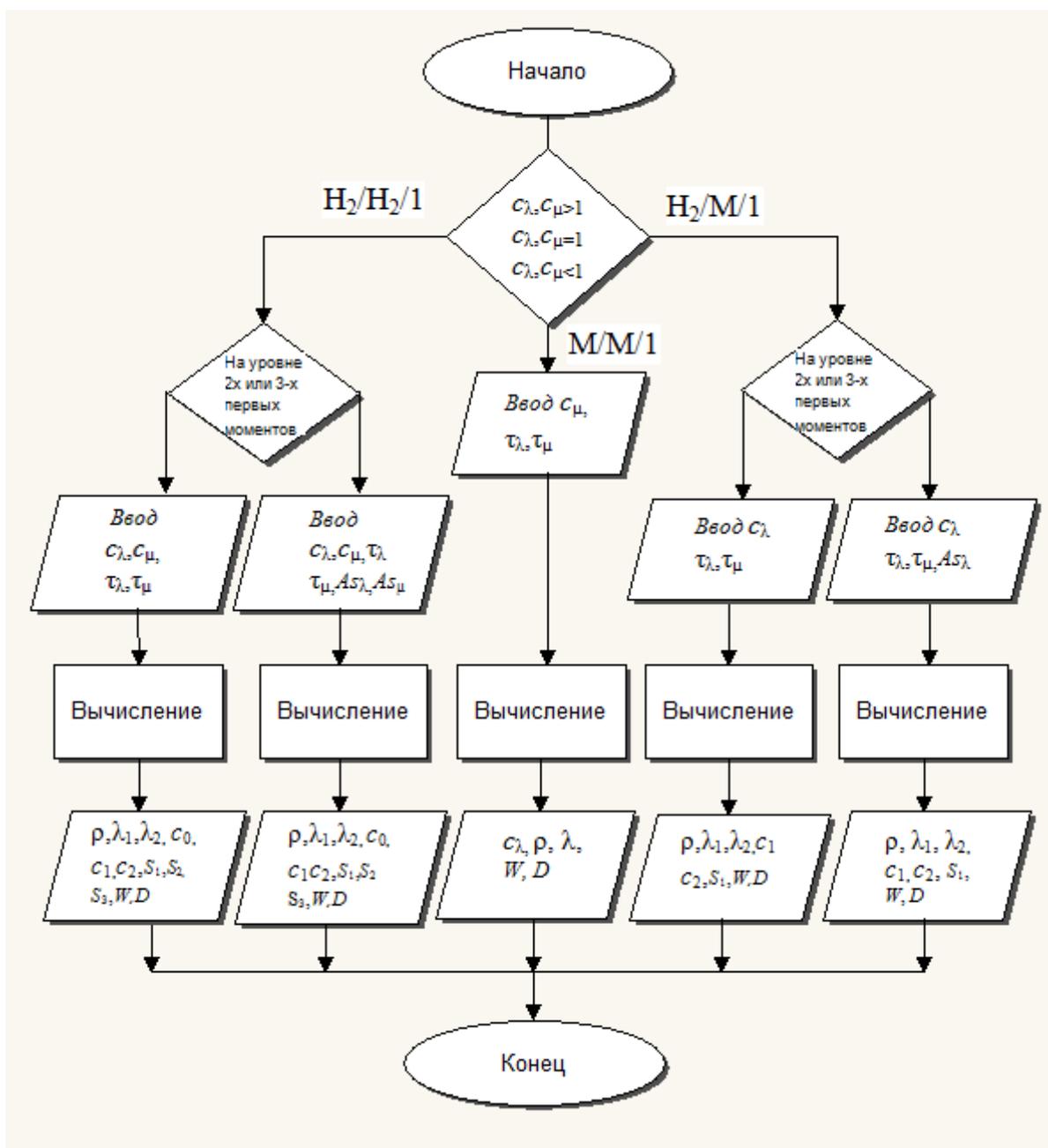


Рис.3.1 – Укрупненная схема алгоритма программы

При расчете характеристик для системы  $N_2/N_2/1$  на уровне двух и трех первых моментов, использовались следующие обозначения для входных параметров:  $\bar{\tau}_\lambda$  - среднее значение интервала между соседними требованиями входного потока;  $\bar{\tau}_\mu$  - среднее время обслуживания требований в системе;  $c_\lambda$  и  $c_\mu$  - коэффициенты вариаций интервала между соседними требованиями входного потока и времени обслуживания соответственно для 2-го момента;  $A_{s_\lambda}$  и  $A_{s_\mu}$  коэффициенты асимметрии интервала между соседними

требованиями входного потока и времени обслуживания в качестве 3-го момента. Сравнение среднего времени ожидания  $\bar{W}$  при аппроксимации гиперэкспоненциального закона распределения на уровне 2-х и 3-х моментов в многочисленных расчетах показало, что относительная погрешность между ними может достигать 10% [24].

На рис.3.2 представлена экранная форма расчета характеристик для системы  $H_2/H_2/1$  на уровне двух и на уровне трех первых моментов:

**Система  $H_2/H_2/1$**

**На уровне двух первых моментов**

Введите  $\tau_\lambda$   $\tau_\mu$   $c_\lambda$   $c_\mu$

10/9 1 2 2

Вычислить

Промежуточные параметры

$\lambda_1$  1.5971370023  $\lambda_2$  0.2028629976

$c_0$  0.0144  $c_1$  0.572  $c_2$  -0.2

$S_1$  -0.8517267921  $S_2$  -0.0249838396  $S_3$  0.6767106318

Выходные характеристики

$\rho$  0.9  $\bar{W}$  36.2000  $D$  1583.4490

**На уровне трех первых моментов**

Введите  $\tau_\lambda$   $\tau_\mu$   $c_\lambda$   $c_\mu$   $A_{S_\lambda}$   $A_{S_\mu}$

10/9 1 2 2 6 6

Вычислить

Промежуточные параметры

$\lambda_1$  1.5632628320  $\lambda_2$  0.1984392882

$c_0$  0.0132005432  $c_1$  0.5241919407  $c_2$  -0.1957446946

$S_1$  -0.8173305715  $S_2$  -0.0249793822  $S_3$  0.6465652590

Выходные характеристики

$\rho$  0.9  $\bar{W}$  36.1454  $D$  1583.2380

Рис.3.2 – Расчет характеристик для СМО  $H_2/H_2/1$ .

Отличие в значениях для среднего времени ожидания  $\bar{W}$  при аппроксимации гиперэкспоненциального закона распределения на уровне 2-х и 3-х моментов в данном примере не значительно, но относительная погрешность при других входных данных, как показали многочисленные расчеты, может достигать 10% [12].

При расчете характеристик для системы  $H_2/M/1$  использованы те же обозначения для входных параметров. Сравнение среднего времени ожидания  $\bar{W}$  при аппроксимации гиперэкспоненциального закона распределения на уровне 2-х и 3-х моментов в многочисленных расчетах показало, что

относительная погрешность между ними может превышать 10%, что уже существенно [24].

На рис.3.3 приведена экранная форма для расчета характеристик системы  $H_2/M/1$ . Здесь приняты аналогичные обозначения для входных параметров, что и на рис. 3.2.

Отличие в значениях среднего времени ожидания  $\bar{W}$  для системы  $H_2/M/1$  при аппроксимации гиперэкспоненциального закона распределения на уровне 2-х и 3-х моментов в этом случае также не значительно, но относительная погрешность при других входных данных может превышать 10%, что уже не маловажно [18].

**Система  $H_2/M/1$**

**На уровне двух первых моментов**

Введите  $\tau_\lambda$   $\tau_\mu$   $c_\lambda$

Промежуточные параметры

$\lambda_1$    $\lambda_2$

$c_1$    $c_2$

$S_1$

Выходные характеристики

$\rho$    $\bar{W}$    $D$

**На уровне трех первых моментов**

Введите  $\tau_\lambda$   $\tau_\mu$   $c_\lambda$   $A_{s\lambda}$

Промежуточные параметры

$\lambda_1$    $\lambda_2$

$c_1$    $c_2$

$S_1$

Выходные характеристики

$\rho$    $\bar{W}$    $D$

Рис.3.3 – Расчет характеристик для  $SMOH_2/M/1$

Многочисленные расчеты для системы  $M^- / M^- / 1$  продемонстрировали следующие результаты:

- операция сдвига во времени приводит к росту загрузки системы в  $(1 + \mu t_0) / (1 + \lambda t_0)$  раз, по сравнению с классической системой M/M/1;

- так как значения коэффициентов вариации интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  в системе M<sup>-</sup>/M<sup>-</sup>/1 меньше 1, среднее время ожидания требования в очереди в такой системе меньше, по сравнению с классической системой M/M/1 при одном и том же коэффициенте загрузки, поскольку время ожидания в системе G/G/1 связано квадратичной зависимостью с коэффициентами вариаций интервалов поступления и времени обслуживания.

- использование классической системы M/M/1 приводит к слишком оптимистичным результатам относительно времени ожидания.

Экранная форма для расчета характеристик системы M/M/1 с запаздыванием во времени приведена на рис.3.4.

Аппроксимация гиперэкспоненциаль...

**Система M/M/1 с запаздыванием**

Введите  $\tau_\lambda$   $\tau_\mu$   $0 < c_\mu < 1$

10 9 0,5

Вычислить

$c_\lambda$  0,55

$\rho$  0,9

$\lambda$  0,1818181818

$\mu$  0,2222222222

W 20,2500

D 1002,3750

Рис 3.4 – Расчет характеристик для СМО M/M/1 с запаздыванием во времени

Программа написана на языке C#, среда разработки Microsoft Visual Studio. Исходный код программы приведен в работе [25]. В программе реализованы численные методы решения систем нелинейных уравнений Ньютона и кубических уравнений Виета-Кардано. При выполнении полного тестирования программы использовались параллельные вычисления в Mathcad. Исполняемый файл занимает 61 кбайт.

## Выводы

1. При значениях коэффициентов вариации интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  меньше 1, можно использовать систему М/М/1 с запаздыванием. Операция сдвига во времени в случае системы М/М/1 с запаздыванием приводит к увеличению загрузки системы в  $\frac{1 + \mu t_0}{1 + \lambda t_0}$  раз, чем в классической системе М/М/1.

2. Так как значения коэффициентов вариации интервалов поступления  $c_\lambda$  и времени обслуживания  $c_\mu$  в этом случае меньше 1, мы получаем немарковскую модель массового обслуживания. Среднее время ожидания требования в очереди при одинаковом коэффициенте загрузки в такой системе меньше, чем в системе М/М/1.

3. В отличие от классической системы, использование функций плотности (3.1) и (3.2) позволяет аппроксимировать исходные входные распределения на уровне двух первых моментов, что с точки зрения теории вероятностей повышает точность результата.

4. Разработанный программный комплекс производит расчет характеристик систем массового обслуживания (СМО) G/G/1, входные распределения которых имеют коэффициенты вариаций интервала между поступлениями требований  $c_\lambda$  и временами обслуживания  $c_\mu$  меньше и больше 1, т.е. перекрывающие весь интервал  $(0, \infty)$ . В основу алгоритма программы положены результаты исследований СМО М/М/1 с запаздыванием во времени,  $H_2/M/1$  и  $H_2/H_2/1$  с гиперэкспоненциальными входными распределениями 2-го порядка. Среднее время ожидания требований в очереди и дисперсия времени ожидания являлись основными выходными характеристиками, оставшиеся характеристики исследуемых систем были производными от среднего времени ожидания.

## ГЛАВА 4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАФИКА НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ БАЛАНСА ПОТОКОВ

### 4.1 Постановка задачи.

Пусть имеется открытая сетевая модель с матрицей вероятностей передач  $\mathbf{P}=\{p_{ij}\}$ , ( $i, j = 1, \dots, n$ ), где  $p_{ij}$  – вероятность того, что требование, покидающее узел  $S_i$ , поступит в узел  $S_j$  (рис.4.1). Узел сети массового обслуживания может представлять собой в общем случае многоканальную (с равным доступом) систему G/G/m с бесконечной очередью. Мы же ограничимся случаем одноканальной системы G/G/1 и в качестве узлов такой сети мы будем рассматривать вышеприведенные СМО  $H_2/H_2/1$ ,  $H_2/M/1$ ,  $M/M/1$ .

«Решением системы уравнений равновесия потоков (4.1) относительно интенсивностей  $\lambda_i$  на входе и выходе каждой СМО сети в установившемся режиме определяем средние значения интервалов времен между соседними требованиями  $\bar{\tau}_i = \lambda_i^{-1}$  для каждого потока в сети:

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_{j=1}^n p_{ji} \lambda_j, (i=1, \dots, n), \quad (4.1)$$

где  $\lambda_{0i}$  - интенсивность внешнего потока в  $i$ -й узел. Система (4.1) – это уравнения баланса потоков на уровне первого момента распределения интервалов поступления требований в сеть массового обслуживания с учетом  $\bar{\tau}_i = \lambda_i^{-1}$ , позволяющие декомпозировать сеть на отдельные узлы. Уравнений (4.1) достаточно для декомпозиции и дальнейшего расчета марковской сети, но недостаточно – для немарковской сети» [26, с.78].

Для повышения точности расчетов немарковских сетей массового обслуживания требуются уравнения баланса потоков на уровне моментов высшего порядка распределения интервалов поступления требований. Это связано с непуассоновским характером потоков, циркулирующих в сети массового обслуживания. Вывод уравнений баланса сопряжен со многими проблемами и рассмотрим некоторые из них.

Из уравнений (4.1) и рис. 4.1 следует, что на входе  $i$ -го узла агрегируются (мультиплексируются) (знак  $\Sigma$ ) разреженные исходящие потоки ( $p_{ji}\lambda_j$ ) от других узлов.

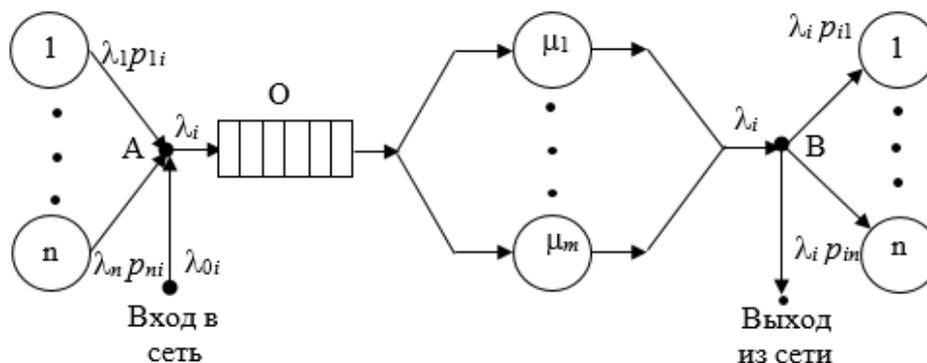


Рис. 4.1 – Структура  $i$ -й СМО сети

( $A$  - точка композиции потоков,  $B$  – точка декомпозиции потоков)

Таким образом, для вывода уравнений баланса на уровне моментов высшего порядка необходимы:

1) математические модели мультиплексирования и вероятностного разрежения потоков на уровне необходимого числа моментов случайного интервала между требованиями;

2) математическая модель исходящего потока на уровне необходимого числа моментов интервалов между требованиями входящего потока, а также времени обслуживания в узле.

Эти модели будут являться отправной точкой при выводе уравнений баланса потоков относительно моментов распределения интервалов для их последующего восстановления для использования СМО типа  $H_2/H_2/1$ ,  $H_2/M/1$ ,  $M^-/M^-/1$ .

Для каждого узла сети задаются числовые характеристики случайного времени обслуживания:  $(\bar{\tau}_{\mu i}, \overline{\tau_{\mu i}^2}, \overline{\tau_{\mu i}^3})$  – два или три первых начальных момента времени обслуживания в зависимости от рассмотренных выше случаев. Для внешнего потока задается совокупность таких же моментов  $(\bar{\tau}_{0i}, \overline{\tau_{0i}^2}, \overline{\tau_{0i}^3})$  времени между соседними требованиями потока, входящего в узел  $S_i$ .

Зная характеристики внешнего потока, ставится задача восстановления двух или трех первых начальных моментов интервалов между требованиями во всех потоках такой сетевой модели в зависимости от рассматриваемого случая. Далее воспользуемся результатами работы[26].

#### 4.2 Математическое мультиплексирование двух потоков.

Функция распределения интервала времени  $\tau_{\Sigma}$  результирующего потока при мультиплексировании двух потоков с интенсивностями  $\lambda_1 = \bar{\tau}_1^{-1}$  и  $\lambda_2 = \bar{\tau}_2^{-1}$  (рис.2) определяется следующим интегральным соотношением:

$$F_{\tau_{\Sigma}}(t) = 1 - \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \{ [1 - F_{\tau_1}(t)] \int_t^{\infty} [1 - F_{\tau_2}(u)] du + [1 - F_{\tau_2}(t)] \int_t^{\infty} [1 - F_{\tau_1}(u)] du \}. \quad (4.2)$$

Отсюда начальные моменты интервала времени  $\tau_R$  в результирующем потоке событий при агрегировании двух независимых потоков с интенсивностями  $\lambda_1 = \bar{\tau}_1^{-1}$  и  $\lambda_2 = \bar{\tau}_2^{-1}$  с функциями распределения вероятностей (ФРВ)  $F_{\tau_1}(t)$  и  $F_{\tau_2}(t)$  могут быть найдены следующим образом[26]:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_R &= 1/\lambda_{\Sigma}, \\ \bar{\tau}_R^2 &= 2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_{\Sigma}} \int_0^{\infty} g_1(t) \cdot g_2(t) dt, \\ \bar{\tau}_R^3 &= 6 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_{\Sigma}} \int_0^{\infty} t \cdot g_1(t) \cdot g_2(t) dt, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где функции  $g_j(t) = \int_t^{\infty} [1 - F_{\tau_j}(u)] du$ , а значение  $\lambda_{\Sigma} = \lambda_1 + \lambda_2$ .

Из выражений (4.3) следует, что «моменты интервалов между событиями результирующего потока, начиная со второго, нельзя выразить в элементарных функциях через моменты составляющих потока, кроме случая пуассоновских составляющих.

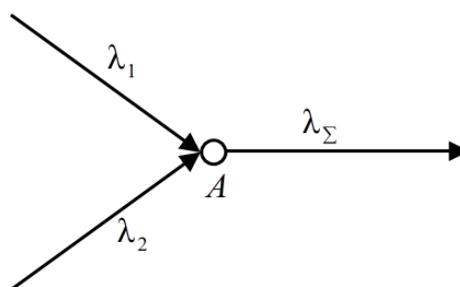


Рис. 4.2 – Мультиплексирование двух потоков

Следовательно для практического применения выражения (4.2) исходные неизвестные ФРВ  $F_{\tau_j}(t)$  интервалов, должны аппроксимироваться функцией смещенного экспоненциального распределения  $M^-$  в случае, когда коэффициенты вариаций составляющих  $c_{\lambda_j} < 1$  ( $j=1, 2$ )» [26]:

$$F_j(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau_{j1} \\ 1 - \exp\{-(t - \tau_{j1}) / \tau_{j2}\}, & t \geq \tau_{j1} \end{cases} \quad (4.4)$$

Здесь параметр  $\tau_{j1}$  соответствует параметру сдвига  $t_0$  в СМО  $M^-/M^-/1$ , а  $\tau_{j2} = \lambda_{j2}^{-1}$ . В случае  $c_{\lambda_j} \geq 1$  исходные функции распределений аппроксимируются гиперэкспоненциальным распределением 2-го порядка  $H_2$ :

$$F_j(t) = 1 - p_j \exp(-t / \tau_{j1}^*) - (1 - p_j) \exp(-t / \tau_{j2}^*). \quad (4.5)$$

В функции (4.5) параметры  $\tau_{j1}^* = \lambda_{j1}^{-1}$ ,  $\tau_{j2}^* = \lambda_{j2}^{-1}$ . В смешанном случае, одна функция аппроксимируется (4.4), а другая – (4.5). Тогда задача определения начальных моментов случайного интервала между событиями в результирующем потоке по выражениям (4.3) сводится к вычислению табличных интегралов.

Задавая исходные агрегируемые потоки на уровне начальных моментов интервалов между событиями в потоках, неизвестные параметры ФРВ (4.4) и (4.5) находятся известным методом моментов.

Тогда при аппроксимации потоков на уровне 2-х первых моментов получаем следующие значения неизвестных параметров (4.4) и (4.5):

$$\begin{aligned}
 \tau_{j1} &= \bar{\tau}_j - \sqrt{\tau_j^2 - \bar{\tau}_j^2}; \\
 \tau_{j1} &= \sqrt{\tau_j^2 - \bar{\tau}_j^2}; \\
 \tau_{j1}^* &= \bar{\tau}_j / (2p_j); \\
 \tau_{j2}^* &= \bar{\tau}_j / [2(1 - p_j)]; \\
 p_j &= 1/2 \pm \sqrt{1 - 2 \cdot \bar{\tau}_j^2 / \tau_j^2}; \quad (j=1, 2).
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Аппроксимация потоков распределением  $H_2$  на уровне 3-х моментов потребует уже решения системы 3-х уравнений.

Уравнение для определения начальных моментов распределения (4.5):

$$\begin{aligned}
 p_j \cdot \tau_{j1}^* + (1 - p_j) \cdot \tau_{j2}^* &= \bar{\tau}_j, \\
 2p_j \cdot (\tau_{j1}^*)^2 + 2(1 - p_j) \cdot (\tau_{j2}^*)^2 &= \bar{\tau}_j^2, \\
 6p_j \cdot (\tau_{j1}^*)^3 + 6(1 - p_j) \cdot (\tau_{j2}^*)^3 &= \bar{\tau}_j^3,
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

решив которые находим искомые параметры распределения (4.5). При этом выше было отмечено, что для существования единственного решения системы (4.7) должно соблюдаться условие  $\bar{\tau}_j^3 \cdot \bar{\tau}_j \geq 1,5 \cdot \bar{\tau}_j^2$ .

### 4.3 Вероятностное разрежение потока.

Как отмечено в [26,с.103], «при вероятностном разрежении потока со средним значением  $\bar{\tau}$  и дисперсией  $D_\tau$  времени между событиями (точка  $B$  на рис. 4.3), в которой требования с вероятностью  $p \neq 0$  уходят из потока

(просеянный поток 2) среднее значение и дисперсия времени между соседними событиями в разреженном потоке 2 равны:

$$\bar{\tau}_p = \bar{\tau} / p, \quad (4.8)$$

$$D_{\tau_p} = D_{\tau} / p + \bar{\tau}^2 q / p^2, \quad (4.9)$$

где вероятность  $q = 1 - p$ . Выражения (4.8) и (4.9) получены следующим образом. Рассмотрим поток событий с параметрами  $(\bar{\tau}, D_{\tau})$ , где  $\bar{\tau}, D_{\tau}$  - среднее значение и дисперсия времени между соседними событиями, как последовательность случайных точек  $\{t_i\}$  на оси времени  $0t$ .

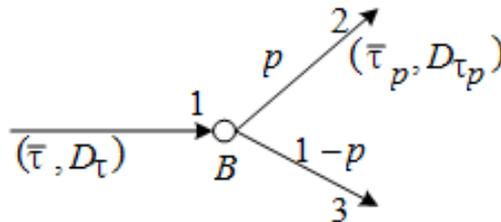


Рис. 4.3 – Вероятностное разрежение потока

Случайные интервалы времени между ними обозначим соответственно через  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ . При разрежении потока 1 случайный интервал времени в потоке 2 -  $\tau_p$  равен:  $\tau_1$  - с вероятностью  $p$ ;  $(\tau_1 + \tau_2)$  - с вероятностью  $pq$ ;  $(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)$  - с вероятностью  $pq^2$  и т.д.» [26, с.103]. Выражение для величины  $\tau_p$  будет выглядеть следующим образом:

$$\tau_p = \begin{cases} \tau_1 \text{ с вероятностью } p, \\ (\tau_1 + \tau_2) \text{ с вероятностью } pq, \\ (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \text{ с вероятностью } pq^2, \\ \dots \\ (\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_i) \text{ с вероятностью } pq^{i-1}, \\ \dots \end{cases} \quad (4.10)$$

Согласно [26], «математическое ожидание величины  $\tau_p$  с учетом того

факта, что поток рекуррентный т.е.  $M(\tau_i) = M(\tau)$ ,  $M(\tau_i^2) = M(\tau^2)$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} M(\tau_p) &= M(\tau) \cdot p \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot q^{i-1} = pM(\tau) \times (q + q^2 + q^3 + \dots)'_q = pM(\tau) \left( \frac{q}{1-q} \right)'_q = \\ &= pM(\tau) \frac{1}{(1-q)^2} = M(\tau) / p. \end{aligned}$$

Для определения дисперсии  $D_{\tau_p}$  вычислим второй начальный момент

$M(\tau_p^2)$ :

$$\begin{aligned} M(\tau_p^2) &= p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} [kM(\tau^2) + (k^2 - k)(M(\tau))^2] \times q^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} [kD_{\tau} + k^2(M(\tau))^2] q^{k-1} = \\ &= pD_{\tau} \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} + p \cdot (M(\tau))^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = D_{\tau} / p + (1+q) \cdot (M(\tau))^2 / p^2. \end{aligned}$$

Из полученных равенств для  $M(\tau^2)$  и  $M(\tau_p)$  следует справедливость выражений (4.8) и (4.9)» [26,с.104]. Таким образом, можно определить при необходимости и 3-й начальный момент интервала в разреженном потоке, однако это потребует больших усилий по сравнению с вычислением 2-го начального момента.

Опираясь на [26] , «после определения математических операций мультиплексирования и демуплексирования потоков, по аналогии с уравнениями равновесия потоков на уровне их средних значений (4.1), запишем уравнения равновесия относительно их дисперсий. Для этого повторно отметим, что на входе в  $i$ -й узел в общем случае агрегируются (мультиплексируются) разреженные (демуплексированные) выходные потоки  $\Pi_{ij}$  от  $j$ -го узлов ( $j=0,1,2,\dots, n$ ). Дисперсии времен между событиями этих потоков, полученные по формуле (31) равны:

$$D_{\Pi_{ji}} = \frac{1}{p_{ji}} (D_{\text{вых } j} + \frac{1-p_{ji}}{p_{ji} \cdot \lambda_j^2}), \quad (i, j=1,2,\dots,n). \quad (4.11)$$

Тогда уравнения равновесия потоков на уровне дисперсий времен между событиями на входе и выходе  $i$ -го узла сетевой модели можно записать в виде уравнений:

$$D_{\text{вх}i} = D(\Pi_{0i} * (\Pi_{1\text{ВЫХ},i} * \dots * (\Pi_{n-1\text{ВЫХ},i} * \Pi_{n\text{ВЫХ},i}))). \quad (4.12)$$

Выражение  $D(\Pi_{j-1\text{ВЫХ},i} * \Pi_{j\text{ВЫХ},i})$  означает операцию вычисления дисперсии попарно мультиплексируемых по формулам (4.6) выходных потоков от  $(j-1)$ -го ( $\Pi_{j-1,i}$ ) и  $j$ -го узлов ( $\Pi_{ji}$ ), поступающих на вход  $i$ -го узла. В выражении (4.12) дисперсию интервала между событиями в потоке  $\Pi_{0i}$ , поступающего на вход  $i$ -го узла от внешнего источника обозначим через  $D_{0i}$ » [26, с.109].

#### 4.4 Определение характеристик выходного потока

Согласно [26,27], «числовые характеристики выходного потока из СМО могут быть определены по следующим выражениям:

$$\bar{\tau}_{\text{ВЫХ}} = \bar{\tau}_{\mu} + p'_0 \bar{\tau}'_{\lambda}, \quad (4.13)$$

$$D_{\text{ВЫХ}} = D_{\mu} + p'_0 D'_{\lambda} + p'_0(1-p'_0)(\bar{\tau}'_{\lambda})^2, \quad (4.14)$$

где  $p'_0$  - вероятность того, что обслуженное требование оставляет СМО пустой,  $\bar{\tau}'_{\lambda}$  и  $D'_{\lambda}$  - среднее значение и дисперсия остаточного времени  $\bar{\tau}'_{\lambda}$ , в течение которого СМО ожидает поступления непосредственно следующего требования, т.е. времени простоя СМО» [26]. Вывод выражений (4.13) и (4.14) основан на следующих фактах. Обращаясь к [26], «рассмотрим моменты времени  $t_1$  ухода очередного требования из СМО и  $t_2$  - ухода непосредственно следующего требования. Случайная величина  $\Delta = t_2 - t_1$  зависит от состояния СМО в момент ухода очередного требования. Если в момент времени  $t_1$  СМО окажется занятой, то величина  $\Delta$  будет равна времени обслуживания  $\tau_{\mu}$  непосредственно следующего требования. Если же в момент времени  $t_1$  СМО окажется пустой, то величина  $\Delta$  будет равна сумме времени обслуживания  $\tau_{\mu}$

и остаточного времени  $\tau'_\lambda$ . Тогда можем записать следующие выражения для случайной величины  $\Delta$  и ее квадрата  $\Delta^2$  по аналогии с законом распределения вероятностей:

$$\Delta = \begin{cases} \tau_\mu & \text{с вероятностью } 1-p'_0 \\ (\tau_\mu + \tau'_\lambda) & \text{с вероятностью } p'_0; \end{cases}$$

$$\Delta^2 = \begin{cases} \tau_\mu^2 & \text{с вероятностью } 1-p'_0 \\ (\tau_\mu + \tau'_\lambda)^2 & \text{с вероятностью } p'_0. \end{cases}$$

Отсюда переходя к математическому ожиданию и дисперсии величины  $\Delta$  и, учитывая, что  $M(\tau_{\text{вых}}) = M(\Delta)$  и  $D_{\text{вых}} = M(\Delta^2) - [M(\Delta)]^2$  после преобразований получим формулы (4.13) и (4.14)» [26, с.134-135]. Входящую сюда вероятность  $p'_0$  принимаем за константу  $K$  из метода спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли для каждого типа рассмотренных СМО.

При необходимости числовые характеристики выходного потока также можно определить включительно до 3-го момента.

Система (4.12) в совокупности с (4.11) и являются уравнениями равновесия потоков в сети МО на уровне дисперсий интервалов времени для их восстановления. Решение уравнений (4.1) и (4.12) вместе с выражениями для дисперсий выходных потоков (4.14) представляет собой основу метода баланса потоков, который дает возможность декомпозировать сети массового обслуживания на уровне двух первых моментов распределений вероятностей, т.е. определить средние значения и дисперсии интервалов времени между требованиями в потоках, циркулирующих в сети в условиях стационарного режима.

В стационарном случае, система уравнений (4.1) имеет единственное решение, т.к. ее определитель не равен нулю. Система (4.12) совместно с (4.11) решается методом итераций. Как отмечено в [26], «при решении многих задач

из области сетевых технологий, а именно: при определении загрузки каналов или других ресурсов сети, а также при определении задержек «источник-адресат» в сетях связи, в матрице вероятностей передач  $P=\{p_{ij}\}(i,j=1,\dots,n)$ , элементы  $p_{ij}$  принимают значения в основном 0 и 1» [26, с.34]. В связи с этим, системы уравнений (4.1) и (4.12) становятся хорошо обусловленными и для достижения 1% относительной погрешности решения достаточно 3-4-х итераций.

Ниже на рис. 4.5 – 4.7 и в таблицах 4.1 – 4.7 приведены расчеты для эталонной сети массового обслуживания, состоящей из 3-х узлов (рис. 4.4) для случаев коэффициентов вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания больших, равных и меньших 1. Представленная сеть МО как видно из рис. 4.4 включает узлы композиции и декомпозиции потоков.

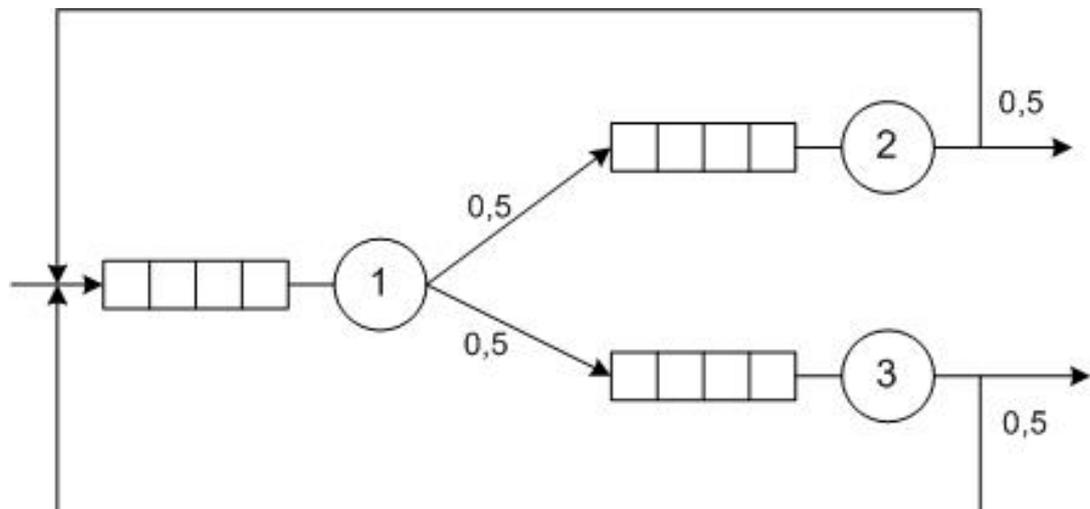


Рис.4.4 – Трехузловая модель сети МО

Таблица 4.1. Матрица вероятностей передач

	Узел 1	Узел 2	Узел 3
Узел 1	0	0,5	0,5
Узел 2	0,5	0	0
Узел 3	0,5	0	0

Таблица 4.2. Исходные данные обработки заявок для сети МО в случае  $c_\lambda = 2, c_\mu = 2$ 

Обработка заявок		
	Интенсивность обслуживания	Коэффициент вариации
Узел 1	4	2
Узел 2	2	2
Узел 3	2	2

Таблица 4.3. Исходные данные поступления заявок для сети МО в случае  $c_\lambda = 2, c_\mu = 2$ 

Поступление заявок		
	Интенсивность поступления	Коэффициент вариации входного потока
Узел 1	1	2
Узел 2	0	0
Узел 3	0	0

**Узловые характеристики:**

Характеристики/Узлы	1	2	3
Интенсивность потока	2,0	1,0	1,0
Загрузка	0,500	0,500	0,500
Ср. время ожидания	0,920	1,560	1,560
Ср. длина очереди	1,839	1,560	1,560
Ср. задержка (время отклика)	1,170	2,060	2,060
Ср. число заявок	2,339	2,060	2,060

**Сетевые характеристики:**

Ср. время ожидания	Ср. задержка (время отклика)	Ср. длина очереди	Производительность
4,958	6,458	4,958	6,458

**Время расчета: 0,265 с**

Рис. 4.5 – Результаты расчетов характеристик сети МО в случае  $c_\lambda = 2, c_\mu = 2$

Таблица 4.4. Исходные данные обработки заявок для сети МО в случае  $c_\lambda = 1, c_\mu = 1$

Обработка заявок		
	Интенсивность обслуживания	Коэффициент вариации
Узел 1	4	1
Узел 2	2	1
Узел 3	2	1

Таблица 4.5. Исходные данные поступления заявок для сети МО в случае  $c_\lambda = 1, c_\mu = 1$

Поступление заявок		
	Интенсивность поступления	Коэффициент вариации входного потока
Узел 1	1	1
Узел 2	0	0
Узел 3	0	0

**Узловые характеристики:**

Характеристики/Узлы	1	2	3
Интенсивность потока	2,0	1,0	1,0
Загрузка	0,500	0,500	0,500
Ср. время ожидания	0,249	0,498	0,498
Ср. длина очереди	0,498	0,498	0,498
Ср. задержка (время отклика)	0,499	0,998	0,998
Ср. число заявок	0,998	0,998	0,998

**Сетевые характеристики:**

Ср. время ожидания	Ср. задержка (время отклика)	Ср. длина очереди	Производительность
1,494	2,994	1,494	2,994

Время расчета: 0,078 с

Рис. 4.6 – Результаты расчетов характеристик сети МО в случае  $c_\lambda = 1, c_\mu = 1$

Таблица 4.6. Исходные данные обработки заявок для сети МО в случае  $c_\lambda = 0,5, c_\mu = 0,5$

Обработка заявок		
	Интенсивность обслуживания	Коэффициент вариации
Узел 1	4	0,5
Узел 2	2	0,5
Узел 3	2	0,5

Таблица 4.7. Исходные данные поступления заявок для сети МО в случае  $c_\lambda = 0,5, c_\mu = 0,5$

Поступление заявок		
	Интенсивность поступления	Коэффициент вариации входного потока
Узел 1	1	0,5
Узел 2	0	0
Узел 3	0	0

**Узловые характеристики:**

Характеристики/Узлы	1	2	3
Интенсивность потока	2,0	1,0	1,0
Загрузка	0,500	0,500	0,500
Ср. время ожидания	0,097	0,233	0,233
Ср. длина очереди	0,194	0,233	0,233
Ср. задержка (время отклика)	0,347	0,733	0,733
Ср. число заявок	0,694	0,733	0,733

**Сетевые характеристики:**

Ср. время ожидания	Ср. задержка (время отклика)	Ср. длина очереди	Производительность
0,660	2,160	0,660	2,160

Время расчета: 0,078 с

Рис. 4.7 – Результаты расчетов характеристик сети МО в случае  $c_\lambda = 0,5, c_\mu = 0,5$

О точности предложенного подхода по приведенным примерам можно судить по таблицам. 4.4 – 4.5 и рис. 4.6, где специально представлен случай марковской сети, т.е.  $c_\lambda = 1, c_\mu = 1$ .

В этом случае мы можем использовать СМО М/М/1, для которой среднее время ожидания дается формулой  $\bar{W} = \frac{\rho/\mu}{1-\rho}$ . Для узла 1 получаем  $\bar{W} = 0,25$ , а эксперимент показывает 0,249; для узлов 2,3  $\bar{W} = 0,5$ , а эксперимент дает 0,498. Небольшая погрешность возникает за счет аппроксимации потоков гиперэкспоненциальным законом распределения.

#### 4.5 Марковские (экспоненциальные) сети массового обслуживания

«Рассмотрим класс сетей, состоящий из систем массового обслуживания, в которых требования переходят из одной СМО в другую некоторым случайным образом до тех пор, пока они не покинут систему в какой-либо точке сети. Пусть имеется сеть с  $N$  узлами, в  $i$ -м узле которой находится в общем случае СМО с одной очередью и  $m_i$  приборами, время обслуживания в каждом из которых распределено по экспоненциальному закону со средним значением  $1/\mu_i$ . В  $i$ -й узел поступает извне (по отношению к сети) поток требований из независимого пуассоновского источника с интенсивностью  $\gamma_i$  требований в секунду. После обслуживания в  $i$ -м узле требование переходит в следующий  $j$ -й узел с вероятностью  $p_{ij}$ ; таким образом, это требование поступает в  $j$ -й узел изнутри (по отношению к сети массового обслуживания). При уходе из  $j$ -го узла, требование может покинуть сеть с вероятностью  $1 - \sum_{j=1}^N p_{ij}$ .

Система уравнений для определения интенсивностей  $\lambda_i$  имеет вид» [9]:

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^N \lambda_j p_{ji}. \quad (4.15)$$

При известной матрице вероятностей перехода требований от одного узла к другому  $\mathbf{P}=\{p_{ij}\}$  эта система линейных алгебраических уравнений легко решается из-за хорошей обусловленности системы.

Через  $p(k_1, k_2, \dots, k_N)$  определим состояние сети, где:

- $p_1(k_1)$  - вероятность, что в 1-м узле расположено  $k_1$  требований;
- $p_2(k_2)$  - вероятность, что во 2-м узле расположено  $k_2$  требований и т.д.

Отсюда вероятность состояния сети:

$$p(k_1, k_2, \dots, k_N) = p_1(k_1) p_2(k_2) \dots p_N(k_N).$$

Для СМО  $M/M/m$  известно решение под названием формулы Эрланга:

$$p_k = \begin{cases} p_0 \frac{(mp)^k}{k!}, & k \leq m, \\ p_0 \frac{m^m p^k}{m!}, & k \geq m, \end{cases} \quad (4.16)$$

где

$$p_0 = \left[ \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(mp)^k}{k!} + \frac{(mp)^m}{m!(1-p)} \right]^{-1} \quad (4.17)$$

В случае одноканальной СМО  $M/M/1$  среднее время ожидания требования в очереди дается известной формулой

$$\bar{W} = \frac{\rho/\mu}{1-\rho}, \quad (4.18)$$

а среднее время пребывания требования в системе

$$\bar{T} = \frac{1/\mu}{1-\rho} \quad (4.19)$$

Здесь  $\rho = \lambda/\mu$  - коэффициент загрузки СМО.

«На рисунке 4.15, среднее время пребывания в системе, как функция коэффициента загрузки  $\rho$ . При приближении  $\rho$  к единице (снизу) средние задержки и длины очередей растут неограниченно. Это справедливо по существу

для любой СМО, которая может встретиться, и показывает ту высокую цену, которую нужно платить за использование системы в режиме, близком к ее пропускной способности ( $\rho=1$ ).

Для удобства применения систему уравнений (4.15) приводят к каноническому виду с вводом нулевого узла для внешнего источника заявок. Тогда система уравнений примет следующий вид» [9]:

$$\left. \begin{aligned} (p_{00} - 1)\gamma_0 + p_{10}\lambda_1 + \dots + p_{n0}\lambda_n &= 0 \\ p_{01}\gamma_0 + (p_{11} - 1)\lambda_1 + \dots + p_{n1}\lambda_n &= 0 \\ \dots & \\ p_{0n}\gamma_0 + p_{1n}\lambda_1 + \dots + (p_{nn} - 1)\lambda_n &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4.20)$$

а матрица вероятностей передач заявок:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n0} & p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

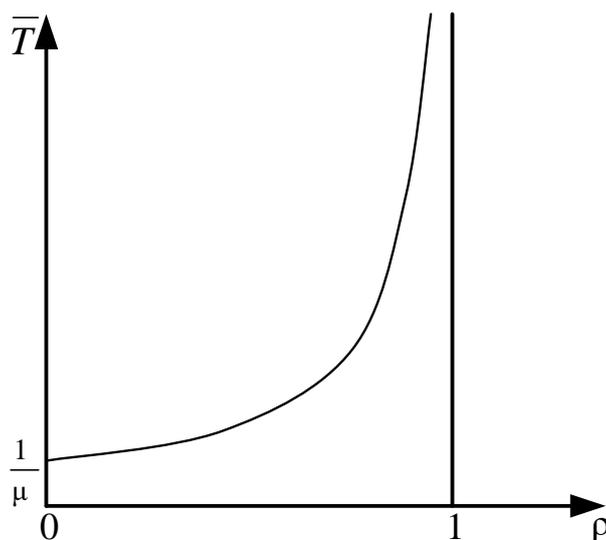


Рисунок 4.8 – Средняя задержка как функция  $\rho$  для системы  $M/M/1$

«При расчете характеристик таких сетевых моделей кроме характеристик

узлов, важно знать и характеристики сети в целом. Для их определения вычисляют т.н. коэффициенты передачи требований через известные значения интенсивностей потоков к  $i$ -у узлу сети  $\lambda_i$  и потока требований из независимого пуассоновского источника с интенсивностью  $\gamma = \sum_{i=1}^N \gamma_i$  требований в секунду  $\alpha_i = \lambda_i / \gamma$ .

Тогда характеристики сети в целом определяются следующим образом:

$$\bar{N}_q^c = \sum_{i=1}^N \bar{N}_{qi} - \text{среднее число требований, ожидающих обслуживания в сети;}$$

$$\bar{N}^c = \sum_{i=1}^N \bar{N}_i - \text{среднее число требований, пребывающих в сети;}$$

$$\bar{W}^c = \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{W}_i - \text{среднее время ожидания требований в сети;}$$

$$\bar{U}^c = \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{U}_i - \text{среднее время пребывания требований в сети;}$$

где  $N$  – число узлов сети массового обслуживания.

В качестве примера рассмотрим открытую сеть массового обслуживания, граф передачи требований которой представлен на рисунке 4.9.

Эта модель состоит из четырех узлов  $S_1-S_4$ , причем в  $i$ -ом узле находится экспоненциально обслуживающие приборы, для каждого из которых среднее время обслуживания равно  $1/\mu_i$  секунд. Внешний пуассоновский источник  $S_0$  генерирует поток требований, поступающих в  $i$ -й узел с интенсивностью  $\gamma_i$  требований в секунду (штриховые входящие линии на рис 4.2). После обслуживания в  $i$ -м узле требование поступает в узел  $j$  с вероятностью  $p_{ij}$  или покидает сеть с вероятностью  $1 - \sum_{j=1}^4 p_{ij}$  (штриховые исходящие линии)»[9].

Для приведенного примера вероятности передач требований заданы матрицей:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \begin{matrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1/8 & 0 & 5/8 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

а интенсивности внешнего источника  $\gamma=(1,0,5,2)$ .

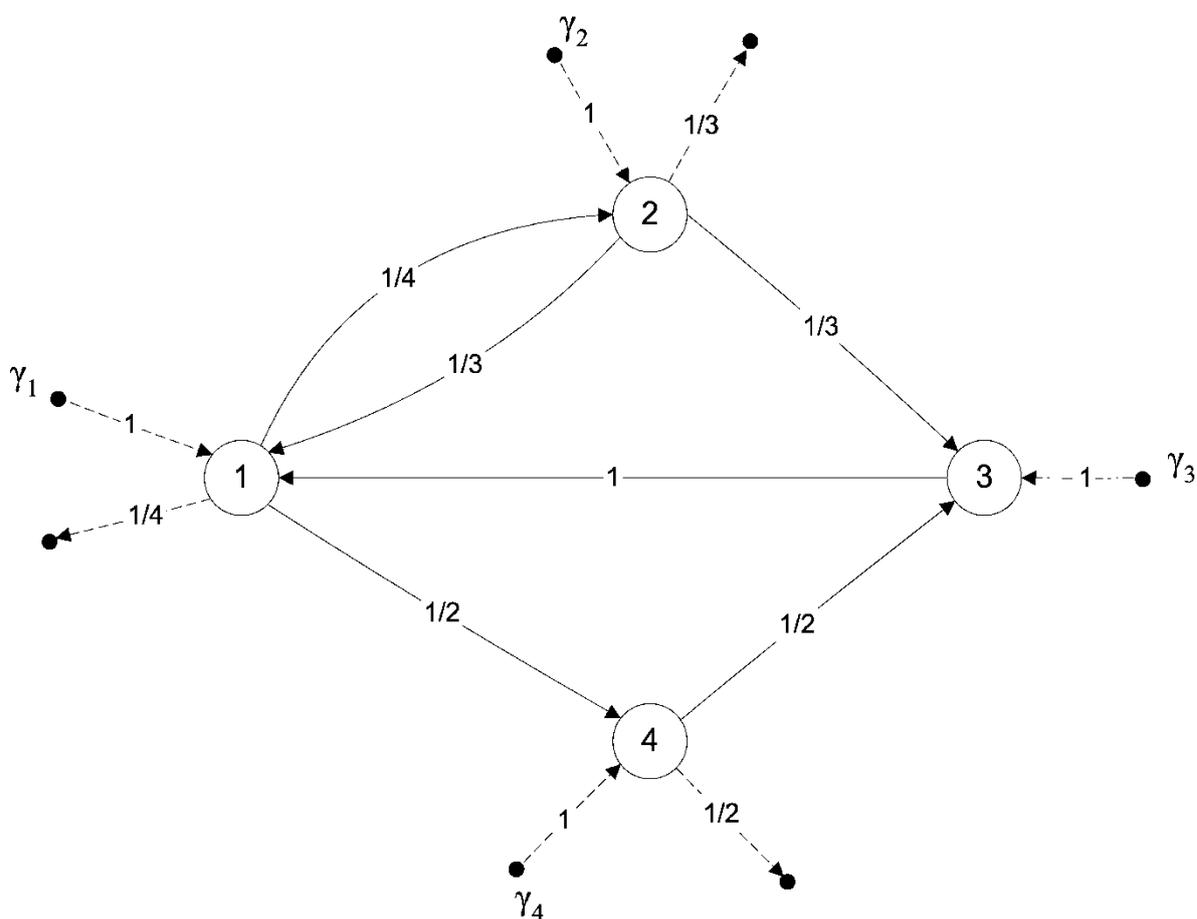


Рисунок 4.9 – Пример открытой сети массового обслуживания (у ребер графа указаны значения  $p_{ij}$ )

Укрупненная схема алгоритма программы расчета характеристик сети массового обслуживания приведена на рисунке 4.10.

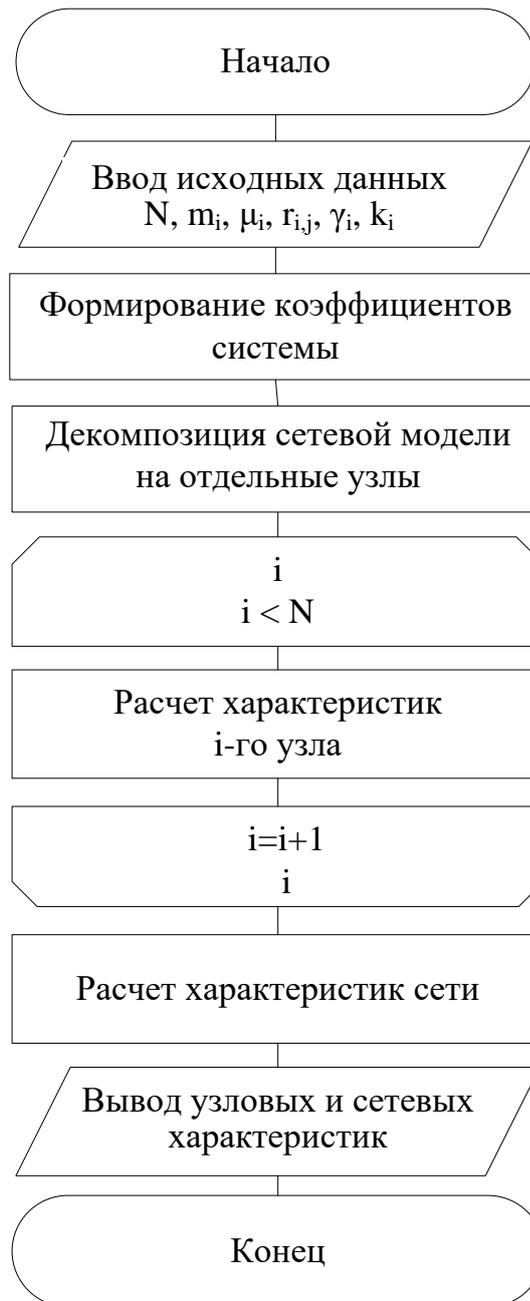


Рисунок 4.10 – Укрупненная схема алгоритма расчета характеристик сети массового обслуживания

В таблицах 4.8 – 4.9 приведены расчеты сети массового обслуживания, приведенной на рис.4.9 [28].

Таблица 4.8. Результаты расчета выходных характеристик узлов сети массового обслуживания

	$R_0$	$W$	$N_q$	$N$	$P[1]$	$P[2]$	$P[3]$
Узел 1	0,571	0,0635	0,762	1,33	0,429	0,245	0,14
Узел 2	0,13	0,00652	0,0196	0,15	0,87	0,113	0,0148
Узел 3	0,667	0,133	1,33	2	0,333	0,222	0,148
Узел 4	0,5	0,0625	0,5	1	0,5	0,25	0,125

Таблица 4.9. Результаты расчета выходных сетевых характеристик сети массового обслуживания в целом

<b>Характеристика</b>	<b>Показатель</b>
Среднее число заявок в очереди	2,61
Среднее число заявок в сети	4,48
Среднее время заявок в сети	0,327
Среднее время пребывания заявок в сети	0,56

Все расчеты выполнены на основе приведенных выше формул.

### **Выводы.**

1. Приведены уравнения баланса потоков сети массового обслуживания для восстановления числовых характеристик распределений интервалов в потоках для последующего применения предложенных СМО.

2. Представленные математические модели операции мультиплексирования (агрегирования) двух и более потоков, позволяют определить точно среднее значение и приближенно дисперсию распределения интервалов между событиями в результирующем потоке.

3. Разработанные модели математического агрегирования и демультимплексирования потоков в совокупности дают возможность получить уравнения их равновесия относительно средних значений и дисперсий распределений интервалов времени между соседними заявками в сетях МО для произвольных законов поступления и обслуживания.

4. Приведенные уравнения равновесия позволяют декомпозировать сети МО общего вида на отдельные узлы с возможностью дальнейшего расчета их характеристик. Чтобы решить эти уравнения, необходимы средние значения и дисперсии распределения интервалов времени в выходных потоках узлов, а также умение рассчитывать характеристики СМО общего вида  $G/G/1$ .

5. Результаты, приведенные в 4-й главе, продемонстрированы в расчетах фрагмента сети массового обслуживания, состоящей из трех узлов, при коэффициентах вариаций интервалов поступлений и времени обслуживания больших, равных и меньших 1.

## ГЛАВА 5. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ К АНАЛИЗУ ЛВС

Для практического применения результатов предыдущих глав, рассмотрим локальную вычислительную сеть как сегмента любой корпоративной сети: это может быть сегмент сети предприятия, организации, ВУЗа и т.п. (рис.5.1).

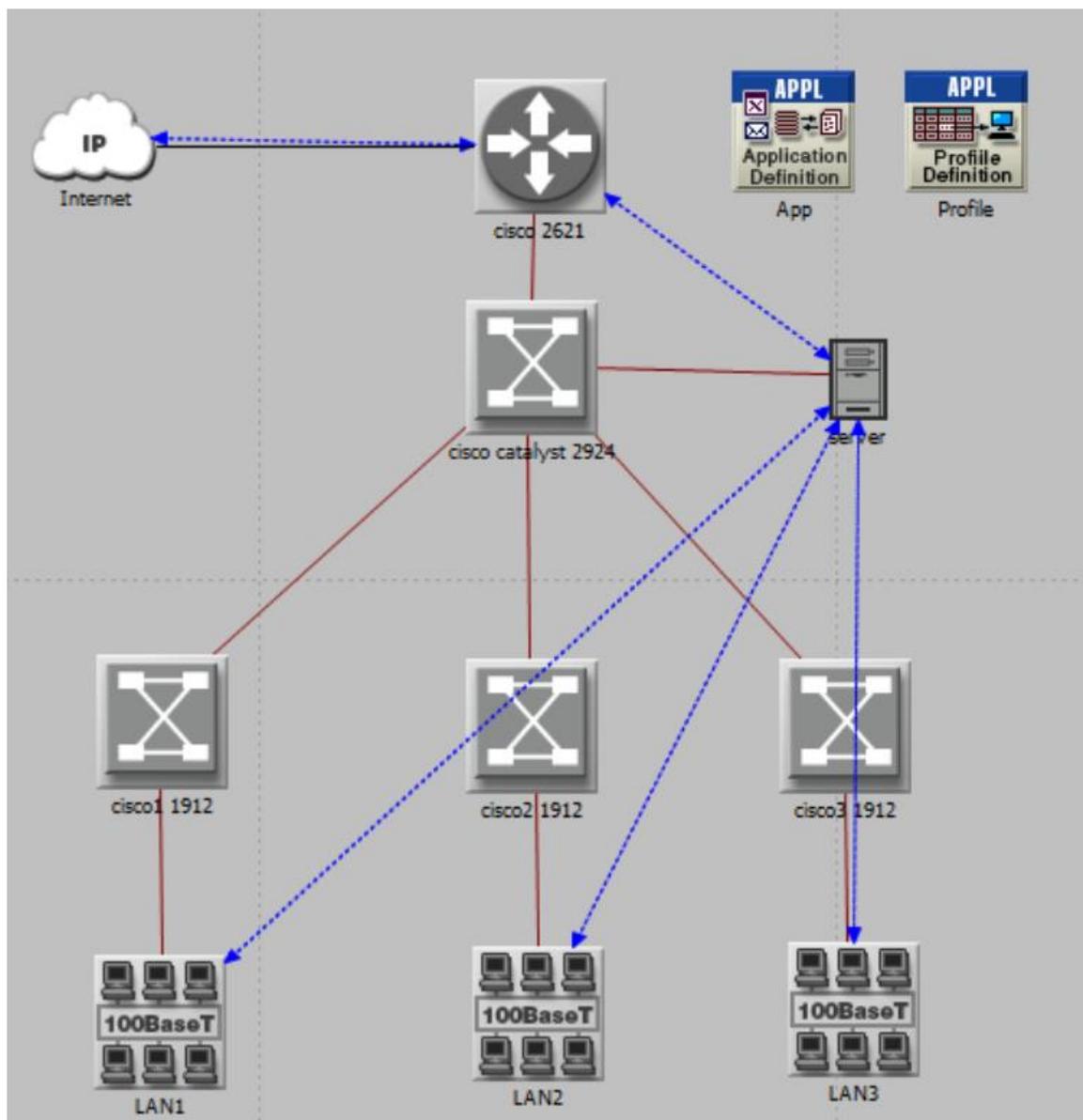


Рис.5.1 – Логическая схема сети в ресурсах программной системы Riverbed Modeler с отображением трафика

Модель сети включает: маршрутизатор Cisco 2621, сервер(Server), 45 рабочих станций (по 15 в каждом помещении), 4 коммутатора (Cisco catalyst

2924, три Cisco 1 1912) и три подсети (LAN1, LAN2, LAN3), отображающие работу отделов с 15 рабочими станциями в каждой подсети.

Каналы передачи данных: Internet↔ Cisco 2621 от провайдера – 40 Мбит/с, все остальные каналы 100 BaseT, т.е. 100 Мбит/с. Как обычно, в ЛВС используются следующие виды приложений: FTP, Email, Database, HTTP и др. Сервер ЛВС установлен на небольшой функционал: поддержка рабочих станций, доставка электронной почты, использование БД, широковещательная рассылка MAC адресов рабочих станций для того, чтобы рабочие станции в сети были прозрачными и др.

Учитывая тот факт, что таких сегментов в корпоративной сети может быть несколько или даже десятки, и все они привязаны к каналу Internet↔ Cisco 2621 от провайдера, то более всего будет загружен именно этот канал, а внутренние каналы так и будут слабо загруженными, как, например, в сетях ВУЗов. Тем не менее, такие сегменты сетей в виде отдельных ЛВС обычно строятся с большим запасом производительности.

**Поставим следующую задачу:** определить нагрузки (utilization) на все каналы передачи в сети и задержку пакетов (Ethernet Delay) путем имитационного моделирования, а затем сравнить полученные результаты с результатами аналитического моделирования по предложенным в предыдущих главах методам.

### **5.1 Моделирование сети в системе Riverbed Modeler**

При работе с любым проектом в системе Riverbed Modeler, как и с любой программой, необходимо задать исходные данные. Входящий Internet трафик определим в 600 пакетов/с, где в качестве длины пакета возьмем 763 байта – ровно половину максимальной длины Ethernet кадра в 1526 байт. Это будет справедливо в связи с тем, что в сети будут и короткие и длинные пакеты. С учетом того, что подсети LAN1, LAN2, LAN3 симметричные в смысле равенства в них рабочих станций (по 15), на них придется по 200 пакетов/с.

Исходящий от подсетей трафик определим в 450 пакетов/с, по 150 пакетов/с от каждой подсети.

Для проведения имитационного моделирования вначале необходимо провести настройку каналов передачи данных. На рис.5.2 показана настройка канала Internet↔ Cisco 2621 от провайдера – 40 Мбит/с.

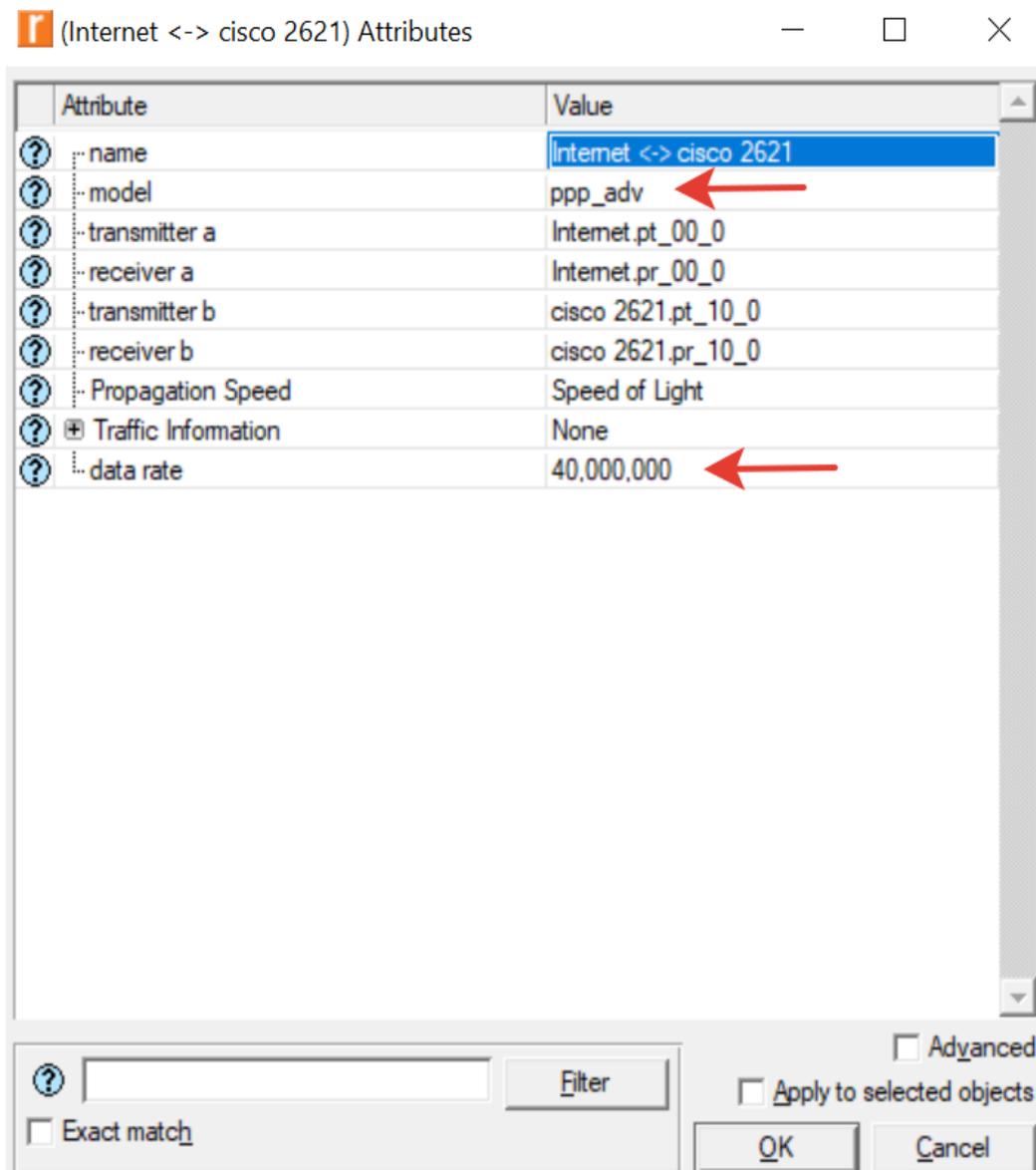


Рис. 5.2 – Настройка канала Internet↔ Cisco 2621 от провайдера – 40 Мбит/с

Далее прописываем все остальные каналы передачи данных на 100 Мбит/с (рис.5.3) и все приложения сети, включая протоколы взаимодействия

(рис.5.4 – 5.12). Все эти этапы до единого обязательны при имитационном моделировании.

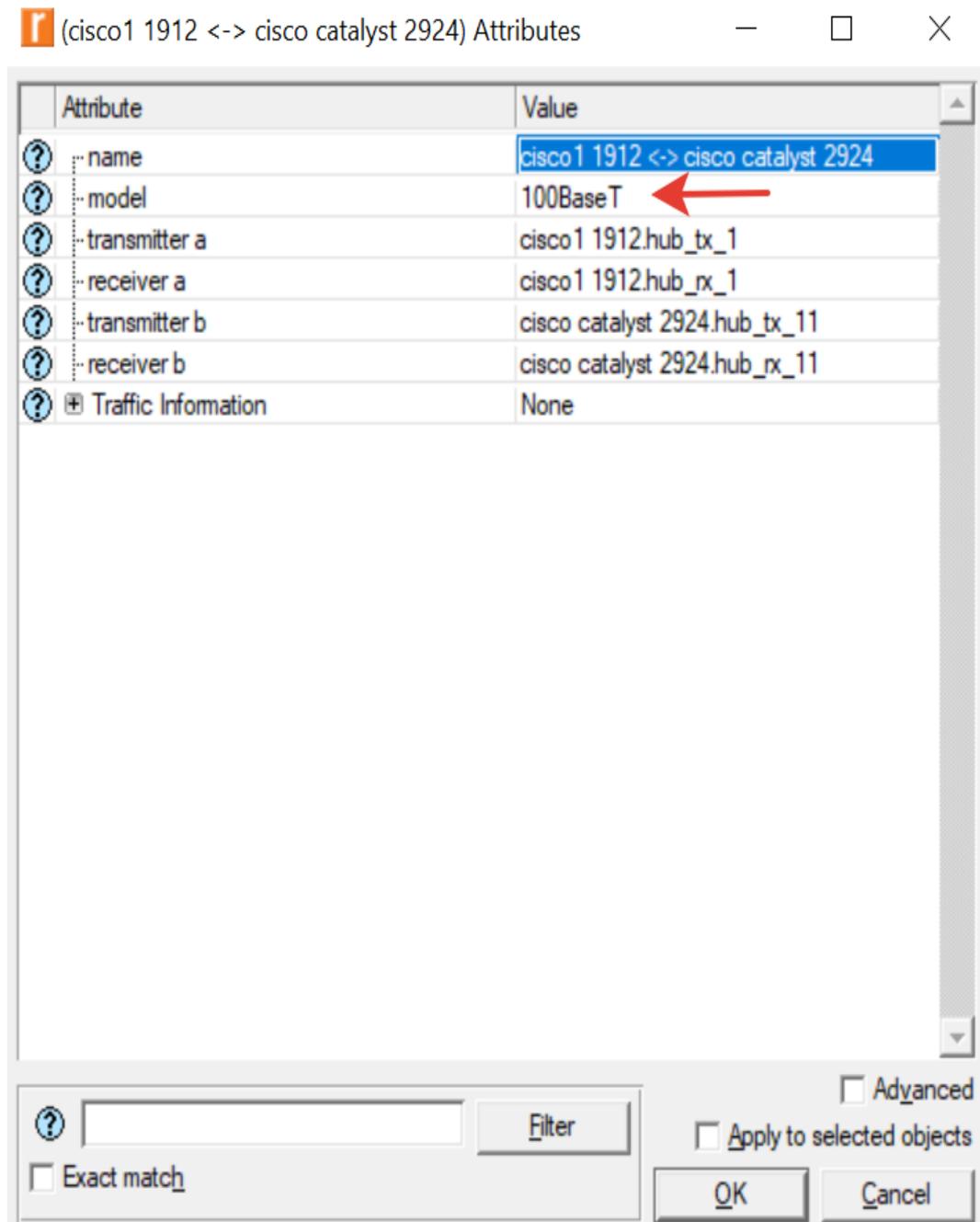


Рис.5.3 – Настройка каналов на 100 Мбит/с

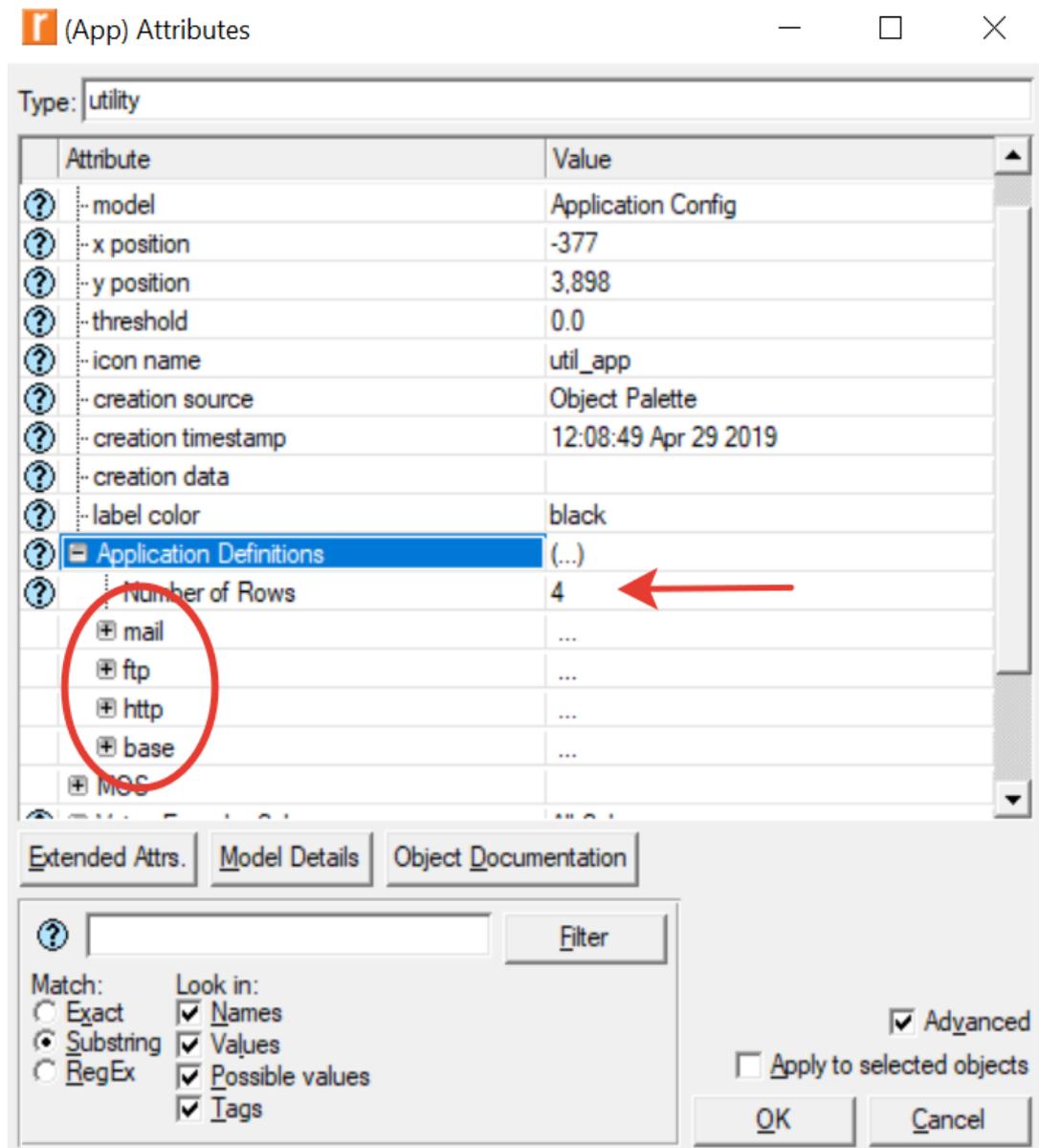


Рис. 5.4 – Добавление приложений в проект

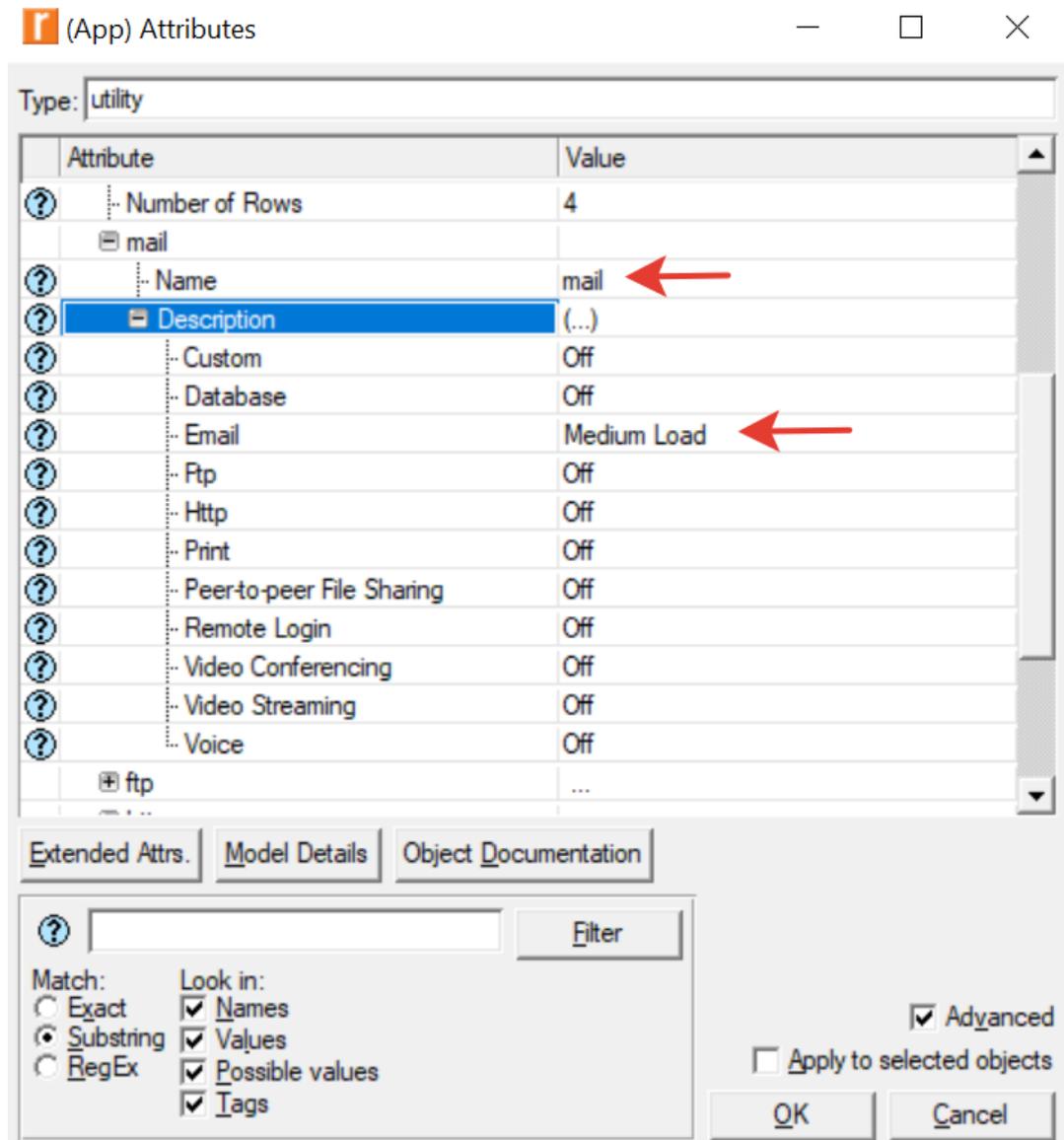


Рис.5.5 – Настройка приложения электронной почты

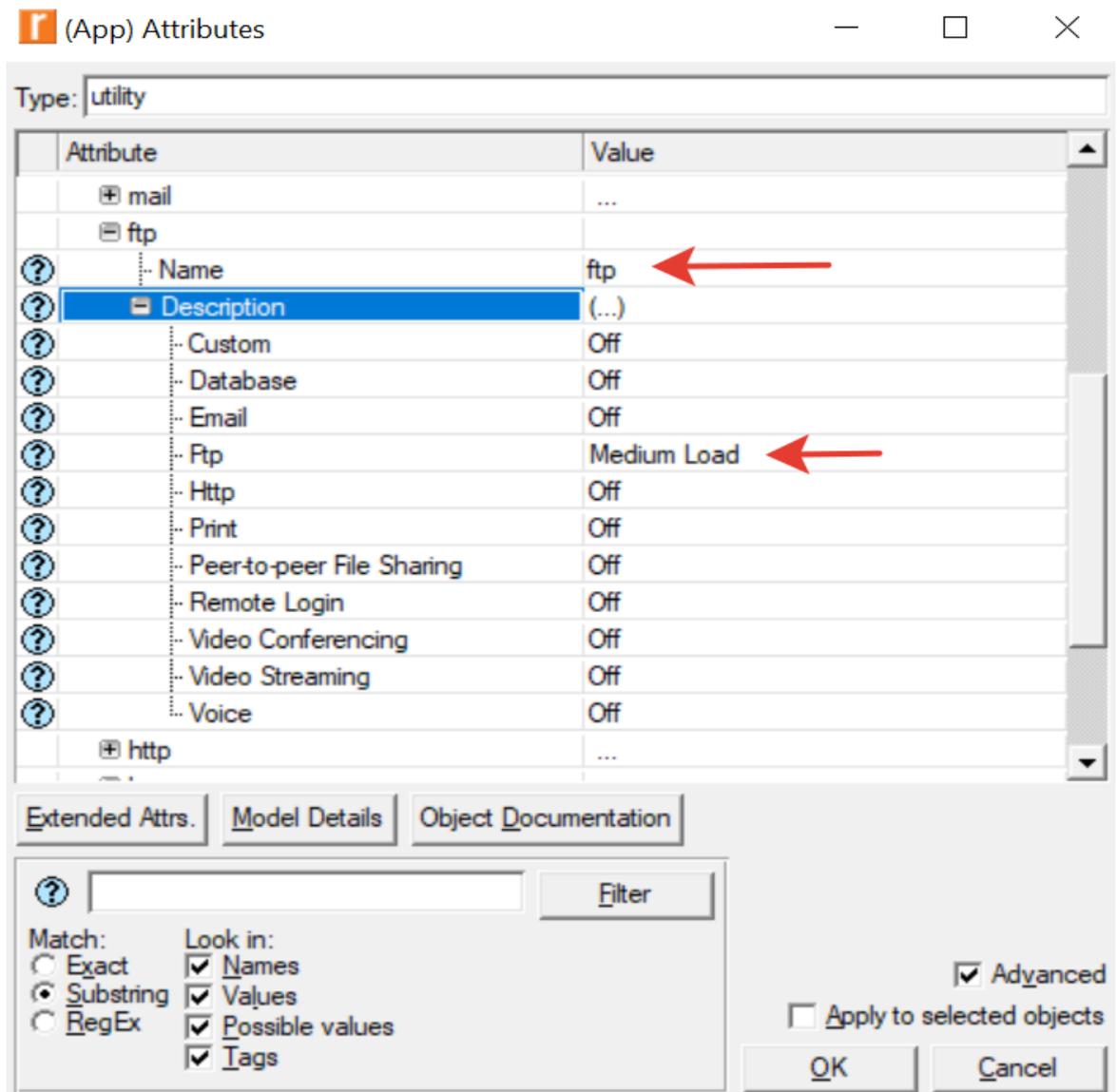


Рис. 5.6 – Настройка приложения для протокола Ftp

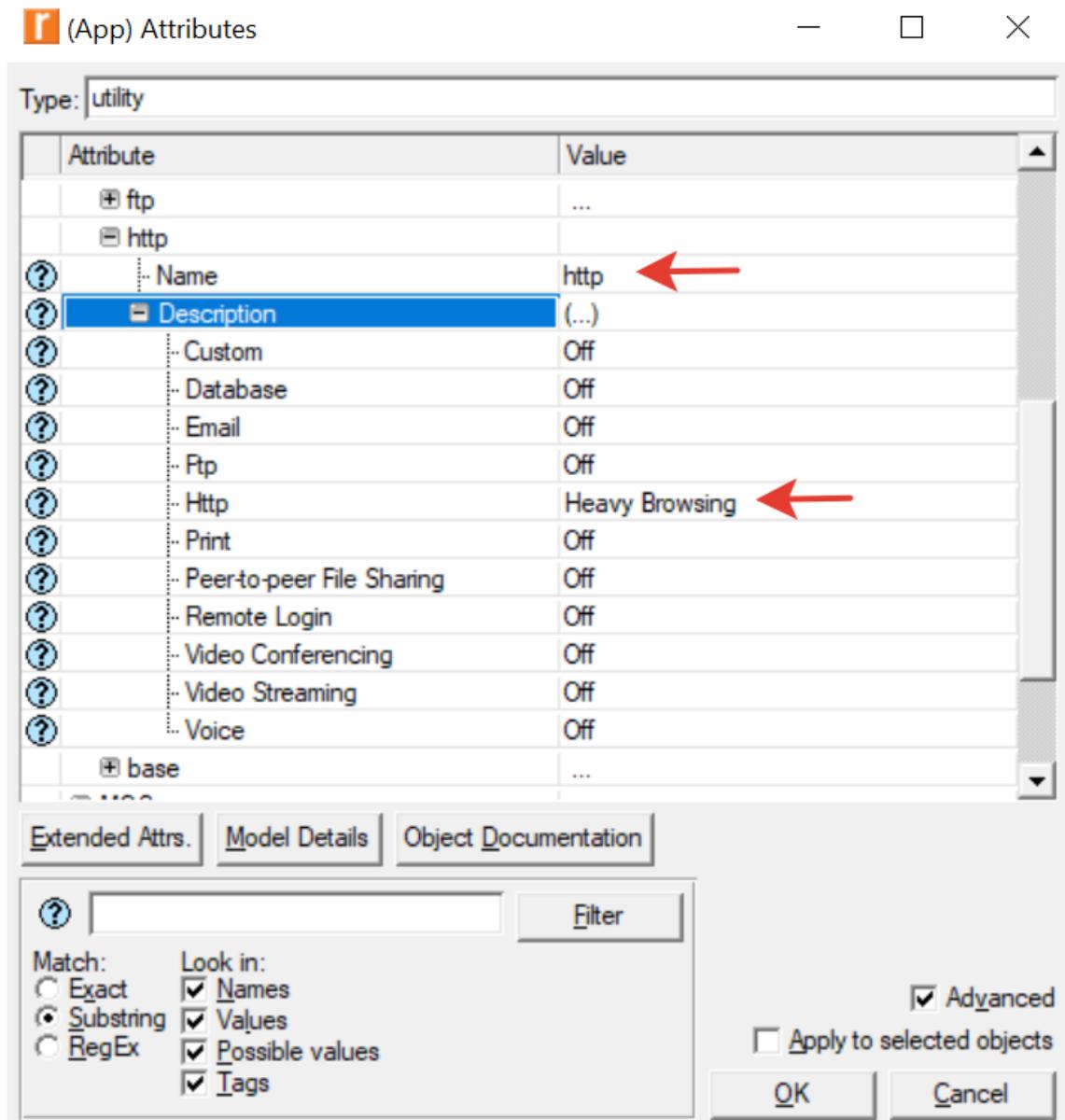


Рис. 5.7 – Настройка приложения для протокола Http

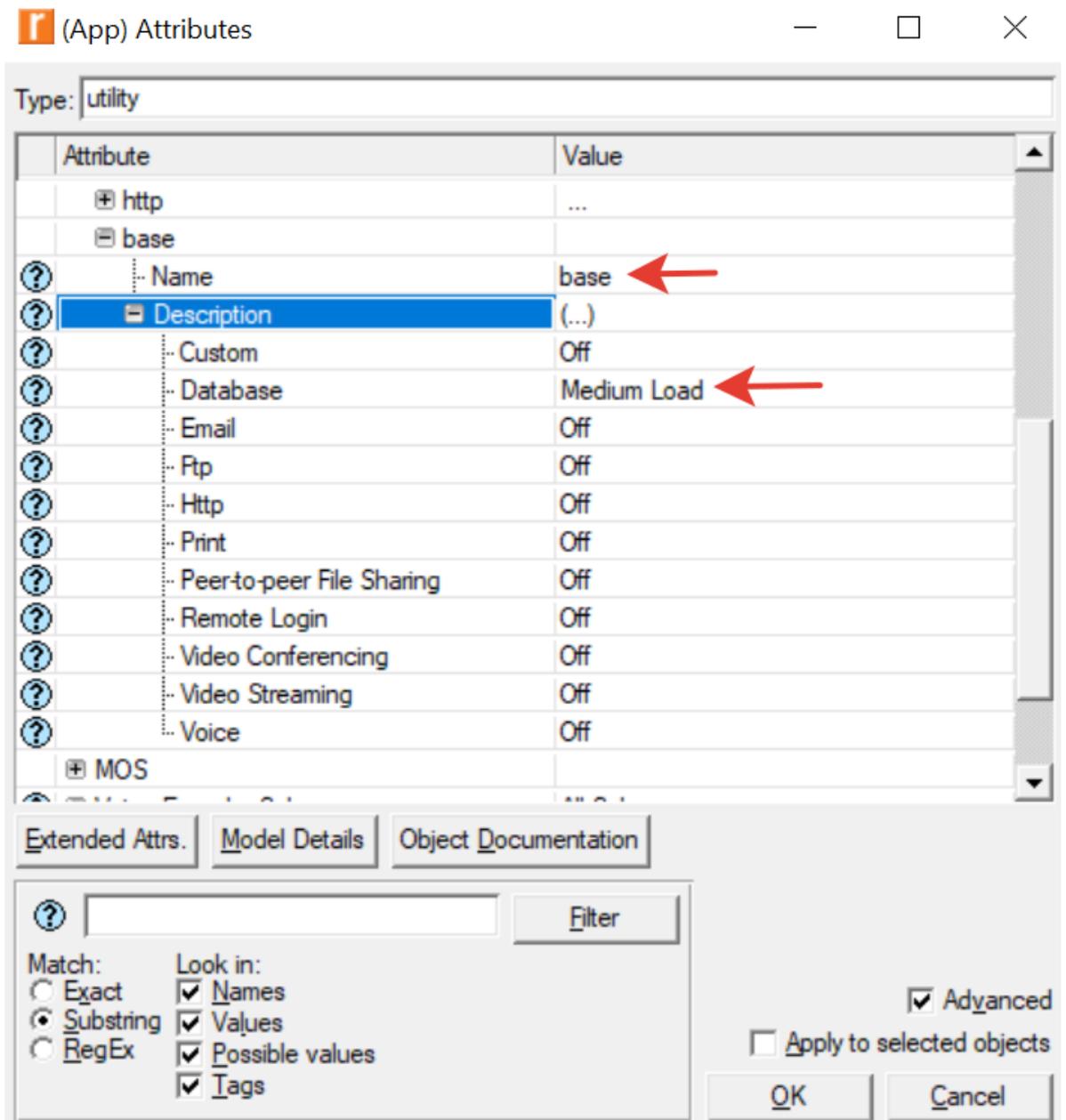


Рис. 5.8 – Настройка приложения для базы данных

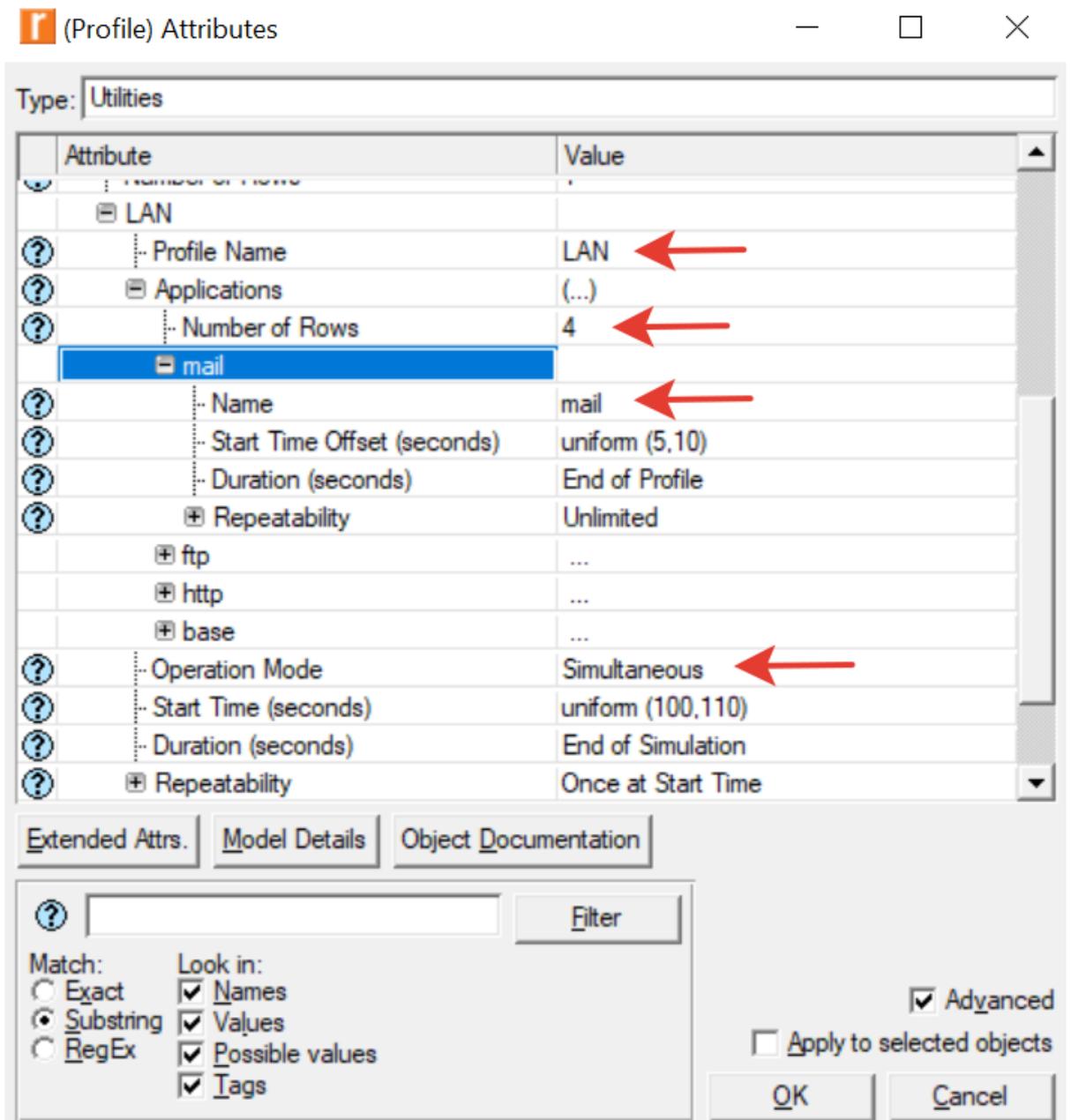


Рис. 5.9 – Общая настройка профиля для всех приложений

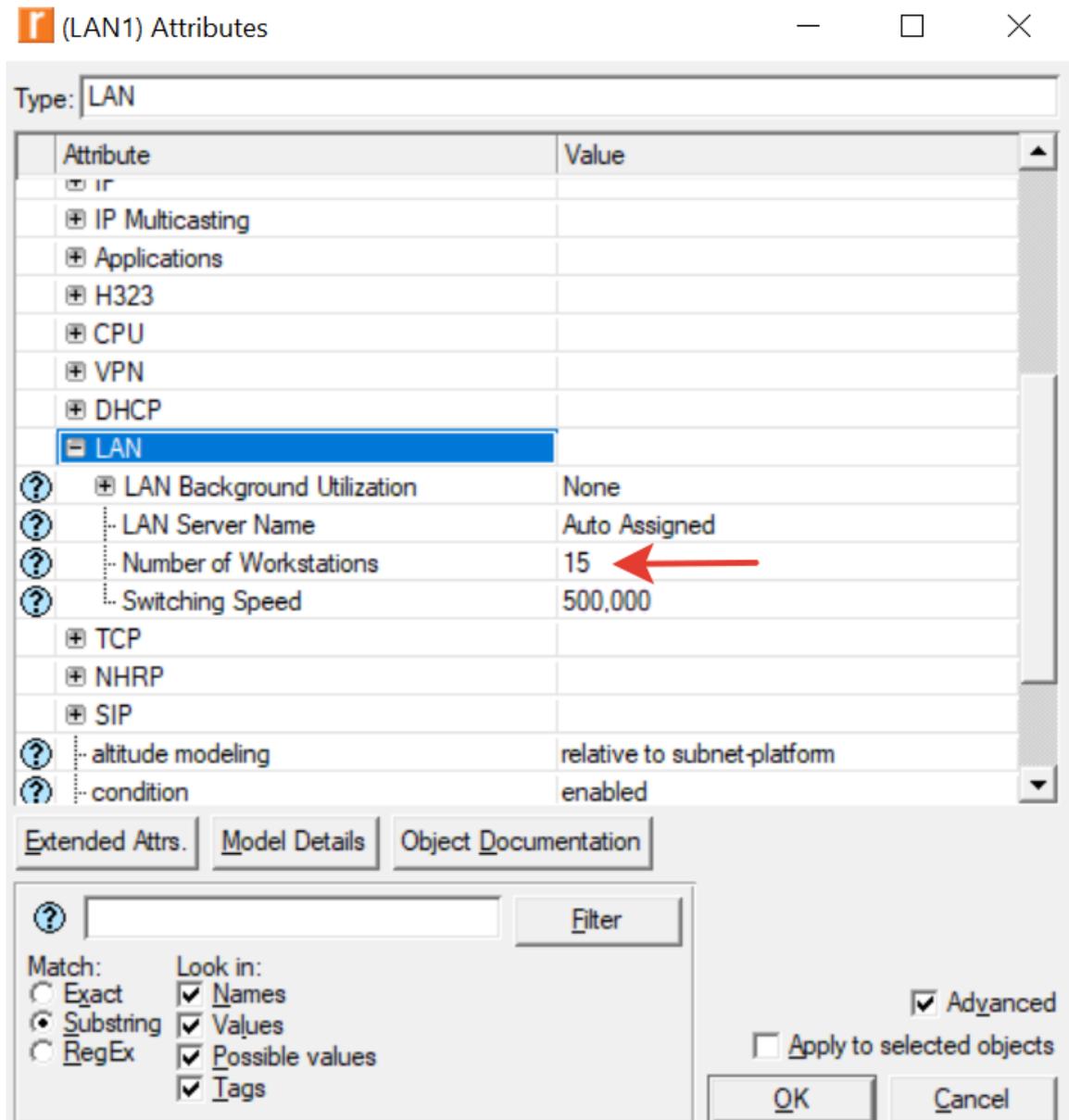


Рис. 5.10 – Установка количества рабочих станций в подсетях

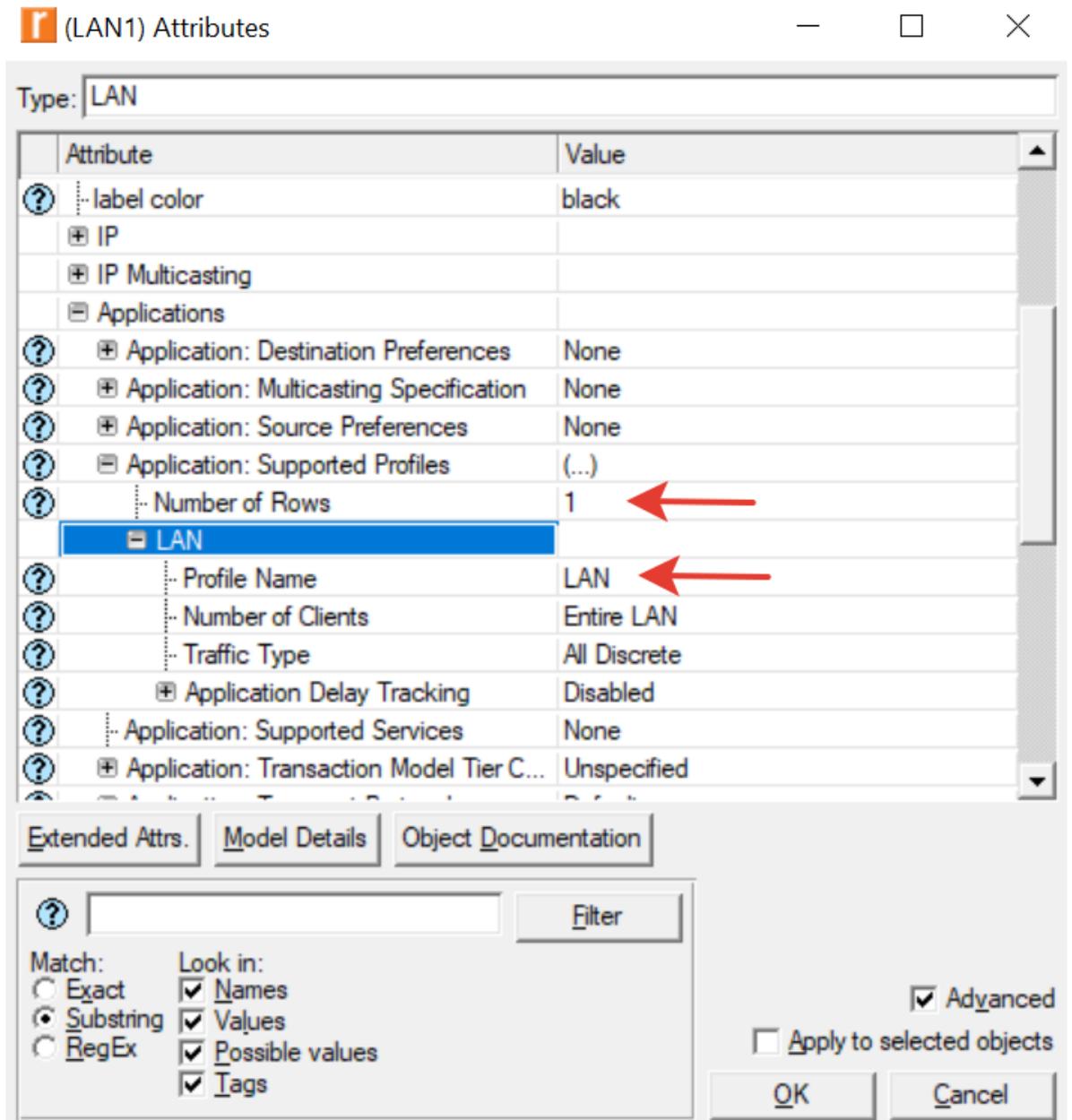


Рис. 5.11 – Добавление профиля приложений в подсетях

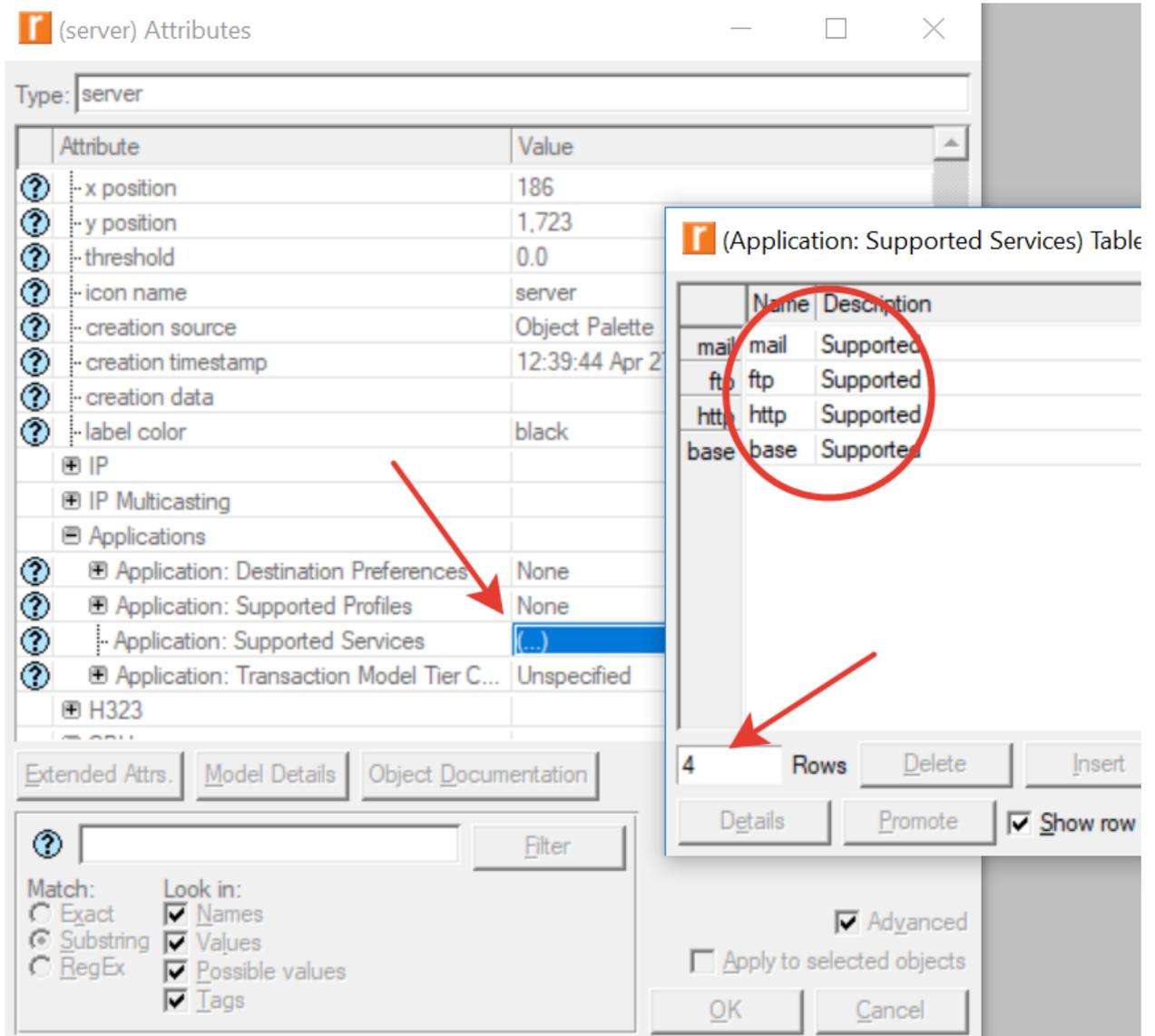


Рис. 5.12 – Добавление сервисов (функционала) на сервер

После настройки всех приложений сети, включая протоколы, необходимо задать исходные данные для прогона модели (рис.5.13, 5.14), а также выбрать глобальные статистики для сбора данных. В качестве таковых выберем загрузку каналов (utilization) и задержки пакетов (Ethernet Delay).

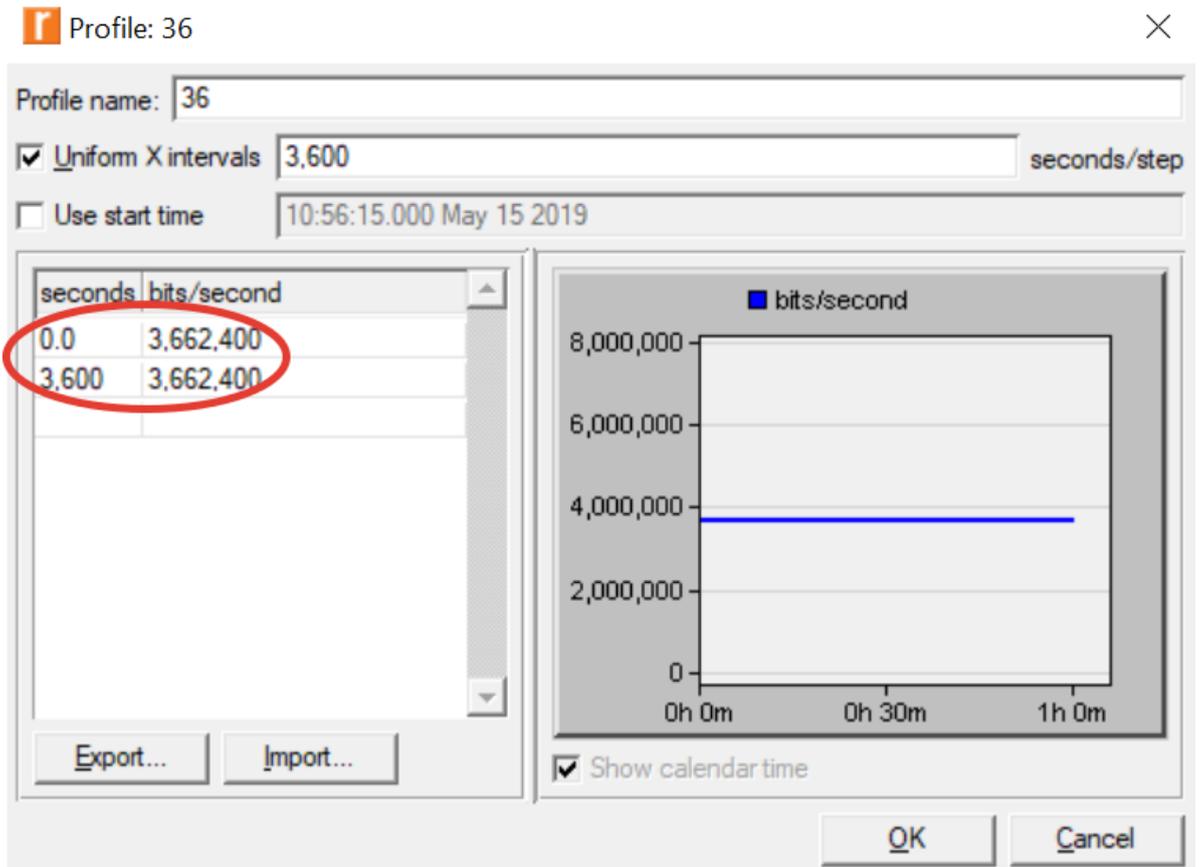


Рис. 5.13 – Настройка входящего трафика Интернет роутер

Входящий трафик 600 пакетов/с дает 3662400 бит/с, его можно задать также в пакетах/с.

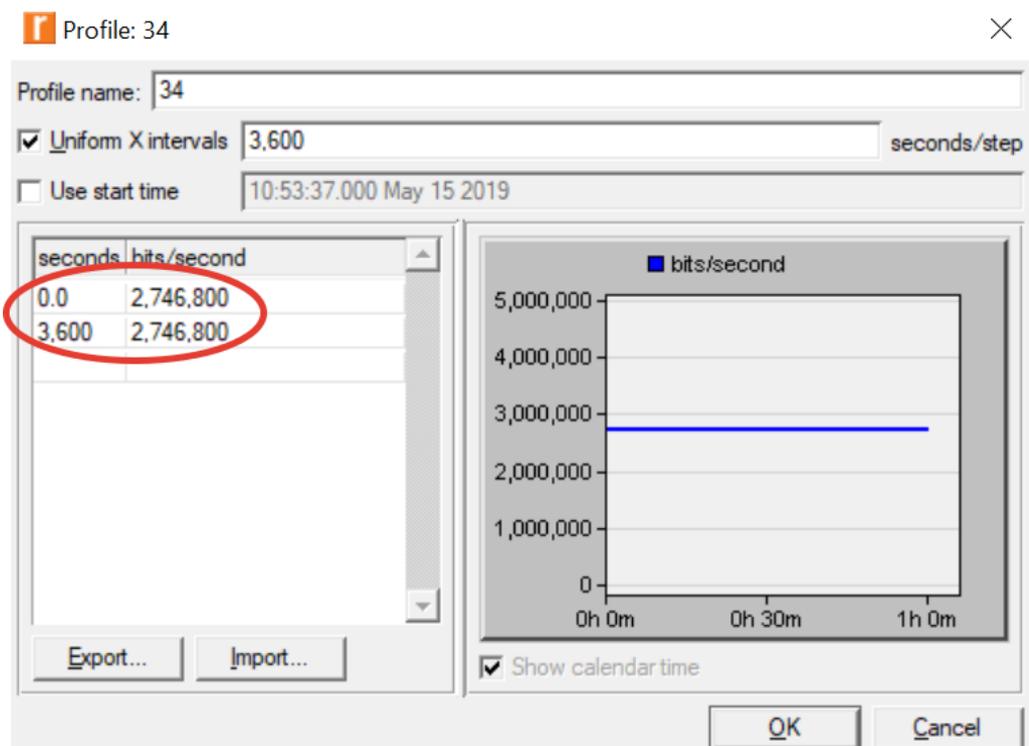


Рис. 5.14 – Настройка исходящего трафика роутер Интернет

Исходящий трафик 450 пакетов/с дает 2746800 бит/с. После этого входящий трафик направляем от сервера к подсетям по 200 пакетов/с. Этот пункт в работе пропущен. Далее на рис. 5.15 и 5.16 показан выбор глобальных статистик для моделирования.

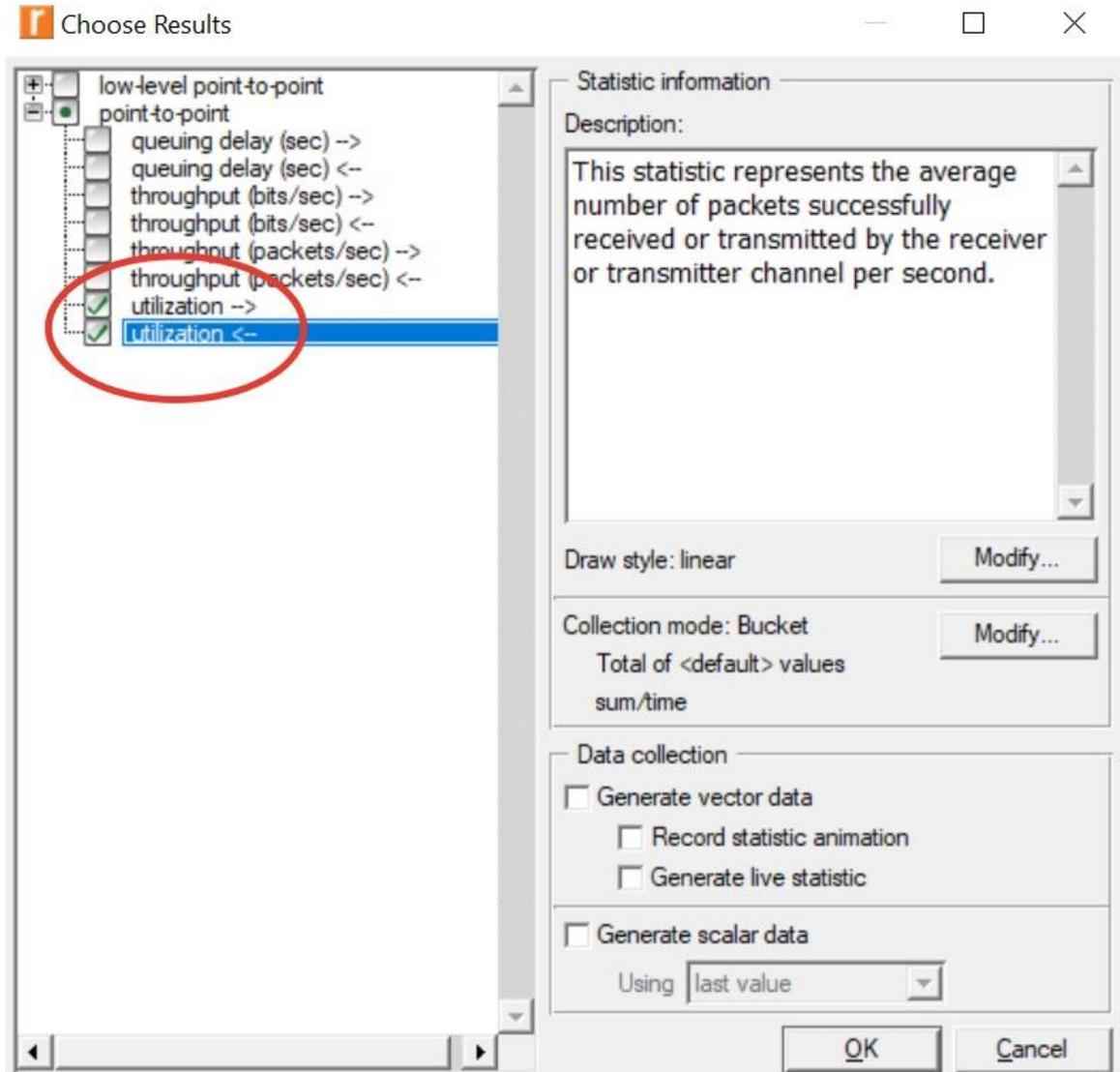


Рис. 5.15 – Выбор статистики utilization на каждом из каналов сети

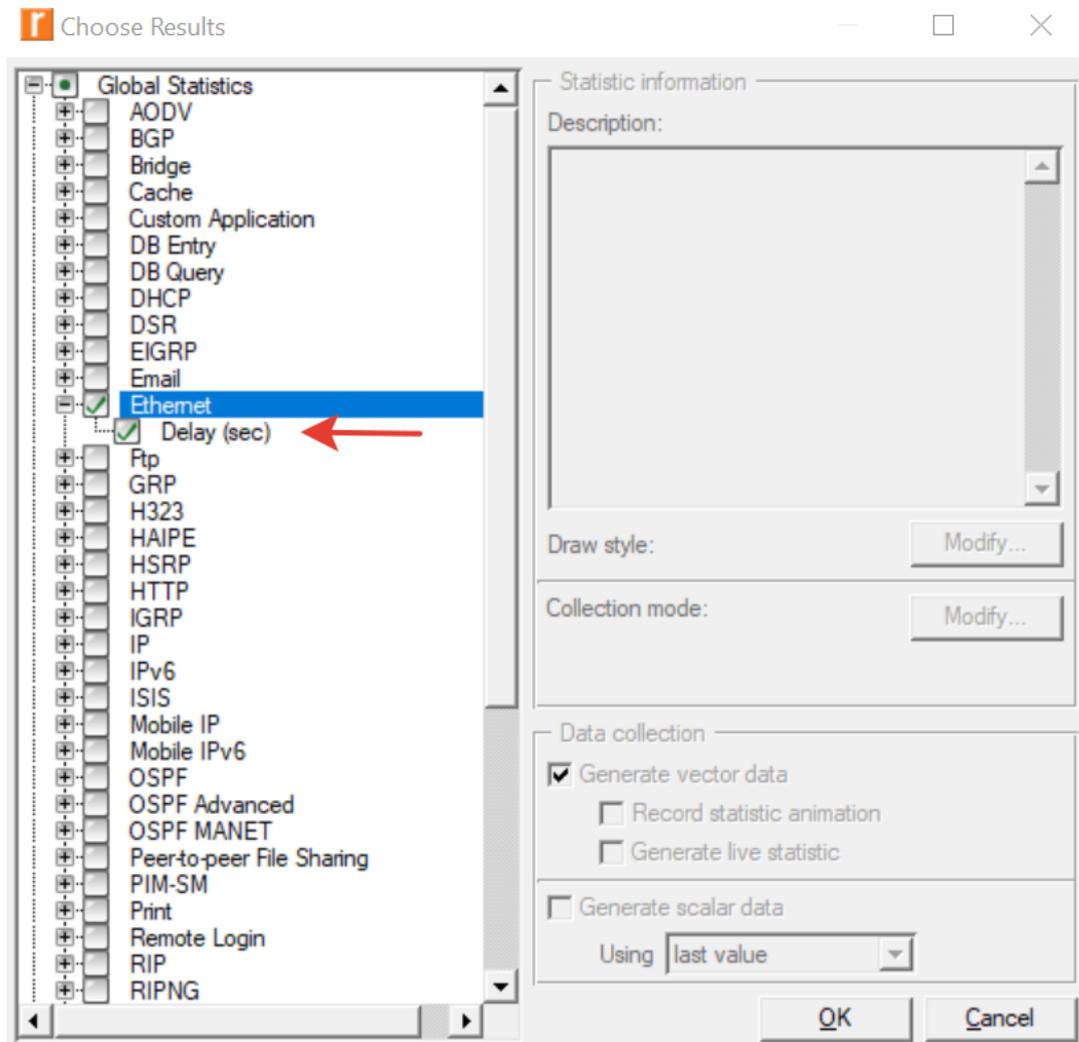


Рис. 5.16 – Выбор глобальной статистики Delay

## 5.2 Результаты имитационного моделирования

На рис. 5.17 приведены полученные нагрузки на каналы сети, собранные по статистике utilization моделирования за один час работы сети, а на рис.5.18 – результаты по задержке пакетов Ethernet Delay в секундах.

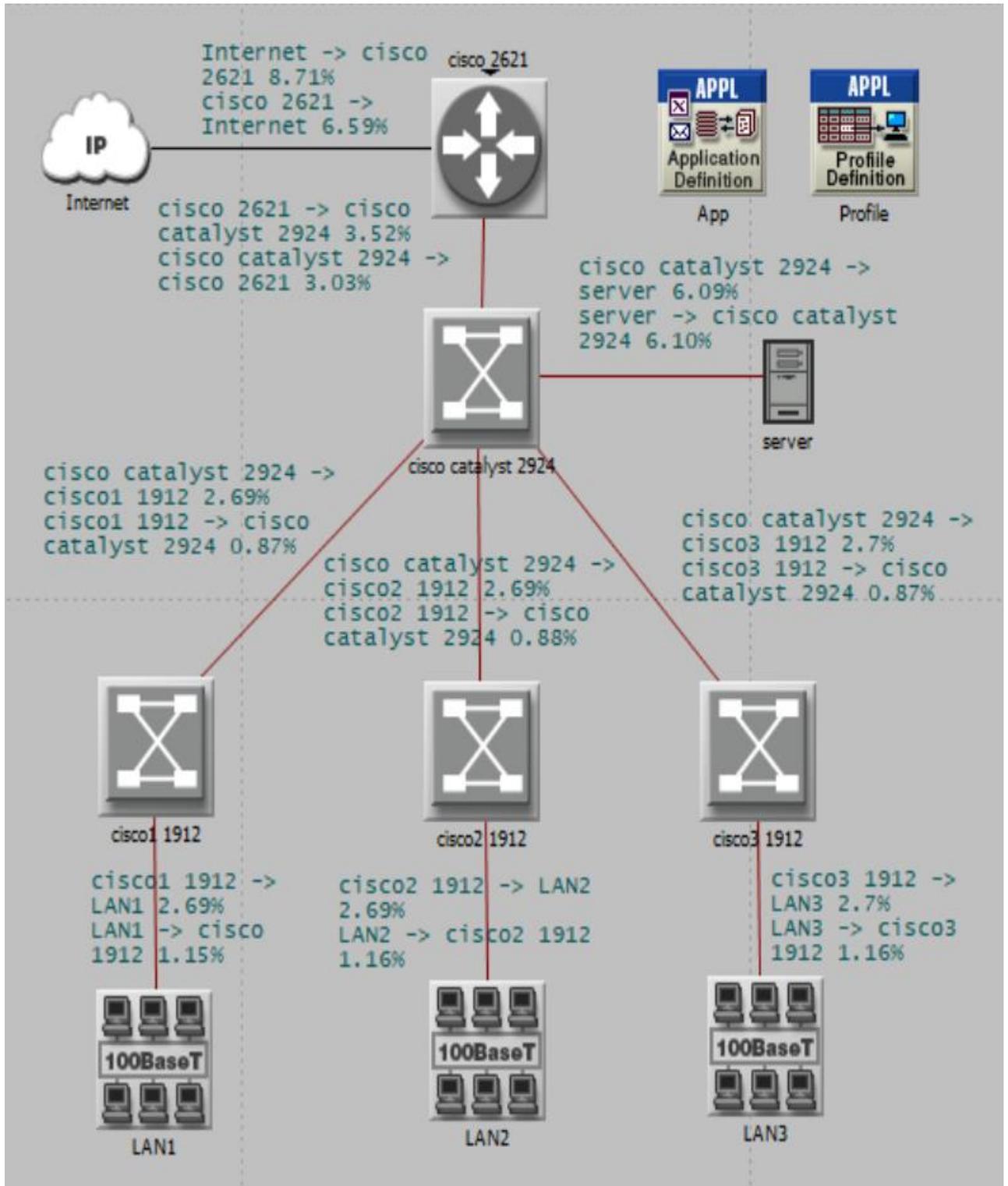


Рис. 5.17 – Результаты по нагрузкам каналов передачи данных

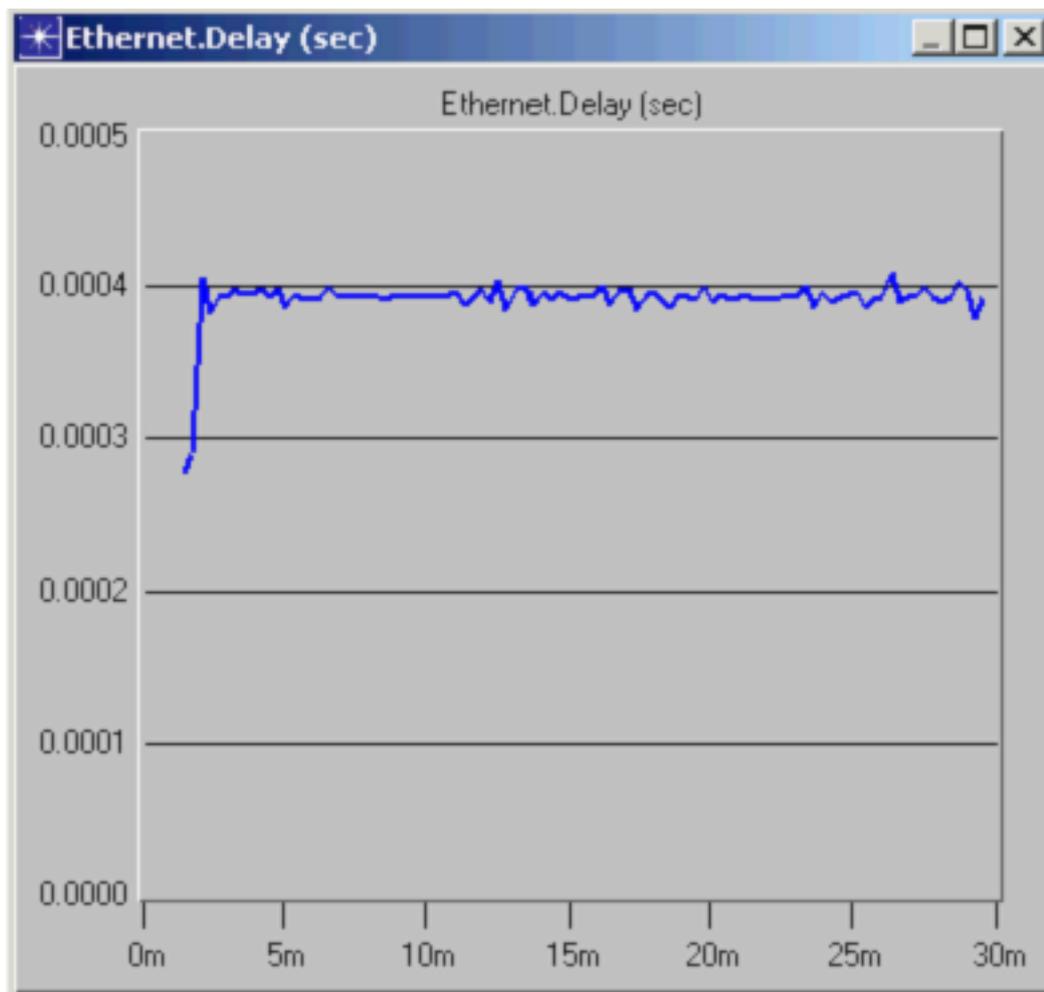


Рис. 5.18 – Задержки пакетов

Для оценки адекватности результатов в системе Riverbed Modeler предусмотрена проверка баланса потоков. В разумно организованной сети без потерь пакетов количество переданных байтов (пакетов) должно равняться количеству принятых байтов (пакетов). Этот факт отражен на рис. 5.19. в верхнем правом углу, где видно, что баланс потоков полностью выполняется.

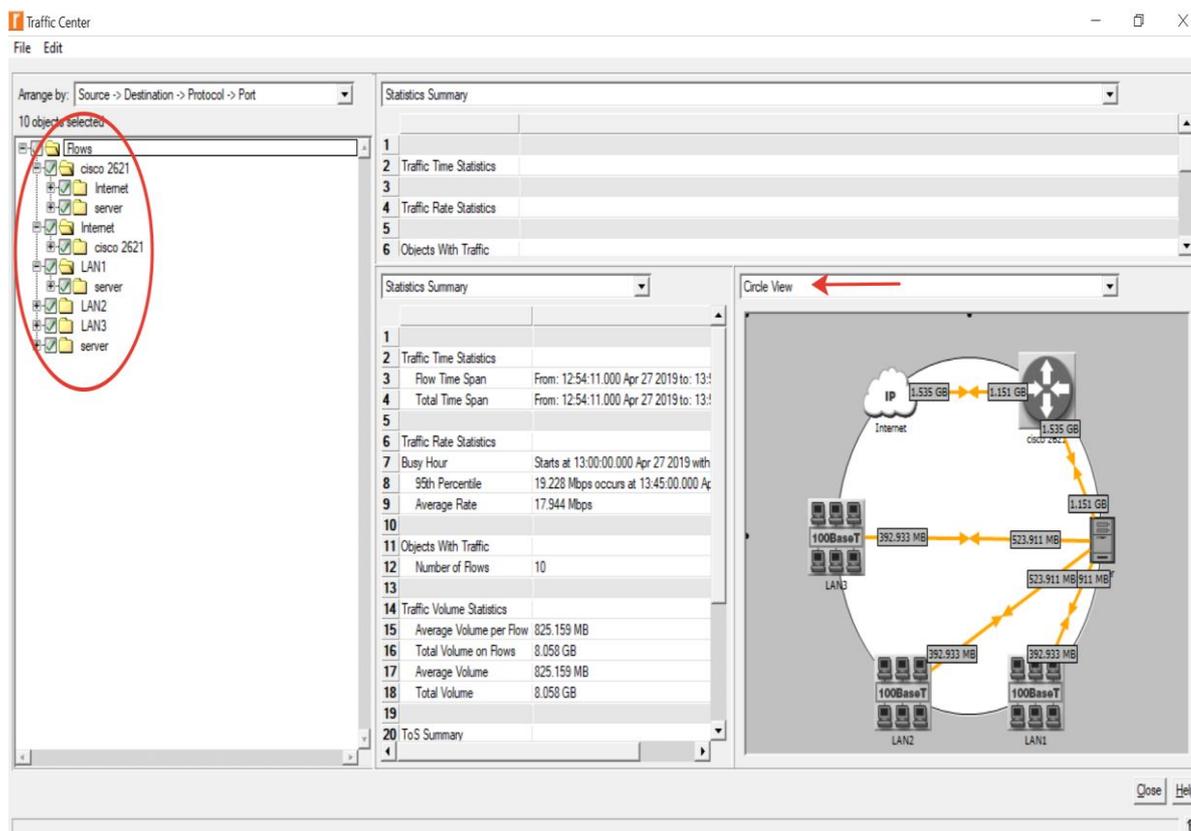


Рис. 5.19 – Визуализация баланса потоков (Traffic-Open Traffic Center)

Теперь полученные результаты сравним с результатами аналитического моделирования.

### 5.3 Аналитическое моделирование ЛВС на основе уравнений равновесия

Аналитическое моделирование проведем при тех же исходных данных, что и при имитационном моделировании. Учитывая тот факт, что академическая версия программной системы Riverbed Modeler IT GURU при имитационном моделировании сетей использует пуассоновский входной трафик и экспоненциальное время обслуживания в каналах, т.е. по сути, моделирует марковские сети, исходные данные для моделирования сети массового обслуживания представим следующим образом.

Извне в сеть поступает поток с интенсивностью  $\lambda_{01} = 600$  пакетов/с и они симметрично распределяются по трем подсетям по соответствующим каналам передачи данных. Во вне из сети идет поток в 450 пакетов/с. Основная схема сети массового обслуживания будет соответствовать структуре сети, представленной на рис.5.1. Число узлов сети будет равно числу каналов 9.

Матрица вероятностей передачи требований  $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}$  для входящего потока, интенсивности обслуживания требований в каналах  $\mu_i$  и коэффициенты вариаций интервалов внешнего потока и времени обслуживания в каналах представлены в таблицах 5.1 – 5.3.

Таблица 5.1. Матрица вероятностей перехода заявок

№ узла	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0,333	0,333	0,334	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0,42	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0,42	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0,42	0	0	0	0	0	0

Таблица 5.2. Исходные данные обработки заявок для сети МО

Обработка заявок		
№ узла / показатель	Интенсивность обслуживания	Коэффициент вариации
1	6871	1
2	17179	1
3	17179	1

4	17179	1
5	17179	1
6	17179	1
7	17179	1
8	17179	1
9	17179	1

Таблица 5.3. Исходные данные поступления заявок для сети МО

Поступление заявок		
№ узла / показатель	Интенсивность поступления	Коэффициент вариации входного потока
1	600	1
2	0	0
3	0	0
4	0	0

5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0

**Пояснения к исходным данным.** В третьей строке матрицы вероятностей передач требования распределяются от 3-го узла (канал от Cisco catalyst до сервера) по трем подсетям с вероятностями  $p_{34} = p_{35} = p_{36} = 1/3$ . На канале Cisco catalyst до сервера суммарно от внешнего потока и от подсетей ожидается примерно 1035 пакетов/с (в реальной это можно определить с помощью анализатора трафика), что дает вероятности  $p_{73} = p_{83} = p_{93} = 0,42$ . Тогда уравнения равновесия потоков (4.1) для определения интенсивностей всех потоков сети массового обслуживания будут иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_{01}, \\ \lambda_2 = \lambda_1, \\ \lambda_3 = \lambda_2 + 0,42(\lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9), \\ \lambda_4 = \lambda_3 / 3, \\ \lambda_5 = \lambda_3 / 3, \\ \lambda_6 = \lambda_3 / 3, \\ \lambda_7 = \lambda_4, \\ \lambda_8 = \lambda_5, \\ \lambda_9 = \lambda_6. \end{array} \right.$$

Для внешнего канала от Internet провайдера в 40 Мбит/с интенсивность обслуживания пакетов длиной в 763 байт  $\mu_1=6871$  ( $40 \times 1024 \times 1024 / (763 \times 8)$ ) пакетов/с, для остальных каналов в 100 Мбит/с интенсивность обслуживания  $\mu_i = 17179$  пакетов/с ( $100 \times 1024 \times 1024 / (763 \times 8)$ ) ( $i=2,3,\dots,9$ ).

При перечисленных исходных данных, полученные результаты расчета сети массового обслуживания представлены на рис. 5.20.

**Узловые характеристики:**

Характеристики/Узлы	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Интенсивность потока	600,0	600,0	1034,5	344,5	344,5	345,5	344,5	344,5	345,5
Загрузка	0,087	0,035	0,060	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020
Ср. время ожидания	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
Ср. длина очереди	0,00763	0,00122	0,00363	0,00040	0,00040	0,00040	0,00040	0,00040	0,00040
Ср. задержка (время отклика)	0,00016	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006
Ср. число заявок	0,09495	0,03615	0,06384	0,02045	0,02045	0,02052	0,02045	0,02045	0,02052

**Сетевые характеристики:**

Ср. время ожидания	Ср. задержка (время отклика)	Ср. длина очереди	Производительность
0,00001	0,00037	0,01489	0,31779

Рис. 5.20 – Результаты расчета входящего трафика

Теперь сравним полученные результаты для входящего потока с данными имитации. Загрузки для трех первых каналов полностью совпадают, а разница загрузок для остальных каналов объясняется наличием в реальной сети широковещательного трафика от сервера, который в теории массового обслуживания игнорируется. Задержки пакетов в сети при имитационном моделировании около 0,4 мс, а при аналитическом моделировании 0,37 мс, что тоже самое. Таким образом, для экспоненциальной сети массового обслуживания получили очень хорошее совпадение результатов моделирования двумя способами.

Теперь изменим входные данные для сети массового обслуживания для случая немарковской сети. Для этого возьмем в качестве коэффициентов вариаций для интервалов внешнего потока  $c_{\lambda 0} = 4$  и времени обслуживания в

каналах  $c_{\mu i} = 4$  ( $i=1,2,\dots,9$ ). Тогда потоки сети будут аппроксимированы гиперэкспоненциальными распределениями 2-го порядка. Матрица вероятностей передач при этом не изменяется (таб. 5.1). Полученные результаты расчетов приведены на рис. 5.21.

Аналогично рассчитывается и исходящий трафик, для этого нужно изменить только матрицу вероятностей передач и во входных данных вместо 600 пакетов/с подставить 450 пакетов/с. Этот момент в работе опущен в виду ее простоты.

Таблица 5.4. Исходные данные обработки заявок для сети МО

Обработка заявок		
№ узла / показатель	Интенсивность обслуживания	Коэффициент вариации
1	6871	4
2	17179	4
3	17179	4
4	17179	4
5	17179	4
6	17179	4
7	17179	4
8	17179	4

9	17179	4
---	-------	---

Таблица 5.5. Исходные данные поступления заявок для сети МО

Поступление заявок		
№ узла / показатель	Интенсивность поступления	Коэффициент вариации входного потока
1	600	4
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0

**Узловые характеристики:**

Характеристики/Узлы	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Интенсивность потока	600,0	600,0	1040,5	346,5	346,5	347,5	346,5	346,5	347,5
Загрузка	0,087	0,035	0,061	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020	0,020
Ср. время ожидания	0,00020	0,00003	0,00005	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
Ср. длина очереди	0,12201	0,01953	0,04803	0,00408	0,00408	0,00411	0,00408	0,00408	0,00411
Ср. задержка (время отклика)	0,00035	0,00009	0,00010	0,00007	0,00007	0,00007	0,00007	0,00007	0,00007
Ср. число заявок	0,20933	0,05446	0,10859	0,02425	0,02425	0,02434	0,02425	0,02425	0,02434

**Сетевые характеристики:**

Ср. время ожидания	Ср. задержка (время отклика)	Ср. длина очереди	Производительность
0,00015	0,00051	0,21411	0,51806

Рис.5.21 – Результаты расчетов немарковской сети массового обслуживания

Как и следовало ожидать, в таком случае увеличиваются средние времена ожидания в очереди в узлах сети и задержка пакетов в сети, т.к. они связаны квадратичной зависимостью с коэффициентами вариаций входного потока и времени обслуживания (формула (2.1)). Общая задержка пакетов в сети увеличивается с 0,37 мс до 0,51 мс.

В данном случае рассмотрение коэффициентов вариаций меньше единицы не имеет смысла, т.к. загрузки каналов малы и задержки будут менее  $10^{-4}$ с, в связи с тем, что предлагаемая методика расчета сети массового обслуживания приближенная, то она такие малые числа не будет отображать корректно. Это один из недостатков предлагаемой методики.

## Выводы

Глава посвящена оценке адекватности разработанных моделей расчета сетей массового обслуживания применительно к реальным локальным вычислительным сетям. Расчеты для случая марковской сети массового обслуживания в сравнении с результатами имитационного моделирования в академической версии программной системы Riverbed Modeler фирмы IT GURU показывают полное совпадение результатов без учета широковещательного трафика в реальной сети. При этом адекватность самой имитационной модели полностью подтверждена выполнением баланса потоков сети, что в теории означает выполнение уравнений равновесия потоков.

Расчеты для случая немарковской сети массового обслуживания не позволяют сравнить их с результатами имитационного моделирования, т.к. такой возможности не предоставляет академическая версия программной системы. Но при этом, результаты расчетов полностью подтверждаются известной формулой (2.1) теории массового обслуживания.

Тем самым, результаты работы подтверждают практическую применимость предложенных моделей к анализу реальных компьютерных сетей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации решена новая научно-техническая задача, заключающаяся в разработке и исследовании математического и программного инструментария для анализа функционирования немарковских сетей массового обслуживания.

Основные результаты состоят в следующем:

- разработана и предложена математическая модель узла сети МО в виде СМО  $H_2/H_2/1$  с гиперэкспоненциальными входными распределениями, которая позволяет рассчитать ее характеристики в случае, когда коэффициенты вариаций временных интервалов трафика больше либо равны единице. Обоснована возможность аппроксимации произвольных законов распределений гиперэкспоненциальным в этом случае с использованием как двух, так и трех начальных моментов;

- разработана и предложена математическая модель узла сети МО в виде СМО  $M^- / M^- / 1$  с запаздыванием во времени со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями, которая позволяет рассчитать ее характеристики в случае, когда коэффициенты вариаций временных интервалов трафика меньше единицы. Обоснована возможность аппроксимации произвольных законов распределений в этом случае с использованием двух начальных моментов;

- предложены уравнения баланса потоков сети МО для восстановления числовых характеристик распределений временных интервалов в потоках для последующего применения предложенных СМО для расчета их характеристик как показателей производительности сетей МО;

- разработан программный комплекс расчета характеристик узлов немарковской сети массового обслуживания в виде СМО  $H_2/H_2/1$ ,  $H_2/M/1$  и  $M^- / M^- / 1$ , который совместно с уравнениями баланса потоков позволяет определить показатели производительности сетей МО. В условиях неполной информации о законах распределений временных интервалов трафика, предложенный подход к теоретическому анализу и экспериментальному

исследованию компьютерных сетей является приемлемым с инженерной точностью.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

ВС – вычислительная сеть.

СМО – система массового обслуживания.

ЛВС – локальная вычислительная сеть.

G/G/1 – СМО с одной обслуживающей линией, произвольным входящим потоком, произвольным распределением времени обслуживания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневский, В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей [Текст] / В.М. Вишневский.- М.: Техносфера, 2003.- 512с.
2. Норенков И.П. Основы автоматизированного проектирования Основы автоматизированного проектирования.— 4-е изд., перераб. и доп .— М.: Издательство МГТУ им Н. Э. Баумана, 2009 .— 430, [2] с.: ил .— (Информатика в техническом университете) .— Библиогр.: с. 426.- Предм. указ.: с. 427-431 .— ISBN 978-5-7038-3275-2 ((в пер.)).
3. Алиев Т. И. Основы моделирования дискретных систем [Текст]: учебное пособие — СПб.: СПбГУ ИТМО, 2009 .— 363, [2] с.: ил .— с. 353. - Алф. указ.: с. 354-357 .— ISBN 978-5-7577-0336-7((в пер.)).
4. Когай Г. Д., Кисина М. К. Показатели и модели реализации качества обслуживания // Молодой ученый. — 2016. — №20. — С. 157-160.
5. Олифер В.Г., Олифер Н. А. Компьютерные сети: Принципы, технологии, протоколы. Учебник. 4-е изд. — СПб: Питер, 2010.-185 с.
6. Константинов И. С., Фролов А. И. Модель обеспечения качества обслуживания по величине задержки, основанная на семантических приоритетах // Вестник компьютерных и информационных технологий. - 2005. № 3.- С. 32.
7. Герасимов А.И. Теория и практическое применение стохастических сетей / А. И. Герасимов. - М.: Радио и связь, 1994. - 175 с.
8. Алиев Т.И. Сети ЭВМ и телекоммуникации. - учебное пособие — СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011.-399 с.
9. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания: Пер. с англ./Под ред. В.И. Неймана. - М.: Машиностроение, 1979.- 432 с.
10. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями: /Л. Клейнрок, пер. с англ. Под ред. д.т.н. Б.С. Цыбакова – М.: Мир, 1979.– 597 с.
11. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. М.: Изд-во РУДН, 1995. - 529 с.

12. Тарасов В.Н., Карташевский И.В. Определение среднего времени ожидания требований в управляемой системе массового обслуживания  $M2/M2/1$  / В.Н. Тарасов, И.В. Карташевский // Системы управления и информационные технологии – 2014. - №3(57). - С.92-96.
13. Липилина, Л.В. Исследование задержки в системе  $G/G/1$  / В.Н. Тарасов, Л.В. Липилина, И.В. Карташевский // Инфокоммуникационные технологии. – 2015. - №2. – С.153-158.
14. Тарасов В.Н., Горелов Г.А., Ушаков Ю.А. Восстановление моментных характеристик распределения интервалов между пакетами входящего трафика. Инфокоммуникационные технологии – 2014. - №2. –С.40-44.
15. Тарасов В.Н. Анализ входящего трафика на уровне трех моментов распределений временных интервалов / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Г.А. Горелов, С.В. Малахов // Информационные технологии – 2014. - №9. - С.54-59.
16. Myskja A. An improved heuristic approximation for the  $GI/GI/1$  queue with bursty arrivals // Teletraffic and datatraffic in a Period of Change, ITC-13. Elsevier Science Publishers - 1991. Pp.683-688.
17. Тарасов В.Н. Исследование систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями / В.Н. Тарасов // Проблемы передачи информации. - 2016. - №1. - С.16-26.
18. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф., Горелов Г.А. Математическая модель трафика с тяжелохвостным распределением на основе системы массового обслуживания  $M2/M/1$  / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Г.А. Горелов // Инфокоммуникационные технологии – 2014. - №3. –С.36-41.
19. Липилина Л.В. Оптимизация расчета характеристик системы  $M2/M/1$  / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, И.В. Карташевский, Л.В. Липилина // Инфокоммуникационные технологии.-2017.- №4. - С.353-357.
20. Липилина, Л.В. Математическая модель телетрафика на основе системы  $G/M/1$  и результаты вычислительных экспериментов / В.Н. Тарасов, Н.Ф.

- Бахарева, Л.В. Липилина // Информационные технологии. – 2016. - №2. - С.121-126.
21. Whitt W. Approximating a point process by a renewal process : two basic methods // Operation Research, 30. No. 1, -1982. Pp. 125-147.
  22. Липилина, Л.В. Модели массового обслуживания для исследования телетрафика в случае широкого диапазона изменения его параметров / В.Н. Тарасов, И.В. Карташевский, Л.В. Липилина // Системы управления и информационные технологии. -2016. -№3. -С.24-27.
  23. V.N. Tarasov, N.F. Bakhareva, I.A. Vlatov. Analysis and calculation of queuing system with delay / Automation and RemoteControl, 2015, 10.1134/S0005117915110041.
  24. Липилина, Л.В. Автоматизация расчета характеристик систем массового обслуживания для широкого диапазона изменения их параметров / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Информационные технологии. – 2016. - №12. - С.952-957.
  25. Тарасов В.Н., Липилина Л.В. Программный комплекс расчета характеристик систем массового обслуживания типа  $H_2/H_2/1$ ,  $H_2/M/1$  и  $M/M/1$  с запаздыванием во времени / Св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2016612657 от 03.03.2016.
  26. Бахарева Н.Ф., Тарасов В.Н. Аппроксимативные методы и модели массового обслуживания. Исследование компьютерных сетей / Изд-во СНЦ РАН, 2011, 327 с.
  27. Кругликов В.К., Тарасов В.Н. Анализ и расчет сетей массового обслуживания методом двумерной диффузионной аппроксимации // Автоматика и телемеханика. 1983. № 8. С. 74-83.
  28. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Компьютерное моделирование вычислительных систем. Теория, алгоритмы, программы. Учебн. пособие. Самара, Изд-во ПГУТИ, 2009. 208 с.
  29. Липилина, Л.В. Моделирование телетрафика на основе систем массового обслуживания / В.Н. Тарасов, Л.В. Липилина // IX Всероссийская

- конференция с международным участием «Компьютерная интеграция производства и ИПИ-технологии» Оренбург 14-15 ноября 2019 г. С.
30. Липилина Л.В. Модели функционирования узлов компьютерной сети на основе систем массового обслуживания // Вопросы науки и практики – 2019: 4 сессия: Сборник статей IV Международной научно-практической конференции, Россия, Москва, 19 октября 2019 г. [Электронный ресурс] / Под ред. проф. Р.А. Исламшина. – Электрон. текст. дан. (1 файл 2,3 Мб). – М.: РусАльянс Сова, 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – ISBN 978-5-6040972-8-1. – Загл. с этикетки диска. – с. 37-42.
  31. Липилина Л.В. The spectral decomposition method for solving the Lindley integral equation and related numerical methods // Т - Comm; Телекоммуникации и Транспорт, Т.14, №1, 2020. С.49-55.
  32. Липилина, Л.В. Анализ немарковских сетей массового обслуживания на основе уравнений баланса потоков / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Информационные технологии. – 2018. - №5. - С.306-312.
  33. Lipilina, L. Comparison of Different Approaches to Determining the Mean Delay Time in a Queuing System H2/M/1 V. Tarasov, N. Bakhareva, I. Kartashevskiy, L. Lipilina // 4th International Scientific and Practical Conference «Problems of Infocommunications. Science and Technology» Pp.311-314. DOI: 10.1109/INFOCOMMST.2017.8246404.
  34. Липилина, Л.В. Анализ потоковых моделей трафика с непуассоновским входным потоком в компьютерных сетях / Л.В. Липилина // Международный журнал «Путь науки». – 2015. - №4. - С.13-14.
  35. Липилина, Л.В. Модели массового обслуживания для сетей телекоммуникаций / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Материалы XXII Российской научн.конф. ППС, НС и аспирантов. ПГУТИ, Самара, 2015 г. С.178.
  36. Липилина, Л.В. Анализ трафика сетей телекоммуникаций / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Материалы XXII Российской научн.конф. ППС, НС и аспирантов. ПГУТИ, Самара, 2015 г. С.179.

37. Липилина, Л.В. Программный комплекс расчета характеристик СМО типа  $H_2/H_2/1$ ,  $H_2/M/1$  и  $M/M/1$  с запаздыванием во времени / В.Н. Тарасов, Л.В. Липилина // Материалы XXIII Российской научн.конф. ППС, НС и аспирантов. ПГУТИ, Самара, 2016 г. С.257.
38. Липилина, Л.В. Моделирование современного телетрафика на основе систем массового обслуживания / Л.В. Липилина // XVII междунар. НТК «Проблемы техники и технологий телекоммуникаций», Самара, ПГУТИ 22-24 ноября 2016 г. С.445-446.
39. Липилина, Л.В. Анализ моделей телетрафика на основе системы массового обслуживания  $H_2/H_2/1$  / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Материалы XXIV Российской научн.конф. ППС, НС и аспирантов. ПГУТИ, г. Самара, 2017 г. С.253.
40. Липилина, Л.В. Исследование моделей телетрафика на основе систем массового обслуживания с гиперэкспоненциальными входными распределениями / Л.В. Липилина // Международная НТК Сборник научных трудов «Перспективные информационные технологии» 14 – 16 марта 2017 г. Самара, СГАУ, СНЦ РАН. С.942-945.
41. Липилина, Л.В. Исследование телетрафика в случае широкого диапазона изменения его параметров на основе теории массового обслуживания / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Материалы конференции Росинфоком-2017 «Актуальные вопросы телекоммуникаций» 01.09.2017 ПГУТИ С.150-152.
42. Липилина, Л.В. Моделирование телетрафика в случае широкого диапазона изменения его параметров на основе теории массового обслуживания / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева, Л.В. Липилина // Сб. науч. ст. XIV междунар. НТК Новые информационные технологии и системы НИТиС-2017 Пенза 22-23 ноября 2017 г. С. 88-91.
43. Бусленко, Н.П. Моделирование сложных систем.– М.: Наука, 1978. - 399 с.

44. Авен, О.И., Турин, Н.Н., Коган, Я.А. Оценка качества- и оптимизация вычислительных систем.- И.: Наука, 1982— 464 с.
45. Бахарева, Н.Ф: Аппроксимативная модель массового обслуживания общего вида и расчет ее характеристик / Н.Ф.Бахарева, В.Н.Тарасов //Изнестия Вузов Поволжский регион. Технические науки. -2009.- №3,-С. 47-58.
46. Бахарева, Н.Ф. Анализ и расчет непуассоновских моделей трафика в сетях ЭВМ / Н.Ф.Бахарева, И.В.Карташевский, В.Н.Тарасов // Инфокоммуникационные технологии. 2009. — Том 7, №4. — С. 61-66.
47. Бахарева, Н.Ф. Моделирование трафика в компьютерных сетях с помощью потоков событий / Н.Ф. Бахарева // Известия ВУЗов – Приборостроение.-2010. –Том 53, №12. – С.13-22.
48. Бахарева, Н.Ф. Анализ производительности сетевых структур методами теории массового обслуживания / Н.Ф. Бахарева // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2009. - № 3. – С. 2-8.
49. Бахарева, Н.Ф. Уравнения равновесия потоков в сетевых моделях на основе математических операций мультиплексирования и демупльтиплексирования / Н.Ф. Бахарева //Изнестия Вузов Поволжский регион. Технические науки. – 2009. - №4. – С.12-25.
50. Гнеденко, Б.В. и др. Математические методы в теории надежности / Б.В. Гнеденко – М.: Наука, 1965. – 524 с.
51. Градштейн, И.О. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.О. Градштейн, И.М. Рыжик –М.: Наука, 1971. – 1108 с.
52. Ивницкий, В.А. Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий – М.: Изд-во Физико-математической литературы, . 2004. - 772 с.
53. Тарасов, В.Н. Вероятностное компьютерное моделирование сложных систем / В.Н. Тарасов– Самара.: Самарский научный центр РАН, 2002. – 194с.
54. Gelenbe E. On approximate computer system modes. – J. ACM, 1975, V.22, p.261-269.

55. Ward A.R., Glinn P.W. A diffusion approximation for a GI/G/1 queue with balking or reneging //Queueing Systems. 50, No. 4, 2005. p.371-400.
56. Нейман, В.И. Новое направление в теории телетрафика. / В.И. Нейман // Электросвязь.- 1998.-№7.- С.27-30.
57. Leland, W.E., Taqqu M.S., Willinger W. and Wilson D.V. On the self-similar nature of Ethernet Traffic (Extended version). IEEE/ACM Transactions on networking.- 2:1-15.- 1994.
58. Тарасов, В.Н. Исследование реального трафика в телекоммуникационных и компьютерных сетях / В.Н. Тарасов, И.В. Карташевский// Инфокоммуникационные технологии. – 2010. – Т.8, №4. – С. 25-29.
59. Олифер, В.Г., Олифер, Н.А. Основы сетей передачи данных. М.: Интернет – Университет информационных технологий, 2003.-246 с.
60. Берёзко, М.П. Математические модели исследования алгоритмов маршрутизации в сетях передачи данных / М.П. Берёзко, В.М. Вишнеvский, Е.В. Левнер, Е.В.Федотов // Информационные процессы. — 2001. - Том 1. - №2. - С. 103-125.
61. Тарасов, В.Н. Компьютерное моделирование вычислительных систем. Теория, алгоритмы, программы / В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева. - Оренбург: ИПК ОГУ, 2004.-183 с.
62. Тарасов, В.Н. Вероятностное компьютерное моделирование вычислительных систем для анализа их производительности / В.Н. Тарасов.— Оренбург: Изд-во ОГУ, 2002.-236 с.
63. Тарасов, В.Н. Методы расчета характеристик вычислительных систем на вероятностной основе. / Анализ структур электронной и вычислительной техники: межвузовский сб. научных трудов. ОГУ. - Оренбург, 1996. - С.63-73.
64. Kang, W. N. Diffusion approximation for an input-queued packet switch operating under a maximum weight algorithm / W. N. Kang, R. J. Williams. – 2007

65. Kobayashi, H. Application of the diffusion approximation to queuing networks: Part I Equilibrium queue distributions / H. Kobayashi // ACM SIGMETSymposium.-1973.-P.54-62.
66. Whitt, W. A Diffusion Approximation for the G/GLWmQueue / W. Whitt // Operations research. - 2004. - Vol. 52. - №6. - P. 922-941.
67. Шнепс, М.А. Системы распределения информации. Методы расчета. Справочное пособие / М.А. Шнепс. - М.: Связь, 1979. - 342 с.
68. Choi, B.D. Shin, Y.W., Approximation analysis of time dependent queue size distribution for GI/G/m system using diffusion process / Choi, B.D. Shin, Y.W.//KAIST Mathematics Workshop 6, Analysis and Geometry, Korea. - 1991. - P. 225-242.
69. Erramilli, A. Willinger W. Experimental queueing analysis with long- range dependent packet traffic / A. Erramilli, O. Narayan // IEEE/ACM Transactions on Networking. – April 1996.– Vol.4, №2. – p. 209-223.
70. Макаренко С. И. Методика вероятностной оценки показателей качества обслуживания сети связи при передаче нестационарных информационных потоков // Успехи современной радиоэлектроники, 2010, № 11. С. 78-81.
71. Макаренко С. И., Татарков М. А. Моделирование обслуживания нестационарного информационного потока системой связи со случайным множественным доступом // Информационно-управляющие системы. 2012. №1. С. 44- 50.
72. Макаренко С. И. Методика оценки времени за-держки пакета в канале связи в условиях неустойчивости входного трафика // Инфокоммуникационные технологии. 2007. Т. 5. № 3. С. 95-96.
73. Рыжиков Ю. И., Уланов А. В. Опыт расчета сложных систем массового обслуживания // Информаци-онно-управляющие системы, № 2, 2009. – С. 56-62.
74. Алиев Т.И. Математические методы теории вычислительных систем. – Л.: ЛИТМО, 1979. – 92 с.

75. Жожикашвили В.А., Вишневский В.М. Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ. – М.: Радио и связь, 1988. – 192 с.: ил.
76. Основы теории вычислительных систем / С.А.Майоров, Г.И.Новиков, Т.И.Алиев, Э.И.Махарев, Б.Д.Тимченко. – М.: Высшая школа, 1978. – 408 с.
77. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управление запасами: Учебник для вузов. – СПб.: Питер, 2001 год. – 384 с.
78. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: Учебник для вузов. – 4-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2005. – 343 с.: ил.
79. Столингс В. Современные компьютерные сети. – СПб.: Питер, 2003. – 783 с.: ил.
80. Феррари Д. Оценка производительности вычислительных систем. – М.: Мир, 1981.
81. Шварц М. Сети ЭВМ. Анализ и проектирование: Пер. с англ./ Под ред. В.А.Жожикашвили. – М.: Радио и связь, 1981. – 336 с.: ил.
82. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Организация интерактивной системы вероятностного моделирования стохастических систем // Известия СНЦ РАН, Самара, №1, 2003. – С. 119-126.
83. Тарасов В.Н., Карташевский И.В. Программно реализованная имитационная модель массового обслуживания общего вида // ИКТ. Т.7, №2, 2009. – С. 63-68.
84. Овчаров, Л. А. Прикладные задачи теории массового обслуживания / Л. А. Овчаров. – М.: Машиностроение, 1969. – 324 с.
85. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. - М.: Наука, 1987. - 431 с.
86. Ивницкий В.А. Сети массового обслуживания и их применение в ЭВМ // Зарубежная радиоэлектроника, 1977, №7, с. 33-70.
87. Основы теории вычислительных систем /Под ред. С.А.Майорова. -М.: Высшая школа, 1978. - 408 с.

88. Павловский Ю.Н. Имитационные модели и системы. – М.: Фазис: ВЦ РАН, 2000. – 134 с.
89. Тарасов В.Н., Афанасьев А.А. Компьютерное моделирование вычислительных систем.-Оренбург.: ИПК ОГУ,2002.-176с.
90. Альянах И.Н. Моделирование вычислительных систем. М.: Машиностроение, 1988.-220 с.
91. Артамонов Г.Т., Брехов О.М. Аналитические вероятностные модели функционирования ЭВМ. М.: Энергия, 1978. - 368 с.
92. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Наука, Физматлит, 1991. -384 с.
93. Кругликов В.К., Пикина Н.Б., Тарасов В.Н. Анализ функционирования вычислительных систем при неоднородных потоках, заданных на уровне двух моментов распределений. Изв. ВУЗов СССР - Приборостроение, 1984, №1. - 40-43с.
94. Кругликов В.К., Тарасов В.Н. Расчет сетевых моделей вычислительных систем с конечной очередью. Изв. ВУЗов СССР — Приборостроение, 1982, №11. 53-57 с.
95. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Физматгиз, 1963. - 235 с.
96. Куприяновский В.П., Синягов С.А., Намиот Д.Е., Шнепс-Шнеппе М.А., Ишмуратов А.Р., Добрынин А.П., Колесников А.Н. Гигабитное общество и инновации в цифровой экономике// Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2017. – Т.13. – № 1. – С. 105-131.
97. Кузнецов К.А., Мутханна А.С.А., Кучерявый А.Е. Тактильный Интернет и его приложения // Информационные технологии и телекоммуникации. – 2019. – Т. 7. – № 2. – С. 12-20.
98. Атея А.А.А., Мутханна А.С.А., А.Е. Кучерявый. Тактильный Интернет как телекоммуникационные системы будущего // Информационные технологии и телекоммуникации. – 2018. – Т. 6. – № 4. – С. 1-9.

99. Чистова Н.А., Кучерявый А.Е. Анализ технико-экономических последствий внедрения сетей связи с ультрамалыми задержками// Информационные технологии и телекоммуникации. – 2018. – Т. 6. – № 4. – С. 53-60.
100. Вишневский В.М., Дудин А.Н., Клименок В.И. Стохастические системы с коррелированными потоками. Теория и применение в телекоммуникационных сетях.– М.: Техносфера, 2018. – 564 с.
101. Вишневский В.М., Дудин А.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // Автоматика и телемеханика. – 2017. – № 8. – С.3-59.
102. Лихтциндер Б.Я. Самоподобие трафика мультисервисных сетей связи: мифы и реальность // Инфокоммуникационные технологии. – 2019. – Т. 17. – № 3. – С. 276-282.
103. Шелухин О.И., Тенякшев А.М., Осин А.В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях. – М.: Радиотехника, 2003 – 479 с.
104. Шелухин О.И. Причины самоподобия телетрафика и методы оценки показателя Херста // Электротехнические и информационные комплексы и системы. – 2007. – Т.3. – № 1. – С.5-14.
105. Махмуд, О.А.М. Исследование и разработка моделей трафика и методов выбора структуры сетей интернета вещей: дис . канд. техн. наук: 05.12.13 / Махмуд Омар Абдулкарим Махмуд. – СПб, 2019. – 161 с.
106. Осовский А.В., Кутузов Д.В., Стукач О.В. Анализ моделей трафика, создаваемого устройствами интернета вещей // Динамика систем, механизмов и машин. – 2019. – Т. 7. – № 4. – С. 220-226.
107. Гайдамака Ю.В., Самуйлов А.К. Анализ стратегий заполнения буфера оборудования пользователя при предоставлении услуги потокового видео в одноранговой сети // Т-Сотт: Телекоммуникации и транспорт. – 2013. – Т. 7. - № 11. – С. 77-81.

108. Степанов, С.Н. Теория телетрафика. Концепции, модели, приложения. – М.: Горячая линия – Телеком, 2015. – 866 с.
109. Шелухин, О.И. Мультифракталы. – М.: Горячая линия-Телеком, 2011. – 576 с.
110. Тарасов В.Н., Карташевский И.В., Малахов С.В. Теоретическое и экспериментальное исследование задержки в программно-конфигурируемых сетях // Инфокоммуникационные технологии. – 2015. – Т 13. N 4. – С. 409-413.
111. 3GPP Technical Report 38.913 «Study on Scenarios and Requirements for Next Generation Access Technologies» Ver. 14.3.0, June 2017.
112. Zarrini M., Ghasemi A. Loss and delay analysis of non-Poisson M2M traffic over LTE networks // Transactions on Emerging Telecommunications Technologies.. – 2018. – V. 29. – I. 2. – P. 133-154.
113. Jagerman D.L., Balcioglu B., Altioek T., Melamed B. Mean waiting time approximations in the G/G/1 queue // Queueing Systems. – 2004. – V. 46. – P. 481-506.
114. Hammad K., Moubayed A., Shami A., Primak S. Analytical Approximation of Packet Delay Jitter in Simple Queues// IEEE Wireless Communications Letters. – 2016. – V.5. – No. 6. – P. 564-567.
115. Tarasov V., Bakhareva N., Ushakov Yu. Statistical processing of WiresharkAnalyzer Resultsthe to determine the numerical characteristics of incoming traffic intervals/Proceedings of the 19th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics Volume I / July12-15, 2015 - Orlando, Florida, USA. Pp.22-26.
116. Chandy K.M.,Sauer C.H. Approximate methods for analyzing queueing networks models jf computing systems. Comp. Surveys, 1978, V.10, p.281-317.
117. Gelenbe E. On approximate computer system modes. J. ACM, 1975, V.22, p. 261-269.

118. Jackson J.R. Networks of waiting lines. *Operation Research*, 1957, V.5, p. 518-521.
119. Marshall K.K. Some inequalities in queueing. *Operations Research*, 1968, V.16,p.651-665.
120. Бахарева Н. Ф., Ушаков Ю. А. Управление нагрузкой на сети ЭВМ распознаванием и моделированием трафика // *Инфокоммуникационные технологии*. 2008. Т. 6. № 3. С. 56-62.
121. Abate, J., Choudhury, G. L. and Whitt, W. Waiting-time tail probabilities in queues with long-tail service-time distributions. *Queueing Systems* .16, 1994p.311-338.
122. Halfin, S. Delays in queues, properties and approximations. In *Teletraffic Issues in an Advanced Information Society, ITC 11*, M. Akiyama (ed.) Elsevier, Amsterdam, 1985,47-52.
123. Sadowsky, J. S. and Szpankowski, W. Maximum queue length and waiting time revisited: G/G/c queue. *Prob. Eng. Inf. Sci.* 6 , 1992 p.157-170.
124. Whitt, W. Approximations for the GI/G/m queue. *Prod. and Opns. Mangmt.*, 2,1993,p.114-161.
125. D.L. Jagerman, *Methods in traffic calculations*, AT&T Bell Lab. Tech. J. 63, 7, 1984, p.1291–1309.
126. Abate, J. & Whitt, W. Transient behavior of the M/M/1 queue via Laplace transforms. *Advances in Applied Probability* 20, 1998, p.145–178.
127. Kella, O. & Taksar, M.I. A heavy traffic limit for the cycle counting process in G/G/1, optional interruptions and elastic screen Brownian motion. *Mathematics of Operations Research* 19, 1994, p.132–151.
128. Kraemer, W. & Langenbach-Belz, M. Approximate formulae for the delay in the queueing system GI/G/1. *Proceedings of the Eighth International Teletraffic Congress, Melbourne, Australia, 1976*, p.235-1/8.
129. Szczotka, W. Exponential approximation of waiting time and queue size for queues in heavy traffic. *Advances in Applied Probability* 2, 1990, p. 230–240.

130. Whitt, W. Minimizing delays in the GI/G/1 queue. *Operations Research* 3, 1984, p.41–51.
131. Adan I., Resing J. *Queueing Systems*, Department of Mathematics and Computing Science Eindhoven University of Technology P.O. Eindhoven, The Netherlands, 2015, p.182.
132. Halfin, S. Delays in queues, properties and approximations. *Teletraffic Issues in an Advanced Information Society*, Proceedings of ITC-11, M. Akiyama, ed., Elsevier, Amsterdam, 1985, p.47-52.
133. S. L. Albin. Approximating a point process by a renewal process, ii: Superposition of arrival processes to queues. *Operations Research*, 1984, p.1133–1162.
134. Kingman, J. F. C. On queues in heavy traffic. *J. Roy. Stat. Soc. Ser. B* 24, 1962, 383- 392.
135. Abate J. and Whitt W. An Operational Calculus for Probability Distributions via Laplace Transforms. *Advances in Applied Probability* Vol. 28, No. 1, Mar., 1996, pp. 75-113.
136. Zaiming Liu, Senlin Yu. The M/M/C queueing system in a random environment, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Volume 436, Issue 1, 2016, p.556-567.
137. W. P. Peterson. A heavy traffic limit theorem for networks of queues with multiple customer types. *Mathematics of Operations Research*, 1991, 1p. 90–118.
138. M. Paquet, A. Martel, and G. Desaulniers. Including technology selection decisions in manufacturing network design models. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 17(2), 2004, p.117–125.
139. S. Huang, R. Batta, and R. Nagi. Distribution network design: selection and sizing of congested connections. *Naval Research Logistics*, 52, 2005, p.701–712.

# ПРИЛОЖЕНИЕ А. СВИДЕТЕЛЬСТВО ОБ ОФИЦИАЛЬНОЙ РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММЫ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



**СВИДЕТЕЛЬСТВО**  
о государственной регистрации программы для ЭВМ  
**№ 2016612657**

**Программный комплекс расчета характеристик систем  
массового обслуживания типа  $H_2/H_2/1$ ,  $H_2/M/1$  и  $M/M/1$  с  
запаздыванием во времени**

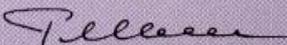
Правообладатели: *Тарасов Вениамин Николаевич (RU), Липилина  
Людмила Владимировна (RU)*

Авторы: *Тарасов Вениамин Николаевич (RU),  
Липилина Людмила Владимировна (RU)*

Заявка № **2015660878**  
Дата поступления **09 ноября 2015 г.**  
Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ **03 марта 2016 г.**

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности



 **Г.П. Ивлиев**

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б. АКТ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

«УТВЕРЖДАЮ»

Ректор ФГБОУ ВО ПГУТИ

д.т.н., профессор

Д. В. Мишин

\_\_\_\_\_ 2020 г.



АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы Липилиной Л.В.  
«Математические модели и методы анализа немарковских сетей массового обслуживания на основе гиперэкспоненциальных распределений», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук

Комиссия ФГБОУ ВО «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (ПГУТИ) в составе: председателя комиссии к.т.н., доцента Бурановой М.А., начальника управления организации учебного процесса, и членов комиссии – д.т.н., профессора Бахарева Н.Ф. зав. кафедрой информатики и вычислительной техники, д.т.н., профессора Тарасова В.Н. составили настоящий акт о том, что в университете на кафедрах «Программное обеспечение и управление в технических системах» и «Информатика и вычислительная техника» внедрены в учебный процесс следующие результаты диссертационной работы Липилиной Л.В.:

1. Математические модели узлов немарковской сети на основе систем массового обслуживания  $N_2/N_2/1$ ,  $N_2/M/1$  с гиперэкспоненциальными и экспоненциальными входными распределениями, решения для которых получены методом спектрального разложения решения интегрального уравнения Линдли.
2. Математическая модель узла немарковской сети на основе системы массового обслуживания  $M/M/1$  со сдвинутыми экспоненциальными входными распределениями.
3. Программный комплекс расчета характеристик систем массового обслуживания типа  $N_2/N_2/1$ ,  $N_2/M/1$  и  $M/M/1$  с запаздыванием во времени.

Результаты работы используются в дисциплине «Проектирование и моделирование сетей связи» в разделе «Системы и сети массового обслуживания» при подготовке магистров по направлениям подготовки 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника» и 27.04.04 «Управление в технических системах».

Председатель комиссии  
начальник управления организации учебного процесса  
к.т.н., доц.

Буранова М.А.

Члены комиссии  
Зав.каф. ИВТ  
д.т.н., проф.  
Зав.каф. ПОУТС  
д.т.н., проф.

Бахарева Н.Ф.

Тарасов В.Н.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В. АКТ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор

ООО «ИнтерСвязьСервис»

Гавлиевский А.С.

«26» октября 2020 г.



АКТ

### об использовании результатов диссертационного исследования Липилиной Людмилы Владимировны

Комиссия в составе: председатель директор ООО «ИнтерСвязьСервис» Гавлиевский А. С., члены комиссии: технический специалист Галюченко М.А., рассмотрев результаты практического использования диссертационного исследования Липилиной Л.В. «Математические модели и методы анализа немарковских сетей массового обслуживания на основе гиперэкспоненциальных распределений» совместно установила следующее:

1. Положения, разработки и научно-практические рекомендации диссертационного исследования использованы в проектной и эксплуатационной деятельности ООО «ИнтерСвязьСервис».

2. На основе сравнения экспериментальных данных по исследованию показателей производительности узлов и каналов связи сети ПАО «Ростелеком» с теоретическими расчетами задержки пакетов, нагрузок на каналы и т.п., принято решение рекомендовать в частичной модернизации сетей последней мили абонентов ФТТб.

Использование указанных результатов позволяет: повысить качество проектирования и эффективность использования имеющегося оборудования; сократить затраты на проектирование подключений абонентских узлов Интернет.

Технический специалист  
ООО «ИнтерСвязьСервис»

Галюченко М.А.