

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Литвинов Владислав Львович

Математическое моделирование и исследование  
колебаний механических систем  
с движущимися границами

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., проф.

Радченко Владимир Павлович

Самара – 2016

# Содержание

<b>Введение</b> .....	5
<b>Глава 1. Аналитический обзор</b> .....	12
<b>Глава 2. Разработка математических моделей для анализа продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами</b> .....	22
2.1. Описание одномерного по пространственной переменной объекта с движущимися границами .....	23
2.2. Геометрические и дифференциальные характеристики объекта с движущимися границами .....	24
2.3. Описание областей колебаний и соотношений на границе.....	25
2.4. Нахождение составляющих вариации интеграла действия.....	26
2.5. Получение системы дифференциальных уравнений, граничных и начальных условий, описывающих колебания объекта с движущимися границами .....	32
2.6. Линеаризация задачи.....	38
2.7. Рассмотрение частных случаев задачи о продольно–поперечных колебаниях объектов с движущимися границами.....	39
2.8. Выводы по второй главе.....	42
<b>Глава 3. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи аналитического метода замены переменных в системе функционально–разностных уравнений</b> .....	44
3.1. Аналитический метод замены переменных в системе функционально–разностных уравнений.....	45
3.2. Применение метода при граничных условиях первого рода.....	52
3.3. Применение метода при граничных условиях, отличных	

от условий первого рода.....	57
3.4. Выводы по третьей главе.....	64
<b>Глава 4. Решение краевой задачи с движущимися</b>	
<b>границами при помощи приближенного аналитического</b>	
<b>метода Канторовича–Галеркина.....</b>	
	65
4.1. Приближенный аналитический метод	
Канторовича–Галеркина.....	66
4.2. Применение метода Канторовича–Галеркина.....	76
4.3. Оценка погрешности метода Канторовича–Галеркина.....	83
4.4. Выводы по четвертой главе.....	85
<b>Глава 5. Разработка программного комплекса и анализ</b>	
<b>расчета колебательных и резонансных явлений</b>	
<b>в механических системах с движущимися границами.....</b>	
	86
5.1. Описание работы с комплексом программ .....	89
5.2. Исследование решений модельных краевых задач с помощью	
программного комплекса .....	90
5.3. Анализ резонансных свойств моделей с помощью	
программного комплекса .....	93
5.4. Исследование колебаний механических объектов	
с движущимися границами.....	103
5.5. Выводы по пятой главе.....	129
<b>Заключение.....</b>	131
<b>Литература.....</b>	133
<b>Приложение 1. Свидетельство о регистрации</b>	
<b>электронного ресурса.....</b>	
	154

<b>Приложение 2. Акт о внедрении результатов</b>	
<b>диссертационной работы.....</b>	<b>155</b>
<b>Приложение 3. Акт об использовании результатов</b>	
<b>диссертационной работы.....</b>	<b>156</b>
<b>Приложение 4. Вывод промежуточного выражения (4.32).....</b>	<b>157</b>
<b>Приложение 5. Вывод выражения резонансной</b>	
<b>частоты (4.81).....</b>	<b>158</b>

# Введение

**Актуальность работы.** Диссертационная работа посвящена постановке и разработке аналитических и приближенных аналитических методов решения краевых задач о колебаниях объектов с движущимися границами и анализу резонансных свойств этих объектов. Актуальность проблемы обусловлена тем, что в настоящее время вопросы надежности при проектировании технических объектов требуют все более полного учета динамических явлений. Широкое распространение в технике объектов с движущимися границами обуславливает необходимость развития методов математического моделирования их динамики и создания алгоритмического программного обеспечения для соответствующего анализа.

Задача о колебаниях систем с движущимися границами связана с получением решения систем дифференциальных уравнений в частных производных в переменных во времени областях. Такие задачи в настоящее время изучены недостаточно. Использование известных методов математической физики ограничено в основном классом задач с фиксированными границами.

Сложности, возникающие при постановке такого рода задач и получении их решений, объясняет тот факт, что до настоящего времени не существует достаточно общего подхода к анализу особенностей динамики таких систем. Полученные результаты ограничены в основном качественным описанием динамических явлений. Получению количественных характеристик, которые могли бы иметь практическую ценность, в известных публикациях уделено недостаточное внимание.

В настоящее время отсутствует не только комплексный подход для математического моделирования колебаний одномерных механических систем с движущимися границами, учитывающий геометрическую нелинейность, изгибную жесткость, взаимодействие продольных и поперечных колебаний, вязкоупругость, сопротивление среды,

взаимодействие между частями объекта слева и справа от границы, но и не сформулированы постановки такого рода задач. Решение вышеперечисленных проблем позволяет разработать строгие приближенные методы анализа резонансных свойств колеблющихся объектов с движущимися границами. Вышеизложенное и определяет актуальность диссертационной работы.

Рассмотренные в диссертации методы постановки и решения задач рассматриваемого типа, а также методы анализа резонансных свойств позволяют решить проблемы, возникающие при изучении колебаний объектов с движущимися границами.

**Цель диссертационной работы** состоит в разработке математической модели, описывающей колебания одномерных по пространственной координате объектов с движущимися границами; обобщении и развитии приближенных аналитических методов для решения задач рассматриваемого класса; создании алгоритмического и программного обеспечения для анализа резонансных свойств технических объектов с движущимися границами.

**Научная новизна** выполненной работы заключается в следующем:

1) Разработана новая математическая модель для моделирования анализа продольно–поперечных колебаний одномерных объектов с движущимися границами, учитывающая геометрическую нелинейность, изгибную жесткость, взаимодействие продольных и поперечных колебаний, вязкоупругость, сопротивление среды, взаимодействие между частями объекта слева и справа от движущейся границы, в частных случаях малых колебаний совпадающая с классическими линейными моделями;

2) Для моделирования колебаний систем с подвижными границами разработан и реализован аналитический метод решения волнового уравнения, позволяющий получить решение с более широким спектром условий на подвижных границах, в отличие от известных задач аналогичного типа с граничными условиями первого рода;

3) Выполнено обобщение приближенного аналитического метода Канторовича – Галёркина на более широкий класс задач, описываемых уравнениями гиперболического типа с условиями на движущихся границах, позволяющего учитывать действие на механическую систему сил сопротивления среды, изгибную жёсткость и жёсткость подложки, вязкоупругие свойства колеблющегося объекта и слабые возмущения на границах;

4) Разработана методика моделирования и численного исследования резонансных эффектов для объектов с движущимися границами, позволяющая учитывать возможность возникновения явления установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс; выполнен анализ зависимости амплитуды динамических мод разного порядка и границ резонансной области от относительной скорости границ с оценкой погрешности этих параметров;

5) В среде Matlab разработан программный комплекс «ТВ–ANALYSIS», предназначенный для решения некоторого класса краевых задач с движущимися границами, математического моделирования и изучения резонансных свойств объектов, состояние которых описывается этими постановками задач;

б) проведено исследование новых качественных и количественных свойств разработанных моделей.

**Теоретическая и практическая значимость** результатов работы заключается в разработке и исследовании новых математических моделей, описывающих колебания объектов с движущимися границами в форме дифференциальных уравнений в частных производных.

В теоретическом плане практическая значимость заключается в нелинейной постановке краевых задач с движущимися границами, аналитическом и приближенном аналитическом методах их решений, методике моделирования и численного исследования резонансных свойств объектов, состояние которых описывается этими краевыми задачами.

Прикладная ценность результатов работы заключается в возможности использования их для решения широкого круга технических проблем: анализе продольных и изгибных колебаний валов, балок и стержней с подвижными закреплениями; оценке надежности работы канатов в грузоподъемных установках и динамической устойчивости нитей, волокон и тесемочных передач; анализе колебаний лент в лентопротяжных механизмах, ленточных пилах, гибких звеньях передач с гибкой связью; исследовании колебаний проволоки при изготовлении оболочек вращения намоткой; управлении технологией изготовления кабелей, проката; оценке надежности работы железнодорожной контактной сети и т.д. Возникновение колебаний большой амплитуды в указанных объектах часто бывает недопустимым, поэтому на первом плане здесь стоит анализ резонансных свойств и проблема увеличения интенсивности колебаний при уменьшении длины объекта. Результатами такого анализа могут стать: повышение надежности работы технических объектов с переменными во времени границами, повышение точности расчетов конструкций на динамическую прочность. Полученные в работе теоретические положения и практические результаты частично внедрены в опытно–конструкторской работе ООО «Специальное конструкторско – технологическое бюро «Пластик» (г.Сызрань, Самарская область).

**На защиту выносятся:**

1. Математическая модель для моделирования и анализа продольно–поперечных колебаний одномерных объектов с движущимися границами, учитывающая: геометрическую нелинейность, изгибную жесткость, взаимодействие продольных и поперечных колебаний, вязкоупругость, сопротивление среды, взаимодействие между частями объекта слева и справа от движущейся границы.

2. Приближенный аналитический метод Канторовича – Галеркина применительно к анализу резонансных свойств объектов с движущимися границами.

3. Аналитический метод решения задач о колебаниях систем с движущимися границами (метод замены переменных в системе функционально–разностных уравнений), позволяющий получить решения волнового уравнения при широком спектре граничных условий, отличных от условий первого рода.

4. Методика моделирования и численного исследования резонансных явлений, имеющих место в объектах с движущимися границами.

5. Пакет прикладных программ, реализующий аналитические и приближенные аналитические методы и позволяющий выполнить анализ колебательных и резонансных явлений в механических системах с движущимися границами.

**Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций**, а также достоверность полученных результатов и исследований подтверждается:

– корректностью вводимых математических гипотез и допущений, использующихся при постановках задач и их решениях, строгостью в использовании математического аппарата и применении апробированных программных средств;

– сравнением аналитических и приближенных аналитических решений рассматриваемых краевых задач с известными результатами в частных случаях;

– преимуществом полученных новых теоретических и практических результатов с известными сведениями, когда существующие классические результаты являются частным случаем предложенных моделей и методов.

**Связь диссертационной работы с планами научных исследований.**

Полученные в работе теоретические положения и практические результаты использованы:

– в учебном процессе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» в лекционных курсах по дисциплинам: «Численные методы решения краевых задач», «Уравнения математической

физики», «Математическое моделирование в машиностроении», а также в лабораторных и курсовых работах (имеется акт внедрения);

– в опытно–конструкторской работе ООО «Специальное конструкторско – технологическое бюро «Пластик» (г.Сызрань, Самарская область).

### **Апробация работы.**

Основные результаты диссертации представлены на 2–й, 3–й и 4–й Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (г.Самара, 2005, 2006 и 2007 гг.), 1–й, 2–й, 3–й, 4–й, 5–й, 6–й, 7–й, 8–й, 9–й и 10–й Всероссийской научно–технической конференции–семинаре «Научно–техническое творчество: проблемы и перспективы» (г.Самара, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014 и 2015 гг. ), 5–й, 6–й, 7–й, 8–й и 9–й Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г.Самара, 2008, 2009, 2010, 2011 и 2012 гг.), 3–й и 4–й международной конференции «Математическая физика и ее приложения» (г.Самара, 2012, 2014 гг.), 47–й Международной конференции «Актуальные проблемы прочности» (г.Нижний Новгород, 2008 г.), 11–й Всероссийской научно–технической конференции «Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации – 2008» (г.Пермь, 2008 г.), весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения – XX» (г.Воронеж, 2009 г.), 3–й Международной научной конференции «Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования» (г.Воронеж, 2009 г.), 20–х Петербургских чтениях по проблемам прочности (г. Санкт–Петербург, 2012 г.), 4–ом российско–армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (г. Красноярск, 2012 г.), четвертой международной конференции, посвящённой 90–летию со дня рождения члена–корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева (г.Москва, 2013 г.), 17–й международной Саратовской зимней

школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (г.Саратов, 2014 г.), международной конференции «Функциональные пространства и теория приближения функций» посвященная 110–летию со дня рождения академика С.М. Никольского (г.Москва, 2015 г.); на научных семинарах «Механика и прикладная математика» Самарского государственного технического университета (рук. д.ф.–м.н., профессор В.П. Радченко, 2014–2016 г.г.).

**Публикации.** По материалам диссертации опубликовано 57 работ, из них 1 монография, 6 статей – в рецензируемых журналах из перечня ВАК, 31 статья – в сборниках трудов конференций и 19 тезисов докладов, получено свидетельство о регистрации электронного программного комплекса.

**Благодарности.** Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Радченко В.П. за постоянное внимание к работе и доценту Анисимову В.Н. за ряд постановок задач, консультации и поддержку работы.

**Личный вклад автора.** Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Работы [90 – 100, 102] выполнены самостоятельно, в работах [5, 7, 12, 13, 15, 17 – 19] диссертанту принадлежит совместная постановка задач и разработка методов решений, ему лично принадлежит алгоритмизация методов в виде программного комплекса, анализ результатов. В остальных работах [6, 8 – 11, 14, 16, 20, 21, 101], опубликованных в соавторстве, автору диссертации в равной мере принадлежат как постановка задачи, так и результаты выполненных исследований.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, библиографии и 5 приложений. Общий объём диссертации 158 страниц, из них 132 страницы основного текста, включая 15 рисунков, 5 таблиц. Библиография включает 167 наименований на 21 странице.

## Глава 1

### Аналитический обзор

Известно, что одномерная по пространственной координате задача о колебаниях механических объектов с движущимися границами впервые была поставлена Николаи Е.Л. в 1921 году [109]. Он получил точное решение для волнового уравнения

$$U_{xx}(x,t) - a^2 U_{tt}(x,t) = 0 \quad (1.1)$$

при граничных условиях первого рода, заданных на одной неподвижной и одной движущейся границе,

$$U(0,t) = 0; U(\ell(t),t) = 0 \quad (1.2)$$

и начальных условиях

$$U(x,0) = f_1(x); U_t(x,0) = f_2(x).$$

Поставленная им задача была решена при равномерном законе движения границы ( $\ell(t) = \ell_0 + vt$ ). На основании данного решения была исследована энергетическая сторона колебаний.

Интенсивное развитие данное направление получило в конце 50–х годов двадцатого века в связи с быстрым развитием и совершенствованием разного рода технических устройств. При этом возникли такие проблемы, как надежность работы канатов и тросов в подъемных установках – О.А. Горошко, Л.В. Колосов, Г.Н. Савин, А.М. Столяр [43, 45, 69, 70, 119, 111]; устойчивость колебаний нитей, волокон и тесемочных передач – В.А. Горбань, Ю.В. Якубовский [39 – 41, 133]; предотвращение колебаний кабелей, проволоки и проката на линиях их изготовления и магнитных лент в лентопротяжных механизмах – К.И. Рагульский [116]; уменьшение вибраций ленточных пил – С. Моут [106] и передач с гибкой связью – Я. Кожешник, В.А. Светлицкий [67, 125]. Проблема охватывает и такие явления, как колебания ленточных конвейеров – К.К. Мулухов, Х.С. Хосаев [107, 130],

устойчивость горения твердого топлива – С.К. Асланов [23], вибрации тел под действием движущихся нагрузок – Н.Ф. Курильская, Dan Stancioiu , Lu Sun [84, 157, 158], колебания проволоки при изготовлении оболочек вращения намоткой – В.Г. Коровин [71], надежность работы железнодорожной контактной сети – А.Д. Сергеев, Aboshi Mitsuo, Cho Yong Nyeon [127, 135, 138], предотвращение продольных, поперечных, изгибных и крутильных колебаний струн, валов, балок, канатов и стержней с подвижными креплениями – А.И. Весницкий, О.А. Горошко, М.В. Икрамов, В.П. Ястребов, Kotera Tadashi [28, 30 – 34, 36, 43, 44, 59, 134, 144], колебания систем, имеющих переменную зону контакта – С.А. Владимиров [38] и т.д.

Аналогичные задачи с движущимися границами возникают и при решении уравнений теплопроводности и диффузии. В частности, задача Стефана. Такие задачи рассмотрены в работах В.А. Кудинова, И.В. Кудинова, А.В. Еремина [74–77] и других авторов.

Исследованию смежного класса задач граничного управления посвящена большая серия статей В. А. Ильина, Е. И. Моисеева [54 – 58, 105]. Для волнового и телеграфного уравнений авторы рассматривают задачи с начальными и финальными условиями, устанавливают возможность перевода описываемого уравнением объекта из начального состояния в финальное с помощью граничных функций и строят управления в явном виде. Граничные функции, построенные В. А. Ильиным и Е. И. Моисеевым, позволили им перейти к решению задачи об оптимальном управлении, когда среди множества решений необходимо выделить то, которое доставляет минимум некоторому заданному функционалу. Результаты Андреева А. А., Егорова А. И., Знаменской Л. Н., Ильина В. А., Козловой Е.А., Лексиной С. В., Моисеева Е. И. [3, 4, 52, 54 – 58, 68, 88, 89, 105] и многих других авторов являются основой для исследования задач управления для уравнений и систем уравнений гиперболического типа.

Даже в линейной постановке решение задач гиперболического типа с условиями на движущихся границах связано со значительными математическими трудностями. Наличие условий на движущихся границах делает неприменимыми к данной проблеме традиционные методы математической физики.

При решении задач о колебаниях систем с движущимися границами используются как аналитические, так и приближенные методы. Начало исследований в данной области было основано на аналитических методах Е.Л. Николаи [109]. Аналитическим решениям проблемы посвящены работы Самарина Ю.П. [121, 124]. В этих работах на основании метода продолжения начальных условий за пределы исходного участка доказано существование и единственность решений линейных гиперболических уравнений, имеющих функцию Римана, в переменных во времени областях. Дальнейшее развитие точные методы получили в работах А.И. Весницкого [31, 32], В.А. Горбаня [39], Г.А. Григоряна [47], Г.А. Гринберга [50], А.И. Потапова [113] и др.

Известные аналитические решения линейных задач можно разделить на четыре класса:

- а) автомодельные решения;
- б) разложение решений по системе мгновенных собственных функций;
- в) сведение задачи к решению интегро–функциональных соотношений;
- г) остановка границ введением новых переменных.

Автомодельные решения получены для волнового уравнения и для уравнений колебаний круглой мембраны Ю.П. Самариным [121, 123, 124], для телеграфного уравнения Я. Кожевниковом [67], для уравнения изгибных колебаний В.П. Ястребовым [134]. Недостаток таких решений состоит в том, что они справедливы для областей, расширяющихся в автомодельном режиме из точки. Кроме того, отсутствие модовой структуры в решении затрудняет его анализ.

Предложенный Г.А. Гринбергом метод разложения в ряд по полной в каждый момент времени системе соответствующих собственных функций

для резонатора с неподвижной границей, совпадающей в данный момент времени с границей рассматриваемого нестационарного резонатора, приводит к необходимости решения бесконечной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка [48 – 50]. Решение данной системы затруднительно, и в упоминаемых выше публикациях не указывается, как можно получить конкретный результат.

Сведение задачи к интегро–функциональным соотношениям может осуществляться различными способами, например, с помощью известных из математической физики интегральных и функциональных представлений решений дифференциальных уравнений в частных производных – А.И. Весницкий, С.П. Пустовойт, А.Г. Раздольский, [33, 36, 114, 115, 117]. Наиболее часто здесь используется представление Римана. Интегро–функциональное уравнение может быть также получено в результате применения к задаче интегральных преобразований – И.М. Рушкевич [118]. Из точных методов решения получаемых здесь уравнений универсален только метод последовательных продолжений (итераций), однако он позволяет получить достаточно простое решение только для волн, два–три раза провзаимодействовавших с границами.

Наиболее эффективным из известных на сегодняшний день аналитических способов решения задач о колебаниях систем с движущимися границами является метод, основанный на введении новых переменных, останавливающих границы. Вообще, найти замену переменных, останавливающих границы, несложно, например:

$$\xi = \frac{x - \ell_1(t)}{\ell_2(t) - \ell_1(t)}; \tau = t,$$

где  $\ell_1(t)$  и  $\ell_2(t)$  – законы движения границ,  $x$  – пространственная координата,  $t$  – время. Однако данная замена настолько усложняет уравнение, что получаемая в результате задача оказывается сложнее исходной. Долгое время исследователи шли по пути эвристического подбора переменных для каждой конкретной задачи. При этом они стремились к тому, чтобы новое уравнение

либо было «разделяющимся» – К.А. Барсуков, О.А. Горошко [25, 45], либо его коэффициенты зависели бы только от пространственной координаты – О.А. Стеценко [128]. Весницким А.И. был предложен достаточно общий метод подбора новых переменных для волнового уравнения [31, 32, 35, 36]. Следуя этому методу, замена переменных производится в следующем виде:

$$\begin{aligned}\zeta &= g(t + x/a) - G(t - x/a); \\ \eta &= a^{-1}[g(t + x/a) + G(t - x/a)],\end{aligned}$$

где  $a$  – скорость распространения колебаний;  $g$  и  $G$  – некоторые функции. В результате такой замены исходное уравнение остается инвариантным (волновым), а  $g$  и  $G$  определяются из условия постоянства  $\zeta$  на границах  $x = \ell_1(t)$ ,  $x = \ell_2(t)$ .

При этом  $g$  и  $G$  определяются из системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} g(t + \ell_1(t)/a) - G(t - \ell_1(t)/a) = 0; \\ g(t + \ell_2(t)/a) - G(t - \ell_2(t)/a) = \ell = \text{const.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Существование решения данной системы доказано в работе [36].

Решить (1.3), вообще говоря, нелегко. Однако можно ставить обратные задачи, т.е. по заданным  $g$  и  $G$  находить законы движения границ. На этой основе А.И. Весницким [33, 36] и А.И. Потаповым [113] были получены решения для достаточно широкого круга законов движения границ.

Несколько иной подход к нахождению переменных был применен в работах К.А. Барсукова и Г.А. Григоряна и [25, 26, 46, 47]. Здесь одномерное волновое уравнение посредством формальной замены геометрической переменной на чисто мнимую величину преобразуется в двухмерное уравнение Лапласа. В ряде случаев удается подобрать аналитическую функцию, осуществляющую конформное отображение заданной области на бесконечную полосу таким образом, чтобы в новом уравнении переменные разделялись.

Заметим, что введение новых переменных приводит к усложнению граничных условий задачи. В связи с этим метод замены переменных

применяется в основном для граничных условий первого рода. Вторым недостатком метода замены переменных является то, что начальные условия задачи должны быть заданы не при  $t = 0$ , а на линии, определяемой уравнением  $g(t + x/a) + G(t - x/a) = 0$ .

Более универсальны приближенные методы, класс их широк. Сюда относятся, например, методы, применяемые для преодоления трудностей, возникающих на том или ином этапе получения точного решения: приближенное решение бесконечной системы дифференциальных уравнений, возникающей при использовании метода разложения по мгновенным собственным функциям; пренебрежение отдельными членами уравнения после введения новых переменных; приближенное решение системы (1.3) и интегро–функциональных уравнений и другие.

Заметим, что в большинстве случаев, встречающихся на практике, границы механических объектов движутся медленно по сравнению со скоростью распространения колебаний. Большинство приближенных решений получено применительно именно к таким системам. Самым распространенным здесь является метод Галеркина [74 – 77] в совокупности с методом Крылова–Боголюбова–Митропольского [27, 61, 104]. Метод заключается в асимптотическом разложении решения по степеням малого параметра. Он был развит применительно к динамике канатов шахтных грузоподъемников О.А. Горошко, Г.Н. Савиным и А.М. Столяром и [43, 119, 111]. Применительно к электродинамическим объектам данный подход использовал В.М. Корчинский [72]. Возможности этого метода очень широки. Так, с его помощью можно рассчитать продольно–поперечные колебания струн, изгибные колебания, волновые явления в вязкоупругих объектах.

Другим важным приближенным методом в динамике систем с движущимися границами является метод Канторовича [61] в совокупности с методом Галеркина [131].

Суть метода заключается в отыскании решения в виде

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x,t), \quad (1.4)$$

где  $X_n(x,t)$  – удовлетворяют граничным условиям задачи, а  $f_n(t)$  находятся из условия, чтобы решение (1.4) удовлетворяло уравнению  $L[U(x,t)] = \varphi(x,t)$ . Здесь  $L$  – линейный однородный дифференциальный оператор по  $\xi$ ;  $\varphi(x,t)$  – заданная функция класса  $C$ .

На основе метода Галеркина для определения  $f_n(t)$  получается следующая система дифференциальных уравнений:

$$\int_{\ell_1(t)}^{\ell_2(t)} L[U(x,t)] X_n(x,t) dx = \int_{\ell_1(t)}^{\ell_2(t)} \varphi(x,t) X_n(x,t) dx; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Данный метод использовался Лежневой А.А. в статье [86] для расчета продольных колебаний стержня и в статье [87] – для описания изгибных колебаний балки.

Свойства систем с движущимися границами можно разделить на два вида: волновые и резонансные.

Подробное рассмотрение волновых свойств систем, колебания в которых описываются одномерным волновым уравнением, при граничных условиях первого рода рассмотрены А.И. Весницким и А.И. Потаповым [28, 31, 32, 35, 36, 113]. В данных работах с помощью решений, полученных на основе метода замены переменных, выделены следующие характерные явления:

1) соотношение между частотами падающей волны и волны, отраженной от движущейся границы, записывается в виде двойного закона Доплера

$$\frac{\omega_{над.}}{\omega_{отр.}} = \frac{a - \ell'(t)}{a + \ell'(t)}, \quad \text{где } a \text{ – скорость распространения волн; } \ell(t) \text{ – закон}$$

движения границы;

2) отношение плотности энергии волны к квадрату ее мгновенной частоты не изменяется при отражении от движущейся границы;

3) для произвольного закона движения границы доказано, что энергия системы возрастает при уменьшении длины колеблющейся части и уменьшается при увеличении длины;

4) возможно возбуждение импульсных колебаний; например, при периодическом законе движения границы возможно получение в струне импульсов высокой частоты, причем с каждым новым отражением частота импульсов растет, и в случае, когда приток энергии от движущейся границы больше, чем ее рассеяние, наблюдается параметрическая неустойчивость, что было теоретически обосновано Весницким А.И.

В системах с движущимися границами возможны три вида резонансных явлений: установившийся резонанс (используется также термин «обобщенный резонанс»), прохождение через резонанс и параметрический резонанс.

Если на систему с переменными границами действует сила, изменяющаяся по такому же закону, что и собственные частоты, то при этом будет наблюдаться непрерывное во времени увеличение амплитуды. Такое явление принято называть установившимся резонансом. Впервые он был рассмотрен Г.О. Гореликом [42].

Прохождение через резонанс – это явление резкого увеличения амплитуды в течение конечного промежутка времени, когда мгновенная частота одного из собственных колебаний проходит через значение возмущающей частоты. Максимум амплитуды достигается спустя некоторое время после прохождения критической длины, когда одна из собственных частот, в случае, если границу остановить, становится равной возмущающей частоте. При этом, чем меньше скорость прохождения через критическую длину, тем большей величины достигает амплитуда колебаний.

Параметрический резонанс возникает при согласовании колебательного процесса и закона движения границы, например, при периодическом изменении длины объекта – А.И. Весницкий [36].

В настоящее время приемлемых аналитических или приближенных методов описания параметрического резонанса не существует. Для его описания необходимо использовать численные методы.

В большинстве статей, посвященных изучению колебаний объектов с движущимися границами, авторы ограничиваются главным образом только указанием на возможность возникновения резонансных явлений. Работа, где приводятся численные характеристики этого явления, – монография О.А. Горошко, Г.Н. Савина [45], в которой рассматривается прохождение через резонанс упругой нити переменной длины с грузом на конце.

Особо стоит вопрос об изучении резонансных свойств систем, границы которых движутся равномерно с равными скоростями, при этом длина колеблющейся части не изменяется (например, ременная передача). Здесь резонанс характеризуется набором постоянных собственных частот. Изучению таких систем посвящены статьи А.И. Весницкого, О.А. Горошко, Я. Кожевникова, Р.С. Курендата [31, 36, 44, 67, 82] и другие.

Погрешности описания колебаний линейными моделями заложены уже на этапе постановки задач. Рассматриваемые граничные условия ограничены в основном условиями первого рода типа (1.2) и не предусматривают взаимодействия между частями объекта слева и справа от границы. При быстром движении границы и уменьшении длины колеблющейся части интенсивность колебаний неограниченно возрастает, что говорит о некорректности использования в этих случаях линейных моделей.

Становится очевидной потребность в расширении круга задач, моделирующих колебания объектов с движущимися границами, а также методов их решения и программной реализации, которая формулируется в виде **основной цели настоящей диссертационной работы**: разработка математической модели, описывающей колебания одномерных по пространственной координате объектов с движущимися границами; обобщение и развитие приближенных аналитических методов для решения задач рассматриваемого класса; создание алгоритмического и программного

обеспечения для анализа резонансных свойств технических объектов с движущимися границами.

Для достижения поставленной цели решаются следующие взаимосвязанные **научные задачи**:

1) разработка новых математических моделей для анализа продольно–поперечных колебаний одномерных объектов с движущимися границами, учитывающих геометрическую нелинейность, изгибную жесткость, взаимодействие продольных и поперечных колебаний, вязкоупругость, сопротивление среды, взаимодействие между частями объекта слева и справа от движущейся границы;

2) обобщение приближенного аналитического метода Канторовича – Галёркина на более широкий класс задач, описываемых уравнениями гиперболического типа с условиями на движущихся границах, позволяющего учитывать действие на механическую систему сил сопротивления среды, изгибную жёсткость и жёсткость подложки, вязкоупругие свойства колеблющегося объекта и слабые возмущения на границах;

3) разработка аналитического метода решения волнового уравнения, позволяющего получить решение с более широким спектром условий на подвижных границах, в отличие от известных задач аналогичного типа с граничными условиями первого рода (1.2);

4) разработка методики моделирования резонансных эффектов для объектов с движущимися границами, позволяющей учитывать возможность возникновения явления установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс;

5) разработка алгоритмического и программного обеспечения, реализующего аналитические и приближенные аналитические методы для исследования модельных краевых задач и анализа расчета колебательных и резонансных явлений в механических системах с движущимися границами;

6) исследование новых качественных и количественных свойств разработанных математических моделей.

## Глава 2

# **Разработка математических моделей для анализа продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами**

До настоящего времени задачи о продольно – поперечных колебаниях объектов с движущимися границами решались в основном при линейной постановке, не учитывался энергетический обмен через движущуюся границу и взаимодействие между продольными и поперечными колебаниями. В редких случаях учитывалось действие сил сопротивления внешней среды. Реальные же технические объекты намного сложнее, например, при увеличении интенсивности колебаний большое влияние на колебательный процесс оказывают геометрические нелинейности объекта.

В связи с интенсивным развитием численных методов появилась возможность более точного описания сложных математических моделей продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами, учитывающих большое число факторов, влияющих на колебательный процесс.

Целями настоящей главы являются:

1. Получение ряда нелинейных математических моделей для анализа одномерных краевых задач с подвижными границами с учетом взаимодействия между продольными и поперечными колебаниями.
2. Вывод граничных условий в случае наличия взаимодействия между частями объекта слева и справа от границы.
3. Линеаризация задачи о продольно–поперечных колебаниях объектов с движущимися границами. Рассмотрение частных случаев задач о продольно–поперечных колебаниях объектов с движущимися границами.

## 2.1. Описание одномерного по пространственной переменной объекта с движущимися границами

Рассмотрена модель, описывающая продольно–поперечные колебания одномерного по пространственной переменной объекта с движущимися границами, обобщенная схема которого изображена на рисунке 2.1. Объект может быть струной, канатом, стержнем или балкой.

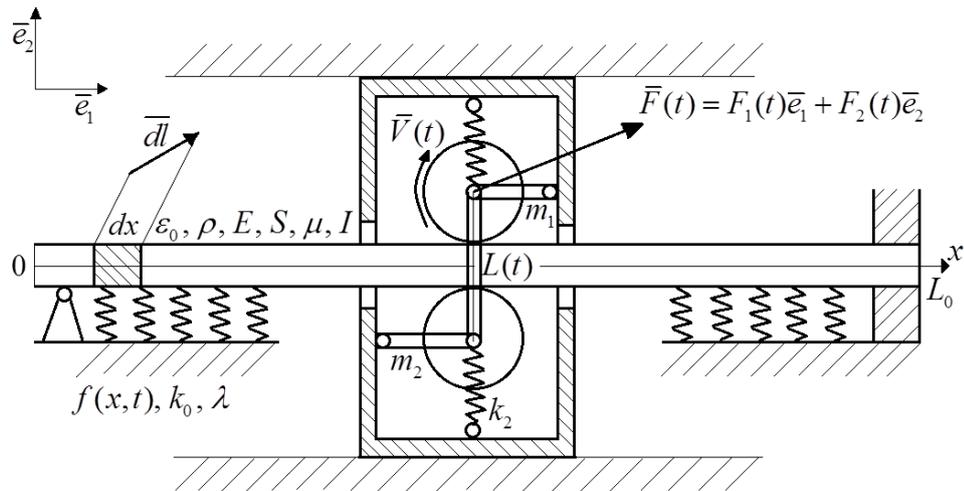


Рис. 2.1. Обобщенная схема объекта

Для объекта введены следующие обозначения:  $\rho$  – объёмная плотность массы;  $S$  – площадь поперечного сечения;  $I$  – осевой момент инерции поперечного сечения объекта;  $E$  – модуль упругости материала объекта;  $\mu$  – коэффициент, характеризующий свойство вязкоупругости объекта на основе структурной модели Фойгта;  $\varepsilon_0$  – начальная продольная деформация объекта, создающая натяжение  $T = ES\varepsilon_0$ ;  $x$  – расстояние от левой границы до точки объекта, находящегося в недеформированном состоянии (смещение в продольном направлении равно нулю);  $L(t)$  – длина недеформированного в продольном направлении объекта слева от движущейся границы;  $t \in [0, t_1]$  – время;  $L_0$  – общая длина объекта.

Для характеристики окружения объекта введены следующие параметры:  $k_0$  – жесткость подложки, на которой лежит объект (сила, действующая на

единицу длины при единичном поперечном смещении);  $V(t)$  – окружная линейная скорость роликов;  $\lambda$  – коэффициент, характеризующий действие сил сопротивления внешней среды (силы сопротивления пропорциональны скорости поперечного движения и длине). На объект в направлении вектора  $\bar{e}_2$  действует распределённая нагрузка  $f(x,t)$ . На движущуюся границу действует сила  $\bar{F}(t) = F_1(t) \cdot \bar{e}_1 + F_2(t) \cdot \bar{e}_2$ .

Движущаяся граница состоит из жёсткосоединённых роликов массой  $m_2$ . Масса системы роликов и каркаса равна  $m_1$ . Пружина жёсткости  $k_2$  реагирует на поперечное смещение системы роликов. В продольном направлении имеет место жёсткое соединение между системой роликов и каркасом. Между роликами и объектом проскальзывание отсутствует, поэтому при предположении малости продольных деформаций имеет место равенство  $L'(t) = V(t)$ .

Для характеристики продольно–поперечных колебаний объекта введём функции:  $u_1^*(x,t)$ ,  $u_2(x,t)$  – смещения точек объекта с координатой  $x$  в момент времени  $t$  в направлении базисных векторов  $\bar{e}_1$ ,  $\bar{e}_2$  соответственно.

Для сокращения записей введем новую функцию

$$u_1(x,t) = u_1^*(x,t) + x + \varepsilon_0 x. \quad (2.1)$$

Функция  $u_1(x,t)$  представляет собой расстояние от левой границы до точки с координатой  $x$  деформированного объекта.

## 2.2. Геометрические и дифференциальные характеристики объекта с движущимися границами

Рассмотрим геометрию объекта, т.е. найдем изменение длины элемента  $dx$  и его кривизну.

Элементарный вектор  $\bar{dl}$ , в который перейдет элемент  $dx$  (рисунок 2.1) в момент времени  $t$ , равен

$$\overline{dl} = (u_{1,x}^* + 1 + \varepsilon_0) dx \overline{e}_1 + u_{2,x} dx \overline{e}_2 \quad (2.2)$$

Здесь и далее под  $u_1^*$  и  $u_2$  понимаются функции  $u_1^*(x, t)$  и  $u_2(x, t)$ . Длина вектора находится по формуле  $|\overline{dl}| = \sqrt{(1 + \varepsilon_0 + u_{1,x}^*)^2 + u_{2,x}^2} dx$ .

Найдём относительную деформацию элемента  $dx$ :

$$\varepsilon(x, t) = \frac{|\overline{dl}| - dx}{dx} = \sqrt{(1 + \varepsilon_0 + u_{1,x}^*)^2 + u_{2,x}^2} - 1 \quad (2.3)$$

С учетом (2.1) формула (2.3) будет иметь вид

$$\varepsilon(x, t) = \sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1, \quad j = 1, 2. \quad (2.4)$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам предусматривается свертывание (суммирование).

В предположении малости изгибных деформаций кривизна элемента  $\overline{dl}$  (рисунок 2.1) находится по формуле

$$K(x, t) = u_{2,xx}. \quad (2.5)$$

### 2.3. Описание областей колебаний и соотношений на границе

Для учета энергетического обмена, происходящего на границе, разобьём область колебаний в координатах  $x \sim t$  на две открытые области  $W_1$ ,  $W_2$  (рисунок 2.2), которые соответствуют частям объекта слева и справа от движущейся границы. Через  $W$  обозначена объединённая область, состоящая из  $W_1$  и  $W_2$ . Через  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  обозначены замкнутые контуры, окружающие области  $W_1$  и  $W_2$  (положительное направление обхода против часовой стрелки).

Обозначим через  $u_i(L(t) - 0, t)$ ,  $u_i(L(t) + 0, t)$  значения функции  $u_i(x, t)$  слева и справа от движущейся границы ( $x(t) = L(t)$ ).

Из условия неразрывности деформаций объекта следует, что

$$u_i(L(t)-0, t) = u_i(L(t)+0, t), \quad j = 1, 2. \quad (2.6)$$

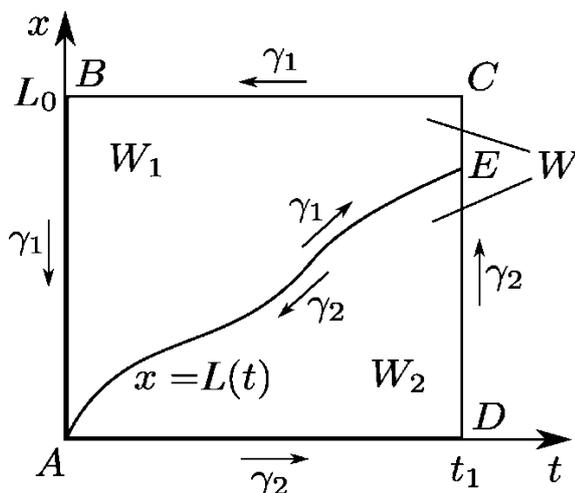


Рис.2.2 Области колебаний.

Характер взаимодействия роликов и объекта (рисунок 2.1) исключает угловое смещение в точке их контакта, поэтому при наличии изгибной жёсткости имеет место равенство

$$u_{2,x}(L(t)-0, t) = u_{2,x}(L(t)+0, t) = 0. \quad (2.7)$$

Здесь и далее под  $u_{i,x}(L(t) \pm 0, t)$  понимается значение  $\left. \frac{d}{dx} u(x, t) \right|_{x=L(t) \pm 0}$ .

Найдём полную производную от обеих частей соотношения (2.6) по  $t$ :

$$\begin{aligned} u_{i,x}(L(t)-0, t)L'(t) + u_{i,t}(L(t)-0, t) &= \\ &= u_{i,x}(L(t)+0, t)L'(t) + u_{i,t}(L(t)+0, t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

С учётом (2.7) выражение (2.8) преобразуется к виду

$$u_{2,t}(L(t)-0, t) = u_{2,t}(L(t)+0, t) = 0. \quad (2.9)$$

## 2.4. Нахождение составляющих вариации интеграла действия

Для получения модели, описывающей продольно–поперечные колебания объекта, предлагается использовать вариационный принцип Гамильтона [108]: если заданы начальное и конечное состояния системы, то

из всех возможных законов движения реализуется такой, для которого действие

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

принимает стационарное значение ( $T$  – кинетическая энергия системы,  $U$  – потенциальная энергия). Для применения принципа понадобятся вариации интеграла действия от кинетической и потенциальной энергии системы.

### 2.4.1. Вариация от кинетической энергии объекта

Кинетическая энергия объекта, изображенного на рисунке 2.1, равна

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \rho S u_{j,t} u_{j,t} dx. \quad (2.10)$$

Интеграл действия определяется формулой

$$I_{T_1} = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} dt \int_0^{L_0} \rho S u_{j,t} u_{j,t} dx. \quad (2.11)$$

Представим двукратный интеграл в виде двойного  $I_{T_1} = \frac{1}{2} \rho S \iint_W u_{j,t} u_{j,t} dW$  и

найдем вариацию

$$\delta I_{T_1} = \rho S \left( \iint_{W_1} u_{j,t} \delta u_{j,t} dW + \iint_{W_2} u_{j,t} \delta u_{j,t} dW \right). \quad (2.12)$$

Здесь интеграл по области  $W$  представлен как сумма интегралов по областям  $W_1$  и  $W_2$ .

Представим подынтегральное выражение в виде

$$u_{k,t} \delta u_{k,t} = \frac{\partial}{\partial t} (u_{k,t} \delta u_k) - u_{k,tt} \delta u_k. \text{ С помощью формулы Грина } \iint_G \frac{\partial P}{\partial t} dG = \oint_g P dx$$

преобразуем выражение (2.12). В результате получим:

$$\delta I_{T_1} = \rho S \left( \oint_{\gamma_1} u_{k,t} \delta u_k dx + \oint_{\gamma_2} u_{k,t} \delta u_k dx - \iint_W u_{k,tt} \delta u_k dW \right). \quad (2.13)$$

Здесь  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  замкнутые контуры, окружающие области  $W_1$  и  $W_2$ .

### 2.4.2. Вариация интеграла действия от кинетической энергии системы роликов и каркаса

Выразим скорости движения границы в продольном и поперечном направлениях:

$$V_i(t) = \frac{d}{dt} u_i(L(t), t), \quad i = 1, 2.$$

Здесь и далее  $(d/dt)$  – полная производная.

Кинетическая энергия движущейся границы определяется выражением

$$T_2 = \frac{1}{2} (m_1 V_1^2(t) + m_2 V_2^2(t)).$$

Интеграл действия от кинетической энергии системы роликов и каркаса

$$I_{T_2} = \frac{1}{2} m_1 \int_0^{t_1} \left( \frac{d}{dt} u_1(L(t), t) \right)^2 dt + \frac{1}{2} m_2 \int_0^{t_1} \left( \frac{d}{dt} u_2(L(t), t) \right)^2 dt$$

Для вариации действия получим

$$\delta I_{T_2} = m_1 \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} u_1(L(t), t) \frac{d}{dt} (\delta u_1|_{x=L(t)}) dt + m_2 \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} u_2(L(t), t) \frac{d}{dt} (\delta u_2|_{x=L(t)}) dt. \quad (2.14)$$

Представим подынтегральное выражение из (2.14) в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} u_i(L(t), t) \frac{d}{dt} (\delta u_i|_{x=L(t)}) = \\ & = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} u_i(L(t), t) \delta u_i|_{x=L(t)} \right) - \frac{d^2}{dt^2} u_i(L(t), t) \delta u_i|_{x=L(t)}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В результате для вариации (2.14) получим

$$\begin{aligned} \delta I_{T_2} = & \sum_{i=1}^2 m_i \left( \left( \frac{d}{dt} u_i(L(t), t) \delta u_i|_{x=L(t)} \right) \Big|_{t=t_1} - \left( \frac{d}{dt} u_i(L(t), t) \delta u_i|_{x=L(t)} \right) \Big|_{t=0} - \right. \\ & \left. - \int_0^{t_1} \frac{d^2}{dt^2} u_i(L(t), t) \delta u_i|_{x=L(t)} dt \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

### 2.4.3. Вариация интеграла действия от упругой потенциальной энергии и вязкоупругих сил при продольной деформации объекта

Для учёта зависимости между деформациями и напряжениями в условиях одноосного напряженного состояния предлагается использовать модель Фойгта

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \mu\dot{\varepsilon}(t), \quad (2.17)$$

где  $\sigma(t)$  – напряжение;  $E$  – модуль упругости;  $\varepsilon(t)$  – относительная деформация;  $\mu$  – параметр, характеризующий вязкоупругость модели;  $\dot{\varepsilon}(t)$  – производная по времени от  $\varepsilon(t)$ .

Упругая потенциальная энергия при продольной деформации объекта находится по формуле

$$U_1 = \frac{1}{2} ES \iint_W \varepsilon^2(x,t) dW, \quad (2.18)$$

где  $\varepsilon(x,t)$  – определяется выражением (2.3).

Вариация интеграла действия представляет собой изменение энергии при изменении функций  $u_1, u_2$ . Вариация интеграла действия упругой деформации и вязкоупругих сил задается соотношением

$$\delta I_{U_1} = S \iint_W (E\varepsilon(x,t) + \mu\varepsilon_t(x,t)) \delta\varepsilon(x,t) dW. \quad (2.19)$$

Из (2.4) получим:  $\varepsilon_t(x,t) = \frac{u_{j,x} u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}}$ ;  $\delta\varepsilon(x,t) = \frac{u_{i,x} \delta u_{i,x}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}}$ .

После преобразований (2.19) примет вид

$$\delta I_{U_1} = S \iint_W \left( \left( E \left( \sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1 \right) + \mu \frac{u_{j,x} u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \frac{u_{i,x}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \delta u_{i,x} dW. \quad (2.20)$$

Здесь по индексам  $i, j$  производится свертывание.

Представим подынтегральное выражение из (2.20) в виде:

$$\begin{aligned}
& \left( E\left(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}} - 1\right) + \mu \frac{u_{j,x}u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) \frac{u_{i,x}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \delta u_{i,x} = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E\left(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}} - 1\right) + \mu \frac{u_{j,x}u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) \frac{u_{i,x} \delta u_i}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) - \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E\left(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}} - 1\right) + \mu \frac{u_{j,x}u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) \frac{u_{i,x}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) \delta u_i. \tag{2.21}
\end{aligned}$$

После подстановки (2.21) в (2.20) и использовании формулы Грина для областей  $W_1$  и  $W_2$  выражение (2.20) примет вид:

$$\begin{aligned}
\delta I_{U_1} = & -S \iint_W \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E\left(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}} - 1\right) + \mu \frac{u_{j,x}u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) \frac{u_{i,x}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) \delta u_i dW - \\
& - S \oint_{\gamma_1} \left( E\left(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}} - 1\right) + \mu \frac{u_{j,x}u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) \frac{u_{i,x} \delta u_i}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} dt - \\
& - S \oint_{\gamma_2} \left( E\left(\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}} - 1\right) + \mu \frac{u_{j,x}u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} \right) \frac{u_{i,x} \delta u_i}{\sqrt{u_{j,x}u_{j,x}}} dt. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

#### 2.4.4. Вариация интеграла действия от потенциальной энергии и вязкоупругих сил для деформаций изгиба объекта

При описании состояния объекта с помощью модели Фойгта (2.17) изгибающий момент в сечении записывается следующим образом:

$$M = I(EK(x,t) + \mu K_t(x,t)).$$

Здесь:  $I$  – момент инерции поперечного сечения объекта;

$K(x,t)$  – кривизна объекта, которая определяется выражением (2.5).

Интеграл действия энергии упругой деформации определяется следующим выражением:

$$I_{U_2} = \frac{1}{2} EI \iint_W u_{2,xx}^2 dW .$$

Вариация интеграла действия вязко–упругих сил имеет вид

$$\delta I_{U_2} = I \iint_W (Eu_{2,xx} \delta u_{2,xx} + \mu u_{2,xx} \delta u_{2,xx}) dW . \quad (2.23)$$

Выполним следующие преобразования подынтегральных составляющих в (2.23):

$$u_{2,xx} \delta u_{2,xx} = \frac{\partial}{\partial x} (u_{2,xx} \delta u_{2,x}) - \frac{\partial}{\partial x} (u_{2,xxx} \delta u_2) + u_{2,xxx} \delta u_2 ; \quad (2.24)$$

$$u_{2,xx} \delta u_{2,xx} = \frac{\partial}{\partial x} (u_{2,xx} \delta u_{2,x}) - \frac{\partial}{\partial x} (u_{2,xxx} \delta u_2) + u_{2,xxx} \delta u_2 . \quad (2.25)$$

С помощью формулы Грина, учитывая (2.24), (2.25) для (2.23) получим

$$\begin{aligned} \delta I_{U_2} = I & \left( \iint_W (Eu_{2,xxx} + \mu u_{2,xxx}) \delta u_2 dW + \right. \\ & + \oint_{\gamma_1} ((Eu_{2,xxx} + \mu u_{2,xxx}) \delta u_2 - (Eu_{2,xx} + \mu u_{2,xx}) \delta u_{2,x}) dt + \\ & \left. + \oint_{\gamma_2} ((Eu_{2,xxx} + \mu u_{2,xxx}) \delta u_2 - (Eu_{2,xx} + \mu u_{2,xx}) \delta u_{2,x}) dt. \right) \quad (2.26) \end{aligned}$$

### 2.4.5. Вариации интегралов действия от факторов внешнего окружения объекта

Вариация интеграла действия от упругой деформации подложки задается соотношением

$$\delta I_{U_3} = k_0 \iint_W u_2 \delta u_2 dW . \quad (2.27)$$

Вариация интеграла действия от упругого присоединения системы роликов выражается соотношением

$$\delta I_{U_4} = k_2 \int_0^{l_1} u_2(L(t), t) \delta u_2|_{x=L(t)} dt . \quad (2.28)$$

Вариация интеграла действия внешних сил сопротивления

$$\delta I_{U_5} = \lambda \iint_W u_{2,t} \delta u_2 dW. \quad (2.29)$$

Вариация интеграла действия от внешней распределенной нагрузки задается соотношением

$$\delta I_{U_6} = - \iint_W f(x,t) \delta u_2 dW, \quad (2.30)$$

а вариация интеграла действия от внешней сосредоточенной нагрузки составляет величину

$$\delta I_{U_7} = - \int_0^{t_1} F_k(t) \delta u_k \Big|_{x=L(t)} dt. \quad (2.31)$$

## 2.5. Получение системы дифференциальных уравнений, граничных и начальных условий, описывающих колебания объекта с движущимися границами

Согласно вариационному принципу Гамильтона, вариация интеграла действия должна быть равна нулю, т.е.

$$\delta I = -\delta I_{T_1} - \delta I_{T_2} + \delta I_{U_1} + \delta I_{U_2} + \delta I_{U_3} + \delta I_{U_4} + \delta I_{U_5} + \delta I_{U_6} + \delta I_{U_7} = 0. \quad (2.32)$$

Составляющие вариации определены выражениями (2.13), (2.16), (2.22), (2.26)–(2.31).

### 2.5.1. Система дифференциальных уравнений в частных производных

Выпишем составляющие  $\delta I$ , содержащие двойные интегралы:

$$\begin{aligned} & \iint_W \left( \rho S u_{k,tt} \delta u_k - S \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E \left( \sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1 \right) + \mu \frac{u_{j,x} u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \frac{u_{i,x}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \delta u_i + \right. \\ & \left. + I \left( E u_{2,xxxx} + \mu u_{2,xxxx} \right) \delta u_2 + \lambda u_{2,t} \delta u_2 + k_0 u_2 \delta u_2 - f(x,t) \delta u_2 \right) dW \equiv 0, \quad (2.33) \end{aligned}$$

здесь по индексам  $i, j, k$  производится свертывание. Индексы принимают значения 1 и 2.

Так как вариации  $\delta u_1$  и  $\delta u_2$  произвольны, то тождественное равенство нулю выражения (2.33) возможно, если коэффициенты перед ними равны нулю. Тогда система дифференциальных уравнений, описывающая продольно–поперечные колебания объекта, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho S u_{1,tt} - S \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E \left( \sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1 \right) + \mu \frac{u_{j,x} u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \frac{u_{1,x}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) = 0; \\ \rho S u_{2,tt} - S \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E \left( \sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1 \right) + \mu \frac{u_{j,x} u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \frac{u_{2,x}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) + \\ + I \left( E u_{2,xxx} + \mu u_{2,xxx} \right) + \lambda u_{2,t} + k_0 u_2 - f(x,t) = 0. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

### 2.5.2. Граничные условия при $x=0$ и $x=L_0$

Рассмотрим части вариации  $\delta I$ , содержащие интегралы по контуру  $\gamma_1$  при  $x=0$ . Интеграл по замкнутому контуру выражения (2.13) на линии  $x=0$  равен нулю, так как интегрирование производится по  $dx$ . Выпишем части вариации  $\delta I$  интегралов по замкнутым контурам выражений (2.22), (2.26) при  $x=0$ :

$$\int_0^{t_1} \left( \left( \left( E \left( \sqrt{u_{j,x}(0,t) u_{j,x}(0,t)} - 1 \right) + \mu \frac{u_{j,x}(0,t) u_{j,x}(0,t)}{\sqrt{u_{j,x}(0,t) u_{j,x}(0,t)}} \right) \frac{u_{i,x}(0,t)}{\sqrt{u_{j,x}(0,t) u_{j,x}(0,t)}} \right) S \delta u_i \Big|_{x=0} - \right. \\ \left. - I \left( E u_{2,xxx}(0,t) + \mu u_{2,xxx}(0,t) \right) \delta u_2 \Big|_{x=0} + I \left( E u_{2,xx}(0,t) + \mu u_{2,xx}(0,t) \right) \delta u_{2,x} \Big|_{x=0} \right) dt = 0. \quad (2.35)$$

На левой границе (рисунок 2.1) имеет место шарнирное закрепление, поэтому

$$u_1^*(0,t) = 0, \quad u_2(0,t) = 0, \quad u_{2,xx}(0,t) = 0.$$

Это обеспечивает тождественное равенство нулю вариации (2.35).

Если произвести аналогичное рассмотрение частей выражений (2.13), (2.22), (2.26) по замкнутому контуру  $\gamma_2$  при  $x = L_0$ , то получим аналогичное (3.35) выражение для вариации при  $x = L_0$ . На правой границе ( $x = L_0$ ) имеют место равенства:

$$u_1^*(L_0, t) = 0, \quad u_2(L_0, t) = 0, \quad u_{2,x}(L_0, t) = 0,$$

что также обеспечивает равенство нулю соответствующей вариации.

### 2.5.3. Граничные условия при $x = L(t)$

Выпишем части вариаций  $\delta I$  по замкнутым контурам  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  выражений (2.13), (2.16), (2.22), (2.26), (2.28), (2.31), соответствующих линиям  $x = L(t)$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} \left[ \rho S(u_{k,t}(L(t)-0, t) - u_{k,t}(L(t)+0, t)) \delta u_k \Big|_{x=L(t)} L'(t) + \right. \\ & + \sum_{n=1}^2 m_n \frac{d^2 u_i(L(t), t)}{dt^2} \delta u_i \Big|_{x=L(t)} + S \left( \left( E \left( \sqrt{u_{j,x}(L(t)-0, t) u_{j,x}(L(t)-0, t)} - 1 \right) + \right. \right. \\ & + \mu \frac{u_{j,x}(L(t)-0, t) u_{j,xt}(L(t)-0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t)-0, t) u_{j,x}(L(t)-0, t)}} \Bigg) \frac{u_{i,x}(L(t)-0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t)-0, t) u_{j,x}(L(t)-0, t)}} - \\ & \quad \left. - \left( E \left( \sqrt{u_{j,x}(L(t)+0, t) u_{j,x}(L(t)+0, t)} - 1 \right) + \right. \right. \\ & + \mu \frac{u_{j,x}(L(t)+0, t) u_{j,xt}(L(t)+0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t)+0, t) u_{j,x}(L(t)+0, t)}} \Bigg) \frac{u_{i,x}(L(t)+0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t)+0, t) u_{j,x}(L(t)+0, t)}} \Bigg) \delta u_i \Big|_{x=L(t)} - \\ & - I \left( E u_{2,xxx}(L(t)-0, t) + \mu u_{2,xxx}(L(t)-0, t) - \right. \\ & - E u_{2,xxx}(L(t)+0, t) - \mu u_{2,xxx}(L(t)+0, t) \Big) \delta u_2 \Big|_{x=L(t)} + \\ & + I \left( E u_{2,xx}(L(t)-0, t) + \mu u_{2,xx}(L(t)-0, t) - \right. \\ & - E u_{2,xx}(L(t)+0, t) - \mu u_{2,xx}(L(t)+0, t) \Big) \delta u_{2,x} \Big|_{x=L(t)} + \\ & \left. + k_2 u_2(L(t), t) \delta u_2 \Big|_{x=L(t)} - F_k(t) \delta u_k \Big|_{x=L(t)} \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Приравнявая коэффициенты перед вариациями  $\delta u_1|_{x=L(t)}$ ,  $\delta u_2|_{x=L(t)}$  к нулю и учитывая соотношения (2.6), (2.7), (2.9), получим:

$$\begin{aligned} & \rho S(u_{1,t}(L(t)-0,t) - u_{1,t}(L(t)+0,t))L'(t) + m_1 \frac{d^2 u_1(L(t),t)}{dt^2} + \\ & + \left( ES\left(\sqrt{u_{j,x}(L(t)-0,t)u_{j,x}(L(t)-0,t)} - 1\right) + \right. \\ & + \left. \mu S \frac{u_{j,x}(L(t)-0,t)u_{j,xt}(L(t)-0,t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t)-0,t)u_{j,x}(L(t)-0,t)}} \right) \frac{u_{1,x}(L(t)-0,t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t)-0,t)u_{j,x}(L(t)-0,t)}} - \\ & - \left( ES\left(\sqrt{u_{j,x}(L(t)+0,t)u_{j,x}(L(t)+0,t)} - 1\right) + \right. \\ & + \left. \mu S \frac{u_{j,x}(L(t)+0,t)u_{j,xt}(L(t)+0,t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t)+0,t)u_{j,x}(L(t)+0,t)}} \right) \frac{u_{1,x}(L(t)+0,t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t)+0,t)u_{j,x}(L(t)+0,t)}} \Big) F_1(t) = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} & m_2 \frac{d^2}{dt^2} u_2(L(t),t) + E I u_{2,xxx}(L(t)+0,t) + \mu I u_{2,xxx}(L(t)+0,t) - \\ & - E I u_{2,xxx}(L(t)-0,t) - \mu I u_{2,xxx}(L(t)-0,t) + \\ & + k_2 u_2(L(t),t) - F_2(t) = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

К полученным граничным условиям на границе  $x=L(t)$  необходимо добавить соотношения [108]:

$$\begin{aligned} & u_1(L(t)-0,t) = u_1(L(t)+0,t); \\ & u_2(L(t)-0,t) = u_2(L(t)+0,t); \\ & u_{2,x}(L(t)-0,t) = u_{2,x}(L(t)+0,t) = 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

В выражении (2.36) присутствуют вариации  $\delta u_1|_{x=L(t)}$ ,  $\delta u_2|_{x=L(t)}$ ,  $\delta u_{2,x}|_{x=L(t)}$ . Если функции заданы, то их вариации равны нулю. Задание функций  $u_1(x,t)$ ,  $u_2(x,t)$ ,  $u_{2,x}(x,t)$  на границе обеспечивает равенство нулю вариаций (2.36). Кроме (2.39) граничные условия могут быть также следующими:

$$\begin{aligned}
u_1(L(t)-0,t) &= u_1(L(t)+0,t) = f_1(t); \\
u_2(L(t)-0,t) &= u_2(L(t)+0,t) = f_2(t); \\
u_{2,x}(L(t)-0,t) &= u_{2,x}(L(t)+0,t) = f_3(t).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

где  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$  – заданные функции.

#### 2.5.4. Начальные условия

Выпишем части вариаций выражений (2.13), (2.16), соответствующих интервалу от  $t = 0$  и  $t = t_1$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^2 m_n \left( \frac{du_i(L(t),t)}{dt} \delta u_i \Big|_{x=L(t)} \right) \Big|_0^t - \int_0^{L(0)-0} u_{k,t}(x,0) \delta u_k \Big|_{t=0} dx - \\
& - \int_{L(0)+0}^{L_0} u_{k,t}(x,0) \delta u_k \Big|_{t=0} dx + \int_0^{L(0)-0} u_{k,t}(x,t_1) \delta u_k \Big|_{t=t_1} dx + \\
& + \int_{L(0)+0}^{L_0} u_{k,t}(x,t_1) \delta u_k \Big|_{t=t_1} dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Начальные условия обычно задаются при  $t = 0$  в виде

$$\begin{aligned}
u_1(x,0) &= \varphi_1(x); & u_{1,t}(x,0) &= \varphi_2(x); \\
u_2(x,0) &= \varphi_3(x); & u_{2,t}(x,0) &= \varphi_4(x),
\end{aligned} \tag{2.42}$$

где  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $\varphi_3(x)$ ,  $\varphi_4(x)$  – заданные функции. Вариации заданных функций равны нулю, что обеспечивает равенство нулю частей выражения (2.41) при  $t = 0$ .

Если решение задачи однозначно, то функции  $u_1(x,t)$  и  $u_2(x,t)$  при  $t = t_1$  однозначно определены, и их вариации равны нулю. Это обеспечивает равенство нулю частей выражения (2.41) при  $t = t_1$ .

#### 2.5.5. Постановка задачи

Запишем полную постановку задачи, описывающей колебания системы, изображенной на рисунке 2.1

Система дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho S u_{1,tt} - S \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E \left( \sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1 \right) + \mu \frac{u_{j,x} u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \frac{u_{1,x}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) = 0; \\ \rho S u_{2,tt} - S \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E \left( \sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1 \right) + \mu \frac{u_{j,x} u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \frac{u_{2,x}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) + \\ + I \left( E u_{2,xxx} + \mu u_{2,xxx} \right) + \lambda u_{2,t} + k_0 u_2 - f(x, t) = 0. \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Граничные условия:

$$u_1^*(0, t) = 0; \quad u_2(0, t) = 0; \quad u_{2,xx}(0, t) = 0; \quad (2.44)$$

$$u_1^*(L_0, t) = 0; \quad u_2(L_0, t) = 0; \quad u_{2,x}(L_0, t) = 0; \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} & m_1 \frac{d^2}{dt^2} u_1(L(t), t) + \rho S \left( u_{1,t}(L(t) - 0, t) - u_{1,t}(L(t) + 0, t) \right) L'(t) + \\ & + \left( ES \left( \sqrt{u_{j,x}(L(t) - 0, t) u_{j,x}(L(t) - 0, t)} - 1 \right) + \right. \\ & \left. + \mu S \frac{u_{j,x}(L(t) - 0, t) u_{j,xt}(L(t) - 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) - 0, t) u_{j,x}(L(t) - 0, t)}} \right) \frac{u_{1,x}(L(t) - 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) - 0, t) u_{j,x}(L(t) - 0, t)}} - \\ & - \left( ES \left( \sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t) u_{j,x}(L(t) + 0, t)} - 1 \right) + \right. \\ & \left. + \mu S \frac{u_{j,x}(L(t) + 0, t) u_{j,xt}(L(t) + 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t) u_{j,x}(L(t) + 0, t)}} \right) \frac{u_{1,x}(L(t) + 0, t)}{\sqrt{u_{j,x}(L(t) + 0, t) u_{j,x}(L(t) + 0, t)}} - F_1(t) = 0; \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} & m_2 \frac{d^2}{dt^2} u_2(L(t), t) + E I u_{2,xxx}(L(t) + 0, t) + \mu I u_{2,xxx}(L(t) + 0, t) - \\ & - E I u_{2,xxx}(L(t) - 0, t) - \mu I u_{2,xxx}(L(t) - 0, t) + k_2 u_2(L(t), t) - F_2(t) = 0; \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} & u_1(L(t) - 0, t) = u_1(L(t) + 0, t); \quad u_2(L(t) - 0, t) = u_2(L(t) + 0, t); \\ & u_{2,x}(L(t) - 0, t) = 0; \quad u_{2,x}(L(t) + 0, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= \varphi_1(x); & u_{1,t}(x, 0) &= \varphi_2(x); \\ u_2(x, 0) &= \varphi_3(x); & u_{2,t}(x, 0) &= \varphi_4(x). \end{aligned} \quad (2.49)$$

## 2.6. Линеаризация задачи

Предположим, что смещения  $u_1^*$ ,  $u_2$  и их производные малы. При этом квадратичными членами, а также значениями  $u_{1,x}^*$ ,  $u_{2,x}$  и  $\varepsilon_0$ , по сравнению с единицей можно пренебречь. При линеаризации задача получается расщепленной, то есть отсутствует взаимодействие между продольными и поперечными колебаниями.

### 2.6.1. Задача для продольных колебаний

$$\rho u_{1,tt}^* - E u_{1,xx}^* - \mu u_{1,xxx}^* = 0; \quad (2.50)$$

$$u_1^*(0, t) = 0; \quad u_1^*(L_0, t) = 0; \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2}{dt^2} u_1(L(t), t) - S \rho (u_{1,t}^*(L(t) + 0, t) - u_{1,t}^*(L(t) - 0, t)) L'(t) - \\ - ES (u_{1,x}^*(L(t) + 0, t) - u_{1,x}^*(L(t) - 0, t)) - \\ - S \mu (u_{1,xt}^*(L(t) + 0, t) - u_{1,xt}^*(L(t) - 0, t)) - F_1(t) = 0; \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$u_1^*(L(t) + 0, t) = u_1^*(L(t) - 0, t); \quad (2.53)$$

$$u_1^*(x, 0) = \varphi_1(x); \quad u_{1,t}^*(x, 0) = \varphi_2(x). \quad (2.54)$$

### 2.6.2. Задача для поперечных колебаний

$$\rho S u_{2,tt} - ES \varepsilon_0 u_{2,xx} + E I u_{2,xxx} + \mu I u_{2,xxx} + \lambda u_{2,t} + k_0 u_2 - f(x, t) = 0; \quad (2.55)$$

$$u_2(0, t) = 0; \quad u_{2,xx}(0, t) = 0; \quad u_2(L_0, t) = 0; \quad u_{2,x}(L_0, t) = 0; \quad (2.56)$$

$$m_2 \frac{d^2}{dt^2} u_2(L(t), t) + EI(u_{2,xxx}(L(t) + 0, t) - u_{2,xxx}(L(t) - 0, t)) + \mu I(u_{2,xxx}(L(t) + 0, t) - u_{2,xxx}(L(t) - 0, t)) + k_2 u_2(L(t), t) - F_2(t) = 0; \quad (2.57)$$

$$u_2(L(t) + 0, t) = u_2(L(t) - 0, t); \quad (2.58)$$

$$u_{2,x}(L(t) + 0, t) = 0; \quad u_{2,x}(L(t) - 0, t) = 0;$$

$$u_2(x, 0) = \varphi_3(x); \quad u_{2,t}(x, 0) = \varphi_4(x). \quad (2.59)$$

## 2.7. Рассмотрение частных случаев задачи о продольно–поперечных колебаниях объектов с движущимися границами

### 2.7.1. Продольно–поперечные колебания струны

Рассмотрим продольно–поперечные колебания струны. Для объекта, изображенного на рисунке 2.1, примем:

$$I = 0; \quad k_0 = 0; \quad f(x, t) = 0; \quad \bar{F}(t) = 0; \quad \lambda = 0.$$

Характер взаимодействия струны с движущейся границей такой, что продольные волны свободно проходят через границу, а поперечные – нет. Поперечное смещение на границе равно нулю, при этом  $u_2(x, t) = 0$ , если  $x \geq L(t)$ .

С учетом введенных упрощений задачи и соотношения  $u_1 = u_1^* + x + \varepsilon_0 x$  задача (2.43) – (2.49) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_{1,tt} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E \left( \sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu \frac{u_{j,x} u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \frac{u_{1,x}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) = 0; \quad 0 < x < L_0; \\ \rho u_{2,tt} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( E \left( \sqrt{u_{j,x} u_{j,x}} - 1 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu \frac{u_{j,x} u_{j,xt}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) \frac{u_{2,x}}{\sqrt{u_{j,x} u_{j,x}}} \right) = 0; \quad 0 < x < L(t); \\ u_{2,x} = 0; \quad L(t) \leq x \leq L_0; \end{array} \right.$$

$$u_1^*(0, t) = 0; \quad u_1^*(L_0, t) = 0;$$

$$u_2(0, t) = 0; \quad u_2(L(t), t) = 0;$$

$$u_1^*(x, 0) = \varphi_1(x); \quad u_{1,t}^*(x, 0) = \varphi_2(x);$$

$$u_2(x, 0) = \varphi_3(x); \quad u_{2,t}(x, 0) = \varphi_4(x) \text{ при } 0 < x < L(0);$$

$$u_2(x, 0) = 0 \text{ при } L(0) < x < L_0.$$

## 2.7.2. Задача о распространении поперечных волн в неограниченной струне с движущейся границей

Рассмотрим волновые процессы в струне ( $I = 0$ ), изображенной на рисунке 2.3.

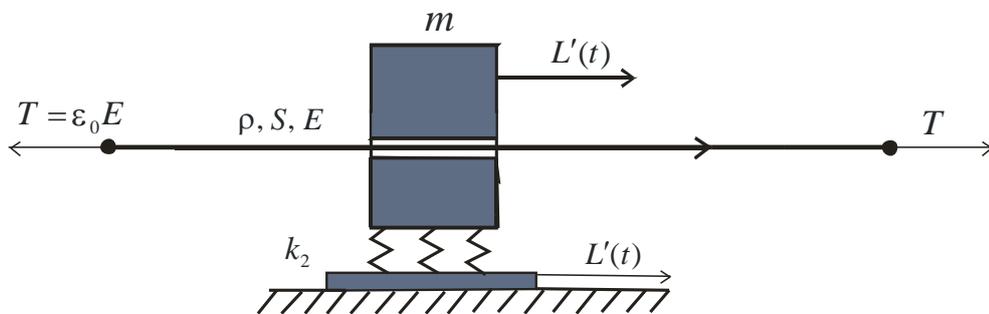


Рис. 2.3. Схема объекта (неограниченная струна).

Выполним линеаризацию поставленной задачи. В задаче (2.55) – (2.59) примем:

$$I = 0, \lambda = 0, \mu = 0, k_0 = 0, f(x, t) = 0, F_2(t) = 0.$$

В этом случае колебания струны будут описываться волновым уравнением:

$$\rho u_{2,tt} - E \varepsilon_0 u_{2,xx} = 0; \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Начальные условия имеют вид (2.59).

В связи с отсутствием изгибной жесткости условие (2.7) не выполняется.

Из выражений (2.6), (2.36) с учетом малости  $u_2$  получим граничные условия:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} u_2(L(t), t) - \rho S (u_{2,t}(L(t)+0, t) - u_{2,t}(L(t)-0, t)) L'(t) - \\ - ES \varepsilon_0 (u_{2,x}(L(t)+0, t) - u_{2,x}(L(t)-0, t)) + k_2 u_2(L(t), t) = 0; \\ u_2(L(t)+0, t) = u_2(L(t)-0, t). \end{aligned}$$

### 2.7.3. Задача о продольных колебаниях каната

Рассмотрим продольные ( $u_2 = 0$ ) колебания каната, изображенного на рисунке 2.4.

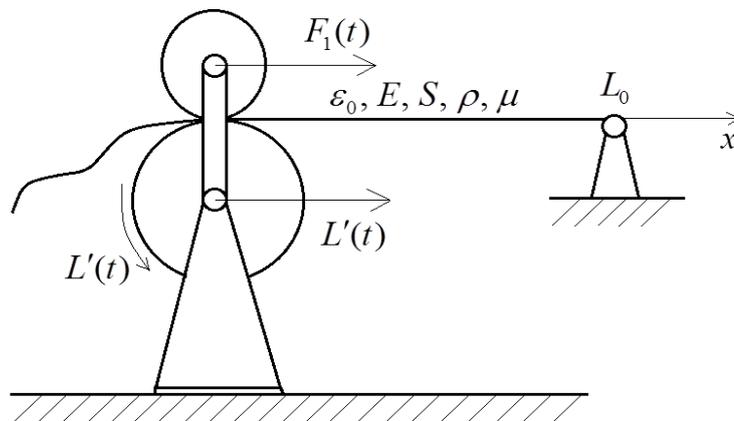


Рис. 2.4. Схема объекта (канат)

Выполним линеаризацию поставленной задачи. Объект за границей свободно провисает, поэтому

$$u_{1,x}^*(L(t) - 0, t) = 0; \quad (2.60)$$

$$\varepsilon_0 = 0.$$

Из соотношения (2.8) при  $i = 1$  с учетом (2.60) получим

$$u_{1,t}^*(L(t) + 0, t) - u_{1,t}^*(L(t) - 0, t) = -u_{1,x}^*(L(t) + 0, t)L'(t). \quad (2.61)$$

С учетом (2.60), (2.61) задача (2.50)–(2.54) примет вид:

$$\rho u_{1,tt}^* - E u_{1,xx}^* - \mu u_{1,xt}^* = 0;$$

$$u_1^*(L_0, t) = 0;$$

$$m_1 \frac{d^2}{dt^2} u_1(L(t), t) + \rho S u_{1,x}^*(L(t), t) (L'(t))^2 - E S u_{1,x}^*(L(t), t) -$$

$$- \mu S u_{1,xt}^*(L(t), t) - F_1(t) = 0;$$

$$u_1^*(x, 0) = \varphi_1^*(x); \quad u_{1,t}^*(x, 0) = \varphi_2^*(x).$$

Поведение части каната, прошедшего через границу, нас не интересует. Для сокращения записей принято  $u(L(t) + 0, t) = u(L(t), t)$ .

## 2.8. Выводы по второй главе

1. Поставлены новые нелинейные математические модели продольно – поперечных колебаний одномерных по пространственной переменной объектов с движущимися границами, в которых учтена геометрическая нелинейность, вязкоупругость, действие внешних сил сопротивления, изгибная жесткость. Получены граничные условия в случае наличия взаимодействия между частями объекта слева и справа от границы.

2. Произведена линеаризация полученных моделей. При этом соблюдается принцип однородности: в частном случае малых колебаний

полученные линейные модели совпали с классическими, что свидетельствует о корректности полученных результатов.

3. Рассмотрены частные случаи продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами. Полученные математические модели позволяют описывать колебания большой интенсивности систем с движущимися границами.

## Глава 3

### **Решение краевых задач с движущимися границами при помощи аналитического метода замены переменных в системе функционально – разностных уравнений**

Предложенный Весницким А.И. [36] аналитический метод решения задач о колебаниях систем с движущимися границами, основанный на введении новых переменных для волнового уравнения, может применяться только для граничных условий первого рода, т.е. граничных условий, когда на границах заданы смещения. К недостаткам этого метода относится также то, что в случае двух движущихся границ начальные условия, заданные при  $t = 0$ , не могут быть учтены.

Целью настоящей главы является разработка аналитического метода решения классического волнового уравнения (1.1) при граничных условиях, отличных от условий первого рода.

Задачи настоящей главы:

1. Получить аналитические решения модельных краевых задач с движущимися границами, описываемых волновым уравнением с более широким классом условий на подвижных границах, общая постановка которых приведена в Главе 2.

2. Разработать обратный метод, позволяющий аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи.

3. Получить выражение для амплитуды колебаний, соответствующих  $n$ -ной динамической моде для ряда прикладных задач данного класса.

### 3.1. Аналитический метод замены переменных в системе функционально–разностных уравнений

Пусть движение системы описывается волновым уравнением

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0 \quad (3.1)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} L_1[U(\ell_1(\tau), \tau)] &= F_1(\tau); \ell_1(0) = 0; \\ L_2[U(\ell_2(\tau), \tau)] &= F_2(\tau); \ell_2(0) = 1; \ell_2(\tau) > \ell_1(\tau) \end{aligned} \quad (3.2)$$

и начальных условиях

$$U(\xi, 0) = \Phi_0(\xi); U_\tau(\xi, 0) = \Phi_1(\xi). \quad (3.3)$$

Здесь  $L_1, L_2$  – линейные дифференциальные операторы не выше первого порядка по  $\xi$  либо по  $\tau$ ;  $\xi, \tau$  – безразмерное время ( $\tau \geq 0$ ) и безразмерная пространственная координата ( $\ell_1(\tau) \leq \xi \leq \ell_2(\tau)$ );  $\ell_1(\tau), \ell_2(\tau)$  – законы движения границ (функции класса  $C$ );  $\Phi_0(\xi), \Phi_1(\xi), F_1(\tau), F_2(\tau)$  – заданные функции класса  $C^2$ . В начальных условиях (3.3) переменная  $\xi$  принадлежит отрезку  $[0, 1]$ , т.к. по предположению  $\ell_1(0) = 0; \ell_2(0) = 1$ .

Отсутствие в уравнении (3.1) неоднородной части не уменьшает общности задачи, так как всегда можно найти функцию, удовлетворяющую неоднородному волновому уравнению (например, используя представление Римана), и с ее помощью снова прийти к задаче (3.1).

Для решения задачи используем представление Даламбера. Общее решение уравнения (3.1) имеет вид:

$$U(\xi, \tau) = g(\tau + \xi) + G(\tau - \xi), \quad (3.4)$$

где  $g(z)$  и  $G(z)$  – произвольные функции, которые необходимо определить из начальных и граничных условий,  $z$  – независимая переменная.

Из уравнения (3.1) следует, что скорость распространения волн равна единице. При движении границ со скоростью большей скорости

распространения волн решение волнового уравнения становится некорректным, поэтому на скорость движения границ накладывается ограничение ( $|\ell_1'(\tau)| < 1; |\ell_2'(\tau)| < 1$ ).

Подставляя решение (3.4) в граничные условия (3.2), нетрудно получить следующую задачу:

$$\begin{cases} L_{11}[g(\tau + \ell_1(\tau))] + L_{12}[G(\tau - \ell_1(\tau))] = F_1(\tau); \\ L_{21}[g(\tau + \ell_2(\tau))] + L_{22}[G(\tau - \ell_2(\tau))] = F_2(\tau), \end{cases} \quad (3.5)$$

где  $L_{ij} (i=1,2; j=1,2)$  – линейные дифференциальные операторы не выше первого порядка по  $\xi$  либо по  $\tau$ .

Подставляя решение (3.4) в начальные условия (3.3), получим:

$$\begin{cases} g(\xi) + G(-\xi) = \Phi_0(\xi), 0 \leq \xi \leq 1; \\ g'(\xi) + G'(-\xi) = \Phi_1(\xi), 0 \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Из данной системы найдем функции  $g(\xi)$  и  $G(\xi)$ :

$$\begin{cases} g(\xi) = \frac{1}{2}[\Phi_0(\xi) + \int_0^\xi \Phi_1(\zeta) d\zeta], 0 \leq \xi \leq 1; \\ G(\xi) = \frac{1}{2}[\Phi_0(-\xi) + \int_0^\xi \Phi_1(-\zeta) d\zeta], -1 \leq \xi \leq 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

В отличие от метода А.И. Весницкого [36], где в дифференциальном уравнении вводятся новые переменные, останавливающие границы и оставляющие уравнение инвариантным, для упрощения задачи введем в систему (3.5) новые функции

$$g(z) = r(\varphi(z)); G(z) = R(\psi(z)). \quad (3.7)$$

Тогда система уравнений (3.5) примет вид

$$\begin{cases} L_{11}[r(\varphi(\tau + \ell_1(\tau)))] + L_{12}[R(\psi(\tau - \ell_1(\tau)))] = F_1(\tau); \\ L_{21}[r(\varphi(\tau + \ell_2(\tau)))] + L_{22}[R(\psi(\tau - \ell_2(\tau)))] = F_2(\tau). \end{cases} \quad (3.8)$$

Введем обозначения в первом уравнении системы (3.8):

$$\varphi(\tau + \ell_1(\tau)) = z; \psi(\tau - \ell_1(\tau)) = z$$

и во втором уравнении этой же системы

$$\varphi(\tau + \ell_2(\tau)) = z; \quad \psi(\tau - \ell_2(\tau)) = z - 1.$$

Если функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  удовлетворяют системе функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(\tau + \ell_1(\tau)) = \psi(\tau - \ell_1(\tau)); \\ \varphi(\tau + \ell_2(\tau)) = \psi(\tau - \ell_2(\tau)) + 1, \end{cases} \quad (3.9)$$

то система (3.5) примет вид

$$\begin{cases} D_{11}[r(z)] + D_{12}[R(z)] = \theta_1(z); \\ D_{21}[r(z)] + D_{22}[R(z-1)] = \theta_2(z), \end{cases} \quad (3.10)$$

где  $D_{ij} (i = \overline{1,2}; j = \overline{1,2})$  – линейные дифференциальные операторы не выше первого порядка по  $\xi$  либо по  $\tau$ ;

$$\theta_1(z) = F_1(0,5\bar{\varphi}(z) + 0,5\bar{\psi}(z)); \quad \theta_2(z) = F_2(0,5\bar{\varphi}(z) + 0,5\bar{\psi}(z-1)). \quad (3.11)$$

Здесь  $\bar{\varphi}(z), \bar{\psi}(z)$  функции, обратные к  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$

Система (3.9) имеет бесконечно много решений, так как на интервале  $[0,1]$  функция  $\varphi(z)$  и на интервале  $[-1,0]$  функция  $\psi(z)$  могут задаваться произвольно и с помощью метода последовательных приближений (итераций) [108] находятся значения функций в других областях. Нам же достаточно найти одно частное решение, определяющее взаимно-однозначное соответствие точек  $z$  и точек  $y_1 = \varphi(z); y_2 = \psi(z)$ . Заметим, что преобразования (3.7) имеют смысл, если функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  монотонны. Поэтому из всех решений нас интересуют только монотонные, а монотонные решения в случае движения границ со скоростью меньшей скорости распространения волн ( $|\ell_1'(\tau)| < 1; |\ell_2'(\tau)| < 1$ ) могут быть только монотонно возрастающими.

Покажем, что если функция  $\varphi(z)$  – монотонно возрастающая (убывающая), то функция  $\psi(z)$  – также монотонно возрастающая (убывающая).

Действительно, из первого уравнения системы (3.9) при  $\tau = \tau_0$  следует

$$\varphi(\tau_0 + l_1(\tau_0)) = \psi(\tau_0 - l_1(\tau_0)).$$

Теперь предположим, что  $\tau_1 > \tau_0$  и функция  $\varphi(z)$  возрастает (убывает), тогда в случае движения границ со скоростью меньшей скорости распространения волн ( $|\ell_1'(\tau)| < 1; |\ell_2'(\tau)| < 1$ ) будем иметь:

$$\begin{aligned}\tau_1 + l_1(\tau_1) &> \tau_0 + l_1(\tau_0); \\ \tau_1 - l_1(\tau_1) &> \tau_0 - l_1(\tau_0).\end{aligned}$$

Поскольку функция  $\varphi(z)$  в данном случае возрастает (убывает), то для выполнения первого равенства системы (3.9) при  $\tau = \tau_1$  необходимо, чтобы возрастала (убывала) функция  $\psi(z)$ , т.е. функция  $\psi(z)$  – также возрастающая (убывающая).

Покажем также, что монотонное решение системы (3.9) в случае движения границ со скоростью меньшей скорости распространения волн может быть только возрастающим.

Действительно, учитывая неравенство  $\ell_1(\tau) < \ell_2(\tau)$ , получим:

$$\tau + \ell_1(\tau) < \tau + \ell_2(\tau); \quad \tau - \ell_1(\tau) > \tau - \ell_2(\tau).$$

Предположим, что  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  убывают, тогда можно записать:

$$\varphi(\tau + \ell_2(\tau)) < \varphi(\tau + \ell_1(\tau)) = \psi(\tau - \ell_1(\tau)) < \psi(\tau - \ell_2(\tau)). \quad (3.12)$$

Однако данное неравенство противоречит второму уравнению системы (3.9). Следовательно, функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  могут быть только монотонно возрастающими.

Заметим, что из системы (3.9) функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  определяются с точностью до константы в том смысле, что если  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  решение системы (3.9), то  $\varphi(z) + C$  и  $\psi(z) + C$  также являются решением (здесь  $C$  – произвольная постоянная). Поэтому для определенности можно выбрать такую функцию  $\psi(z)$ , что  $\psi(-1) = -1$ . При этом из второго уравнения системы (3.9) при  $\tau = 0$  следует, что  $\varphi(1) = 0$ . Из первого уравнения системы (3.9) при  $\tau = 0$  получим

$$\varphi(0) = \psi(0). \quad (3.13)$$

С учетом замены (3.7) начальные условия (3.6) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} r(z) &= g(\bar{\varphi}(z)); \quad \varphi(0) \leq z \leq 0; \\ R(z) &= G(\bar{\psi}(z)); \quad -1 \leq z \leq \varphi(0), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где функции  $g(z)$  и  $G(z)$  определяются выражениями (3.6).

Таким образом, начальная задача (3.1) – (3.3) сведена к системе функционально – разностных уравнений (3.10) с одним постоянным смещением при начальных условиях (3.14). Рассмотреть решение задачи в общем случае не представляется возможным. Поэтому далее будут рассмотрены решения для некоторых наиболее часто встречающихся на практике граничных условий.

Для решения системы (3.9) А.И. Весницким [36] был использован обратный метод, т.е. по заданным  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  из получающейся системы уравнений (в большинстве случаев трансцендентных) находятся законы движения границ  $\ell_1(\tau)$  и  $\ell_2(\tau)$

При задании функций  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  в них вводится несколько произвольных постоянных. Зависимость найденных законов движения  $\ell_1(\tau)$  и  $\ell_2(\tau)$  от величин этих констант позволяет аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи.

Совокупность обратных решений достаточно широка. Приводимые ниже решения удовлетворяют соотношениям

$$\ell_1(0) = 0; \ell_2(0) = 1; \psi(-1) = -1.$$

Множество полученных законов движения границ разбито на классы. Решения, приведенные в таблице 3.1, относятся к классу А, когда левая граница неподвижна и  $\varphi(z) = \psi(z)$ .

Таблица 3.1

№	$l_2(\tau)$	$\varphi(z) = \psi(z)$
1	$v\tau + 1$	$\frac{\text{Ln}[(vz+1)/(1-v)]}{\text{Ln}[(1+v)/(1-v)]} - 1$
2	$\sqrt{B\tau + B} /  B $	$\sqrt{Bz + B + 0,25} - \sqrt{B^2 - B + 0,25} - 1$
3	$1/(4B\tau + 1)$	$Bz^2 + 0,5z - B - 0,5$
4	$\frac{1}{\alpha} \text{arcsh} \left[ \frac{0,5}{B_1 e^{\alpha\tau} - B_2 e^{-\alpha\tau}} \right]$	$B_1(e^{\alpha z} - e^{-\alpha}) + B_2(e^{-\alpha z} - e^{\alpha}) - 1,$ $B_1 = B_2 + 1/(e^{\alpha} - e^{-\alpha}), \quad \alpha > 0$
5	$\sqrt{(\tau + B)^2(\alpha^2 - 1) + 1 + 2\alpha B + B^2} - \alpha(\tau + B)$	$\frac{\text{Ln}[(z+B)^2 + 1 + 2\alpha B + B^2]}{\text{Ln}[(1+\alpha)/(1-\alpha)]} -$ $\frac{\text{Ln}[(B-1)^2 + 1 + 2\alpha B + B^2]}{\text{Ln}[(1+\alpha)/(1-\alpha)]} - 1$
6	$\frac{1}{\alpha} \left[ -d + \sqrt{1 + d^2 + (\alpha\tau + B)^2} \right],$ $d = \frac{1 + B^2 - \alpha^2}{2\alpha}$	$\frac{\text{arctg}(\alpha z + B)}{\text{arctg}[(1 + B^2 - \alpha^2)/(2\alpha)]} -$ $\frac{\text{arctg}(B - \alpha)}{\text{arctg}[(1 + B^2 - \alpha^2)/(2\alpha)]} - 1$
7	$\frac{1}{\alpha} \left( \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 4A^2 e^{2\alpha\tau}}}{2A} \right) - \tau$	$Ae^{\alpha z} + B, \quad \alpha = \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 4A^2}}{2A}$

Решения, приведенные в таблице 3.1 под номерами 1, 2, 3, 6, получены А.И. Весницким и А.И. Потаповым [31, 36, 113], решения 4, 5, 7 получены впервые.

Следующий класс В определяется тем, что границы движутся по одинаковому закону:

$$l_1(\tau) = \ell(\tau); l_2(\tau) = 1 + \ell(\tau); \ell(0) = 0.$$

Поскольку движение границ взаимосвязано, то между функциями  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  также существует взаимосвязь. Она выражается функциональным уравнением

$$\varphi(\bar{\varphi}(\psi(z)) + 1) - \psi(z - 1) = 1. \quad (3.15)$$

Система (3.9) в данном случае может удовлетворяться только функциями, которые являются решениями уравнения (3.15). Приведем два ранее не известных решения класса В [14]:

1. Для заданных функций  $\varphi(z) = B(e^{-\alpha z} - 1) - C(e^{-\alpha} - 1) - 1$ ;  $B = C + 1 / (e^{-\alpha} - 1)$ ;  
 $\psi(z) = C(e^{\alpha z} - 1) - C(e^{-\alpha} - 1) - 1$  из системы (3.9) находим следующие законы

движения границ:  $\ell_1(\tau) = \frac{1}{\alpha} \ln[(Be^{-\alpha\tau} - Ce^{\alpha\tau}) / (B - C)]$ ;  $\ell_2(\tau) = 1 + \ell_1(\tau)$ .

2. Для функций  $\varphi(z) = (1 - \nu)z / 2 + (1 + \nu) / 2 - 1$ ;  $\psi(z) = (1 + \nu)z / 2 + (1 + \nu) / 2 - 1$   
законы движения границ  $\ell_1(\tau) = \nu\tau$ ;  $\ell_2(\tau) = 1 + \nu\tau$ .

Здесь  $\alpha, B, C, \nu$  – постоянные величины.

Для решений класса С границы движутся симметрично в разные стороны, т.е.  $\ell_1(\tau) = -\ell(\tau)$ ;  $\ell_2(\tau) = \ell(\tau)$ .

Уравнение взаимосвязи функций  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  здесь имеет вид

$$\varphi(z) = \psi(z) + 0,5.$$

Решения класса С получают из решений класса А по следующим формулам:

$$\ell(\tau) = \ell_A(\tau); \psi(z) = \frac{1}{2}\psi_A(z); \varphi(z) = \psi(z) + 0,5,$$

где индексом А обозначены соответствующие функции решений класса А.

Новое решение класса D получено для случая, когда обе границы движутся равномерно:

$$\ell_1(\tau) = (B_2 - B_1)\tau / (B_2 + B_1); \ell_2(\tau) = (B_2 e^{1/c} - B_1)\tau / (B_2 e^{1/c} + B_1) + 1;$$

$$\varphi(z) = \psi(z) = C \operatorname{Ln}(B_1 z + D) - C \operatorname{Ln}(D - B_2) - 1;$$

$$D = (B_1 + B_2 e^{1/c}) / (e^{1/c} - 1).$$

Решение под номером один в таблице 3.1 может быть использовано при изучении колебаний канатов грузоподъемных установок при равномерном подъеме (спуске) [43, 45, 119]. Приведенные решения класса В могут быть использованы при изучении колебаний гибких звеньев передач [67, 125]. Остальные решения являются модельными.

### 3.2. Применение метода при граничных условиях первого рода

Пусть требуется решить уравнение (3.1) при граничных условиях первого рода

$$U(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau) \quad (3.16)$$

и начальных условиях вида (3.3).

Система (3.10) в этом случае выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} r(z) + R(z) = \theta_1(z); \\ r(z) + R(z-1) = \theta_2(z). \end{cases} \quad (3.17)$$

Начальные условия для  $r(z)$  и  $R(z)$  останутся в виде (3.14).

Из первого уравнения системы (3.17) получим:

$$R(z) = \theta_1(z) - r(z). \quad (3.18)$$

После подстановки (3.18) во второе уравнение системы (3.17) будем иметь:

$$r(z) - r(z-1) = \theta(z). \quad (3.19)$$

Здесь

$$\theta(z) = \theta_2(z) - \theta_1(z-1). \quad (3.20)$$

Начальные условия для функции  $R(z)$  заданы на интервале

$$\psi(-1) \leq z \leq \psi(0). \quad (3.21)$$

В случае, когда  $z = \psi(\tau - \ell_1(\tau)); \ell_1(0) = 0$ , неравенство (3.21) может выполняться при  $\tau \leq 0$ . Следовательно, при  $\psi(-1) \leq z \leq \psi(0)$  будем иметь

$$\theta_1(z) = 0, \quad (3.22)$$

так как внешняя сила начинает действовать с момента времени  $\tau = 0$ .  
Учитывая (3.22), (3.18), (3.14), получим:

$$r(z) = \begin{cases} -R(z), & -1 \leq z \leq \varphi(0); \\ r(z), & \varphi(0) \leq z \leq 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Заметим, что функция  $r(z)$  не терпит разрыва в точке  $z = \varphi(0)$  (см. 3.13).

Таким образом, задача сведена к решению уравнения (3.19) при начальном условии (3.23). Используем для решения задачи интегральное преобразование Лапласа

$$\bar{r}(p) = \int_0^{\infty} r(z) e^{-pz} dz.$$

После применения указанного преобразования получим:

$$\bar{r}(p) = \bar{\theta}(p) / (1 - e^{-p}) + e^{-p} \int_{-1}^0 r(z) e^{-pz} dz / (1 - e^{-p}),$$

где  $\bar{\theta}(p)$  изображение функции  $\theta(z)$ .

Оригинал данного изображения имеет вид

$$r(z) = \int_0^z \theta(\zeta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi ni(z-\zeta)} d\zeta + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi niz} \int_{-1}^0 r(\zeta) e^{-2\pi ni\zeta} d\zeta.$$

Объединяя члены при положительных и отрицательных значениях  $n$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} r(z) = & \int_0^z \theta(\zeta) d\zeta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z \theta(\zeta) \cos[2\pi n(z-\zeta)] d\zeta + \\ & + \int_{-1}^0 r(\zeta) d\zeta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^0 r(\zeta) \cos[2\pi n(z-\zeta)] d\zeta. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Рассмотрим свободные колебания системы ( $\theta(z) = 0$ ).

В этом случае из (3.4) с учетом (3.7), (3.18) и (3.24) следует

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^*(\xi, \tau), \quad (3.25)$$

где

$$V_n^*(\xi, \tau) = \sin\{\pi n[\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)]\} \times \\ \times (A_n^* \cos\{\pi n[\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)]\} - \\ - B_n^* \sin\{\pi n[\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)]\}); \quad (3.26)$$

$$A_n^* = 4 \int_{-1}^0 r(\zeta) \sin(2\pi n \zeta) d\zeta; \quad B_n^* = 4 \int_{-1}^0 r(\zeta) \cos(2\pi n \zeta) d\zeta. \quad (3.27)$$

Функцию  $V_n^*(\xi, \tau)$  будем называть  $n$ -ным собственным колебанием системы, а функцию

$$\omega(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \{\pi n[\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)]\} \quad (3.28)$$

– мгновенной собственной частотой  $n$ -ного собственного колебания.

Функция  $\sin\{\pi n[\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)]\}$  характеризует форму колебаний, и ее принято называть  $n$ -ной динамической модой системы.

Максимальный размах колебаний наблюдается в точках  $\xi = \xi_0(\tau)$ , где

$$\sin\{\pi n[\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)]\} = \pm 1. \quad (3.29)$$

Число корней уравнения (3.29), лежащих на интервале  $\xi \in [l_1(\tau), l_2(\tau)]$ , равно номеру  $n$  или, что то же самое, числу пучностей  $n$ -ного собственного колебания. В дальнейшем для определённости под  $\xi_0(\tau)$  подразумевается корень уравнения (3.29), ближайший к границе  $l_1(\tau)$ .

Отметим также, что из выражения (3.26) следует, что амплитуда колебаний равна  $A_n^{*2} + B_n^{*2}$  и не зависит от функций  $\varphi$  и  $\psi$ , а следовательно, и от законов движения границ. При малых начальных возмущениях большая амплитуда колебаний может возникнуть только вследствие действия внешних сил.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания системы.

При нулевых начальных условиях из (3.4) с учетом (3.7), (3.18) и (3.24) получим:

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\xi, \tau) + D(\xi, \tau), \quad (3.30)$$

где

$$\begin{aligned} V_n(\xi, \tau) = & \sin\{\pi n[\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)]\} \times \\ & \times (\cos\{\pi n[\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)]\} 4 \int_0^{\psi(\tau - \xi)} \theta(\zeta) \sin(2\pi n\zeta) d\zeta - \\ & - \sin\{\pi n[\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)]\} 4 \int_0^{\psi(\tau - \xi)} \theta(\zeta) \cos(2\pi n\zeta) d\zeta; \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$D(\xi, \tau) = \int_{\psi(\tau - \xi)}^{\varphi(\tau + \xi)} \theta(\zeta) d\zeta + \theta_1(\psi(\tau - \xi)) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\psi(\tau - \xi)}^{\varphi(\tau + \xi)} \theta(\zeta) \cos\{2\pi n[\varphi(\tau + \xi) - \zeta]\} d\zeta. \quad (3.32)$$

Заметим, что выражение (3.32) представляет собой ряд Фурье для функции

$$D(\xi, \tau) = \begin{cases} \theta_1(\psi(\tau - \xi)), & \xi = \ell_1(\tau); \\ \theta(\varphi(\tau + \xi)) + \theta_1(\psi(\tau - \xi)), & \ell_1(\tau) < \xi < \ell_2(\tau). \end{cases} \quad (3.33)$$

В дальнейшем изучаются, главным образом, резонансные явления в механических объектах с движущимися границами, когда амплитуда колебаний во много раз превосходит амплитуду возмущающего воздействия. Поэтому в равенстве (3.30) функцией  $D(\xi, \tau)$  можно пренебречь как функцией одного порядка малости с функциями  $F_1(\tau)$  и  $F_2(\tau)$ , характеризующими возмущающие воздействия.

Сравнивая выражения (3.25) и (3.30), (3.26) и (3.31), нетрудно заметить, что вынужденные колебания представляют собой суперпозицию собственных колебаний с изменяющимися во времени амплитудами:

$$A_n = 4 \int_0^{\psi(\tau - \xi)} \theta(\zeta) \sin(2\pi n\zeta) d\zeta; \quad B_n = 4 \int_0^{\psi(\tau - \xi)} \theta(\zeta) \cos(2\pi n\zeta) d\zeta. \quad (3.34)$$

Заметим, что в случае, когда границы неподвижны, из всех видов внешних воздействий выделяются гармонические нагрузки. В нашем случае

(границы движутся) будем изучать отклик систем на нагрузки вида (см. (3.2)):

$$F_1(\tau) = B_1 \cos W_1(\tau); F_2(\tau) = B_2 \cos W_2(\tau), \quad (3.35)$$

где  $W_1, W_2$  – функции класса  $C^2$ ;  $B_1, B_2$  – постоянные величины, характеризующие интенсивность нагрузок.

Тогда из равенства (3.11) следует:

$$\begin{aligned} \theta_1(z) &= B_1 \cos W_1(0,5\bar{\varphi}(z) + 0,5\bar{\psi}(z)); \\ \theta_2(z) &= B_2 \cos W_2(0,5\bar{\varphi}(z) + 0,5\bar{\psi}(z-1)). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда  $\theta(z)$  (см. (3.20)) имеет вид

$$\theta(z) = B \cos W(z), \quad (3.37)$$

где  $W(z)$  – функция класса  $C^2$ ,  $B$  – постоянная величина, характеризующая интенсивность нагрузки.

Заметим, что  $\theta(z)$  имеет вид (3.37) в следующих случаях:

1) если нагрузка на одной из границ не действует (т.е.  $B_2 = 0$  или  $B_1 = 0$ ), то  $W(z) = W_1(0,5\bar{\varphi}(z-1) + 0,5\bar{\psi}(z-1)) \vee W(z) = W_2(0,5\bar{\varphi}(z) + 0,5\bar{\psi}(z-1))$ ;

2) в случае, если на границах действуют возмущения одинаковой частоты, т.е.  $W_1(0,5\bar{\varphi}(z-1) + 0,5\bar{\psi}(z-1)) = W_2(0,5\bar{\varphi}(z) + 0,5\bar{\psi}(z)) + \gamma$ ,

где  $\gamma$  – постоянная величина;

3) если резонансные области нагрузок  $F_1(\tau)$  и  $F_2(\tau)$  не пересекаются, то при рассмотрении резонанса от одной нагрузки действием второй можно пренебречь.

Для случая, когда  $\theta(z)$  определяется выражением (3.37), равенства (3.34) можно переписать следующим образом:

$$A_n = 2B \left[ \int_0^{\psi(\tau-\xi)} \sin \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta + \int_0^{\psi(\tau-\xi)} \sin \Phi_{n2}(\zeta) d\zeta \right];$$

$$B_n = 2B \left[ \int_0^{\psi(\tau-\xi)} \cos \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta + \int_0^{\psi(\tau-\xi)} \cos \Phi_{n2}(\zeta) d\zeta \right],$$

где

$$\Phi_{n1}(\zeta) = 2\pi n\zeta - W(\zeta); \Phi_{n2}(\zeta) = 2\pi n\zeta + W(\zeta). \quad (3.38)$$

Так как функции  $2\pi n\zeta$  и  $W(\zeta)$  монотонно возрастают, фаза  $\Phi_{n2}(\zeta)$  быстро изменяется, что приводит к осциллированию с небольшой амплитудой соответствующих значений интегралов. Фаза же  $\Phi_{n1}(\zeta)$  может изменяться очень медленно. При этом наблюдается резонансное явление, которое характеризуется ростом значений интегралов, содержащих фазу  $\Phi_{n1}(\zeta)$ . Из изложенного следует, что при возникновении резонанса рост амплитуды связан с возрастанием значений интегралов с фазой  $\Phi_{n1}(\zeta)$ , интегралами же с фазой  $\Phi_{n2}(\zeta)$  можно пренебречь. Тогда полная амплитуда, определяемая по формуле  $A_n^2(\tau) = A_n^2 + B_n^2$ , в точке  $\xi = \xi_0(\tau)$ , соответствующей максимальному размаху колебаний, будет иметь следующий вид:

$$A_n^2(\tau) = 4B^2 \left\{ \left[ \int_0^{b(\tau)} \cos \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^{b(\tau)} \sin \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (3.39)$$

где  $b(\tau) = \psi(\tau - \xi_0(\tau))$ ,  $\Phi_n(\zeta) = 2\pi n\zeta - W(\zeta)$ .

Таким образом, получено выражение для амплитуды, исходя из которого в разделе 5 будут рассмотрены резонансные явления в конкретных механических объектах с движущимися границами.

### **3.3. Применение метода при граничных условиях, отличных от условий первого рода**

Получим аналитические решения волнового уравнения (3.1) при следующих видах граничных условий:

$$U_{\xi}(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_{\xi}(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau);$$

$$U_{\tau}(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_{\xi}(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau);$$

$$U_{\tau}(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_{\tau}(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau).$$

**3.3.1.** Пусть для уравнения (3.1) заданы граничные условия:

$$U_{\xi}(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_{\xi}(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau). \quad (3.40)$$

Решение задачи будем искать в виде

$$U(\xi, \tau) = g(\tau + \xi) + G(\tau - \xi). \quad (3.41)$$

Начальные условия для  $g(z)$  и  $G(z)$  определяются равенством (3.6).

После подстановки (3.41) в (3.40) получим:

$$g'(\tau + \ell_1(\tau)) - G'(\tau - \ell_1(\tau)) = F_1(\tau);$$

$$g'(\tau + \ell_2(\tau)) - G'(\tau - \ell_2(\tau)) = F_2(\tau).$$

Введем обозначения:

$$g'(z) = h(z); G'(z) = -H(z).$$

Заметим, что граничные условия типа (3.40) используются в основном при изучении продольных колебаний стержней. В этом случае исследователя интересуют не перемещения  $U(\xi, \tau)$ , а напряжения в стержне, которые пропорциональны  $U_{\xi}(\xi, \tau)$ .

Будем называть функцией напряжений функцию

$$U_{\xi}(\xi, \tau) = h(\tau + \xi) + H(\tau - \xi). \quad (3.42)$$

Тогда для  $h(z)$  и  $H(z)$  получим следующую задачу:

$$\begin{cases} h(\tau + \ell_1(\tau)) + H(\tau - \ell_1(\tau)) = F_1(\tau); \\ h(\tau + \ell_2(\tau)) + H(\tau - \ell_2(\tau)) = F_2(\tau); \end{cases} \quad (3.43)$$

$$h(z) = g'(z), \quad 0 \leq z \leq 1; \quad (3.44)$$

$$H(z) = -G'(z), \quad -1 \leq z \leq 0,$$

где  $g(z)$  и  $G(z)$  на интервалах  $0 \leq z \leq 1$ ;  $-1 \leq z \leq 0$  соответственно определяются равенствами (3.6).

Введем новые функции:

$$h(z) = r(\varphi(z)); H(z) = R(\psi(z)), \quad (3.45)$$

где  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  определяются из системы (3.9).

Тогда задача (3.43), (3.44) преобразуется к виду

$$\begin{cases} r(z) + R(z) = \theta_1(z); \\ r(z) + R(z-1) = \theta_2(z); \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\begin{cases} r(z) = h(\varphi^-(z)), \varphi(0) \leq z \leq 0; \\ R(z) = H(\psi^-(z)), -1 \leq z \leq \varphi(0), \end{cases} \quad (3.47)$$

где

$$\theta_1(z) = F_1(0,5\varphi^-(z) + 0,5\psi^-(z));$$

$$\theta_2(z) = F_2(0,5\varphi^-(z) + 0,5\psi^-(z-1)). \quad (3.48)$$

Сравнивая (3.42), (3.46), (3.47) с выражениями (3.4), (3.17), (3.14), можно сделать вывод, что задача для  $U(\xi, \tau)$  в случае граничных условий первого рода аналогична задаче для  $U_\xi(\xi, \tau)$  в случае граничных условий вида (3.40).

В режиме свободных колебаний функция напряжений описывается следующим выражением:

$$U_\xi(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^*(\xi, \tau),$$

где  $V_n^*(\xi, \tau)$  определено равенствами (3.26), (3.27), а  $r(\zeta)$  на интервале  $[-1, 0]$  описывается выражениями (3.23) и (3.47).

Заметим, что максимальная амплитуда колебания напряжений здесь не зависит от законов движения границ.

После пренебрежения функцией  $D(\xi, \tau)$  (см. (3.30), (3.33)) выражение, описывающее вынужденные колебания системы при нулевых начальных условиях, примет следующий вид:

$$U_\xi(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\xi, \tau).$$

Здесь  $V_n(\xi, \tau)$  определено равенством (3.31), а  $\theta(z)$  описывается выражением (3.20).

Если  $\theta(z)$  имеет вид (3.37), то полная амплитуда для функции напряжений в точке  $\xi = \xi_0(\tau)$ , соответствующей максимальному размаху колебаний, будет иметь вид (3.39), где  $\Phi_{n1}(\zeta)$  определено равенством (3.38).

**3.3.2.** Рассмотрим граничные условия вида:

$$U_\tau(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_\xi(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau). \quad (3.49)$$

После подстановки решения (3.41) в условия (3.49) получим:

$$\begin{cases} g'(\tau + \ell_1(\tau)) + G'(\tau - \ell_1(\tau)) = F_1(\tau); \\ g'(\tau + \ell_2(\tau)) - G'(\tau - \ell_2(\tau)) = F_2(\tau). \end{cases} \quad (3.50)$$

Начальные условия для функций  $g(z)$  и  $G(z)$  определяются равенствами (3.26).

Введем обозначения  $h(z) = g'(z)$ ;  $H(z) = G'(z)$  и новые функции:

$$h(z) = r(\varphi(z)); H(z) = R(\psi(z)), \quad (3.51)$$

где  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  определяются системой (3.9). После преобразований из (3.50) получим:

$$\begin{cases} r(z) + R(z) = \theta_1(z); \\ r(z) - R(z-1) = \theta_2(z). \end{cases} \quad (3.52)$$

Здесь функции  $\theta_1(z)$  и  $\theta_2(z)$  определены равенствами (3.48), а начальные условия для функций  $r(z)$  и  $R(z)$  имеют вид (3.47).

Из первого уравнения системы (3.52) найдем

$$R(z) = \theta_1(z) - r(z). \quad (3.53)$$

Подставляя данное равенство во второе уравнение системы (3.52), получим

$$r(z) + r(z-1) = \theta(z), \quad (3.54)$$

где

$$\theta(z) = \theta_2(z) + \theta_1(z-1).$$

С учетом того, что функция  $\theta_1(z)$  на интервале  $[-1, \varphi(0)]$  равна нулю (см. (3.22)), начальные условия для уравнения (3.54) будут иметь следующий вид:

$$r(z) = \begin{cases} -R(z), & -1 \leq z \leq \varphi(0); \\ r(z), & \varphi(0) \leq z \leq 0. \end{cases} \quad (3.55)$$

Таким образом, задача сведена к решению разностного уравнения (3.54) при начальных условиях (3.55). Для решения полученной задачи используем интегральное преобразование Лапласа. В результате получим:

$$r(z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^z \theta(\zeta) \cos[k_n(z-\zeta)] d\zeta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^0 r(\zeta) \cos[k_n(z-\zeta)] d\zeta, \quad (3.56)$$

где  $k_n = \pi(2n-1)$ .

Как и в предыдущем случае (пункт 3.3.1.) нас интересует только функция напряжений

$$U_{\xi}(\xi, \tau) = h(\tau + \xi) - H(\tau - \xi). \quad (3.57)$$

Рассмотрим свободные колебания, когда  $\theta_1(z) = \theta_2(z) = 0$ . Тогда из (3.57) с учетом (3.56), (3.53) и (3.51) получим:

$$U_{\xi}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n^*(\xi, \tau),$$

где

$$V_n^*(\xi, \tau) = \cos \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)] \right\} \times \left( A_n^* \cos \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)] \right\} + B_n^* \sin \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)] \right\} \right); \quad (3.58)$$

$$A_n^* = 4 \int_{-1}^0 r(\zeta) \cos(k_n \zeta) d\zeta; \quad B_n^* = 4 \int_{-1}^0 r(\zeta) \sin(k_n \zeta) d\zeta.$$

Сравнивая выражения (3.58) и (3.26), заметим, что в случае граничных условий вида (3.49) роль динамических мод, характеризующих форму колебаний, играют функции  $\cos \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)] \right\}$ .

Точка  $\xi = \xi_0(\tau)$ , соответствующая максимальному размаху колебания напряжений, находится из уравнения

$$\cos \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)] \right\} = \pm 1.$$

Отметим также, что нарастание напряжений здесь, как и в двух предыдущих случаях, невозможно ни при каких законах движения границ.

Перейдем к рассмотрению вынужденных колебаний при нулевых начальных условиях. Здесь из (3.57) с учетом (3.56), (3.53) и (3.51) получим:

$$U_\xi(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\xi, \tau) + D(\xi, \tau), \quad (3.59)$$

где

$$\begin{aligned} V_n(\xi, \tau) = & \cos \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)] \right\} \times \\ & \times \left( \cos \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)] \right\} 4 \int_0^{\psi(\tau - \xi)} \theta(\zeta) \cos(k_n \zeta) d\zeta + \right. \\ & \left. + \sin \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)] \right\} 4 \int_0^{\psi(\tau - \xi)} \theta(\zeta) \sin(k_n \zeta) d\zeta \right); \quad (3.60) \end{aligned}$$

$$D(\xi, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\psi(\tau - \xi)}^{\varphi(\tau + \xi)} \theta(\zeta) \cos[k_n(\varphi(\tau + \xi) - \zeta)] d\zeta - \theta_1(\psi(\tau - \xi)).$$

Заметим, что последнее выражение представляет собой ряд Фурье для функции

$$D(\xi, \tau) = \begin{cases} -\theta_1(\psi(\tau - \xi)), & \xi = \ell_1(\tau); \\ \theta(\varphi(\tau + \xi)) - \theta_1(\psi(\tau - \xi)), & \ell_1(\tau) < \xi \leq \ell_2(\tau). \end{cases}$$

Как отмечалось ранее (см. пункт 3.2), функцией  $D(\xi, \tau)$  в выражении (3.59) можно пренебречь. Тогда вынужденные колебания представляют собой суперпозицию колебаний, соответствующих различным динамическим модам.

Если функция  $\theta(z)$  имеет вид (3.37), то после соответствующих преобразований (см. пункт 3.2) полную амплитуду колебаний на  $n$ -ой динамической моде в точке  $\xi = \xi_0(\tau)$  можно записать в виде

$$A_n^2(\tau) = 4B^2 \left\{ \left[ \int_0^{b(\tau)} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^{b(\tau)} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (3.61)$$

где  $b(\tau) = \psi(\tau - \xi_0(\tau))$ ;  $\Phi_n(\zeta) = k_n \zeta - W(\zeta)$ .

**3.3.3.** Рассмотрим еще один вид граничных условий. Пусть требуется решить уравнение (3.1) при граничных условиях

$$U_\tau(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_\tau(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau) \quad (3.62)$$

и начальных условиях вида (3.3). Повторяя рассуждения предыдущих случаев, для свободных колебаний системы получим:

$$U_\xi(\xi, \tau) = \frac{1}{2} V_0^*(\xi, \tau) + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^*(\xi, \tau),$$

где

$$V_n^*(\xi, \tau) = \cos \{ \pi n [ \varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi) ] \} \times \\ \times \left( A_n^* \cos \{ \pi n [ \varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi) ] \} + B_n^* \sin \{ \pi n [ \varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi) ] \} \right);$$

$$A_n^* = 4 \int_{-1}^0 r(\zeta) \cos(2\pi n \zeta) d\zeta; B_n^* = 4 \int_{-1}^0 r(\zeta) \sin(2\pi n \zeta) d\zeta;$$

$n=0, 1, 2, \dots$ , а функция  $r(\zeta)$  определяется равенством (3.55).

Форму колебаний здесь характеризует функция

$$\cos \{ \pi n [ \varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi) ] \}.$$

Максимальный размах колебаний наблюдается в точке  $\xi = \xi_0(\tau)$ ,

определяемой из уравнения  $\cos \{ \pi n [ \varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi) ] \} = \pm 1$ .

Как и в предыдущих случаях, при свободных колебаниях максимальные напряжения в стержне остаются неизменными.

При действии на систему внешней силы вида (3.37) выражение для полной амплитуды колебания напряжений в точке  $\xi = \xi_0(\tau)$  имеет вид:

$$A_n^2(\tau) = 4B^2 \left\{ \left[ \int_0^{b(\tau)} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^{b(\tau)} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (3.63)$$

где  $b(\tau) = \psi(\tau - \xi_0(\tau)); \Phi_n(\zeta) = 2\pi n\zeta - W(\zeta)$ .

### 3.4. Выводы по третьей главе

1. Разработан аналитический метод решения модельных краевых задач с движущимися границами (метод замены переменных в системе функционально–разностных уравнений), позволяющий получить решение волнового уравнения (3.1) при граничных условиях, отличных от условий первого рода.

2. Выполнен анализ математических моделей, описываемых волновым уравнением при следующих видах граничных условий:

$$U(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau); \quad (3.64)$$

$$U_\xi(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_\xi(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau); \quad (3.65)$$

$$U_\tau(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_\xi(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau); \quad (3.66)$$

$$U_\tau(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_\tau(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau). \quad (3.67)$$

Предложенный аналитический метод позволяет рассмотреть также граничные условия следующих видов

$$U(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_\xi(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau); \quad (3.68)$$

$$U(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_\tau(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau). \quad (3.69)$$

Граничные условия (3.68), (3.69) являются модельными.

3. Во всех рассмотренных случаях решение задачи доведено до получения формулы амплитуды колебаний (см. (3.39), (3.61), (3.63)), соответствующих  $n$ -ной динамической моде. Анализ структуры решения позволил привести формулу для полной амплитуды к достаточно простому виду, что, в свою очередь, позволяет разработать общий алгоритм анализа резонансных свойств моделей.

## Глава 4

# **Решение краевой задачи с движущимися границами при помощи приближенного аналитического метода Канторовича – Галеркина**

В работах А.А. Лежневой [85 – 87] для решения задач о колебаниях систем с движущимися границами предлагается использовать метод Канторовича в совокупности с методом Галеркина. Такой подход очень удобен, так как начальная задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Этот метод А.А. Лежнева применяет для получения решений волнового уравнения и уравнения изгибных колебаний балки при несложных однородных граничных условиях, заданных на одной движущейся и одной неподвижной границах. Заметим, что в отличие от работ А.А. Лежневой, особое внимание в настоящей главе уделено рассмотрению наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения действуют на границах.

Целью настоящей главы является распространение метода Канторовича–Галеркина на более широкий класс модельных краевых задач, описываемых уравнениями гиперболического типа с условиями на движущихся границах, позволяющего учитывать действие на механическую систему сил сопротивления среды, изгибную жёсткость и жёсткость подложки, вязкоупругие свойства колеблющегося объекта и слабые возмущения на границах.

Задачи настоящей главы:

1. Разработать методику решений линейных краевых задач с движущимися границами приближенным аналитическим методом Канторовича – Галеркина, постановки которых приведены в главе 2.

2. Получить выражение для амплитуды колебаний, соответствующих  $n$ -ной динамической моде, что позволит проанализировать резонансные свойства решений.

3. Произвести оценку погрешности метода в зависимости от относительной скорости движения границ.

#### 4.1. Приближенно – аналитический метод Канторовича – Галеркина

Пусть требуется получить решение уравнения гиперболического типа

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[U(\xi, \tau)] = \varphi(\xi, \tau) \quad (4.1)$$

при граничных условиях

$$Y_{ji} \left[ U(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau) \right] = F_{ji}(\tau); \quad (4.2)$$

$$i = \overline{1, m}; j = \overline{1, 2},$$

где  $L$  – линейный однородный дифференциальный оператор по  $\xi$  порядка  $2m$  ( $m \leq 2$  – целое положительное число);  $Y_{ji}$  – линейные однородные дифференциальные операторы по  $\xi$ ;  $\varphi(\xi, \tau)$ ,  $F_{ji}(\tau)$  – заданные функции класса  $C$  и  $C^2$  соответственно;  $\varepsilon$  – малый параметр ( $\varepsilon = V/a$ ,  $V$  – скорость границы,  $a$  – скорость распространения колебаний).

Запись законов движения границ в виде  $\ell_j(\varepsilon\tau)$  соответствует режиму медленного движения. В случае неподвижности границ ( $\ell_j(\varepsilon\tau) = \text{const}$ ) задача (4.1), (4.2) может быть решена методом разделения переменных.

Заметим, что метод Канторовича–Галеркина позволяет учесть в задаче (4.1), (4.2) и начальные условия. При анализе резонансных свойств начальные условия принимаются в виде

$$U(\xi, 0) = U_\tau(\xi, 0) = 0.$$

Для того чтобы избавиться от неоднородностей в граничных условиях, вводится новая функция

$$U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau), \quad (4.3)$$

где

$$H(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) F_{kr}(\tau), \quad (4.4)$$

а функция  $D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)$  удовлетворяют уравнению

$$L[D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)] = 0 \quad (4.5)$$

и условиям

$$Y_{ji} [D_{kr}(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = \begin{cases} 1, & k = j \wedge r = i; \\ 0, & k \neq j \vee r \neq i. \end{cases} \quad (4.6)$$

Решение задачи (4.5), (4.6) затруднений, как правило, не вызывает, и поэтому здесь оно подробно не рассматривается.

Функция  $V(\xi, \tau)$  находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[V(\xi, \tau)] = \varphi(\xi, \tau) - H_{\tau\tau}(\xi, \tau); \quad (4.7)$$

$$Y_{ji} [V(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = 0. \quad (4.8)$$

Для решения задачи используем метод Канторовича в совокупности с методом Галеркина. Решение будем искать в следующем виде:

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau), \quad (4.9)$$

где  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  – собственные функции следующей краевой задачи:

$$L[X_n(\xi, \varepsilon\tau)] = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau); \quad (4.10)$$

$$Y_{ji} [X_n(\ell_j(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau)] = 0. \quad (4.11)$$

Здесь  $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$  – собственные частоты задачи, а  $\varepsilon\tau$  рассматривается как параметр.

Такой выбор координатных функций  $X_n$  обуславливает тот факт, что решение (4.9) является точным в случае, если границы неподвижны. В

реальных технических объектах при продольных колебаниях  $\varepsilon$  не превосходит 0,05, а при поперечных колебаниях  $\varepsilon$  не превосходит 0,1.

Заметим, что функции  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  удовлетворяют граничным условиям (4.8) и играют в данном случае роль динамических мод.

Диссертация посвящена анализу резонансных колебаний. При наблюдении резонансного явления на  $n$  – ой динамической моде, функция  $f_n(\tau)$  значительно возрастает. Амплитуда нерезонансных членов соизмерима с амплитудой возмущающего воздействия. При этом нерезонансными членами ряда (4.9) можно пренебречь.

Применим метод Галеркина. Функции  $f_n(\tau)$  будем определять из следующего уравнения:

$$\int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} \{ [X_n(\xi, \varepsilon\tau)f_n(\tau)]_{\tau\tau} + L[X_n(\xi, \varepsilon\tau)f_n(\tau)] - \varphi(\xi, \tau) + H_{\tau\tau}(\xi, \tau) \} X_n(\xi, \varepsilon\tau)g(\xi)d\xi = 0, \quad (4.12)$$

где  $g(\xi)$  – весовая функция.

Заметим, что исходя из метода Галеркина, функции  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  ортогональны на интервале  $[\ell_1(\varepsilon\tau), \ell_2(\varepsilon\tau)]$  с весом  $g(\xi)$ .

Поскольку оператор  $L$  является оператором по  $\xi$ , а  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  – собственные функции задачи (4.10), (4.11), то

$$L[X_n(\xi, \varepsilon\tau)f_n(\tau)] = f_n(\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau), \quad (4.13)$$

где  $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$  – собственные частоты задачи (4.10), (4.11).

Для того чтобы избавиться в уравнении (4.12) от второй производной функции  $F_{kr}(\tau)$ , с учетом (4.4) сделаем замену:

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) + \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m Q_{nkr}(\varepsilon\tau)F_{kr}(\tau), \quad (4.14)$$

где

$$Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) = - \frac{\int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi}{\int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi}. \quad (4.15)$$

С учетом (4.13), (4.14) уравнение (4.12) примет вид

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)\mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)\mu_n'(\tau) + \varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \quad (4.16)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_n(\tau) = & E_n(\tau) - 2\varepsilon \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m B_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) F_{kr}'(\tau) - \varepsilon^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m C_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) F_{kr}(\varepsilon\tau) - \\ & - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau) \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) F_{kr}(\varepsilon\tau). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Здесь и далее используются следующие обозначения:

$$A_{1n}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi; \quad (4.18)$$

$$\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_{n_\tau}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi; \quad (4.19)$$

$$\varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_{n_\tau}^2(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi; \quad (4.20)$$

$$\varepsilon^2 A_{4n}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_{n_{\tau\tau}}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi;$$

$$\varepsilon B_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} [Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)]_\tau \cdot X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi; \quad (4.21)$$

$$\varepsilon^2 C_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} [Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)]_{\tau\tau} \cdot X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi;$$

$$E_n(\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} \varphi(\xi, \tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi.$$

Используя равенства (4.9), (4.14), решению (4.3) можно придать вид

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X(\xi, \varepsilon\tau) + \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m F_{kr}(\tau) [D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau)]. \quad (4.22)$$

Поскольку величины  $Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)$ , определяемые выражением (4.15), представляют собой коэффициенты ряда для функции  $-D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)$ , разложенной по системе ортогональных функций  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  на интервале  $[\ell_1(\varepsilon\tau), \ell_2(\varepsilon\tau)]$ , то выражение в квадратных скобках равенства (4.22) равно нулю во всех точках отрезка  $[\ell_1(\varepsilon\tau), \ell_2(\varepsilon\tau)]$ , кроме, может быть, крайних точек. Поэтому вместо (4.22) можно взять

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau). \quad (4.23)$$

Данное решение показывает, что аналогично тому, как колебательные процессы для объектов с неподвижными границами выражаются суммой колебаний, соответствующих собственным функциям, в случае движения границ появляется суперпозиция колебаний, соответствующих динамическим модам  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ .

Если ввести в уравнение (4.16) новую функцию

$$\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau) y_n(\tau), \quad (4.24)$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = \exp \left[ -\int_0^{\tau} \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} d\tau \right], \quad (4.25)$$

то уравнение (4.16) можно преобразовать так, что оно не будет содержать члена с  $y'(\tau)$ :

$$y_n''(\tau) + \omega_n^2(\varepsilon\tau) y_n(\tau) = \theta_n(\tau) / [A_{0n}(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau)]. \quad (4.26)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\omega_n^2(\varepsilon\tau) = & \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) + \frac{\varepsilon^2}{A_{1n}^2(\varepsilon\tau)} \{A_{2n}^2(\varepsilon\tau) - A_{1n}(\varepsilon\tau)A_{3n}(\varepsilon\tau) + \\
& + A_{2n}(\varepsilon\tau)[X_n^2(\ell_2(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau)g(\ell_2(\varepsilon\tau))\ell_2'(\varepsilon\tau) - \\
& - X_n^2(\ell_1(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau)g(\ell_1(\varepsilon\tau))\ell_1'(\varepsilon\tau)] - \\
& - A_{1n}(\varepsilon\tau)[X_n(\ell_2(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau)X_n(\ell_2(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau)g(\ell_2(\varepsilon\tau))\ell_2'(\varepsilon\tau) - \\
& - X_n(\ell_1(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau)X_n(\ell_1(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau)g(\ell_1(\varepsilon\tau))\ell_1'(\varepsilon\tau)]\}. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Пусть внешнее воздействие на систему носит гармонический характер, т.е.:

$$\varphi(\xi, \tau) = B_0(\xi) \cos W_0(\tau); \tag{4.28}$$

$$F_{ji}(\tau) = B_{ji} \cos W_{ji}(\tau); \quad j = \overline{1, 2}; \quad i = \overline{1, m}, \tag{4.29}$$

где  $B_{ji}$  – постоянные величины;  $W_0(\tau), W_{ji}(\tau)$  – монотонно возрастающие функции;  $B_0(\xi)$  – функция, характеризующая интенсивность распределенной нагрузки.

Заметим, что в связи с медленным движением границ при исследовании резонансных свойств функции  $W_0$  и  $W_{ji}$  имеют вид:

$$W_0(\tau) = \omega_0\tau + \psi_0(\varepsilon\tau); \tag{4.30}$$

$$W_{ji}(\tau) = \omega_{ji}\tau + \psi_{ji}(\varepsilon\tau), \tag{4.31}$$

где  $\omega_0$  и  $\omega_{ji}$  – постоянные величины, а  $\psi_0(\varepsilon\tau)$  и  $\psi_{ji}(\varepsilon\tau)$  – функции, характеризующие медленное изменение частот возмущающих воздействий.

С учетом равенств (4.28), (4.29) выражение (4.17) примет вид

$$\frac{\theta_n(\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)} = M_{n0}(\varepsilon\tau) \cos W_0(\tau) + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^m M_{nji}(\varepsilon\tau) \cos \Omega_{nji}(\tau), \tag{4.32}$$

где

$$\begin{aligned}
M_{n0}(\varepsilon\tau) = & \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} B_0(\xi) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi / [A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)]; \\
M_{nji}(\varepsilon\tau) = & \frac{-B_{ji}}{A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)} \sqrt{Z_{nji}^2(\varepsilon\tau) + 4\varepsilon^2 [W_{ji}'(\tau)B_{nji}(\varepsilon\tau)]^2}; \tag{4.33}
\end{aligned}$$

$$Z_{nji}(\varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)Q_{nji}(\varepsilon\tau) + \varepsilon^2 C_{nji}(\varepsilon\tau);$$

$$\Omega_{nji}(\tau) = W_{ji}(\tau) + \arcsin \left[ \frac{\varepsilon B_{nji}(\varepsilon\tau)W'_{ji}(\tau)}{\sqrt{z_{nji}^2(\varepsilon\tau) + 4\varepsilon^2 [W_{ji}(\tau)B_{nji}(\varepsilon\tau)]^2}} \right]. \quad (4.34)$$

Вывод выражения (4.32) приведен в Приложении № 4 к настоящей диссертации.

Заметим, что резонансные свойства системы определяются скоростями изменения функций  $\Omega_{n0}$ ,  $\Omega_{nji}$ . Скорости же характеризуются производными, которые с учетом равенств (4.33), (4.29), (4.30) можно записать в следующем виде:

$$\Omega'_{nji}(\tau) = W'_{ji}(\tau) + O(\varepsilon^2) + \dots \quad (4.35)$$

Таким образом, второй член в правой части формулы (4.34) влияет на резонансные свойства системы как величина порядка малости  $\varepsilon^2$ . В дальнейшем под точностью порядка  $\varepsilon^2$  будем понимать точность, имеющую место после пренебрежения членами с  $\varepsilon^2$  и членами вида  $\varepsilon F'_{ji}(\varepsilon\tau)$ , которые несмотря на малость порядка  $\varepsilon$  на резонансные свойства влияют как члены порядка  $\varepsilon^2$  (см. (4.17), (4.33), (4.34), (4.35)). Например, выражения (4.34), (4.33), (4.27) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$  будут иметь вид

$$M_{nji}(\varepsilon\tau) = \frac{-B_{ji}\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_{nji}(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad (4.36)$$

$$\Omega_{nji}(\tau) = W_{nji}(\tau); \quad \omega_n^2(\varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau). \quad (4.37)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда выражение (3.32) имеет вид

$$\theta_n(\tau)/[A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)] = M_n(\varepsilon\tau) \cos W_n(\tau), \quad (4.38)$$

где  $W_n(\tau)$  – монотонно возрастающая функция.

Равенство (4.32) можно заменить равенством (4.38) в следующих случаях:

1) все внешние возмущения  $\varphi(\xi, \tau); F_{ji}(\tau)$  равны нулю, кроме какого-то одного;

2) производные функций  $W_0(\tau), W_{ji}(\tau)$  равны между собой, т.е. сами функции отличаются на постоянную величину;

3) резонансные области нагрузок  $\varphi, F_{ji}$  не пересекаются, тогда при рассмотрении резонанса от одной нагрузки действием других можно пренебречь.

С учетом изложенного уравнение (4.26) примет вид

$$y_n''(\tau) + \omega_n^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = M_n(\varepsilon\tau)\cos W_n(\tau). \quad (4.39)$$

Решение уравнения (4.39) при нулевых начальных условиях  $y(0) = 0; y'(0) = 0$  записывается следующим образом [73]:

$$y_n(\tau) = \int_0^\tau \gamma_n(\tau, \zeta) M_n(\varepsilon\zeta) \cos W_n(\zeta) d\zeta, \quad (4.40)$$

где

$$\gamma_n(\tau, \zeta) = \frac{-y_{1n}(\tau)y_{2n}(\zeta) - y_{1n}(\zeta)y_{2n}(\tau)}{y_{1n}(\zeta)y'_{2n}(\zeta) - y'_{1n}(\zeta)y_{2n}(\zeta)},$$

а  $y_{1n}, y_{2n}$  – линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего (3.39), т.е.

$$y_n''(\tau) + \omega_n^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = 0. \quad (4.41)$$

Заметим, что если  $u_1(\tau)$  и  $u_2(\tau)$  – линейно независимые решения уравнения (3.41), то из равенства

$$u_1(\tau) + iu_2(\tau) = a_n(\varepsilon\tau)e^{i\omega_n(\tau)},$$

где

$$a_n(\varepsilon\tau) = \sqrt{u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau)}; \quad \omega_n(\tau) = \arg(u_1(\tau) + iu_2(\tau)),$$

нетрудно получить два линейно независимых решения в виде, более удобном для дальнейших исследований:

$$y_{1n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau)\sin w_n(\tau); \quad (4.42)$$

$$y_{2n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau). \quad (4.43)$$

В большинстве случаев решения уравнения (4.41) сразу получаются в виде (4.42), (4.43), и указанные преобразования выполнять не нужно. Так, при использовании метода малого параметра [96, 104], с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$  функции  $a_n(\varepsilon\tau)$  и  $w_n(\tau)$  определяются из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dw_n(\tau)}{d\tau} = \omega_n(\varepsilon\tau); \\ \frac{da_n(\varepsilon\tau)}{d\tau} = -\frac{a_n(\varepsilon\tau)}{2\omega_n(\varepsilon\tau)} \cdot \frac{d\omega_n(\varepsilon\tau)}{d\tau}. \end{cases}$$

Решение этой системы (с точностью до постоянной величины) имеет вид

$$w_n(\tau) = \int_0^\tau \omega_n(\varepsilon\tau) d\tau; \quad (4.44)$$

$$a_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{\omega_n(\varepsilon\tau)}}. \quad (4.45)$$

Так как  $\omega_n(\varepsilon\tau)$  больше нуля, то из равенств (4.44), (4.45) следует, что  $w_n(\tau)$  является монотонно возрастающей функцией. Заметим, что пренебрежение в выражении для  $\omega_n^2(\varepsilon\tau)$  (см. (4.27)) членами порядка  $\varepsilon^2$  приводит к погрешности в определении  $w_n(\tau)$  и  $a_n(\varepsilon\tau)$  также порядка  $\varepsilon^2$ . Поэтому, когда  $\varepsilon$  мало, для  $\omega_n^2(\varepsilon\tau)$  можно использовать формулу (4.37).

Возвращаясь к решению (4.40), с учетом (4.42), (4.43) получим:

$$\begin{aligned} y_n(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \sin w_n(\tau) \int_0^\tau \frac{M_n(\varepsilon\zeta) \cos W_n(\zeta) \cos w_n(\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w_n'(\zeta)} d\zeta - \\ - a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau) \int_0^\tau \frac{M_n(\varepsilon\zeta) \cos W_n(\zeta) \sin w_n(\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w_n'(\zeta)} d\zeta. \end{aligned}$$

Разлагая произведение тригонометрических функций в сумму и учитывая замену (4.24), можно получить следующее выражение для полной амплитуды колебаний, соответствующей  $n$ -ной динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = \frac{1}{4} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[ \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta + \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n2}(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta + \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n2}(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (4.46)$$

где

$$\begin{aligned} F_n(\varepsilon\zeta) &= \frac{M_n(\varepsilon\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w_n'(\zeta)}; \\ \Phi_{n1}(\zeta) &= w_n(\zeta) - W_n(\zeta); \\ \Phi_{n2}(\zeta) &= w_n(\zeta) + W_n(\zeta). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Здесь функция  $F_n(\varepsilon\zeta)$  знакопостоянна, так как функции  $M_n(\varepsilon\zeta)$  положительны, а произведение  $a_n(\varepsilon\zeta) w_n'(\zeta)$  знакопостоянно (оно равно якобиану двух линейно независимых функций  $y_{1n}$  и  $y_{2n}$ , определяемых равенствами (4.42), (4.43)). Функции  $w_n(\zeta)$  и  $W_n(\zeta)$  монотонно возрастают, поэтому фаза  $\Phi_{n2}(\zeta)$  изменяется быстрее фазы свободных колебаний, которая определяется функцией  $w_n(\zeta)$ . Следовательно, участок знакопостоянства функций

$$\sin \Phi_{n2}(\zeta), \cos \Phi_{n2}(\zeta) \quad (4.48)$$

меньше половины периода свободных колебаний, т.е. период возрастания соответствующих интегралов невелик. Интегралы же, содержащие

$$\sin \Phi_{n1}(\zeta), \cos \Phi_{n1}(\zeta), \quad (4.49)$$

возрастают в течение всего периода, пока наблюдается резонансное явление, т.е. в течение достаточно большого количества колебаний. Основной вклад в амплитуду вносят интегралы, содержащие функции (4.49), а интегралами, содержащими функции (4.48), можно пренебречь. Тогда равенство (4.46) примет более простой вид:

$$A_n^2(\tau) = \frac{1}{4} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[ \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (4.50)$$

## 4.2. Применение метода Канторовича–Галеркина

Рассмотрим наиболее распространенную задачу с граничными условиями первого рода

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (4.51)$$

$$U(\ell_1(\varepsilon\tau), \tau) = F_{11}(\tau); U(\ell_2(\varepsilon\tau), \tau) = F_{21}(\tau); \quad (4.52)$$

где

$$\ell_1(0) = 0; \ell_2(0) = 1; \ell_2(\varepsilon\tau) > \ell_1(\varepsilon\tau).$$

Применим метод Канторовича–Галеркина. Функции  $D_{11}(\xi, \varepsilon\tau)$  и  $D_{21}(\xi, \varepsilon\tau)$  (см. (4.6)) здесь определяются из следующих задач:

$$\begin{aligned} D_{11\xi\xi}(\xi, \varepsilon\tau) &= 0; & D_{21\xi\xi}(\xi, \varepsilon\tau) &= 0; \\ D_{11}(\ell_1(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) &= 1; & D_{21}(\ell_1(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) &= 0; \\ D_{11}(\ell_2(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) &= 0. & D_{21}(\ell_2(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$D_{11}(\xi, \varepsilon\tau) = \frac{\ell_2(\varepsilon\tau) - \xi}{\ell(\varepsilon\tau)}; \quad (4.53)$$

$$D_{21}(\xi, \varepsilon\tau) = \frac{\xi - \ell_1(\varepsilon\tau)}{\ell(\varepsilon\tau)}, \quad (4.54)$$

где

$$\ell(\varepsilon\tau) = \ell_2(\varepsilon\tau) - \ell_1(\varepsilon\tau).$$

Величины  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  и  $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$  (см. пункт 4.1) являются соответственно собственными функциями и собственными частотами следующей краевой задачи:

$$X_{n\xi\xi}(\xi, \varepsilon\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau) = 0;$$

$$X_n(\ell_1(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 0; \quad X_n(\ell_2(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 0.$$

Решая данную задачу, получим

$$X_n(\xi, \varepsilon\tau) = \sin \frac{\pi n[\xi - \ell_1(\varepsilon\tau)]}{\ell(\varepsilon\tau)}, \quad \omega_{0n}(\varepsilon\tau) = \frac{\pi n}{\ell(\varepsilon\tau)}.$$

Для дальнейшего решения потребуются также функции  $A_{0n}$ ,  $A_{1n}$ ,  $\varepsilon A_{2n}$ ,  $\varepsilon^2 A_{3n}$ ,  $Q_{n11}$ ,  $Q_{n21}$ ,  $B_{n11}$ ,  $B_{n21}$  – определенные равенствами (4.25), (4.18), (4.19), (4.20), (4.15), (4.21) соответственно.

Вычисляя их для рассматриваемой задачи, получим:

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = 1/\sqrt{\ell(\varepsilon\tau)}; \quad A_{1n}(\varepsilon\tau) = \ell(\varepsilon\tau)/2; \quad \varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau) = \varepsilon \ell'(\varepsilon\tau)/4;$$

$$\varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau) = \frac{\pi^2 n^2 \varepsilon^2}{2\ell(\varepsilon\tau)} \left[ \ell'_1(\varepsilon\tau)\ell'_2(\varepsilon\tau) + \ell'^2(\varepsilon\tau) \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \right) \right];$$

$$Q_{n11}(\varepsilon\tau) = -2/(\pi n); \quad Q_{n21}(\varepsilon\tau) = 2(-1)^n/(\pi n);$$

$$\varepsilon B_{n11}(\varepsilon\tau) = \frac{\varepsilon}{\pi n} \left[ -\frac{1}{2} \ell'(\varepsilon\tau) + \ell'_2(\varepsilon\tau) - (-1)^n \ell'_2(\varepsilon\tau) \right];$$

$$\varepsilon B_{n21}(\varepsilon\tau) = \frac{\varepsilon}{\pi n} \left[ \frac{3}{2} (-1)^n \ell'(\varepsilon\tau) - \ell'_1(\varepsilon\tau) + (-1)^n \ell'_1(\varepsilon\tau) \right].$$

Следуя методике пункта 4.1, решение задачи (4.51), (4.52) можно представить в виде

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau),$$

где  $\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau)y_n(\tau)$ , а функция  $y_n$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$y_n''(\tau) + \omega_n^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = \theta_n(\tau). \quad (4.55)$$

Здесь  $\omega_n^2(\varepsilon\tau)$  определяется формулой (4.27). Произведя в (4.27) вычисления, получим:

$$\omega_n^2(\varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) - \frac{\varepsilon^2}{\ell^2(\varepsilon\tau)} \left[ \ell'^2(\varepsilon\tau) \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \pi^2 n^2 \right) + \pi^2 n^2 \ell'_1(\varepsilon\tau)\ell'_2(\varepsilon\tau) \right].$$

Пусть внешнее воздействие на систему носит гармонический характер, т.е.

$$F_{11}(\tau) = B_{11} \cos W_{11}(\tau); \quad F_{21}(\tau) = B_{21} \cos W_{21}(\tau).$$

Для функции  $\theta_n(\tau)$  найдем следующее выражение:

$$\theta_n(\tau) = M_{n11}(\varepsilon\tau) \cos \Omega_{n11}(\tau) + M_{n21}(\varepsilon\tau) \cos \Omega_{n21}(\tau),$$

где функции  $M$  и  $\Omega$  с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$  имеют вид:

$$M_{n11}(\varepsilon\tau) = \frac{2\pi n B_{11}}{\ell^{3/2}(\varepsilon\tau)}; \quad M_{n21}(\varepsilon\tau) = -\frac{2\pi n (-1)^n B_{21}}{\ell^{3/2}(\varepsilon\tau)};$$

$$\Omega_{n11}(\tau) = W_{11}(\tau) - \arcsin \left[ \frac{\varepsilon \ell(\varepsilon\tau) W'_{11}(\tau)}{\pi^2 n^2} (\ell'_2(\varepsilon\tau) - \frac{1}{2} \ell'(\varepsilon\tau) - (-1)^n \ell'_2(\varepsilon\tau)) \right]; \quad (4.56)$$

$$\Omega_{n21}(\tau) = W_{21}(\tau) - \arcsin \left[ \frac{\varepsilon \ell(\varepsilon\tau) W'_{21}(\tau)}{\pi^2 n^2} \left( \frac{3}{2} \ell'(\varepsilon\tau) + \ell'_1(\varepsilon\tau) - (-1)^n \ell'_1(\varepsilon\tau) \right) \right]. \quad (4.57)$$

Как уже отмечалось, на резонансные свойства системы влияют производные функций  $\Omega$ , которые из равенств (4.56), (4.57) определяются с точностью до  $\varepsilon^2$ , так как при дифференцировании неучтенных малых членов их порядок малости повышается.

При дальнейшем рассмотрении конкретизируем функции  $F_{11}(\tau)$ ,  $F_{21}(\tau)$  и  $\ell_1(\tau)$ ,  $\ell_2(\tau)$  в виде

$$F_{11}(\tau) = 0; \quad F_{21}(\tau) = B \cos W(\tau);$$

$$\ell_1(\tau) = 0; \quad \ell_2(\tau) = 1 + \varepsilon\tau.$$

Тогда уравнение (4.55) запишется следующим образом:

$$y_n''(\tau) + \frac{1}{(1 + \varepsilon\tau)^2} \left( \pi^2 n^2 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 - \frac{1}{3} \varepsilon^2 \pi^2 n^2 \right) y_n(\tau) = M_n(\varepsilon\tau) \cos \Omega(\tau), \quad (4.58)$$

где

$$M_n(\varepsilon\tau) = \frac{-2\pi n (-1)^n B}{(1 + \varepsilon\tau)^{3/2}};$$

$$\Omega(\tau) = W(\tau) - \arcsin \left[ \frac{3\varepsilon(1 + \varepsilon\tau)W'(\tau)}{2\pi^2 n^2} \right].$$

Однородное уравнение, соответствующее (4.58), сводится к уравнению Эйлера [60]. Два линейно независимых решения этого уравнения записываются в виде (4.42), (4.43), где

$$w_n(\tau) = s \ln(1 + \varepsilon\tau); \quad (4.59)$$

$$a_n(\varepsilon\tau) = \sqrt{1 + \varepsilon\tau}; \quad (4.60)$$

$$s = \frac{\pi n}{\varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \right)}.$$

Заметим, что при применении к уравнению (4.58) метода малого параметра [96, 104] выражения для  $w_n$  и  $a_n$  здесь также имеют вид (4.59), (4.60) при

$$s = \frac{\pi n}{\varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4\pi^2 n^2} \right)}.$$

Поэтому, когда точное решение неизвестно или имеет сложный вид, для решения уравнения (4.41) можно использовать метод малого параметра.

С учетом сделанных вычислений выражение для амплитуды колебаний, соответствующее  $n$ -ной динамической моде, имеет вид

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[ \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (4.61)$$

где

$$E_n^2(\varepsilon\tau) = \frac{B^2}{1 - \varepsilon^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \right)}; \quad F_n(\varepsilon\zeta) = \frac{1}{1 + \varepsilon\zeta};$$

$$\Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - \Omega_n(\zeta).$$

Метод Канторовича–Галеркина может быть применён и в более сложных случаях. Он позволяет учитывать действие на систему внешних сил сопротивления, вязкоупругие свойства колеблющегося объекта, а также слабые возмущения на границах.

Рассмотрим следующую задачу:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[U(\xi, \tau)] + \varepsilon_0 L_1[U(\xi, \tau)] = \varphi(\xi, \tau); \quad (4.62)$$

$$Y_{ji}[U(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] + \varepsilon_{ji} Z_{ji}[U(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = F_{ji}(\tau); \quad (4.63)$$

$$i = \overline{1, m}; j = \overline{1, 2},$$

где  $\varepsilon, \varepsilon_0, \varepsilon_{ji}$  – малые параметры;  $L_1$  – линейный дифференциальный оператор (его порядок по  $\tau$  равен единице, по  $\xi$  не превышает  $2m$ );  $Z_{ji}$  – линейные операторы. Операторы  $Z_{ji}$  – могут содержать члены следующего вида:

$$A(\varepsilon\tau) \frac{\partial^n U_\tau(\xi, \tau)}{\partial \xi^n} \Big|_{\xi=\ell_j(\varepsilon\tau)}; \quad \int B(\varepsilon\zeta) \frac{\partial^k U(\xi, \zeta)}{\partial \zeta^k} \Big|_{\xi=\ell_j(\varepsilon\zeta)} \cdot d\zeta$$

( $m \leq 2, n < 2m, k \leq 2$  – целые положительные числа;  $A(\varepsilon\tau), B(\varepsilon\zeta)$  – заданные функции). Члены данного вида могут иметь место, например, при учете вязкоупругих свойств материалов.

Остальные величины, входящие в (4.62), (4.63), определены ранее (см. (4.1), (4.2)).

Непосредственно поставленную задачу методом Канторовича–Галеркина решать нельзя. Необходимо сначала преобразовать граничные условия так, чтобы они не содержали функции  $F_{ji}$  и операторов  $Z_{ji}$ . Для этого вводится новая функция:

$$U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau), \quad (4.64)$$

где функция  $H(\xi, \tau)$  удовлетворяет уравнению:

$$L[H(\xi, \tau)] = 0 \quad (4.65)$$

и условиям

$$Y_{ji}[H(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = -\varepsilon_{ji} Z_{ji}[H(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] - \varepsilon_{ji} Z_{ji}[V(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] + F_{ji}(\tau). \quad (4.66)$$

Так как оператор  $L$  является оператором по  $\xi$  порядка  $2m$ , общее решение уравнения (4.65) можно записать в виде

$$H(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m C_{kr}(\tau) D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau), \quad (4.67)$$

где  $D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)$  удовлетворяет уравнению (4.65) и условиям

$$Y_{ji}[D_{kr}(\ell_j(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau)] = \begin{cases} 1, j = k \wedge i = r; \\ 0, j \neq k \vee i \neq r. \end{cases} \quad (4.68)$$

Подставляя (4.67) в (4.66) и учитывая (4.68), получим следующую систему уравнений относительно  $C_{kr}(\tau)$ :

$$C_{kr}(\tau) = -\varepsilon_{kr} Z_{kr} \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^2 C_{ji}(\tau) D_{ji}(\ell_j(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) \right] - \varepsilon_{kr} Z_{kr} [V(\ell_k(\varepsilon\tau), \tau)] + F_{kr}(\tau). \quad (4.69)$$

Раскладывая решение системы (4.69) по степеням малого параметра с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$ , получим

$$C_{kr}(\tau) \approx F_{kr}(\tau) - \varepsilon_{kr} Z_{kr} [V(\ell_k(\varepsilon\tau), \tau)]. \quad (4.70)$$

Здесь, как и ранее, под точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$  понимается точность, имеющая место при пренебрежении членами, содержащими множители  $\varepsilon_0\varepsilon$ ,  $\varepsilon_0\varepsilon_{ji}$ ,  $\varepsilon\varepsilon_{ji}$ ,  $\varepsilon_{kr}\varepsilon_{ji}$ , а также членами вида  $\varepsilon \int B(\varepsilon\xi) F_{ji}(\xi) d\xi$ ;  $\varepsilon F'_{ji}(\varepsilon\tau)$ , которые на резонансные свойства системы влияют как члены порядка  $\varepsilon^2$ .

Функция  $V(\xi, \tau)$  в (4.64) находится как решение следующей задачи, записанной с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$ :

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[V(\xi, \tau)] + \varepsilon_0 L_1[V(\xi, \tau)] + H_{\tau\tau}(\xi, \tau) = \varphi(\xi, \tau) - \varepsilon_0 L_1 \left[ \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m F_{kr}(\tau) D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) \right]; \quad (4.71)$$

$$Y_{ji}[V(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = 0. \quad (4.72)$$

Для решения задачи (4.71), (4.72) используем метод Канторовича–Галеркина. Решение в этом случае будет иметь вид

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau), \quad (4.73)$$

где  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  – собственные функции задачи (4.10), (4.11), а  $f_n(\tau)$  с учетом равенств (4.13), (4.67) определяется из уравнения

$$\begin{aligned}
& \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} \{ [f_n(\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m C_{kr}(\tau)D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)]_{\tau\tau} + \\
& + f_n(\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \varepsilon_0 L_1[f_n(\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau)] + \\
& + \varepsilon_0 L_1[\sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m F_{kr}(\tau)D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)] - \varphi(\xi, \tau) \} X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi = 0. \quad (4.74)
\end{aligned}$$

Здесь  $\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)$  – собственные частоты задачи (4.10), (4.11),  $C_{kr}(\tau)$  определяется формулой (4.70), весовая функция  $g(\xi) = 1$ .

Преобразуем уравнение (4.74) так, чтобы оно не содержало второй производной функции  $C_{kr}(\tau)$ . Для этого введем новую функцию

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) + \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)C_{kr}(\tau), \quad (4.75)$$

где  $Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)$  определяется по формуле (4.15). Тогда с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$  уравнение (4.74) примет вид

$$\begin{aligned}
& \mu_n''(\tau) + 2\varepsilon \frac{A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} \mu_n'(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) + \\
& + \frac{\varepsilon_0}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} L_1[\mu_n(\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau)] X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi - \\
& - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m \varepsilon_{kr} Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) Z_{kr}[\mu_n(\tau)X_n(\ell_k(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau)] = \theta_n(\tau), \quad (4.76)
\end{aligned}$$

где

$$\theta_n(\tau) = \frac{E_n(\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) F_{kr}(\tau), \quad (4.77)$$

а остальные используемые в (4.76), (4.77) обозначения определены в пункте 4.1.

При выводе уравнения (4.76) учтено, что

$$\varepsilon_{kr} V(\ell_k(\varepsilon\tau), \tau) \approx \varepsilon_{kr} \mu_n(\tau) X_n(\ell_k(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau). \quad (4.78)$$

Здесь, как и при получении уравнения (4.12), не учтены нерезонансные члены и члены порядка малости  $\varepsilon^2$ .

Если операторы  $Z_{kr}$  и  $L_1$  достаточно просты, то из уравнения (4.77) мы сможем найти  $\mu_n(\tau)$ . При этом функция  $U(\xi, \varepsilon\tau)$  (см. (4.64)) будет иметь вид:

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau).$$

Заметим, что в случае, если операторы  $Z_{ji}$  содержат интегральные члены, то чтобы уравнение (4.76) не содержало их, вместо (4.75) целесообразно вводить новые функции в виде

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) + \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m Q_{nkr}(\varepsilon\tau) F_{kr}(\tau).$$

Такой пример рассмотрен в главе 5, где также показано, что полную амплитуду колебаний, соответствующих  $n$ -ной динамической моде  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ , для задачи (4.62), (4.63), как и в предыдущих случаях, можно представить в виде (4.61).

### 4.3. Оценка погрешности метода Канторовича–Галеркина

Для оценки погрешности метода Канторовича–Галеркина рассмотрим тестовую задачу:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (4.79)$$

$$U(0, \tau) = 0; \quad U(1 + \varepsilon\tau, \tau) = B \cos W(\tau). \quad (4.80)$$

Выражение для амплитуды колебаний задачи (4.79), (4.80) получено как точным по формуле (3.39), так и приближенным (4.61) методами. Сравним точную и приближенную нагрузки, при которых возникает стационарный резонанс:

$$W_{\text{точн.}}(\tau) = \frac{2\pi n \ln(1 + \varepsilon\tau)}{\ln\left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)}; \quad (4.81)$$

$$W_{\text{прибл.}}(\tau) = \frac{\pi n}{\varepsilon} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi^2 n^2} \right)} \ln(1 + \varepsilon\tau).$$

Вывод выражения (4.81) приведен в Приложении № 5 к настоящей диссертации.

В качестве погрешности возьмем относительную ошибку мгновенных резонансных частот

$$\Delta = \left| \frac{W'_{\text{точн.}}(\tau) - W'_{\text{прибл.}}(\tau)}{W'_{\text{точн.}}(\tau)} \right| \cdot 100\%. \quad (4.82)$$

Результаты (4.82) при различных значениях  $n$  с учетом в (4.58) членов порядка малости  $\varepsilon^2$  сведем в таблицу 4.1.

Таблица 4.1. Оценка погрешности (%) метода Канторовича–Галеркина в зависимости от относительной скорости движения границ  $\varepsilon$  и номера моды  $n$  (с учетом членов порядка малости  $\varepsilon^2$ )

$\varepsilon$	Номер моды, $n$						
	1	2	3	4	5	6	7
0,001	$1,41 \cdot 10^{-5}$	$1,60 \cdot 10^{-5}$	$1,64 \cdot 10^{-5}$	$1,65 \cdot 10^{-5}$	$1,66 \cdot 10^{-5}$	$1,66 \cdot 10^{-5}$	$1,66 \cdot 10^{-5}$
0,005	$3,53 \cdot 10^{-4}$	$4,01 \cdot 10^{-4}$	$4,10 \cdot 10^{-4}$	$4,13 \cdot 10^{-4}$	$4,14 \cdot 10^{-4}$	$4,15 \cdot 10^{-4}$	$4,15 \cdot 10^{-4}$
0,01	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
0,02	0,006	0,006	0,007	0,007	0,007	0,007	0,007
0,05	0,035	0,040	0,041	0,041	0,041	0,042	0,042
0,1	0,143	0,162	0,165	0,166	0,167	0,167	0,167
0,5	4,455	5,002	5,103	5,139	5,155	5,164	5,169
0,6	7,243	8,091	8,247	8,301	8,327	8,340	8,349
0,7	11,637	12,910	13,144	13,226	13,263	13,284	13,296

Учитывая члены порядка малости  $\varepsilon^2$  (таблица 4.1), при  $n=1$  можно рассматривать  $\varepsilon$  вплоть до 0,53, при этом величина  $\Delta$  не превосходит 5%.

С увеличением  $n$  точность несколько снижается. Так, при  $n \rightarrow \infty$  величина  $\varepsilon$  будет ограничена для указанного выше случая значением 0,49.

Результаты вычислений погрешности (4.82) без учета в (4.58) членов порядка малости  $\varepsilon^2$  сведем в таблицу 4.2. Следует отметить, что в данном случае погрешность не зависит от номера  $n$ .

Таблица 4.2. Оценка погрешности (%) метода Канторовича–Галеркина в зависимости от относительной скорости движения границ  $\varepsilon$  (без учета членов порядка малости  $\varepsilon^2$ )

$\varepsilon$	0,001	0,005	0,01	0,02	0,05	0,1	0,3	0,5
$\Delta, \%$	$3,33 \cdot 10^{-5}$	0,001	0,003	0,013	0,083	0,335	3,173	9,861

После пренебрежения в (4.58) членами  $\varepsilon^2$ , величина  $\Delta$  не превосходит 5% при  $\varepsilon < 0,37$  (таблица 4.2).

Таким образом, метод Канторовича–Галеркина применим в достаточно широких диапазонах скоростей движения границ.

Оценка погрешности вычислений максимальной амплитуды колебаний, полученной методом Канторовича – Галеркина, при прохождении через резонанс произведена в главе 5.

#### 4.4. Выводы по четвертой главе

1. Приближенный аналитический метод Канторовича – Галеркина распространен на более широкий класс модельных краевых задач о колебаниях объектов с движущимися границами при линейной постановке, описываемых уравнениями гиперболического типа. Данный метод позволяет учитывать действие на систему сил сопротивления среды, изгибную жесткость и жесткость подложки, вязкоупругие свойства колеблющегося объекта, а также слабые возмущения на границах.

2. Решение задачи доведено до получения квадратурных формул амплитуды колебаний, соответствующих  $n$ -ной динамической моде.

3. Произведена оценка погрешности метода Канторовича–Галеркина в зависимости от относительной скорости движения границ.

## Глава 5

### **Разработка программного комплекса и анализ расчета колебательных и резонансных явлений в механических системах с движущимися границами**

Настоящая глава посвящена разработке комплекса программ «ТВ–ANALYSIS», предназначенного для решения некоторого класса одномерных краевых задач с «движущимися границами», математического моделирования и анализа резонансных свойств объектов, состояние которых описывается этими краевыми задачами.

Задачи настоящей главы:

1. Разработать в среде Matlab программный комплекс, позволяющий производить исследование решений некоторого класса модельных краевых задач, общие постановки которых приведены в главе 2 и математическое моделирование резонансных свойств объектов с движущимися границами.

2. Провести тестирование программного комплекса для оценки его эффективности при реализации указанных задач.

3. Провести подробное алгоритмическое описание возможностей программного комплекса «ТВ–ANALYSIS».

4. Разработать методику математического моделирования для анализа резонансных явлений, имеющих место в объектах с движущимися границами.

5. С помощью программного комплекса на основе разработанных аналитического и приближенного аналитического методов, провести численное исследование колебаний и резонансных характеристик объектов переменной длины, встречающихся на практике: продольные колебания вязкоупругого каната; поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, обладающего изгибной жесткостью с

учетом действия сил сопротивления среды; поперечные колебания вязкоупругой балки на упругом основании с учетом действия сил сопротивления среды.

Комплекс программ позволяет:

1) получать и анализировать численные решения модельных уравнений для заданных параметров и возмущений системы;

2) проводить анализ резонансных свойств моделей в зависимости от типа объекта, скорости движения границ, моды колебаний, сил сопротивления внешней среды, вязкоупругости, изгибной жесткости объекта и жесткости подложки.

Алгоритмы и программы комплекса «ТВ–ANALIZ» разработаны на основе аналитических результатов глав 2–4.

Комплекс программ разработан в среде Matlab [94] в форме автономного прикладного программного обеспечения.

Структурная блок–схема «ТВ–ANALIZ» приведена на рисунке 5.1 и описывает алгоритмы и процессы, выполняемые с помощью комплекса программ, а также порядок взаимодействия отдельных модулей комплекса.

Каждому модулю программного комплекса – отдельной единице блок–схемы – описание будет дано в настоящей главе.

Следующий раздел посвящен общим принципам работы программы.



Рис. 5.1. Блок-схема комплекса программ «TB-ANALYSIS»

## 5.1. Описание работы с комплексом программ

Пользовательский интерфейс программного комплекса «ТВ–ANALYSIS» состоит из четырех окон, одно из которых стартовое. Оно появляется при запуске программы (рисунок 5.2), а остальные окна вызываются из стартового окна. Кроме того, они могут быть вызваны друг из друга посредством меню.

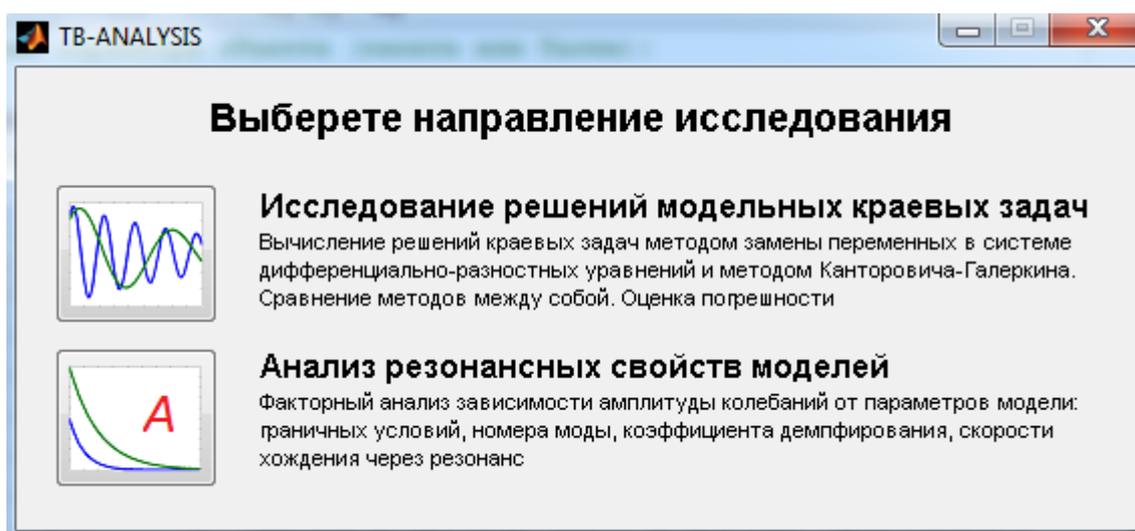


Рис. 5.2. Стартовое окно

Стартовое окно «ТВ–ANALYSIS» содержит две активные кнопки со схематичными иллюстрациями, запускающие следующие основные модули программного комплекса:

- 1) исследование решений модельных краевых задач;
- 2) анализ резонансных свойств моделей.

На стартовом окне рядом с кнопками, запускающими модули, присутствуют пояснения к содержанию и функциональности запускаемых модулей. Функции указанных кнопок дублируются ещё и в меню, описанном ниже.

Меню имеется во всех окнах, кроме стартового, и содержит пункты: «Файл» и «Выбор направления исследования».

Пункт меню «Файл» содержит команды «Импорт/Загрузить», «Экспорт/Сохранить», «Выход».

Команда «Экспорт/Сохранить» содержит подпункты «Значения» и «Графики», которые служат для сохранения массивов вычисленных значений в файлы формата \*.txt и \*.xls (\*.xlsx) для дальнейшего их использования в настоящей программе или в других программных комплексах и для сохранения построенных графиков в файлы формата \*.eps или \*.png, соответственно. Команда «Выход» останавливает работу программы «ТВ–ANALYSIS» и закрывает окно.

Пункт меню «Направления исследования» содержит подпункты: «Исследование решений модельных краевых задач», «Анализ резонансных свойств моделей».

Команда «Исследование решений модельных краевых задач» служит для построения решений краевых задач аналитическим методом замены переменных в системе функционально–разностных уравнений и приближенным аналитическим методом Канторовича–Галеркина, а также для сравнения методов между собой. В рамках обозначенной команды может быть произведена оценка погрешности каждого из методов.

Команда «Анализ резонансных свойств моделей» позволяет производить факторный анализ зависимости амплитуды колебаний от параметров модели: граничных условий, номера моды, скорости хождения через резонанс, сопротивления внешней среды, вязкоупругости, изгибной жесткости объекта и жесткости подложки.

## **5.2. Исследование решений модельных краевых задач с помощью программного комплекса**

После нажатия первой сверху кнопки стартового окна оно трансформируется в окно, изображенное на рисунке 5.3.

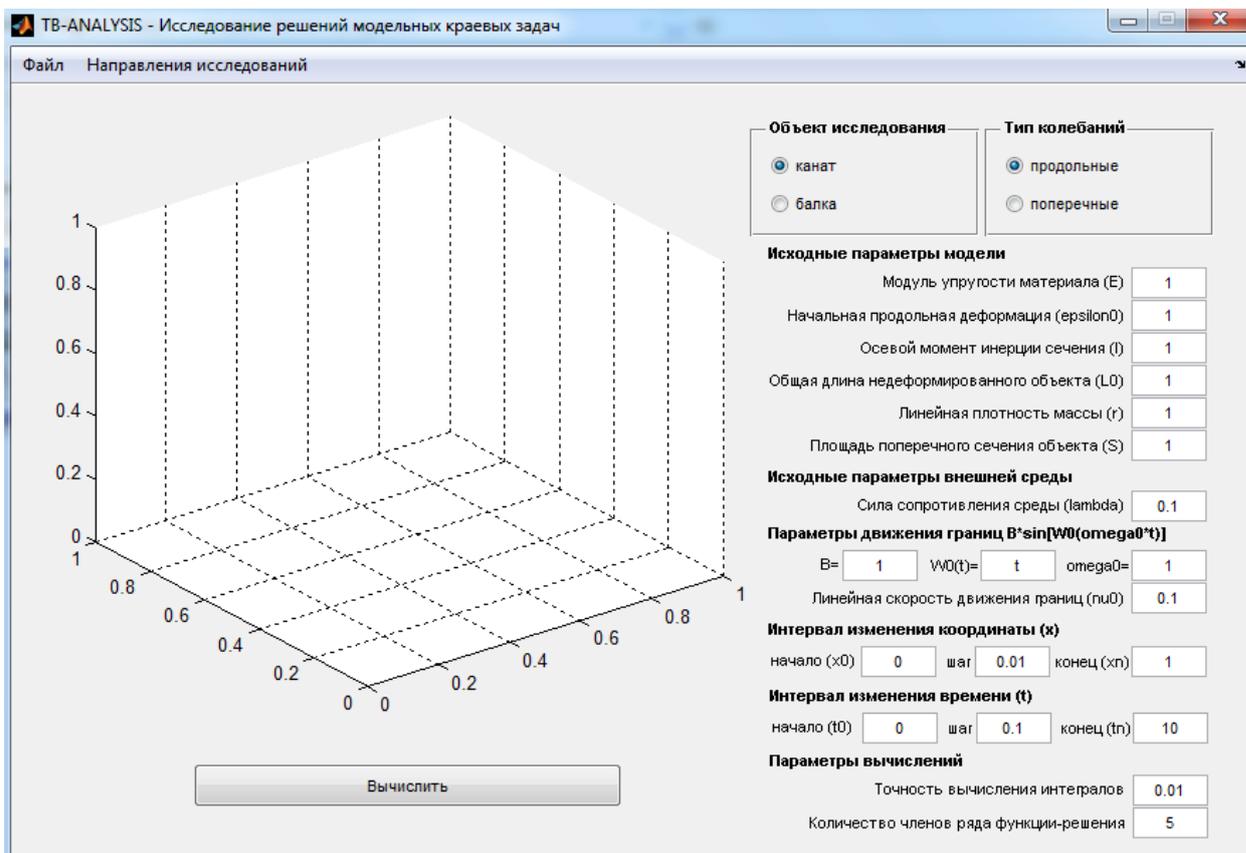


Рис. 5.3. Окно исследования решений модельных краевых задач

Данное окно содержит меню с пунктами: «Файл», «Направления исследования», использование которых облегчает работу программы.

Пункт меню «Файл» содержит опции–команды «Импорт/Загрузить», «Экспорт/Сохранить», «Выход».

Команда «Импорт/Загрузить» служит для пакетного ввода данных, т.е. загрузки исходных параметров из файлов формата \*.xls/\*.xlsx и \*.txt, что является удобной альтернативой ручного ввода с клавиатуры.

Команда «Экспорт/Сохранить» содержит подпункты «Данные» и «График», которые служат для сохранения массивов вычисленных значений в файлы форматов \*.xls/\*.xlsx, \*.txt для дальнейшего их использования и для сохранения выведенных на экран графиков в файлы форматов \*.eps, \*.png, соответственно.

Команда «Выход» останавливает работу программы «TB-ANALYSIS» и закрывает окно.

Пункт меню «Направления исследований» содержит подпункты: «Исследование решений модельных краевых задач», «Анализ резонансных свойств моделей». Обозначенные команды служат для запуска одноименных модулей программы.

Кроме того, форма содержит две панели с переключателями «Объект исследования» и «Тип колебаний», активную кнопку «Вычислить», группы окон для ручного ввода данных «Исходные параметры модели» (с окнами «Модуль упругости материала (E)», «Начальная продольная деформация ( $\epsilon_0$ )», «Осевой момент инерции (I)», «Общая длина недеформированного объекта (L0)», «Линейная плотность массы ( $\rho$ )», «Площадь поперечного сечения (S)»), «Исходные параметры внешней среды» (с окном «Сила сопротивления среды ( $\lambda$ )»), «Параметры движения границы  $B \cdot \sin[W_0(\omega_0 \cdot t)]$ » (с окнами «B=», «W0=», « $\omega_0$ =», «Линейная скорость движения ( $\nu_0$ )»), «Интервал изменения координаты (x)» (с окнами «начало (x0)», «шаг», «конец (xn)»), «Интервал изменения времени (t)» (с окнами «начало (t0)», «шаг», «конец (tn)») и «Параметры вычислений» (с окнами «Точность вычислений интегралов», «Количество членов ряда функции–решения»).

Панель с переключателями «Объект исследования» позволяет выбрать один из двух объектов: канат или балку.

С помощью панели «Тип колебаний» можно выбрать тип колебаний: продольные или поперечные. Данный выбор разрешен только для объекта «канат».

Активная кнопка «Вычислить» предназначена для осуществления вычислений и построения графиков полученных зависимостей.

Окна для ручного ввода предназначены для ввода параметров модели и окружающей среды. Содержания окон соответствуют их названиям, расположенным слева от каждого окна.

Вычисления осуществляются с применением двух методов вычисления решений краевых задач: аналитического метода, описанного в главе 3, и

приближенного аналитического метода Канторовича–Галеркина, описанного в главе 4.

Интеллектуальный выбор метода осуществляется в зависимости от анализируемой модели (класса дифференциального уравнения, начальных и граничных условий):

- для моделей, описываемых волновым уравнением «с движущимися граничными условиями», применяется численно–аналитический метод;

- для моделей, описываемых более сложными дифференциальными уравнениями «с движущимися граничными условиями», применяется метод Канторовича–Галеркина.

Вычисление аналитическим методом реализовано во внутренней функции «*TBNumAnal*» и основано на теоретических результатах главы 3.

При вычислении решений методом Канторовича–Галеркина используются результаты главы 4, которые реализованы в функции «*TBNum*».

### **5.3. Анализ резонансных свойств моделей с помощью программного комплекса**

После нажатия кнопки «Анализ резонансных свойств моделей» стартового окна, оно трансформируется в окно, изображенное на рисунке 5.4. Данная форма содержит те же пункты меню, что и окно модуля «Исследования решений модельных краевых задач».

Кроме того, форма содержит две панели с переключателями «Объект исследования» и «Анализ зависимости», группы окон для ручного ввода данных «Параметры модели» (с окнами «Номер моды», «Коэффициент демпфирования», «Коэффициент жесткости объекта», «Коэффициент вязкоупругости», «Коэффициент жесткости подложки»), «Интервал изменения скорости границ» (с окнами «Начало», «Шаг», «Конец») и

«Интервал изменения времени» (с окнами «Начало», «Шаг», «Конец»), окно для вывода графиков и кнопку «Вычислить».

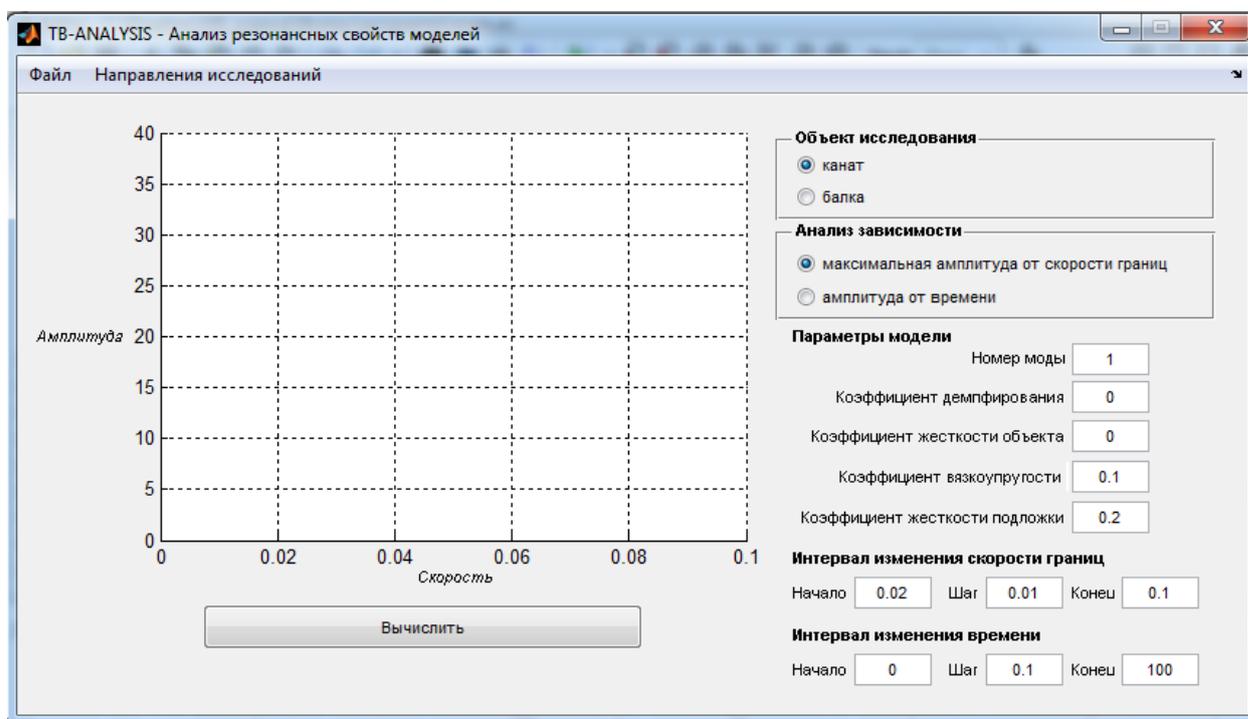


Рис.5.4. Окно анализа резонансных свойств моделей

Панель с переключателями «Объект исследования» позволяет выбрать один из двух объектов: канат или балку.

С помощью панели «Анализ зависимости» можно выбрать направление анализа:

- анализ зависимости «амплитуда от времени»;
- анализ зависимости «максимальная амплитуда от скорости границ».

Вычисление зависимости амплитуды колебаний от времени основано на применении метода Канторовича – Галеркина к решению дифференциальных уравнений в частных производных (глава 4) и реализовано во внутренней функции программы – «*met\_ampl*».

Анализ зависимости максимальной амплитуды от скорости реализован во внутренней функции – «*met\_ampl\_max*», которая вызывает как подфункцию – функцию «*met\_ampl*». Кроме линейной скорости движения границ данный блок программы позволяет варьировать номер моды (с

помощью окна «Номер моды»), коэффициент демпфирования (окно «Коэффициент демпфирования»), коэффициент жесткости объекта (окно «Коэффициент жесткости объекта»), коэффициент вязкоупругости (окно «Коэффициент вязкоупругости») и коэффициент жесткости подложки (окно «Коэффициент жесткости подложки»).

Активная кнопка «Вычислить» предназначена для осуществления вычислений и построения графиков полученных зависимостей.

Вычисление зависимости максимальной амплитуды от скорости проводится с применением разработанной в настоящей диссертации методики. В основе методики лежат: выражение для амплитуды колебаний, полученное с помощью метода Канторовича–Галеркина, и резонансные свойства изучаемых объектов.

В соответствии с (4.50) выражение для амплитуды колебаний системы на  $n$ -ной динамической моде имеет вид:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left\{ \left[ \int_0^\tau F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^\tau F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (5.1)$$

Исходя из данного выражения проанализируем резонансные явления, имеющие место в объектах с движущимися границами. В равенстве (5.1) функции  $E_n^2$  и  $F_n$  знакопостоянны. Заметим также, что если к фазе  $\Phi_n(\zeta)$  прибавить постоянную величину или умножить её на  $(-1)$ , то выражение (5.1) не изменит своей величины. С учётом изложенного отметим, что резонансные свойства системы определяются скоростью изменения функции  $\Phi_n(\zeta)$ . Чем медленнее изменяется эта функция, тем дольше подынтегральные выражения в (5.1) будут сохранять свой знак и, следовательно, тем большей величины достигнет амплитуда колебаний.

Явление установившегося резонанса будет наблюдаться, если скорость изменения функции  $\Phi_n(\zeta)$  равна нулю, т.е.

$$\Phi_n(\zeta) = \gamma, \quad (5.2)$$

где  $\gamma$  – постоянная величина. В этом случае возрастание амплитуды описывается следующим выражением:

$$A_n(\tau) = E_n(\tau) \int_0^\tau F_n(\zeta) d\zeta.$$

Из условия (5.2) можно найти, как должна изменяться частота внешней силы, чтобы возникло явление установившегося резонанса. Пусть возмущения, действующие на границах, имеют вид (4.28). Тогда при использовании аналитического метода замены переменных в системе функционально – разностных уравнений условие резонанса для различных задач примет следующий вид:

1) для задач (3.1), (3.16); (3.1), (3.40); (3.1), (3.62):

$$W_{1n}(\tau) = 2\pi n\varphi(\tau + l_1(\tau)) + \gamma,$$

$$W_{2n}(\tau) = 2\pi n\varphi(\tau + l_2(\tau)) + \gamma;$$

2) для задачи (3.1), (3.49):

$$W_{1n}(\tau) = \pi(2n-1)\varphi(\tau + l_1(\tau)) + \gamma,$$

$$W_{2n}(\tau) = \pi(2n-1)\varphi(\tau + l_2(\tau)) + \gamma.$$

При использовании метода Канторовича–Галеркина условие (5.2) с точностью до величины порядка малости  $\varepsilon^2$  имеет вид

$$W_{nji}(\tau) = w_n(\tau) - \gamma;$$

$$j = \overline{1, 2}, i = \overline{1, m},$$

где  $w_n(\tau), W_{nji}(\tau), m$  – определены в пункте 4.1.

Явление прохождения через резонанс наблюдается во временной области, содержащей точку  $\tau_0$ , где

$$\Phi'_n(\tau_0) = 0. \tag{5.3}$$

В этой точке мгновенная частота  $n$ -го собственного колебания проходит через значение возмущающей частоты. Прохождение через резонанс начинается не доходя до точки  $\tau_0$  и заканчивается за этой точкой.

Если принять амплитуду в начале резонансной области (точка  $\tau_1$ ) равной амплитуде внешнего воздействия, то амплитуда в конце резонансной области (точка  $\tau_2$ ) будет определяться следующим выражением:

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (5.4)$$

Схематичный график изменения амплитуды колебаний при прохождении через резонанс изображен на рисунке 5.5.

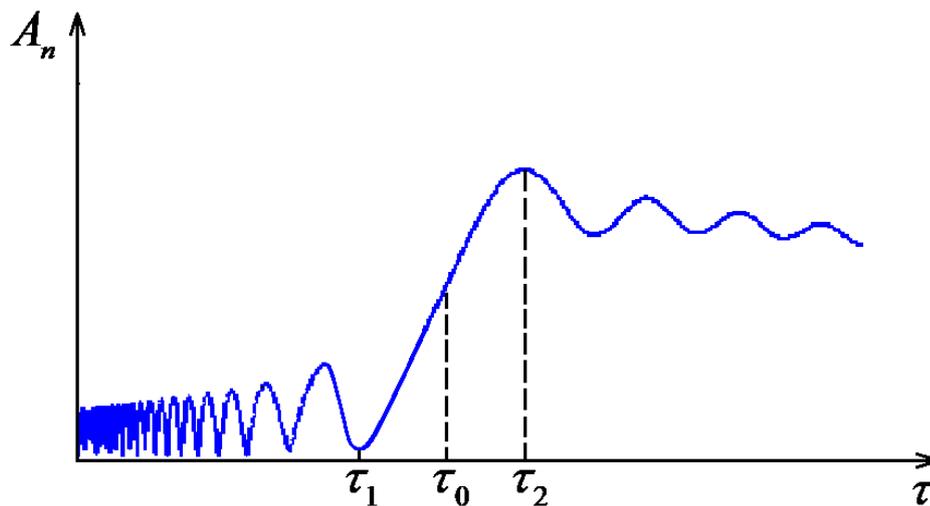


Рис.5.5. Схематичный график изменения амплитуды колебаний при прохождении через резонанс

Исследование прохождения через резонанс заключается в численном определении границ резонансной области  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , соответствующих максимуму выражения (5.4), причём  $\tau_1 < \tau_0$ , а  $\tau_2 > \tau_0$ .

Условие экстремума функции  $A_n^2(\tau_1, \tau_2)$  имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial A_n^2(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} = 0; \\ \frac{\partial A_n^2(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

После преобразований данная система примет вид

$$\begin{cases} Y_1(\tau_1, \tau_2) = 0; \\ Y_2(\tau_1, \tau_2) = 0, \end{cases}$$

где

$$Y_1(\tau_1, \tau_2) = \cos \Phi_n(\tau_1) \cdot I_c(\tau_1, \tau_2) + \sin \Phi_n(\tau_1) \cdot I_s(\tau_1, \tau_2);$$

$$Y_2(\tau_1, \tau_2) = E'_n(\tau_2) \cdot I_s(\tau_1, \tau_2) + E_n(\tau_2) F_n(\tau_2) \cos \Phi_n(\tau_1) \sin[\Phi_n(\tau_2) - \Phi_n(\tau_1)];$$

$$I_c(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta; \quad (5.6)$$

$$I_s(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta. \quad (5.7)$$

Заметим, что в выражении для амплитуды, полученном при помощи аналитического метода замены переменных в системе функционально-разностных уравнений (см.(3.39), (3.61), (3.63)), пределы интегрирования являются функциями времени. Однако в этом случае функция  $E_n(\tau)$  является постоянной величиной, что позволяет применять для анализа резонансных свойств разработанную здесь методику. Примеры анализа резонансных свойств таких систем рассмотрены в пункте 5.4.

Возможна также численная схема исследования выражения (5.4) на максимум в окрестности точки  $\tau_0$ , которая положена в основу алгоритма программного комплекса.

Пусть  $\tau_1 = \tau_0$ . Производим численное интегрирование фигурирующих в (5.4) интегралов по переменной  $\zeta$  от точки  $\tau_1$  в сторону увеличения  $\zeta$  (вправо) до тех пор, пока выражение (5.4) возрастает. Принимаем точку  $\tau_2$  равной текущему значению  $\zeta$  в момент, когда выражение (5.4) начинает

уменьшаться. Производя численное интегрирование от точки  $\tau_2$  в сторону уменьшения  $\zeta$  (влево) до тех пор, пока выражение (5.4) увеличивается, находим новое значение  $\tau_1$ . Указанный процесс продолжаем до тех пор, пока разность между максимальными амплитудами при интегрировании вправо и влево не станет достаточно малой величиной.

Приведенный выше алгоритм реализован в функции «*met\_ampl\_max*». На рисунке 5.6. приведен график зависимости максимальной амплитуды колебаний каната при прохождении через резонанс от скорости движения границы при различных значениях коэффициента сопротивления среды (сверху вниз:  $\lambda = 0$ ;  $\lambda = 0,01$ ;  $\lambda = 0,02$ ) со следующими параметрами модели: номер моды 1; коэффициент жесткости объекта 0,01; коэффициент вязкоупругости 0,01; коэффициент жесткости подложки 0,02.

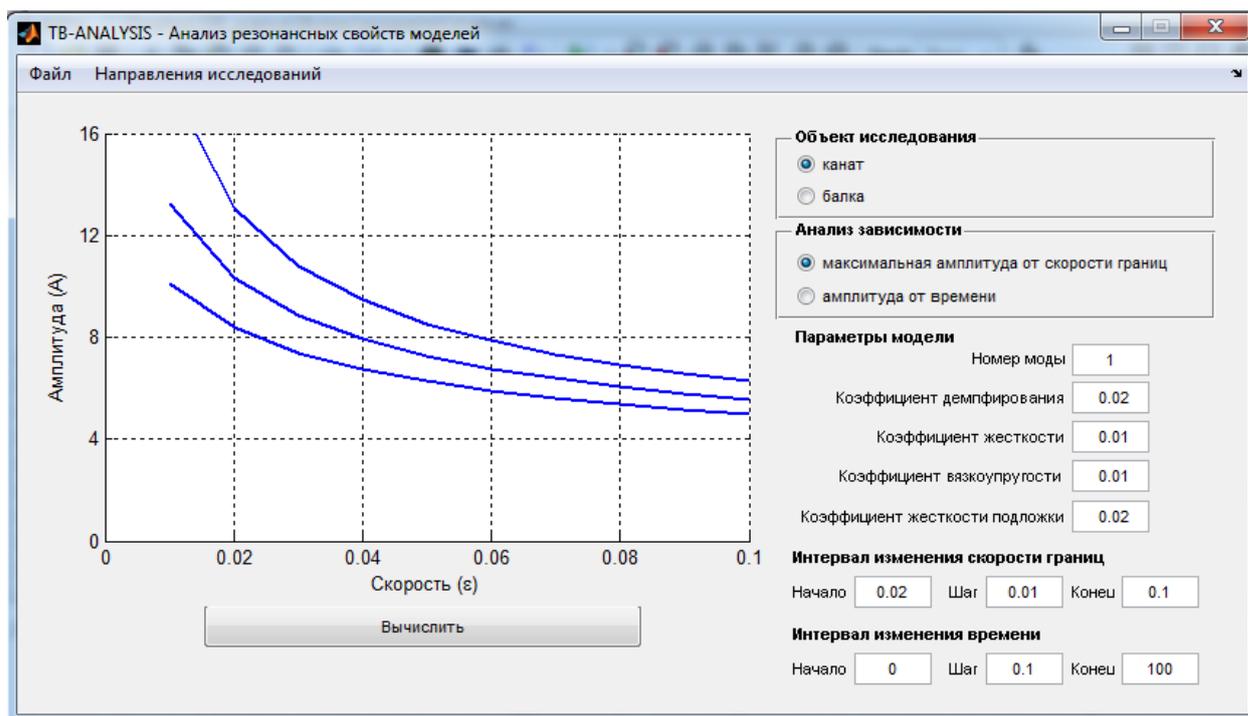


Рис.5.6. График зависимости максимальной амплитуды от скорости движения границ при различных значениях коэффициента сопротивления среды (сверху вниз:  $\lambda = 0$ ;  $\lambda = 0,01$ ;  $\lambda = 0,02$ )

Во внутренней функции «*met\_ampl*», являющейся подфункцией функции «*met\_ampl\_max*», реализовано вычисление выражения амплитуды колебаний (5.1) в зависимости от времени. Результаты «тестовых» вычислений амплитуды поперечных колебаний каната переменной длины при прохождении через резонанс на первой динамической моде при заданных исходных параметрах модели, проиллюстрированы на рисунке 5.7.

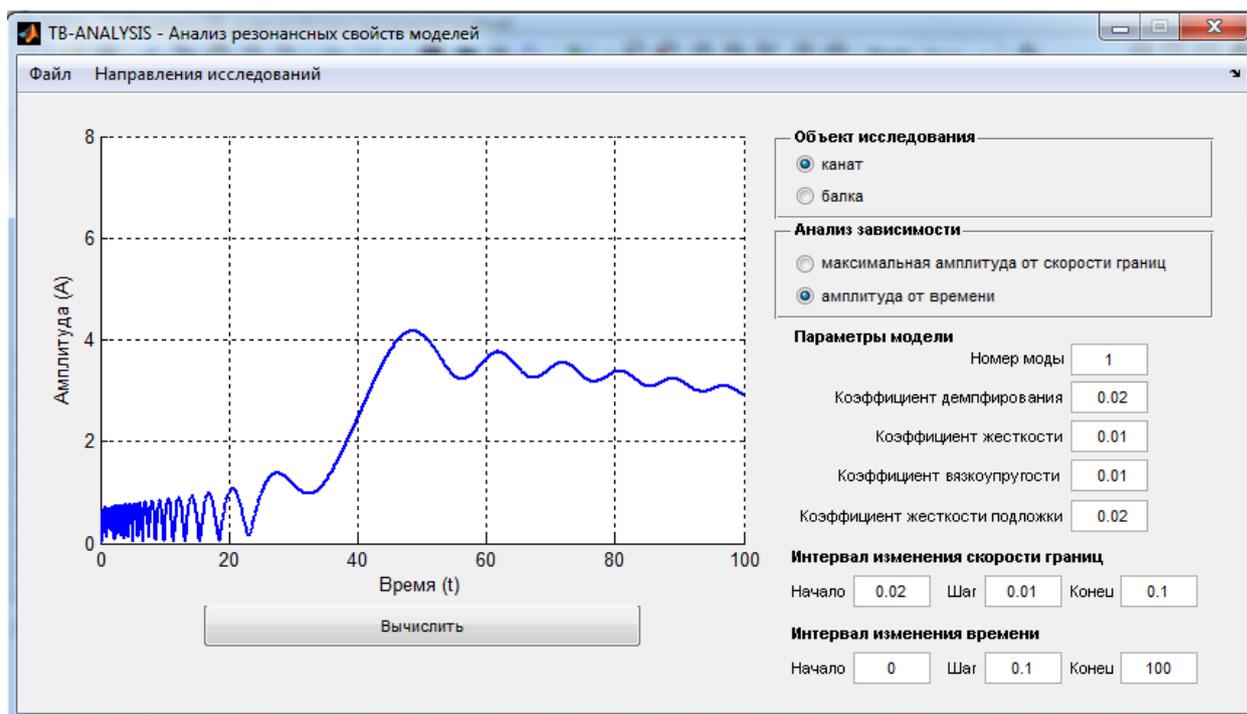


Рис.5.7. График зависимости амплитуды от времени

Кроме своей функциональной нагрузки, графики, представленные на рисунке 5.7, иллюстрируют еще и характеристики поведения амплитуды колебаний, положенные в основу методики вычисления максимальной амплитуды.

Выполним оценку погрешности вычисления квадрата амплитуды (5.4) при прохождении через резонанс.

Прежде чем провести оценку погрешности вычисления квадрата амплитуды докажем одну лемму.

**Лемма 5.1.** Прибавление и вычитание константы к функции  $z(\tau)$  не влияет на результат вычисления функции

$$g(\varepsilon, \tau_1, \tau_2) = \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \cos[z(\zeta)] d\zeta \right]^2 + \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \sin[z(\zeta)] d\zeta \right]^2.$$

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{z}(\tau) = z(\tau) + c$ , где  $c$  – константа. Обозначим первое и второе слагаемые  $g(\varepsilon, \tau_1, \tau_2)$  за  $I_1$  и  $I_2$  соответственно. Подставим в каждое из них выражение для  $\tilde{z}(\tau)$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \cos[\tilde{z}(\zeta)] d\zeta \right]^2 = \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \cos[z(\zeta) + c] d\zeta \right]^2 = \\ &= \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) [\cos[z(\zeta)] \cos c - \sin[z(\zeta)] \sin c] d\zeta \right]^2 = \\ &= \left[ \cos c \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \cos[z(\zeta)] d\zeta - \sin c \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \sin[z(\zeta)] d\zeta \right]^2 = \\ &= \cos^2 c \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \cos[z(\zeta)] d\zeta \right)^2 + \sin^2 c \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \sin[z(\zeta)] d\zeta \right)^2 - \\ &\quad - 2 \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \sin[z(\zeta)] d\zeta \right) \cdot \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \cos[z(\zeta)] d\zeta \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \sin[\tilde{z}(\zeta)] d\zeta \right]^2 = \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \sin[z(\zeta) + c] d\zeta \right]^2 = \\ &= \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) [\sin[z(\zeta)] \cos c + \cos[z(\zeta)] \sin c] d\zeta \right]^2 = \\ &= \left[ \cos c \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \sin[z(\zeta)] d\zeta + \sin c \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \cos[z(\zeta)] d\zeta \right]^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2 c \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \sin[z(\zeta)] d\zeta \right)^2 + \sin^2 c \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \cos[z(\zeta)] d\zeta \right)^2 + \\
&+ 2 \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \sin[z(\zeta)] d\zeta \right) \cdot \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \cos[z(\zeta)] d\zeta \right).
\end{aligned}$$

Складывая  $I_1$  и  $I_2$ , имеем

$$\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \cos^2 c \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \cos[z(\zeta)] d\zeta \right)^2 + \sin^2 c \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \sin[z(\zeta)] d\zeta \right)^2 + \\
&+ \cos^2 c \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \sin[z(\zeta)] d\zeta \right)^2 + \sin^2 c \left( \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \cos[z(\zeta)] d\zeta \right)^2 = \\
&= \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \cos[z(\zeta)] d\zeta \right]^2 + \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \sin[z(\zeta)] d\zeta \right]^2 = g(\varepsilon, \tau_1, \tau_2). \quad \square
\end{aligned}$$

Из леммы 5.1 следует, что погрешность численного вычисления функции  $\Phi_n(\zeta)$  не влияет на точность вычисления выражения (5.4), что значительно облегчает оценку погрешности.

Таким образом, точность вычисления выражения для амплитуды (5.4) зависит только от точности вычисления двух интегралов:

$$I_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta, \quad I_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta. \quad (5.8).$$

Зададим максимальную погрешность вычисления интегралов как  $R_{\text{int}} = \max\{R_{\text{int}}^1, R_{\text{int}}^2\}$ , где  $R_{\text{int}}^1, R_{\text{int}}^2$  – погрешности вычисления интегралов  $I_1, I_2$  соответственно. Тогда (5.4) можно представить следующим образом:

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \tilde{I}_1^2 + \tilde{I}_2^2 \right\}, \quad (5.9)$$

где  $\tilde{I}_1^2 = I_1 + R_{\text{int}}$  – приближенное значение  $I_1$ , а  $\tilde{I}_2^2 = I_2 + R_{\text{int}}$  – приближенное значение  $I_2$ . Подставим выражения для приближенных значений в (5.9):

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_n^2(\tau_1, \tau_2) &= E_n^2(\tau_2) \left\{ (I_1 + R_{\text{int}})^2 + (I_2 + R_{\text{int}})^2 \right\} = \\
&= E_n^2(\tau_2) (I_1^2 + I_2^2) + 2E_n^2(\tau_2) R_{\text{int}} [R_{\text{int}} + I_1 + I_2] = \\
&= A_n^2(\tau_1, \tau_2) + 2E_n^2(\tau_2) R_{\text{int}} [R_{\text{int}} + I_1 + I_2].
\end{aligned}$$

Отсюда погрешность вычислений квадрата амплитуды (5.4) вычисляется по формуле

$$R = 2E_n^2(\tau_2) R_{\text{int}} [R_{\text{int}} + I_1 + I_2]. \quad (5.10)$$

В программном комплексе на основе формулы (5.10) реализована процедура оценки погрешности на каждом шаге. Управление точностью вычислений осуществляется на основе изменения точности вычисления интегралов (5.8), что позволяет сделать встроенная MATLAB–функция `quad`, предназначенная для численного вычисления интегралов, одним из аргументов которой является погрешность вычислений.

Кроме того, при вычислении интегралов используется свойство аддитивности интегрального оператора, что значительно сокращает время вычислений:

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta = I_1, \\
&\int_{\tau_1}^{\tau_2 + \Delta\tau} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta = I_1 + \int_{\tau_2}^{\tau_2 + \Delta\tau} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta,
\end{aligned}$$

где  $\Delta\tau > 0$  – шаг по  $\tau$ .

## 5.4. Исследование колебаний механических объектов с движущимися границами

На основе программного комплекса выполнен анализ и получены количественные оценки максимальной амплитуды колебаний при

прохождении через резонанс четырех объектов, широко распространенных в технике.

В дальнейшем будут рассмотрены модели, в которых одна граница неподвижна, а другая движется по линейному закону.

### 5.4.1. Продольные колебания каната переменной длины

Исследуем возможность возникновения продольных колебаний большой амплитуды в канате грузоподъемной тележки [43, 45, 119]. Будем рассматривать случай, когда масса барабана велика и его колебания относительно тележки происходят независимо от продольных колебаний каната. Смещение точек каната будем отсчитывать от статического положения равновесия.

Введём следующие обозначения:  $x$  – координата точки каната, находящегося в статическом положении равновесия;  $t$  – время;  $l(t)$  – координата  $x$  точки, где канат входит в соприкосновение с барабаном;  $v_0$  – окружная линейная скорость вращения барабана;  $U(x,t)$  – продольное смещение точки с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $F(t)$  – скорость колебания точек барабана относительно тележки.

Так как на барабан наматывается деформированный канат, то  $l'(t)$  и  $v_0$  связаны соотношением [119]

$$l'(t) = -v_0 / [1 + U_x(l(t), t)].$$

Пренебрегая здесь малой величиной  $U_x$ , получим

$$l'(t) = -v_0; \quad l(t) = L_0 - v_0 t,$$

где  $L_0$  – начальная длина каната.

Примем  $F(t) = B \cos W_0(\omega_0 t)$ , где  $W_0(\omega_0 t)$  – функция класса  $C^2$ ;  $\omega_0$  – постоянная величина (если внешнее возмущение гармонического вида, то  $\omega_0$  является частотой этого возмущения).

Задача по описанию продольных колебаний каната поставлена в п 2.6. Необходимо найти решение волнового уравнения

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = 0 \quad (5.11)$$

при граничных условиях

$$U_t(0,t) = 0; \quad (5.12)$$

$$U_t(l_0(t),t) = B \cos W_0(\omega_0 t), \quad (5.13)$$

где  $a^2 = E / \rho$  ( $E$  – модуль упругости материала каната;  $\rho$  – плотность материала каната);  $l_0(t) = L_0 - v_0 t$ .

Вообще говоря, на левом конце каната граничное условие имеет вид

$$U(0,t) = 0. \quad (5.14)$$

Если его продифференцировать по времени, то получим условие (5.12). Запись граничного условия на левом конце в виде (5.12) позволяет применить для решения задачи методику пункта 3.3.

Граничное условие на правом конце соответствует случаю, когда между барабаном и канатом отсутствует проскальзывание [119].

Начальные условия на резонансные свойства влияния не оказывают, поэтому в данном случае они не рассматриваются. Заметим, что с помощью задачи (5.11) – (5.13) можно рассматривать продольные колебания каната грузоподъемной установки, когда равномерно поднимающийся груз обладает большой массой, и условие взаимодействия каната с грузом можно записать в виде (5.14).

Введем в поставленную задачу безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{\omega_0}{a} x; \quad \tau = \omega_0 t + \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; \quad U(x,t) = \frac{B}{\omega_0} V(\xi, \tau). \quad (5.15)$$

В результате задача примет вид

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (5.16)$$

$$V_\tau(0, \tau) = 0; \quad V_\tau(l(\tau), \tau) = \cos W(\tau), \quad (5.17)$$

где

$$l(\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \quad \varepsilon = -v_0 / a;$$

$$W(\tau) = W_0(\tau - \gamma_0); \quad \gamma_0 = (-\omega_0 L_0 + a) / v_0.$$

Задача типа (5.16), (5.17) рассмотрена в пункте 3.3. Там же для амплитуды напряжений, соответствующих колебаниям на  $n$ -ной динамической моде, было получено следующее выражение:

$$A_n^2(\tau) = 4 \left\{ \left[ \int_0^{b(\tau)} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^{b(\tau)} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (5.18)$$

где

$$b(\tau) = \psi(\tau - \xi_n(\tau)), \quad (5.19)$$

а функция  $\xi_n(\tau)$  определяется как ближайший к точке  $\xi = 0$  корень уравнения:

$$\cos \{ \pi n [\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)] \} = \pm 1.$$

В рассматриваемом случае функции  $\varphi, \psi, \Phi_n$  имеют вид:

$$\varphi(z) = \psi(z) = \frac{\ln[(\varepsilon z + 1) / (1 - \varepsilon)]}{\ln[(1 + \varepsilon) / (1 - \varepsilon)]} - 1; \quad (5.20)$$

$$\Phi_n(\zeta) = 2\pi n \zeta - W \left( \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^\zeta - \frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (5.21)$$

Используя методику, изложенную в пункте 5.3, рассмотрим явление установившегося резонанса и прохождение через резонанс. Явление установившегося резонанса будет наблюдаться, если скорость изменения функции  $\Phi_n(\zeta)$  равна нулю, т.е.

$$\Phi_n(\zeta) = \gamma, \quad (5.22)$$

где  $\gamma$  – постоянная величина. Подставляя (5.22) в (5.18), с учетом выражений (5.19), (5.20) получим выражение для амплитуды колебаний при установившемся резонансе:

$$A_n = \frac{2 \ln(1 + \varepsilon\tau)}{\ln[(1 + \varepsilon) / (1 - \varepsilon)]} - 2.$$

Из условия (5.22) с учетом выражений (5.21), (5.20) можно установить, каким образом должна изменяться частота возмущающего воздействия  $W(\tau)$ , чтобы возникло явление установившегося резонанса:

$$W(\tau) = \frac{2\pi n \ln(1 + \varepsilon\tau)}{\ln[(1 + \varepsilon)/(1 - \varepsilon)]} - \gamma.$$

Исследуем колебания каната под действием нагрузки постоянной частоты. В этом случае  $W(\tau) = \tau$ , что в исходной системе (см. замену 5.15) соответствует действию силы с частотой  $\omega_0$ .

Явление прохождения через резонанс здесь наблюдается в области, содержащей точку  $\zeta_0$ , которая определяется по следующей формуле:

$$\zeta_0 = \frac{\ln \left\{ \frac{2\pi n \varepsilon}{\ln[(1 + \varepsilon)/(1 - \varepsilon)]} \right\}}{\ln[(1 + \varepsilon)/(1 - \varepsilon)]}.$$

Если принять амплитуду в начале резонансной области (точка  $\zeta_1 = \psi(\tau_1 - \xi_n(\tau_1))$ ) равной амплитуде внешнего воздействия, то амплитуда в конце резонансной области (точка  $\zeta_2 = \psi(\tau_2 - \xi_n(\tau_2))$ ) определяется выражением

$$A_n^2(\zeta_1, \zeta_2) = 4 \left\{ \left[ \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (5.23)$$

При помощи разработанного программного комплекса «ТВ–ANALYSIS» исследуем выражение (5.23) на максимум, используя численную методику, изложенную в пункте 5.3. В результате получим таблицу 5.1, отображающую зависимость величины максимальной амплитуды колебаний напряжений  $A_n$  и временных границ резонансной области  $\zeta_1, \zeta_2$  от относительной скорости при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах.

Таблица 5.1. Зависимость величин  $A_n$ ,  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  от относительной скорости  $\varepsilon$  при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах

	$\varepsilon$	0,001	0,005	0,01	0,10
1 мода	$A_1$	59,8	26,8	19,0	5,6
	$\zeta_1$	552,1	105,6	50,9	3,6
	$\zeta_2$	591,9	123,4	63,3	7,6
2 мода	$A_2$	42,0	18,8	13,4	4,2
	$\zeta_1$	904,3	177,4	87,5	7,6
	$\zeta_2$	933,1	189,7	97,6	10,7

На рисунке 5.8 показан график зависимости максимальной амплитуды колебаний напряжений в канате, возникающих при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах (сверху вниз), от относительной скорости движения границы, построенный с помощью разработанного программного комплекса. Из анализа данных графиков следует, что чем меньше относительная скорость прохождения через резонанс, тем большей величины достигает амплитуда колебаний.

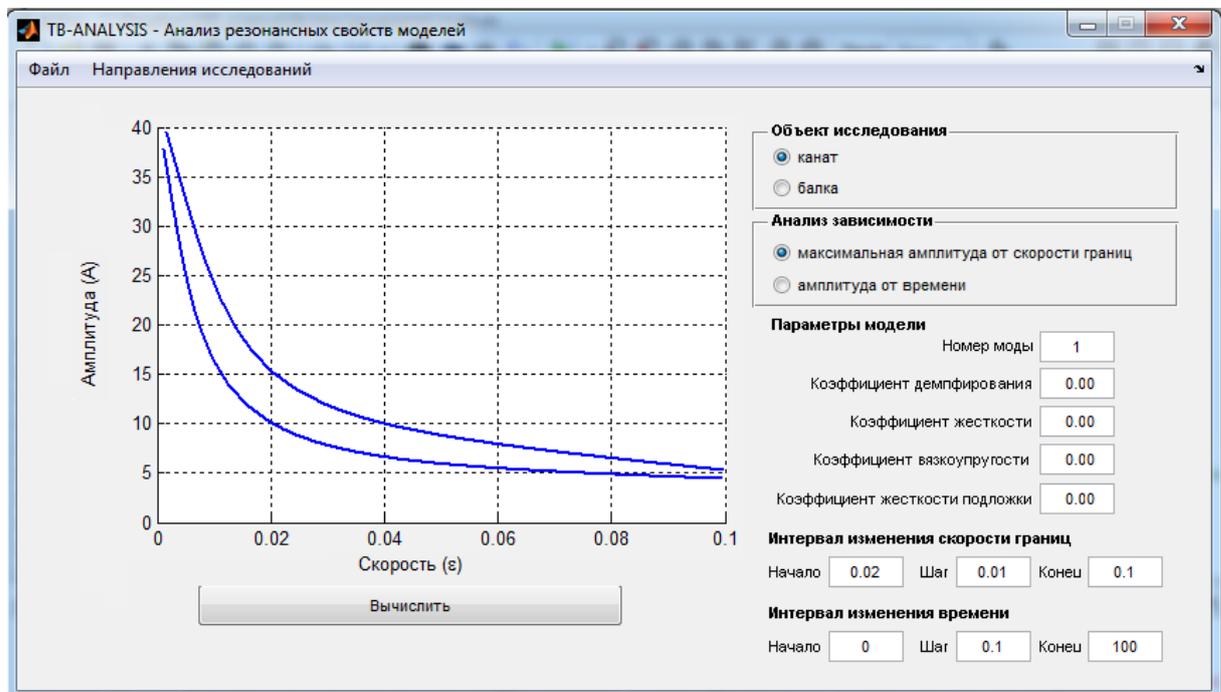


Рис. 5.8. График зависимости максимальной амплитуды колебаний напряжений от относительной скорости движения границы  $\varepsilon$  на первой и второй динамических модах (сверху вниз)

## 5.4.2. Продольные колебания вязкоупругого каната переменной длины

Рассмотрим продольные колебания вязкоупругого каната грузоподъемной установки, один конец которого наматывается на барабан, а на втором закреплен груз большой массы, движущийся со скоростью, равной окружной (линейной) скорости барабана.

Дифференциальное уравнение, описывающее продольные колебания вязкоупругого каната (вязкоупругость учитывается на основе модели Фойгта), получено в главе 2:

$$Z_{tt}(x,t) - a^2[Z_{xx}(x,t) + \mu Z_{xxt}(x,t)] = 0. \quad (5.24)$$

Граничные условия системы приведены в пункте 5.4.1. Проинтегрировав условия (5.12), (5.13) по времени, получим:

$$Z(0,t) = 0; \quad (5.25)$$

$$Z(l_0(v_0t),t) - v_0 \int_0^t Z_x(l_0(v_0\zeta),\zeta) l_0'(v_0\zeta) d\zeta = F_0(\omega_0t). \quad (5.26)$$

В задаче (5.24) – (5.26) обозначено:  $Z(x,t)$  – продольное смещение точки с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $a = \sqrt{E/\rho}$  – скорость распространения длинных волн в канате;  $E$  – длительный модуль упругости материала каната;  $\rho$  – линейная плотность массы;  $\omega_0$  – постоянная величина (в случае действия гармонического возмущения  $\omega_0$  является частотой этого возмущения);  $\mu$  – малый параметр, учитывающий вязкоупругость;  $l_0(v_0t) = L_0 - v_0t$  – закон движения границы;  $F_0(\omega_0t)$  – функция, характеризующая внешнее возмущение.

Введем в задачу (5.24) – (5.26) безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{\omega_0}{a} x; \quad \tau = \omega_0 t + \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; \quad Z(x,t) = U(\xi, \tau).$$

После преобразования получим:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \varepsilon_1 U_{\xi\xi\tau}(\xi, \tau) = 0; \quad (5.27)$$

$$U(0, \tau) = 0;$$

$$U(l(\varepsilon\tau), \tau) - \varepsilon \int_{\gamma_0}^{\tau} U_{\xi}(l(\varepsilon\zeta), \zeta) l'(\varepsilon\zeta) d\zeta = F(\tau),$$

где

$$\varepsilon_1 = \mu\omega_0; \quad \varepsilon = -v_0 / a; \quad l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau;$$

$$F(\tau) = F_0(\tau - \gamma_0); \quad \gamma_0 = (-\omega_0 L_0 + a) / v_0.$$

При решении задачи будем следовать пункту 4.1. Поэтому членами, содержащими коэффициенты вида  $\varepsilon^n \varepsilon_1^k$  при  $n+k \geq 2$ , и членами вида  $\varepsilon F'(\tau)$ , которые на резонансные свойства системы влияют как члены порядка  $\varepsilon^2$ , будем пренебрегать.

Чтобы применить метод Канторовича–Галеркина, необходимо преобразовать граничные условия. Для этого введём новую функцию:

$$U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau), \quad (5.28)$$

где  $V(\xi, \tau)$  удовлетворяет уравнению:

$$[V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau)]_{\tau\tau} - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \varepsilon_1 V_{\xi\xi\tau}(\xi, \tau) = 0 \quad (5.29)$$

и граничным условиям

$$V(0, \tau) = 0; \quad V(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0, \quad (5.30)$$

а  $H(\xi, \tau)$  находится как решение следующей задачи:

$$H_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (5.31)$$

$$H(0, \tau) = 0; \quad (5.32)$$

$$H(l(\varepsilon\tau), \tau) = F(\tau) + \varepsilon \int_{\gamma_0}^{\tau} H_{\xi}(l(\varepsilon\zeta), \zeta) l'(\varepsilon\zeta) d\zeta + \varepsilon \int_{\gamma_0}^{\tau} V_{\xi}(l(\varepsilon\zeta), \zeta) l'(\varepsilon\zeta) d\zeta. \quad (5.33)$$

Решая уравнение (5.31) при условии (5.32), нетрудно получить

$$H(\xi, \tau) = C(\tau)\xi / l(\varepsilon\tau). \quad (5.34)$$

Подставляя (5.34) в (5.33), получим следующее уравнение для определения  $C(\tau)$ :

$$C(\tau) = F(\tau) + \varepsilon \int_{\gamma_0}^{\tau} \frac{l'(\varepsilon\zeta)}{l(\varepsilon\zeta)} C(\zeta) d\zeta + \varepsilon \int_{\gamma_0}^{\tau} V_{\xi}(l(\varepsilon\zeta), \zeta) l'(\varepsilon\zeta) d\zeta.$$

Раскладывая решение данного интегрального уравнения по степеням малого параметра  $\varepsilon$  с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$ , получим:

$$C(\tau) = F(\tau) + \varepsilon \int_{\gamma_0}^{\tau} \frac{l'(\varepsilon\zeta)}{l(\varepsilon\zeta)} F(\zeta) d\zeta + \varepsilon \int_{\gamma_0}^{\tau} V_{\xi}(l(\varepsilon\zeta), \zeta) l'(\zeta) d\zeta. \quad (5.35)$$

После пренебрежения членами порядка  $\varepsilon^2$  уравнение (5.29) с учетом (5.34), (5.35) примет следующий вид:

$$\left[ V(\xi, \tau) + \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} F(\tau) \right]_{\tau\tau} + \varepsilon V_{\xi\tau}(l(\varepsilon\tau), \tau) \xi \frac{l'(\varepsilon\tau)}{l(\varepsilon\tau)} - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \varepsilon_1 V_{\xi\xi\tau}(\xi, \tau) = 0. \quad (5.36)$$

Для решения задачи (5.36), (5.30) воспользуемся методом Канторовича–Галеркина. Решение будем искать в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau). \quad (5.37)$$

Здесь  $X_n(\xi, \varepsilon\tau) = \sin[\pi n \xi / l(\varepsilon\tau)]$  – собственные функции задачи:

$$X_{n\xi\xi}(\xi, \nu) + \omega_{0n}^2(\nu) X_n(\xi, \nu) = 0; \quad (5.38)$$

$$X_n(0, \nu) = 0; \quad X_n(l(\nu), \nu) = 0, \quad (5.39)$$

где  $\nu$  – рассматривается как параметр.

Подставляя  $n$ -ый член ряда (5.37) в уравнение (5.36), с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$  получим:

$$\left[ f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} F(\tau) \right]_{\tau\tau} + \varepsilon \frac{\xi l'(\varepsilon\tau)}{l(\varepsilon\tau)} f_n'(\tau) X_{n\xi}(\xi, \varepsilon\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \varepsilon_1 \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) f_n'(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) = 0, \quad (5.40)$$

где  $\omega_{0n}(\varepsilon\tau) = \pi n / l(\varepsilon\tau)$  – собственные частоты задачи (5.38), (5.39).

Как и в пункте 4.1, функцию  $f_n(\tau)$  будем определять из условия ортогональности левой части уравнения (5.39) с функцией  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  на интервале  $[0, l(\varepsilon\tau)]$ . Тогда будем иметь:

$$\int_0^{l(\varepsilon\tau)} \left[ f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} F(\tau) \right] X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi + A_{n1}(\varepsilon\tau) \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) f_n(\tau) + \varepsilon_1 A_{n1}(\varepsilon\tau) \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) f_n'(\tau) = 0, \quad (5.41)$$

где

$$A_{n1}(\varepsilon\tau) = \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) d\xi = l(\varepsilon\tau) / 2.$$

При выводе уравнения (5.41) учтено, что

$$\int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_{n\xi}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi = 0.$$

Введем в уравнение (5.41) новую функцию

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) + Q_n(\varepsilon\tau) F_n(\tau), \quad (5.42)$$

где

$$Q_n(\varepsilon\tau) = - \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_n(\xi, \varepsilon\tau) \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} d\xi / A_{n1}(\varepsilon\tau) = \frac{2(-1)^n}{\pi n}.$$

Тогда уравнение (5.41) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$  будет иметь вид

$$\mu_n''(\tau) + 2A_n(\varepsilon\tau) \mu_n'(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau) \mu_n(\tau) = -\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) Q_n(\varepsilon\tau) F(\tau), \quad (5.43)$$

где

$$A_n(\varepsilon\tau) = \frac{\varepsilon l'(\varepsilon\tau)}{2 l(\varepsilon\tau)} + \frac{\varepsilon_1 \pi^2 n^2}{2 l^2(\varepsilon\tau)}.$$

Подставляя в решение (5.28) функции (5.37), (5.34), с учетом выражений (5.40), (5.35) и равенств

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) = -\frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)}, \quad X_{n\xi}(l(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = \frac{\pi n (-1)^n}{l(\varepsilon\tau)}$$

получим

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \varepsilon \frac{\pi n (-1)^n \xi}{l(\varepsilon\tau)} \int_{\gamma_0}^{\tau} \mu_n(\zeta) \frac{l'(\varepsilon\zeta)}{l(\varepsilon\zeta)} d\zeta \right]. \quad (5.44)$$

Произведем оценку величин членов выражения (5.44). При наблюдении резонансного явления преобладающая часть функции  $\mu_n(\tau)$  с точностью до величин порядка  $\varepsilon$  оценивается следующим выражением (амплитуда возрастает пропорционально времени):

$$\mu_n(\tau) \approx A_0 \tau \cos(\omega\tau + \gamma). \quad (5.45)$$

При этом второй член правой части равенства (5.44) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\pi n (-1)^n \xi}{l(\varepsilon\tau)} \int_{\gamma_0}^{\tau} \mu_n(\zeta) \frac{l'(\varepsilon\zeta)}{l(\varepsilon\zeta)} d\zeta &\approx \varepsilon B_0 \xi \int_{\gamma_0}^{\tau} \mu_n(\zeta) d\zeta \approx \\ &\approx \varepsilon \frac{A_0 B_0 \tau \xi}{\omega} \sin(\omega\tau + \gamma) - \varepsilon \frac{A_0 B_0 \xi}{\omega^2} \cos(\omega\tau + \gamma) + \varepsilon C_0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Здесь  $A_0, B_0, C_0$  – постоянные величины. Второй и третий члены в правой части выражения (5.46) невелики и не возрастают во времени, поэтому ими можно пренебречь.

Складывая первый член правой части равенства (5.46) с  $\mu_n(\tau)$ , задаваемым выражением (5.45), получим:

$$\begin{aligned} A_0 \tau \left[ \cos(\omega\tau + \gamma) + \varepsilon \frac{B_0 \xi}{\omega} \sin(\omega\tau + \gamma) \right] &= \\ = A_0 \tau \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 B_0^2 \xi^2}{\omega^2}} \cos\left(\omega\tau + \gamma + \arcsin \frac{\varepsilon B_0 \xi}{\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2 B_0^2}}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, второй член ряда (5.44) имеет тот же порядок малости что и величина порядка  $\varepsilon^2$ , поэтому вместо (5.44) можно записать:

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau).$$

Отсюда следует, что колебания системы можно рассматривать как суперпозицию колебаний, соответствующих отдельным динамическим модам.

Перейдем к определению функций  $\mu_n(\tau)$  из (5.43). Введем в (5.43) новую функцию

$$\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau)y_n(\tau),$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = \exp\left[-\int_0^\tau A_n(\zeta)d\zeta\right].$$

Тогда с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$  уравнение (5.43) будет иметь вид

$$y_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = -\frac{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_n(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)}F(\tau).$$

Примем  $F(\tau) = B \cos W(\tau)$ , где  $W(\tau)$  – функция класса  $C^2$ . С учетом того, что  $l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau$ , получим

$$y_n''(\tau) + \frac{\pi^2 n^2}{(1 + \varepsilon\tau)^2} y_n(\tau) = \frac{2\pi n B (-1)^{n+1}}{l^{\frac{3}{2}}(\varepsilon\tau)} e^{\frac{\varepsilon_1 \pi^2 n^2 \tau}{2(1 + \varepsilon\tau)}} \cos W(\tau).$$

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям из пункта 4.1, для амплитуды колебаний, соответствующих  $n$ -ой динамической моде, получим следующее выражение:

$$\frac{1}{B^2} A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left\{ \left[ \int_0^\tau F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^\tau F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$E_n^2(\tau) = \exp\left(-\varepsilon_1 \frac{\pi^2 n^2 \tau}{1 + \varepsilon\tau}\right);$$

$$\Phi_n(\tau) = \frac{\pi n}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon\tau) - W(\tau);$$

$$F_n(\tau) = \frac{1}{1 + \varepsilon\tau} \exp\left(\frac{\varepsilon_1}{2} \cdot \frac{\pi^2 n^2 \tau}{1 + \varepsilon\tau}\right).$$

Используя методику, изложенную в пункте 5.3, рассмотрим явление установившегося резонанса и прохождение через резонанс.

Явление установившегося резонанса в рассматриваемой системе наблюдается, если подынтегральные выражения знакопостоянны, т.е.

$$W(\tau) = \frac{\pi n}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon \tau).$$

Если  $W(\tau) = \tau$ , то в области, содержащей точку  $\tau_0 = (\pi n - 1) / \varepsilon$ , наблюдается явление прохождения через резонанс. Выражение

$$\frac{1}{B^2} A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (5.47)$$

определяющее максимальную амплитуду колебаний при прохождении через резонанс, с помощью разработанного программного комплекса было исследовано численно на максимум в окрестности точки  $\tau_0$ . Зависимость амплитуды колебаний каната от относительной скорости движения границы  $\varepsilon$  при различных значениях безразмерного параметра, характеризующего вязкоупругость  $\varepsilon_1$  (сверху вниз:  $\varepsilon_1 = 0$ ;  $\varepsilon_1 = 0,01$ ;  $\varepsilon_1 = 0,05$ ) приведена для первой динамической моды на рисунке 5.9.

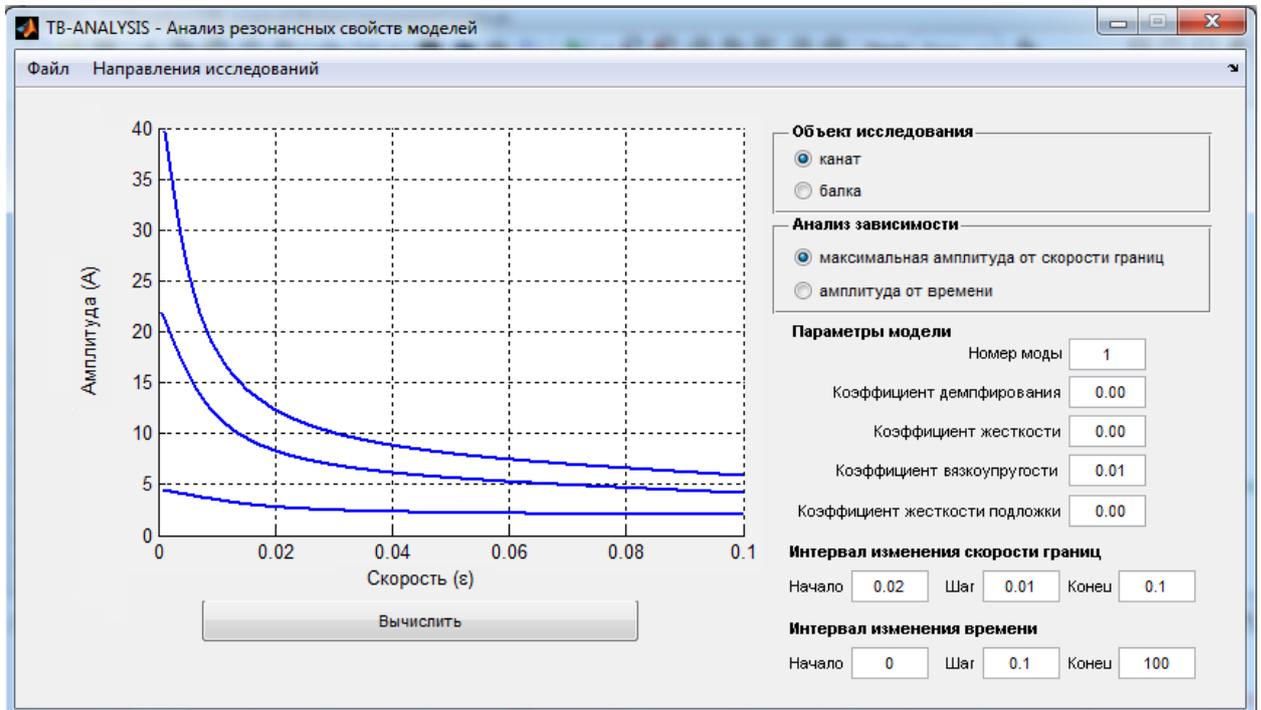


Рис.5.9. График зависимости максимальной амплитуды колебаний каната от относительной скорости движения границы  $\varepsilon$  при различных значениях безразмерного параметра, характеризующего вязкоупругость (сверху вниз:  $\varepsilon_1 = 0$ ;  $\varepsilon_1 = 0,01$ ;  $\varepsilon_1 = 0,05$ )

Анализ приведенных графиков позволяет сделать следующие выводы:

- при уменьшении  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_1$  амплитуда колебаний увеличивается;
- при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  амплитуда колебаний стремится к бесконечности;
- при  $\varepsilon_1 \neq 0$  амплитуда ограничена даже при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ .

Для оценки погрешности применения метода Канторовича – Галеркина рассмотрим частную задачу. Заметим, что если в (5.27) принять  $\varepsilon_1 = 0$ , то мы получим задачу, рассмотренную в пункте 5.4.1. Выражение для амплитуды колебаний при прохождении через резонанс для данной задачи получено как точным (5.23), так и приближенным (5.47) методами. Произведем анализ зависимости максимальной амплитуды колебаний (5.23) и (5.47) при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах и границ резонансной области от относительной скорости границ для задачи (5.16), (5.17). Результаты численных исследований выражений (5.23), (5.47) на максимум, полученных с помощью разработанного программного комплекса, занесем в таблицу 5.2.

Заметим, что точки  $\tau_0, \tau_1, \tau_2$ , соответствующие точкам  $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$  (пункт 5.4.1.), определяются по формуле

$$\tau_i = \frac{1}{\varepsilon} \exp\left\{\zeta_i \ln\left[\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]\right\} - \frac{1}{\varepsilon}; \quad i = 0, 1, 2.$$

Таблица 5.2. Зависимость величин  $A_n$ ,  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  от относительной скорости  $\varepsilon$  при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах

	$\varepsilon$	0,01	0,10	0,20	0,30	0,40
1 мода	$A_{1\text{точн.}}$	19,02	6,03	4,23	3,44	2,94
	$A_{1\text{прибл.}}$	19,03	6,12	4,35	3,57	3,07
	$\tau_{1\text{точн.}}$	176,9	10,8	3,4	1,4	0,4
	$\tau_{1\text{прибл.}}$	177,7	10,7	3,4	1,3	0,3
	$\tau_{2\text{точн.}}$	254,2	35,0	20,7	15,3	12,6
	$\tau_{2\text{прибл.}}$	253,7	34,8	20,3	15,0	12,0
2 мода	$A_{2\text{точн.}}$	13,43	4,24	3,03	2,44	2,14
	$A_{2\text{прибл.}}$	13,44	4,35	3,13	2,54	2,24
	$\tau_{1\text{точн.}}$	475,4	37,0	15,5	8,7	5,4
	$\tau_{1\text{прибл.}}$	476,1	37,0	15,3	8,4	5,1
	$\tau_{2\text{точн.}}$	583,2	71,3	39,7	28,4	22,3
	$\tau_{2\text{прибл.}}$	583,6	71,0	39,2	27,7	21,5

Сравнение результатов вычислений максимальной амплитуды колебаний и границ резонансной области ( $\tau_1, \tau_2$ ) при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах в зависимости от относительной скорости движения границы  $\varepsilon$  (таблица 5.2) подтверждает вывод о том, что максимальная погрешность метода Канторовича–Галеркина не превышает 5 % для величины  $\varepsilon < 0,37$ .

### 5.4.3. Поперечные колебания вязкоупругого каната переменной длины, лежащего на упругом основании, обладающего изгибной жесткостью, с учетом действия сил сопротивления среды

Задача по описанию поперечных колебаний вязкоупругого каната переменной длины, лежащего на упругом основании, обладающего изгибной жесткостью, с учетом действия сил сопротивления среды является частным случаем задачи (2.55) – (2.59).

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания каната, будет иметь вид:

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) + \frac{\lambda}{\rho} U_t(x,t) + \frac{EI}{\rho} U_{xxxx}(x,t) + \frac{\mu I}{\rho} U_{xxxxt}(x,t) + \frac{k_0}{\rho} U(x,t) = 0. \quad (5.48)$$

Граничные условия можно записать следующим образом:

$$U(0,t) = 0; \quad U_{xx}(0,t) = 0; \quad (5.49)$$

$$U(l_0(t),t) = B \cos W_0(\omega_0 t); \quad U_x(l_0(t),t) = 0. \quad (5.50)$$

Начальные условия на резонансные свойства влияния не оказывают, поэтому в данном случае они не рассматриваются.

В задаче (5.48) – (5.50) используются следующие обозначения:

$U(x,t)$  – поперечное смещение точки каната с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $E$  – модуль упругости материала каната;  $I$  – осевой момент инерции сечения каната;  $\mu$  – параметр, характеризующий вязкоупругость объекта;  $\lambda$  – сила сопротивления среды, действующая на единицу длины каната при единичной скорости поперечного движения;  $k_0$  – жесткость подложки;  $a = \sqrt{T/\rho}$  – минимальная скорость распространения волн,  $T$  – сила натяжения,  $\rho$  – линейная плотность массы каната;  $l_0(t) = L_0 - v_0 t$  – закон движения границы каната;  $L_0$  – начальная длина каната;  $W_0(z)$  – функция класса  $C^2$ ;  $B, \omega_0$  – постоянные величины.

Введем в задачу (5.48) – (5.50) безразмерные переменные:

$$\xi = \omega_0 x / a; \quad \tau = \omega_0 t + \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; \quad U(x, t) = Bu(\xi, \tau),$$

и новую функцию  $u(\xi, \tau) = e^{-\alpha\tau} V(\xi, \tau)$ , где  $\alpha = \lambda / (2\omega_0 \rho)$ .

Тогда задача (5.48) – (5.50) примет вид:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \sigma^2 V(\xi, \tau) + (\beta^2 - \alpha\gamma^2) V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + \gamma^2 V_{\xi\xi\xi\xi\tau}(\xi, \tau) = 0; \quad (5.51)$$

$$V(0, \tau) = 0; \quad V_{\xi\xi}(0, \tau) = 0; \quad (5.52)$$

$$V(l(\varepsilon\tau), \tau) = e^{\alpha\tau} \cos W(\tau); \quad V_{\xi}(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0, \quad (5.53)$$

где

$$\beta^2 = \frac{EI}{\rho} \frac{\omega_0^2}{a^4}; \quad \gamma^2 = \frac{\mu I}{\rho} \frac{\omega_0^3}{a^4}; \quad l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \quad \sigma^2 = \alpha^2 - \eta;$$

$$\eta = \frac{k_0}{\rho\omega_0^2}; \quad W(\tau) = W_0(\tau - \gamma_0); \quad \gamma_0 = \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; \quad \varepsilon = -v_0 / a.$$

Решение задачи (5.51) – (5.53) будем вести в безразмерных переменных в соответствии с методикой, изложенной в пункте 4.1.

Введем обозначения  $\delta^2 = (\beta^2 - \alpha\gamma^2)$  и  $\Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) - \sigma^2$ , где  $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$  – собственные частоты задачи (5.51) – (5.53).

Из решения задачи:

$$\delta^2 X_{n\xi\xi\xi\xi}(\xi, \varepsilon\tau) - X_{n\xi\xi}(\xi, \varepsilon\tau) - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) = 0;$$

$$X_n(0, \varepsilon\tau) = 0; \quad X_{n\xi\xi}(0, \varepsilon\tau) = 0;$$

$$X_n(l(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 0; \quad X_{n\xi}(l(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 0$$

найдем выражение для динамических мод  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  и функций  $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ :

$$X_n(\xi, \varepsilon\tau) = A_n \{ \sin[k_1(\varepsilon\tau)\xi] + c_n(\varepsilon\tau) \operatorname{sh}[k_2(\varepsilon\tau)\xi] \};$$

$$\omega_{0n}(\varepsilon\tau) = [\omega_{1n}(\varepsilon\tau) + d_n(\varepsilon\tau)] \sqrt{1 + \delta^2 [\omega_{1n}(\varepsilon\tau) + d_n(\varepsilon\tau)]^2},$$

где

$$A_n = 1 / \max \{ \sin[k_1(\varepsilon\tau)\xi] + c_n(\varepsilon\tau)sh[k_2(\varepsilon\tau)\xi] \};$$

$$k_1(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}}; \quad k_2(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}};$$

$$c_n(\varepsilon\tau) = -\frac{\sin[k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{sh[k_2(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}; \quad \omega_{1n}(\varepsilon\tau) = \frac{\pi n}{l(\varepsilon\tau)};$$

$$d_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{l(\varepsilon\tau)} \operatorname{arctg} \frac{\delta\omega_{1n}(\varepsilon\tau)}{\sqrt{1 + \delta^2\omega_{1n}^2(\varepsilon\tau)}}.$$

Решение задачи будем искать в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau),$$

где  $\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau)y_n(\tau)$ , а функция  $y_n(\tau)$  удовлетворяет следующему уравнению, записанному с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$ :

$$y_n''(\tau) + \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = -\frac{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_{n21}(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau} \cos W(\tau). \quad (5.54)$$

Производя вычисления, для функций  $Q_{n21}(\varepsilon\tau)$ ,  $A_{0n}$  получим:

$$Q_{n21}(\varepsilon\tau) = \frac{-k_1(\varepsilon\tau)\sqrt{1 + 4\delta^2\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)} \cos[k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)];$$

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = 1 / \sqrt{A_{1n}(\varepsilon\tau)};$$

$$A_{1n}(\varepsilon\tau) = \frac{1}{2} l(\varepsilon\tau) [1 - c_n^2(\varepsilon\tau)] - \frac{\sin[2k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{4k_2(\varepsilon\tau)\omega_{0n}(\varepsilon\tau)\delta}.$$

Два линейно независимых решения однородного уравнения, соответствующего (5.54), имеют вид:

$$y_{1n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau); \quad y_{2n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \sin w_n(\tau),$$

где

$$a_n(\varepsilon\tau) = 1 / \sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad w_n(\tau) = \int_0^{\tau} \Omega_{0n}(\varepsilon\zeta) d\zeta.$$

Амплитуда колебаний, соответствующая  $n$ -ой динамической моде, имеет следующий вид:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[ \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$E_n^2(\varepsilon\tau) = \frac{e^{-2\alpha\tau}}{4A_{1n}(\varepsilon\tau)\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta);$$

$$F_n(\varepsilon\zeta) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\zeta) Q_{n21}(\varepsilon\zeta) e^{\alpha\zeta} \sqrt{A_{1n}(\varepsilon\zeta) / \Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)}.$$

Используя методику, изложенную в пункте 5.3, рассмотрим явление установившегося резонанса и прохождение через резонанс.

Установившийся резонанс в рассматриваемой системе наблюдается, если

$$W_n(\tau) = w_n(\tau) + \gamma_1,$$

где  $\gamma_1$  – постоянная величина. Амплитуда при этом имеет вид

$$A_n(\tau) = E_n(\varepsilon\tau) \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) d\zeta.$$

При действии на систему гармонического возмущения с частотой  $\omega_0$ , когда  $W(\tau) = \tau$ , на любой из динамических мод может возникнуть явление прохождения через резонанс.

Точка резонансной области  $\tau_0$ , в которой  $\Phi'_n(\tau_0) = 0$ , приближенно определяется по следующей формуле:

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \sqrt{\frac{2\delta^2}{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2(1 + \sigma^2)}}} \cdot \pi n - 1 \right].$$

Выражение для максимально возможной амплитуды при прохождении через резонанс имеет вид (пункт 5.3):

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\varepsilon\tau_2) \left\{ \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}.$$

Для сравнения на рисунке 5.10. показаны построенные с помощью разработанного программного комплекса графики зависимости максимальной амплитуды поперечных колебаний каната от относительной скорости движения границы при прохождении через резонанс на первой динамической моде при различных значениях безразмерного коэффициента  $\alpha$ , характеризующего сопротивление среды (сверху вниз:  $\alpha = 0$ ;  $\alpha = 0,01$ ;  $\alpha = 0,05$ ;  $\alpha = 0,1$ ) со следующими параметрами модели (безразмерный коэффициент жесткости объекта  $\beta = 0,1$ ):

- безразмерные коэффициенты  $\gamma$  и  $\eta$ , характеризующие вязкоупругость и жесткость подложки, имеют нулевые значения (рисунок 5.10,а);
- безразмерный коэффициент, характеризующий вязкоупругость  $\gamma = 0,02$ , безразмерный коэффициент, характеризующий жесткость подложки  $\eta = 0,03$  (рисунок 5.10, б).

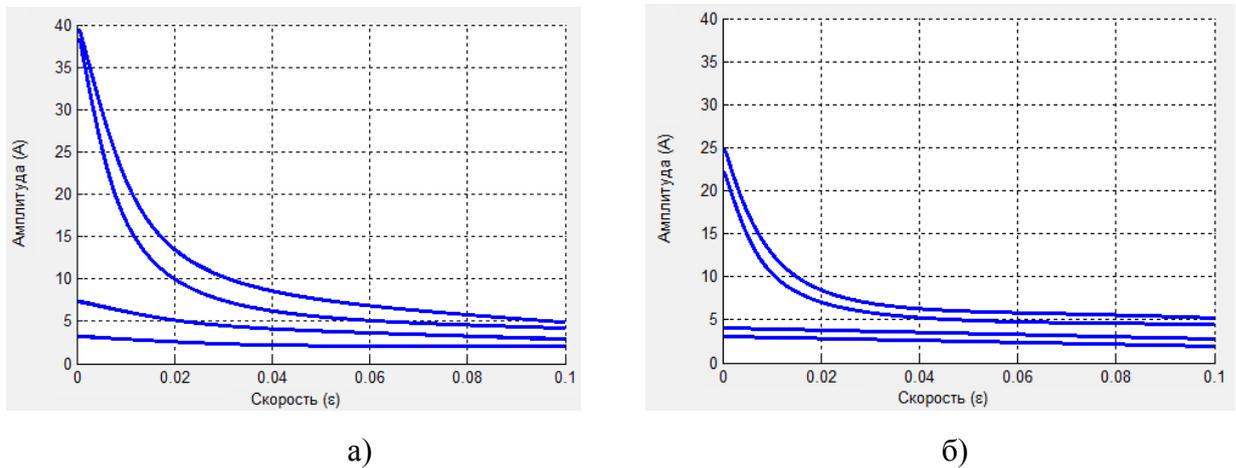


Рис.5.10. Графики зависимости максимальной амплитуды колебаний каната от относительной скорости движения границы  $\varepsilon$  при различных значениях безразмерных коэффициентов, характеризующих сопротивление среды, вязкоупругость и жесткость подложки

Анализ графиков, изображенных на рисунке 5.10, показывает, что амплитуда колебаний при нулевых значениях безразмерных коэффициентов,

характеризующих сопротивление среды, вязкоупругость и жесткость подложки является оценкой сверху для амплитуд колебаний, в случае, когда соответствующие коэффициенты не равны нулю.

#### 5.4.4. Поперечные колебания вязкоупругой балки переменной длины на упругом основании с учетом действия сил сопротивления среды

Задача по описанию поперечных колебаний балки переменной длины на подпружиненной подложке с учетом вязкоупругости и сил сопротивления среды является частным случаем задачи (2.55) – (2.59).

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания такой балки, имеет вид:

$$\frac{EI}{\rho} U_{xxxx}(x,t) + \frac{\mu I}{\rho} U_{xxxxt}(x,t) + U_{tt}(x,t) + \frac{\lambda}{\rho} U_t(x,t) + \frac{k_0}{\rho} U(x,t) = 0. \quad (5.55)$$

Граничные условия:

$$U(0,t) = 0; U_x(0,t) = 0; \quad (5.56)$$

$$U(l_0(t),t) = B \cos W_0(\omega_0 t); U_x(l_0(t),t) = 0. \quad (5.57)$$

Начальные условия не оказывают влияния на резонансные свойства линейных систем, поэтому в данной задаче они не рассматриваются.

В (5.55) – (5.57) используются следующие обозначения:

$U(x,t)$  – поперечное смещение точки балки с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $E$  – модуль упругости материала балки;  $I$  – осевой момент инерции сечения балки;  $\mu$  – параметр модели, учитывающий вязкоупругость объекта;  $\lambda$  – сила сопротивления среды, действующая на единицу длины балки при единичной скорости поперечного движения;  $\rho$  – линейная плотность массы балки;  $k_0$  – жесткость подложки;  $l_0(t) = L_0 - v_0 t$  – закон движения правой границы;  $L_0$  – начальная длина балки;  $v_0$  – скорость движения границы;  $W_0(z)$  – функция класса  $C^2$ ;  $B, \omega_0$  – постоянные

величины (в случае действия гармонического возмущения  $\omega_0$  является частотой этого возмущения).

Если ввести в задачу (5.55) – (5.57) безразмерные переменные:

$$\xi = \sqrt{\frac{\omega_0}{\gamma}} x; \quad \gamma^2 = \frac{EI}{\rho}; \quad \tau = \omega_0 t + \varphi_0; \quad \varphi_0 = \frac{\sqrt{\omega_0 \gamma}}{v_0} - \frac{\omega_0 L_0}{v_0}; \quad U(x, t) = Bu(\xi, \tau)$$

и новую функцию  $u(\xi, \tau) = e^{-\alpha \tau} V(\xi, \tau)$ , где  $\alpha = \lambda / (2\omega_0 \rho)$ , то исходная задача примет вид:

$$(1 - \varepsilon_1 \alpha) V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + \varepsilon_1 V_{\xi\xi\xi\xi\tau}(\xi, \tau) + V_{\tau\tau}(\xi, \tau) - \beta^2 V(\xi, \tau) = 0; \quad (5.58)$$

$$V(0, \tau) = 0; \quad V_\xi(0, \tau) = 0; \quad (5.59)$$

$$V(l(\varepsilon\tau), \tau) = \cos W(\tau); \quad V_\xi(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0, \quad (5.60)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu}{E} \omega_0; \quad \beta^2 = \alpha^2 - \eta; \quad \eta = \frac{k_0}{\rho \omega_0^2};$$

$$l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \quad \varepsilon = -\frac{v_0}{\sqrt{\gamma \omega_0}}; \quad W(\tau) = W_0(\tau - \varphi_0).$$

Для решения задачи (5.56) – (5.60) воспользуемся методом Канторовича–Галеркина. Решение будем искать в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau), \quad (5.61)$$

где  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  – собственные функции следующей краевой задачи:

$$X_{n\xi\xi\xi\xi}(\xi, \varepsilon\tau) - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) = 0; \quad (5.62)$$

$$X_n(0, \varepsilon\tau) = 0; \quad X_{n\xi}(0, \varepsilon\tau) = 0;$$

$$X_n(l(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 0; \quad X_{n\xi}(l(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 0.$$

Решая задачу (5.62), найдем выражения для динамических мод

$$X_n(\xi, \varepsilon\tau) = 0,62 \left[ C_n(\varepsilon\tau) (\sin(r_n(\varepsilon\tau)\xi) - sh(r_n(\varepsilon\tau)\xi)) + \cos(r_n(\varepsilon\tau)\xi) - ch(r_n(\varepsilon\tau)\xi) \right],$$

где

$$C_n(\varepsilon\tau) = \frac{ch[r_n(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)] - \cos[r_n(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{sh[r_n(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)] - \sin[r_n(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}; \quad r_n(\varepsilon\tau) = \sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)};$$

$$\omega_{0n}(\varepsilon\tau) = \frac{k_n^2}{l^2(\varepsilon\tau)}; \quad k_n \approx \pi n + \pi/2.$$

Заметим, что динамические моды  $X_n$  определяются с точностью до постоянного множителя. Здесь они выбраны в целях нормирования таким образом, чтобы  $\max\{X_n(\xi, \varepsilon\tau)\} = 1$ .

Подставляя  $n$ -ый член ряда (5.61) в уравнение (5.58) с учетом (5.62) получим:

$$f_n''(\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \varepsilon_1\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)f_n'(\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)f_n(\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau) = 0, \quad (5.63)$$

где  $\Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) = (1 - \varepsilon_1\alpha)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) - \beta^2$ .

Как и в пункте 4.1, функцию  $f_n(\tau)$  будем определять из условия ортогональности левой части уравнения (5.63) с функцией  $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$  на интервале  $[0, l(\varepsilon_0\tau)]$ . Тогда будем иметь:

$$\int_0^{l(\varepsilon\tau)} [f_n(\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau)] X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi + \varepsilon_1 A_{n1}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)f_n'(\tau) + A_{n1}(\varepsilon\tau)\Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)f_n(\tau) = 0. \quad (5.64)$$

где  $A_{n1}(\varepsilon\tau) = \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) d\xi$ .

При выводе уравнения (5.64) учтено, что

$$\int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_{n\xi}(\xi, \varepsilon\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi = 0.$$

Введем в уравнение (5.64) новую функцию

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) + Q_n(\varepsilon\tau)\cos W(\tau), \quad (5.65)$$

где

$$Q_n(\varepsilon\tau) = -\frac{\int_0^{l(\varepsilon_0\tau)} X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi}{A_{n1}(\varepsilon\tau)} = \frac{3,24(-1)^n}{k_n}.$$

Тогда уравнение (5.64) с точностью до величин порядка малости  $\varepsilon^2$  будет иметь вид

$$\mu_n''(\tau) + 2A_n(\varepsilon\tau)\mu_n'(\tau) + \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = -\Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_n(\varepsilon\tau)\cos W(\tau), \quad (5.66)$$

где

$$A_n(\varepsilon\tau) = \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{k_n^4}{l^4(\varepsilon\tau)}.$$

Второй член правой части равенства (5.65) слабо влияет на точность, поэтому вместо (5.61) можно записать:

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau). \quad (5.67)$$

Перейдем к определению функций  $\mu_n(\tau)$ . Введем в уравнение (5.66) новую функцию

$$\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau)y_n(\tau),$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = \frac{1,61}{\sqrt{l(\varepsilon\tau)}} \exp\left[-\int_0^{\tau} A_n(\zeta) d\zeta\right].$$

Тогда с точностью до величин порядка  $\varepsilon^2$  уравнение (5.66) будет иметь вид

$$y_n''(\tau) + \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = -\frac{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_n(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)}\cos W(\tau).$$

Для амплитуды колебаний, соответствующих  $n$ -ой динамической моде, получим следующее выражение:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left\{ \left[ \int_0^{\tau} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^{\tau} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$E_n^2(\tau) = \frac{2,59}{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)} \exp\left(\frac{\varepsilon_1 k_n^4}{3\varepsilon} \left(\frac{1}{(1+\varepsilon\tau)^3} - 1\right) - 2\alpha\tau\right);$$

$$\Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\zeta); \quad w_n(\tau) = \int_0^\tau \Omega_{0n}(\varepsilon\tau) d\zeta.$$

$$F_n(\tau) = \frac{2k_n^3}{\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)l^7(\varepsilon\tau)}} \exp\left(\frac{\varepsilon_1 k_n^4}{6\varepsilon} \left(1 - \frac{1}{(1+\varepsilon\tau)^3}\right) + \alpha\tau\right).$$

Используя методику, изложенную в пункте 5.3, рассмотрим явление установившегося резонанса и прохождение через резонанс.

Явление установившегося резонанса в рассматриваемой системе наблюдается, если скорость изменения функции  $\Phi_n(\zeta)$  равна нулю, т.е.:

$$W(\tau) = w_n(\tau) + \gamma,$$

где  $\gamma$  – постоянная величина. Если  $W(\tau) = \tau$ , то в области, содержащей точку

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left( k_n^4 \sqrt{\frac{1 - \varepsilon_1 \alpha}{1 + \beta^2}} - 1 \right),$$

наблюдается явление прохождения через резонанс.

Выражение для максимально возможной амплитуды при этом имеет вид (пункт 5.3):

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (5.68)$$

На рисунке 5.11. показаны построенные с помощью разработанного программного комплекса графики зависимости максимальной амплитуды поперечных колебаний балки переменной длины от относительной скорости движения границы  $\varepsilon$  при прохождении через резонанс на первой динамической моде при различных значениях безразмерного коэффициента  $\alpha$ , характеризующего сопротивление среды (сверху вниз:  $\alpha = 0$ ;  $\alpha = 0,01$ ;

$\alpha = 0,05; \alpha = 0,1$ ) со следующими параметрами модели (безразмерный коэффициент жесткости объекта  $\gamma = 0,1$ ):

– безразмерные коэффициенты  $\gamma$  и  $\eta$ , характеризующие вязкоупругость и жесткость подложки, имеют нулевые значения (рисунок 5.11,а);

– безразмерный коэффициент, характеризующий вязкоупругость  $\varepsilon_1 = 0,02$ , безразмерный коэффициент, характеризующий жесткость подложки  $\eta = 0,02$  (рисунок 5.11, б).

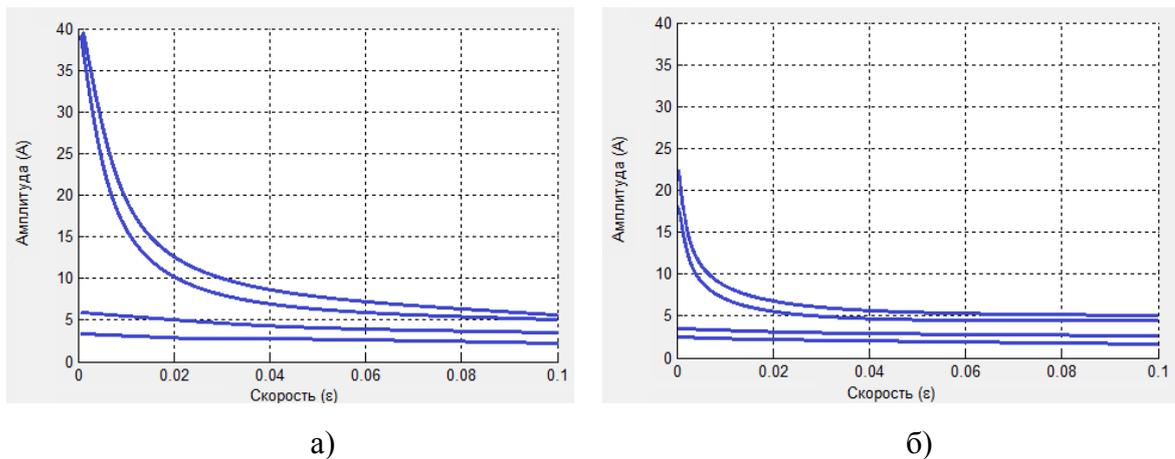


Рис.5.11. Графики зависимости максимальной амплитуды колебаний балки от относительной скорости движения границы  $\varepsilon$  при различных значениях безразмерных коэффициентов, характеризующих сопротивление среды, вязкоупругость и жесткость подложки

Анализ графиков, изображенных на рисунке 5.11, показывает, что, как и в пункте 5.4.3, амплитуда колебаний при нулевых значениях безразмерных коэффициентов, характеризующих сопротивление среды, вязкоупругость и жесткость подложки является оценкой сверху для амплитуд колебаний, в случае, когда соответствующие коэффициенты не равны нулю.

В заключении отметим, что приведенные здесь результаты позволяют выполнить количественный анализ установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс для систем, колебания в которых описывает математическая модель (5.49) – (5.51).

## 5.5. Выводы по пятой главе

1. В среде Matlab разработан программный комплекс «TB–ANALYSIS», предназначенный для решения некоторого класса краевых задач с движущимися границами, математического моделирования и изучения резонансных свойств объектов, состояние которых описывается этими постановками задач. Проведено тестирование программного комплекса, показавшее его эффективность при выполнении указанных задач. Программный комплекс прошёл процедуру регистрации электронного ресурса в объединённом фонде электронных ресурсов «Наука и образование» и Федеральном государственном научном учреждении «Центр информационных технологий и систем органов исполнительной власти».

2. Разработана методика моделирования и численного исследования резонансных явлений, имеющих место в объектах с движущимися границами. Получено выражение для оценки погрешности вычислений квадрата амплитуды при прохождении через резонанс.

3. С помощью программного комплекса проведено численное исследование колебаний и резонансных характеристик линейных объектов с подвижными границами, встречающихся в приложениях: продольные колебания вязкоупругого каната; поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, обладающего изгибной жесткостью с учетом действия сил сопротивления среды; поперечные колебания вязкоупругой балки на упругом основании с учетом действия сил сопротивления среды.

4. На примере тестовой задачи произведено сравнение результатов вычислений максимальной амплитуды колебаний и границ резонансной области при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах в зависимости от относительной скорости движения границы  $\varepsilon$  (отношение скорости границы к скорости распространения колебаний) и

установлено, что максимальная погрешность не превышает 5 % для величины  $\varepsilon < 0,37$ .

## Заключение

1. Разработаны новые математические модели для анализа продольно–поперечных колебаний одномерных объектов с движущимися границами, учитывающие геометрическую нелинейность, изгибную жесткость, взаимодействие продольных и поперечных колебаний, вязкоупругость, сопротивление среды, взаимодействие между частями объекта слева и справа от движущейся границы, в частных случаях малых колебаний совпадающие с классическими линейными моделями.

2. Для моделирования колебаний систем с подвижными границами разработан и реализован аналитический метод решения волнового уравнения, позволяющий получить решение с более широким спектром условий на подвижных границах, в отличие от известных задач аналогичного типа с граничными условиями первого рода; построен ряд решений для типовых механических объектов, позволяющих выполнить анализ их резонансных свойств.

3. Выполнено обобщение приближенного аналитического метода Канторовича – Галёркина на более широкий класс задач, описываемых уравнениями гиперболического типа с условиями на движущихся границах, позволяющего учитывать действие на механическую систему сил сопротивления среды, изгибную жёсткость и жёсткость подложки, вязкоупругие свойства колеблющегося объекта и слабые возмущения на границах; получены квадратурные формулы для амплитуд динамических мод различного порядка.

4. Исследована погрешность приближенного метода Канторовича – Галёркина применительно к оценке величины вызывающего резонанс внешнего возмущения, полученной для динамических мод различного порядка в зависимости от относительной скорости движения границы  $\varepsilon$  (отношение скорости границы к скорости распространения колебаний) и

установлено, что максимальная погрешность не превышает 5 % для величины  $\varepsilon < 0,37$ .

5. Разработана методика моделирования и численного исследования резонансных эффектов для объектов с движущимися границами, позволяющая учитывать возможность возникновения явления установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс; выполнен анализ зависимости амплитуды динамических мод разного порядка и границ резонансной области от относительной скорости границ с оценкой погрешности этих параметров.

6. В среде Matlab разработан программный комплекс «ТВ–ANALYSIS», предназначенный для решения некоторого класса краевых задач с движущимися границами, математического моделирования и изучения резонансных свойств объектов, состояние которых описывается этими постановками задач. С помощью программного комплекса проведено численное исследование колебаний и резонансных характеристик объектов с подвижными границами, встречающихся в прикладных задачах (продольные колебания вязкоупругого каната; поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании и обладающего изгибной жесткостью, с учетом действия сил сопротивления среды; поперечные колебания вязкоупругой балки на упругом основании с учетом действия сил сопротивления среды). Проведено тестирование программного комплекса, показавшее его эффективность при выполнении указанных задач.

## Литература

1. Абросимов, Н.А. Нелинейные задачи динамики конструкций [Текст] / Н. А. Абросимов, В. Г. Баженов, А. И. Кибец, А. И. Садырин, Д. Т. Чекмарев // Матем. моделирование. – 2000. – Т. 12. – № 6. – С.47–50.
2. Алиханов, С.В. Схлопывание металлической оболочки под действием магнитного поля [Текст]/ С.В. Алиханов, Г.И. Буднер, Г.Н. Кичилин // Прикладная механика и техническая физика. – 1966. – № 4. – С. 38–41.
3. Андреев, А.А. Граничное управление процессами, описываемыми системами гиперболических уравнений [Текст]/ А. А. Андреев, Е. А. Козлова, С. В. Лексина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». №1 (30). – 2013. – С. 24–30.
4. Андреев, А.А. Система волновых уравнений с граничным управлением первого рода [Текст] / А. А. Андреев, С. В. Лексина // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. – 2008.– № 2(61).– С. 10–21.
5. Анисимов, В.Н. Параметрический резонанс груза на резиновом шнуре [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Второй Всероссийской научной конференции. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2005. – С. 32–34.
6. Анисимов, В.Н. Исследование закономерностей отражения волн от движущихся границ [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Шестой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – Самара: СамГТУ, 2009. – С. 39–43.
7. Анисимов, В.Н. Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича–

Галеркина [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». №1 (18). – 2009. – С. 149–158.

8. Анисимов, В.Н. Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». №2 (19). – 2009. – С. 147–152.

9. Анисимов, В.Н. Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов. – Самара: Самар. гос. техн. ун–т, 2009. – 131 с.

10. Анисимов, В.Н. Обоснование граничных условий при взаимодействии струны, обладающей изгибной жесткостью, с роликовой опорой [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов, А.Е. Лукьянов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». № 5 (21) – 2010. – С. 280–284.

11. Анисимов, В.Н. Применение вариационного принципа Гамильтона для нелинейной постановки задачи о колебаниях балки с движущейся границей [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2011.– С. 10–14.

12. Анисимов, В.Н. Резонансные свойства каната переменной длины, обладающего изгибной жесткостью с учетом действия демпфирующих сил [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2011. – С. 15–20.

13. Анисимов, В.Н. Колебания балки переменной длины с учетом действия демпфирующих сил и гармонических возмущений на границе [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Приложение к журналу Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». № 3 (31) – 2011. – С.14–18.
14. Анисимов, В.Н. Об одном методе получения точного решения волнового уравнения, описывающего колебания механических систем с движущимися границами [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». № 3 (28) – 2012. – С. 145–151.
15. Анисимов, В.Н. Резонансная амплитуда колебаний балки переменной длины [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Третья международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: Материалы конференции под редакцией чл.–корр. РАН И.В. Волевича и д. ф.–м.н., проф. В.П. Радченко. – Самара: СамГТУ, 2012. – С. 37–38.
16. Анисимов, В.Н. Постановка задачи о колебаниях балки с движущейся подпружиненной опорой [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». № 1 (37) – 2013. – С. 93–98.
17. Анисимов, В.Н. Продольные колебания нагруженной вязкоупругой нити переменной длины [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тезисы докладов Четвертой международной конференции, посвященной 90–летию со дня рождения члена–корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева. Москва, РУДН, 25–29 марта 2013 г. – М.: РУДН, 2013. – С. 306–308.

18. Анисимов, В.Н. Вынужденные колебания вязкоупругой балки переменной длины [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2013. – С. 17–19.

19. Анисимов, В.Н. Применение метода Галеркина к вычислению собственных частот поперечных колебаний кабеля, обладающего переменной жесткостью [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2013. – С. 19–24.

20. Анисимов, В.Н. Постановка задач о продольно–поперечных колебаниях объектов с движущимися границами [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: материалы конф./ под ред. чл.–корр. РАН И.В. Волевича и д.ф.–м.н., проф. В.П. Радченко.–Самара: СамГТУ, 2014. – С. 56–57.

21. Анисимов, В.Н. Математические модели нелинейных продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». № 2 (19) – 2015. – С. 382–397.

22. Ануфриев И. Е., Смирнов А. Б., Смирнова Е. Н. MATLAB 7 (Наиболее полное руководство в подлиннике). СПб.: БХВ–Петербург, 2005. 1104 с.

23. Асланов, С.К. Теория устойчивости горения твердого топлива как упругого тела [Текст]/ С.К. Асланов // Прикл. механика. – № 2. – 1971.– С. 94–98.

24. Баженов, В.Г. Численное моделирование нелинейных задач динамики упругопластических конструкций [Текст]/ В. Г. Баженов, В. К. Ломунов, Д. Т. Чекмарев // Матем. Моделирование. – 2006. – Т. 18. – № 1. – С.10–16.
25. Барсуков, К.А. К теории электромагнитного резонатора с подвижной границей [Текст]/ К.А. Барсуков, Г.А. Григорян // Радиотехника и электроника. – 1976. – Т. 21. – №1. – С. 57–60.
26. Барсуков, К.А. О распространении электромагнитных волн в волноводах с неравномерно движущейся границей [Текст]/ К.А. Барсуков, Г.А. Григорян // Доклады АН Армянской ССР. – 1975. – Т. 61. – №4. – С. 231–235.
27. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [Текст]/ Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
28. Весницкий, А.И. Неустойчивость крутильных волн в стержнях с подвижными закреплениями [Текст]/ А.И. Весницкий, С.В. Крысов, А.И. Потапов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – №6. – С. 128–136.
29. Весницкий, А.И. Возбуждение колебаний импульсной формы в нити с переменным натяжением и движущимся закреплением [Текст]/ А.И. Весницкий, А.Ф. Ляхов // Прикладная механика. – 1982. – №7. – С. 121–124.
30. Весницкий, А.И. Вынужденные колебания и резонанс в вале с нестационарной нагрузкой [Текст]/ А.И. Весницкий, И.В. Милосердова, А.И. Потапов // Прикладная механика. – 1984. – №9. – С. 103–110.
31. Весницкий, А.И. Волновые явления в одномерных системах с движущимися границами [Текст]/ А.И. Весницкий, А.И. Потапов // Межвуз. сб.: Динамика систем. Горьковский ун-т. – 1978. – №3. – С. 38–88.
32. Весницкий, А.И. Качественный метод исследования волновых процессов в системах с изменяющимися во времени размерами [Текст]/ А.И.

Весницкий, А.И. Потапов // Межвуз.сб.: Динамика систем. Горьковский ун-т. – 1975. – №7. – С. 79–83.

33. Весницкий, А.И. Переходные процессы в одномерных системах с движущимися границами [Текст]/ А.И. Весницкий, А.И. Потапов. // Межвуз.сб.: Динамика систем. Горьковский университет. – 1982. –№9. – С. 1531–1538.

34. Весницкий, А.И. Поперечные колебания канатов в шахтных подъемниках [Текст]/ А.И. Весницкий, А.И. Потапов // Межвуз.сб.: Динамика систем. Горьковский университет. – 1975. – №7. – С. 84–89.

35. Весницкий, А.И. Частотно–энергетические соотношения для упругих волн в одномерных системах с движущимися объектами [Текст]/ А.И. Весницкий, Е.Е. Лисенкова // Акустический журнал. – 1995. – Т.41. – №2. – С. 209–215.

36. Весницкий, А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками [Текст]/ А.И. Весницкий. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.

37. Владимиров, С.А. Колебания круглой пластинки при переменной границе контакта с жестким основанием [Текст]/ С.А. Владимиров, А.В. Стежко // Прикладная механика. – 1971. – Т. 7. – №7. – С. 49–53.

38. Владимиров, С.А. Линеаризация граничных условий динамической системы с переменной зоной контакта [Текст]/ С.А. Владимиров, А.В. Стежко // Сопротивление материалов и теория сооружений: Сб. науч. трудов. – 1971. – В. 15. – С. 98–101.

39. Горбань, В.А. О методе Римана в задачах динамики гибких нитей переменной длины [Текст]/ В.А. Горбань // Математические методы исследования гидродинамических течений: Сб. науч. трудов. – Киев, 1978. – С. 81–88.

40. Горбань, В.А. О колебаниях гибких нитей переменной длины [Текст]/ В.А. Горбань, Н.В. Салтанов // Волны в сплошных средах: Сб. науч. трудов. – Киев, 1978. – С. 92–110.

41. Горбань, В.А. Применение метода Римана к решению некоторых задач динамики гибких нитей в потоках [Текст]/ В.А. Горбань, Н.В. Салтанов // Гидромеханика. – 1977. – №36. – С. 51–58.

42. Горелик, Г.С. Резонансные явления в линейных системах с периодически изменяющимися параметрами [Текст]/ Г.С. Горелик // Журнал технической физики. – 1935. – Т. 5. – В. 7. – С. 501–505.

43. Горошко, О.А. Определение критической скорости подъема груза на упруговязкой нити [Текст]/ О.А. Горошко, С.Р. Ильин // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1982. – № 5. – С. 9–14.

44. Горошко, О.А. Продольные колебания перематываемой нити в постановке неголономной механики [Текст]/ О.А. Горошко, О.Б. Керимбаева // Динамика систем, несущих подвижную нагрузку. – Харьков, 1982. – №3. – С. 47–54.

45. Горошко, О.А. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины [Текст] О.А. Горошко, Г.Н. Савин. – Киев: Изд-во АН УССР, 1971. – 290 с.

46. Григорян, Г.А. Об электромагнитных процессах в волноводах с равномерно движущейся границей [Текст]/ Г.А. Григорян // Известия Ленингр. электротехн. ин-та. – 1975. – В. 179. – С. 58–61.

47. Григорян, Г.А. Резонаторы и волноводы с движущимися границами: дис. ... канд. физ.-мат. наук [Текст]/ Г.А. Григорян. – Ленинград, 1977.

48. Гринберг, Г.А. О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей [Текст]/ Г.А. Гринберг // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33. – В. 2. – С. 269–272.

49. Гринберг, Г.А. О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей, форма которых изменяется во времени без соблюдения подобия [Текст]/ Г.А. Гринберг // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33. – В. 4. – С. 753–756.

50. Гринберг, Г.А. Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях [Текст]/ Г.А. Гринберг // Прикладная математика и механика. – 1967. – В. 2. – С. 193–195.
51. Гуляев, В. И. Бифуркации Андронова–Хопфа в волновых моделях торсионных колебаний бурильных колонн [Текст]/ Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Глушакова О. В. // Прикладная механика.– 2010. – № 11.– С. 73–82.
52. Егоров, А.И. Управления колебаниями связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами [Текст]/ А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская// Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45. – №10. –С.1766–1784.
53. Иванов, А.Ф. О законах изменения энергии и импульса для балки с движущимися закреплениями и нагрузками [Текст]/ А.Ф. Иванов, А.И. Потапов, Г.А. Уткин // Прикладная механика. – 1985. – №9. – С. 120–124.
54. Ильин, В.А. Схема оптимизации граничного управления смещениями на двух концах процессом колебаний стержня, состоящего из двух разнородных участков [Текст]/ В. А. Ильин // Докл. РАН, 2011. –Т.441. –№6. – С. 731.
55. Ильин, В.А. Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков [Текст]/ В. А. Ильин // Докл. РАН, 2011. –Т.440. –№2. – С. 159–163.
56. Ильин, В.А. Смешанная задача, описывающая процесс успокоения колебаний стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков [Текст]/ В.А. Ильин // Теория функций и дифференциальные уравнения. Сборник статей к 105–летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского. Тр. МИАН, 2010. –Т. 269. – С.133–142.

57. Ильин, В.А. Смешанная задача, описывающая процесс успокоения колебаний стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков [Текст]/ В.А. Ильин // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН, 2010. – Т.269. – С.133–142.
58. Ильин, В.А. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны [Текст]/ В.А. Ильин, Е.И. Моисеев// Успехи математических наук, 2005. – Т.60. – №6 (366). – С.89–114
59. Икрамов, М.В. Численное решение основного уравнения колебаний каната переменной длины при помощи ЭВМ [Текст]/ М.В. Икрамов // Распространение упругих и упругопластических волн: Сб. науч. тр. – Ташкент, 1969. – С. 349–354.
60. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст]/ Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
61. Канторович, Л.В. Приближенные методы высшего анализа [Текст]/ Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.: Наука, 1962. – 708 с.
62. Карпов, Н.И. Колебания круглого цилиндра, толщина которого изменяется во времени [Текст]/ Карпов Н.И., Мыкитюк Ю.Н. // Прикладная механика. – 1969. – Т. 5. – №3. – С. 63–66.
63. Кечеджиян, Л. О. Об одной задаче математической физики с подвижной границей [Текст] / Л.О. Кечеджиян, Н.А. Пинчук, А.М. Столяр. // Известия вузов. Сев.–Кавк. регион. Естеств. науки, 2008. – № 1. – С. 22–27.
64. Кобзев, Г. К. Приближенное решение задачи управления колебаниями струны переменной длины [Текст]/ Кобзев Г. К. // Вестн. ИрГТУ.– 2007. – № 1. –С.121–126.
65. Кобзев, Г. К. Приближенное решение задачи управления колебаниями вязкоупругой струны [Текст]/ Кобзев Г. Труды второй Международной научной конференции, Воронеж. – 2007.– С. 122–124.

66. Кобзев, Г. К. Приближенное решение задачи управления колебаниями вязкоупругой струны. Третья краевая задача [Текст]/ Кобзев Г. К. // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. Естеств. и техн. н. – 2007. –С. 466–467.
67. Кожешник, Я. Поперечное колебание напряженных гибких звеньев передач [Текст]/ Я. Кожешник // Теория машин и механизмов: Сб. науч. тр. – М.: Наука, 1976. – С. 170–176.
68. Козлова, Е. А. Задача граничного управления для системы уравнений гиперболического типа [Текст] / Е. А. Козлова // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – № 1, Ч.2. – С. 51–56.
69. Колосов, Л.В. Исследование совместных продольно–поперечных колебаний шахтного подъемного каната [Текст]/ Л.В. Колосов // Горная электромеханика и автоматика. – 1977. – В. 31. – С. 110–116.
70. Колосов, Л.В. Продольно–поперечные колебания струны каната подъемной установки [Текст]/ Л.В. Колосов // Изв. вузов: Горный журнал. – 1981. – №3. – С. 83–86.
71. Коровин, В.Г. К вопросу минимизации ошибки укладки ленты на поверхности изделия, формируемого методом намотки [Текст]/ В.Г. Коровин, В.Н. Мядзель // Системы управления технологическими процессами: Сборник. – Новочеркасск, 1979. – С. 51–57.
72. Корчинский, В.М. Электромагнитные поля и волны в электродинамических системах с движущимися границами: дис. ... канд. физ.–мат. наук [Текст]/ В.М. Корчинский. – Днепропетровск, 1978. – 180 с.
73. Корн, Г. Справочник по математике [Текст]/ Г. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
74. Кудинов, В.А. Об одном методе получения точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности на основе использования ортогональных методов [Текст] / В. А. Кудинов, И. В. Кудинов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.–мат. науки. – № 5(21). – 2010. –С.159–169.

75. Кудинов, В.А. Получение точного аналитического решения гиперболического уравнения колебаний струны с учётом релаксационных свойств материалов. [Текст] / В.А. Кудинов, И.В. Кудинов // Механика твёрдого тела, № 5. – 2014. – С. 63 – 75.

76. Кудинов, В.А. Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности: монография [Текст]/ В.А. Кудинов, И.В. Кудинов. – М.: Книжный дом «Либроком», 2012. –280 с.

77. Кудинов, И.В. Получение приближенного аналитического решения задачи Стефана с удалением расплавляемой среды [Текст] / И.В. Кудинов // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. – Самара: СамГТУ. – 2011. – С. 15–20.

78. Кузьмин, Н.Ю. Колебания днища судоходного шлюза [Текст]/ Н.Ю. Кузьмин Н.Ю., Ю.Э. Сеницкий // Инженерно–строительный журнал. – 2012. –№4(30). – С. 17–24.

79. Культербаев, Х. П. Математическое моделирование колебаний системы: тяжелая нить – сосредоточенная масса [Текст]/ Культербаев Х. П.,Исламова О. В. // Наука, техника и технология XXI века (НТТ–2007) Материалы 3 Международной научно–технической конференции, Нальчик. – 2007 .– С. 7–13.

80. Культербаев, Х. П. Математическая модель колебаний тяжелой подвешенной струны с сосредоточенной массой [Текст]/ Культербаев Х. П.,Исламова О. В. // Изв. вузов. Сев.–Кавк. регион. Техн. н. – № 4. – 2007.– С. 41–46.

81. Курант, Р. Уравнения с частными производными [Текст]/ Р. Курант. – М.: Наука, 1964. – 832 с.

82. Курендат, Р.С. Исследование частот собственных колебаний передач с гибкой связью [Текст]/ Р.С. Курендат, А.Л. Пархоменко // Вестник Львовск. политехн. ин–та. – 1978. – №6. – С. 9–12.

83. Курилко, В.И. Об отражении электромагнитных волн от движущейся поверхности [Текст]/ В.И. Курилко // Журнал технической физики. – 1960. – №5. – С. 504–507.

84. Курильская, Н. Ф. Колебания проводящей струны с подвижной нагрузкой в магнитном поле [Текст]/ Курильская Н. Ф. // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. Международный сборник. – № 2.– 2008. –С. 100–114.

85. Лежнева, А.А. Изгибные колебания балки переменной длины [Текст]/ А.А. Лежнева // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – №1. – С. 159–161.

86. Лежнева, А.А. Продольные колебания балки переменной длины: Ученые записки [Текст]/ А.А. Лежнева. – Пермь: Пермск. ун–т, 1966. – №156. – С. 133–142.

87. Лежнева, А.А. Свободные изгибные колебания балки переменной длины: Ученые записки [Текст]/ А.А. Лежнева. – Пермь: Пермск. ун–т, 1966. – № 156. – С. 143–150.

88. Лексина, С. В. Задача граничного управления для системы волновых уравнений / А. А. Андреев, С. В. Лексина // Вестник СамГТУ. Серия «Физико–математические науки». – 2008.– № 1(16),– С. 5–10.

89. Лексина, С. В. Система волновых уравнений с граничным управлением первого рода [Текст ] / С. В. Лексина // Тезисы докладов международной конференции по математической физике и ее приложениям. Самара, 2008. – С. 114–115.

90. Литвинов, В.Л. Поперечные колебания и явление установившегося резонанса каната переменной длины, обладающего изгибной жесткостью [Текст]/ В.Л. Литвинов // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XX». – Воронеж: ВГУ, 2009. – С. 109–110.

91. Литвинов, В.Л. Вычисление собственных частот каната, обладающего изгибной жесткостью и движущегося в продольном

направлении [Текст]/ В.Л. Литвинов // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: Материалы III Международной научной конференции. Часть 2. – Воронеж: Научная книга, 2009. – С. 8–9.

92. Литвинов, В.Л. Крутильные колебания стержня переменной длины с учетом действия гармонических возмущений на границе [Текст]/ В.Л. Литвинов // XX Петербургские чтения по проблемам прочности. Санкт–Петербург, 10–12 апреля 2012 г.: сборник материалов. – Ч. 2. – СПб., 2012. – С. 194–197.

93. Литвинов, В.Л. Поперечные колебания балки переменной длины с учетом изгибной жесткости и действия демпфирующих сил [Текст]/ В.Л. Литвинов // Четвертое российско–армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам: тезисы докладов / отв.ред. Знаменская О.В., Щуплев А.В. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2012. – С. 42–43.

94. Литвинов В.Л., Яшагин Н.С., Анисимов В.Н. Свидетельство о регистрации электронного ресурса «Автоматизированный исследовательский комплекс «ТВ–ANALISYS» в ОФЭРНИО № 19517 от 26.09.2013 г. и ФГАНУ ЦИТиС № 130912114653 от 30.09.2013 г.

95. Литвинов, В.Л. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении [Текст]/ В.Л. Литвинов // Журнал Средневолжского математического общества. Т. 15, № 3. 2013. – С. 112–119.

96. Литвинов, В.Л. Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода [Текст]/ В.Л. Литвинов // Журнал Средневолжского математического общества. Т. 16, № 1. 2014. – С. 83–88.

97. Литвинов, В.Л. Асимптотический метод решения функционального уравнения для систем с медленно движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов // Научно–техническое творчество: проблемы и

перспективы: сборник статей IX Всерос. конф.–семинара / Под общ. ред. А.П. Осипова. – Самара: Самар. гос. техн. ун–т, 2014. – С. 158–160.

98. Литвинов, В.Л. Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды [Текст]/ В.Л. Литвинов // Вестник научно–технического развития. № 4 (92), 2015. – С. 29–33.

99. Литвинов, В.Л. Решение функционального уравнения для систем с медленно движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов // Международная конференция «Функциональные пространства и теория приближения функций» посвященная 110–летию со дня рождения академика С.М. Никольского (25–29 мая 2015 г., МИАН, г.Москва): Тезисы докладов – М.: МИАН, 2015. – С. 169–170.

100. Литвинов, В.Л. Об одном решении интегро–дифференциального уравнения колебаний механических систем с движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов // Вестник научно–технического развития. № 8 (96), 2015. – С. 24–30.

101. Литвинов, В.Л. Исследование резонансных свойств струны переменной длины, лежащей на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Вестник научно–технического развития. № 11 (99), 2015. – С. 38–43.

102. Литвинов, В.Л. Продольные колебания каната переменной длины с грузом на конце [Текст]/ В.Л. Литвинов // Вестник научно–технического развития. № 1 (101), 2016. – С. 19–24.

103. Мангова, В.Н. О поперечных колебаниях стержня с движущимся жестким закреплением [Текст]/ В.Н. Мангова // Прикладная механика. – 1981. – №12. – С. 126–129.

104. Митропольский, Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний [Текст]/ Ю.А. Митропольский. – М.: Наука. – 1964. – 432 с.

105. Моисеев, Е.И. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце струны при заданной упругой силе на другом конце [Текст]/ Е. И. Моисеев, А. А. Холомеева // Труды Института математики и механики УрО РАН. – Т.17.–№2. – 2011. – С.151–158.

106. Моут, С. Теоретическое и экспериментальное исследование вибраций ленточных пил [Текст]/ С. Моут // В кн.: Конструирование и технология машиностроения. – М.: Мир, 1966. – №2. – С. 27–30.

107. Мулухов, К.К. Особенности динамического расчета ленточно–колесных конвейеров [Текст]/ Мулухов К.К. // Труды Северо–Кавказского государственного технологического университета – 2000. – № 7. –С. 266–269.

108. Мышкис А.Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы. – 3–е изд., доп., – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 688 с.

109. Николаи, Е.Л. О поперечных колебаниях участка струны, длина которого равномерно изменяется: Труды по механике [Текст]/ Е.Л. Николаи. – М.: Гостехиздат, 1955. – С. 328–331.

110. Островский, Л.А. Нерезонансные параметрические явления в распределенных системах (обзор) [Текст]/ Л.А. Островский, Н.С. Степанов // Изв. вузов. Радиотехника. – 1971. – №4. – С. 489–504.

111. Пинчук, Н.А. Об одной начально–краевой задаче с подвижной границей [Текст]/ Н.А. Пинчук, А.М. Столяр // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Шестой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – Самара: СамГТУ, 2009. – 250 с.

112. Пироженко, А. В. Анализ частот колебаний космической тросовой системы со сферическим шарниром [Текст]/ Пироженко А. В.,Храмов Д. А. // Техническая механика. – 2004.– №1. –С. 24–30.

113. Потапов, А.И. Волновые явления в одномерных механических системах с нестационарными границами: дис. ... канд. физ.–мат. наук [Текст]/ А.И. Потапов. – Горький, 1976.

114. Пустовойт, С.П. Метод несимметричных продолжений решения краевых задач с подвижными концами для уравнения колебаний [Текст]/ С.П. Пустовойт // В сб.: Краевые задачи. – Изд-во Пермск. ун-та, 1977. – С. 120–124.

115. Пустовойт, С.П. Метод несимметричных продолжений и решение второй краевой задачи для уравнения колебаний ограниченной струны переменной длины [Текст]/ С.П. Пустовойт // В сб.: Краевые задачи. – Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 1982. – С. 136–140.

116. Рагульский, К.И. Вопросы динамики прецизионных лентопротяжных механизмов [Текст]/ К.И. Рагульский // В сб.: Динамика машин. – М.: Наука, 1971. – С. 169–177.

117. Раздольский, А.Г. К исследованию переходных процессов одномерных механических систем переменной длины [Текст]/ А.Г. Раздольский, Ю.В. Заболотный // В сб.: Динамика машин. – М.: Наука, 1974. – С. 175–181.

118. Рушкевич, И.М. Электромагнитное поле в сжимающейся полости [Текст]/ И.М. Рушкевич // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31. – №3. – С. 552–555.

119. Савин, Г.Н. Динамика нити переменной длины [Текст]/ Г.Н. Савин, О.А. Горошко. – Киев: Изд-во АН УССР, 1962. – 327 с.

120. Самарин, Ю.П. Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне [Текст]/ Ю.П. Самарин, В.Н. Анисимов // Изв. вузов. Машиностроение. – 1986. – №12. – С. 17–21.

121. Самарин, Ю.П. О волновых явлениях в областях с подвижными границами [Текст]/ Ю.П. Самарин // Волжский математический сборник. – Куйбышев, 1967. – В. 5. – С. 337–340.

122. Самарин, Ю.П. Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве [Текст]/ Ю.П. Самарин // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 26. – В. 3. – С. 77–80.

123. Самарин, Ю.П. Применение автомодельных решений к задаче о колебаниях круглой мембраны, расширяющейся из точки [Текст]/ Ю.П. Самарин // В сб.: Механика. – Куйбышев: КПТИ, 1967. – С. 35–38.
124. Самарин, Ю.П. Решение некоторых задач математической физики, связанных с колебаниями тел с подвижными границами: дис. ... канд. физ.–мат. наук [Текст]/ Ю.П. Самарин. – Куйбышев, 1964. – 160 с.
125. Светлицкий, В.А. Передачи с гибкой связью [Текст]/ В.А. Светлицкий. – М.: Машиностроение, 1967. – 155 с.
126. Светлицкий, В.А. Механика гибких стержней и нитей [Текст]/ В.А. Светлицкий. – М.: Машиностроение, 1978. – 167 с.
127. Сергеев, А. Д. Автоколебания пантографа и контактной сети при высоких скоростях движения поезда [Текст]/ Сергеев А. Д., Сергеев Д. А. // 9 Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород, 22–28 авг., 2006. Аннотации докладов. Т. 1. – 2006. – С. 104.
128. Стеценко, О.А. Нестационарный процесс в волновых резонаторах с движущейся стенкой [Текст]/ О.А. Стеценко // Изв. вузов. Радиотехника. – 1964. – Т. 7. – №1. – С. 71–74.
129. Фирсанов, В. В. Динамическое состояние системы балок с переменными параметрами при действии подвижной нагрузки [Текст]/ Фирсанов В. В., Доан Чан Нгок // Вестн. Моск. авиац. ин–та. – 2009. – №3. – С. 138–144.
130. Хосаев, Х. С. Математическое описание динамических характеристик канатного става ленточного конвейера [Текст]/ Хосаев Х. С., Вазиева Л. Т. // Тр. Сев.–Кавк. гос. технол. ун–та. – 2001. – №8. – С. 234–239.
131. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление [Текст]/ Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
132. Юлдашев, Ш. С. Решение несимметричной задачи о распространении вибрации, возникающей при движении поездов по одному пути двухпутного тоннеля метрополитена как суперпозиции симметричной и

кососимметричной задачи [Текст] / Юлдашев Ш. С., Махмудов З. С., Жумабоева Ш.Р. // Проблемы механики. – 2005. №4. –С. 37–40.

133. Якубовский, Ю.В. Основы механики нити [Текст]/ Ю.В. Якубовский. – М.: Легкая индустрия, 1973. – 231 с.

134. Ястребов, В.П. Автомодельные задачи динамического изгиба балок [Текст]/ В.П. Ястребов // Прикладная механика и техническая физика. – 1981. – №1. – С. 158–164.

135. Aboshi, Mitsuo. Анализ движения кольцевого пролета подвесной системы контактного провода на базе модели троса с упругими опорами [Текст]/ Aboshi, Mitsuo // Nihon kikai gakkai ronbunshu. // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. – 2009. – №755. –P. 1950–1956.

136. Boyle, John M. (Jr). Vibration modeling of magnetic tape with vibro–impact of tape–guide contact / Boyle, John M. (Jr), Bhushan Bharat // J. Sound and Vibr. № 3. – 2006 . –P. 632–655.

137. Brake, M. R. Frictional vibration transmission from a laterally moving surface to a traveling beam / Brake M. R., Wickert J. A. // J. Sound and Vibr. № 3. – 2008. –P. 663–675 .

138. Cho, Yong Hyeon. Numerical simulation of the dynamic responses of railway overhead contact lines to a moving pantograph, considering a nonlinear dropper / Cho Yong Hyeon // J. Sound and Vibr. № 3. – 2008. – P.433–454.

139. Ding, Hu. Galerkin methods for natural frequencies of high–speed axially moving beams / Ding Hu, Chen Li–Qun // J. Sound and Vibr. № 17.– 2010. –P. 3484–3494 .

140. Engel, Zbigniew W. Problemy drgan mechanicznych w pracach uczonych krakowskich / Engel Zbigniew W., Niziom Jozef .– Akademia Groniczo–Hutnicza w Krakowie, Polska // Czas. techn. M. № 1. – 2008. –P.77–85.

141. Guo, Xajuan. Анализ динамических характеристик плавающей постели рельсового пути, опирающейся на стальные пружины [Текст]/ Guo Xajuan, Yang Shaopu, Guo Wenwu // Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis. № 2. – 2006. –P.146–150.

142. Inacio, O. Computational modelling of string–body interaction for the violin family and simulation of wolf notes / Inacio O., Antunes J., Wright M. C. M. // *J. Sound and Vibr.* № 1–2. – 2008. – P. 260–286.
143. Kotera Tadashi. Vibration of a string with time–varying length // *Memours of the Eacetry of Engineering vobe Universiti.* – 1978. – №24. – P.45–54.
144. Kotera Tadashi. Vibration of a string with time–varying length // *Bulleten Japan Society of Mechanical Engineers.* – 1978. – Vol. 21. – №162. – P.1677–1684.
145. Lei, Xiao–yan. Влияние резких изменений жесткости основания железнодорожного полотна на его вибрацию при движущейся нагрузке [Текст]/ Lei Xiao–yan // *Journal of Vibration Engineering.* N 2.– 2006. – P.195–199.
146. Li, Ming–an. Активное управление вибрацией балок под действием подвижных нагрузок [Текст]/ Li Ming–an, Lei Shuang, Xu Jing–wen // *Journal of Xi'an University of Technology.* № 3. – 2010. – P.351–356.
147. Li, Weiming. Влияние скорости подвижной массы на динамические реакции шарнирно опертой балки [Текст]/ Li Weiming, Luo Hanbin, Zhu Hongping, Xia Yong // *Journal of Huazhong University of Science and Technology. Nature Science.* № 9. – 2008. – P.117–120.
148. Liu, Zhi–jun. Анализ плоских нелинейных свободных колебаний несущего каната с учетом влияния изгибной жесткости [Текст]/ Liu Zhi–jun, Chen Guo–ping // *Journal of Vibration Engineering.* № 1. – 2007. – P.57–60.
149. Nakagawa, Chizuru. Fundamental study on the effect of high–frequency vibration in the vertical and lateral directions on ride comfort / Nakagawa Chizuru, Shimamune Ryohei, Watanabe Ken, Suzuki Erimitsu // *Quart. Repts Railway Techn. Res. Inst.* № 2.– 2010. – P.101–105.
150. Pascal, M. New events in stick slip oscillators behavior / Pascal M. // *Международная конференция по прикладной математике и информатике,*

посвященная 100-летию со дня рождения академика А. А. Дородницына, Москва, 7–11 дек., 2010. Тезисы докладов. – 2010. – P.71–72.

151. Ragulskis, K. Investigation of vibrations of a tape in the printing device / Ragulskis K., Kibirktis E., Zubavicius L., Ragulskis L. // J. Vibroeng. № 1. – 2007. – P.10–14.

152. Rusin, Jaroslaw. Vibrations of double-string complex system under moving forces. Closed solutions / Rusin Jaroslaw, Sniady Pawem, Sniady Piotr // J. Sound and Vibr. № 3. – 2011. –P. 404–415.

153. Ryue, J. Decay rates of propagating waves in railway tracks at high frequencies / Ryue J., Thompson D.J., White P. R., Thomspom D.R. // J. Sound and Vibr. . № 4–5. – 2009. – P.955–976.

154. Sahebkar, S. M. Nonlinear vibration analysis of an axially moving drillstring system with time dependent axial load and axial velocity in inclined well / Sahebkar S. M., Ghazavi M. R., Khadem S. E., Ghayesh M. H. // Mech. and Mach. Theory. № 5. – 2011. – P.743–760.

155. Shi, Yong-jiu. Нелинейный анализ собственных частот тросовой системы [Текст]/ Shi Yong-jiu, Wu Li-li, Wang Yuan-qing // Journal of Vibration Engineering. № 2. – 2006. – P.173–178.

156. Shin L.Y. Motion of elliptic ballooning for a traveling string // International Journal of Non-Linear Mechanical. – 1975. – Vol. 10. – №3. – P.183–191.

157. Stancioiu, Dan. Experimental investigations of a multi-span flexible structure subjected to moving masses / Stancioiu Dan, Ouyang Huajiang, Mottershead John E., James Simon // J. Sound and Vibr. № 9. – 2011. – P.2004–2016.

158. Sun, Lu. Steady-state dynamic response of a Bernoulli–Euler beam on a viscoelastic foundation subject to a platoon of moving dynamic loads / Sun Lu, Luo Feiquan // Trans. ASME. J. Vibr. and Acoust. № 5. – 2008. – P.051002/1–051002/19.

159. Tanaka C., Shiota Y. Experimental studies on bond saw blade vibration // *Wood Sci. and Technol.* – 1981. – Vol. 15. – №2. – P.145–159.
160. Teng, Yan–feng. Vibration analysis of maglev three–span continuous guideway considering control system / Teng Yan–feng, Teng Nian–guan, Kou Xin–jian // *J. Zhejiang Univ. Sci. A An International Applied Physics and Engineering Journal.* № 1.– 2008.–P. 8–14.
161. Wang, Lianhua. Multiple internal resonances and non–planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations / Wang Lianhua, Zhao Yueyu // *J. Sound and Vibr.* № 1–2. – 2008. –P. 1–14.
162. Wang, Ling–bo. Метод тестирования состояния моста, основанный на анализе взаимосвязанных колебаний системы "мост – транспортное средство" [Текст]/ Wang Ling–bo, He Shuan–hai, Jiang Pei–wen // *Journal of Zhengzhou University. Engineering Science.* № 1. – 2011. –P. 26–29.
163. Yagci, Baris. A spectral–Tchebychev technique for solving linear and nonlinear beam equations / Yagci Baris, Filiz Sinan, Romero Louis L., Ozdoganlar O. Burak // *J. Sound and Vibr.* № 1–2.– 2009. – P. 375–404.
164. Zhao, Yueyu. On the symmetric modal interaction of the suspended cable: three–to–one internal resonance/ Zhao Yueyu, Wang Lianhua // *J. Sound and Vibr.* № 4–5.– 2006. – P.1073–1093.
165. Zhou, Jinson. Анализ явления геометрической фильтрации и резонансных колебаний гибких элементов конструкции рельсового транспортного средства [Текст]/ Zhou Jinson, Sun Wenjing, Gong Dao // *Journal of Tongji University. Natural Science.* № 12. – 2009. – P.1653–1657.
166. Zhu, W.D. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control / Zhu W. D., Chen Y. // *Trans. ASME. J. Vibr. and Acoust.* № 1.– 2006. – P. 66–78.
167. Zhu, W.D. Exact response of a translating string with arbitrarily varying length under general excitation / Zhu W.D., Zheng N.A. // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* № 3. – 2008. – P. 031003/4–031003/14.



ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ОБРАЗОВАНИЯ  
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ  
ОБЪЕДИНЕННЫЙ ФОНД ЭЛЕКТРОННЫХ РЕСУРСОВ "НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ"

**СВИДЕТЕЛЬСТВО О РЕГИСТРАЦИИ  
ЭЛЕКТРОННОГО РЕСУРСА**

*№ 19517*

Настоящее свидетельство выдано на электронный ресурс, отвечающий требованиям новизны и приоритетности.

**Автоматизированный исследовательский комплекс  
«TB-ANALISYS»**

Дата регистрации: 26 сентября 2013 года

Авторы: Литвинов В.Л., Яшагин Н.С., Анисимов В.Н.

Организация-разработчик: **Филiaal ФГБОУ ВПО Самарский  
государственный технический университет  
в г. Сызрани**

Директор ИНИПИ РАО,  
академик РАО, д.ю.н., проф.  В.Е. Усанов

Руководитель ОФЭРНиО, почетный  
работник науки и техники РФ  А.И. Галкина

Дата выдачи 26.09.2013

ООО «Специальное Конструкторско-  
Технологическое Бюро «Пластик»  
446025, РФ, Самарская обл.,  
г. Сызрань, Саратовское шоссе, 4

УТВЕРЖДАЮ  
Генеральный директор  
С.А. Савин  
2015 г.



**АКТ**  
**о внедрении результатов диссертационной работы**  
Литвинова Владислава Львовича  
на тему: «Математическое моделирование и исследование колебаний  
механических систем с движущимися границами»  
в опытно-конструкторскую работу, выполненную  
ООО «Специальное Конструкторско-Технологическое Бюро «Пластик»,  
г. Сызрань

Научно-техническая комиссия в составе Первого заместителя Генерального директора-Генерального конструктора по спец. изделиям ООО «СКТБ «Пластик» Биткина В.Е., начальника отдела проектных разработок и опытно-конструкторских работ ООО «СКТБ «Пластик» Денисова А.В., заведующего кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВПО «Самарский государственный технический университет» (СамГТУ) Радченко В.П., начальника управления научных исследований ФГБОУ ВПО «СамГТУ» Давыдова А.Н. составили настоящий акт о том, что материалы диссертационной работы использованы при:

- решении задачи создания высокоточных размеростабильных несущих конструкций оптико-электронных комплексов из волокнистых композиционных материалов на уровне синтеза конструктивных элементов;
- исследовании собственных частот и форм колебаний конструкций оптико-электронных комплексов с учетом анализа резонансных свойств систем с движущимися границами, проявляющихся в условиях эксплуатации.

Разработанный метод исследования колебаний механических систем с движущимися границами позволяет решить ряд вопросов надежности при проектировании конструкций с учетом динамических явлений, имеющих место в проектируемых объектах.

Члены комиссии:

Первый зам. Генерального директора-  
Генеральный конструктор по СИ  
ООО «СКТБ «Пластик»



В.Е. Биткин

Начальник отдела проектных  
разработок и опытно-конструкторских  
работ ООО «СКТБ «Пластик»



А.В. Денисов

Зав. кафедрой «Прикладная математика и  
информатика» ФГБОУ ВПО «СамГТУ»



В.П. Радченко

Начальник управления научных  
исследований ФГБОУ ВПО «СамГТУ»



А.Н. Давыдов



«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по учебной работе  
Самарского государственного  
технического университета  
Д.А. Деморецкий  
2015г.

### АКТ

об использовании результатов диссертационной работы В.Л. Литвинова «Математическое моделирование и исследование колебаний механических систем с движущимися границами», представленной на соискание учёной степени кандидата технических наук, в учебном процессе Самарского государственного технического университета.

Комиссия в составе начальника управления высшего образования университета к.т.н., доцента А.Н. Лукьяновой, заведующего кафедрой «Прикладная математика и информатика» д.ф.-м.н., профессора В.П. Радченко и председателя методического совета инженерно-экономического факультета к.э.н., доцента О.Ю. Еремичевой, составила настоящий акт о том, что в учебном процессе Самарского государственного технического университета использованы следующие результаты кандидатской диссертации В.Л. Литвинова «Математическое моделирование и исследование колебаний механических систем с движущимися границами».

1. Численно-аналитический и приближенный методы решения краевых задач о колебаниях систем с движущимися границами используются в лекционных курсах по дисциплинам «Численные методы решения краевых задач» и «Уравнения математической физики».

2. Методика и результаты анализа резонансных явлений, имеющих место в объектах с движущимися границами, используются в лекционном курсе по дисциплине «Математическое моделирование в машиностроении», а также в лабораторных и курсовых работах.

Начальник УВО СамГТУ  
к.т.н., доцент

А.Н. Лукьянова

Зав. кафедрой ПМИИ,  
д.ф.-м.н., профессор

В.П. Радченко

Председатель МС ИЭФ  
к.э.н., доцент

О.Ю. Еремичева

**Вывод промежуточного выражения (4.32)**

В пункте 4.1 получены выражения (4.17), (4.28), (4.29) в виде

$$\begin{aligned} \theta_n(\tau) = E_n(\tau) - 2\varepsilon \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m B_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) F'_{kr}(\tau) - \varepsilon^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m C_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) F_{kr}(\varepsilon\tau) - \\ - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau) \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) F_{kr}(\varepsilon\tau); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\varphi(\xi, \tau) = B_0(\xi) \cos W_0(\tau); \quad (2)$$

$$F_{ji}(\tau) = B_{ji} \cos W_{ji}(\tau), \quad j = \overline{1, 2}; \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

а также промежуточное выражение

$$E_n(\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} \varphi(\xi, \tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Подставляя (2) в первый член правой части равенства (1) с учетом выражения (4) и производя деление на  $A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{E_n(\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)} = \cos W_0(\tau) \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} B_0(\xi) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi / [A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)] = \\ = M_{n0}(\varepsilon\tau) \cos W_0(\tau). \end{aligned}$$

Подставляя (3) во второй, третий и четвертый члены правой части равенства (1) и производя деление на  $A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)$ , получим

$$\begin{aligned} \left( -2\varepsilon \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^m B_{n_{ji}}(\varepsilon\tau) F'_{ji}(\tau) - \varepsilon^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^m C_{n_{ji}}(\varepsilon\tau) F_{ji}(\varepsilon\tau) - \right. \\ \left. - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau) \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^m Q_{n_{ji}}(\varepsilon\tau) F_{ji}(\varepsilon\tau) \right) / (A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)) = \\ = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^m \frac{-B_{ji}}{A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)} \sqrt{Z_{nji}^2(\varepsilon\tau) + 4\varepsilon^2 [W'_{ji}(\tau)B_{nji}(\varepsilon\tau)]^2} \cos \Omega_{nji}(\tau) = \\ = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^m M_{nji}(\varepsilon\tau) \cos \Omega_{nji}(\tau), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Z_{nji}(\varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau) Q_{nji}(\varepsilon\tau) + \varepsilon^2 C_{nji}(\varepsilon\tau); \\ \Omega_{nji}(\tau) = W_{ji}(\tau) + \arcsin \left[ \frac{\varepsilon B_{nji}(\varepsilon\tau) W'_{ji}(\tau)}{\sqrt{Z_{nji}^2(\varepsilon\tau) + 4\varepsilon^2 [W_{ji}(\tau) B_{nji}(\varepsilon\tau)]^2}} \right]. \end{aligned}$$

### Вывод выражения резонансной частоты (4.81)

В пункте 3.2 получено выражение для амплитуды колебаний задачи (4.79), (4.80) виде

$$A_n^2(\tau) = 4 \left\{ \left[ \int_0^{b(\tau)} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[ \int_0^{b(\tau)} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$\Phi_n(\zeta) = 2\pi n\zeta - W(\zeta). \quad (1)$$

Функции  $\varphi, \psi$  имеют вид (таблица 3.1):

$$\varphi(z) = \psi(z) = \frac{\ln[(\varepsilon z + 1) / (1 - \varepsilon)]}{\ln[(1 + \varepsilon) / (1 - \varepsilon)]} - 1. \quad (2)$$

Тогда из выражений (1), (2) следует

$$\Phi_n(\zeta) = 2\pi n\zeta - W \left( \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right)^\zeta - \frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (3)$$

Явление установившегося резонанса будет наблюдаться, если скорость изменения функции  $\Phi_n(\zeta)$  равна нулю, т.е.

$$\Phi_n(\zeta) = \gamma, \quad (4)$$

где  $\gamma$  – постоянная величина. Из условия (4) с учетом выражений (2), (3) можно установить, каким образом должна изменяться частота внешней силы  $W(\tau)$ , чтобы возникло явление установившегося резонанса:

$$W(\tau) = \frac{2\pi n \ln(1 + \varepsilon\tau)}{\ln[(1 + \varepsilon) / (1 - \varepsilon)]} - \gamma.$$