

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Макаров Роман Юрьевич

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ РЕОЛОГИЧЕСКОГО
ДЕФОРМИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
доктор технических наук,
доцент Зотеев Владимир Евгеньевич

Самара – 2018

Оглавление

Актуальность	5
Глава 1. Аналитический обзор и постановка задачи исследования	13
1.1. Известные математические модели зависимости реологической деформации от времени	16
1.2. Описание и анализ эффективности известных численных методов, применяемых при определении параметров моделей реологического деформирования	23
1.3. Перспективы решения задачи повышения адекватности и точности вычисления параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений	34
1.4. Выводы по главе 1	36
Глава 2. Построение математических моделей реологического деформирования в форме разностных уравнений	38
2.1. Блок-схема разрабатываемого численного метода	38
2.2. Формирование разностных уравнений для описания первой стадии (неустановившейся) ползучести	39
2.3. Формирование разностных уравнений для описания первых двух стадий (неустановившейся и установившейся) ползучести	45
2.4. Формирование разностных уравнений для описания третьей стадии ползучести (стадии ускоренной ползучести)	52
2.5. Формирование разностных уравнений для описания стадии ускоренной ползучести при степенной зависимости параметра разупрочнения от напряжения	55
2.6. Выводы по главе 2	57
Глава 3. Разработка и исследование численных методов среднеквадратичного оценивания параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений	62

3.1. Построение разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений деформации	62
3.1.1. Построение разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений деформации ползучести на первой стадии.	63
3.1.2. Построение разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений деформации ползучести на первой и второй стадиях	76
3.1.3. Построение разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений деформации на третьей стадии ползучести	88
3.2. Численный метод определения параметров моделей ползучести на основе разностных уравнений	98
3.3. Разработка и исследование итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели	113
3.4. Результаты численно-аналитических исследований эффективности разработанного численного метода оценивания параметров моделей ползучести на основе разностных уравнений	135
3.5. Выводы по главе 3	147
Глава 4. Результаты апробации численных методов определения параметров моделей ползучести на основе разностных уравнений	149
4.1. Определение параметров модели ползучести поливинилхлоридного пластика	149
4.2. Сравнительный анализ метода последовательного выделения экспоненциальных слагаемых и разработанного численного метода на основе разностных уравнений	161
4.3. Определение параметров модели ползучести для первой и второй стадии алюминиевого сплава Д16АТ	165
4.4. Определение параметров модели стадии ускоренной ползучести алюминиевого сплава Д16Т	173

4.5. Определение параметров модели стадии ускоренной ползучести алюминиевого сплава Д16Т при степенной зависимости параметра разупрочнения от напряжения	180
4.6. Определение параметров модели ползучести в пределах трех стадий для стали 15Х2МФА	185
4.7. Сравнительный анализ разработанного численного метода и метода Левенберга-Марквардта	189
4.8. Определение параметров аппроксимационной зависимости интеграла в вершине трещины от приложенной нагрузки	<i>J</i> – 195
4.9. Определение параметров модели раскрытия трещины	200
4.10. Выводы по главе 4	203
Глава 5. Разработка комплекса программ для определения параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений	205
5.1. Описание основных этапов алгоритма идентификации параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений	205
5.2. Описание основных элементов и интерфейса программы, системы диалоговых и информационных окон	208
5.3. Выводы по главе 5	217
Заключение	218
Список используемых источников и литературы	220
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	231
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	256
ПРИЛОЖЕНИЕ 3	257
ПРИЛОЖЕНИЕ 4	259
ПРИЛОЖЕНИЕ 5	260

Актуальность

Современное машиностроение постоянно сталкивается с проблемой повышения долговечности и увеличения ресурса установок и элементов конструкций при одновременном снижении их материалоемкости. Эти обстоятельства объективно приводят к увеличению рабочих напряжений, появлению неупругих реологических деформаций, ускорению накопления поврежденности и, как следствие, к необходимости разработки новых методов анализа напряженно-деформированного состояния. Принимая во внимание возрастание числа элементов конструкций, срок службы которых приближается к назначенному ресурсу, большой разброс механических характеристик материала (особенно для процессов ползучести и усталости), можно сделать вывод, что актуальность данных разработок лишь возрастает. Возникающая при этом проблема достоверной оценки предельного ресурса элементов конструкций (предельные значения деформаций, перемещений, напряжений) в условиях реальной эксплуатации требует неклассического подхода к её решению [69].

Возможным решением обозначенных задач является разработка новых методов построения обобщенных моделей деформирования и разрушения элементов конструкций в форме определяющих соотношений типа "обобщенные нагрузки – обобщенные перемещения" [69], описывающих зависимости появления и накопления деформации от напряжения, накопления поврежденности, недопустимых деформаций как материалов, так и элементов конструкций.

В свою очередь, построение новых математических моделей реологического деформирования является только первым этапом в реализации триады "модель – алгоритм – программа" [86], и следующим шагом является разработка вычислительных алгоритмов для реализации предлагаемых методов математического моделирования на компьютере. К трудностям данного этапа

следует отнести как недостатки существующих методов и алгоритмов, применяемых для оценки параметров моделей реологического деформирования (чувствительность к монотонности входных экспериментальных данных, медленная, либо даже отсутствующая, сходимость итерационных процедур, неопределенность выбора начальных приближений), так и трудности в разработке новых численных методов, обусловленные нелинейностью определяющих соотношений.

Таким образом, обозначенные проблемы требуют разработки и исследования новых численных методов оценки параметров процесса реологического деформирования, реализации вычислительных алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ, комплексного исследования с применением математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Для решения указанных проблем можно воспользоваться подходом, предложенным и апробированным в [20–23]. В основе этого подхода лежат линейно-параметрические дискретные модели, описывающие в форме разностных уравнений результаты наблюдений процесса реологического деформирования. Известные соотношения между параметрами нелинейной модели реологического деформирования и коэффициентами линейно-параметрической дискретной модели позволяют при решении задачи нелинейного оценивания эффективно использовать известные методы линейного регрессионного анализа и статистической обработки экспериментальных данных.

Целью диссертационной работы является построение, исследование и систематизация новых линейно-параметрических дискретных моделей, в форме разностных уравнений описывающих процессы реологического деформирования материалов и элементов конструкций, разработка и исследование на их основе новых численных методов оценивания параметров моде-

лей реологического деформирования, а также программная реализация разработанных численных методов.

Для достижения поставленной цели последовательно решаются следующие взаимосвязанные **научные задачи**:

- построение линейно-параметрических дискретных моделей, описывающих в форме разностных уравнений результаты наблюдений процесса реологического деформирования;

- разработка нового численного метода оценивания параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений, обеспечивающего высокую адекватность построенной модели экспериментальным данным;

- численно-аналитические исследования помехозащищенности и устойчивости численного метода оценивания параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений;

- разработка программного обеспечения, реализующего вычислительные алгоритмы среднеквадратичной оценки параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений.

Объектом исследования являются математические модели реологического деформирования элементов конструкций и конструкционных материалов, проявляющих реологические свойства при эксплуатации.

Предметом исследования являются линейно-параметрические дискретные модели, описывающие в форме разностных уравнений результаты наблюдений деформации, и численный метод определения параметров моделей реологического деформирования на основе среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностных уравнений.

Научная новизна работы заключается в новом подходе к решению задачи оценивания нелинейных моделей реологического деформирования. Получены следующие новые научные результаты:

– построены новые дискретные математические модели, описывающие в форме разностных уравнений различные стадии реологического деформирования материалов и элементов конструкций;

– разработаны и апробированы новые численные методы определения параметров моделей реологического деформирования, отличающиеся от существующих методов применением среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения, описывающего результаты эксперимента, что позволяет повысить точность вычислений оценок параметров и степень адекватности моделей экспериментальным данным;

– разработан комплекс программ, реализующих разработанные алгоритмы численных методов, который может быть использован при обработке экспериментальных данных при исследовании реологической деформации.

Научная и практическая значимость работы. Построенные математические модели, описывающие в форме разностных уравнений различные стадии развития деградационных процессов, позволяют свести решение задачи нелинейного оценивания к итерационной процедуре уточнения среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения. Предлагаемый численный метод определения параметров нелинейных моделей реологического деформирования, в основе которого лежит итерационная процедура среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения, позволяет существенно повысить точность вычисления оценок и адекватность модели данным эксперимента. На языке высокого уровня разработан комплекс программ под управлением операционной системы Windows, реализующий алгоритмы численного метода, который может быть использован при обработке экспериментальных данных реологического деформирования материалов и элементов конструкций (деформации ползучести, раскрытии трещин, оценке энергетического состояния материала в области вершины трещины при использовании J -интеграла).

Практическая значимость работы заключается в том, что построенные линейно-параметрические дискретные модели, описывающие в форме разностных уравнений процесс реологического деформирования, а также предлагаемый численный метод оценки параметров моделей реологического деформирования и разработанный пакет прикладных программ, реализующий алгоритмы вычислений параметров моделей реологического деформирования, может быть использован при обработке результатов научно-технических экспериментов и промышленных испытаний, имеющих характерные стадии развития деградационных процессов (стадию приработки, нормальной работы, стадию старения).

Основные положения, выносимые на защиту:

– линейно-параметрические дискретные модели, описывающие в форме разностных уравнений экспериментальные значения реологической деформации в пределах первой, второй, третьей стадий и их комбинаций;

– новые дискретные математические модели, связывающие результаты наблюдений, коэффициенты разностных уравнений и параметры моделей;

– численный метод среднеквадратичного оценивания параметров моделей реологического деформирования в пределах первой, второй, третьей стадий и их комбинаций;

– новые результаты численно-аналитических исследований эффективности разработанного численного метода определения параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений.

Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций, а также достоверность полученных результатов исследований обеспечивается корректным использованием применяемого математического аппарата и вводимых допущений и гипотез; сравнением данных численного расчета по разработанным методам с известными методами для подтверждения эффективности и оценки погрешности результатов вычислений; численно-аналитическими исследованиями на основе имитацион-

ного моделирования устойчивости вычислений; численно-аналитическими исследованиями адекватности построенных математических моделей экспериментальным данным.

Связь диссертационной работы с планами научных исследований.

Полученные в работе теоретические положения и практические результаты использованы:

– в учебном процесса ФГБОУ ВО "Самарский государственный технический университет" в лекционных курсах по дисциплинам "Математическое моделирование в машиностроении", "Математические методы обработки экспериментальных данных", "Математические методы прогнозирования", "Современные методы параметрической идентификации на основе разностных уравнений", а также в лабораторных, курсовых и выпускных квалификационных работах;

– внедрены в расчетную практику АО "РКЦ "Прогресс", г. Самара (см. приложение 3), и специализированных отделов СКТБ "Пластик", г. Сызрань (см. приложение 4).

Апробация работы.

Результаты исследований по теме диссертационной работы докладывались на Девятой всероссийской конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи" (г. Самара, 2013 г.); Международной научно-технической конференции "Перспективные информационные технологии" (г. Самара, 2013 г.); Международной молодежной конференции по естественнонаучным и техническим дисциплинам "Научному прогрессу – творчество молодых" (г. Йошкар-Ола, 2013 г.); Восьмой всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (г. Чебоксары, 2014 г.); Заочной международной научно-практической конференции "Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика" (г. Воронеж, 2014 г.); Международной научно-практической конференции "Развитие технических наук в современном мире" (г. Воронеж, 2014 г.);

Международной научно-практической конференции "Перспективы развития современных математических и естественных наук" (г. Воронеж, 2014 г.); Восьмой международной конференции "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике" (г. Новосибирск, 2015 г.); Международной научно-технической конференции "Перспективные информационные технологии ПИТ-2015" (г. Самара, 2015 г.); Десятой всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи" (г. Самара, 2016 г.); Международной научно-практической конференции "Перспективные информационные технологии ПИТ-2017" (г. Самара, 2017 г.); на научных семинарах "Механика и прикладная математика" Самарского государственного технического университета (рук. д.ф.-м.н., профессор В.П. Радченко, 2015–2018 гг.).

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка используемых источников и литературы из 95 наименований. Работа содержит 260 страниц основного текста, включая 9 таблиц, 84 рисунка и приложения.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 16 печатных работ, из них 5 в изданиях из перечня ВАК, получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

Личный вклад автора. Работы [46–51] выполнены самостоятельно, в работах [24], [25], [27], [28], [32] автору принадлежит совместная постановка задачи и разработка метода, в работе [26] диссертанту принадлежит совместная разработка алгоритмов, а также их программная реализация, в [29], [30], [31], [33] – совместная постановка задач, разработка метода численного решения и его исследование, анализ и систематизация результатов расчетов.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю, доктору технических наук Зотееву Владимиру Евгеньевичу за постановку задач и поддержку работы, а также профессору, доктору физико-

математических наук Радченко Владимиру Павловичу за консультации и внимание к работе.

Глава 1. Аналитический обзор и постановка задачи исследования

Современные тенденции к уменьшению массы машин при улучшении их качества, стремление к наиболее полному использованию механических свойств материалов, экономия материальных ресурсов в условиях все более усиливающейся конкуренции приводят к ужесточению температурно-силовых режимов эксплуатации элементов конструкций, в результате чего все более широко проявляются реологические свойства материалов.

При установлении критериев надежности элементов конструкций полагаются, что для них недопустимым является достижение предельного состояния [90], т.е. недопустимое значение параметра состояния. Недопустимыми могут быть потеря устойчивости, появление трещин, хрупкое или вязкое разрушение, большие деформации (упругие, пластические) и т. д. Для силовых элементов отказами могут быть превышение предела упругости или текучести, хрупкое или вязкое разрушение, накопление усталостных повреждений, появление трещин, механический износ. Под параметром состояния, в зависимости от решаемой задачи, принимаются деформация ползучести $p(t, \sigma)$, коэффициенты интенсивности напряжений $K(t)$ или J -интеграл, длина дефекта (трещины) $l(t)$ или скорость развития трещины $\frac{dl}{dN}(t)$, величина прогиба W в центре плоского днища или защемленной балки и многие другие. Задачи оценки предельного значения параметра состояния в условиях реальной эксплуатации требуют дальнейшего совершенствования и развития методов расчета напряженно-деформированного состояния материалов и элементов конструкций.

Как известно из теории надежности, под отказом понимается частичная или полная утрата таких свойств изделий, которая снижает или приводит к полной потере работоспособности [12]. При этом функция опасности отказов

$\lambda(t)$, определяемая как отношение количества отказов к времени эксплуатации, для многих элементов конструкций имеет характерный вид кривой, представленной на рисунке 1.1. Из графика видно, что весь интервал времени можно условно разбить на три участка. На первом участке функция $\lambda(t)$ имеет повышенные значения, это связано с тем обстоятельством, что в большой партии элементов всегда имеются элементы со скрытыми дефектами, которые выходят из строя вскоре после начала работы. По этой причине первый период называют

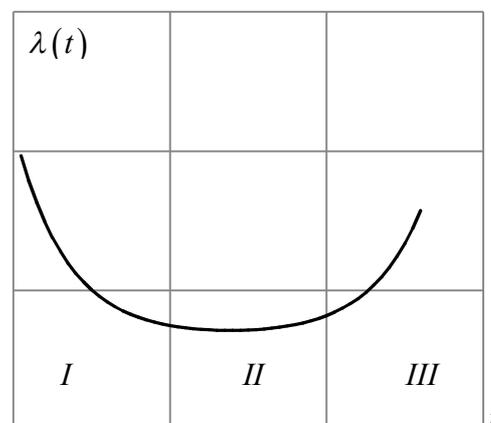


Рис.1.1 Вид функции опасности.

периодом приработки, или периодом «выжигания» дефектных элементов. Второй период называется периодом нормальной работы, характеризуется постоянным (или приближенно постоянным) значением опасности отказа. Последний период – период старения, где необратимые физико-химические и механические процессы приводят к ухудшению качества элемента, его «старению». Как отмечается [12], указанная картина изменения опасности отказа не является универсальной, есть элементы, у которых отсутствует период приработки, есть элементы, которые практически не стареют (за указанное время эксплуатации), однако большинство элементов, как правило, имеет обозначенные периоды в эксплуатации.

Соответствующие периоды, обусловленные отказами составных структур материала и элементов конструкций, наблюдаются во многих явлениях механики: рост усталостных трещин, деформация ползучести, прогиб балок, прогиб в центре плоского днища под действием внутреннего давления и т.д. В качестве примера на рисунке 1.2 изображена кривая ползучести стали 15X2МФА, полученная при температуре 550 °С и значении напряжения $\sigma_0 = 350$ МПа [56] и имеющая все три характерных участка; на рисунке 1.3

изображена зависимость изменения прогиба W в центре плоского днища диаметром $d = 1376$ мм под действием внутреннего давления $q = 0.9$ МПа [69],

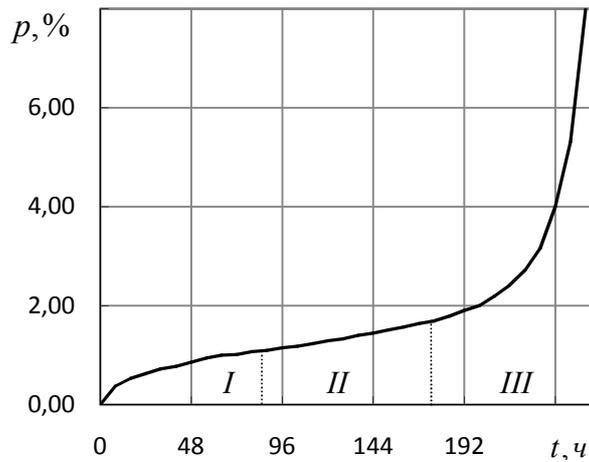


Рис.1.2 Кривая ползучести стали 15X2МФА.

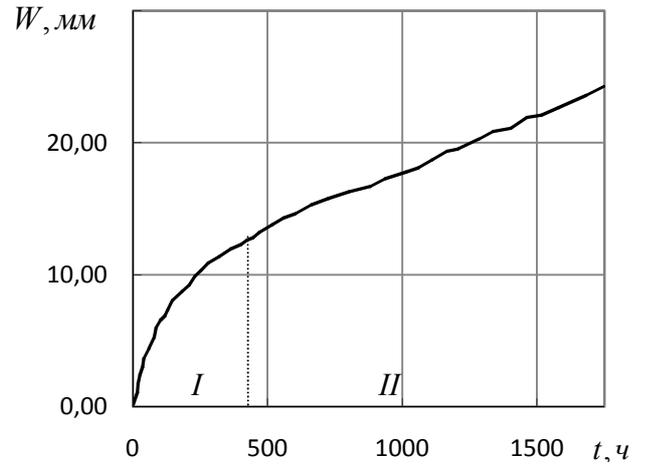


Рис.1.3 Изменение прогиба W в центре плоского днища под действием внутреннего давления $q = 0.9$ МПа .

имеющая в представленном диапазоне времени два из обозначенных периодов эксплуатации; на рисунке 1.4 изображены экспериментальные зависимости величины прогиба образцов (балки) из алюминиевого сплава Д16, размерами $55 \times 2 \times 10$ мм прямоугольного сечения под действием сосредоточенного в центре усилия F_n [10]. Из рисунка видно, что зависимость имеет два из указанных участков.

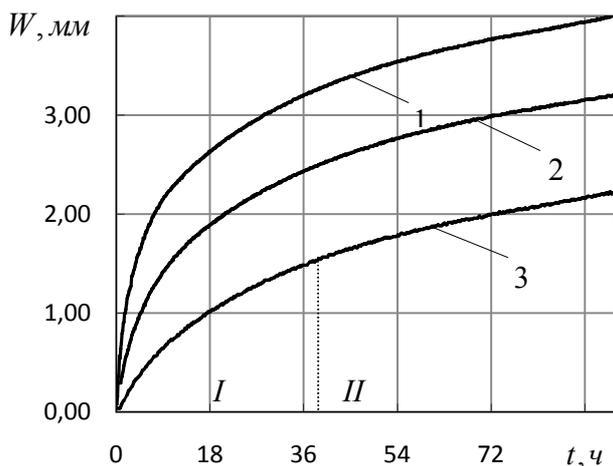


Рис.1.4 Зависимость прогиба от времени образца из сплава Д16 под действием усилия; 1 – 750 Н; 2 – 600 Н; 3 – 500 Н.

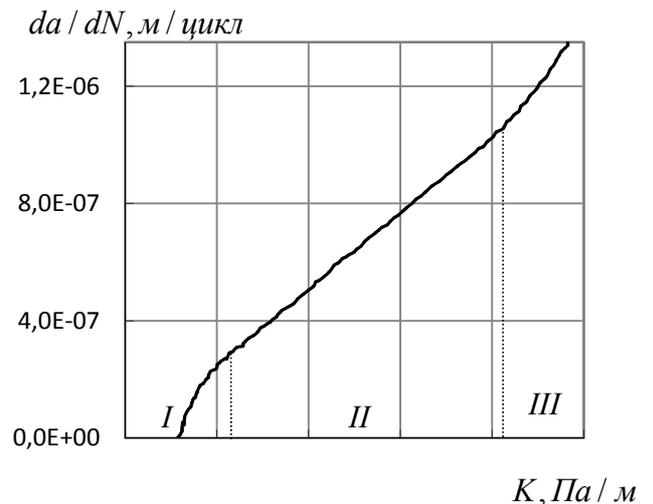


Рис.1.5 Диаграмма роста усталостных трещин.

На рисунке 1.5 изображена зависимость скорости роста трещин в пластине при циклическом нагружении da / dN от коэффициента интенсивности напряжения K [91], имеющая все три указанных участка.

Общность перечисленных явлений позволяет строить математические модели, имеющие единый вид для всех указанных зависимостей. Обзор такого рода математических моделей рассмотрен на примере модели реологического деформирования в условиях ползучести и представлен в параграфе 1.1.

После построения модели следующим этапом математического моделирования является параметрическая идентификация полученной модели. Обзор известных численных методов, применяемых при параметрической идентификации, представлен в параграфе 1.2.

На основе проведенного обзора далее перечисляются недостатки существующих, а также рассматривается перспектива разработки новых численных методов, формулируются научная проблема, цель и задачи диссертации.

1.1. Известные математические модели зависимости реологической деформации от времени

Одним из видов неупругой (необратимой) реологической деформации является деформация ползучести. Математическим описанием закономерностей ползучести занимались многие ученые, в том числе Работнов Ю.Н. [62–65], Качанов Л.М. [38–40], Малинин Н.Н. [52–54], Одинг И.А. [58–59], Самарин Ю.П. [83–85], Радченко В.П. [67–74], Еремин Ю.А. [69], Локощенко А.М. [4, 42–45, 93], Шестериков С.А. [4, 45, 93, 94], Юмашева М.А. [94], Эндрейд Е.Н. (E.N. Andrade), Гарофало Ф. [7] и другие.

В общем случае деформация ползучести p является функцией напряжения σ , времени t , и температуры T [65]:

$$p = f(\sigma, t, T).$$

При математическом описании первой и второй стадий ползучести часто используется предположение о подобии кривых ползучести с разделением

переменных [3, 53,65], при котором деформация ползучести может быть описана следующим образом:

$$p = f_1(t)f_2(\sigma)f_3(T).$$

Как отмечается, для ряда материалов первая стадия ползучести либо вообще отсутствует, либо ей, в силу малости, пренебрегают [72]. Поэтому исследователи в первую очередь направляли свои усилия на поиск зависимости для описания стадии установившейся ползучести. В зависимости от вида функции времени могут использоваться такие законы, как закон Бейли:

$$f_1(t) = Bt^m,$$

где B и m – константы материала; закон Работнова:

$$f_1(t) = \frac{1}{1 + at^b},$$

где a и b – константы материала; закон Фройденталья:

$$f_1(t) = \frac{at}{1 + bt},$$

где a и b – константы материала; закон Мак - Хенри:

$$f_1(t) = a_1[1 - e^{-\alpha_1 t}] + a_2[1 - e^{-\alpha_2 t}],$$

где $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ – параметры материала. Имеются многочисленные попытки установления законов ползучести сразу в пределах первой и второй стадий, к которым относится, например, закон Андраде [78]:

$$f_1(t) = \beta t^\alpha + kt,$$

где β, k, α – константы материала, α обычно равен $\frac{1}{3}$; закон Содерберга [36, 37]:

$$f_1(t) = at + b[1 - e^{-\alpha t}],$$

где a, b, α – константы материала.

Во всех приведенных зависимостях t – время, остальные параметры определяются эмпирическим путем.

Естественным обобщением закона Андраде для описания всей совокупности кривых ползучести при различных значениях напряжения σ является закон:

$$p(t, \sigma) = s(\sigma)t^m + v(\sigma)t,$$

где m – константа материала, $s(\sigma)$, $v(\sigma)$ – функциональные зависимости деформации от напряжения.

Еще одним вариантом описания деформации ползучести в пределах неустановившейся и установившейся стадий является модель в виде системы дифференциальных уравнений [78]:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= A \left[(1+p)\sigma_0 / (1-\omega^r) \right]^n, \quad p(0) = 0, \\ \dot{\omega} &= B \left[(1+p)\sigma_0 / (1-\omega^r) \right]^n, \quad \omega(0) = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где t – время, $p(t)$ – деформация ползучести, $\omega(t)$ – поврежденность, σ_0 – напряжение в образце в начальный момент времени, A , B , n , r – константы материала.

Наиболее распространенные функциональные зависимости деформации от напряжения $f_2(\sigma)$ – это закон Нортона (Бейли) [43]:

$$f_2(\sigma) = B\sigma^m,$$

где B , m – параметры материала; закон Людвикиа [43]:

$$f_2(\sigma) = B e^{\frac{\sigma}{\mu}},$$

где B , μ – параметры материала; закон Надаи [43]:

$$f_2(\sigma) = 2Bsh\left(\frac{\sigma}{\mu}\right),$$

где B , μ – параметры материала; закон Содерберга:

$$f_2(\sigma) = B \left(e^{\frac{\sigma}{\mu}} - 1 \right),$$

где B , μ – параметры материала; закон Одингга [72]:

$$f_2(\sigma) = B \sigma e^{\frac{\sigma}{\mu}},$$

где B , μ – параметры материала.

Функциональная зависимость деформации ползучести от температуры $f_3(T)$ может быть описана законом Аррениуса:

$$f_3(T) = A e^{-\frac{U_0}{RT}},$$

где A – параметр материала, определяемый эмпирическим путем, U_0 – энергия активации, также определяемая эмпирическим путем, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура.

Как отмечается в [72], в более поздних исследованиях ряда авторов предлагается более общий закон:

$$p(t, \sigma) = f_1(t) f_2(\sigma) + f_2(\sigma) t,$$

где функция $f_1(t)$ имеет следующий вид:

$$f_1(t) = \sum_{k=1}^n a_k (1 - e^{-\alpha_k t}).$$

Как показывает обзор научных публикаций, широкое распространение получила реологическая модель неупругого деформирования, предложенная в работах [67, 68, 73]:

$$\varepsilon = e + e^p + p, \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E}, \quad \dot{e}^p = \chi S'(\sigma) \dot{\sigma}, \quad p = u + v + w;$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^s u_k(t), \quad \dot{u}_k(t) = \lambda_k \left[a_k \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right) - u_k(t) \right];$$

$$v(t) = \sum_{k=1}^s v_k(t), \dot{v}_k = \begin{cases} \lambda_k \left[b_k \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right)^n - v_k(t) \right], b_k \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right)^n > v_k(t); \\ 0, b_k \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right)^n \leq v_k(t); \end{cases}$$

$$\dot{w}(t) = c \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_*} \right)^m; \quad (1.2)$$

$$\sigma = \sigma_0 (1 + \omega); \quad (1.3)$$

$$\dot{\omega} = \gamma \sigma \dot{\varepsilon}^p + \alpha \sigma \dot{p}, \quad (1.4)$$

где ε – полная деформация, e и e^p – упругая и пластическая деформация; p – реологическая деформация; u , v , w – вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая составляющие p ; σ_0 и σ – номинальное и истинное напряжения; E – модуль Юнга; λ_k , a_k , b_k , c , n , m – реологические константы материала; σ_* – обезразмеривающий коэффициент, выбирается произвольно; α и γ – параметры материала, контролирующие процессы разупрочнения, ω – параметр поврежденности. Величина $\chi = 1$ при $\sigma(t) > \sigma(\tau)$, ($0 \leq \tau < t$) и $\chi = 0$, если можно указать такой момент τ , когда $\sigma(t) \leq \sigma(\tau)$.

При аналитическом описании кривых ползучести при постоянном напряжении и $e^p = 0$ из соотношений (1.2) – (1.4) можно получить выражение

$$\varepsilon^j = e^j + \sum_{i=1}^s c_i^j (1 - e^{-\lambda_i t}) + d^j t + f^j(t), \quad j = \overline{1, M}, \quad (1.5)$$

где c_i^j , d^j , f^j , e^j зависят от напряжения σ_0^j , M – количество кривых ползучести в серии экспериментов. Слагаемое e^j в (1.5) описывает упругую деформацию, сумма $\sum_{i=1}^s c_i^j (1 - e^{-\lambda_i t})$ – деформацию неустановившегося течения (первую стадию ползучести); слагаемое $d^j t$ – деформацию установившегося течения; $f^j(t)$ – деформацию ускоренной ползучести, величина $c_i = a_i + b_i$. Поскольку в

уравнении (1.5) различные слагаемые описывают различные стадии ползучести, то для определения параметров этих слагаемых необходимо использовать экспериментальные данные, принадлежащие соответствующим стадиям. Отметим также, что законы Содерберга и Мак-Хенри являются частными случаями для выражения (1.5).

Из соотношений (1.2) – (1.4) с учетом отсутствия вязкоупругой и вязкопластической составляющих в деформации ползучести p , вытекают уравнения $\dot{p} = c\sigma^m$, $\sigma = \sigma_0(1 + \omega)$ и $\dot{\omega} = \alpha\sigma\dot{p}$, ($\sigma_0 \geq 0$). Из этой системы дифференциальных уравнений для нулевых начальных условий можно построить временные зависимости деформации ползучести от времени и напряжения:

$$p(t, \sigma_{0j}) = -\frac{1}{\sigma_{0j} m \alpha} \ln(1 - \alpha m c \sigma_{0j}^{m+1} t), \quad j = \overline{1, M}, \quad (1.6)$$

которые могут быть использованы для описания третьей стадии деформации ползучести при различных постоянных значениях σ_{0j} номинального напряжения, а зависимости деформации ползучести от времени и напряжения в пределах всех трех стадий примут вид:

$$p(t, \sigma_{0j}) = \sum_{k=1}^s c_k (1 - e^{-\lambda_k t}) \sigma_{0j}^n - \frac{1}{\sigma_{0j} m \alpha} \ln(1 - \alpha m c \sigma_{0j}^{m+1} t), \quad j = \overline{1, M}. \quad (1.7)$$

В последнее время получили развитие обобщенные реологические модели, позволяющие строить определяющие соотношения типа «обобщенная нагрузка – обобщенное перемещение».

По - видимому, одной из первых работ, где определялась зависимость «обобщенная нагрузка – обобщенное перемещение», является работа Н.Н. Малинина [55], в которой установлена связь между величиной максимального прогиба алюминиевых балок при чистом изгибе Y_{\max} , изгибающим моментом M и временем t на основании серии из четырех кривых ползучести в координатах $Y_{\max} - t$ при $M = \text{const}$.

В исследованиях Ю.Н. Работнова и С.Т. Милейко [64], О.В. Сорокина и Ю.П. Самарина [88], И.А. Одинга и других [59] приводится уже операторная связь $k(t) = AM(t)$, где $k(t)$ – кривизна, для балок из металлов. Аналогичная зависимость кривизны (прогиба) от момента для балок из полимеров рассматривалась в работах Г.И. Брызгалина [5] и В.Ф. Яценко [95]. В монографии С.С. Вялова, Ю.К. Зарецкого и др. [6] выявлены зависимости между радиальным давлением P и деформациями защемленного ледопородного цилиндра на основе опытов при различных значениях $P = \text{const}$, в результате установлена зависимость между приложенной нагрузкой и полученными деформациями цилиндра, такими как: радиальное смещение на внутреннем и внешнем контурах; выпучивание дна цилиндра, отнесенное к длине цилиндра; относительное изменение площади выработки, суммарно характеризующее деформируемость цилиндра.

Построению обобщенных моделей макромеханики конструкций посвящены также следующие работы: Е.Е. Елисеевой [16], Л.В. Кайдаловой [34], Л.А. Муратовой [57], Ю.А. Еремина и В.П. Радченко [17, 18].

Так в [34] при решении соответствующей краевой задачи при квазистационарном нагружении получена зависимость «крутящий момент – угол закручивания» при кручении толстостенных труб, в [57] – «радиальное перемещение – количество оборотов» для диска газотурбинного двигателя, в [16] – «радиальное перемещение – внутреннее давление» для толстостенной трубы под действием внутреннего давления, в [17, 18] – «изгибающий момент – кривизна балки» для чистого изгиба балки и «прогиб – перерезывающая сила» для статически определимых и неопределимых балок.

Дальнейшее развитие макромоделей конструкций прослеживается в работах Ю.П. Самарина и Я.М. Клебанова [82], Я.М. Клебанова и А.Н. Давыдова [41], Л.С. Рыбакова [81].

Как отмечается в [69], математическая модель (1.2) – (1.4), построенная для случая одноосного напряженного состояния, может быть обобщена так же и для сложного напряженного состояния элементов конструкции произвольной формы. В [69] также отмечается что при определенном выборе выходных характеристик для конструктивного элемента (деформации, перемещения, прогибы и т.д.) сложность конструкции не играет роль, будь то одноосный образец, балка при изгибе, стержень при кручении, толстостенная труба под давлением и т.д. По этому при построении модели для элемента конструкций можно использовать структуру модели (1.2) – (1.4) для одноосного растягиваемого образца [69].

Таким образом, как можно увидеть из приведенного обзора, математическое описание реологического деформирования материалов и элементов конструкций достаточно полное. После выбора модели следующими шагами являются выбор критерия близости модели реальным экспериментальным данным, основанного на специфике исследуемой задачи, и определение параметров модели, оптимальных с точки зрения выбранного критерия [13]. Описание известных численных методов, применяемых при определении параметров моделей реологического деформирования, представлено в следующем параграфе.

1.2. Описание и анализ эффективности известных численных методов, применяемых при определении параметров моделей реологического деформирования

В развитие методов расчета при исследовании реологического деформирования значительный вклад внесли отечественные и зарубежные ученые Работнов Ю. Н. [65], Качанов Л. М. [38], Малинин Н. Н. [54], Одинг И.А., Самарин Ю. П. [85], Радченко В. П. [73], Еремин Ю.А., Локощенко А.М., Шестериков С.А. и другие. В данном параграфе приводится описание из-

вестных численных методов, применяемых при параметрической идентификации моделей реологического деформирования.

Как следует из выражения (1.7), зависимость деформации ползучести от времени при различных значениях номинального напряжения σ_{0j} для первой стадии ползучести примет вид:

$$p(t, \sigma_{0j}) = \sum_{k=1}^s c_k (1 - e^{-\lambda_k t}) \sigma_{0j}^n, c_k = a_k + b_k, j = \overline{1, M}. \quad (1.8)$$

Для определения параметров в зависимости (1.8) используется метод последовательного выделения экспоненциальных слагаемых [85], с помощью которого вначале определяются параметры для отдельной кривой вида

$$p(t) = \sum_{k=1}^s c_k (1 - e^{-\lambda_k t}). \quad (1.9)$$

Метод основан на том, что достаточно длинные дуги кривой ползучести могут быть описаны выражением вида

$$h_k + c_k [1 - e^{-\lambda_k t}]. \quad (1.10)$$

На первом шаге данного метода выбирается отрезок времени $\left[\frac{\tau_1}{4}, \tau_1 \right]$, где $\tau_1 = T_0$ – максимальное время наблюдения за деформацией на стадии неустановившейся ползучести, а при наличии участка установившейся ползучести в качестве τ_1 принимается момент времени, когда аппроксимирующая функция (1.9) близка к своему асимптотическому значению, т.е. τ_1 – граница между первой и второй стадиями.

При $t \in \left[\frac{\tau_1}{4}, \tau_1 \right]$ в соответствии с выражением (1.10)

$$p(t) = h_1 + c_1 [1 - e^{-\lambda_1 t}] \quad (1.11)$$

и с помощью измеренных значений $p\left(\frac{\tau_1}{4}\right)$, $p\left(\frac{\tau_1}{2}\right)$, $p(\tau_1)$ составляется система уравнений:

$$\begin{cases} p\left(\frac{\tau_1}{4}\right) = h_1 + c_1 \left[1 - e^{-\lambda_1 \frac{\tau_1}{4}}\right], \\ p\left(\frac{\tau_1}{2}\right) = h_1 + c_1 \left[1 - e^{-\lambda_1 \frac{\tau_1}{2}}\right], \\ p(\tau_1) = h_1 + c_1 \left[1 - e^{-\lambda_1 \tau_1}\right], \end{cases}$$

и последовательно вычисляются все параметры для функции (1.11):

$$\gamma = \frac{p(\tau_1) - p\left(\frac{\tau_1}{2}\right)}{p\left(\frac{\tau_1}{2}\right) - p\left(\frac{\tau_1}{4}\right)}, \quad \beta = \sqrt{\gamma + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}, \quad \lambda_1 = -\frac{4}{\tau_1} \ln \beta_1, \quad c_1 = \frac{p\left(\frac{\tau_1}{2}\right) - p\left(\frac{\tau_1}{4}\right)}{\beta_1(1 - \beta_1)},$$

$h_1 = p(\tau_1) - c_1 \left[1 - e^{-\lambda_1 \tau_1}\right]$. Для вычисления параметров λ_2 и c_2 образуется разность

$$\hat{p}_1(t) = h_1 + c_1 \left[1 - e^{-\lambda_1 t}\right] - p(t), \quad (1.12)$$

которая в силу выражения (1.9) должна аппроксимироваться функцией

$$p_1(t) = \sum_{k=2}^s c_k e^{-\lambda_k t}. \quad (1.13)$$

При $t \geq \frac{\tau_1}{4}$ значения функции (1.12) практически равны нулю. Поэтому

можно выбирать значение времени $\tau_2 < \frac{\tau_1}{4}$ так, чтобы величина $\hat{p}_1(\tau_2)$ была близкой к нулю (τ_2 целесообразно выбирать как можно меньше).

Аналогично выражению (1.11) при $t \in \left[\frac{\tau_2}{2}, \tau_2\right]$ вместо функции (1.13)

принимаем

$$p_1(t) = c_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad (1.14)$$

затем с помощью измеренных значений $\hat{p}_1\left(\frac{\tau_2}{2}\right)$, $\hat{p}_1(\tau_2)$ составляется система

уравнений относительно неизвестных параметров c_2, λ_2 :

$$\begin{cases} \hat{p}_1\left(\frac{\tau_2}{2}\right) = c_2 e^{-\lambda_2 \frac{\tau_2}{2}}, \\ \hat{p}_1(\tau_2) = c_2 e^{-\lambda_2 \tau_2}, \end{cases}$$

решение которой можно найти по формулам $\beta_2 = \frac{\hat{p}_1(\tau_2)}{\hat{p}_1\left(\frac{\tau_2}{2}\right)}$, $\lambda_2 = -\frac{2}{\tau_2} \ln \beta_2$,

$$c_2 = \frac{\hat{p}_1\left(\frac{\tau_2}{2}\right)}{\beta_2}, \text{ и вычисляется остаток}$$

$$\hat{p}_2(t) = \hat{p}_1(t) - c_2 e^{-\lambda_2 t}. \quad (1.15)$$

Последующие значения λ_k и c_k вычисляются аналогично λ_2 и c_2 , вся процедура заканчивается на s - ом этапе, как только функция $\hat{p}_s(t)$ станет пренебрежительно мала для всех $t \geq 0$.

Имея параметры, определенные для отдельной кривой ползучести, и используя упрощающую гипотезу о подобии кривых ползучести, определение параметров для всей совокупности реализаций при различных значениях номинального напряжения σ_0 производится по методу наименьших квадратов.

К достоинствам данного метода стоит отнести простоту его реализации, к недостаткам же – его чувствительность к нерегулярностям аппроксимирующей кривой, неоднозначность выбора времени τ_k , к тому же метод является детерминированным, и в нем отсутствует статистическая обработка результатов эксперимента.

В [78] для определения констант материала в законе Андраде

$$f_1(t) = \beta t^\alpha + kt$$

предлагается метод последовательных приближений, в случае, если величина α считается известной (обычно $\alpha = \frac{1}{3}$). В соответствии с методом, необхо-

димом выбрать время t_1 и t_2 , причем время t_1 рекомендуется брать соответствующим середине или концу первой стадии ползучести, а время t_2 рекомендуется брать максимальным, но не выходящим за пределы второй стадии ползучести, т. е. t_2 – граница между второй и третьей стадиями (рисунок 1.6). Тогда первое приближение для констант имеет вид:

$$k_1 = \frac{\Delta p}{t_2}, \quad \beta_1 = \frac{p_1 - k_1 t_1}{t_1^{\frac{1}{3}}},$$

а второе и последующие:

$$k_i = \frac{p_1 - \beta_{i-1} t_2^{\frac{1}{3}}}{t_2}, \quad \beta_i = \frac{p_1 - k_i t_1}{t_1^{\frac{1}{3}}}, \quad i = 2, 3, \dots$$

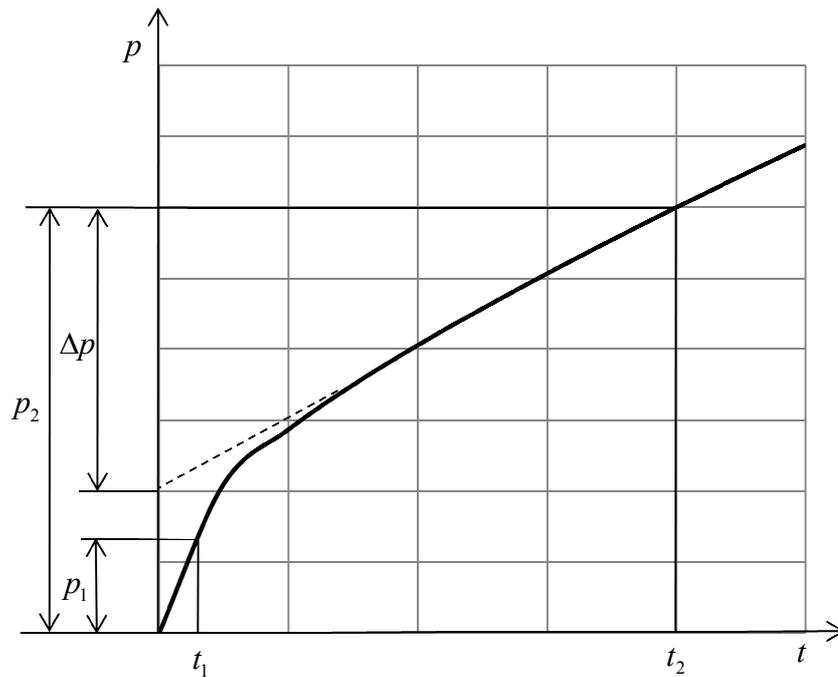


Рис.1.6 К определению констант в законе Андраде методом последовательных приближений.

Если процесс оказывается расходящимся, то следует подобрать другой показатель степени α : $\alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$. Если же величина α не известна, определение констант происходит на основе минимизации суммы квадратов разно-

стей $S = \sum_{i=1}^m (p_i - \tilde{p}_i)^2$, где p_i – экспериментальные значения деформаций ползучести в точке $t = t_i$ эксперимента, \tilde{p}_i – модельное значение деформации ползучести, рассчитанной по аппроксимационной формуле, m – число точек эксперимента, может быть любым, но не менее 2 –х.

Система уравнений для определения α , β и k имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^m 2(p_i - \beta t_i^\alpha - kt_i)(-t_i^\alpha) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial k} = \sum_{i=1}^m 2(p_i - \beta t_i^\alpha - kt_i)(-t_i) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^m 2(p_i - \beta t_i^\alpha - kt_i)(-\beta t_i^{\alpha-1}) \ln t_i = 0. \end{cases}$$

Для определения констант в модели (1.1) вида:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= A \left[(1+p) \sigma_0 / (1-\omega^r) \right]^n, \quad p(0) = 0, \\ \dot{\omega} &= B \left[(1+p) \sigma_0 / (1-\omega^r) \right]^n, \quad \omega(0) = 0, \end{aligned}$$

где A , B , n , r – константы материала, предлагается следующая методика [78]. При определении постоянных, входящих в модель, используются характеристики N кривых ползучести, полученных при различных напряжениях $\sigma_0 = \text{const}$. Каждой экспериментальной кривой ползучести ставится в соответствие 4 числа: σ_0 – напряжение, \dot{p}_0 – скорость установившейся ползучести, t^* – время разрушения и p^* – деформация ползучести в момент разрушения. Минимальное количество исходных данных – числа σ_0 , \dot{p}_0 , t^* , p^* , соответствующие каждой из двух кривых ползучести при различных значениях $\sigma_0 = \text{const}$, т. е. две четверки чисел.

Константы установившейся ползучести A и n вычисляются с помощью метода наименьших квадратов из решения системы уравнений:

$$n \sum_{i=1}^N (\lg \sigma_0)_i + N \lg A = \sum_{i=1}^N (\lg \dot{p}_0)_i,$$

$$n \sum_{i=1}^N (\lg \sigma_0)_i^2 + \lg A \sum_{i=1}^N (\lg \sigma_0)_i = \sum_{i=1}^N (\lg \sigma_0)_i (\lg \dot{p}_0)_i.$$

Константа B вычисляется по формуле:

$$B = \frac{A}{p_{cp}^*},$$

где $p_{cp}^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i^*$ – среднее арифметическое деформаций разрушения p^* при всех N испытаний.

Константа r определяется подбором, так, чтобы имело место следующее равенство:

$$(\sigma_0^n t^*)_{cp} = \frac{1}{A} \int_0^{A/B} \left[\frac{1 - \left(\frac{B}{A} p \right)^r}{p + 1} \right]^n dp,$$

где $(\sigma_0^n t^*)_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_0^n t^*)_i$ – среднее арифметическое величин $(\sigma_0^n t^*)$, соответствующих всем испытаниям.

Для оценивания параметров нелинейных систем имеются несколько распространенных приемов [15, 14, 61, 92]: 1) метод наискорейшего спуска, 2) метод Ньютона, 3) метод линеаризации, 4) метод Левенберга-Марквардта, 5) нелинейный метод наименьших квадратов. Данные методы минимизируют произвольную функцию $f(x)$, определенную в n -мерном евклидовом пространстве E^n . При этом используется итерационный процесс типа (кроме нелинейного метода наименьших квадратов)

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k,$$

где x – n -мерный вектор в евклидовом пространстве, p_k – вектор, определяющий направление движения из точки x_k , α_k – числовой множитель, вели-

чина которого определяет величину шага в направлении p_k . Процесс будет определен, если будут указаны способы построения вектора p_k и вычисления величины α_k на каждой итерации. Выбирая различными способами направление вектора p_k и величину α_k можно получить различные алгоритмы минимизации.

Метод наискорейшего спуска заключается в том, что проще всего выбрать направление p_k , удовлетворяющее условию $f'(x_k, p_k) < 0$, т. е. являющееся направлением спуска $f(x)$, полагая $p_k = -f'(x_k)$. Тогда итерационный процесс

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k f'(x_k), \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

получающийся при таком выборе направления движения называется методом наискорейшего спуска или градиентным методом. Множитель α_k выбирается исходя из следующих соображений.

1. Выбирается некоторое произвольное значение α (одно и то же на всех итерациях) и определяется точка $x = x_k - \alpha f'(x_k)$.

2. Вычисляется $f(x) = f(x_k - \alpha f'(x_k))$.

3. Производится проверка неравенства

$$f(x) - f(x_k) \leq \varepsilon \alpha (f'(x_k), p_k),$$

где $0 < \varepsilon < 1$ – произвольно выбранная константа, одна и та же для всех итераций.

4. Если указанное неравенство выполняется, то значение α берется в качестве искомого: $\alpha_k = \alpha$. Если же неравенство не выполнится, производится дробление α путем умножения на произвольное число, меньшее 1, до тех пор, пока неравенство не окажется справедливым. Метод наискорейшего спуска является широко распространенным благодаря своей простоте, однако на практике могут встретиться такие ситуации, когда первые итерации пока-

зывают хорошую сходимость, после чего происходит резкое замедление сходимости, что относят к недостаткам метода.

Метод Ньютона основывается на замене исходной функции $f(x)$ на ее квадратичную аппроксимацию

$$\varphi(x) = f(y) + (f'(y), x - y) + \frac{1}{2}(f''(y)(x - y), x - y)$$

в окрестности некоторой точки y [61]. Квадратичная функция $\varphi(x)$ в малой окрестности точки y аппроксимирует функцию гораздо более точно по сравнению с линейной функцией, используемой в градиентном методе. Поэтому естественно ожидать, по крайней мере если точка y находится в достаточно малой окрестности искомого решения x_* , что движение из точки y в направлении $p = -(f''(y))^{-1} f'(y)$ позволит достичь более существенного убывания функции и получить более точное приближение к решению, чем движение в направлении $-f'(y)$, используемом в градиентном методе. Основываясь на проведенных рассуждениях, можно предположить, что итерационный процесс для построения последовательных приближений к решению задачи минимизации функции $f(x)$:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k (f''(x_k))^{-1} f'(x_k), \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

окажется более эффективным по сравнению с методом наискорейшего спуска и скорость сходимости будет выше.

Если элементы матрицы $(f''(x_k))^{-1}$ обозначить через $\varphi_{ij}(x_k)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, i — индекс строки, то итерационный процесс в координатной форме примет вид:

$$x_{k+1}^i = x_k^i - \alpha_k \sum_{j=1}^n \varphi_{ij} \frac{\partial f(x_k)}{\partial x^j}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Также итерационный процесс можно представить в следующем виде:

$$f''(x_k) p_k = -f'(x_k), \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k,$$

или в координатной форме

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_k)}{\partial x^i \partial x^j} p_k^j = -\frac{\partial f(x_k)}{\partial x^i},$$

$$x_{k+1}^i = x_k^i + \alpha_k p_k^i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Следовательно, для определения вектора p_k можно решать систему линейных уравнений вместо того, что бы обращать матрицу $f''(x_k)$. Метод Ньютона требует, чтобы функция $f(x)$ была строго выпуклой и дважды непрерывно дифференцируемой [61]. Сходимость метода гарантируется лишь при наличии достаточно хорошего начального приближения (т. е. достаточно близкого к решению задачи)

Метод линейризации (или метод разложения в ряд Тейлора) состоит в следующем. Исходную модель разлагают в ряд Тейлора в окрестности некоторого начального вектора искомых параметров, ограничиваясь при этом производными первого порядка. Многократно применяя к полученной линейризованной модели линейный метод наименьших квадратов, получают уточненные оценки параметров, которые, в свою очередь, служат исходными для последующего уточнения. Этот итеративный процесс продолжается до тех пор, пока не сойдется. Однако, как отмечается [15], процедура линейризации имеет ряд недостатков: 1) процедура может сходиться очень медленно; 2) могут происходить периодические увеличения и уменьшения суммы квадратов ошибок; 3) процедура линейризации может не сходиться, так что сумма квадратов ошибок от итерации к итерации будет увеличиваться.

Метод Левенберга-Марквардта [8, 14, 15] является дальнейшим развитием метода Ньютона, и используется для оптимизации параметров нелинейных регрессионных моделей вида $f(w, x)$, где w – вектор параметров, x – n -мерный вектор в евклидовом пространстве. В методе происходит поиск тако-

го вектора параметров w , при котором функция ошибки $Q = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(w, x_i))^2$ имеет свой локальный минимум. Вначале задается начальный вектор параметров w , который далее итерационно заменяется на вектор $w + \Delta w$, где для оценки приращения Δw используется линейное приближение функции

$$f(w + \Delta w, x) - f(w, x) \approx J \Delta w,$$

J – якобиан функции $f(w, x)$ в точке w . Чтобы найти оценку приращения Δw , необходимо решить систему уравнений

$$\Delta w = (J^T J)^{-1} J^T (y - f(w)).$$

Если матрица $J^T J$ близка к вырожденной, в методе Левенберга-Марквардта предлагается "подправлять" данную матрицу путем прибавления к ее диагональным элементам некоторой величины λ , назначаемой на каждой итерации алгоритма, таким образом матрица становится положительно определенной и обратимой. Критерием останова алгоритма является либо достижение функции ошибки Q , либо достижение приращения Δw необходимой заданной величины.

Нелинейный метод наименьших квадратов минимизирует сумму квадратов отклонений

$$Q = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f_i(\alpha))^2.$$

В результате дифференцирования Q по параметрам α получают систему уравнений, которые являются нелинейными. Решение этой системы в общем случае достаточно сложно, и обычно не проще непосредственной минимизации Q .

Как видно из приведенного обзора, численные методы оценки параметров нелинейных моделей реологического деформирования можно разделить

на две группы: первая группа – это расчетно-графические методы, требующие минимального количества экспериментальных кривых. К достоинствам данных методов следует отнести простоту их реализации, к недостаткам – неоднозначность фиксации исходных значений на экспериментальной кривой, а также отсутствие статистической обработки результатов экспериментов, отсутствие оценки погрешности результатов вычислений; вторая группа – итерационные численные методы, использующие на каждой итерации некоторое линейное приближение исходной модели. К основным недостаткам данных методов следует отнести неопределенность выбора начального приближения в итерационной процедуре, а также медленную сходимость итерационных процедур, либо даже отсутствие сходимости.

1.3. Перспективы решения задачи повышения адекватности и точности вычисления параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений

Задача нелинейного оценивания приводит к системе нелинейных уравнений, и в общем случае решение полученной системы достаточно сложно [92]. Итеративные методы решения, такие как метод линеаризации и метод наискорейшего спуска также имеют ряд недостатков, связанных со сходимостью и выбором начального приближения. Принципиально иной подход, лишенный указанных недостатков, предлагается в работах В. Е. Зотеева [20–23]. В основе подхода лежит переход от нелинейной математической модели к линейно-параметрической дискретной модели, которая в форме разностного уравнения описывает последовательность значений нелинейной зависимости, при этом получают соотношения между коэффициентами разностного уравнения и параметрами нелинейной математической модели. В свою очередь, вычисление оценок коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели предлагается с помощью итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания, при этом практически решается проблема выбора начального

приближения при достаточно высокой скорости сходимости итераций [80]. К достоинствам такого подхода следует отнести его универсальность – в каждом случае оценивания параметров нелинейной зависимости необходимо построить разностное уравнение и описать матрицу преобразования для вектора остатков обобщенной регрессионной модели. Формирование обобщенной регрессионной модели происходит на основе разностного уравнения, путем ввода в разностное уравнение помехи. При этом исходят из следующих предположений:

- 1) помеха является случайной величиной;
- 2) математическое ожидание помехи равно нулю;
- 3) дисперсия помехи постоянна;
- 4) последовательные значения помехи не зависят друг от друга.

В практике данные предположения встречаются очень часто [1].

Целью диссертационной работы является построение и исследование новых дискретных математических моделей на основе разностных уравнений, в рекуррентной форме связывающих последовательные значения реологической деформации на различных стадиях, а также разработка на их основе численных методов и программного обеспечения для определения параметров соответствующих моделей.

Для достижения поставленной цели выделяются следующие основные этапы в разработке новых методов определения параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений:

1. Формирование разностных уравнений, в рекуррентной форме связывающих последовательные значения зависимости, выражаемой выбранной моделью. На данном этапе осуществляется принципиальный переход от нелинейной исследуемой модели к разностным уравнениям, а также выводятся соотношения между параметрами исходной модели и коэффициентами разностного уравнения.

2. Представление разностных уравнений в форме обобщенных регрессионных моделей. Здесь осуществляется ввод в разностные уравнения аддитивной случайной величины, моделирующей естественный разброс данных, описываются матрицы линейного преобразования вектора случайной помехи в результатах наблюдений.

3. Оценивание коэффициентов обобщенной регрессионной модели. На данном этапе происходит разработка итерационной процедуры среднеквадратичного уточнения коэффициентов.

4. Вычисление оценок параметров исходной модели на основе коэффициентов обобщенной регрессионной модели.

5. Оценка погрешности результатов вычислений параметров модели.

6. Разработка программного обеспечения, реализующего алгоритмы вычислений параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений.

В данной диссертационной работе в качестве основной рассматривается модель неупругого деформирования в случае одноосного напряженно-деформированного состояния (1.2) – (1.4), данная модель получила широкое распространение при исследовании явления ползучести [67, 68, 69, 72, 73, 75, 83]. Также, как показано в работе [69], указанная модель может быть легко обобщена на случай сложного напряженно-деформированного состояния, в том числе для элемента конструкции произвольной формы, и подходит не только для описания процесса ползучести, но и для многих других процессов эволюционного накопления необратимой деформации и поврежденности.

1.4. Выводы по главе 1

1. Проведены аналитический обзор и анализ эффективности известных методов определения параметров нелинейных функциональных зависимостей, применяемых в задаче оценивания параметров моделей реологического деформирования.

2. Сформулированы основные этапы в разработке новых численных методов определения параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений.

3. Сделан выбор основной модели реологического деформирования, позволяющей получать описание эволюционного процесса накопления необратимой деформации и поврежденности.

Глава 2. Построение математических моделей реологического деформирования в форме разностных уравнений

В данной главе производится формирование разностных уравнений, в рекуррентной форме связывающих последовательные значения моделей реологического деформирования. Материал данной главы излагается в соответствии с работами соискателя [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 46, 47, 48, 49, 50, 51].

2.1. Блок-схема разрабатываемого численного метода

Разрабатываемый численный метод состоит из нескольких этапов, описанных в параграфе 1.3. Блок-схема реализации численного метода представлена на рисунке 2.1.

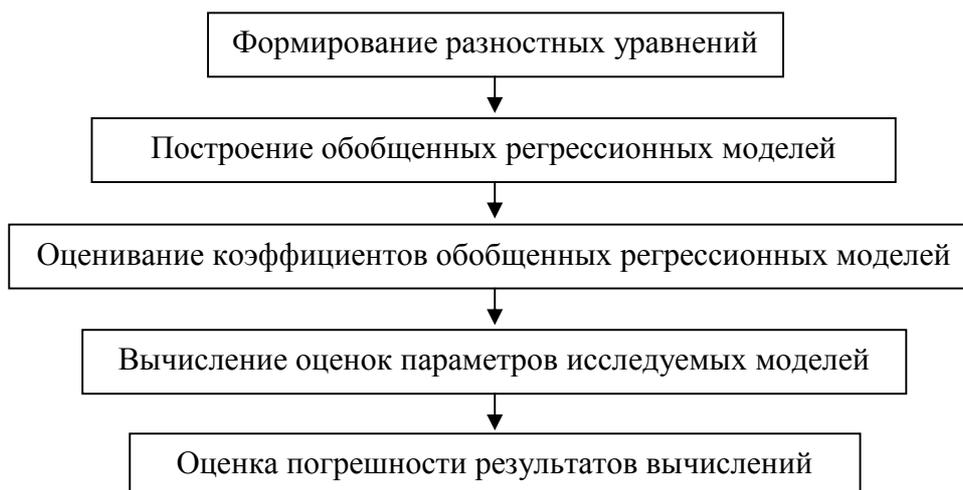


Рис.2.1 Блок-схема разрабатываемого численного метода

Формирование разностных уравнений является одним из важнейших этапов разрабатываемого численного метода, и основано на использовании системы линейно-независимых функций, что позволяет свести построение разностных уравнений к задаче решения систем линейных алгебраических уравнений. Возможность такого подхода обоснована и доказана в работе [22], и неоднократно апробирована в работах [20, 21, 23].

В первой главе были описаны ряд известных моделей реологического деформирования, и сделан выбор модели (1.2) – (1.4) как основной рабочей модели, из которой можно получить описание эволюционного процесса накопления деформации для каждой из трех стадий разрушения.

В дальнейшем, для простоты изложения, все выкладки будут выполнены на примере модели (1.2) – (1.4) применительно к деформации ползучести, апробация разработанных алгоритмов и процедур при обработке экспериментальных данных других процессов реологического деформирования будет приведена в главе 4.

Применяя подход, представленный в работах [20–23], построим разностные уравнения в рекуррентной форме для каждой из стадий реологической деформации.

2.2. Формирование разностных уравнений для описания первой стадии (неустановившейся) ползучести

В соответствии с (1.8) стадия неустановившейся ползучести при постоянном напряжении может быть описана в виде

$$p(t, \sigma_{0j}) = \sum_{k=1}^s c_k (1 - e^{-\alpha_k t}) \sigma_{0j}^n, j = \overline{1, M}, \quad (2.1)$$

где c_k , α_k , n – параметры материала, $\sigma_{0j} = \text{const}$ – значения номинального напряжения, M – количество кривых ползучести в серии экспериментов. Количество экспоненциальных слагаемых s заранее неизвестно. Как показывает практика (например, [85]), для описания неустановившейся ползучести бывает достаточно двух, иногда трех, экспоненциальных слагаемых.

Как отмечалось ранее, в параграфе 1.2, определение параметров в модели (2.1) можно начать с решения задачи оценки параметров для отдельной кривой ползучести. В этом случае включим величину σ_{0j}^n в параметр c_k , $k = \overline{1, s}$, или, другими словами, положив в (2.1) $\sigma_{0j}^n = 1$, можно рассматривать кривую ползучести при постоянном напряжении, описываемую выражением

$$p(t) = \sum_{k=1}^s c_k (1 - e^{-\alpha_k t}). \quad (2.2)$$

Построим разностное уравнение, в рекуррентной форме описывающее последовательность дискретных значений деформации ползучести, описываемую выражением (2.2). Рассмотрим несколько случаев для разного количества экспонент в (2.2)

1. Случай одной экспоненты. Из выражения (2.2) в случае одного экспоненциального слагаемого ($s=1$, $c_k = c$, $\alpha_k = \alpha$) имеем:

$$p(t) = c(1 - e^{-\alpha t}). \quad (2.3)$$

При равномерной с периодом τ дискретизации непрерывной функции (2.3) получаем ее дискретный аналог:

$$p_k = c(1 - e^{-\alpha \tau k}), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2.4)$$

где N – объем выборки данных.

Подставляя в выражение (2.4) вместо k значение $k-1$, получаем $p_{k-1} = c - ce^{-\alpha \tau k} e^{\lambda \tau}$, отсюда получим выражение для функции $-ce^{-\alpha \tau k} = (p_{k-1} - c)e^{-\alpha \tau}$, подставляя которое в (2.4), получим $p_k = p_{k-1}e^{-\alpha \tau} + c - ce^{-\alpha \tau}$. Таким образом, получаем разностное уравнение вида

$$\begin{cases} p_0 = 0, \\ p_k = p_{k-1}\lambda_1 + \lambda_2, k = \overline{1, N-1}, \end{cases} \quad (2.5)$$

где

$$\lambda_1 = e^{-\alpha \tau}, \quad \lambda_2 = c(1 - e^{-\alpha \tau}). \quad (2.6)$$

2. Случай двух экспонент. Из выражения (2.2) в случае двух экспоненциальных слагаемых ($s=2$) имеем:

$$p(t) = c_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 t}). \quad (2.7)$$

При равномерной с периодом τ дискретизации непрерывной функции (2.7) получаем ее дискретный аналог:

$$p_k = c_1(1 - e^{-\alpha_1 \tau k}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 \tau k}), k = \overline{0, N-1}, \quad (2.8)$$

или

$$p_k = c_s - \sum_{i=1}^2 c_i e^{-\alpha_i \tau k}, k = \overline{0, N-1}, \quad (2.9)$$

где $c_s = \sum_{i=1}^2 c_i$, N – объем выборки данных.

Подставляя в выражение (2.8) вместо k значения $k-1$ и $k-2$, получаем систему уравнений, линейную относительно функций $-c_i e^{-\alpha_i \tau k}$ ($i = \overline{1, 2}$):

$$\begin{cases} p_{k-1} = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau k} \mu_1^{-1} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau k} \mu_2^{-1} \\ p_{k-2} = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau k} \mu_1^{-2} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau k} \mu_2^{-2} \end{cases} \quad (2.10)$$

где $c_s = \sum_{i=1}^2 c_i$, $\mu_i = \exp(-\alpha_i \tau)$, $i = 1, 2$. Решая данную систему относительно

неизвестных функций $-c_i e^{-\alpha_i \tau k}$, $i = 1, 2$, и подставляя полученное в исходное соотношение (2.8), получим:

$$p_k = (\mu_1 + \mu_2) p_{k-1} - \mu_1 \mu_2 p_{k-2} + c_s (\mu_1 \mu_2 - \mu_1 - \mu_2 + 1). \quad (2.11)$$

Таким образом, получаем разностное уравнение вида

$$\begin{cases} p_0 = 0, \\ p_1 = \lambda_4, \\ p_k = \lambda_1 p_{k-1} + \lambda_2 p_{k-2} + \lambda_3, k = \overline{2, N-1}, \end{cases} \quad (2.12)$$

связывающее последовательные значения деформации ползучести, описываемые выражением (2.7), где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1 + \mu_2, \lambda_2 = -\mu_1 \mu_2, \lambda_3 = c_s (\mu_1 \mu_2 - \mu_1 - \mu_2 + 1), \\ \lambda_4 &= c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau}, c_s = \sum_{i=1}^2 c_i, \mu_i = \exp(-\alpha_i \tau), i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

3. Случай трех экспонент. Построим разностное уравнение, связывающее последовательные значения деформации ползучести, описываемые выражением (2.2), в случае трех экспоненциальных слагаемых.

Из выражения (2.2) в случае трех экспоненциальных слагаемых ($s=3$) имеем:

$$p(t) = c_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 t}) + c_3(1 - e^{-\alpha_3 t}). \quad (2.14)$$

При равномерной с периодом τ дискретизации функции (2.14) имеем ее дискретный аналог:

$$p_k = c_s - \sum_{i=1}^3 c_i e^{-\alpha_i \tau k}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2.15)$$

где $c_s = \sum_{i=1}^3 c_i$, N – объем выборки данных.

Подставляя в выражение (2.15) вместо k значения $k-1$, $k-2$ и $k-3$, соответственно, получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} p_{k-1} = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau k} \mu_1^{-1} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau k} \mu_2^{-1} - c_3 e^{-\alpha_3 \tau k} \mu_3^{-1} \\ p_{k-2} = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau k} \mu_1^{-2} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau k} \mu_2^{-2} - c_3 e^{-\alpha_3 \tau k} \mu_3^{-2} \\ p_{k-3} = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau k} \mu_1^{-3} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau k} \mu_2^{-3} - c_3 e^{-\alpha_3 \tau k} \mu_3^{-3}, \end{cases} \quad (2.16)$$

где $c_s = \sum_{i=1}^3 c_i$, $\mu_i = \exp(-\alpha_i \tau)$, $i = \overline{1, 3}$. Решая данную систему, линейную относительно функций $-c_i e^{-\alpha_i \tau k}$, $i = \overline{1, 3}$, и подставляя результат в исходное соотношение (2.15), получим:

$$p_k = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)p_{k-1} + (-\mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_3 - \mu_2\mu_3)p_{k-2} + \mu_1\mu_2\mu_3 p_{k-3} + c_s(\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 - \mu_1\mu_2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + 1). \quad (2.17)$$

Таким образом, получаем разностное уравнение, в рекуррентной форме связывающее последовательность значений деформации ползучести, описываемую выражением (2.14) вида:

$$\begin{cases} p_0 = 0, \\ p_1 = \lambda_5, \\ p_2 = \lambda_6, \\ p_k = \lambda_1 p_{k-1} + \lambda_2 p_{k-2} + \lambda_3 p_{k-3} + \lambda_4, \quad k = \overline{3, N-1}, \end{cases} \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad \lambda_2 = -\mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_3 - \mu_2\mu_3, \quad \lambda_3 = \mu_1\mu_2\mu_3, \\
\lambda_4 &= c_s(-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + 1), \quad \lambda_5 = c_s - c_1e^{-\alpha_1\tau} - c_2e^{-\alpha_2\tau} - c_3e^{-\alpha_3\tau}, \\
\lambda_6 &= c_s - c_1e^{-2\alpha_1\tau} - c_2e^{-2\alpha_2\tau} - c_3e^{-2\alpha_3\tau}, \quad c_s = \sum_{i=1}^3 c_i, \quad \mu_i = \exp(-\alpha_i\tau), \quad i = \overline{1,3}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Обобщим построение разностных уравнений для описания совокупности кривых ползучести при различных значениях номинального напряжения σ_{0j} ($j = \overline{1, M}$).

В соответствии с выражением (2.1) зависимость деформации ползучести от времени t и напряжения σ_{0j} имеет вид:

$$p(t, \sigma_{0j}) = p(t) \sigma_{0j}^n, \quad j = \overline{1, M}, \tag{2.20}$$

где $p(t) = \sum_{i=1}^s c_i (1 - e^{-\alpha_i t})$, M – количество кривых ползучести в серии экспериментов.

Дискретный аналог функции (2.20) примет вид

$$p_{k,j} = p_k \sigma_{0j}^n, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{1, M}, \tag{2.21}$$

где N – количество точек при равномерной дискретизации функции (2.20), M – количество кривых ползучести в серии экспериментов. Из соотношения (2.21) имеем выражение для p_k :

$$p_k = \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0j}^n}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{1, M}, \tag{2.22}$$

подставляя которое в разностное уравнение (2.5), описывающее последовательность дискретных значений деформации ползучести в случае одного экспоненциального слагаемого, получаем разностное уравнение, описывающее совокупность кривых ползучести при различных значениях номинального напряжения σ_{0j} :

$$\begin{cases} p_{0,j} = 0, \\ \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0j}^n} = \frac{p_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} \lambda_1 + \lambda_2, \quad k = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, M}, \end{cases} \tag{2.23}$$

где $\lambda_1 = e^{-\alpha\tau}$, $\lambda_2 = c(1 - e^{-\alpha\tau})$.

Параметр материала m определяется на основе логарифмирования левой и правой частей выражения (2.21):

$$\ln(p_{k,j}) = \ln(p_k) + n \ln(\sigma_{0,j}), \quad k = \overline{0, N-1}, j = \overline{1, M}. \quad (2.24)$$

Аналогично, подставляя выражение для p_k в виде (2.22) в разностные уравнения (2.12) и (2.18), связывающие последовательность дискретных значений модели деформации ползучести в случае двух и трех экспоненциальных слагаемых, соответственно получим разностные уравнения, описывающие совокупность кривых ползучести при различных значениях номинального напряжения $\sigma_{0,j}$ для этих вариантов:

– в случае двух экспоненциальных слагаемых:

$$\begin{cases} p_{0,j} = 0, \\ \frac{p_{1,j}}{\sigma_{0,j}^n} = \lambda_4, \\ \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0,j}^n} = \lambda_1 \frac{p_{k-1,j}}{\sigma_{0,j}^n} + \lambda_2 \frac{p_{k-2,j}}{\sigma_{0,j}^n} + \lambda_3, k = \overline{2, N-1}, j = \overline{1, M}, \end{cases} \quad (2.25)$$

где $\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2$, $\lambda_2 = -\mu_1\mu_2$, $\lambda_3 = c_s(\mu_1\mu_2 - \mu_1 - \mu_2 + 1)$, $\lambda_4 = c_s - c_1e^{-\alpha_1\tau} - c_2e^{-\alpha_2\tau}$, $c_s = \sum_{i=1}^2 c_i$,
 $\mu_i = \exp(-\alpha_i\tau)$, $i = 1, 2$;

– в случае трех экспоненциальных слагаемых:

$$\begin{cases} p_{0,j} = 0, \\ \frac{p_{1,j}}{\sigma_{0,j}^n} = \lambda_5, \\ \frac{p_{2,j}}{\sigma_{0,j}^n} = \lambda_6, \\ \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0,j}^n} = \lambda_1 \frac{p_{k-1,j}}{\sigma_{0,j}^n} + \lambda_2 \frac{p_{k-2,j}}{\sigma_{0,j}^n} + \lambda_3 \frac{p_{k-3,j}}{\sigma_{0,j}^n} + \lambda_4, k = \overline{3, N-1}, j = \overline{1, M} \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}
\text{где} \quad \lambda_1 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, & \lambda_2 &= -\mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_3 - \mu_2\mu_3, & \lambda_3 &= \mu_1\mu_2\mu_3, \\
\lambda_4 &= c_s(-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + 1), & \lambda_5 &= c_s - c_1e^{-\alpha_1\tau} - c_2e^{-\alpha_2\tau} - c_3e^{-\alpha_3\tau}, \\
\lambda_6 &= c_s - c_1e^{-2\alpha_1\tau} - c_2e^{-2\alpha_2\tau} - c_3e^{-2\alpha_3\tau}, & c_s &= \sum_{i=1}^3 c_i, \mu_i = \exp(-\alpha_i\tau), i = \overline{1,3}.
\end{aligned}$$

Таким образом, построили разностные уравнения, в рекуррентной форме связывающие последовательность дискретных значений модели стадии неустановившейся ползучести (2.1) в случае от одного до трех экспоненциальных слагаемых. При этом построенные разностные уравнения позволяют описывать как отдельную кривую ползучести при постоянном напряжении, либо совокупность серии кривых ползучести для различных постоянных напряжений.

2.3. Формирование разностных уравнений для описания первых двух стадий (неустановившейся и установившейся) ползучести

Как отмечается в [72], в исследованиях ряда авторов для описания кривых ползучести в пределах первых двух стадий при постоянных напряжениях предлагается более общий закон:

$$p(t, \sigma) = f_1(t)f_2(\sigma) + f_3(\sigma)t, \quad (2.27)$$

где $f_1(t) = \sum_{k=1}^s c_k (1 - e^{-\alpha_k t})$, $f_2(\sigma)$, $f_3(\sigma)$ – зависимости деформации ползучести от напряжения σ , имеющие одинаковый вид [72], например, по закону Нортон-Бейли. Таким образом, совокупность кривых ползучести в пределах стадий неустановившейся и установившейся ползучести при различных значениях номинального напряжения σ_{0j} может быть описана в виде:

$$p(t, \sigma_{0j}) = \sum_{k=1}^s c_k (1 - e^{-\alpha_k t}) \sigma_{0j}^n + B \sigma_{0j}^{n_1} t, j = \overline{1, M},$$

где s – количество экспоненциальных слагаемых, c_k , α_k , B , n , n_1 – параметры материала, σ_{0j} – значения номинального напряжения, M – количество кривых ползучести в серии экспериментов.

Рассмотрим частный случай при $n = n_1$:

$$p(t, \sigma_{0j}) = \sum_{k=1}^s c_k (1 - e^{-\alpha_k t}) \sigma_{0j}^n + B \sigma_{0j}^n t, j = \overline{1, M}. \quad (2.28)$$

Выполняя действия аналогично параграфу 2.2, рассмотрим вначале отдельную кривую ползучести и включим параметр σ_{0j}^n в параметры c_k , $k = \overline{1, s}$, и B . В этом случае отдельная кривая ползучести в пределах стадий неустановившейся и установившейся ползучести может быть описана в виде:

$$p(t) = \sum_{k=1}^s c_k (1 - e^{-\alpha_k t}) + Bt. \quad (2.29)$$

1. Построим разностное уравнение, в рекуррентной форме связывающее последовательность дискретных значений деформации ползучести, описываемой выражением (2.29), в случае одного экспоненциального слагаемого ($s = 1$). Здесь (2.29) принимает вид

$$p(t) = c(1 - e^{-\alpha t}) + Bt. \quad (2.30)$$

Отметим, что функция (2.30) известна как закон Содерберга [36, 37].

При равномерной дискретизации с периодом τ получим дискретный аналог функции (2.30):

$$p_k = c(1 - e^{-\alpha \tau k}) + B\tau k, k = \overline{0, N-1}, \quad (2.31)$$

где N – объем выборки данных.

Подставляя в выражение (2.31) вместо k значение $k-1$, получим $p_{k-1} = c(1 - e^{-\alpha \tau k} e^{\alpha \tau}) + B\tau(k-1)$, или: $p_{k-1} = c - ce^{-\alpha \tau k} e^{\alpha \tau} + B\tau(k-1)$. Выражая функцию $-ce^{-\alpha \tau k} = (p_{k-1} - c - B\tau(k-1))e^{-\alpha \tau}$ и подставляя полученное соотношение в (2.31), получим

$$p_k = p_{k-1}e^{-\alpha\tau} + (B\tau - B\tau e^{-\alpha\tau})k + c - ce^{-\alpha\tau} + B\tau e^{-\alpha\tau}.$$

Таким образом, получаем разностное уравнение, связывающее последовательность дискретных значений деформации ползучести, описываемой моделью (2.30), вида

$$\begin{cases} p_0 = 0, \\ p_k = p_{k-1}\lambda_1 + \lambda_2 k + \lambda_3, k = \overline{1, N-1}, \end{cases} \quad (2.32)$$

где

$$\lambda_1 = e^{-\alpha\tau}, \lambda_2 = B\tau(1 - e^{-\alpha\tau}), \lambda_3 = c(1 - e^{-\alpha\tau}) + B\tau e^{-\alpha\tau}, \quad (2.33)$$

N – объем выборки данных.

2. Построим разностное уравнение, в рекуррентной форме связывающее последовательность дискретных значений деформации ползучести, описываемой выражением (2.29), в случае двух экспоненциальных слагаемых ($s = 2$). Здесь выражение (2.29) принимает вид

$$p(t) = c_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 t}) + Bt. \quad (2.34)$$

При равномерной с периодом τ дискретизации функции (2.34) получим ее дискретный аналог:

$$p_k = c_1(1 - e^{-\alpha_1 \tau k}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 \tau k}) + B\tau k, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2.35)$$

или

$$p_k = c_s - \sum_{i=1}^2 c_i e^{-\alpha_i \tau k} + B\tau k, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2.36)$$

где $c_s = \sum_{i=1}^2 c_i$, N – объем выборки данных.

Подставляя в выражение (2.36) вместо k значения $k-1$ и $k-2$, получаем систему уравнений, линейную относительно функций $-c_i e^{-\alpha_i \tau k}$ ($i = \overline{1, 2}$):

$$\begin{cases} p_{k-1} = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau k} \mu_1^{-1} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau k} \mu_2^{-1} + B\tau(k-1), \\ p_{k-2} = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau k} \mu_1^{-2} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau k} \mu_2^{-2} + B\tau(k-2), \end{cases} \quad (2.37)$$

где $c_s = \sum_{i=1}^2 c_i$, $\mu_i = \exp(-\alpha_i \tau)$, $i = 1, 2$. Решая данную систему относительно неизвестных функций $-c_i e^{-\alpha_i \tau k}$ и подставляя полученное в исходное соотношение (2.36), получим

$$\begin{aligned} p_k = & (\mu_1 + \mu_2) p_{k-1} - \mu_1 \mu_2 p_{k-2} + (\mu_1 \mu_2 - \mu_2 - \mu_1 + 1) B \tau k +, \\ & + c_s (\mu_1 \mu_2 - \mu_2 - \mu_1 + 1) - 2 \mu_1 \mu_2 B \tau, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где $c_s = \sum_{i=1}^2 c_i$, $\mu_i = \exp(-\alpha_i \tau)$, $i = 1, 2$.

Таким образом, получили разностное уравнение, в рекуррентной форме описывающее последовательность значений деформации ползучести, соответствующее модели (2.34):

$$\begin{cases} p_0 = 0, \\ p_1 = \lambda_5, \\ p_k = \lambda_1 p_{k-1} + \lambda_2 p_{k-1} + \lambda_3 k + \lambda_4, k = \overline{2, N-1}, \end{cases} \quad (2.39)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 = & \mu_1 + \mu_2, \lambda_2 = -\mu_1 \mu_2, \lambda_3 = B \tau (\mu_1 \mu_2 - \mu_2 - \mu_1 + 1), \\ \lambda_4 = & c_s (\mu_1 \mu_2 - \mu_2 - \mu_1 + 1) - 2 \mu_1 \mu_2 B \tau, \\ \lambda_5 = & c_1 (1 - e^{-\alpha_1 \tau}) + c_2 (1 - e^{-\alpha_2 \tau}) + B \tau, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$c_s = \sum_{i=1}^2 c_i, \mu_i = \exp(-\alpha_i \tau), i = 1, 2.$$

3. Построим разностное уравнение, в рекуррентной форме связывающее последовательность дискретных значений деформации ползучести, описываемой выражением (2.29), в случае трех экспоненциальных слагаемых ($s = 3$). Из (2.29) имеем

$$p(t) = c_1 (1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2 (1 - e^{-\alpha_2 t}) + c_3 (1 - e^{-\alpha_3 t}) + B t. \quad (2.41)$$

При равномерной с периодом τ дискретизации функции (2.41) получим ее дискретный аналог:

$$p_k = c_1(1 - e^{-\alpha_1\tau k}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2\tau k}) + c_3(1 - e^{-\alpha_3\tau k}) + B\tau k, k = \overline{0, N-1}, \quad (2.42)$$

или

$$p_k = c_s - \sum_{i=1}^3 c_i e^{-\alpha_i\tau k} + B\tau k, k = \overline{0, N-1}, \quad (2.43)$$

где $c_s = \sum_{i=1}^3 c_i$, N – объем выборки данных.

Подставляя в выражение (2.42) вместо k значения $k-1$, $k-2$ и $k-3$, получаем систему уравнений, линейную относительно функций $-c_i e^{-\alpha_i\tau k}$, $i = \overline{1, 3}$:

$$\begin{cases} p_{k-1} = c_s - c_1 e^{-\alpha_1\tau k} \mu_1^{-1} - c_2 e^{-\alpha_2\tau k} \mu_2^{-1} - c_3 e^{-\alpha_3\tau k} \mu_3^{-1} + B\tau(k-1), \\ p_{k-2} = c_s - c_1 e^{-\alpha_1\tau k} \mu_1^{-2} - c_2 e^{-\alpha_2\tau k} \mu_2^{-2} - c_3 e^{-\alpha_3\tau k} \mu_3^{-2} + B\tau(k-2), \\ p_{k-3} = c_s - c_1 e^{-\alpha_1\tau k} \mu_1^{-3} - c_2 e^{-\alpha_2\tau k} \mu_2^{-3} - c_3 e^{-\alpha_3\tau k} \mu_3^{-3} + B\tau(k-3), \end{cases} \quad (2.44)$$

где $c_s = \sum_{i=1}^3 c_i$, $\mu_i = \exp(-\alpha_i\tau)$, $i = \overline{1, 3}$. Решая данную систему относительно неизвестных функций $-c_i e^{-\alpha_i\tau k}$ и подставляя решение в исходное соотношение (2.42), получим

$$\begin{aligned} p_k = & (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) p_{k-1} + (-\mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_3 - \mu_2\mu_3) p_{k-2} + (\mu_1\mu_2\mu_3) p_{k-3} + \\ & + B\tau(-\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + 1)k + 3B\tau\mu_1\mu_2\mu_3 + \\ & - 2B\tau\mu_2\mu_3 - 2B\tau\mu_1\mu_3 - 2B\tau\mu_1\mu_2 + B\tau(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) - c_s\mu_1\mu_2\mu_3 + \\ & + c_s(\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + 1), \end{aligned} \quad (2.45)$$

где $c_s = \sum_{i=1}^3 c_i$, $\mu_i = \exp(-\alpha_i\tau)$, $i = \overline{1, 3}$.

Таким образом, получили разностное уравнение, в рекуррентной форме описывающее последовательность значений деформации ползучести, соответствующее модели (2.41):

$$\begin{cases} p_0 = 0, \\ p_1 = \lambda_6, \\ p_2 = \lambda_7, \\ p_k = \lambda_1 p_{k-1} + \lambda_2 p_{k-2} + \lambda_3 p_{k-3} + \lambda_4 k + \lambda_5, k = \overline{3, N-1}, \end{cases} \quad (2.46)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad \lambda_2 = -\mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_3 - \mu_2\mu_3, \quad \lambda_3 = \mu_1\mu_2\mu_3, \\ \lambda_4 &= B\tau(-\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + 1), \\ \lambda_5 &= B\tau(3\mu_1\mu_2\mu_3 - 2\mu_2\mu_3 - 2\mu_1\mu_3 - 2\mu_1\mu_2 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \\ &+ c_s(-\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + 1), \\ \lambda_6 &= c_1(1 - \mu_1) + c_2(1 - \mu_2) + c_3(1 - \mu_3) + B\tau, \\ \lambda_7 &= c_1(1 - \mu_1^2) + c_2(1 - \mu_2^2) + c_3(1 - \mu_3^2) + 2B\tau, \\ c_s &= \sum_{i=1}^3 c_i, \quad \mu_i = \exp(-\alpha_i\tau), \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Обобщим полученные разностные уравнения, построенные для отдельной кривой ползучести, на совокупность кривых ползучести при различных значениях номинального напряжения σ_0 .

Действуя аналогично процедуре, изложенной в параграфе 2.2, из формулы (2.22) имеем выражение для дискретных значений отдельной кривой ползучести:

$$p_k = \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0j}^n}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{1, M},$$

подставляя которое в разностные уравнения (2.32), (2.39), (2.46), связывающие последовательность дискретных значений деформации ползучести, описываемые моделью (2.28), в случае одного, двух и трех экспоненциальных слагаемых соответственно, получим разностные уравнения, описывающие совокупность кривых ползучести в пределах стадий неустановившейся и установившейся ползучести при различных значениях номинального напряжения σ_{0j} :

– в случае одного экспоненциального слагаемого:

$$\begin{cases} p_{0,j} = 0, \\ \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0j}^n} = \frac{p_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} \lambda_1 + \lambda_2 k + \lambda_3, k = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, M}, \end{cases} \quad (2.48)$$

где $\lambda_1 = e^{-\alpha\tau}$, $\lambda_2 = B\tau(1 - e^{-\alpha\tau})$, $\lambda_3 = c(1 - e^{-\alpha\tau}) + B\tau e^{-\alpha\tau}$;

– в случае двух экспоненциальных слагаемых:

$$\begin{cases} p_{0,j} = 0, \\ \frac{p_{1,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_5, \\ \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_1 \frac{p_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_2 \frac{p_{k-2,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_3 k + \lambda_4, k = \overline{2, N-1}, j = \overline{1, M}, \end{cases} \quad (2.49)$$

где $\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2$, $\lambda_2 = -\mu_1\mu_2$, $\lambda_3 = B\tau(\mu_1\mu_2 - \mu_2 - \mu_1 + 1)$,

$\lambda_4 = c_s(\mu_1\mu_2 - \mu_2 - \mu_1 + 1) - 2\mu_1\mu_2 B\tau$, $\lambda_5 = c_1(1 - e^{-\alpha_1\tau}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2\tau})$, $c_s = \sum_{i=1}^2 c_i$,

$\mu_i = \exp(-\alpha_i\tau)$, $i = 1, 2$;

– в случае трех экспоненциальных слагаемых:

$$\begin{cases} p_{0,j} = 0, \\ \frac{p_{1,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_6, \\ \frac{p_{2,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_7, \\ \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_1 \frac{p_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_2 \frac{p_{k-2,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_3 \frac{p_{k-3,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_4 k + \lambda_5, k = \overline{3, N-1}, j = \overline{1, M} \end{cases} \quad (2.50)$$

где $\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$, $\lambda_2 = -\mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_3 - \mu_2\mu_3$, $\lambda_3 = \mu_1\mu_2\mu_3$,

$\lambda_4 = B\tau(-\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + 1)$,

$\lambda_5 = B\tau(3\mu_1\mu_2\mu_3 - 2\mu_2\mu_3 - 2\mu_1\mu_3 - 2\mu_1\mu_2 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3) +$

$$+c_s(-\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + 1), \quad c_s = \sum_{i=1}^3 c_i, \quad \mu_i = \exp(-\alpha_i\tau),$$

$$i = \overline{1,3}.$$

Таким образом, построили разностные уравнения, в рекуррентной форме связывающие последовательность дискретных значений деформации ползучести, описываемой моделью (2.28) в случае от одного до трех экспоненциальных слагаемых, как для описания отдельной кривой ползучести, так и совокупности кривых ползучести для серии различных постоянных напряжений.

2.4. Формирование разностных уравнений для описания третьей стадии ползучести (стадии ускоренной ползучести)

Как отмечалось в параграфе 1.1, зависимость для третьей стадии деформации ползучести от времени при M различных значениях номинального напряжения σ_{0j} , $j = \overline{1, M}$, может быть представлена в виде

$$p(t, \sigma_{0j}) = -\frac{1}{\sigma_{0j} m \alpha} \ln(1 - \alpha m c \sigma_{0j}^{m+1} t), \quad (2.51)$$

где c и m – константы модели; $\alpha = \text{const}$ – параметр модели, контролирующий процесс разупрочнения материала. Рассмотрим построение разностных уравнений, связывающих последовательность дискретных значений деформации ползучести, описываемых моделью (2.51).

Так как в момент разрушения материала кривая ползучести приближается к вертикальной асимптоте, оценивание параметров математической модели (2.51) при обработке экспериментальных значений $(t_{k,j}, p_{k,j})$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, M$, где M – количество кривых ползучести, N_j – количество точек эксперимента для j -ой кривой ползучести, следует проводить исходя из минимизации нормы разности по временной координате: $\|\varepsilon\|^2 = \|t - \tilde{t}\|^2 \rightarrow \min$, где t – вектор данных эксперимента, \tilde{t} – вектор ре-

результатов вычислений по модели (2.51) при значениях деформации ползучести p , соответствующих значениям эксперимента $(t_{k,j}, p_{k,j})$. Выражая зависимость временных отсчетов $\tilde{t}_{k,j}$ от значений деформации ползучести $p_{k,j}$, описываемых моделью (2.51), получим следующее соотношение:

$$\tilde{t}_{k,j} = \frac{1}{c_1 m \sigma_{0j}^{m+1} \alpha} \left[1 - \exp(-m \alpha \sigma_{0j} p_{k,j}) \right], k=0,1,2,\dots,N_j-1, j=1,2,\dots,M. \quad (2.52)$$

Построим разностное уравнение, в рекуррентной форме связывающее последовательные дискретные временные отсчеты $\tilde{t}_{k,j}$ в соответствии с моделью (2.52).

В случае наличия только одной кривой ползучести ($M = 1$) задача становится двухпараметрической, и, вводя новые переменные $c_1 = m \alpha \sigma_0$, $c_2 = c_1 m \sigma_0^{m+1}$, получим следующий вид модели (2.52):

$$\tilde{t}_k = \frac{1}{c_2} \left[1 - \exp(-c_1 \Delta p_k) \right], \quad (2.53)$$

где Δp – шаг равномерной дискретизации по деформации ползучести p . Из

(2.53) следует два равенства: $c_2 \tilde{t}_k = 1 - \exp(-c_1 \Delta p_k)$ и

$c_2 \tilde{t}_{k-1} = 1 - \exp(-c_1 \Delta p_k) \exp(c_1 \Delta p)$. Выражая из второго равенства величину

$\exp(-c_1 \Delta p_k)$ и подставляя ее в первое равенство, получаем

$c_2 \tilde{t}_k = 1 + (c_2 \tilde{t}_{k-1} - 1) \exp(-c_1 \Delta p)$, откуда

$$\tilde{t}_k = \exp(-c_1 \Delta p) \tilde{t}_{k-1} + \frac{1 - \exp(-c_1 \Delta p)}{c_2}, k = \overline{1, 2, \dots, N-1}.$$

Введем обозначения $\lambda_1 = \exp(-c_1 \Delta p)$, $\lambda_2 = \frac{1 - \exp(-c_1 \Delta p)}{c_2}$. Таким обра-

зом, получаем разностное уравнение, связывающее результаты эксперимента, описываемые моделью (2.53) вида:

$$\begin{cases} \tilde{t}_0 = 0, \\ \tilde{t}_k = \lambda_1 \tilde{t}_{k-1} + \lambda_2, k = \overline{1, N-1}. \end{cases} \quad (2.54)$$

Построим разностные уравнения, связывающие последовательные значения временных отсчетов $\tilde{t}_{k,j}$ в случае, когда кривых ползучести несколько ($M > 1$). Здесь и далее индекс j относится к j -ой кривой ползучести. С учетом (2.52) получаем:

$$\begin{aligned} c m \sigma_{0j}^{m+1} \alpha \tilde{t}_{k,j} &= 1 - \exp(-m \alpha \sigma_{0j} \Delta p_j k), \\ c m \sigma_{0j}^{m+1} \alpha \tilde{t}_{k-1,j} &= 1 - \exp[-m \alpha \sigma_{0j} \Delta p_j (k-1)] = 1 - \exp(-m \alpha \sigma_{0j} \Delta p_j k) \cdot \exp(m \alpha \sigma_{0j} \Delta p_j), \\ c m \sigma_{0j}^{m+1} \alpha \tilde{t}_{k-2,j} &= 1 - \exp[-m \alpha \sigma_{0j} \Delta p_j (k-2)] = 1 - \exp(-m \alpha \sigma_{0j} \Delta p_j k) \cdot \exp(2 m \alpha \sigma_{0j} \Delta p_j). \end{aligned}$$

Находя разности $\tilde{t}_{k,j} - \tilde{t}_{k-1,j}$, $\tilde{t}_{k-1,j} - \tilde{t}_{k-2,j}$ и логарифмируя их отношение, получаем следующее выражение: $\ln \frac{\tilde{t}_{k-1,j} - \tilde{t}_{k-2,j}}{\tilde{t}_{k,j} - \tilde{t}_{k-1,j}} = \sigma_{0j} \Delta p_j \lambda_1$, $k = 2, 3, \dots, N_j - 1$,

$j = 1, 2, \dots, M$, где $\lambda_1 = m \alpha$.

Подставляя $k = 0$ и $k = 1$ в выражение (2.52), соответственно получаем $\tilde{t}_{0,j} = 0$ и $\tilde{t}_{1,j} = \frac{1}{c m \sigma_{0j}^{m+1} \alpha} [1 - \exp(-m \alpha \sigma_{0j} \Delta p_j)]$, $j = 1, 2, \dots, M$. С учетом последнего соотношения имеем:

$$\ln [\exp(\lambda_1 \sigma_{0j} \Delta p_j) - 1] - \ln \tilde{t}_{1,j} = \lambda_1 \sigma_{0j} \Delta p_j + \lambda_2 + \lambda_3 \ln \sigma_{0j}, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad \text{где}$$

$$\lambda_2 = \ln(c m \alpha) \text{ и } \lambda_3 = m + 1.$$

Таким образом, построили разностные уравнения, связывающие последовательные дискретные значения $\tilde{t}_{k-2,j}$, $\tilde{t}_{k-1,j}$ и $\tilde{t}_{k,j}$, описываемые моделью (2.52):

$$\begin{cases} \tilde{t}_{0,j} = 0, \\ \ln \left[\exp(\lambda_1 \sigma_{0j} \Delta p_j) - 1 \right] - \ln \tilde{t}_{1,j} = \lambda_1 \sigma_{0j} \Delta p_j + \lambda_2 + \lambda_3 \ln \sigma_{0j}, \\ \ln \frac{\tilde{t}_{k-1,j} - \tilde{t}_{k-2,j}}{\tilde{t}_{k,j} - \tilde{t}_{k-1,j}} = \sigma_{0j} \Delta p_j \lambda_1, \quad k = 2, 3, \dots, N_j - 1; \quad j = 1, 2, 3, \dots, M. \end{cases} \quad (2.55)$$

Коэффициенты в модели (2.55) связаны с параметрами деформации ползучести соотношениями:

$$\lambda_1 = m\alpha, \quad \lambda_2 = \ln(ct\alpha), \quad \lambda_3 = m + 1. \quad (2.56)$$

2.5. Формирование разностных уравнений для описания стадии ускоренной ползучести при степенной зависимости параметра разупрочнения от напряжения

Как отмечается в ряде работ [69,73], анализ экспериментальных данных показывает, что в общем случае гипотеза $\alpha = \text{const}$ выполняется не для всех материалов и для параметра α справедлива зависимость $\alpha = \alpha(\sigma)$ и для него можно использовать степенную аппроксимацию вида $\alpha = \alpha \sigma_0^{m_1}$. С учетом этой зависимости, выражение (2.51) примет вид модели

$$ct\alpha \sigma_{0j}^{m+m_1+1} \tilde{t} = 1 - \exp(-m\alpha \sigma_{0j}^{m_1+1} p), \quad j = \overline{1, M}, \quad (2.57)$$

которая описывает временную зависимость $p(t)$ деформации ползучести с учетом третьей стадии при различных постоянных значениях σ_{0j} номинального напряжения.

Построим разностные уравнения, выражающие связь между последовательными дискретными временными отсчетами, описываемыми моделью (2.57). С учетом равномерной дискретизации с шагом Δp_j по j -ой кривой, имеем дискретный аналог модели (2.57), которая примет вид:

$$ct\alpha \sigma_{0j}^{m+m_1+1} \tilde{t}_{k,j} = 1 - \exp(-m\alpha \sigma_{0j}^{m_1+1} \Delta p_j k), \quad k = \overline{0, N_j - 1}; \quad j = \overline{1, M}, \quad (2.58)$$

где M – количество кривых ползучести, N_j – количество точек эксперимента для j -ой кривой.

Подставляя в выражение (2.58) вместо k значения $k-1$ и $k-2$, получаем следующие соотношения:

$$c\tau\alpha\sigma_{0j}^{m+m_1+1}\tilde{t}_{k,j} = 1 - e^{-m\alpha\sigma_{0j}^{m_1+1}\Delta p_j k}, \quad c\tau\alpha\sigma_{0j}^{m+m_1+1}\tilde{t}_{k-1,j} = 1 - e^{-m\alpha\sigma_{0j}^{m_1+1}\Delta p_j k} e^{m\alpha\sigma_{0j}^{m_1+1}\Delta p_j}$$

или

$$c\tau\alpha\sigma_{0j}^{m+m_1+1}\tilde{t}_{k-1,j} = 1 - e^{-m\alpha\sigma_{0j}^{m_1+1}\Delta p_j} + c\tau\alpha\sigma_{0j}^{m+m_1+1}\tilde{t}_{k,j} e^{m\alpha\sigma_{0j}^{m_1+1}\Delta p_j},$$

$$c\tau\alpha\sigma_{0j}^{m+m_1+1}\tilde{t}_{k-2,j} = 1 - e^{-m\alpha\sigma_{0j}^{m_1+1}\Delta p_j} + c\tau\alpha\sigma_{0j}^{m+m_1+1}\tilde{t}_{k-1,j} e^{m\alpha\sigma_{0j}^{m_1+1}\Delta p_j}.$$

Отсюда получаем $\tilde{t}_{k-1,j} - \tilde{t}_{k-2,j} = (\tilde{t}_{k,j} - \tilde{t}_{k-1,j}) e^{m\alpha\sigma_{0j}^{m_1+1}\Delta p_j}$, $k = 2, \dots, N_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, M$. При $k = 0$ и $k = 1$ из равенства (2.58) соответственно получаем

$$\tilde{t}_{0,j} = 0 \text{ и } c\tau\alpha\sigma_{0j}^{m+m_1+1}\tilde{t}_{1,j} e^{m\alpha\sigma_{0j}^{m_1+1}\Delta p_j} = e^{m\alpha\sigma_{0j}^{m_1+1}\Delta p_j} - 1, \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

После логарифмирования полученных соотношений получаем:

$$\ln \ln \frac{\tilde{t}_{k-1,j} - \tilde{t}_{k-2,j}}{\tilde{t}_{k,j} - \tilde{t}_{k-1,j}} - \ln \Delta p_j = \ln m\alpha + (m_1 + 1) \ln \sigma_{0j},$$

$$\ln \left(e^{m\alpha\sigma_{0j}^{m_1+1}\Delta p_j} - 1 \right) - m\alpha\sigma_{0j}^{m_1+1}\Delta p_j - \ln(\tilde{t}_{1,j}) = (m + m_1 + 1) \ln \sigma_{0j} + \ln c\tau\alpha, \quad j = 1, 2, \dots, M.$$

Обозначая

$$\lambda_1 = \ln m\alpha, \lambda_2 = m_1 + 1, \lambda_3 = m + m_1 + 1, \lambda_4 = \ln c\tau\alpha, \quad (2.59)$$

получаем разностные уравнения, связывающие последовательные значения временных отсчетов $\tilde{t}_{k-2,j}$, $\tilde{t}_{k-1,j}$ и $\tilde{t}_{k,j}$, описываемые моделью (2.58):

$$\begin{cases} \tilde{t}_{0,j} = 0, \\ \ln \left(e^{e^{\lambda_1}\sigma_{0j}^{\lambda_2}\Delta p_j} - 1 \right) - e^{\lambda_1}\sigma_{0j}^{\lambda_2}\Delta p_j - \ln \tilde{t}_{1,j} = \lambda_3 \ln \sigma_{0j} + \lambda_4, \\ \ln \ln \frac{\tilde{t}_{k-1,j} - \tilde{t}_{k-2,j}}{\tilde{t}_{k,j} - \tilde{t}_{k-1,j}} - \ln \Delta p_j = \lambda_1 + \lambda_2 \ln \sigma_{0j}, \\ k = 2, 3, \dots, N_j - 1, \quad j = 1, 2, 3, \dots, M. \end{cases} \quad (2.60)$$

Таким образом, построили разностные уравнения, связывающие последовательность дискретных временных отсчетов, принадлежащих третьей стадии ползучести при степенной зависимости параметра разупрочнения от напряжения.

2.6. Выводы по главе 2

Выполненные выше исследования позволяют сделать вывод, что для каждой из стадий ползучести построены разностные уравнения, в рекуррентной форме описывающие связь между последовательными значениями соответствующей модели ползучести для той или иной стадии. Систематизация построенных новых разностных уравнений представлена далее.

1. Модель для описания первой стадии ползучести в случае одного экспоненциального слагаемого:

$$p(t, \sigma_{0j}) = [c(1 - e^{-\alpha t})] \sigma_{0j}^n;$$

– разностное уравнение:

$$\begin{cases} \frac{p_{0,j}}{\sigma_{0j}^n} = 0, \\ \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0j}^n} = \frac{p_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} \lambda_1 + \lambda_2, k = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, M}; \end{cases}$$

– связь между параметрами модели и коэффициентами разностного уравнения:

$$\lambda_1 = e^{-\alpha \tau}, \lambda_2 = c(1 - e^{-\alpha \tau}).$$

2. Модель для описания первой стадии ползучести в случае двух экспоненциальных слагаемых:

$$p(t, \sigma_{0j}) = [c_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 t})] \sigma_{0j}^n;$$

– разностное уравнение:

$$\begin{cases} \frac{p_{0,j}}{\sigma_{0,j}^n} = 0, \\ \frac{p_{1,j}}{\sigma_{0,j}^n} = \lambda_4, \\ \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0,j}^n} = \lambda_1 \frac{p_{k-1,j}}{\sigma_{0,j}^n} + \lambda_2 \frac{p_{k-2,j}}{\sigma_{0,j}^n} + \lambda_3, k = \overline{2, N-1}, j = \overline{1, M}; \end{cases}$$

– связь между параметрами модели и коэффициентами разностного уравнения:

$$\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2, \lambda_2 = \mu_1 \mu_2, \lambda_3 = c_s (\mu_1 \mu_2 - \mu_1 - \mu_2 + 1),$$

$$\lambda_4 = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau}, c_s = \sum_{i=1}^2 c_i, \mu_i = \exp(-\alpha_i \tau), i = 1, 2.$$

3. Модель для описания первой стадии ползучести в случае трех экспоненциальных слагаемых:

$$p(t, \sigma_{0,j}) = \left[c_1 (1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2 (1 - e^{-\alpha_2 t}) + c_3 (1 - e^{-\alpha_3 t}) \right] \sigma_{0,j}^n;$$

– разностное уравнение:

$$\begin{cases} \frac{p_{0,j}}{\sigma_{0,j}^n} = 0, \\ \frac{p_{1,j}}{\sigma_{0,j}^n} = \lambda_5, \\ \frac{p_{2,j}}{\sigma_{0,j}^n} = \lambda_6, \\ \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0,j}^n} = \lambda_1 \frac{p_{k-1,j}}{\sigma_{0,j}^n} + \lambda_2 \frac{p_{k-2,j}}{\sigma_{0,j}^n} + \lambda_3 \frac{p_{k-3,j}}{\sigma_{0,j}^n} + \lambda_4, k = \overline{3, N-1}, j = \overline{1, M}; \end{cases}$$

– связь между параметрами модели и коэффициентами разностного уравнения:

$$\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \lambda_2 = -\mu_1 \mu_2 - \mu_1 \mu_3 - \mu_2 \mu_3, \lambda_3 = \mu_1 \mu_2 \mu_3, \lambda_4 = c_s (-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + 1),$$

$$\lambda_5 = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau} - c_3 e^{-\alpha_3 \tau}, \lambda_6 = c_s - c_1 e^{-2\alpha_1 \tau} - c_2 e^{-2\alpha_2 \tau} - c_3 e^{-2\alpha_3 \tau}, c_s = \sum_{i=1}^3 c_i,$$

$$\mu_i = \exp(-\alpha_i \tau), i = \overline{1, 3}.$$

4. Модель для описания первой и второй стадий ползучести в случае одного экспоненциального слагаемого:

$$p(t, \sigma_{0j}) = \left[c(1 - e^{-\alpha t}) + Bt \right] \sigma_{0j}^n;$$

– разностное уравнение:

$$\begin{cases} \frac{p_{0,j}}{\sigma_{0j}^n} = 0, \\ \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0j}^n} = \frac{p_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} \lambda_1 + \lambda_2 k + \lambda_3, k = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, M}; \end{cases}$$

– связь между параметрами модели и коэффициентами разностного уравнения:

$$\lambda_1 = e^{-\alpha\tau}, \lambda_2 = B\tau(1 - e^{-\alpha\tau}), \lambda_3 = c(1 - e^{-\alpha\tau}) + B\tau e^{-\alpha\tau}.$$

5. Модель для описания первой и второй стадий ползучести в случае двух экспоненциальных слагаемых:

$$p(t, \sigma_{0j}) = \left[c_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 t}) + Bt \right] \sigma_{0j}^n;$$

– разностное уравнение:

$$\begin{cases} \frac{p_{0,j}}{\sigma_{0j}^n} = 0, \\ \frac{p_{1,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_5, \\ \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_1 \frac{p_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_2 \frac{p_{k-2,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_3 k + \lambda_4, k = \overline{2, N-1}, j = \overline{1, M}; \end{cases}$$

– связь между параметрами модели и коэффициентами разностного уравнения:

$$\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2, \lambda_2 = -\mu_1 \mu_2, \lambda_3 = B\tau(\mu_1 \mu_2 - \mu_2 - \mu_1 + 1),$$

$$\lambda_4 = c_s(\mu_1 \mu_2 - \mu_2 - \mu_1 + 1) - 2\mu_1 \mu_2 B\tau, \lambda_5 = c_1(1 - e^{-\alpha_1 \tau}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 \tau}) + B\tau,$$

$$c_s = \sum_{i=1}^2 c_i, \mu_i = \exp(-\alpha_i \tau), i=1,2.$$

6. Модель для описания первой и второй стадий ползучести в случае трех экспоненциальных слагаемых:

$$p(t, \sigma_{0j}) = \left[c_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 t}) + c_3(1 - e^{-\alpha_3 t}) + Bt \right] \sigma_{0j}^n;$$

– разностное уравнение:

$$\begin{cases} \frac{p_{0,j}}{\sigma_{0j}^n} = 0, \\ \frac{p_{1,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_6, \\ \frac{p_{2,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_7, \\ \frac{p_{k,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_1 \frac{p_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_2 \frac{p_{k-2,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_3 \frac{p_{k-3,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_4 k + \lambda_5, k = \overline{3, N-1}, j = \overline{1, M}; \end{cases}$$

– связь между параметрами модели и коэффициентами разностного уравнения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad \lambda_2 = -\mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_3 - \mu_2\mu_3, \quad \lambda_3 = \mu_1\mu_2\mu_3, \\ \lambda_4 &= B\tau(-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + 1), \quad \lambda_5 = B\tau(3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_1) + \\ &+ c_s(-\lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1 + 1), \quad \lambda_6 = c_1(1 - \mu_1) + c_2(1 - \mu_2) + c_3(1 - \mu_3) + B\tau, \\ \lambda_7 &= c_1(1 - \mu_1^2) + c_2(1 - \mu_2^2) + c_3(1 - \mu_3^2) + 2B\tau, \\ c_s &= \sum_{i=1}^3 c_i, \quad \mu_i = \exp(-\alpha_i \tau), \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

7. Модель для описания третьей стадии ползучести при постоянном значении параметра разупрочнения:

$$p(t, \sigma_{0j}) = -\frac{1}{\sigma_{0j} m \alpha} \ln(1 - \alpha m c \sigma_{0j}^{m+1} t);$$

– разностное уравнение:

$$\begin{cases} \tilde{t}_{0,j} = 0, \\ \ln \left[\exp(\lambda_1 \sigma_{0j} \Delta p_j) - 1 \right] - \ln \tilde{t}_{1,j} = \lambda_1 \sigma_{0j} \Delta p_j + \lambda_2 + \lambda_3 \ln \sigma_{0j}, \\ \ln \frac{\tilde{t}_{k-1,j} - \tilde{t}_{k-2,j}}{\tilde{t}_{k,j} - \tilde{t}_{k-1,j}} = \sigma_{0j} \Delta p_j \lambda_1, \quad k = 2, 3, \dots, N_j - 1; \quad j = 1, 2, 3, \dots, M; \end{cases}$$

– связь между параметрами модели и коэффициентами разностного уравнения:

$$\lambda_1 = m\alpha, \lambda_2 = \ln(c m \alpha), \lambda_3 = m + 1.$$

8. Модель для описания третьей стадии ползучести в случае зависимости параметра разупрочнения от напряжения:

$$p(t, \sigma_{0j}) = -\frac{1}{m\alpha\sigma_{0j}^{m_1+1}} \ln(1 - \alpha m c \sigma_{0j}^{m_1+m+1} t);$$

– разностное уравнение:

$$\begin{cases} \tilde{t}_{0,j} = 0, \\ \ln \left(e^{e^{\lambda_1} \sigma_{0j}^{\lambda_2} \Delta p_j} - 1 \right) - e^{\lambda_1} \sigma_{0j}^{\lambda_2} \Delta p_j - \ln \tilde{t}_{1,j} = \lambda_3 \ln \sigma_{0j} + \lambda_4, \\ \ln \ln \frac{\tilde{t}_{k-1,j} - \tilde{t}_{k-2,j}}{\tilde{t}_{k,j} - \tilde{t}_{k-1,j}} - \ln \Delta p_j = \lambda_1 + \lambda_2 \ln \sigma_{0j}, \\ k = 2, 3, \dots, N_j - 1, \quad j = 1, 2, 3, \dots, M; \end{cases}$$

– связь между параметрами модели и коэффициентами разностного уравнения:

$$\lambda_1 = \ln m\alpha, \lambda_2 = m_1 + 1, \lambda_3 = m + m_1 + 1, \lambda_4 = \ln c m \alpha.$$

Ключевым моментом главы является переход от моделей ползучести, нелинейных по своим параметрам, что существенно усложняет оценивание параметров модели, к разностным уравнениям с коэффициентами, входящими линейно, что позволяет строить эффективные численные методы параметрической идентификации.

Глава 3. Разработка и исследование численных методов среднеквадратичного оценивания параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений

В данной главе проводится разработка и исследование численных методов определения параметров моделей реологического деформирования, в основе которых лежат разностные уравнения, в рекуррентной форме описывающие последовательность дискретных значений деформации. Разработка численных методов состоит из решения следующих задач:

- 1) формирование обобщенной регрессионной модели, описывающей результаты экспериментальных значений деформации, и линейной относительно коэффициентов разностных уравнений;
- 2) разработка итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели;
- 3) вычисление оценок параметров моделей реологического деформирования на основе полученных коэффициентов обобщенной регрессионной модели;
- 4) оценка погрешности результатов вычислений.

Материал данной главы излагается в соответствии с работами соискателя [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 46, 47, 48, 49, 50, 51].

3.1. Построение разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений деформации

Во второй главе были построены разностные уравнения, в рекуррентной форме связывающие последовательность дискретных значений деформации ползучести, описываемой различными моделями для первой стадии ползучести, первой и второй стадий ползучести, а также третьей стадии ползучести. Однако построенные разностные уравнения не подходят для описания реального эксперимента в силу того, что не учитывают случайную помеху, существующую в результатах наблюдений.

Рассмотрим построение разностных уравнений, описывающих реальные результаты наблюдений деформации ползучести. Обозначим дискретные значения моделей ползучести, для которых во второй главе были построены разностные уравнения, через $p_{k,j}$, $k = \overline{0, N_j - 1}$, $j = \overline{1, M}$, где M – количество кривых ползучести в серии экспериментов, N_j – количество точек эксперимента для j – ой кривой ползучести. Тогда с учетом случайной помехи $\varepsilon_{k,j}$ результаты наблюдений деформации ползучести $y_{k,j}$ могут быть представлены в виде

$$y_{k,j} = p_{k,j} + \varepsilon_{k,j}, \quad (3.1)$$

где $p_{k,j}$ – дискретные значения модели деформации ползучести, $\varepsilon_{k,j}$ – случайная помеха, разброс экспериментальных данных относительно принятой модели. Построение разностных уравнений, учитывающих влияние случайной помехи, представлено далее.

3.1.1. Построение разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений деформации ползучести на первой стадии.

1. Рассмотрим модель (2.3), соответствующую первой стадии ползучести при наличии одного экспоненциального слагаемого. Результаты эксперимента содержат в себе случайную помеху ε_k : $y_k = p_k + \varepsilon_k$, $k = \overline{0, N - 1}$, где N – количество опытных данных. В этом случае разностное уравнение (2.5) примет вид стохастического разностного уравнения:

$$\begin{cases} y_0 = \varepsilon_0, \\ y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 + \eta_k, \\ \eta_k = -\lambda_1 \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, N - 1}, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $\lambda_1 = e^{-\alpha\tau}$, $\lambda_2 = c(1 - e^{-\alpha\tau})$, или в форме обобщенной регрессионной модели:

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon. \end{cases}$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов разностного уравнения; $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1})$ – N -мерный вектор случайной помехи в результатах наблюдений; $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1})$ – N -мерный вектор эквивалентного случайного возмущения в обобщенной регрессионной модели; $b = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ – N -мерный вектор правой части; F – матрица регрессоров размера $N \times 2$:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_0 & 1 \\ y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ y_{N-2} & 1 \end{bmatrix};$$

P_λ – матрица эквивалентного возмущения, размера $N \times N$ в стохастическом разностном уравнении:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & -\lambda_1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Разностное уравнение (2.12), соответствующее модели первой стадии ползучести при наличии двух экспоненциальных слагаемых (2.7), с учетом случайной помехи примет вид:

$$\begin{cases} y_0 = \varepsilon_0, \\ y_1 = \lambda_4 + \varepsilon_1, \\ y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 y_{k-2} + \lambda_3 + \eta_k, k = \overline{2, N-1}, \\ \eta_k = -\lambda_1 \varepsilon_{k-1} - \lambda_2 \varepsilon_{k-2} + \varepsilon_k, k = \overline{2, N-1}, \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2$, $\lambda_2 = \mu_1 \mu_2$, $\lambda_3 = c_s (\mu_1 \mu_2 - \mu_1 - \mu_2 + 1)$, $\lambda_4 = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau}$, $c_s = \sum_{i=1}^2 c_i$,

$\mu_i = \exp(-\alpha_i \tau)$, $i = 1, 2$, или в матричной форме:

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов разностного уравнения; $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1})$ – N -мерный вектор случайной помехи в результатах наблюдений; $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1})$ – N -мерный вектор эквивалентного случайного возмущения в обобщенной регрессионной модели; $b = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ – N -мерный вектор правой части; F – матрица регрессоров размера $N \times 4$:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ y_1 & y_0 & 1 & 0 \\ y_2 & y_1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{N-2} & y_{N-3} & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

P_λ – матрица эквивалентного возмущения размера $N \times N$ в стохастическом разностном уравнении:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Разностное уравнение (2.18), соответствующее модели первой стадии ползучести при наличии трех экспоненциальных слагаемых (2.14), с учетом случайной помехи примет вид:

$$\begin{cases} y_0 = \varepsilon_0, \\ y_1 = \lambda_5 + \varepsilon_1, \\ y_2 = \lambda_6 + \varepsilon_2, \\ y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 y_{k-2} + \lambda_3 y_{k-3} + \lambda_4 + \eta_k, k = \overline{3, N-1}, \\ \eta_k = -\lambda_1 \varepsilon_{k-1} - \lambda_2 \varepsilon_{k-2} - \lambda_3 \varepsilon_{k-3} + \varepsilon_k, k = \overline{3, N-1}, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\text{где} \quad \lambda_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad \lambda_2 = -\mu_1 \mu_2 - \mu_1 \mu_3 - \mu_2 \mu_3, \quad \lambda_3 = \mu_1 \mu_2 \mu_3,$$

$$\lambda_4 = c_s (-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + 1), \quad \lambda_5 = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau} - c_3 e^{-\alpha_3 \tau},$$

$$\lambda_6 = c_s - c_1 e^{-2\alpha_1 \tau} - c_2 e^{-2\alpha_2 \tau} - c_3 e^{-2\alpha_3 \tau}, \quad c_s = \sum_{i=1}^3 c_i, \quad \mu_i = \exp(-\alpha_i \tau), \quad i = \overline{1, 3}, \text{ или в мат-}$$

ричной форме:

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов разностного уравнения; $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1})$ – N -мерный вектор случайной помехи в результатах наблюдений; $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1})$ – N -мерный вектор эквивалентного случайного возмущения в обобщенной регрессионной модели; $b = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ – N -мерный вектор правой части; F – матрица регрессоров размера $N \times 6$:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ y_2 & y_1 & y_0 & 1 & 0 & 0 \\ y_3 & y_2 & y_1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{N-2} & y_{N-3} & y_{N-4} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

P_λ – матрица эквивалентного возмущения, размера $N \times N$ в стохастическом разностном уравнении:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Рассмотрим разностное уравнение (2.23), соответствующее совокупности кривых ползучести при различных постоянных напряжениях σ_{0j} , описываемых выражением (2.20) в случае одного экспоненциального слагаемого. Как отмечалось ранее, результаты наблюдений деформации ползучести $y_{k,j}$ могут быть представлены в виде $y_{k,j} = p_{k,j} + \varepsilon_{k,j}$, $k = \overline{0, N_j - 1}$, $j = \overline{1, M}$, где $p_{k,j}$ – дискретные значения модели деформации ползучести, $\varepsilon_{k,j}$ – случайная помеха, разброс экспериментальных данных относительно принятой модели, M – количество кривых ползучести в серии экспериментов, N_j – количество точек эксперимента в j – ой кривой ползучести. С учетом случайной помехи разностное уравнение (2.23) примет вид:

$$\begin{cases} y_{0,j} = \varepsilon_{0,j}, \\ \frac{y_{k,j}}{\sigma_{0j}^n} = \frac{y_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} \lambda_1 + \lambda_2 + \eta_{k,j}, \\ \eta_{k,j} = -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} \varepsilon_{k-1,j} + \frac{1}{\sigma_{0j}^n} \varepsilon_{k,j}, k = \overline{1, N_j - 1}, j = \overline{1, M}, \end{cases} \quad (3.5)$$

где $\lambda_1 = e^{-\alpha\tau}$, $\lambda_2 = c(1 - e^{-\alpha\tau})$, или в форме обобщенной регрессионной модели:

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon. \end{cases}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов разностного уравнения;

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_2 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ b_M \end{bmatrix} \text{ – блочный вектор размера } \left[\sum_{j=1}^M N_j \times 1 \right], \text{ состоящий из } M \text{ векторов } b_j$$

размера $[N_j \times 1]$ вида

$$b_j = \begin{bmatrix} y_{0,j} \\ \frac{y_{1,j}}{\sigma_{0,j}^n} \\ \vdots \\ \frac{y_{2,j}}{\sigma_{0,j}^n} \\ \frac{y_{3,j}}{\sigma_{0,j}^n} \\ \vdots \\ \frac{y_{N_j-1,j}}{\sigma_{0,j}^n} \end{bmatrix}, \quad j=1,2,\dots,M; \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_2 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ F_M \end{bmatrix} \text{ – блочная матрица размера } \left[\sum_{j=1}^M N_j \times 2 \right],$$

состоящая из M матриц F_j размера $[N_j \times 2]$ вида

$$F_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{y_{1,j}}{\sigma_{0,j}^n} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{y_{2,j}}{\sigma_{0,j}^n} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{y_{N_j-2,j}}{\sigma_{0,j}^n} & 1 \end{bmatrix}, \quad j=1,2,\dots,M; \quad \varepsilon = [\varepsilon_1^T \mid \varepsilon_2^T \mid \dots \mid \varepsilon_M^T]^T \text{ –}$$

блочный вектор естественного разброса данных эксперимента размера

$$\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 1 \right], \text{ состоящий из } M \text{ векторов } \varepsilon_j \text{ размера } [N_j \times 1]:$$

$\varepsilon_j = [\varepsilon_{0,j}, \varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}, \dots, \varepsilon_{N-1,j}]^T$, где $\varepsilon_{0,j} = 0$, $j = 1, 2, \dots, M$; $\eta = [\eta_1^T \mid \eta_2^T \mid \dots \mid \eta_M^T]^T$ – блочный вектор «невязки» обобщенной регрессионной модели размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 1 \right]$, состоящий из M векторов η_j размера $[N_j \times 1]$:

$\eta_j = [\eta_{0,j}, \eta_{1,j}, \eta_{2,j}, \dots, \eta_{N-1,j}]^T$, где $\eta_{k,j} = -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} \varepsilon_{k-1,j} + \frac{1}{\sigma_{0j}^n} \varepsilon_{k,j}$, $k = \overline{1, N_j - 1}$, $\eta_{0,j} = \varepsilon_{0,j}$;

$j = 1, 2, \dots, M$; $P = \begin{bmatrix} P_1 & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & P_2 & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & \Theta & P_3 & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \dots & P_M \end{bmatrix}$ – блочно-диагональная квадратная

матрица линейного преобразования вектора остатков размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times \sum_{j=1}^M N_j \right]$, состоя-

щая из M матриц P_j размера $[N_j \times N_j]$, $j = 1, 2, \dots, M$, и нулевых матриц Θ .

Квадратные матрицы P_j описываются следующим образом:

$$P_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{0j}^n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0j}^n} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0j}^n} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0j}^n} \end{bmatrix}.$$

5. Рассмотрим разностное уравнение (2.25), соответствующее совокупности кривых ползучести при различных постоянных напряжениях σ_{0j} , опи-

сываемых выражением (2.20) в случае двух экспоненциальных слагаемых. С учетом случайной помехи разностное уравнение (2.25) примет вид:

$$\begin{cases} y_{0,j} = \varepsilon_{0,j}, \\ \frac{y_{1,j}}{\sigma_{0,j}^n} = \lambda_4 + \frac{\varepsilon_{1,j}}{\sigma_{0,j}^n}, \\ \frac{y_{k,j}}{\sigma_{0,j}^n} = \lambda_1 \frac{y_{k-1,j}}{\sigma_{0,j}^n} + \lambda_2 \frac{y_{k-2,j}}{\sigma_{0,j}^n} + \lambda_3 + \eta_{k,j}, \\ \eta_{k,j} = -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0,j}^n} \varepsilon_{k-1,j} - \frac{\lambda_2}{\sigma_{0,j}^n} \varepsilon_{k-2,j} + \frac{1}{\sigma_{0,j}^n} \varepsilon_{k,j}, k = \overline{2, N-1}, j = \overline{1, M}, \end{cases} \quad (3.6)$$

где $\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2$, $\lambda_2 = \mu_1 \mu_2$, $\lambda_3 = c_s (\mu_1 \mu_2 - \mu_1 - \mu_2 + 1)$, $\lambda_4 = c_s - c_1 e^{-\alpha_1 \tau} - c_2 e^{-\alpha_2 \tau}$, $c_s = \sum_{i=1}^2 c_i$,

$\mu_i = \exp(-\alpha_i \tau)$, $i = 1, 2$, или в форме обобщенной регрессионной модели:

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon. \end{cases}$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов разностного

уравнения; $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_2 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ b_M \end{bmatrix}$ – блочный вектор размера $\begin{bmatrix} M \\ \sum_{j=1} N_j \times 1 \end{bmatrix}$, состоящий из M

векторов b_j размера $[N_j \times 1]$ вида

$$b_j = \begin{bmatrix} y_{0,j} \\ \frac{y_{1,j}}{\sigma_{0,j}^n} \\ \frac{y_{2,j}}{\sigma_{0,j}^n} \\ \frac{y_{3,j}}{\sigma_{0,j}^n} \\ \vdots \\ \frac{y_{N_j-1,j}}{\sigma_{0,j}^n} \end{bmatrix}, \quad j=1,2,\dots,M; \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_M \end{bmatrix} - \text{блочная матрица размера } \left[\sum_{j=1}^M N_j \times 4 \right],$$

состоящая из M матриц F_j размера $[N_j \times 4]$ вида

$$F_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{y_{1,j}}{\sigma_{0,j}^n} & \frac{y_{0,j}}{\sigma_{0,j}^n} & 1 & 0 \\ \frac{y_{2,j}}{\sigma_{0,j}^n} & \frac{y_{1,j}}{\sigma_{0,j}^n} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{y_{N_j-2}}{\sigma_{0,j}^n} & \frac{y_{N_j-3}}{\sigma_{0,j}^n} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad j=1,2,\dots,M; \quad \varepsilon = [\varepsilon_1^T \mid \varepsilon_2^T \mid \dots \mid \varepsilon_M^T]^T -$$

блочный вектор естественного разброса данных эксперимента размера

$$\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 1 \right], \quad \text{состоящий из } M \text{ векторов } \varepsilon_j \text{ размера } [N_j \times 1]:$$

$$\varepsilon_j = [\varepsilon_{0,j}, \varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}, \dots, \varepsilon_{N-1,j}]^T, \quad j=1,2,\dots,M; \quad \eta = [\eta_1^T \mid \eta_2^T \mid \dots \mid \eta_M^T]^T - \text{блочный}$$

вектор «невязки» обобщенной регрессионной модели размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 1 \right]$, со-

стоящий из M векторов η_j размера $[N_j \times 1]$: $\eta_j = [\eta_{0,j}, \eta_{1,j}, \eta_{2,j}, \dots, \eta_{N-1,j}]^T$, где

$$\eta_{k,j} = -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0,j}^n} \varepsilon_{k-1,j} - \frac{\lambda_2}{\sigma_{0,j}^n} \varepsilon_{k-2,j} + \frac{1}{\sigma_{0,j}^n} \varepsilon_{k,j}, k = \overline{2, N_j - 1}, j = \overline{1, M}, \eta_{0,j} = \varepsilon_{0,j}, \eta_{1,j} = \frac{1}{\sigma_{0,j}^m},$$

$$j = 1, 2, \dots, M; \quad P = \begin{bmatrix} P_1 & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & P_2 & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & \Theta & P_3 & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \dots & P_M \end{bmatrix} - \text{блочно диагональная квадратная}$$

матрица линейного преобразования вектора остатков размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times \sum_{j=1}^M N_j \right]$,

состоящая из M матриц P_j размера $[N_j \times N_j]$, $j = 1, 2, \dots, M$, и нулевых матриц Θ . Квадратные матрицы P_j описываются следующим образом:

$$P_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{0,j}^n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0,j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0,j}^n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_2}{\sigma_{0,j}^n} & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0,j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0,j}^n} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_2}{\sigma_{0,j}^n} & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0,j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0,j}^n} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\lambda_2}{\sigma_{0,j}^n} & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0,j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0,j}^n} \end{bmatrix}.$$

6. Рассмотрим разностное уравнение (2.26), соответствующее совокупности кривых ползучести при различных постоянных напряжениях $\sigma_{0,j}$, описываемых выражением (2.20) в случае трех экспоненциальных слагаемых. С учетом случайной помехи разностное уравнение (2.26) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{0,j} = \varepsilon_{0,j}, \\ \frac{y_{1,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_5 + \frac{\varepsilon_{1,j}}{\sigma_{0j}^n}, \\ \frac{y_{2,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_6 + \frac{\varepsilon_{2,j}}{\sigma_{0j}^n}, \\ \frac{y_{k,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_1 \frac{y_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_2 \frac{y_{k-2,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_3 \frac{y_{k-3,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_4 + \eta_{k,j}, \\ \eta_{k,j} = -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} \varepsilon_{k-1,j} - \frac{\lambda_2}{\sigma_{0j}^n} \varepsilon_{k-2,j} - \frac{\lambda_3}{\sigma_{0j}^n} \varepsilon_{k-3,j} + \frac{1}{\sigma_{0j}^n} \varepsilon_{k,j}, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

где $k = \overline{3, N-1}$, $j = \overline{1, M}$, $\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$, $\lambda_2 = -\mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_3 - \mu_2\mu_3$, $\lambda_3 = \mu_1\mu_2\mu_3$,
 $\lambda_4 = c_s(-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + 1)$, $\lambda_5 = c_s - c_1 e^{-\alpha_1\tau} - c_2 e^{-\alpha_2\tau} - c_3 e^{-\alpha_3\tau}$,

$\lambda_6 = c_s - c_1 e^{-2\alpha_1\tau} - c_2 e^{-2\alpha_2\tau} - c_3 e^{-2\alpha_3\tau}$, $c_s = \sum_{i=1}^3 c_i$, $\mu_i = \exp(-\alpha_i\tau)$, $i = \overline{1, 3}$, или, в

форме обобщенной регрессионной модели:

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon. \end{cases}$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов разност-

ного уравнения; $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_2 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ b_M \end{bmatrix}$ – блочный вектор размера $\begin{bmatrix} M \\ \sum_{j=1}^M N_j \times 1 \end{bmatrix}$, состоящий из

M векторов b_j размера $[N_j \times 1]$ вида

$$b_j = \begin{bmatrix} y_{0,j} \\ \frac{y_{1,j}}{\sigma_{0j}^n} \\ \frac{y_{2,j}}{\sigma_{0j}^n} \\ \frac{y_{3,j}}{\sigma_{0j}^n} \\ \vdots \\ \frac{y_{N_j-1,j}}{\sigma_{0j}^n} \end{bmatrix}, \quad j=1,2,\dots,M; \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_M \end{bmatrix} - \text{блочная матрица размера } \left[\sum_{j=1}^M N_j \times 6 \right],$$

состоящая из M матриц F_j размера $[N_j \times 6]$ вида

$$F_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{y_{2,j}}{\sigma_{0j}^n} & \frac{y_{1,j}}{\sigma_{0j}^n} & \frac{y_{0,j}}{\sigma_{0j}^n} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{y_{3,j}}{\sigma_{0j}^n} & \frac{y_{2,j}}{\sigma_{0j}^n} & \frac{y_{1,j}}{\sigma_{0j}^n} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{y_{N_j-2}}{\sigma_{0j}^n} & \frac{y_{N_j-3}}{\sigma_{0j}^n} & \frac{y_{N_j-4}}{\sigma_{0j}^n} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad j=1,2,\dots,M; \quad \varepsilon = [\varepsilon_1^T \mid \varepsilon_2^T \mid \dots \mid \varepsilon_M^T]^T -$$

блочный вектор естественного разброса данных эксперимента размера

$$\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 1 \right], \quad \text{состоящий из } M \text{ векторов } \varepsilon_j \text{ размера } [N_j \times 1]:$$

$$\varepsilon_j = [\varepsilon_{0,j}, \varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}, \dots, \varepsilon_{N-1,j}]^T, \quad j=1,2,\dots,M; \quad \eta = [\eta_1^T \mid \eta_2^T \mid \dots \mid \eta_M^T]^T - \text{блочный}$$

вектор «невязки» обобщенной регрессионной модели размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 1 \right]$, со-

стоящий из M векторов η_j размера $[N_j \times 1]$: $\eta_j = [\eta_{0,j}, \eta_{1,j}, \eta_{2,j}, \dots, \eta_{N-1,j}]^T$, где

$$\eta_{k,j} = -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0,j}^n} \varepsilon_{k-1,j} - \frac{\lambda_2}{\sigma_{0,j}^n} \varepsilon_{k-2,j} - \frac{\lambda_3}{\sigma_{0,j}^n} \varepsilon_{k-3,j} + \frac{1}{\sigma_{0,j}^n} \varepsilon_{k,j}, k = \overline{3, N_j - 1}, j = \overline{1, M}, \eta_{0,j} = \varepsilon_{0,j}$$

$$, \eta_{1,j} = \frac{\varepsilon_{1,j}}{\sigma_{0,j}^n}, \eta_{2,j} = \frac{\varepsilon_{2,j}}{\sigma_{0,j}^n}, j = 1, 2, \dots, M; P = \begin{bmatrix} P_1 & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & P_2 & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & \Theta & P_3 & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \dots & P_M \end{bmatrix} - \text{блочно диа-}$$

гональная квадратная матрица линейного преобразования вектора остатков

размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times \sum_{j=1}^M N_j \right]$, состоящая из M матриц P_j размера $[N_j \times N_j]$,

$j = 1, 2, \dots, M$, и нулевых матриц Θ . Квадратные матрицы P_j описываются

следующим образом:

$$P_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{0,j}^n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{0,j}^n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{0,j}^n} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_3}{\sigma_{0,j}^n} & -\frac{\lambda_2}{\sigma_{0,j}^n} & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0,j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0,j}^n} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda_3}{\sigma_{0,j}^n} & -\frac{\lambda_2}{\sigma_{0,j}^n} & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0,j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0,j}^n} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, построены разностные уравнения в форме обобщенных регрессионных моделей, описывающие последовательность экспериментальных значений деформации на первой стадии при наличии как отдельной кривой ползучести, так и совокупности кривых ползучести при различных постоянных напряжениях.

3.1.2. Построение разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений деформации ползучести на первой и второй стадиях

Рассмотрим построение разностных уравнений, связывающих последовательность значений деформации ползучести в пределах первой и второй стадий.

1. Рассмотрим разностное уравнение (2.32), соответствующее модели для описания первой и второй стадии деформации ползучести (2.28) в случае одного экспоненциального слагаемого при наличии отдельной кривой ползучести при постоянном напряжении. С учетом случайной помехи в результатах наблюдений ε_k разностное уравнение (2.32) примет следующий вид:

$$\begin{cases} y_0 = \varepsilon_0, \\ y_k = y_{k-1}\lambda_1 + \lambda_2 k + \lambda_3 + \eta_k, \\ \eta_k = -\lambda_1 \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k, k = 1, N-1, \end{cases} \quad (3.8)$$

где $\lambda_1 = e^{-\alpha\tau}$, $\lambda_2 = B\tau(1 - e^{-\alpha\tau})$, $\lambda_3 = c(1 - e^{-\alpha\tau}) + B\tau e^{-\alpha\tau}$, или в форме обобщенной регрессионной модели:

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов разностного уравнения; $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1})$ – N -мерный вектор случайной помехи в результатах наблюдений; $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1})$ – N -мерный вектор эквивалентного случайного возмущения в обобщенной регрессионной модели; $b = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ – N -мерный вектор правой части; F – матрица регрессоров размера $N \times 3$:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ y_0 & 1 & 1 \\ y_1 & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{N-2} & N-2 & 1 \end{bmatrix};$$

P_λ – матрица эквивалентного возмущения, размера $N \times N$ в стохастическом разностном уравнении:

$$P_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & -\lambda_1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Рассмотрим теперь разностное уравнение (2.39), соответствующее модели первой и второй стадии деформации ползучести (2.28) в случае двух экспоненциальных слагаемых при наличии отдельной кривой ползучести. С учетом случайной помехи в результатах наблюдений ε_k , $k = \overline{0, N-1}$, разностное уравнение (2.39) примет следующий вид:

$$\begin{cases} y_0 = \varepsilon_0, \\ y_1 = \lambda_5 + \varepsilon_1, \\ y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 y_{k-1} + \lambda_3 k + \lambda_4 + \eta_k, \\ \eta_k = -\lambda_1 \varepsilon_{k-1} - \lambda_2 \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k, k = \overline{2, N-1}, \end{cases} \quad (3.9)$$

где $\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2$, $\lambda_2 = -\mu_1 \mu_2$, $\lambda_3 = B\tau(\mu_1 \mu_2 - \mu_2 - \mu_1 + 1)$,

$\lambda_4 = c_s(\mu_1 \mu_2 - \mu_2 - \mu_1 + 1) - 2\mu_1 \mu_2 B\tau$, $\lambda_5 = c_1(1 - e^{-\alpha_1 \tau}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 \tau})$, $c_s = \sum_{i=1}^2 c_i$,

$\mu_i = \exp(-\alpha_i \tau)$, $i = 1, 2$, или в форме обобщенной регрессионной модели:

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов разностного уравнения; $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1})$ – N -мерный вектор случайной помехи в результатах наблюдений; $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1})$ – N -мерный вектор эквивалентного случайного возмущения в обобщенной регрессионной модели;

$b = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ – N -мерный вектор правой части; F – матрица регрессоров размера $N \times 5$:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ y_1 & y_0 & 2 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{N-2} & y_{N-3} & N-1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

P_λ – матрица эквивалентного возмущения, размера $N \times N$ в стохастическом разностном уравнении:

$$P_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Рассмотрим разностное уравнение (2.46), соответствующее модели первой и второй стадий деформации ползучести (2.28) в случае трех экспоненциальных слагаемых при наличии отдельной кривой ползучести при постоянном напряжении. С учетом случайной помехи в результатах наблюдений ε_k , $k = \overline{0, N-1}$, разностное уравнение (2.46) примет следующий вид:

$$\begin{cases} y_0 = \varepsilon_0, \\ y_1 = \lambda_6 + \varepsilon_1, \\ y_2 = \lambda_7 + \varepsilon_2, \\ y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 y_{k-2} + \lambda_3 y_{k-3} + \lambda_4 k + \lambda_5 + \eta_k, \\ \eta_k = -\lambda_1 \varepsilon_{k-1} - \lambda_2 \varepsilon_{k-2} - \lambda_3 \varepsilon_{k-3} + \varepsilon_k, k = \overline{3, N-1}, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\text{где} \quad \lambda_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \quad \lambda_2 = -\mu_1 \mu_2 - \mu_1 \mu_3 - \mu_2 \mu_3, \quad \lambda_3 = \mu_1 \mu_2 \mu_3,$$

$$\lambda_4 = B\tau(-\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + 1),$$

$$\lambda_5 = B\tau(3\mu_1 \mu_2 \mu_3 - 2\mu_2 \mu_3 - 2\mu_1 \mu_3 - 2\mu_1 \mu_2 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3) +$$

$+c_s(-\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + 1)$, $c_s = \sum_{i=1}^3 c_i$, $\mu_i = \exp(-\alpha_i\tau)$, $i = \overline{1,3}$, или в форме обобщенной регрессионной модели:

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon. \end{cases}$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов разностного уравнения; $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1})$ – N -мерный вектор случайной помехи в результатах наблюдений; $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1})$ – N -мерный вектор эквивалентного случайного возмущения в обобщенной регрессионной модели; $b = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ – N -мерный вектор правой части; F – матрица регрессоров размера $N \times 7$:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ y_2 & y_1 & y_0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{N-2} & y_{N-3} & y_{N-4} & N-1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

P_λ – матрица эквивалентного возмущения размера $N \times N$ в стохастическом разностном уравнении:

$$P_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_3 & -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_3 & -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 & -\lambda_2 & -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Рассмотрим разностное уравнение (2.48), соответствующее модели ползучести в пределах первых двух стадий (2.28) в случае одного экспонен-

циального слагаемого для совокупности кривых ползучести при различных постоянных напряжениях σ_{0j} .

С учетом соотношения (3.1), выражающего связь между случайной погрешкой $\varepsilon_{k,j}$, дискретными значениями модели деформации ползучести $p_{k,j}$, и результатами наблюдений $y_{k,j}$, разностное уравнение (2.48), примет вид:

$$\begin{cases} y_{0,j} = \varepsilon_0, \\ \frac{y_{k,j}}{\sigma_{0j}^n} = \frac{y_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} \lambda_1 + \lambda_2 k + \lambda_3 + \eta_{k,j}, \\ \eta_{k,j} = -\frac{\varepsilon_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} \lambda_1 + \frac{\varepsilon_{k,j}}{\sigma_{0j}^n}, k = \overline{1, N-1}, j = \overline{1, M}, \end{cases} \quad (3.11)$$

где $\lambda_1 = e^{-\alpha\tau}$, $\lambda_2 = B\tau(1 - e^{-\alpha\tau})$, $\lambda_3 = c(1 - e^{-\alpha\tau}) + B\tau e^{-\alpha\tau}$.

Введем следующие векторы и матрицы: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ – трех мерный

вектор коэффициентов обобщенной регрессионной модели; $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}$ – блоч-

ный вектор правой части, размера $M \times N$, состоящий из M векторов b_j вида

$b_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{y_{1,j}}{\sigma_{0j}^n} \\ \vdots \\ \frac{y_{N-1,j}}{\sigma_{0j}^n} \end{bmatrix}$, $j = 1, 2, \dots, M$; $F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_M \end{bmatrix}$ – блочная матрица размера $[NM \times 3]$, со-

стоящая из M матриц F_j размера $[N \times 3]$ вида $F_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{p_0}{\sigma_{0j}^n} & 1 & 1 \\ \frac{p_1}{\sigma_{0j}^n} & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{p_{N-2}}{\sigma_{0j}^n} & N-2 & 1 \end{bmatrix}$;

$\varepsilon = [\varepsilon_1^T \mid \varepsilon_2^T \mid \dots \mid \varepsilon_M^T]^T$ – блочный вектор естественного разброса данных эксперимента размера $[N \times M \times 1]$, состоящий из M векторов ε_j размера $[N \times 1]$: $\varepsilon_j = [\varepsilon_{0,j}, \varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}, \dots, \varepsilon_{N-1,j}]^T$, $j=1,2,\dots,M$; $\eta = [\eta_1^T \mid \eta_2^T \mid \dots \mid \eta_M^T]^T$ – блочный вектор «невязки» обобщенной регрессионной модели размера $[NM \times 1]$, состоящий из M векторов η_j размера $[N \times 1]$: $\eta_j = [\eta_{0,j}, \eta_{2,j}, \eta_{3,j}, \dots, \eta_{N-1,j}]^T$,

где $\eta_{k,j} = -\frac{\varepsilon_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} \lambda_1 + \frac{\varepsilon_{k,j}}{\sigma_{0j}^n}$, $k=1,2,\dots,N-1$, $\eta_{0,j} = \varepsilon_{0,j}$, $j=1,2,\dots,M$;

$P_\lambda = \begin{bmatrix} P_1 & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & P_2 & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & \Theta & P_3 & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \dots & P_M \end{bmatrix}$ – блочно-диагональная квадратная матрица линей-

ного преобразования вектора остатков размера $[NM \times NM]$, состоящая из M матриц P_j размера $[N \times N]$, $j=1,2,\dots,M$, и нулевых матриц Θ , где

$$P_{j\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{0j}^n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0j}^n} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0j}^n} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0j}^n} \end{bmatrix}.$$

С учетом введенных выше векторов и матриц обобщенная регрессионная модель может быть представлена в виде

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon. \end{cases}$$

5. Рассмотрим разностное уравнение (2.49), соответствующее модели ползучести в пределах первых двух стадий (2.28) в случае двух экспоненциальных слагаемых для совокупности кривых ползучести при различных постоянных напряжениях σ_0 .

С учетом соотношения (3.1), выражающего связь между случайной погрешкой $\varepsilon_{k,j}$, дискретными значениями модели деформации ползучести $p_{k,j}$, и результатами наблюдений $y_{k,j}$, разностное уравнение (2.49), примет вид:

$$\begin{cases} y_{0,j} = \varepsilon_{0,j}, \\ \frac{y_{1,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_5 + \frac{\varepsilon_{1,j}}{\sigma_{0j}^n}, \\ \frac{y_{k,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_1 \frac{y_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_2 \frac{y_{k-2,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_3 k + \lambda_4 + \eta_{k,j}, \\ \eta_{k,j} = -\lambda_1 \frac{\varepsilon_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} - \lambda_2 \frac{\varepsilon_{k-2,j}}{\sigma_{0j}^n} + \frac{\varepsilon_{k,j}}{\sigma_{0j}^n}, k = \overline{2, N-1}, j = \overline{1, M}, \end{cases} \quad (3.12)$$

где $\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2$, $\lambda_2 = -\mu_1\mu_2$, $\lambda_3 = B\tau(\mu_1\mu_2 - \mu_2 - \mu_1 + 1)$,

$$\lambda_4 = c_s(\mu_1\mu_2 - \mu_2 - \mu_1 + 1) - 2\mu_1\mu_2 B\tau, \quad \lambda_5 = c_1(1 - e^{-\alpha_1\tau}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2\tau}), \quad c_s = \sum_{i=1}^2 c_i,$$

$$\mu_i = \exp(-\alpha_i\tau), \quad i=1,2.$$

Введем следующие векторы и матрицы: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)^T$ – вектор

коэффициентов обобщенной регрессионной модели; $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_2 \\ \dots \\ b_M \end{bmatrix}$ – блочный век-

тор правой части, размера $M \times N$, состоящий из M векторов b_j вида

$$b_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{y_{1,j}}{\sigma_{0j}^n} \\ \vdots \\ \frac{y_{N-1,j}}{\sigma_{0j}^n} \end{bmatrix}, \quad j=1,2,\dots,M; \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_2 \\ \dots \\ F_M \end{bmatrix} \text{ – блочная матрица размера } [NM \times 5], \text{ со-}$$

стоящая из M матриц F_j размера $[N \times 5]$ вида

$$F_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{y_1}{\sigma_{0j}^n} & \frac{y_0}{\sigma_{0j}^n} & 2 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{y_{N-2}}{\sigma_{0j}^n} & \frac{y_{N-3}}{\sigma_{0j}^n} & N-1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \varepsilon = [\varepsilon_1^T \mid \varepsilon_2^T \mid \dots \mid \varepsilon_M^T]^T \text{ – блочный вектор}$$

естественного разброса данных эксперимента размера $[N \times M \times 1]$, состоящий

из M векторов ε_j размера $[N \times 1]$: $\varepsilon_j = [\varepsilon_{0,j}, \varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}, \dots, \varepsilon_{N-1,j}]^T, \quad j=1,2,\dots,M;$

$\eta = [\eta_1^T \mid \eta_2^T \mid \dots \mid \eta_M^T]^T$ – блочный вектор «невязки» обобщенной регрессион-

ной модели размера $[NM \times 1]$, состоящий из M векторов η_j размера $[N \times 1]$:

$$\eta_j = [\eta_{0,j}, \eta_{2,j}, \eta_{3,j}, \dots, \eta_{N-1,j}]^T, \text{ где } \eta_{k,j} = -\frac{\varepsilon_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} \lambda_1 - \frac{\varepsilon_{k-2,j}}{\sigma_{0j}^n} \lambda_2 + \frac{\varepsilon_{k,j}}{\sigma_{0j}^n}, \quad k=2, \dots, N-1,$$

$$\eta_{0,j} = \varepsilon_{0,j}, \eta_{1,j} = \varepsilon_{1,j}, \quad j=1, 2, \dots, M; \quad P_\lambda = \begin{bmatrix} P_1 & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & P_2 & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & \Theta & P_3 & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \dots & P_M \end{bmatrix} - \text{ блочно-}$$

диагональная квадратная матрица линейного преобразования вектора остатков размера $[NM \times NM]$, состоящая из M матриц P_j размера $[N \times N]$, $j=1, 2, \dots, M$, и нулевых матриц Θ , где

$$P_{\lambda_j} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{0j}^n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{0j}^n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_2}{\sigma_{0j}^n} & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0j}^n} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_2}{\sigma_{0j}^n} & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0j}^n} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\lambda_2}{\sigma_{0j}^n} & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0j}^n} \end{bmatrix}.$$

С учетом введенных выше векторов и матриц обобщенная регрессионная модель может быть представлена в виде

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon. \end{cases}$$

6. Рассмотрим разностное уравнение (2.50), соответствующее модели ползучести в пределах первых двух стадий (2.28) в случае трех экспоненци-

альных слагаемых для спектра кривых ползучести при различных постоянных напряжениях.

С учетом соотношения (3.1), выражающего связь между случайной погрешкой $\varepsilon_{k,j}$, дискретными значениями модели деформации ползучести $p_{k,j}$, и результатами наблюдений $y_{k,j}$, разностное уравнение (2.50), примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{0,j} = \varepsilon_0, \\ \frac{y_{1,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_6 + \frac{\varepsilon_{1,j}}{\sigma_{0j}^n}, \\ \frac{y_{2,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_7 + \frac{\varepsilon_{2,j}}{\sigma_{0j}^n}, \\ \frac{y_{k,j}}{\sigma_{0j}^n} = \lambda_1 \frac{y_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_2 \frac{y_{k-2,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_3 \frac{y_{k-3,j}}{\sigma_{0j}^n} + \lambda_4 k + \lambda_5 + \eta_{k,j}, \\ \eta_{k,j} = -\lambda_1 \frac{\varepsilon_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} - \lambda_2 \frac{\varepsilon_{k-2,j}}{\sigma_{0j}^n} - \lambda_3 \frac{\varepsilon_{k-3,j}}{\sigma_{0j}^n} + \frac{\varepsilon_{k,j}}{\sigma_{0j}^n}, k = \overline{3, N-1}, j = \overline{1, M} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

где $\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$, $\lambda_2 = -\mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_3 - \mu_2\mu_3$, $\lambda_3 = \mu_1\mu_2\mu_3$,
 $\lambda_4 = B\tau(-\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + 1)$,
 $\lambda_5 = B\tau(3\mu_1\mu_2\mu_3 - 2\mu_2\mu_3 - 2\mu_1\mu_3 - 2\mu_1\mu_2 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3) +$
 $+c_s(-\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + 1)$,
 $c_s = \sum_{i=1}^3 c_i$, $\mu_i = \exp(-\alpha_i\tau)$, $i = \overline{1, 3}$.

Введем следующие векторы и матрицы: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_7)^T$ – вектор ко-

эффициентов обобщенной регрессионной модели; $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}$ – блочный вектор

правой части, размера $M \times N$, состоящий из M векторов b_j вида $b_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{y_{1,j}}{\sigma_{0j}^n} \\ \vdots \\ \frac{y_{N-1,j}}{\sigma_{0j}^n} \end{bmatrix}$,

$j=1,2,\dots,M$; $F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_M \end{bmatrix}$ – блочная матрица размера $[NM \times 7]$, состоящая из M

матриц F_j размера $[N \times 7]$ вида $F_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{y_2}{\sigma_{0j}^n} & \frac{y_1}{\sigma_{0j}^n} & \frac{y_0}{\sigma_{0j}^n} & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{y_{N-2}}{\sigma_{0j}^n} & \frac{y_{N-3}}{\sigma_{0j}^n} & \frac{y_{N-4}}{\sigma_{0j}^n} & N-1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$\varepsilon = [\varepsilon_1^T \mid \varepsilon_2^T \mid \dots \mid \varepsilon_M^T]^T$ – блочный вектор естественного разброса данных эксперимента размера $[N \times M \times 1]$, состоящий из M векторов ε_j размера

$[N \times 1]$: $\varepsilon_j = [\varepsilon_{0,j}, \varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}, \dots, \varepsilon_{N-1,j}]^T$, $j=1,2,\dots,M$; $\eta = [\eta_1^T \mid \eta_2^T \mid \dots \mid \eta_M^T]^T$ – блоч-

ный вектор «невязки» обобщенной регрессионной модели размера $[NM \times 1]$,

состоящий из M векторов η_j размера $[N \times 1]$: $\eta_j = [\eta_{0,j}, \eta_{2,j}, \eta_{3,j}, \dots, \eta_{N-1,j}]^T$,

где $\eta_{k,j} = -\frac{\varepsilon_{k-1,j}}{\sigma_{0j}^n} \lambda_1 - \frac{\varepsilon_{k-2,j}}{\sigma_{0j}^n} \lambda_2 - \frac{\varepsilon_{k-3,j}}{\sigma_{0j}^n} \lambda_3 + \frac{\varepsilon_{k,j}}{\sigma_{0j}^n}$, $k=3,\dots,N-1$, $\eta_{0,j} = \varepsilon_{0,j}$, $\eta_{1,j} = \varepsilon_{1,j}$,

$$\eta_{2,j} = \varepsilon_{2,j}, \quad j=1,2,\dots,M; \quad P_\lambda = \begin{bmatrix} P_1 & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & P_2 & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & \Theta & P_3 & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \dots & P_M \end{bmatrix} - \text{блочно-диагональная}$$

квадратная матрица линейного преобразования вектора остатков размера $[NM \times NM]$, состоящая из M матриц P_j размера $[N \times N]$, $j=1,2,\dots,M$, и нулевых матриц Θ , где

$$P_j = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{0j}^n} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_{0j}^n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{0j}^n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda_3}{\sigma_{0j}^n} & -\frac{\lambda_2}{\sigma_{0j}^n} & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0j}^n} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda_3}{\sigma_{0j}^n} & -\frac{\lambda_2}{\sigma_{0j}^n} & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0j}^n} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda_3}{\sigma_{0j}^n} & -\frac{\lambda_2}{\sigma_{0j}^n} & -\frac{\lambda_1}{\sigma_{0j}^n} & \frac{1}{\sigma_{0j}^n} \end{bmatrix}.$$

С учетом введенных выше векторов и матриц обобщенная регрессионная модель может быть представлена в виде

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon. \end{cases}$$

Таким образом, построили разностные уравнения, в рекуррентной форме связывающие последовательность дискретных экспериментальных значений деформации ползучести в пределах первых двух стадий, описываемой моделью (2.28) в случае от одного до трех экспоненциальных слагае-

мых, как в случае наличия отдельной кривой ползучести, так и совокупности кривых ползучести при различных постоянных напряжениях.

3.1.3. Построение разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений деформации на третьей стадии ползучести

1. Рассмотрим разностное уравнение (2.54), соответствующее последовательности временных отсчетов \tilde{t}_k , на основе модели (2.52) для описания деформации ползучести на третьей стадии в случае наличия одной кривой ползучести, $k = \overline{0, N-1}$, N – количество точек эксперимента. С учетом случайной помехи ε_k : $t_k = \tilde{t}_k + \varepsilon_k$, $k = \overline{0, N-1}$, разностное уравнение в этом случае примет вид:

$$\begin{cases} t_0 = \varepsilon_0, \\ t_k = \lambda_1 t_{k-1} + \lambda_2 + \eta_k, \\ \eta_k = -\lambda_1 \varepsilon_{k-1} + \varepsilon_k, k = \overline{1, N-1}, \end{cases} \quad (3.14)$$

где $\lambda_1 = \exp(-c_1 \Delta p)$, $\lambda_2 = \frac{1 - \exp(-c_1 \Delta p)}{c_2}$, или в виде обобщенной регрессион-

ной модели:

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon. \end{cases}$$

Здесь $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов разностного уравнения; $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N-1})$ – N -мерный вектор случайной помехи в результатах наблюдений; $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1})$ – N -мерный вектор эквивалентного случайного возмущения в обобщенной регрессионной модели; $b = (t_0, t_1, \dots, t_{N-1})$ – N -мерный вектор правой части; F – матрица регрессоров размера $N \times 2$:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t_0 & 1 \\ t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_{N-2} & 1 \end{bmatrix};$$

P_λ – матрица эквивалентного возмущения, размера $N \times N$ в стохастическом разностном уравнении:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & -\lambda_1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Рассмотрим теперь разностное уравнение (2.55):

$$\begin{cases} \tilde{t}_{0,j} = 0, \\ \ln \left[\exp(\lambda_1 \sigma_{0j} \Delta p_j) - 1 \right] - \ln \tilde{t}_{1,j} = \lambda_1 \sigma_{0j} \Delta p_j + \lambda_2 + \lambda_3 \ln \sigma_{0j}, \\ \ln \frac{\tilde{t}_{k-1,j} - \tilde{t}_{k-2,j}}{\tilde{t}_{k,j} - \tilde{t}_{k-1,j}} = \sigma_{0j} \Delta p_j \lambda_1, \quad k = 2, 3, \dots, N_j - 1; \quad j = 1, 2, 3, \dots, M. \end{cases}$$

где

$$\lambda_1 = m\alpha, \quad \lambda_2 = \ln(ct\alpha), \quad \lambda_3 = m + 1, \quad (3.15)$$

соответствующее модели третьей стадии ползучести (2.52) в случае наличия нескольких кривых ползучести при различных постоянных напряжениях σ_{0j} .

С учетом естественного разброса данных, результаты эксперимента примут вид $t_{k,j} = \tilde{t}_{k,j} + \varepsilon_{k,j}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, M$, где $t_{k,j}$ – результаты эксперимента, соответствующие j -той кривой, при значении аргумента $\Delta p_j k$; $\varepsilon_{k,j}$ – естественный разброс результатов наблюдения относительно модели

(2.52). После линейризации по переменным $\varepsilon_{1,j}$, $\varepsilon_{k-2,j}$, $\varepsilon_{k-1,j}$ и $\varepsilon_{k,j}$ выражений

$\ln(t_{1,j} - \varepsilon_{1,j})$ и $\ln \frac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j} - (\varepsilon_{k-1,j} - \varepsilon_{k-2,j})}{t_{k,j} - t_{k-1,j} - (\varepsilon_{k,j} - \varepsilon_{k-1,j})}$ в первом приближении получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln \tilde{t}_{1,j} = \ln(t_{1,j} - \varepsilon_{1,j}) \approx \ln t_{1,j} - \frac{\varepsilon_{1,j}}{t_{1,j}}, \\ \ln \frac{\tilde{t}_{k-1,j} - \tilde{t}_{k-2,j}}{\tilde{t}_{k,j} - \tilde{t}_{k-1,j}} = \ln \frac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j} - (\varepsilon_{k-1,j} - \varepsilon_{k-2,j})}{t_{k,j} - t_{k-1,j} - (\varepsilon_{k,j} - \varepsilon_{k-1,j})} \approx \ln \frac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}}{t_{k,j} - t_{k-1,j}} + \\ + \frac{1}{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}} \varepsilon_{k-2,j} - \frac{t_{k,j} - t_{k-2,j}}{(t_{k-1,j} - t_{k-2,j})(t_{k,j} - t_{k-1,j})} \varepsilon_{k-1,j} + \frac{1}{t_{k,j} - t_{k-1,j}} \varepsilon_{k,j}. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Подставляя формулы (3.16) в разностное уравнение (2.55), получаем разностное уравнение, описывающее совокупность экспериментальных значений $(p_{k,j}, t_{k,j})$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, M$. Учитывая, что в начальный момент времени $t_{0,j} = 0, j = \overline{1, M}$, деформация ползучести равна нулю, т.е. $p_{0,j} = 0, j = \overline{1, M}$, можно считать естественный разброс при $t = 0$ также равным нулю: т.е. положим $\varepsilon_{0,j} = 0$. Тогда получим следующее разностное уравнение:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{0,j} = 0; \\ \ln \left[\exp(\lambda_1 \sigma_{0,j} \Delta p_j) - 1 \right] - \ln t_{1,j} = \lambda_1 \sigma_{0,j} \Delta p_j + \lambda_2 + \lambda_3 \ln \sigma_{0,j} - \frac{\varepsilon_{1,j}}{t_{1,j}}; \\ \ln \frac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}}{t_{k,j} - t_{k-1,j}} = \sigma_{0,j} \Delta p_j \lambda_1 - \frac{1}{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}} \varepsilon_{k-2,j} + \frac{t_{k,j} - t_{k-2,j}}{(t_{k-1,j} - t_{k-2,j})(t_{k,j} - t_{k-1,j})} \varepsilon_{k-1,j} - \\ - \frac{1}{t_{k,j} - t_{k-1,j}} \varepsilon_{k,j}, \quad k = 2, 3, \dots, N_j - 1, \quad j = 1, 2, \dots, M. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Традиционно введем следующие обозначения для векторов и матриц:
 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ – вектор коэффициентов обобщенной регрессионной модели;

$b_\lambda = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}$ – блочный вектор размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 1 \right]$, в который входят M векто-

ров b_j размера $[N_j \times 1]$, имеющих вид:

$$b_j = \begin{bmatrix} t_{0,j} \\ \ln \frac{\exp(\lambda_1 \sigma_{0j} \Delta p_j) - 1}{t_{1,j}} \\ \ln \frac{t_{1,j} - t_{0,j}}{t_{2,j} - t_{1,j}} \\ \ln \frac{t_{2,j} - t_{1,j}}{t_{3,j} - t_{2,j}} \\ \vdots \\ \ln \frac{t_{N_j-2,j} - t_{N_j-3,j}}{t_{N_j-1,j} - t_{N_j-2,j}} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, M; \quad (3.18)$$

$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_M \end{bmatrix}$ – блочная матрица размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 3 \right]$, в которую входят M мат-

риц F_j размера $[N_j \times 3]$ вида

$$F_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{0j} \Delta p_j & 1 & \ln \sigma_{0j} \\ \sigma_{0j} \Delta p_j & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{0j} \Delta p_j & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, M; \quad (3.19)$$

$\varepsilon = [\varepsilon_1^T \mid \varepsilon_2^T \mid \dots \mid \varepsilon_M^T]^T$ – блочный вектор естественного разброса данных эксперимента размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 1 \right]$, в который входят M векторов ε_j размера

$$[N_j \times 1]: \quad \varepsilon_j = [\varepsilon_{0,j}, \varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}, \dots, \varepsilon_{N-1,j}]^T, \quad \text{где} \quad \varepsilon_{0,j} = 0, \quad j=1,2,\dots,M;$$

$\eta = [\eta_1^T \mid \eta_2^T \mid \dots \mid \eta_M^T]^T$ – блочный вектор «невязки» обобщенной регрессионной модели размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 1 \right]$, в который входят M векторов η_j размера

$$[N_j \times 1]: \quad \eta_j = [\eta_{1,j}, \eta_{2,j}, \eta_{3,j}, \dots, \eta_{N,j}]^T, \quad \text{и имеющих следующий вид:}$$

$$\eta_{i,j} = -\frac{1}{t_{i-2,j} - t_{i-3,j}} \varepsilon_{i-3,j} + \frac{t_{i-1,j} - t_{i-3,j}}{(t_{i-2,j} - t_{i-3,j})(t_{i-1,j} - t_{i-2,j})} \varepsilon_{i-2,j} - \frac{1}{t_{i-1,j} - t_{i-2,j}} \varepsilon_{i-1,j},$$

$$i = 3, 4, \dots, N_j, \quad \eta_{1,j} = \varepsilon_{0,j} = 0, \quad \eta_{2,j} = -\frac{\varepsilon_{1,j}}{t_{1,j}}, \quad j = 1, 2, \dots, M;$$

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & P_2 & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & \Theta & P_3 & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \dots & P_M \end{bmatrix} - \text{блочно-диагональная квадратная матрица линей-}$$

ного преобразования вектора остатков размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times \sum_{j=1}^M N_j \right]$, состоящая из

M матриц P_j размера $[N_j \times N_j]$, $j = 1, 2, \dots, M$, и нулевых матриц Θ . Квадратные матрицы P_j – нижние треугольные трехдиагональные матрицы, элементы которых описываются соотношениями:

– диагональные элементы:

$$p_{i,j}^j = \begin{cases} 1, & i = 1; \\ -\frac{1}{t_{1,j}}, & i = 2; \\ -\frac{1}{t_{i-1,j} - t_{i-2,j}}, & i = 3, 4, \dots, N_j; \end{cases} \quad (3.20)$$

– поддиагональные элементы:

$$p_{i,i-1}^j = \begin{cases} 0, & i = 2; \\ \frac{t_{i-1,j} - t_{i-3,j}}{(t_{i-2,j} - t_{i-3,j})(t_{i-1,j} - t_{i-2,j})}, & i = 3, 4, \dots, N_j; \end{cases} \quad (3.21)$$

– подподдиагональные элементы:

$$p_{i,i-2}^j = -\frac{1}{t_{i-2,j} - t_{i-3,j}}, \quad i = 3, 4, \dots, N_j, \quad (3.22)$$

остальные элементы матриц P_j равны нулю: $p_{k,i}^j = 0$ при $i > k$ и $i < k - 2$, $k, i = 1, 2, \dots, N_j$.

Таким образом, получаем обобщенную регрессионную модель вида

$$\begin{cases} b_\lambda = F\lambda + \eta; \\ \eta = P\varepsilon. \end{cases} \quad (3.23)$$

3. Рассмотрим разностное уравнение (2.60):

$$\begin{cases} \tilde{t}_{0,j} = 0, \\ \ln\left(e^{e^{\lambda_1} \sigma_{0j}^{\lambda_2} \Delta p_j} - 1\right) - e^{\lambda_1} \sigma_{0j}^{\lambda_2} \Delta p_j - \ln \tilde{t}_{1,j} = \lambda_3 \ln \sigma_{0j} + \lambda_4, \\ \ln \ln \frac{\tilde{t}_{k-1,j} - \tilde{t}_{k-2,j}}{\tilde{t}_{k,j} - \tilde{t}_{k-1,j}} - \ln \Delta p_j = \lambda_1 + \lambda_2 \ln \sigma_{0j}, \\ k = 2, 3, \dots, N_j - 1, \quad j = 1, 2, 3, \dots, M, \end{cases}$$

соответствующее модели третьей стадии ползучести при степенной зависимости параметра разупрочнения от напряжения (2.57), где связь между коэф-

коэффициентами разностного уравнения λ_i , $i = \overline{1,4}$, и параметрами исходной модели ползучести описывается формулами (2.59).

Используя соотношение, выражающее связь между значениями модели (2.60) $\tilde{t}_{k,j}$ и естественным разбросом результатов наблюдения $\varepsilon_{k,j}$: $t_{k,j} = \tilde{t}_{k,j} + \varepsilon_{k,j}$, $k = 0, 1, 2, \dots, N_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, M$, где $t_{k,j}$ – результат эксперимента, соответствующий j -той кривой при значении аргумента $p_{kj} = \Delta p_j k$, линеаризуя по переменным $\varepsilon_{1,j}$, $\varepsilon_{k-2,j}$, $\varepsilon_{k-1,j}$ и $\varepsilon_{k,j}$, в первом приближении получим:

$$\begin{aligned} \ln \tilde{t}_{1,j} &= \ln(t_{1,j} - \varepsilon_{1,j}) \approx \ln t_{1,j} + \frac{\varepsilon_{1,j}}{t_{1,j}}, \\ \ln \ln \frac{\tilde{t}_{k-1,j} - \tilde{t}_{k-2,j}}{\tilde{t}_{k,j} - \tilde{t}_{k-1,j}} &= \ln \ln \frac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j} - (\varepsilon_{k-1,j} - \varepsilon_{k-2,j})}{t_{k,j} - t_{k-1,j} - (\varepsilon_{k,j} - \varepsilon_{k-1,j})} \approx \\ &\approx \ln \ln \frac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}}{t_{k,j} - t_{k-1,j}} + \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial \varepsilon_{k-2}} \varepsilon_{k-2} + \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial \varepsilon_{k-1}} \varepsilon_{k-1} + \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial \varepsilon_k} \varepsilon_k, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial \varepsilon_{k-2}} &= \frac{1}{\ln \frac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}}{t_{k,j} - t_{k-1,j}}} \cdot \frac{1}{t_{k,j} - t_{k-1,j}}, \\ \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial \varepsilon_{k-1}} &= \frac{1}{\ln \frac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}}{t_{k,j} - t_{k-1,j}}} \cdot \frac{t_{k-2,j} - t_{k,j}}{(t_{k-1,j} - t_{k-2,j})(t_{k,j} - t_{k-1,j})}, \\ \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial \varepsilon_k} &= \frac{1}{\ln \frac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}}{t_{k,j} - t_{k-1,j}}} \cdot \frac{1}{(t_{k,j} - t_{k-1,j})}. \end{aligned} \right. \quad (3.25)$$

Подставляя соотношения (3.24) – (3.25) в систему уравнений (2.60), получаем систему разностных уравнений, которая описывает эксперименталь-

ные значения $(p_{k,j}, t_{k,j})$, $k=0,1,\dots,N_j-1$, $j=1,2,\dots,M$. Исходя из условия равенства нулю деформации ползучести в начальный момент времени $(p_{0,j}=0, t_{0,j}=0)$ и считая естественный разброс в начальный момент времени также равным нулю $(\varepsilon_{0,j}=0)$, имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{0,j}=0; \\ \ln\left(e^{e^{\lambda_1}\sigma_{0j}^{\lambda_2}\Delta p_j}-1\right)-e^{\lambda_4}\sigma_{0j}^{\lambda_2}\Delta p_j-\ln t_{1,j}=\lambda_3\ln\sigma_{0j}+\lambda_4+\eta_2; \\ \eta_2=-\frac{1}{t_{1,j}}\varepsilon_{1,j}; \\ \ln\ln\frac{t_{k-1,j}-t_{k-2,j}}{t_{k,j}-t_{k-1,j}}-\ln\Delta p_j=\lambda_1+\lambda_2\ln\sigma_{0j}+\eta_{k+1}; \\ \eta_{k+1}=-\frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial\varepsilon_{k-2}}\varepsilon_{k-2}-\frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial\varepsilon_{k-1}}\varepsilon_{k-1}-\frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial\varepsilon_k}\varepsilon_k, \\ k=2,3,\dots,N_j-1. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Введем традиционные обозначения для векторов и матриц:

$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)^T$ – вектор коэффициентов обобщенной регрессионной модели;

$b_\lambda = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_2 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ b_M \end{bmatrix}$ – блочный вектор размера $\begin{bmatrix} M \\ \sum_{j=1} N_j \times 1 \end{bmatrix}$, в который входят M векто-

ров b_j размера $[N_j \times 1]$ и имеющих вид

$$b_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \ln(\exp(e^{\lambda_1} \sigma_{0j}^{\lambda_2} \Delta p_j) - 1) - e^{\lambda_1} \sigma_{0j}^{\lambda_2} \Delta p_j - \ln t_{1,j} \\ \ln \ln \frac{t_{1,j}}{t_{2,j} - t_{1,j}} - \ln \Delta p_j \\ \ln \ln \frac{t_{2,j} - t_{1,j}}{t_{3,j} - t_{2,j}} - \ln \Delta p_j \\ \vdots \\ \ln \ln \frac{t_{N_j-2,j} - t_{N_j-3,j}}{t_{N_j-1,j} - t_{N_j-2,j}} - \ln \Delta p_j \end{bmatrix}; \quad (3.27)$$

$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_M \end{bmatrix}$ – блочная матрица размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 4 \right]$, в которую входят M мат-

риц F_j размера $[N_j \times 4]$ вида

$$F_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ln \sigma_{0j} & 1 \\ 1 & \ln \sigma_{0j} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ln \sigma_{0j} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad j=1,2,\dots,M; \quad (3.28)$$

$P = \begin{bmatrix} P_1 & \Theta & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & P_2 & \Theta & \dots & \Theta \\ \Theta & \Theta & P_3 & \dots & \Theta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Theta & \Theta & \Theta & \dots & P_M \end{bmatrix}$ – блочно-диагональная квадратная матрица линей-

ного преобразования вектора остатков размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times \sum_{j=1}^M N_j \right]$, в которую

входят M матриц P_j размера $[N_j \times N_j]$, $j=1,2,\dots,M$, и нулевых матриц Θ .

Квадратные матрицы P_j – нижние треугольные трехдиагональные матрицы, элементы которых описываются соотношениями:

– диагональные элементы:

$$p_{i,i}^j = \begin{cases} 1, & i=1; \\ -\frac{1}{t_{1,j}}, & i=2; \\ \frac{1}{\ln \frac{t_{i-2,j} - t_{i-3,j}}{t_{i-1,j} - t_{i-2,j}}} \cdot \frac{1}{(t_{i-2,j} - t_{i-1,j})}, & i=3,4,\dots,N_j, \end{cases} \quad (3.29)$$

– поддиагональные элементы:

$$p_{i,i-1}^j = \begin{cases} 0, & i=2; \\ \frac{1}{\ln \frac{t_{i-2,j} - t_{i-3,j}}{t_{i-1,j} - t_{i-2,j}}} \cdot \frac{t_{i-3,j} - t_{i-1,j}}{(t_{i-1,j} - t_{i-2,j})(t_{i-2,j} - t_{i-3,j})}; \\ i=3,4,\dots,N_j, \end{cases} \quad (3.30)$$

– подподдиагональные элементы:

$$p_{i,i-1}^j = \frac{1}{\ln \frac{t_{i-2,j} - t_{i-3,j}}{t_{i-1,j} - t_{i-2,j}}} \cdot \frac{1}{(t_{i-3,j} - t_{i-2,j})}, \quad i=3,4,\dots,N_j. \quad (3.31)$$

$\eta = [\eta_1^T \mid \eta_2^T \mid \dots \mid \eta_M^T]^T$ – блочный вектор «невязки» обобщенной регрессионной модели размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times 1 \right]$, состоящий из M векторов η_j размера

$$[N_j \times 1]: \quad \eta_j = [\eta_{1,j}, \eta_{2,j}, \eta_{3,j}, \dots, \eta_{N_j,j}]^T, \quad \text{где} \quad \eta_{1,j} = 0, \quad \eta_{2,j} = -\frac{\varepsilon_{1,j}}{t_{1,j}},$$

$$\eta_{k+1,j} = -\frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial \varepsilon_{k-2}} \varepsilon_{k-2,j} - \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial \varepsilon_{k-1}} \varepsilon_{k-1,j} - \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial \varepsilon_k} \varepsilon_{k,j}, \quad k=2,3,4,\dots,N_j-1, \quad j=1,2,\dots,M.$$

Таким образом, получаем обобщенную регрессионную модель вида:

$$\begin{cases} b_\lambda = F\lambda + \eta, \\ \eta = P\varepsilon. \end{cases} \quad (3.32)$$

Таким образом, для всех трех вариантов моделей ползучести с учетом стадии разупрочнения построены разностные уравнения и обобщенные регрессионные модели, описывающие последовательные результаты наблюдений деформации ползучести.

3.2. Численный метод определения параметров моделей ползучести на основе разностных уравнений

Численный метод определения параметров моделей ползучести на основе разностных уравнений состоит из следующих этапов.

1. Формирование выборки результатов наблюдений. Построение разностных уравнений для различных стадий ползучести (параграфы 2.2 – 3.1.3), которое основывается на использовании равномерной выборки по времени t для первой и второй стадии ползучести или по деформации ползучести p для третьей стадии. Равномерность дискретизации выборки результатов наблюдений должна быть обеспечена либо на стадии эксперимента, либо (если получение экспериментальных данных через заданные равные промежутки времени затруднено) путем предварительной статистической обработки или интерполяции полученных неравномерных значений результатов наблюдений. Решение задачи интерполирования подробно описано [2,35], в данной работе предварительная обработка экспериментальных данных по деформации ползучести производится с помощью скользящего сглаживания многочленом второй степени на основе метода наименьших квадратов.

2. Построение обобщенной регрессионной модели. На данном этапе происходит формирование матриц F , P и вектора b на основе соотношений, описанных в параграфе 3.1.

3. Среднеквадратическое оценивание коэффициентов обобщенной регрессионной модели. Выбор критерия близости математической модели дан-

ным эксперимента является важной задачей в математическом моделировании. В общем случае в качестве критерия меры близости расчетной и экспериментальной кривых ползучести используется расстояние между ними по некоторому выбранному направлению φ , $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ [69] (рисунок 3.1), а в качестве меры близости – безразмерный функционал вида [69]

$$\sum_{j=1}^M \left\{ \sin \varphi [p_j^T - p_j^{\text{э}}]^2 + \cos \varphi [t_j^T - t_j^{\text{э}}]^2 \right\} \rightarrow \min, \quad (3.33)$$

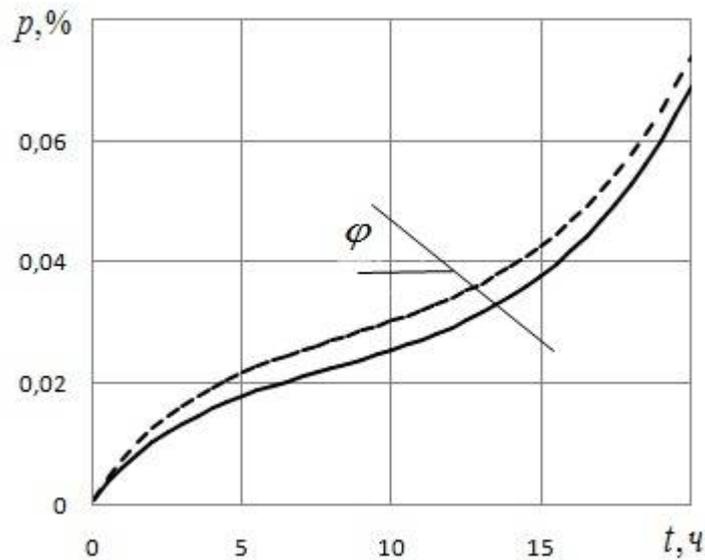


Рис.3.1. К выбору критерия (меры) близости экспериментальной (сплошная линия) и расчетной (штриховая линия) кривых ползучести.

где t_j^T , p_j^T – расчетные, а $t_j^{\text{э}}$, $p_j^{\text{э}}$ – экспериментальные значения времени и деформации ползучести, соответствующие точкам пересечения кривых ползучести с прямой, имеющей угол наклона φ к оси t , M – количество точек, используемых при минимизации функционала. Выбор данного критерия обоснован в [69]. В частных случаях критерий (3.33) включает традиционные методы близости по деформации $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ и по времени достижения заданного значения деформации ползучести ($\varphi = 0$) и свободен от их недостатков. Так, применение критерия близости по деформации $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ невозможно для

кривых ползучести с развитой третьей стадией, поскольку зависимость для деформации ползучести в этом случае близка к асимптотической. Близость же по времени ($\varphi = 0$) приводит к большим погрешностям при оценке параметров модели для материалов с незначительной скоростью деформации ползучести на второй стадии (стадии неустановившейся ползучести). В данной же работе, в силу того, что определяются параметры модели той или иной стадии ползучести, и используются экспериментальные данные, принадлежащие той или иной стадии, целесообразнее применять частные случаи критерия (3.33). Как уже отмечалось выше, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ имеем критерий близости по деформации ползучести, в этом случае критерий (3.33) примет вид:

$$\sum_{j=1}^M [p_j^T - p_j^Э]^2 \rightarrow \min, \quad (3.34)$$

и его целесообразно применять при оценивании параметров первой и второй стадии, а при $\varphi = 0$ имеем критерий близости по времени достижения заданного значения деформации ползучести:

$$\sum_{j=1}^M [t_j^T - t_j^Э]^2 \rightarrow \min, \quad (3.35)$$

и его целесообразно применять при оценивании третьей стадии ползучести.

От правильности и корректности разрабатываемой процедуры среднеквадратичного оценивания существенно зависит точность оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели.

4. Вычисление оценок параметров моделей ползучести по найденным коэффициентам обобщенной регрессионной модели. На данном этапе на основе полученных ранее в параграфах 2.2–2.5 соотношений (2.6), (2.13), (2.19), (2.33), (2.40), (2.47), (2.56), (2.59) происходит вычисление оценок параметров моделей ползучести. Из указанных выше соотношений получены следующие формулы:

–для первой стадии ползучести при различном количестве экспоненциальных слагаемых:

$$p(t) = c(1 - e^{-\alpha t}):$$

$$\hat{\alpha} = -\frac{1}{\tau} \ln(\hat{\lambda}_1), \quad \hat{c} = \frac{\hat{\lambda}_2}{1 - \hat{\lambda}_1};$$

$$p(t) = c_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 t}):$$

$$\mu^2 - \hat{\lambda}_1 \mu - \hat{\lambda}_2 = 0 \Rightarrow \hat{\mu}_i, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} \hat{c}_1 + \hat{c}_2 = \frac{\hat{\lambda}_3}{1 - \hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2}, \\ \hat{c}_1(1 - \hat{\mu}_1) + \hat{c}_2(1 - \hat{\mu}_2) = \hat{\lambda}_4 \end{cases}, \quad (3.37)$$

$$\hat{\alpha}_i = -\frac{1}{\tau} \ln(\hat{\mu}_i), \quad i = \overline{1, 2};$$

$$p(t) = c_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 t}) + c_3(1 - e^{-\alpha_3 t}):$$

$$\mu^3 - \hat{\lambda}_1 \mu^2 - \hat{\lambda}_2 \mu - \hat{\lambda}_3 = 0, \quad (3.38)$$

$$\begin{cases} \hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3 = \frac{\hat{\lambda}_4}{1 - \sum_{i=1}^3 \hat{\lambda}_i} \\ (1 - \mu_1)\hat{c}_1 + (1 - \mu_2)\hat{c}_2 + (1 - \mu_3)\hat{c}_3 = \hat{\lambda}_5, \\ (1 - \mu_1^2)\hat{c}_1 + (1 - \mu_2^2)\hat{c}_2 + (1 - \mu_3^2)\hat{c}_3 = \hat{\lambda}_6 \end{cases}, \quad (3.39)$$

$$\hat{\alpha}_i = -\frac{\ln \hat{\mu}_i}{\tau}, \quad i = 1, 2, 3.$$

–для первой и второй стадий ползучести:

$$p(t) = c(1 - e^{-\alpha t}) + Bt:$$

$$\hat{\alpha} = -\frac{1}{\tau} \ln(\hat{\lambda}_1), \quad \hat{B} = \frac{\hat{\lambda}_2}{(1-\hat{\lambda}_1)\tau}, \quad \hat{c} = \frac{\hat{\lambda}_3}{1-\hat{\lambda}_1} - \frac{\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2}{(1-\hat{\lambda}_1)^2}; \quad (3.40)$$

$$p(t) = c_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 t}) + Bt:$$

$$\mu^2 - \hat{\lambda}_1 \mu - \hat{\lambda}_2 = 0 \Rightarrow \hat{\mu}_i, \quad i = \overline{1, 2}, \quad (3.41)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{c}_1 + \hat{c}_2 &= \frac{\hat{\lambda}_4(\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1 + 1) + 2\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 \hat{\lambda}_3}{(\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1 + 1)^2}, \\ \hat{c}_1(1 - \hat{\mu}_1) + \hat{c}_2(1 - \hat{\mu}_2) &= \hat{\lambda}_5 - \frac{\hat{\lambda}_3}{(\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1 + 1)} \end{aligned} \right., \quad (3.42)$$

$$\hat{\alpha}_i = -\frac{1}{\tau} \ln(\hat{\mu}_i), \quad i = \overline{1, 2}, \quad \hat{B} = \frac{\hat{\lambda}_3}{\tau(-\hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_1)};$$

$$p(t) = c_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 t}) + c_3(1 - e^{-\alpha_3 t}) + Bt:$$

$$\mu^3 - \hat{\lambda}_1 \mu^2 - \hat{\lambda}_2 \mu - \hat{\lambda}_3 = 0 \Rightarrow \hat{\mu}_i, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (3.43)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3 &= \hat{\lambda}_5 - \frac{(3\hat{\lambda}_3 + 2\hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_1)\hat{\lambda}_4}{1 - \sum_{i=1}^3 \hat{\lambda}_i} \\ \hat{c}_1(1 - \hat{\mu}_1) + \hat{c}_2(1 - \hat{\mu}_2) + \hat{c}_3(1 - \hat{\mu}_3) &= \hat{\lambda}_6 - \frac{\hat{\lambda}_4}{1 - \sum_{i=1}^3 \hat{\lambda}_i} \\ \hat{c}_1(1 - \hat{\mu}_1^2) + \hat{c}_2(1 - \hat{\mu}_2^2) + \hat{c}_3(1 - \hat{\mu}_3^2) &= \hat{\lambda}_7 - \frac{2\hat{\lambda}_4}{1 - \sum_{i=1}^3 \hat{\lambda}_i} \end{aligned} \right. \quad (3.44)$$

$$\hat{\alpha}_i = -\frac{1}{\tau} \ln(\hat{\mu}_i), \quad i = \overline{1, 3}, \quad \hat{B} = \frac{\hat{\lambda}_4}{\tau(1 - \hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2 - \hat{\lambda}_3)}.$$

—для третьей стадии ползучести:

$$t = \frac{1}{c_2} [1 - \exp(-c_1 p)]:$$

$$\hat{c}_1 = -\frac{1}{\Delta p} \ln(\hat{\lambda}_1), \quad \hat{c}_2 = \frac{1 - \hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_2};$$

$$p(t, \sigma_{0j}) = -\frac{1}{\sigma_{0j} m \alpha} \ln(1 - \alpha m c \sigma_{0j}^{m+1} t):$$

$$\hat{m} = \hat{\lambda}_3 - 1, \quad \hat{\alpha} = \frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_3 - 1}, \quad \hat{c} = \frac{e^{\hat{\lambda}_2}}{\hat{\lambda}_1}; \quad (3.45)$$

$$c m \alpha \sigma_{0j}^{m+m_1+1} t = 1 - \exp(-m \alpha \sigma_{0j}^{m_1+1} p):$$

$$\hat{m}_1 = \hat{\lambda}_2 - 1, \quad \hat{m} = \hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_2, \quad \hat{\alpha} = \frac{e^{\hat{\lambda}_4}}{\hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_2}, \quad \hat{c} = e^{\hat{\lambda}_4 - \hat{\lambda}_1}. \quad (3.46)$$

5. Оценка погрешности результатов вычисления. Оценка погрешности полученных результатов вычисления является важным этапом, без которого задачу разработки численного метода нельзя считать решенной. Среди факторов, влияющих на возникновение погрешности, выделяют [19] случайные и систематические ошибки измерения экспериментальных данных, допущения, сделанные при построении математической модели, и, как следствие, ухудшающие ее адекватность, погрешности округлений при выполнении арифметических операций.

Для оценки погрешности результатов вычисления параметров модели ползучести воспользуемся методикой, подробно описанной в [23].

Параметры моделей ползучести a (под a подразумевается любой из параметров рассмотренных моделей) связаны установленными соотношениями с коэффициентами разностных уравнений $\lambda : a = a(\lambda)$. Оценивание же коэффициентов λ происходит с помощью итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания, и оценки λ являются статистикой, т.е. случайной величиной [14]. Таким образом, оценка погрешности a является оценкой погрешности при косвенных измерениях λ , и процедура вычисления погрешности параметров моделей ползучести может быть разделена на следующие

основные этапы: вычисление оценки s^2 дисперсии случайной помехи в результатах наблюдений; вычисление дисперсий $s^2[\hat{\lambda}_j]$ и ковариаций $\text{cov}[\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j]$ оценок коэффициентов разностного уравнения; вычисление дисперсий оценок параметров моделей ползучести; вычисление с заданной вероятностью доверительных границ случайной составляющей погрешности. Эти границы могут рассматриваться как предельные абсолютные погрешности параметров модели ползучести $\Delta a: a = \hat{a} \pm \Delta a$. На заключительном этапе процедуры вычисления погрешности находятся предельные относительные погрешности Δ_a .

Для вычисления оценки дисперсии s^2 можно использовать оценку $s^2 = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (p_k - \hat{p}_k)^2}{N - n}$, где p_k – данные эксперимента; \hat{p}_k – результаты вычислений на основе модели ползучести; n – число коэффициентов в обобщенной регрессионной модели, N – объем выборки экспериментальных данных.

Далее происходит вычисление элементов матрицы дисперсий-ковариаций вектора коэффициентов регрессии:

$$V[\hat{\lambda}] = (F_{\hat{\lambda}} \Omega_{\hat{\lambda}}^{-1} F_{\hat{\lambda}}^T)^{-1} s^2, \quad (3.47)$$

диагональные элементы матрицы дисперсий-ковариаций являются оценками дисперсий коэффициентов разностного уравнения: $s^2[\hat{\lambda}_j] = c_{jj} s^2$, где c_{jj} – диагональные элементы матрицы $C = (F_{\hat{\lambda}} \Omega_{\hat{\lambda}}^{-1} F_{\hat{\lambda}}^T)^{-1}$, недиагональные элементы матрицы (3.47) являются оценками ковариаций: $\text{cov}[\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j] = c_{ij} s^2$.

Оценка дисперсии результата вычислений параметра модели ползучести $\hat{a} = \hat{a}(\hat{\lambda}_i)$, $i = \overline{1, n}$, где n – количество коэффициентов в соответствующем разностном уравнении, находится в виде [23]:

$$s^2[\hat{a}] \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \hat{a}}{\partial \hat{\lambda}_i} \right)^2 s^2[\hat{\lambda}_i] + 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 \frac{\partial \hat{a}}{\partial \hat{\lambda}_i} \frac{\partial \hat{a}}{\partial \hat{\lambda}_j} \text{cov}[\hat{\lambda}_i, \hat{\lambda}_j]. \quad (3.48)$$

Если параметр модели ползучести зависит от каких-либо промежуточных параметров $\hat{a} = \hat{a}[\mu(\hat{\lambda}_i)]$, $i = \overline{1, n}$, и имеется m нелинейных зависимостей аргументов λ_i , $i = \overline{1, n}$,

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_1(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \\ \mu_2 = \mu_2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \\ \vdots \\ \mu_n = \mu_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \end{cases}$$

как в разностных уравнениях (2.12), (2.18), (2.25), (2.26), (2.39), (2.46), то оценка дисперсии случайной величины μ_i , $i = \overline{1, m}$, может быть найдена по формуле [23]:

$$s^2_{\mu_i} \approx \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \hat{\lambda}_j} \right)^2 s^2_{\lambda_j} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \frac{\partial \mu_i}{\partial \hat{\lambda}_j} \frac{\partial \mu_i}{\partial \hat{\lambda}_k} \text{cov}[\hat{\lambda}_j, \hat{\lambda}_k], \quad (3.49)$$

где $\text{cov}(\lambda_j, \lambda_k) = \rho_{jk} s_{\lambda_j} s_{\lambda_k}$ – оценка ковариации случайных величин λ_j и λ_k ; ρ_{jk} – оценка коэффициента корреляции этих величин; $s_{\lambda_j} = \sqrt{s^2_{\lambda_j}}$ – среднеквадратическое отклонение случайной величины λ_j .

Выражение (3.49) есть квадратичная форма относительно переменных s_{λ_j} , $j = \overline{1, n}$, которую можно представить в матричном виде

$$s^2_{\mu_i} = d\mu_i^T \cdot V[\lambda] \cdot d\mu_i, \quad (3.50)$$

где $d\mu_i = \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_2}, \dots, \frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_n} \right)^T$ – вектор, элементами которого являются частные производные от функции μ_i по аргументам λ_j ; $V[\lambda]$ – матрица оценок дисперсий-ковариаций случайных величин $\hat{\lambda}_j$:

$$V[\lambda] = \left[\begin{array}{cc|c} s_{\lambda_1}^2 & \text{cov}(\lambda_1, \lambda_2) & \text{cov}(\lambda_1, \lambda_n) \\ \text{cov}(\lambda_2, \lambda_1) & s_{\lambda_2}^2 & \text{cov}(\lambda_2, \lambda_n) \\ \hline \text{cov}(\lambda_n, \lambda_1) & \text{cov}(\lambda_n, \lambda_2) & s_{\lambda_n}^2 \end{array} \right] = Cs_{\varepsilon}^2. \quad (3.51)$$

Для вычисления оценок ковариаций $\text{cov}(\mu_i, \mu_j)$ можно воспользоваться формулой [23]:

$$\text{cov}(\mu_i, \mu_j) = d\mu_i^T \cdot V[\lambda] \cdot d\mu_j. \quad (3.52)$$

С учетом (3.50) и (3.52) матрицу оценок дисперсий-ковариаций случайных величин $\mu_i, i = \overline{1, m}$, можно представить в виде

$$V[\mu] = M^T \cdot V[\lambda] \cdot M, \quad (3.53)$$

где матрица M размера $[n \times m]$ имеет вид

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{\partial \mu_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \mu_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \mu_m}{\partial \lambda_1} \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial \mu_2}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial \mu_m}{\partial \lambda_2} \\ \hline \frac{\partial \mu_1}{\partial \lambda_n} & \frac{\partial \mu_2}{\partial \lambda_n} & \frac{\partial \mu_m}{\partial \lambda_n} \end{array} \right]. \quad (3.54)$$

Построение матрицы M основывается на формировании и решении системы линейных алгебраических уравнений относительно частных производных. С учетом формул (3.36):

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = \lambda_1, \\ -\mu_1 \mu_2 = \lambda_2 \end{cases}, \quad (3.55)$$

получаем матричное уравнение

$$GM^T = L, \quad (3.56)$$

где M – матрица, элементы которой описываются формулой (3.54) при $m = 2$,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\mu_2 & -\mu_1 \end{bmatrix}; \quad (3.57)$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Так как величины μ_i , $i = \overline{1,2}$, не равны между собой, то матрица G не вырождена, и существует обратная матрица G^{-1} такая, что

$$M = L^T (G^{-1})^T. \quad (3.59)$$

В соответствии с (3.59) имеем формулы

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu_1}{\partial \lambda_1} = -\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}, \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial \lambda_1} = \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1}, \end{cases} \quad (3.60)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu_1}{\partial \lambda_2} = -\frac{1}{\mu_2 - \mu_1}, \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1}, \end{cases} \quad (3.61)$$

которые справедливы для моделей первой, а также первой и второй стадий ползучести в случае двух экспоненциальных слагаемых. С учетом зависимости корней уравнения μ_i , $i = \overline{1,3}$, $\mu^3 - \hat{\lambda}_1 \mu^2 - \hat{\lambda}_2 \mu - \hat{\lambda}_3 = 0$, справедливой для разностных уравнений, описывающих последовательности наблюдений для первой, а также первой и второй стадий ползучести в случае трех экспоненциальных слагаемых, имеем

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \lambda_1, \\ -\mu_1 \mu_2 - \mu_1 \mu_3 - \mu_2 \mu_3 = \lambda_2, \\ \mu_1 \mu_2 \mu_3 = \lambda_3, \end{cases} \quad (3.62)$$

откуда получаем матричное уравнение

$$GM^T = L, \quad (3.63)$$

где M – матрица, элементы которой описываются формулой (3.54) при $m = 3$,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\mu_2 - \mu_3 & -\mu_1 - \mu_3 & -\mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 \mu_3 & \mu_1 \mu_3 & \mu_1 \mu_2 \end{bmatrix}; \quad (3.64)$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

С учетом (3.59) имеем формулы

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu_1}{\partial \lambda_1} = \frac{\mu_1^2}{(\mu_2 - \mu_1)\mu_3 - \mu_1 \mu_2 + \mu_1^2}, \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial \lambda_1} = -\frac{\mu_2^2}{(\mu_2 - \mu_1)\mu_3 - \mu_2^2 + \mu_1 \mu_2}, \\ \frac{\partial \mu_3}{\partial \lambda_1} = \frac{\mu_3^2}{\mu_3^2 + (-\mu_2 - \mu_1)\mu_3 + \mu_1 \mu_2}, \end{cases} \quad (3.66)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu_1}{\partial \lambda_2} = \frac{\mu_1}{(\mu_2 - \mu_1)\mu_3 - \mu_1 \mu_2 + \mu_1^2}, \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial \lambda_2} = -\frac{\mu_2}{(\mu_2 - \mu_1)\mu_3 - \mu_2^2 + \mu_1 \mu_2}, \\ \frac{\partial \mu_3}{\partial \lambda_2} = \frac{\mu_3}{\mu_3^2 + (-\mu_2 - \mu_1)\mu_3 + \mu_1 \mu_2}, \end{cases} \quad (3.67)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu_1}{\partial \lambda_3} = \frac{1}{(\mu_2 - \mu_1)\mu_3 - \mu_1 \mu_2 + \mu_1^2}, \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial \lambda_3} = -\frac{1}{(\mu_2 - \mu_1)\mu_3 - \mu_2^2 + \mu_1 \mu_2}, \\ \frac{\partial \mu_3}{\partial \lambda_3} = \frac{1}{\mu_3^2 + (-\mu_2 - \mu_1)\mu_3 + \mu_1 \mu_2}. \end{cases} \quad (3.68)$$

При определении параметров модели для первой стадии ползучести, а также для модели первой и второй стадий ползучести в случае двух и трех экспоненциальных слагаемых, необходимо решить системы (3.37), (3.39), (3.42), (3.44), и, следовательно, оценить погрешность полученного решения.

Известна априорная оценка погрешности решения системы линейных уравнений $Ax = b$ [9, 60] в виде

$$\delta_x \leq \frac{\text{cond } A}{1 - \text{cond } A \cdot \delta_A} (\delta_A + \delta_b), \quad (3.69)$$

где $\text{cond } A = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$.

Матрицы A и A^{-1} в случае двух экспоненциальных слагаемых имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 - \mu_1 & 1 - \mu_2 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} & -\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \\ \frac{\mu_1 - 1}{\mu_1 - \mu_2} & \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \end{bmatrix},$$

в случае трех экспоненциальных слагаемых:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 - \mu_1 & 1 - \mu_2 & 1 - \mu_3 \\ 1 - \mu_1^2 & 1 - \mu_2^2 & 1 - \mu_3^2 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(\mu_2 - 1)\mu_3 - \mu_2 + 1}{(\mu_2 - \mu_1)\mu_3 - \mu_1\mu_2 + \mu_1^2} & \frac{\mu_3 + \mu_2}{(\mu_2 - \mu_1)\mu_3 - \mu_1\mu_2 + \mu_1^2} & -\frac{1}{(\mu_2 - \mu_1)\mu_3 - \mu_1\mu_2 + \mu_1^2} \\ \frac{(\mu_1 - 1)\mu_3 - \mu_1 + 1}{(\mu_2 - \mu_1)\mu_3 - \mu_2^2 + \mu_1\mu_2} & \frac{\mu_3 + \mu_1}{(\mu_2 - \mu_1)\mu_3 - \mu_2^2 + \mu_1\mu_2} & \frac{1}{(\mu_2 - \mu_1)\mu_3 - \mu_2^2 + \mu_1\mu_2} \\ \frac{(\mu_1 - 1)\mu_2 - \mu_1 + 1}{\mu_3^2 + (-\mu_2 - \mu_1)\mu_3 + \mu_1\mu_2} & \frac{\mu_2 + \mu_1}{\mu_3^2 + (-\mu_2 - \mu_1)\mu_3 + \mu_1\mu_2} & -\frac{1}{\mu_3^2 + (-\mu_2 - \mu_1)\mu_3 + \mu_1\mu_2} \end{bmatrix}.$$

Для построения доверительных границ случайной погрешности результата вычислений любого параметра $\hat{a} = \hat{a}(\hat{\lambda}_i)$ можно воспользоваться формулой [23]:

$$\Delta a = t_\beta s[\hat{a}]. \quad (3.70)$$

В первом приближении можно считать, что статистика t_β имеет распределение Стьюдента с $\nu = N - n$ степенями свободы, где N – объем выборки, n – количество коэффициентов в соответствующем разностном уравне-

нии. В этом случае, например при доверительной вероятности $\beta = 0.95$ и числе степеней свободы $\nu \geq 25$ достаточно принять $t_\beta = 2.1$.

Найденная величина Δa может рассматриваться в качестве предельной абсолютной погрешности (с заданной вероятностью) результата вычисления рассматриваемого параметра: $a = \hat{a} \pm \Delta a$. Предельная относительная погрешность результата вычислений параметра $\hat{a} = \hat{a}(\hat{\lambda}_i)$ находится по формуле

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{|a|}.$$

На завершающем этапе находится мера адекватности построенной модели экспериментальным данным. Мера адекватности в абсолютных единицах находится по формуле: $\Delta p = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} (p_k - \hat{p}_k)^2}{N - n} = s_{ocm}^2$, в относительных едини-

цах: $\delta p = \frac{\|p - \hat{p}\|}{\|p\|} 100\% = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{N-1} (p_k - \hat{p}_k)^2}{\sum_{k=0}^{N-1} p_k^2}} 100\%$. На основе полученных соотношений делается вывод об удовлетворительной (или неудовлетворительной) точности оценивания параметров моделей ползучести заданным требованиям.

Получены следующие формулы и соотношения для вычисления оценок дисперсий результатов вычисления параметров моделей ползучести:

– для первой стадии ползучести в случае одного экспоненциального слагаемого:

$$p(t) = c(1 - e^{-\alpha t}):$$

$$s^2[\hat{\alpha}] = \frac{1}{\tau^2 \lambda_1^2} s^2[\hat{\lambda}_1], \quad (3.71)$$

$$s^2[\hat{c}] = \frac{\hat{\lambda}_2^2}{(1-\hat{\lambda}_1)^4} s^2[\hat{\lambda}_1] + \frac{1}{(1-\hat{\lambda}_1)^2} s^2[\hat{\lambda}_2] + 2 \frac{\hat{\lambda}_2}{(1-\hat{\lambda}_1)^3} \text{cov}[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2]; \quad (3.72)$$

– для первой и второй стадий ползучести в случае одного экспоненциального слагаемого:

$$p(t) = c(1 - e^{-at}) + Bt:$$

$$s^2[\hat{\alpha}] = \frac{1}{\tau^2 \lambda_1^2} s^2[\hat{\lambda}_1], \quad (3.73)$$

$$s^2[\hat{B}] = \frac{\hat{\lambda}_2^2}{(1-\hat{\lambda}_1)^4 \tau^2} s^2[\hat{\lambda}_1] + \frac{1}{(1-\hat{\lambda}_1)^2 \tau^2} s^2[\hat{\lambda}_2] + 2 \frac{\hat{\lambda}_2}{(1-\hat{\lambda}_1)^3 \tau^2} \text{cov}[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2], \quad (3.74)$$

$$s^2[\hat{c}] = \left(\frac{\partial c}{\partial \lambda_1} \right)^2 s^2[\hat{\lambda}_1] + \left(\frac{\partial c}{\partial \lambda_2} \right)^2 s^2[\hat{\lambda}_2] + \left(\frac{\partial c}{\partial \lambda_3} \right)^2 s^2[\hat{\lambda}_3] + 2 \frac{\partial c}{\partial \lambda_1} \frac{\partial c}{\partial \lambda_2} \text{cov}[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2] + 2 \frac{\partial c}{\partial \lambda_1} \frac{\partial c}{\partial \lambda_3} \text{cov}[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_3] + 2 \frac{\partial c}{\partial \lambda_2} \frac{\partial c}{\partial \lambda_3} \text{cov}[\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3], \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \lambda_1} = \frac{\hat{\lambda}_3}{(1-\hat{\lambda}_1)^2} - \frac{2\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2}{(1-\hat{\lambda}_1)^3} - \frac{\hat{\lambda}_2}{(1-\hat{\lambda}_1)^2}, \quad \frac{\partial c}{\partial \lambda_2} = -\frac{\hat{\lambda}_1}{(1-\hat{\lambda}_1)^2}, \quad \frac{\partial c}{\partial \lambda_3} = \frac{1}{1-\hat{\lambda}_1}. \quad (3.76)$$

– для третьей стадии ползучести:

$$t = \frac{1}{c_2} [1 - \exp(-c_1 p)]:$$

$$\hat{c}_1 = -\frac{1}{\Delta p} \ln(\hat{\lambda}_1), \quad \hat{c}_2 = \frac{1-\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_2};$$

$$s^2[\hat{c}_1] = \frac{1}{\hat{\lambda}_1^2 \Delta p^2} s^2[\hat{\lambda}_1], \quad s^2[\hat{c}_2] = \frac{1}{\hat{\lambda}_2} s^2[\hat{\lambda}_1] + \frac{(1-\hat{\lambda}_1)^2}{\hat{\lambda}_2^4} s^2[\hat{\lambda}_2] + 2 \frac{1-\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_2^3} \text{cov}[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2];$$

$$p(t, \sigma_{0j}) = -\frac{1}{\sigma_{0j} m \alpha} \ln(1 - \alpha m c \sigma_{0j}^{m+1} t):$$

$$s^2[\hat{m}] = s^2[\hat{\lambda}_3], \quad (3.77)$$

$$s^2[\hat{\alpha}] = \frac{s^2[\hat{\lambda}_1]}{(\hat{\lambda}_3 - 1)^2} + \frac{\hat{\lambda}_1^2}{(\hat{\lambda}_3 - 1)^4} s^2[\hat{\lambda}_3] - 2 \frac{\hat{\lambda}_1}{(\hat{\lambda}_3 - 1)^3} \text{cov}[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_3], \quad (3.78)$$

$$s^2[\hat{c}] = \frac{e^{2\hat{\lambda}_2}}{\hat{\lambda}_1^4} s^2[\hat{\lambda}_1] + \frac{e^{2\hat{\lambda}_2}}{\hat{\lambda}_1^2} s^2[\hat{\lambda}_2] - 2 \frac{e^{2\hat{\lambda}_2}}{\hat{\lambda}_1^3} \text{cov}[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2]; \quad (3.79)$$

$$c m \alpha \sigma_{0j}^{m+m_1+1} t = 1 - \exp(-m \alpha \sigma_{0j}^{m_1+1} p):$$

$$s^2[\hat{m}_1] = s^2[\hat{\lambda}_2], \quad s^2[\hat{m}] = s^2[\hat{\lambda}_2] + s^2[\hat{\lambda}_3] - 2 \text{cov}[\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3],$$

$$s^2[\hat{\alpha}] = \frac{e^{2\hat{\lambda}_1}}{(\hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_2)^2} s^2[\hat{\lambda}_1] + \frac{e^{2\hat{\lambda}_1}}{(\hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_2)^4} s^2[\hat{\lambda}_2] + \frac{e^{2\hat{\lambda}_1}}{(\hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_2)^4} s^2[\hat{\lambda}_3] +$$

$$2 \frac{e^{2\hat{\lambda}_1}}{(\hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_2)^3} \text{cov}[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2] - 2 \frac{e^{2\hat{\lambda}_1}}{(\hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_2)^3} \text{cov}[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_3] - 2 \frac{e^{2\hat{\lambda}_1}}{(\hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_2)^4} \text{cov}[\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3],$$

$$s^2[\hat{c}] = e^{2(\hat{\lambda}_4 - \hat{\lambda}_1)} (s^2[\hat{\lambda}_1] + s^2[\hat{\lambda}_2]) - 2e^{2(\hat{\lambda}_4 - \hat{\lambda}_1)} \text{cov}[\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2].$$

Полученные формулы позволяют на этапе имитационного моделирования процесса ползучести проводить численно-аналитические исследования эффективности разработанных численных методов. При имитационном моделировании реализуется генерация истинных (точных) дискретных значений деформации ползучести при заданных значениях параметров модели ползучести. Далее, к сгенерированным значениям модели деформации ползучести добавляются случайные величины, распределенные по нормальному закону с заданными числовыми характеристиками. Оценки параметров модели ползучести, полученные на основе среднеквадратичного оценивания коэффициентов соответствующего разностного уравнения, позволяют вычислять погрешность результата вычисления по формулам:

$$\Delta a = |a - \hat{a}|, \delta_a = \frac{|a - \hat{a}|}{|a|} = \frac{\Delta a}{|a|},$$

где a – точное значение параметра, \hat{a} – оценка параметра. После сравнения полученной погрешности вычисления с теоретической оценкой погрешности делается вывод об эффективности применяемого численного метода.

3.3. Разработка и исследование итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели

Вычисление оценок коэффициентов построенных обобщенных регрессионных моделей, в зависимости от стадии ползучести, происходит на основе минимизации остаточной суммы квадратов

$$Q = \|\varepsilon\|^2 = \|t - \hat{t}\|^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N_j-1} (t_{k,j} - \hat{t}_{k,j}) \rightarrow \min,$$

или

$$Q = \|\varepsilon\|^2 = \|p - \hat{p}\|^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N_j-1} (p_{k,j} - \hat{p}_{k,j}) \rightarrow \min,$$

где $p_{k,j}, t_{k,j}$ – дискретные значения деформации ползучести и временные отсчеты соответственно, $\hat{p}_{k,j}, \hat{t}_{k,j}$ – значения, полученные на основе модели, M – количество кривых ползучести, N_j – количество точек эксперимента в j – ой кривой ползучести. Обобщенные регрессионные модели, в зависимости от входящих в модель векторов и матриц, можно разделить на два вида, что, в свою очередь, определяет особенности процедуры среднеквадратичного оценивания и всего алгоритма разрабатываемого численного метода.

1. К первому виду регрессионных моделей можно отнести регрессионную модель вида

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases} \quad (3.80)$$

где вектор правой части b и матрица регрессоров F зависят только от последовательных экспериментальных значений, а матрица эквивалентного случайного возмущения P_λ зависит от коэффициентов разностного уравнения λ . Данному виду соответствуют регрессионные модели (3.2)–(3.13).

Остаточную сумму квадратов в регрессионных моделях вида (3.80) при невырожденной матрице P_λ можно представить в виде $Q = \|\varepsilon\|^2 = \|P_\lambda^{-1}b_\lambda - P_\lambda^{-1}F\lambda\|^2$. Дифференцируя остаточную сумму квадратов Q по переменным λ_i , приравнивая нулю результаты дифференцирования, получаем систему нормальных уравнений, которая в векторной форме принимает вид

$$(F^T + B_\lambda D_p^T) \Omega_\lambda^{-1} F \lambda = (F^T + B_\lambda^T D_p^T) \Omega_\lambda^{-1} b, \quad (3.81)$$

где B_λ – блочная диагональная матрица размера $[nN \times n]$ с матрицами-блоками $P_\lambda^{-1}(b - F\lambda)$ по диагонали:

$$B_\lambda = \begin{bmatrix} P_\lambda^{-1}(b - F\lambda) & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & P_\lambda^{-1}(b - F\lambda) & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \dots & P_\lambda^{-1}(b - F\lambda) \end{bmatrix},$$

$D_p = \left[\frac{dP_\lambda}{d\lambda_1} \middle| \frac{dP_\lambda}{d\lambda_2} \middle| \frac{dP_\lambda}{d\lambda_3} \middle| \dots \middle| \frac{dP_\lambda}{d\lambda_n} \right]$ – блочная матрица-строка размера $[N \times nN]$.

Решение системы (3.81) имеет вид

$$\lambda = \left[(F^T + B_\lambda D_p^T) \Omega_\lambda^{-1} F \right]^{-1} (F^T + B_\lambda^T D_p^T) \Omega_\lambda^{-1} b. \quad (3.82)$$

Формула (3.82) лежит в основе итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания элементов вектора λ в регрессионных моделях вида

(3.80). Рекуррентное соотношение, описывающее итерационный процесс уточнения коэффициентов на основе (3.82) в регрессионных моделях, описываемых выражением (3.80), имеет вид

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \left[\left(F^T + B_{\lambda^{(i)}} D_p^T \right) \Omega_{\lambda^{(i)}}^{-1} F \right]^{-1} \left(F^T + B_{\lambda^{(i)}}^T D_p^T \right) \Omega_{\lambda^{(i)}}^{-1} b, \quad (3.83)$$

$i = 0, 1, 2, \dots$

Регрессионная модель (3.80) в общем виде описывает результаты наблюдений на первой, а также на первой и второй стадиях деформации ползучести как отдельной кривой ползучести, так и совокупности кривых, полученных при различных напряжениях σ_{0j} ($j = \overline{1, M}$, M – количество кривых ползучести).

При наличии совокупности кривых ползучести в обобщенной регрессионной модели (3.80) предполагается известным значение параметра n исходных моделей деформации ползучести (1.8) и (2.28). Таким образом, при определении параметров и обработке совокупности кривых ползучести на начальном этапе необходимо выполнить оценивание параметра n .

В соответствии с рассматриваемыми моделями (2.1) для описания первой и (2.28) для первой и второй стадий деформации ползучести зависимость между деформацией, временем и напряжением имеет вид:

$$p(t, \sigma_{0j}) = p(t) \sigma_{0j}^n, \quad j = \overline{1, M}, \quad (3.84)$$

где $p(t) = \sum_{i=1}^s c_i (1 - e^{-\alpha_i t})$ для первой стадии, и $p(t) = \sum_{i=1}^s c_i (1 - e^{-\alpha_i t}) + Bt$ для

первой и второй стадий, M – количество кривых ползучести в серии экспериментов. Оценивание параметра n происходит на основе логарифмирования функции (3.84). Дискретный аналог функции (3.84) примет вид

$$p_{k,j} = p_k \sigma_{0j}^n, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{1, M}, \quad (3.85)$$

где N – количество точек при равномерной дискретизации функции (3.84), M – количество кривых ползучести в серии экспериментов. С учетом слу-

чайной помехи $\varepsilon_{k,j}$, $k = \overline{0, N-1}$, $j = \overline{1, M}$, результаты наблюдений деформации ползучести $y_{k,j}$ могут быть представлены в виде $y_{k,j} = p_{k,j} + \varepsilon_{k,j}$ и с учетом данного соотношения, выражение (3.85) запишется так:

$$y_{k,j} = p_k \sigma_{0j}^n + \varepsilon_{k,j}, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{1, M}. \quad (3.86)$$

Логарифмируя (3.86), получаем

$$\begin{aligned} \ln(y_{k,j} - \varepsilon_{k,j}) &= \ln(p_k) + n \ln(\sigma_{0j}), \quad j = 1, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ \ln\left(\frac{y_{k,j} - \varepsilon_{k,j}}{y_{k,j-1} - \varepsilon_{k,j-1}}\right) &= m \ln\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1}}\right), \quad j = \overline{2, M}, \quad k = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Линеаризуя по переменным $\varepsilon_{k,j}$, $\varepsilon_{k,j-1}$ выражения для логарифмов, в первом приближении получаем соотношения:

$$\begin{aligned} \ln(y_{k,j} - \varepsilon_{k,j}) &\approx \ln(p_{k,j}) - \frac{\varepsilon_{k,j}}{y_{k,j}}, \quad j = 1, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ \ln\left(\frac{y_{k,j} - \varepsilon_{k,j}}{y_{k,j-1} - \varepsilon_{k,j-1}}\right) &\approx \ln\left(\frac{y_{k,j}}{y_{k,j-1}}\right) - \frac{1}{y_{k,j}} \varepsilon_{k,j} + \frac{1}{y_{k,j-1}} \varepsilon_{k,j-1}, \quad j = \overline{2, M}, \quad k = \overline{1, N-1}, \end{aligned}$$

подставляя которые в (3.87), получаем

$$\begin{aligned} \ln(y_{k,j}) &= \ln(p_k) + n \ln(\sigma_{0j}) + \frac{1}{y_{k,j}} \varepsilon_{k,j}, \quad j = 1, \quad k = \overline{1, N-1}, \\ \ln\left(\frac{y_{k,j}}{y_{k,j-1}}\right) &= n \ln\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1}}\right) + \frac{1}{y_{k,j}} \varepsilon_{k,j} - \frac{1}{y_{k,j-1}} \varepsilon_{k,j-1}, \quad j = \overline{2, M}, \quad k = \overline{1, N-1}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Соотношения (3.88) лежат в основе формирования регрессионной модели. Введем следующие векторы и матрицы: $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_N]^T$ – N -мерный

вектор коэффициентов регрессионной модели; $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_2 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ b_M \end{bmatrix}$ – блочный вектор

правой части, размера $(N-1) \times M$, состоящий из M векторов b_j ,

$$b_1 = \begin{bmatrix} \ln(y_{1,0}) \\ \ln(y_{2,0}) \\ \vdots \\ \ln(y_{N-1,0}) \end{bmatrix}, \quad b_j = \begin{bmatrix} \ln\left(\frac{p_{1,j}}{p_{1,j-1}}\right) \\ \ln\left(\frac{p_{2,j}}{p_{2,j-1}}\right) \\ \vdots \\ \ln\left(\frac{p_{N-1,j}}{p_{N-1,j-1}}\right) \end{bmatrix}, \quad j = 2, \dots, M; \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_M \end{bmatrix} - \text{блочная матрица}$$

размера $[(N-1)M \times N]$, состоящая из M матриц F_j размера $[(N-1) \times N]$

$$\text{вида} \quad F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ln(\sigma_0) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \ln(\sigma_0) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \ln(\sigma_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \ln(\sigma_0) \end{bmatrix}, \quad F_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ln\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ln\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1}}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ln\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1}}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \ln\left(\frac{\sigma_j}{\sigma_{j-1}}\right) \end{bmatrix},$$

$j = 2, \dots, M$; $\varepsilon = [\varepsilon_1^T \mid \varepsilon_2^T \mid \dots \mid \varepsilon_M^T]^T$ – блочный вектор естественного разброса

данных эксперимента размера $[(N-1) \times M \times 1]$, состоящий из M векторов

ε_j размера $[(N-1) \times 1]$: $\varepsilon_j = [\varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{1,j}, \varepsilon_{2,j}, \dots, \varepsilon_{N-1,j}]^T$, $j = \overline{1, M}$;

$\eta = [\eta_1^T \mid \eta_2^T \mid \dots \mid \eta_M^T]^T$ – блочный вектор «невязки» обобщенной регрессионной модели размера $[(N-1)M \times 1]$, состоящий из M векторов η_j размера

$[(N-1) \times 1]$: $\eta_j = [\eta_{1,j}, \eta_{2,j}, \eta_{3,j}, \dots, \eta_{N-1,j}]^T$, где $\eta_{i,j} = \frac{1}{y_{i,j}} \varepsilon_{i,j}$, $j = 1, k = \overline{1, N-1}$,

$$\eta_{i,j} = \frac{1}{y_{i,j}} \varepsilon_{i,j} + \frac{1}{y_{i,j-1}} \varepsilon_{i,j-1}, j = \overline{2, M}, k = \overline{1, N-1};$$

P – квадратная матрица линейного преобразования вектора остатков размера $[(N-1)M \times (N-1)M]$, где по главной диагонали расположены элементы:

$$P_{ii} = \frac{1}{y_{i,j}}, j = \overline{1, M}, i = \overline{1, N-1};$$

по побочной диагонали расположены элементы:

$$P_{i,j-1} = -\frac{1}{y_{i,j-1}}, j = \overline{2, M}, i = \overline{1, N-1}.$$

С учетом введенных векторов и матриц получаем регрессионную модель

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P\varepsilon, \end{cases} \quad (3.89)$$

оценивание коэффициентов которой легко находится:

$$\hat{\lambda} = [F^T (P^{-1})^T P^{-1} F]^{-1} F^T (P^{-1})^T P^{-1} b, \quad (3.90)$$

а оценка параметра \hat{n} равна:

$$\hat{n} = \hat{\lambda}_{N-1}. \quad (3.91)$$

Имея оценку \hat{n} , далее можно построить обобщенную регрессионную модель (3.80)

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases}$$

а начальную оценку вектора $\hat{\lambda}^{(0)}$ для соответствующей итерационной процедуры оценивания (3.83) можно найти из условия минимизации функционала

$\|b - F\lambda\|^2 \Rightarrow \min$, откуда

$$\hat{\lambda}^{(0)} = (F^T F)^{-1} F^T b. \quad (3.92)$$

2. Ко второму виду регрессионных моделей относится регрессионная модель вида

$$\begin{cases} b_\lambda = F\lambda + \eta, \\ \eta = P\varepsilon, \end{cases} \quad (3.93)$$

где вектор правой части b_λ зависит от коэффициентов разностного уравнения, а матрица эквивалентного возмущения P зависит от экспериментальных значений. Данному виду соответствуют регрессионные модели (3.23) и (3.32).

Остаточную сумму квадратов в регрессионных моделях вида (3.93), при невырожденной матрице P можно представить в виде

$$Q = \|\varepsilon\|^2 = \|P^{-1}b_\lambda - P^{-1}F\hat{\lambda}\|^2 \quad \text{или} \quad Q = (b_\lambda - F\hat{\lambda})^T \Omega^{-1} (b_\lambda - F\hat{\lambda}) =$$

$$= b_\lambda^T \Omega^{-1} b_\lambda - 2b_\lambda^T \Omega^{-1} F\hat{\lambda} + \hat{\lambda}^T F^T \Omega^{-1} F\hat{\lambda}, \quad \text{где} \quad \Omega = PP^T - \text{ матрица размера}$$

$$\left[\sum_{j=1}^M N_j \times \sum_{j=1}^M N_j \right].$$

Дифференцируя остаточную сумму квадратов Q по переменным λ_i , приравнявая нулю результаты дифференцирования, можно получить систему нормальных уравнений. Для дифференцирования остаточной суммы квадратов используем следующую формулу:

$$\frac{\partial [x_\lambda^T A y_\lambda]}{\partial \lambda} = \left[\frac{\partial x_\lambda}{\partial \lambda} \right]^T A y_\lambda + \left[\frac{\partial y_\lambda}{\partial \lambda} \right]^T A^T x_\lambda, \quad (3.94)$$

здесь $x_\lambda = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – матрица-столбец (вектор) размера $[n \times 1]$ и $y_\lambda = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ – матрица-столбец (вектор) размера $[m \times 1]$, элементы которых зависят от элементов λ_i вектора λ размера $[p \times 1]$; A – матрица размера $[n \times m]$, элементы которой не зависят от элементов вектора λ . Матрицы

$W_x = \frac{\partial x_\lambda}{\partial \lambda}$ и $W_y = \frac{\partial y_\lambda}{\partial \lambda}$ производных векторов x_λ и y_λ по вектору λ имеют размеры $[n \times p]$ и $[m \times p]$, соответственно, и имеют вид:

$$W_x = \frac{\partial x_\lambda}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_p} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial \lambda_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \lambda_p} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad W_y = \frac{\partial y_\lambda}{\partial \lambda} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_p} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial y_2}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial \lambda_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial y_m}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial \lambda_p} \end{bmatrix}.$$

Для квадратичной формы с симметричной квадратной матрицей A размера $[n \times n]$ в частном случае из (3.94) получаем:

$$\frac{\partial [x_\lambda^T A x_\lambda]}{\partial \lambda} = 2 \left[\frac{\partial x_\lambda}{\partial \lambda} \right]^T A x_\lambda.$$

Тогда с учетом симметричности обратной матрицы Ω^{-1} и матрицы $F^T \Omega^{-1} F$, а также равенства $\frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} = E$, где E – единичная матрица, имеем:

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = 2W_\lambda^T \Omega^{-1} b_\lambda - 2W_\lambda^T \Omega^{-1} F \lambda - 2F^T \Omega^{-1} b_\lambda + 2F^T \Omega^{-1} F \lambda$$

или

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda} = 2(F^T - W_\lambda^T) \Omega^{-1} F \lambda - 2(F^T - W_\lambda^T) \Omega^{-1} b_\lambda = \bar{0}.$$

Таким образом, получаем систему нормальных уравнений, которая принимает вид

$$(F - W_\lambda)^T \Omega^{-1} F \hat{\lambda} = (F - W_\lambda)^T \Omega^{-1} b_\lambda, \quad (3.95)$$

где блочная матрица $W_\lambda = \begin{bmatrix} W_1 \\ \dots \\ W_2 \\ \dots \\ W_3 \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ W_M \end{bmatrix}$ размера $\left[\sum_{j=1}^M N_j \times K \right]$, состоящая из M мат-

риц размера $[N_j \times K]$, где K – количество коэффициентов в обобщенной регрессионной модели, вида

$$W_j = \frac{\partial b_{\lambda_j}}{\partial \lambda} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \frac{\partial b_{\lambda_j}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial b_{\lambda_j}}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial b_{\lambda_j}}{\partial \lambda_K} \end{array} \right].$$

Система нормальных уравнений (3.95) разрешается относительно $\hat{\lambda}$:

$$\hat{\lambda} = \left[(F - W_\lambda)^T \Omega^{-1} F \right]^{-1} (F - W_\lambda)^T \Omega^{-1} b_\lambda, \quad (3.96)$$

Формула (3.96) лежит в основе итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания элементов вектора λ в регрессионных моделях вида (3.93). Рекуррентное соотношение, описывающее итерационный процесс уточнения коэффициентов на основе (3.96), имеет вид

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \left[(F - W_{\hat{\lambda}^{(i)}})^T \Omega^{-1} F \right]^{-1} (F - W_{\hat{\lambda}^{(i)}})^T \Omega^{-1} b_{\hat{\lambda}^{(i)}}, \quad (3.97)$$

$i = 0, 1, 2, \dots$, где матрица $W_{\hat{\lambda}^{(i)}}$ и вектор $b_{\hat{\lambda}^{(i)}}$ на i -той итерации вычисляются на основе i -того приближения вектора коэффициентов $\hat{\lambda}^{(i)}$.

Начальное приближение вектора коэффициентов $\hat{\lambda}^{(0)}$ в зависимости от построенной обобщенной регрессионной модели может быть найдено из условия минимизации невязки $\|\eta\|^2 = \|b - F\lambda\|^2 \rightarrow \min$ в случае, если вектор правой части b не зависит от λ . Здесь первоначальная оценка вычисляется по формуле

$$\hat{\lambda}^{(0)} = (F^T F)^{-1} F^T b. \quad (3.98)$$

Начальное приближение вектора коэффициентов $\hat{\lambda}^{(0)}$ находится:

– для модели (3.32) из условия минимизации функционала

$$\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N_j-1} \left(\ln \ln \frac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}}{t_{k,j} - t_{k-1,j}} - \ln \Delta p_j - \lambda_1 - \lambda_2 \ln \sigma_{0j} \right)^2 \rightarrow \min,$$

откуда получаем оценки:

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = \frac{f_{13}f_{22} - f_{12}f_{23}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}, \quad \hat{\lambda}_2^{(0)} = \frac{f_{11}f_{23} - f_{12}f_{13}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}, \quad (3.99)$$

где

$$f_{11} = \sum_{j=1}^M (N_j - 2M), \quad f_{12} = \sum_{j=1}^M (N_j - 2) \ln \sigma_{0j}, \quad (3.100)$$

$$f_{22} = \sum_{j=1}^M (N_j - 2) \ln^2 \sigma_{0j}, \quad f_{13} = \sum_{j=1}^M \sum_{k=2}^{N_j-1} \left(\ln \ln \frac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}}{t_{k,j} - t_{k-1,j}} - \ln \Delta p_j \right), \quad (3.101)$$

$$f_{23} = \sum_{j=1}^M \sum_{k=2}^{N_j-1} \left(\ln \ln \frac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}}{t_{k,j} - t_{k-1,j}} - \ln \Delta p_j \right) \cdot \ln \sigma_{0j}; \quad (3.102)$$

– для модели (3.23) из условия минимизации функционала

$$\sum_{j=1}^M \sum_{k=2}^{N_j-1} \left(\ln \frac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}}{t_{k,j} - t_{k-1,j}} - \sigma_{0j} \Delta p_j \lambda_1^{(0)} \right)^2 \rightarrow \min,$$

откуда получаем оценку:

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = \frac{\sum_{j=1}^M \sum_{k=2}^{N_j-1} \sigma_{0j} \Delta p_j \ln \frac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}}{t_{k,j} - t_{k-1,j}}}{\sum_{j=1}^M (N_j - 2) \sigma_{0j}^2 \Delta p_j^2}. \quad (3.103)$$

Таким образом, алгоритм итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели состоит из следующих основных шагов.

1. Если вектор правой части b не зависит от λ , строятся матрица регрессоров F и вектор правой части b соответствующей обобщенной регрессионной модели и находится первоначальное приближение оценок элементов вектора коэффициентов λ обобщенной регрессионной модели.

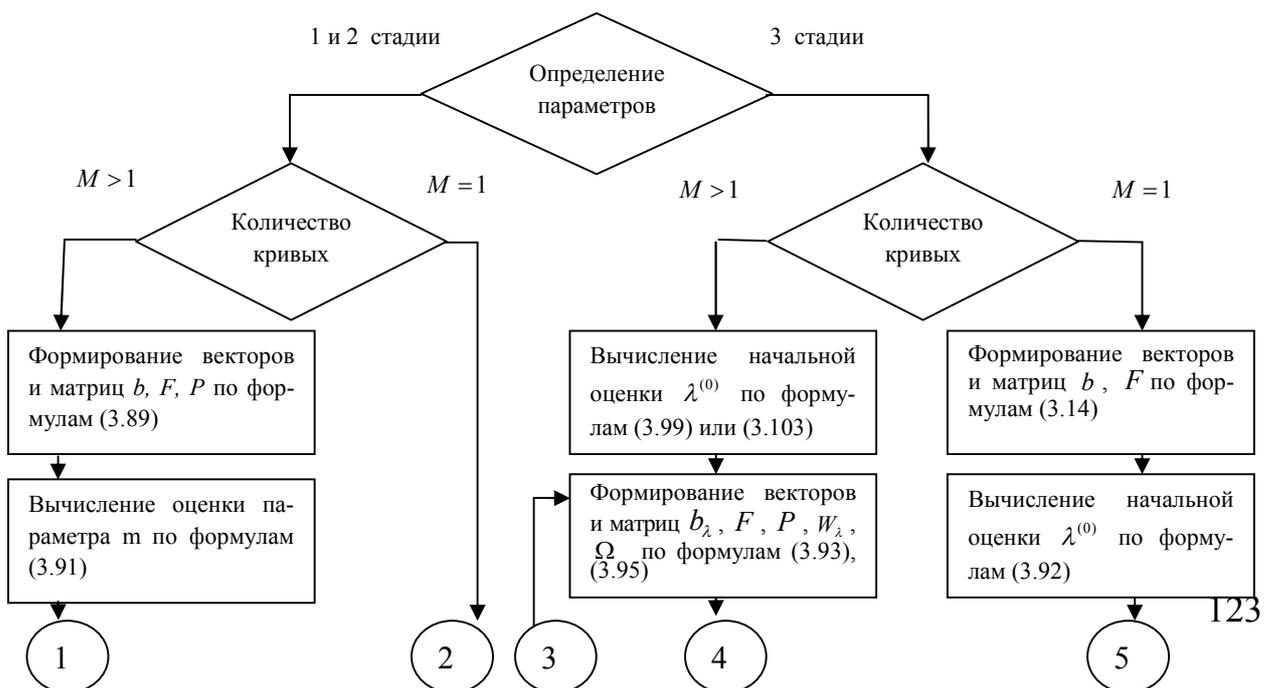
2. Если вектор правой части b зависит от λ ($b = b_\lambda$), вначале вычисляется первоначальное приближение оценок элементов вектора λ по формулам (3.99) либо (3.103), далее строятся матрица регрессоров F и вектор правой части b_λ .

3. Вычисляются элементы матрицы остатков P , и матрица производных W_λ (если вектор b не зависит от λ , матрица $W_\lambda = \theta$).

4. По формулам $\Omega = PP^T$, $(F - W_\lambda)^T \Omega^{-1} F$ и $(F - W_\lambda)^T \Omega^{-1} b_\lambda$ вычисляются правая и левая части системы нормальных уравнений (3.95).

5. Используя соотношение (3.97), находится приближение $\hat{\lambda}^{(i+1)}$ вектора коэффициентов обобщенной регрессионной модели.

6. Сравниваются по норме векторы $\hat{\lambda}^{(i+1)}$ и $\hat{\lambda}^{(i)}$. Если $\|\hat{\lambda}^{(i+1)} - \hat{\lambda}^{(i)}\| = \max\{|\hat{\lambda}_1^{(i+1)} - \hat{\lambda}_1^{(i)}|; |\hat{\lambda}_2^{(i+1)} - \hat{\lambda}_2^{(i)}|\} < \delta$, где $\delta > 0$ – заданное пороговое значение, то процесс вычислений заканчивается и за вектор оценок коэффициентов обобщенной регрессионной модели принимается вектор $\hat{\lambda}^{(i+1)}$. Если $\|\hat{\lambda}^{(i+1)} - \hat{\lambda}^{(i)}\| \geq \delta$, то, увеличив i на единицу, следует вернуться к шагу 0 данного алгоритма вычислений. Схематически алгоритм в виде блок-схемы изображен на рисунке 3.2.



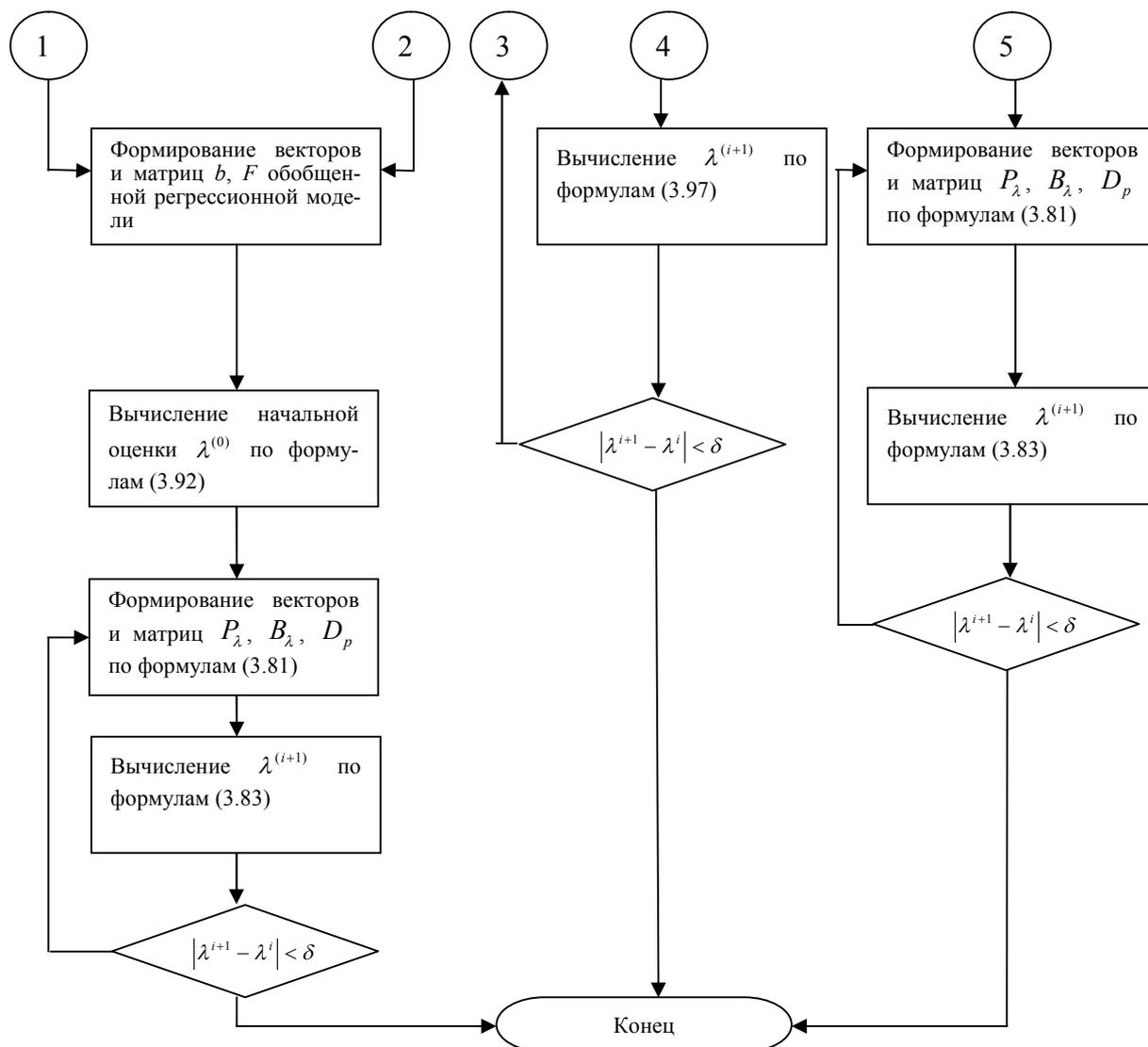


Рис.3.2. Блок-схема алгоритма итерационной процедуры оценивания параметров обобщенной регрессионной модели.

Применение итерационной процедуры среднеквадратического оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели позволяет практически устранить смещение в оценках, что повышает точность вычисления параметров моделей ползучести. Полученные оценки коэффициентов лежат в основе вычисления параметров моделей ползучести по формулам, полученным в главе 2.

Отметим, что алгоритм вычисления среднеквадратичных оценок коэффициентов обобщенной регрессионной модели (3.80) может быть описан в иной форме, на основе расширенной блочной матрицы, размер которой со-

ставляет $(N + n) \times (N + n)$, где N – число уравнений в обобщенной регрессионной модели; n – количество коэффициентов.

В частности, из первого матричного уравнения (3.80) имеем $P_\lambda^{-1}b = P_\lambda^{-1}F\lambda + \varepsilon$. Отсюда с учетом требования ортогональности вектора ε вектору $P_\lambda^{-1}F\lambda$, или ортогональности вектора ε столбцам матрицы $P_\lambda^{-1}F$, в первом приближении, можно положить $(P_\lambda^{-1}F)^T \varepsilon = \bar{0}$ или $F^T \Omega_\lambda^{-1} \eta = \bar{0}$. Тогда систему матричных уравнений (3.80) можно представить в виде:

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta; \\ F^T \Omega_\lambda^{-1} \eta = \bar{0}. \end{cases}$$

Отсюда можно получить систему уравнений с расширенной блочной матрицей размера $(N + n) \times (N + n)$:

$$\left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline F^T \Omega_\lambda^{-1} & \Theta \end{array} \right] \begin{bmatrix} \eta \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \bar{0} \end{bmatrix},$$

из решения которой на основе итерационной процедуры можно найти не только среднеквадратичные оценки коэффициентов разностного уравнения λ , но и вектор невязки η . Здесь Θ – нулевая матрица размера $n \times n$; $\bar{0}$ – матрица-столбец размера $n \times 1$. Очевидно, что полученная система уравнений с расширенной матрицей может быть сведена к матричному уравнению вида $F^T \Omega_\lambda^{-1} F \lambda = F^T \Omega_\lambda^{-1} b$, из которого можно построить формулу, описывающую итерационную процедуру уточнения среднеквадратичных оценок коэффициентов обобщенной регрессионной модели (3.80):

$$\hat{\lambda}^{(i+1)} = \left(F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} F \right)^{-1} F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} b.$$

При выводе полученных выше соотношений не учитывалась зависимость матрицы $P_\lambda^{-1}F$ и вектора $P_\lambda^{-1}b$ от коэффициентов разностного уравнения. С учетом этой зависимости, на основе её линеаризации, вектор ε дол-

жен быть ортогонален столбцам матрицы $\frac{d[P_\lambda^{-1}(b - F\lambda)]}{d\lambda} = -P_\lambda^{-1}(F + D_p B_\lambda)$,

то есть должно выполняться соотношение вида $[P_\lambda^{-1}(F + D_p B_\lambda)]^T \varepsilon = \bar{0}$ или $(F + D_p B_\lambda)^T \Omega_\lambda^{-1} \eta = \bar{0}$. Здесь D_p – блочная матрица-строка и B_λ – блочная диагональная матрица, вид которых приведен выше. Таким образом, приходим к системе матричных уравнений

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta; \\ (F + D_p B_\lambda)^T \Omega_\lambda^{-1} \eta = \bar{0}, \end{cases}$$

которую можно представить на основе расширенной блочной матрицы размера $(N + n) \times (N + n)$ в виде:

$$\left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline (F + D_p B_\lambda)^T \Omega_\lambda^{-1} & \Theta \end{array} \right] \begin{bmatrix} \eta \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \bar{0} \end{bmatrix},$$

где Θ – нулевая матрица размера $n \times n$; $\bar{0}$ – матрица-столбец размера $n \times 1$.

Легко убедиться, что полученная система уравнений эквивалентна построенной выше нормальной системе уравнений (3.81).

Аналогично обобщенную регрессионную модель (3.93) можно привести к системе матричных уравнений

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta; \\ (F - W_\lambda)^T \Omega_\lambda^{-1} \eta = \bar{0}, \end{cases}$$

которую можно представить на основе расширенной матрицы блочной матрицы размера $(N + n) \times (N + n)$ в виде

$$\left[\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline (F - W_\lambda)^T \Omega_\lambda^{-1} & \Theta \end{array} \right] \begin{bmatrix} \eta \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \bar{0} \end{bmatrix},$$

где W_λ – блочная матрица, описанная выше.

Легко убедиться, что эта система $N + n$ уравнений эквивалентна построенной выше нормальной системе уравнений (3.95).

Обобщенные регрессионные модели формируются на основе выборки экспериментальных данных, при этом, с одной стороны, эффективно использовать выборки большого объема, с другой стороны, увеличение объема выборки при фиксированном времени наблюдения ведет к уменьшению периода равномерной дискретизации τ . Значительное уменьшение τ вызывает резкое увеличение числа обусловленности матрицы нормальной системы уравнений при среднеквадратичном оценивании коэффициентов разностного уравнения, что приводит к неустойчивости алгоритмов вычисления.

С целью выяснения влияния выбора периода дискретизации τ на устойчивость вычисления коэффициентов разностного уравнения проводились нижеследующие численно-аналитические исследования.

Пример 3.1. В рамках модельного примера формировалась выборка точных значений математической модели ползучести

$$\tilde{p}(\tau k, \sigma_{0j}) = [\tilde{c}(1 - e^{-\tilde{\alpha}\tau k}) + \tilde{B}\tau k] \sigma_{0j}^{\tilde{n}}, \quad (3.104)$$

$j = \overline{1, M}$, $M = 4$, с параметрами $\tilde{c} = 1$, $\tilde{\alpha} = 0.9$, $\tilde{B} = 0.03$, $\tilde{n} = 1.126$ и значениями $\sigma_0 = 2, 3, 5, 7$. Период дискретизации τ изменялся от 0.01 до 1, количество точек для каждой кривой $N = 100$. В отсчеты $\tilde{p}_{k,j}$ для моделирования экспериментальных данных добавлялась случайная помеха $\varepsilon_{k,j}$, $p_{k,j} = \tilde{p}_{k,j} + \varepsilon_{k,j}$, ($j = \overline{1, M}$, $k = \overline{0, N-1}$), величина помехи составляла 1% в относительных к мощности полезного сигнала единицах. Мощность помехи определялась по формуле

$$\frac{s_\varepsilon}{s_p} \cdot 100\% = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{k,j}^2}{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} p_{k,j}^2}} \cdot 100\%,$$

$$\text{где } s_\varepsilon = \sqrt{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{k,j}^2}, \quad s_p = \sqrt{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} p_{k,j}^2}.$$

Смоделированные данные обрабатывались с помощью разработанной итерационной процедуры среднеквадратического оценивания, в завершении которой вычислялись оценки коэффициентов $\lambda_j, j = \overline{1,3}$ разностного уравнения (3.11) и оценки параметров c, α, B, n модели (3.104).

В качестве оценки погрешности Δ использовался второй центральный выборочный (статистический) момент относительно истинного значения коэффициента:

$$M\left[(\hat{\lambda} - \tilde{\lambda})^2\right] = D[\hat{\lambda}] + \left(M[\hat{\lambda}] - \tilde{\lambda}\right)^2, \quad (3.105)$$

где $\hat{\lambda}$ – оценка коэффициента λ , $D[\hat{\lambda}]$ – выборочная дисперсия оценки; $M[\hat{\lambda}]$ – выборочное среднее оценки; $\left(M[\hat{\lambda}] - \tilde{\lambda}\right)$ – смещение оценки; $\tilde{\lambda}$ – истинное значение коэффициента. Погрешность оценивания коэффициентов вычислялась в относительных единицах по формуле:

$$\Delta\lambda, \% = \frac{\sqrt{M\left[(\hat{\lambda} - \tilde{\lambda})^2\right]}}{|\tilde{\lambda}|} 100\%. \quad (3.106)$$

Экспериментальные оценки погрешности $\Delta\lambda, \%$, находились на основе 50 независимых оценок соответствующего коэффициента λ , вычисленных при одних и тех же значениях параметров тестового сигнала и мощности случайной помехи. Зависимость оценки погрешности оценивания коэффициентов разностного уравнения и параметров модели (3.104) от величины периода дискретизации τ при мощности помехи 1% приведены в таблице 3.1, а также изображены на рисунках 3.3– 3.9.

Таблица 3.1

Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единицах коэффициентов разностного уравнения от величины периода дискретизации

τ	0.01	0.02	0.03	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28
$\Delta\lambda_1, \%$	0.07	0.05	0.04	0.02	0.04	0.06	0.11	0.14	0.13	0.22
$\Delta\lambda_2, \%$	168.12	44.91	18.68	5.70	2.45	1.58	1.39	0.92	1.02	1.04
$\Delta\lambda_3, \%$	0.57	0.35	0.45	0.22	0.37	0.51	0.50	0.73	0.55	0.62

Продолжение таблицы 3.1

Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единицах коэффициентов разностного уравнения от величины периода дискретизации

τ	0.32	0.36	0.40	0.44	0.48	0.52	0.56	0.60	0.64	0.68
$\Delta\lambda_1, \%$	0.25	0.31	0.33	0.42	0.48	0.62	0.65	0.81	0.98	0.98
$\Delta\lambda_2, \%$	1.02	1.05	1.02	1.14	1.03	1.14	1.09	1.19	1.36	1.28
$\Delta\lambda_3, \%$	0.86	0.80	0.79	0.73	0.81	0.90	0.89	1.10	1.21	1.08

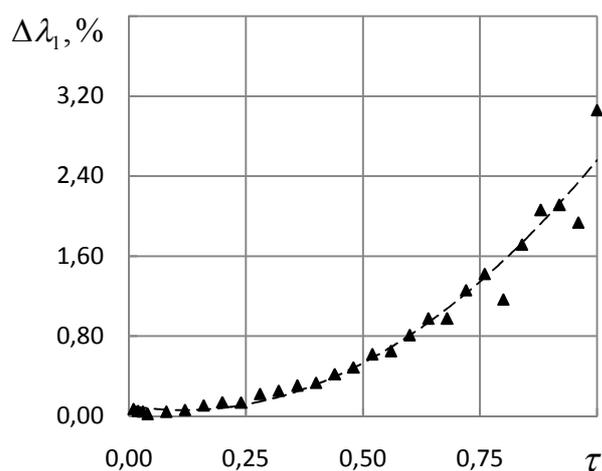


Рис.3.3. Зависимость второго центрального выборочного момента коэффициента λ_1 от периода дискретизации τ при мощности помехи 1%

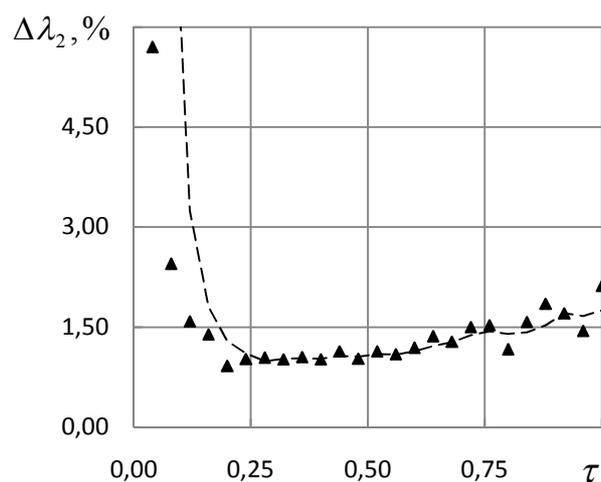


Рис. 3.4. Зависимость второго центрального выборочного момента коэффициента λ_2 от периода дискретизации τ при мощности помехи 1%

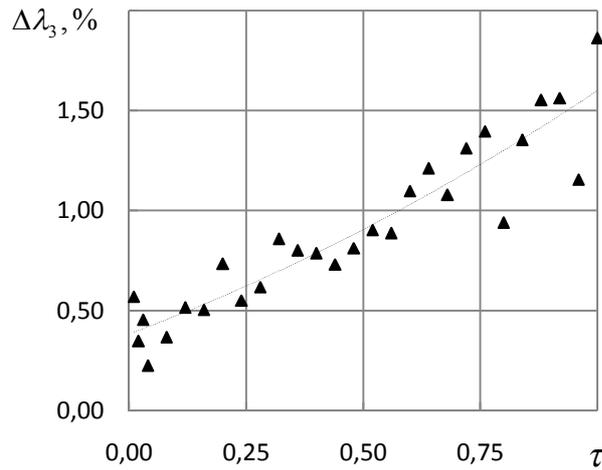


Рис.3.5. Зависимость второго центрального выборочного момента коэффициента λ_3 от периода дискретизации τ при мощности помехи 1%

Продолжение таблицы 3.1

Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единицах коэффициентов разностного уравнения от величины периода дискретизации

τ	0.72	0.76	0.80	0.84	0.88	0.92	0.96	1.00
$\Delta\lambda_1, \%$	1.26	1.42	1.17	1.71	2.06	2.11	1.94	3.06
$\Delta\lambda_2, \%$	1.50	1.53	1.17	1.57	1.85	1.71	1.44	2.12
$\Delta\lambda_3, \%$	1.31	1.39	0.94	1.35	1.55	1.56	1.15	1.86

Продолжение таблицы 3.1

Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единицах параметров модели от величины периода дискретизации

τ	0.01	0.02	0.03	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28
$\Delta c, \%$	12.00	4.09	1.92	0.69	0.45	0.30	0.35	0.37	0.33	0.30
$\Delta B, \%$	153.69	42.83	16.93	5.22	1.94	1.14	0.84	0.44	0.62	0.53
$\Delta \alpha, \%$	7.83	2.91	1.64	0.59	0.61	0.56	0.74	0.76	0.63	0.88
$\Delta n, \%$	0.17	0.09	0.18	0.11	0.12	0.14	0.11	0.18	0.14	0.16

Продолжение таблицы 3.1

Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единицах параметров модели от величины периода дискретизации

τ	0.32	0.36	0.40	0.44	0.48	0.52	0.56	0.60	0.64	0.68
$\Delta c, \%$	0.38	0.37	0.26	0.28	0.36	0.31	0.28	0.36	0.37	0.33
$\Delta B, \%$	0.48	0.40	0.39	0.49	0.30	0.28	0.29	0.25	0.33	0.34
$\Delta \alpha, \%$	0.88	0.95	0.92	1.05	1.12	1.32	1.29	1.50	1.69	1.60
$\Delta n, \%$	0.17	0.14	0.12	0.15	0.13	0.10	0.12	0.10	0.12	0.15

Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единицах параметров модели от величины периода дискретизации

τ	0.72	0.76	0.80	0.84	0.88	0.92	0.96	1.00
$\Delta c, \%$	0.35	0.39	0.37	0.42	0.46	0.35	0.44	0.44
$\Delta B, \%$	0.28	0.35	0.33	0.26	0.32	0.32	0.33	0.37
$\Delta \alpha, \%$	1.94	2.08	1.61	2.27	2.61	2.54	2.26	3.43
$\Delta n, \%$	0.10	0.12	0.11	0.11	0.12	0.14	0.14	0.15

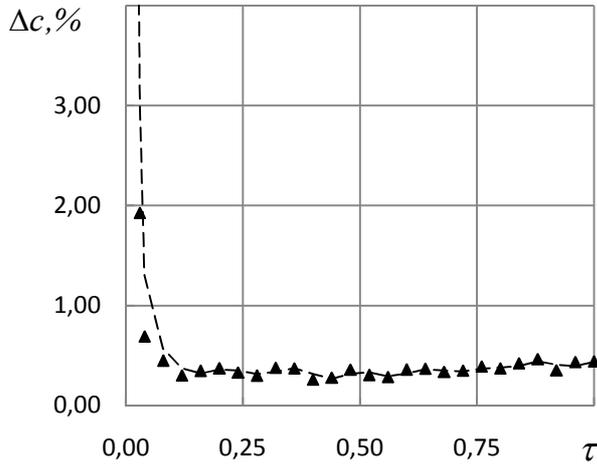


Рис.3.6. Зависимость второго центрального выборочного момента параметра c от периода дискретизации τ при мощности помехи 1%

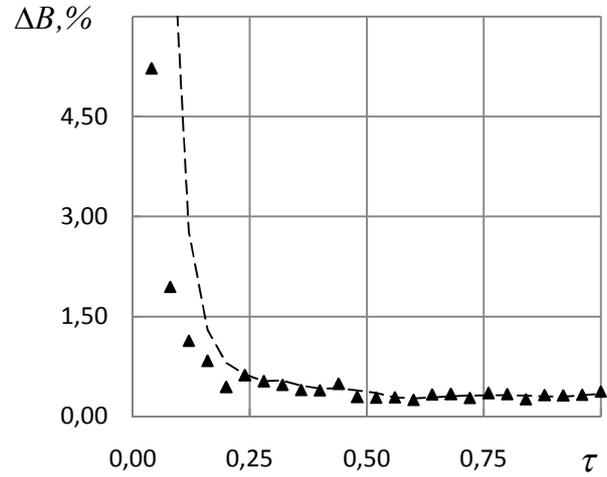


Рис. 3.7. Зависимость второго центрального выборочного момента параметра B от периода дискретизации τ при мощности помехи 1%

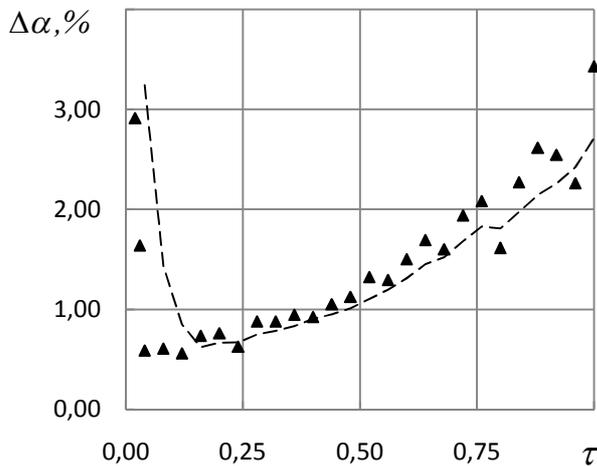


Рис.3.8. Зависимость второго центрального выборочного момента параметра α от периода дискретизации τ при мощности помехи 1%

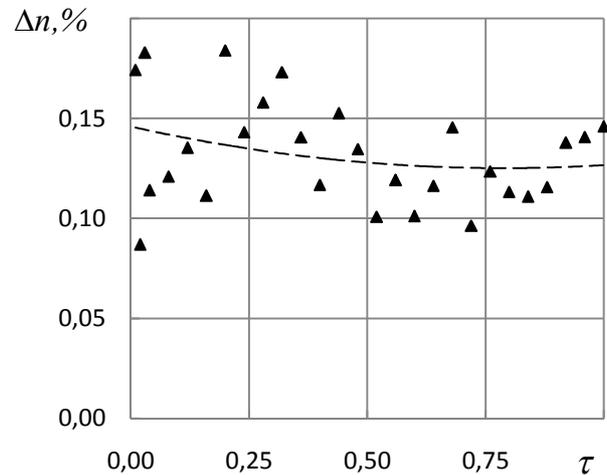


Рис. 3.9. Зависимость второго центрального выборочного момента параметра n от периода дискретизации τ при мощности помехи 1%

Таким образом, выполненное исследование показывает, что при уменьшении периода дискретизации τ до некоторого порогового значения наблюдается уменьшение погрешности оценивания коэффициентов разностного уравнения и параметров исследуемой модели (3.104), однако дальнейшее уменьшение периода дискретизации приводит к увеличению погрешности оценивания. Наименьшее значение погрешности оценивания параметра c наблюдается при $\tau = 0.12$, $B - \tau = 0.6$, $\alpha - \tau = 0.12$, $n - \tau = 0.02$, и в среднем, в качестве величины периода дискретизации для дальнейших расчетов можно взять $\tau \approx 0.1$.

Пример 3.2. В рамках модельного примера формировалась выборка точных значений математической модели ползучести (3.104) с параметрами $\tilde{c}=1$, $\tilde{\alpha}=0.9$, $\tilde{B}=0.03$, $\tilde{n}=1.126$ и значениями $\sigma_0 = 2, 3, 5, 7$. Период дискретизации $\tau = 0.1$, количество точек для каждой тестовой кривой $N = 100$. В отсчеты $\tilde{p}_{k,j}$ для моделирования экспериментальных данных добавлялась случайная помеха $\varepsilon_{k,j}$, $p_{k,j} = \tilde{p}_{k,j} + \varepsilon_{k,j}$, ($j = \overline{1, M}$, $k = \overline{0, N-1}$), величина помехи изменялась от 0.5 до 5% в относительных к мощности полезного сигнала единицах. Результаты исследований представлены в таблице 3.2 и на рисунках 3.10 – 3.16.

Таблица 3.2

Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единицах коэффициентов разностного уравнения и параметров модели от величины случайной помехи

ε	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00
$\Delta\lambda_1, \%$	0.05	0.13	0.23	0.28	0.27	0.37	0.62	0.59	0.50	0.71
$\Delta\lambda_2, \%$	0.39	1.27	1.91	2.26	2.33	3.02	5.33	5.18	5.09	6.49
$\Delta\lambda_3, \%$	0.27	0.64	1.16	1.31	1.34	1.71	2.50	2.56	2.60	3.32
$\Delta c, \%$	0.11	0.29	0.54	0.64	0.62	0.89	1.10	1.47	1.31	1.85
$\Delta B, \%$	0.16	0.72	0.91	1.10	1.24	1.75	2.80	2.60	3.04	3.29
$\Delta\alpha, \%$	0.30	0.73	1.28	1.56	1.52	2.06	3.43	3.31	2.78	3.97
$\Delta n, \%$	0.05	0.12	0.21	0.29	0.28	0.39	0.49	0.55	0.67	0.81

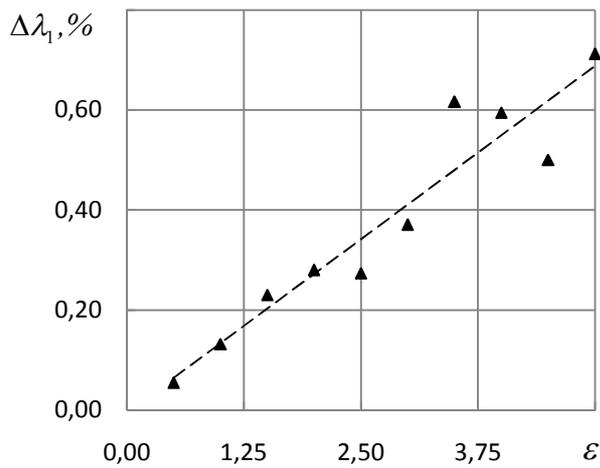


Рис. 3.10. Зависимость второго центрального выборочного момента коэффициента λ_1 от величины случайной помехи

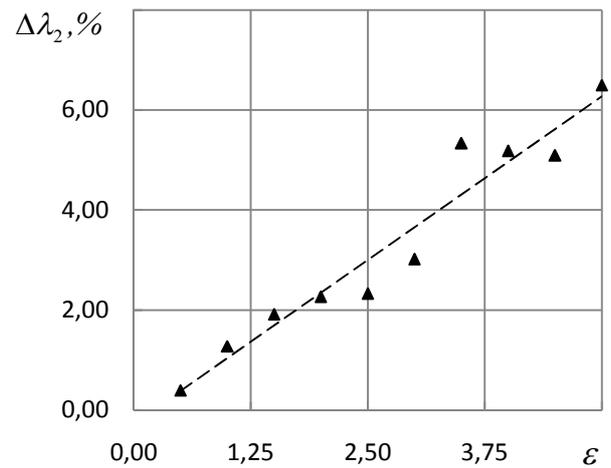


Рис. 3.11. Зависимость второго центрального выборочного момента коэффициента λ_2 от величины случайной помехи

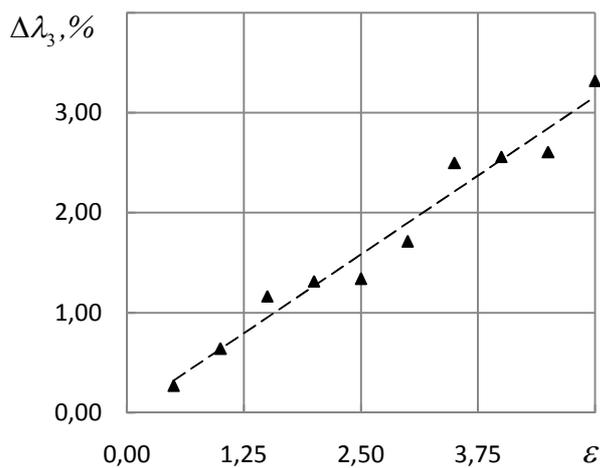


Рис. 3.12. Зависимость второго центрального выборочного момента коэффициента λ_3 от величины случайной помехи

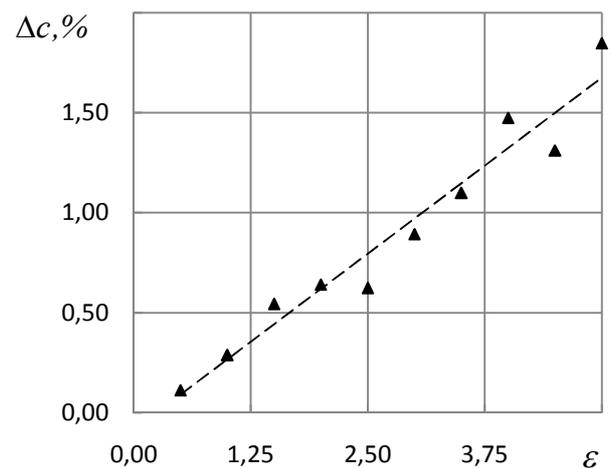


Рис. 3.13. Зависимость второго центрального выборочного момента параметра c от величины случайной помехи

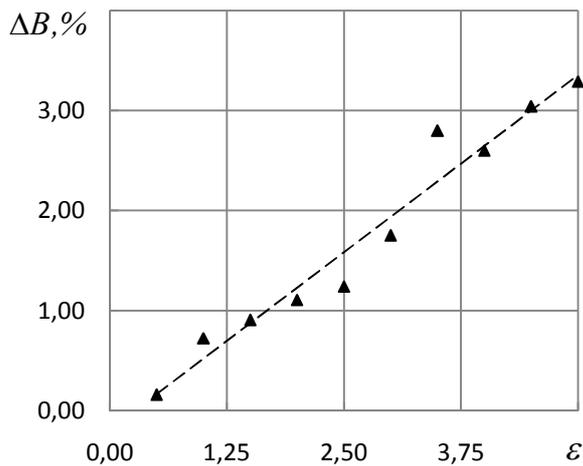


Рис. 3.14. Зависимость второго центрального выборочного момента параметра B от величины случайной помехи

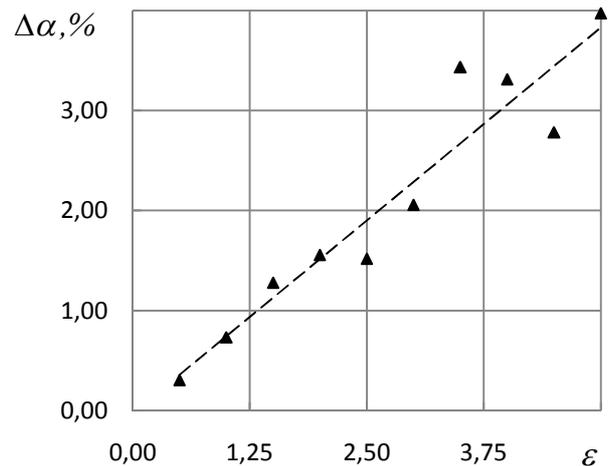


Рис. 3.15. Зависимость второго центрального выборочного момента параметра α от величины случайной помехи

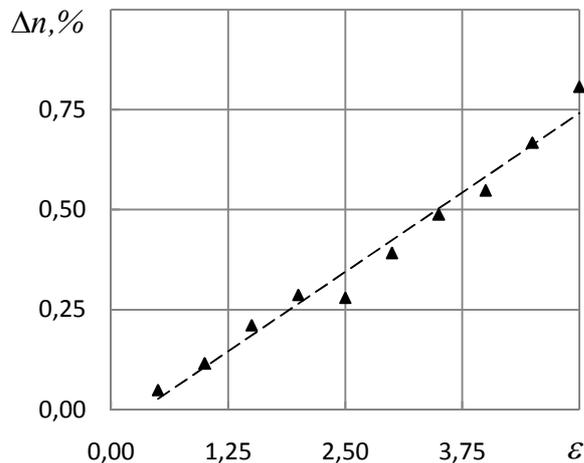


Рис. 3.16. Зависимость второго центрального выборочного момента параметра n от величины случайной помехи

Как показывает исследование, разработанная итерационная процедура обладает хорошей помехозащищенностью в диапазоне мощности случайной помехи от 0 до 5 % и обеспечивает погрешность вычисления оценок параметров модели деформации ползучести на первой и второй стадиях, не превышающую величину случайной помехи, что свидетельствует о высокой точности оценивания параметров для данного шага дискретизации.

3.4. Результаты численно-аналитических исследований эффективности разработанного численного метода оценивания параметров моделей ползучести на основе разностных уравнений

Данный параграф посвящен численно-аналитическим исследованиям эффективности разработанного численного метода оценивания параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений. Для моделей задавались истинные значения параметров \tilde{a} , период равномерной дискретизации τ по времени либо по деформации ползучести Δp и объем выборки N и формировалась выборка точных значений \tilde{p}_k . Сформированная выборка зашумлялась случайной помехой $\varepsilon_k : p_k = \tilde{p}_k + \varepsilon_k$, которая является выборкой из генеральной совокупности, имеющей нормальный закон распределения, с мощностью помехи, определяемой по формуле

$$\frac{s_\varepsilon}{s_p} \cdot 100\% = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{N-1} \varepsilon_{k,j}^2}{\sum_{k=0}^{N-1} p_{k,j}^2}} \cdot 100\%. \text{ Далее с помощью итерационной процедуры сред-}$$

неквадратического оценивания происходит вычисление коэффициентов соответствующих обобщенных регрессионных моделей, а на основе полученных коэффициентов – вычисление оценок параметров моделей ползучести.

Пример сформированных значений модели деформации ползучести на первой стадии, а также сформированных значений с добавленной случайной помехой мощностью 2% представлен на рисунке 3.17.

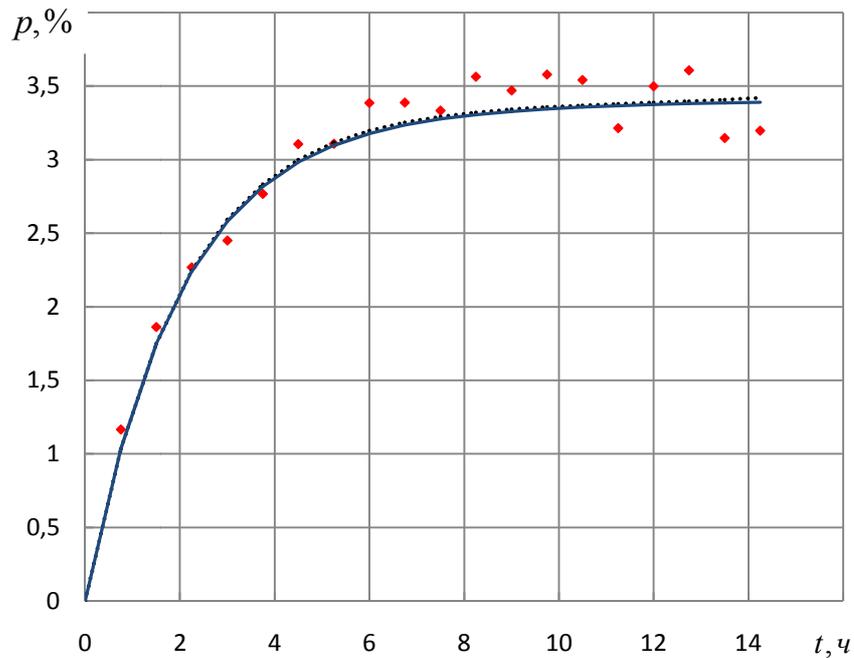


Рис.3.17. Выборка точных значений деформации ползучести (сплошная линия), значения деформации ползучести с добавленной случайной помехой мощностью 2% (значки), восстановленная кривая ползучести (штриховая линия)

Отметим, что реальные экспериментальные данные деформации ползучести являются монотонно возрастающими, и не соответствуют модели ползучести с добавленной случайной помехой, представленной на рисунке 3.17. Для соответствия моделируемых значений случайной помехи реальному разбросу экспериментальных значений ползучести следует взять мощность случайной помехи ε порядка $0.1 \div 0.5\%$. Выборка точных значений деформации ползучести на первой стадии с добавленной случайной помехой величиной 0.1% представлена на рисунке 3.18.

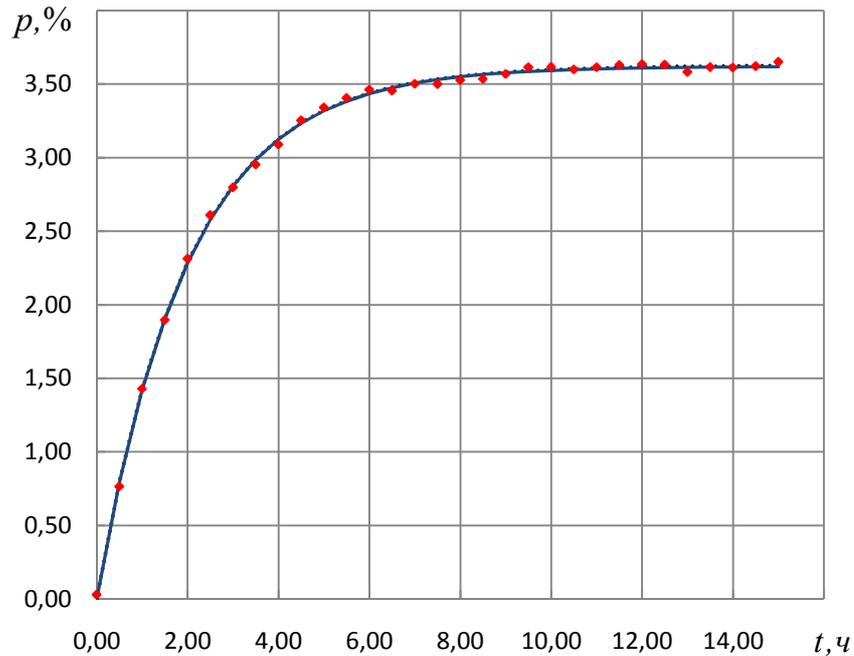


Рис.3.18. Выборка точных значений деформации ползучести (сплошная линия), значения деформации ползучести с добавленной случайной помехой мощностью 0.1% (значки), восстановленная кривая ползучести (штриховая линия)

Очевидно, что на рисунке 3.18 смоделированная деформация ползучести более приближена к реальным экспериментальным данным, чем на рисунке 3.17.

Пример 3.3. В рамках модельного примера для исследования зависимости смещения оценок параметров модели ползучести на первой стадии вида $\tilde{p}(\tau k, \sigma_{0j}) = [\tilde{c}_1(1 - e^{-\tilde{\alpha}_1 \tau k}) + \tilde{c}_2(1 - e^{-\tilde{\alpha}_2 \tau k})] \sigma_{0j}^{\tilde{n}}$, $j = \overline{1, M}$, $M = 4$, от величины периода дискретизации τ формировалась выборка точных значений математической модели с параметрами $\tilde{c}_1 = 1.5$, $\tilde{\alpha}_1 = 0.5$, $\tilde{c}_2 = 0.08$, $\tilde{\alpha}_2 = 0.03$, $\tilde{n} = 1.126$, и значениями $\sigma_0 = 2, 3, 5, 7$. Объем выборки N для каждой j -ой кривой равен 100 отсчетов. Период дискретизации τ изменялся от 0.08 до 1.6 с шагом 0.08. В отсчеты $\tilde{p}_{k,j}$ добавлялась случайная помеха $\varepsilon_{k,j}$, величиной 0.1% в относительных к мощности полезного сигнала единицах, что приблизительно соответствует разбросу реальных экспериментальных данных ползучести. Смещение $M[\hat{a}] - \tilde{a}$ оценок параметров модели ползучести

\hat{a} представлено в относительных к точному значению \tilde{a} единицах:

$$\Delta a = \left| \frac{M[\hat{a}] - \tilde{a}}{\tilde{a}} \right| 100\%. \text{ Каждая экспериментальная оценка смещения } \Delta a, \%,$$

находилась на основе усреднения 50 независимых оценок соответствующего параметра \hat{a} , вычисленных при одних и тех же значениях параметров тестового сигнала и мощности случайной помехи. На основе вычисленных оценок параметров \hat{a} формировалась выборка значений модели \hat{p} , нормированная остаточная сумма квадратов вычислялась в виде

$$\frac{s_{ocm}}{s_p} 100\% = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} (p_{k,j} - \hat{p}_{k,j})^2}{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} p_{k,j}^2}} 100\% \text{ как мера погрешности результатов вы-}$$

числений. Результаты исследований представлены в таблице 3.3, а также изображены на рисунках 3.19 – 3.22.

Таблица 3.3

Зависимость смещения оценок параметров модели деформации ползучести на первой стадии от величины периода дискретизации

τ	0.08	0.16	0.24	0.32	0.4	0.48	0.56	0.64	0.72	0.8
$\Delta c_1, \%$	0.26	0.17	0.05	0.06	0.06	0.07	0.07	0.08	0.07	0.08
$\Delta \alpha_1, \%$	0.19	0.18	0.1	0.12	0.14	0.12	0.12	0.15	0.16	0.14
$\Delta c_2, \%$	50.97	4.55	0.59	0.72	0.6	0.45	0.7	0.68	0.6	0.71
$\Delta \alpha_2, \%$	40.98	12.1	1.98	1.29	1.94	1.63	1.51	1.74	1.34	1.38

Продолжение таблицы 3.3

Зависимость смещения оценок параметров модели деформации ползучести на первой стадии от величины периода дискретизации

τ	0.88	0.96	1.04	1.12	1.2	1.28	1.36	1.44	1.52	1.6
$\Delta c_1, \%$	0.08	0.06	0.07	0.04	0.08	0.1	0.08	0.06	0.08	0.07
$\Delta \alpha_1, \%$	0.14	0.16	0.14	0.12	0.22	0.18	0.23	0.18	0.18	0.25
$\Delta c_2, \%$	0.67	0.61	0.62	0.45	0.8	1.03	0.78	0.58	0.83	0.54
$\Delta \alpha_2, \%$	1.24	1.11	0.7	0.52	1.1	1.34	1.03	0.84	1.12	0.77

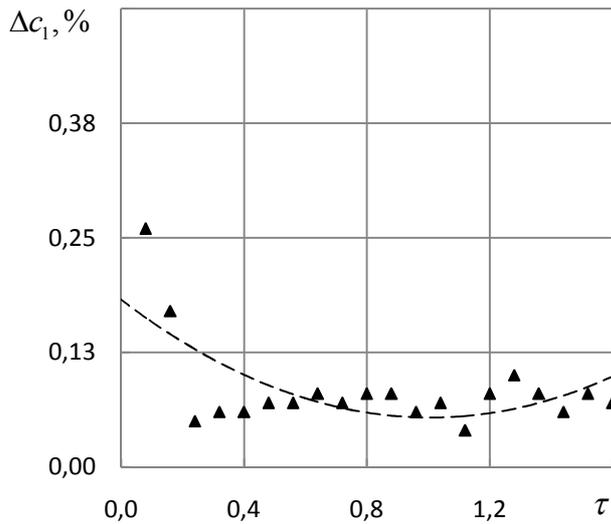


Рис. 3.19. Зависимость смещения оценок параметра c_1 от величины периода дискретизации

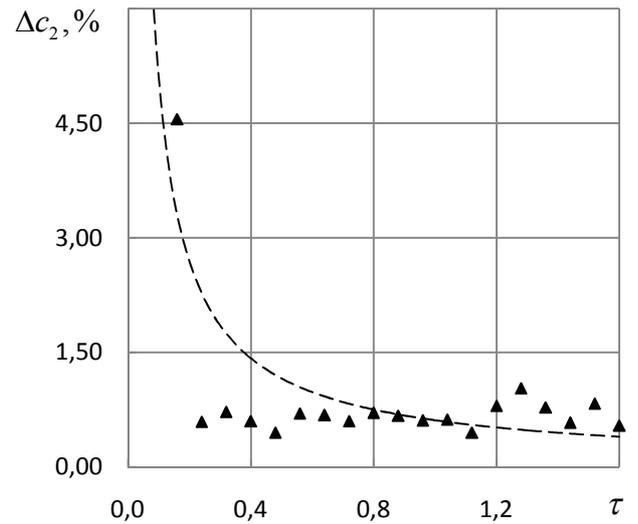


Рис. 3.20. Зависимость смещения оценок параметра c_2 от величины периода дискретизации

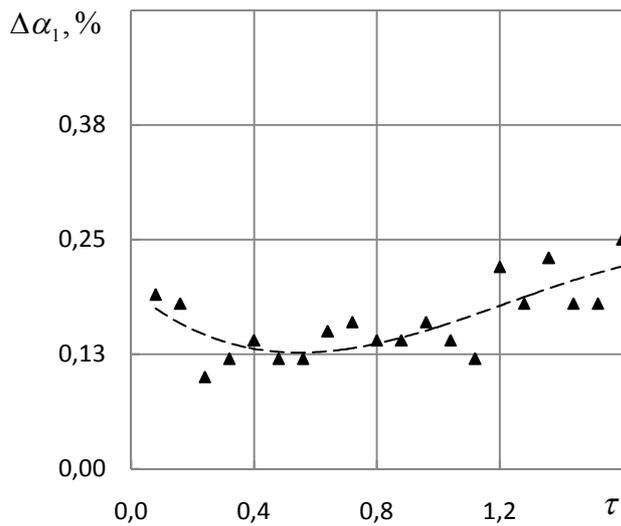


Рис. 3.21. Зависимость смещения оценок параметра α_1 от величины периода дискретизации

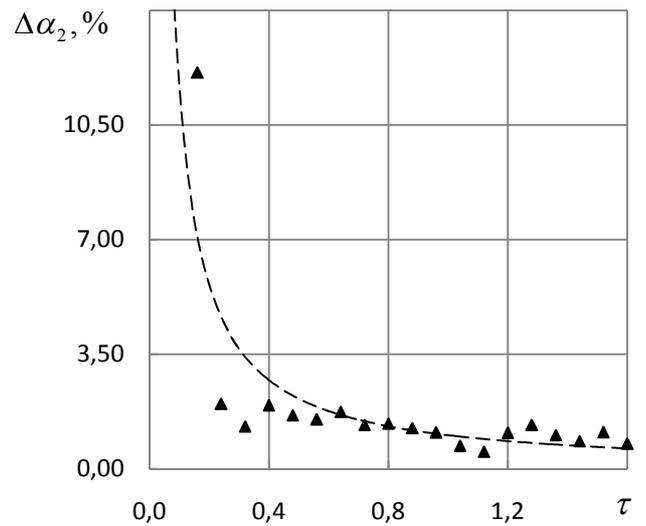


Рис. 3.22. Зависимость смещения оценок параметра α_2 от величины периода дискретизации

Как показывает исследование, минимальные значения смещения параметров модели деформации ползучести на первой стадии наблюдаются при следующих значениях периода дискретизации τ : для параметра $c_1 - \tau = 1.12$, $\alpha_1 - \tau = 0.24$, $c_2 - \tau = 1.12$, $\alpha_2 - \tau = 1.12$, при дальнейшем уменьшении периода дискретизации наблюдается тенденция к росту смещения оценок па-

рамеров. Таким образом, при проведении вычислений для определения параметров модели реологической деформации на первой стадии на основе разработанного численного метода можно рекомендовать усредненный период дискретизации $\tau \approx 1$.

Пример 3.4. В рамках модельного примера для исследования зависимости смещения оценок параметров модели ползучести на первой стадии вида $\tilde{p}(\tau k, \sigma_{0j}) = [\tilde{c}_1(1 - e^{-\tilde{\alpha}_1 \tau k}) + \tilde{c}_2(1 - e^{-\tilde{\alpha}_2 \tau k})] \sigma_{0j}^{\tilde{n}}$, $j = \overline{1, M}$, $M = 4$, от величины случайной помехи формировалась выборка точных значений математической модели с параметрами $\tilde{c}_1 = 1.5$, $\tilde{\alpha}_1 = 0.5$, $\tilde{c}_2 = 0.08$, $\tilde{\alpha}_2 = 0.03$, $\tilde{n} = 1.126$, и значениями $\sigma_0 = 2, 3, 5, 7$. Период дискретизации $\tau = 1$, количество отсчетов в каждой j -ой $N = 100$. В отсчеты $\tilde{p}_{k,j}$ добавлялась случайная помеха $\varepsilon_{k,j}$, величина которой менялась от 0 до 1% в относительных к мощности полезного сигнала единицах с шагом 0.1. Смещение $M[\hat{a}] - \tilde{a}$ оценок параметров модели ползучести \hat{a} представлено в относительных к точному значению \tilde{a} единицах: $\Delta a = \left| \frac{M[\hat{a}] - \tilde{a}}{\tilde{a}} \right| 100\%$. Каждая экспериментальная оценка смещения

$\Delta a, \%$, находилась на основе усреднения 50 независимых оценок соответствующего параметра \hat{a} , вычисленных при одних и тех же значениях параметров тестового сигнала и мощности случайной помехи. На основе вычисленных оценок параметров \hat{a} формировалась выборка значений модели \hat{p} , нормированная остаточная сумма квадратов вычислялась в виде

$$\frac{S_{ocm}}{S_p} 100\% = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} (p_{k,j} - \hat{p}_{k,j})^2}{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} p_{k,j}^2}} 100\% \text{ как мера погрешности результатов вы-}$$

числений. Результаты исследований представлены в таблице 3.4, а также изображены на рисунках 3.23–3.27.

Таблица 3.4

Зависимость смещения оценок параметров модели деформации ползучести на первой стадии и нормированной остаточной суммы квадратов от величины случайной помехи

$\varepsilon, \%$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\Delta c_1, \%$	0.00	1.21	2.13	2.96	4.17	5.11	6.18	6.75	7.10	7.88	9.04
$\Delta \alpha_1, \%$	0.00	23.72	30.59	34.07	40.38	41.03	43.03	44.75	45.13	46.06	49.54
$\Delta c_2, \%$	0.00	5.98	10.69	14.89	20.95	25.85	30.65	33.96	36.31	39.56	45.70
$\Delta \alpha_2, \%$	0.00	2.81	5.39	7.61	10.98	13.30	17.25	20.81	21.01	23.73	27.59
$s, \%$	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.49	0.59	0.69	0.79	0.89	0.99

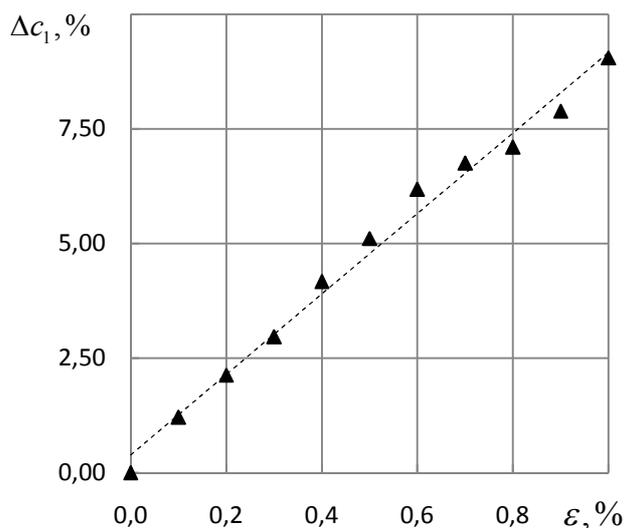


Рис.3.23. Зависимость смещения оценок параметра c_1 от мощности случайной помехи

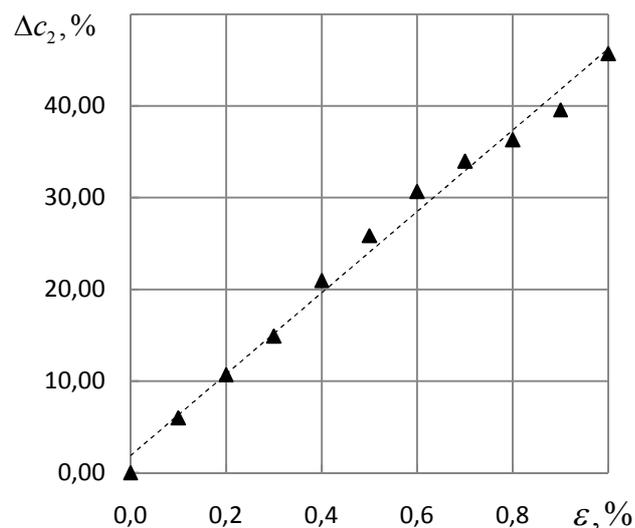


Рис.3.24. Зависимость смещения оценок параметра c_2 от мощности случайной помехи

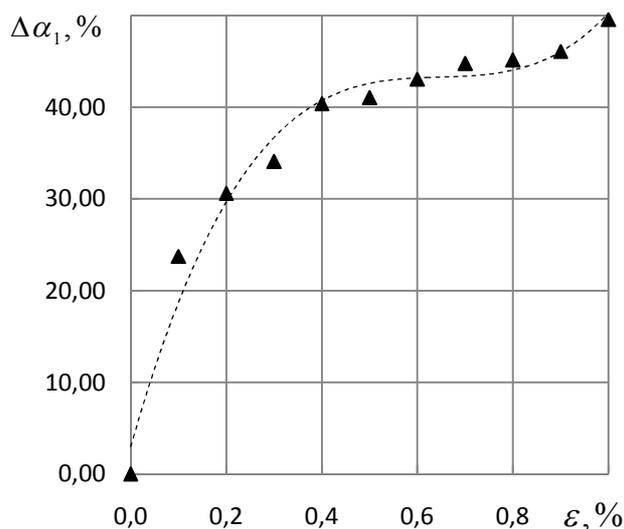


Рис.3.25. Зависимость смещения оценок параметра α_1 от мощности случайной помехи

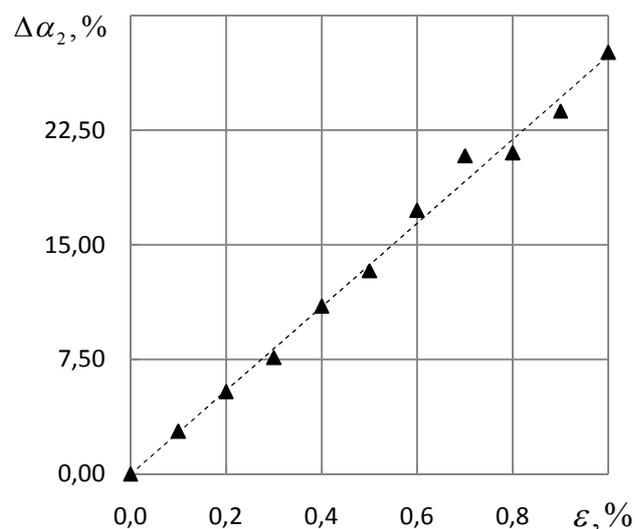


Рис.3.26. Зависимость смещения оценок параметра α_2 от мощности случайной помехи

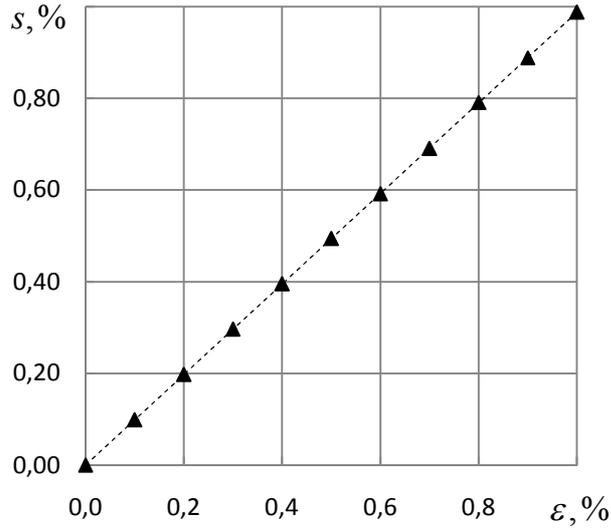


Рис.3.27. Зависимость остаточной суммы квадратов от мощности случайной помехи

Как показывает численно-аналитическое исследование, смещение оценок параметров монотонно возрастает с ростом величины случайной помехи и превышает ее значение. Это объясняется тем, что при параметрической идентификации в разработанном методе осуществляется минимизация квадратов отклонений отклика системы от экспериментальных значений, а не минимизация отклонений оценок параметров модели от их истинных значений. Однако нормированная остаточная сумма квадратов не превышает значение помехи, что свидетельствует о высокой помехозащищенности разработанного численного метода определения параметров первой стадии ползучести.

Пример 3.5. В модельном примере для исследования зависимости погрешности оценивания параметров модели третьей стадии ползучести вида

$$\tilde{p}(tk, \sigma_{0j}) = -\frac{1}{\sigma_{0j} \tilde{m} \tilde{\alpha}} \ln(1 - \tilde{\alpha} \tilde{m} \tilde{c} \sigma_{0j}^{\tilde{m}+1} tk)$$

формировалась выборка точных значений эквивалентной модели

$$\tilde{t}_{k,j} = \frac{1}{\tilde{c} \tilde{m} \sigma_{0j}^{\tilde{m}+1} \tilde{\alpha}} \left[1 - \exp(-\tilde{m} \tilde{\alpha} \sigma_{0j} p_{k,j}) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, N_j - 1, \quad j = 1, 2, \dots, M,$$

с параметрами $\tilde{c} = 0.02$, $\tilde{\alpha} = 0.1$, $\tilde{m} = 1$, значениями $\sigma_0 = 5, 6, 6.7, 7, 9$, и объемом

$N_j = 23, 16, 13, 12, 7$, шагом $\Delta p_j = 0.9$. В выборку точных значений добавлялась аддитивная случайная помеха мощностью от 0 до 1%, а также мощностью от 0 до 5%. Пример сформированной выборки представлен на рисунке 3.28.

В качестве экспериментальных оценок погрешности параметров \tilde{c} , $\tilde{\alpha}$, \tilde{m} использовался второй центральный момент по формулам (3.105) – (3.106). Погрешность находилась на основе 50 независимых оценок \hat{c} , $\hat{\alpha}$, \hat{m} , вычисленных при одних и тех же значениях параметров тестового сигнала и мощности случайной помехи. Результаты исследований представлены в таблицах 3.5, 3.6 а также изображены на рисунках 3.29– 3.36.

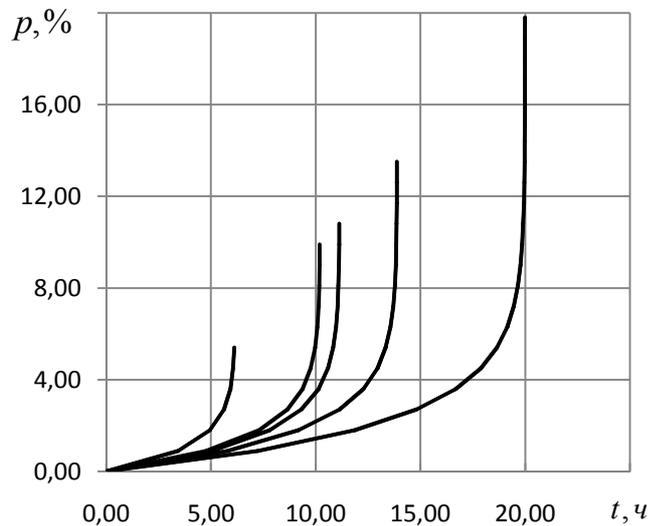


Рис.3.28. Выборка точных значений модели третьей стадии ползучести

Таблица 3.5

Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единицах оценок параметров от мощности случайной помехи, при мощности ε от 0 до 1%

$\varepsilon, \%$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
$\Delta c, \%$	0.00	0.14	0.32	0.44	0.56	0.98	0.86	1.34	1.42	1.50	1.73
$\Delta \alpha, \%$	0.00	0.11	0.28	0.38	0.47	0.82	0.84	0.81	0.98	1.35	1.38
$\Delta m, \%$	0.00	0.08	0.19	0.25	0.32	0.60	0.53	0.71	0.77	0.91	0.99
$s, \%$	0.00	0.06	0.14	0.24	0.33	0.46	0.55	0.64	0.77	0.87	1.10
R^2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998

Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единицах оценок параметров от мощности случайной помехи при мощности ε от 0 до 1%

$\varepsilon, \%$	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
$\Delta c, \%$	2.18	2.36	2.26	2.22	2.29	3.09	3.22	4.10	4.17	4.19
$\Delta \alpha, \%$	1.55	1.74	1.81	2.12	1.95	2.59	2.30	3.29	2.84	3.14
$\Delta m, \%$	1.28	1.30	1.34	1.42	1.37	1.87	1.84	2.51	2.44	2.47
$s, \%$	1.21	1.37	1.47	1.67	1.77	1.94	2.09	2.32	2.44	2.54
R^2	0.999	0.998	0.999	0.997	0.998	0.998	0.997	0.996	0.997	0.997

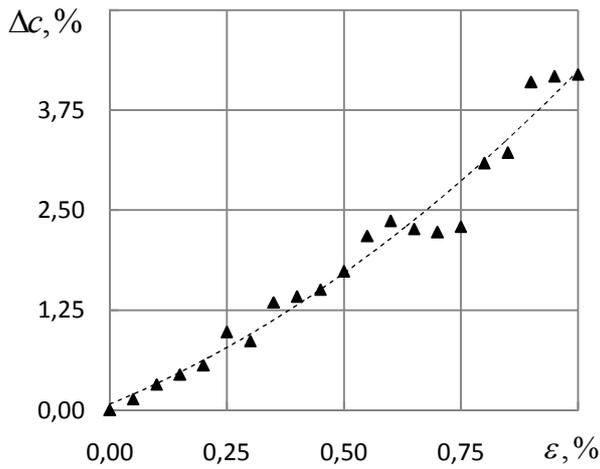


Рис.3.29. Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единиц оценок параметра c от мощности случайной помехи

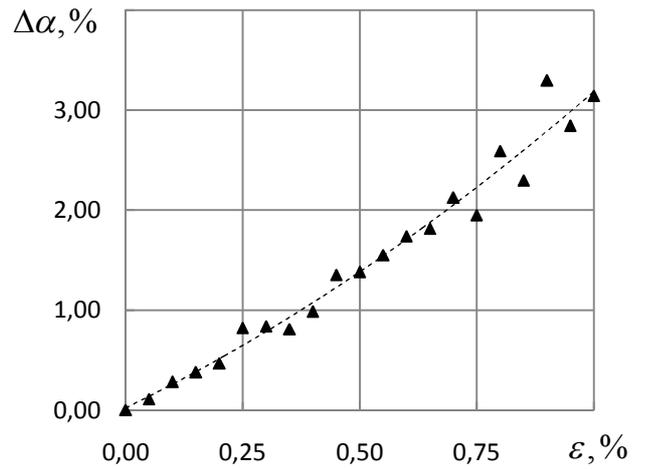


Рис.3.30. Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единиц оценок параметра α от мощности случайной помехи

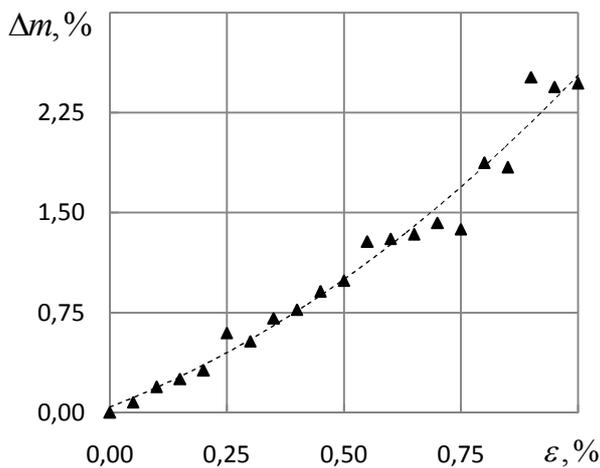


Рис.3.31. Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единиц оценок параметра m от мощности случайной помехи

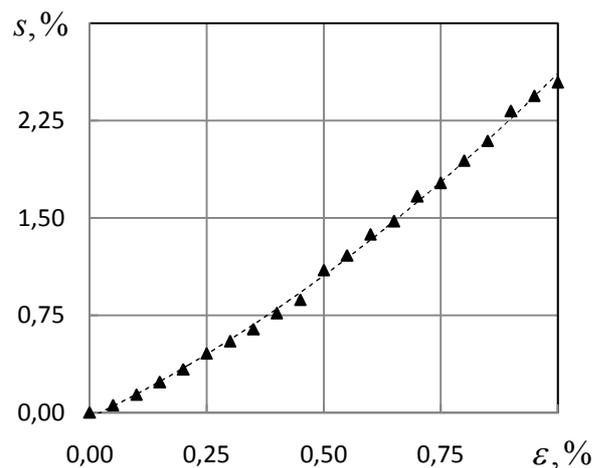


Рис.3.32. Зависимость нормированной остаточной суммы квадратов от мощности случайной помехи

Таблица 3.6

Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единицах оценок параметров от мощности случайной помехи при мощности ε от 0 до 5%

$\varepsilon, \%$	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
$\Delta c, \%$	0,00	0,61	1,91	2,57	3,92	5,09	5,71	7,86	9,56	11,34	13,08
$\Delta \alpha, \%$	0,00	0,63	1,77	2,23	2,69	3,50	3,48	4,38	4,76	5,76	6,38
$\Delta m, \%$	0,00	0,37	1,23	1,56	2,30	2,97	3,05	4,34	5,15	5,97	6,86
$s, \%$	0,00	0,46	1,06	1,78	2,53	3,51	4,43	5,64	6,42	7,25	8,28
R^2	0,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,99	0,97	0,97	0,98	0,97	0,96

Продолжение таблицы 3.6

Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единицах оценок параметров от мощности случайной помехи при мощности ε от 0 до 5%

$\varepsilon, \%$	2,75	3,00	3,25	3,50	3,75	4,00	4,25	4,50	4,75	5,00
$\Delta c, \%$	12,81	16,75	20,24	23,31	24,82	22,42	34,58	33,84	38,11	35,83
$\Delta \alpha, \%$	6,22	6,34	7,63	9,09	9,38	7,63	10,32	10,06	11,99	10,02
$\Delta m, \%$	6,87	8,49	11,11	11,74	11,97	11,24	14,78	14,21	17,04	14,86
$s, \%$	9,45	10,61	11,39	12,60	12,67	13,97	15,03	15,52	16,06	16,80
R^2	0,98	0,94	0,96	0,78	0,75	0,87	0,79	0,90	0,92	0,86

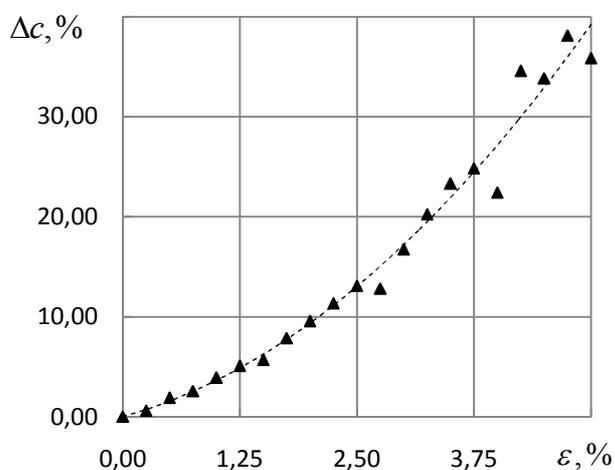


Рис. 3.33. Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единицах оценок параметра c от мощности случайной помехи

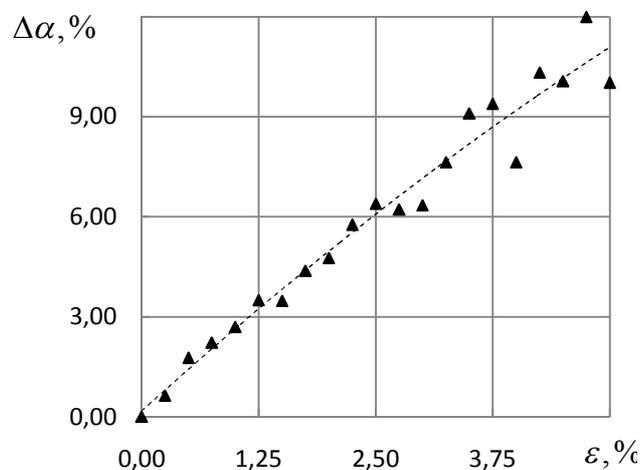


Рис. 3.34. Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единицах оценок параметра α от мощности случайной помехи

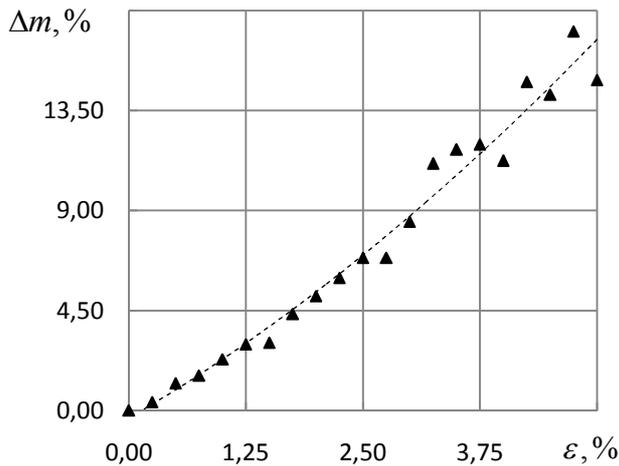


Рис. 3.35. Зависимость второго центрального выборочного момента в относительных к истинному значению единицах оценок параметра m от мощности случайной помехи

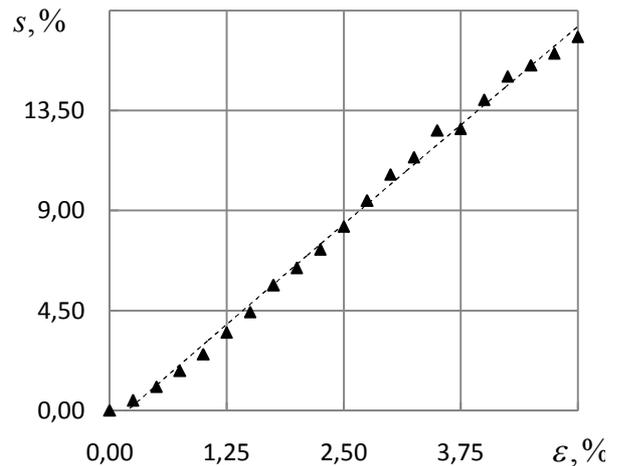


Рис. 3.36. Зависимость нормированной остаточной суммы квадратов от мощности случайной помехи

Как показывает исследование, величина смещения оценок параметров превышает значение случайной помехи, вместе с тем, коэффициент детерминации R^2 , который косвенно может служить оценкой адекватности построенных моделей для третьей стадии ползучести близок к 1, что свидетельствует о высокой эффективности разработанного численного метода определения параметров модели третьей стадии ползучести. Исследования зависимости погрешности оценивания параметров от величины периода дискретизации не проводились в силу затрудненности такого исследования: при имитационном моделировании реологической деформации на третьей стадии изменение периода дискретизации возможно в достаточно узких пределах, так как вектор правой части обобщенной регрессионной модели для третьей стадии, содержащий значения $t_{k,j} - t_{k-1,j}$, $k = \overline{0, N-1}$, N – объем выборки, может вырождаться, если временные отсчеты находятся слишком близко друг к другу.

3.5. Выводы по главе 3

1. Разработан численный метод определения параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений.

2. Построены обобщенные регрессионные модели, в рекуррентной форме описывающие результаты наблюдений деформации на первой, первой и второй, третьей стадии.

3. Получены формулы, выражающие связь между параметрами исходных моделей реологического деформирования и коэффициентами обобщенной регрессионной модели.

4. Разработаны методика оценки погрешности вычисления оценок параметров моделей реологического деформирования и итерационная процедура среднеквадратичного оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели.

5. Проведено исследование зависимости погрешности вычисления коэффициентов регрессионной модели от величин периода дискретизации и случайной помехи. Установлено, что минимальное смещение оценок коэффициентов и параметров моделей реологического деформирования на первой и второй стадиях достигается при величине периода дискретизации $\tau \approx 0.1$, в этом случае погрешность оценивания коэффициентов регрессионной модели при мощности случайной помехи, равной 1 %, составляет величину порядка 0.02 – 1 %. При изменении мощности случайной помехи в диапазоне от 0.5 до 5 % погрешность оценивания параметров модели не превышает величины случайной помехи. При оценивании параметров модели реологического деформирования на первой стадии минимальная погрешность оценивания параметров модели наблюдается при периоде дискретизации $\tau \approx 1$, при мощности случайной помехи 0.1 % наблюдается погрешность оценивания параметров порядка 0.1 – 0.5 %. При изменении мощности случайной помехи до 1 % наблюдается рост погрешности оценивания параметров модели, однако нор-

мированная остаточная сумма квадратов не превышает величины случайной помехи, что свидетельствует о высокой помехозащищенности разработанного метода. При исследовании зависимости погрешности оценивания параметров модели от мощности случайной помехи наблюдается хорошая помехозащищенность разработанного метода.

Глава 4. Результаты апробации численных методов определения параметров моделей ползучести на основе разностных уравнений

Результаты данной главы изложены в соответствии с работами соискателя [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 46, 47, 48, 49, 50, 51].

В данной главе проводится апробация разработанного численного метода. Численный метод был применен при оценивании параметров моделей деформирования поливинилхлоридного пластиката, а также алюминиевых сплавов Д16Т и Д16АТ, стали 15Х2МФА, по экспериментальным кривым ползучести, оценивании параметров модели раскрытия трещины для образцов из стали 316L, определении параметров аналитической зависимости J - интеграла для плоских образцов из сплава МА2-1. Результаты представлены ниже.

4.1. Определение параметров модели ползучести поливинилхлоридного пластиката

Разработанный численный метод был применен при обработке экспериментальных диаграмм ползучести поливинилхлоридного пластиката по данным работы [80], полученных при исследовании трубчатых образцов длиной 1000 мм и сечением 1.2 мм² при температуре $T = 20^\circ\text{C}$ и пяти различных значениях напряжений $\sigma_0 = \{4.66; 6.29; 8.75; 10.38; 12.02\}$ МПа.

Экспериментальные данные представлены в таблице 4.1, а также изображены на рисунке 4.1. Для формирования равномерной по времени t выборки была осуществлена предварительная обработка экспериментальных данных с помощью скользящего среднего с периодом дискретизации $\tau = 0.1$ (как показало исследование разработанного численного метода, для модели деформации на первой стадии минимальное смещение оценок коэффициентов разностного уравнения наблюдается при $\tau \approx 0.9$, однако в данном случае такой период дискретизации не подходит, так как из расчета

исключаются отсчеты при $t = 0.25$ и $t = 0.5$). Равномерная выборка также представлена на рисунке 4.1.

Таблица 4.1
Экспериментальные данные деформации ползучести
поливинилхлоридного пластика

$t, ч$	$\sigma_0, МПа$				
	4.66	6.29	8.75	10.38	12.02
0	0	0	0	0	0
0.25	0.0113	0.0188	0.028	0.0356	0.0425
0.5	0.0138	0.0215	0.0322	0.0418	0.0492
1	0.015	0.024	0.0357	0.0461	0.0545
2	0.0174	0.027	0.0393	0.051	0.0607
3	0.0184	0.0278	0.0417	0.0538	0.064
4	0.0194	0.0288	0.0438	0.056	0.0672
5	0.0203	0.0295	0.0455	0.0576	0.0695
6	0.0206	0.0305	0.0468	0.0592	0.0723
8	0.0218	0.032	0.049	0.0626	0.0753

Для обработки диаграмм ползучести была выбрана модель ползучести вида (2.1), с двумя экспоненциальными слагаемыми: $p(t, \sigma_{0j}) = [c_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 t})] \sigma_{0j}^n, j = \overline{1, 5}$. В соответствии с разработанным алгоритмом для оценивания параметра n была составлена обобщенная регрессионная модель (3.89), откуда по формулам (3.90), (3.91) получена оценка параметра $\hat{n} = 1.3186$. В результате выполнения итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания обобщенной регрессионной модели (3.6), которая соответствует модели ползучести (2.1) в случае двух экспоненциальных слагаемых, после 11 итераций получены

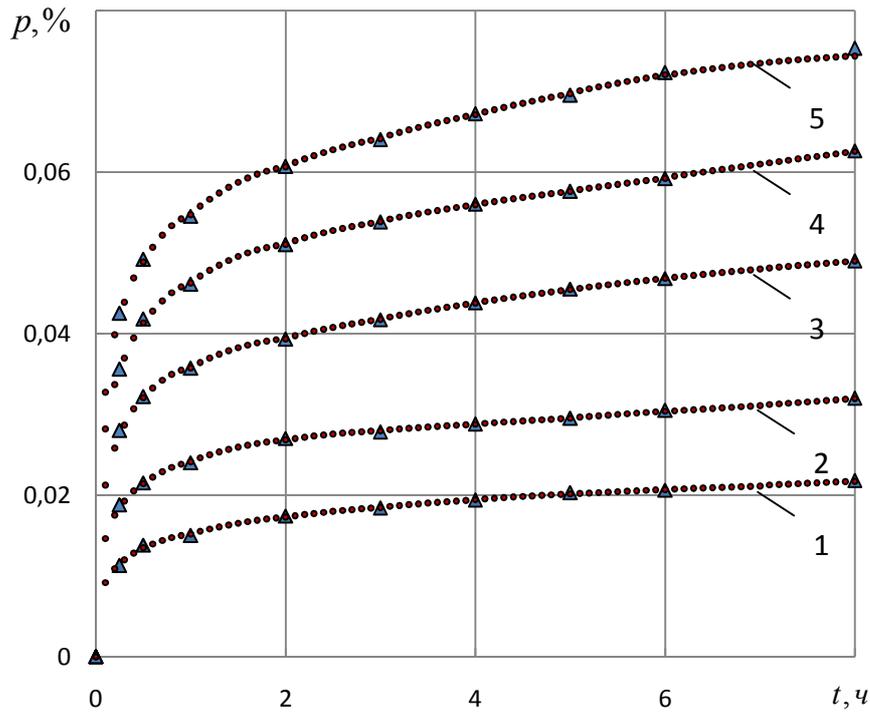


Рис.4.1. Экспериментальные диаграммы ползучести поливинилхлоридного пластика (треугольные маркеры) и сформированная на их основе выборка равномерных значений (круглые маркеры): 1 – $\sigma_0 = 4.66$ МПа, 2 – $\sigma_0 = 6.29$ МПа, 3 – $\sigma_0 = 8.75$ МПа, 4 – $\sigma_0 = 10.38$ МПа, 5 – $\sigma_0 = 12.02$ МПа

следующие оценки коэффициентов обобщенной регрессионной модели $\hat{\lambda}$: $\hat{\lambda}_1 = 1.38836$, $\hat{\lambda}_2 = -0.40468$, $\hat{\lambda}_3 = 4.76 \cdot 10^{-5}$, $\hat{\lambda}_4 = 0.00108$. На основе полученных оценок коэффициентов, используя соотношения (3.36), составлено квадратное уравнение относительно μ_i , $i = \overline{1,2}$, имеющее вид $\mu^2 - \hat{\lambda}_1 \mu - \hat{\lambda}_2 = 0$:

$$\mu^2 - 1.38836\mu + 0.40468 = 0, \quad (4.1)$$

откуда были получены оценки $\hat{\mu}_1 = 0.9720$, $\hat{\mu}_2 = 0.4163$. Имея оценки $\hat{\mu}_i$, $i = \overline{1,2}$, можно составить систему уравнений вида (3.37), линейную относительно искомым параметрам c_i , $i = \overline{1,2}$:

$$\begin{cases} \hat{c}_1 + \hat{c}_2 = \frac{\hat{\lambda}_3}{1 - \hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2}, \\ \hat{c}_1(1 - \hat{\mu}_1) + \hat{c}_2(1 - \hat{\mu}_2) = \hat{\lambda}_4. \end{cases} \quad (4.2)$$

Обозначая

$$\hat{\mu}_3 = \hat{\lambda}_3, \quad \hat{\mu}_4 = \hat{\lambda}_4, \quad (4.3)$$

с учетом полученных ранее соотношений (2.13): $\hat{\lambda}_1 = \hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2$, $\hat{\lambda}_2 = -\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2$, система уравнений (4.2) примет вид:

$$\begin{cases} \hat{c}_1 + \hat{c}_2 = \frac{\hat{\mu}_3}{1 - \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}, \\ \hat{c}_1(1 - \hat{\mu}_1) + \hat{c}_2(1 - \hat{\mu}_2) = \hat{\mu}_4. \end{cases} \quad (4.4)$$

Решение данной системы в явном виде:

$$\hat{c}_1 = \frac{\hat{\mu}_1\hat{\mu}_4 - \hat{\mu}_4 + \hat{\mu}_3}{(\hat{\mu}_1 - 1)\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2 + \hat{\mu}_1}, \quad \hat{c}_2 = -\frac{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_4 - \hat{\mu}_4 + \hat{\mu}_3}{\hat{\mu}_2^2 + (-\hat{\mu}_1 - 1)\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1}. \quad (4.5)$$

Оценки параметров $\hat{\alpha}_i$, $i = \overline{1, 2}$, находились по формулам (3.37):

$$\hat{\alpha}_i = -\frac{1}{\tau} \ln(\hat{\mu}_i), \quad i = \overline{1, 2}.$$

В результате получены следующие оценки параметров: $\hat{c}_1 = 0.0011$, $\hat{\alpha}_1 = 0.2836$, $\hat{c}_2 = 0.0018$, $\hat{\alpha}_2 = 8.763$.

Таким образом, для описания зависимости деформации ползучести от времени и напряжения может быть использована функция:

$$\hat{p}(t, \sigma_0) = \left[0.0011(1 - e^{-0.2836t}) + 0.0018(1 - e^{-8.763t}) \right] \sigma_0^{1.3186}. \quad (4.6)$$

На рисунке 4.2 изображены экспериментальные диаграммы ползучести поливинилхлоридного пластика и расчетные зависимости на основе соотношения (4.6), построенная при различных значениях растягивающего напряжения σ_0 .

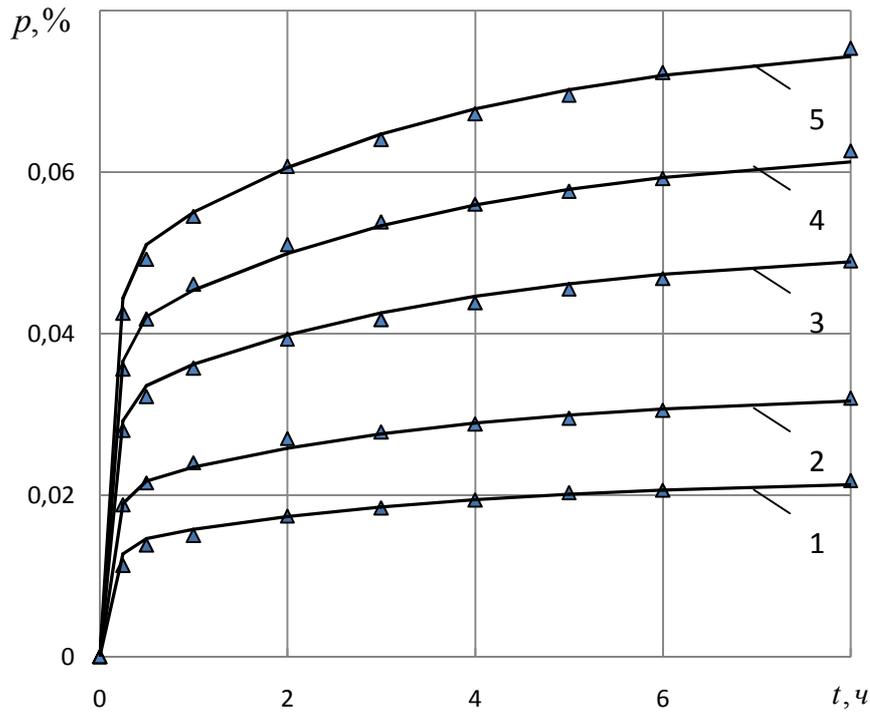


Рис.4.2. Экспериментальные диаграммы ползучести поливинилхлоридного пластика (треугольные маркеры) и вычисленные с помощью разработанного численного метода значения деформации ползучести (сплошные линии):
 1 – $\sigma_0 = 4.66$ МПа , 2 – $\sigma_0 = 6.29$ МПа , 3 – $\sigma_0 = 8.75$ МПа ,
 4 – $\sigma_0 = 10.38$ МПа , 5 – $\sigma_0 = 12.02$ МПа

Величина нормированной остаточной суммы квадратов

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} (p_{k,j} - \hat{p}_{k,j})^2}{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} p_{k,j}^2}} 100\% \text{ как мера отклонения расчетных данных от экс-}$$

периментальных составила для каждой j – ой ($j = \overline{1,5}$) диаграммы соответственно 3.56%, 1.83%, 1.99%, 1.42%, 1.65%. Нормированная остаточная сумма квадратов по всей совокупности диаграмм ползучести составила 1.77%, что свидетельствует о высокой точности построенной аппроксимации экспериментальных значений ползучести. Коэффициент детерминации равен $R^2 = 0.998$, что свидетельствует о высокой степени адекватности построенной модели данным эксперимента.

Для построения доверительных интервалов результатов вычислений по полученной модели можно воспользоваться формулой [11,23]:

$$p(t, \sigma_0) = \hat{p}(t, \sigma_0) \pm t_\beta s[\hat{p}(t, \sigma_0)], \quad (4.7)$$

где можно считать, что статистика t_β имеет распределение Стьюдента с $\nu = N - n$ степенями свободы, N – количество точек эксперимента, n – количество параметров модели. При доверительной вероятности $\beta = 0.95$ и $\nu \geq 25$ достаточно принять $t_\beta = 2.1$.

Доверительный интервал можно строить также с использованием неравенства Чебышева. При оценке доверительного интервала для параметра \hat{a} (\hat{a} – любой из оцениваемых параметров) неравенство записывается в виде

$$P(|\Delta \hat{a}| \geq t_\beta \sigma[\hat{a}]) \leq \frac{4}{9t_\beta^2},$$

где величина t_β находится из формулы для доверительной вероятности $\beta = 1 - \frac{4}{9t_\beta^2}$. В частности, при $\beta = 0.95$ величина

$$t_\beta = 2.98.$$

Для оценки дисперсии результата вычисления $\hat{p}(t, \sigma_0)$ необходимо последовательно найти оценки дисперсии промежуточных параметров μ_i , $i = \overline{1, 4}$, затем оценки дисперсии параметров модели ползучести, тогда оценку дисперсии результата вычислений можно найти по формуле:

$$s^2[\hat{p}_{k,j}] = \left[\frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial c_1}, \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial c_2}, \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial \alpha_2}, \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial n} \right] V[a] \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial c_1} \\ \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial c_2} \\ \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial \alpha_2} \\ \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial n} \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

где $V[a]$ – матрица дисперсий-ковариаций параметров модели ползучести.

Матрица дисперсий-ковариаций промежуточных параметров $V[\mu]$ может быть найдена по формуле (3.50):

$$V[\mu] = W V_{\text{общ}}[\lambda] W^T, \quad (4.9)$$

где матрица W – матрица частных производных $\frac{\partial \mu_i}{\partial \lambda_j}$, $i = \overline{1,5}$, $j = \overline{1,5}$, вида

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\mu}_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \hat{\mu}_1}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial \hat{\mu}_1}{\partial \lambda_5} \\ \frac{\partial \hat{\mu}_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \hat{\mu}_2}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial \hat{\mu}_2}{\partial \lambda_5} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{\mu}_5}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \hat{\mu}_5}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial \hat{\mu}_5}{\partial \lambda_5} \end{bmatrix}.$$

Элемент $\hat{\mu}_5 = \hat{\lambda}_5$, $\hat{\lambda}_5 = \hat{n}$ введен в матрицу W для учёта параметра n , оцениваемого перед формированием векторов и матриц, входящих в обобщенную регрессионную модель (3.6).

С учетом формул (3.60), (3.61), (4.3) матрица W примет вид

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} -\frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1} & -\frac{1}{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\hat{\mu}_1}{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1} & \frac{1}{\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица дисперсий-ковариаций коэффициентов обобщенной регрессионной модели $V_{общ}[\hat{\lambda}] = \begin{bmatrix} V[\hat{\lambda}] & \Theta \\ \Theta & s^2[\hat{n}] \end{bmatrix}$, где $V[\hat{\lambda}]$ – собственно матрица дисперсий-ковариаций коэффициентов обобщенной регрессионной модели (3.6), которая соответствует модели ползучести (2.1), $s^2[\hat{n}]$ – оценка дисперсии параметра n , получаемая при оценивании обобщенной регрессионной модели (3.89).

Матрица дисперсий-ковариаций параметров модели ползучести $V[a]$ может быть найдена в виде, аналогичном (3.50):

$$V[a] = W_a V[\mu] W_a^T. \quad (4.10)$$

Здесь матрица W_a – матрица производных параметров модели ползучести $c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_2, n$ по промежуточным параметрам $\mu_i, i = \overline{1,5}$, вида

$$W_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{c}_1}{\partial \mu_1} & \frac{\partial \hat{c}_1}{\partial \mu_2} & \frac{\partial \hat{c}_1}{\partial \mu_3} & \frac{\partial \hat{c}_1}{\partial \mu_4} & \frac{\partial \hat{c}_1}{\partial \mu_5} \\ \frac{\partial \hat{c}_2}{\partial \mu_1} & \frac{\partial \hat{c}_2}{\partial \mu_2} & \frac{\partial \hat{c}_2}{\partial \mu_3} & \frac{\partial \hat{c}_2}{\partial \mu_4} & \frac{\partial \hat{c}_2}{\partial \mu_5} \\ \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \mu_1} & \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \mu_2} & \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \mu_3} & \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \mu_4} & \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \mu_5} \\ \frac{\partial \hat{\alpha}_2}{\partial \mu_1} & \frac{\partial \hat{\alpha}_2}{\partial \mu_2} & \frac{\partial \hat{\alpha}_2}{\partial \mu_3} & \frac{\partial \hat{\alpha}_2}{\partial \mu_4} & \frac{\partial \hat{\alpha}_2}{\partial \mu_5} \\ \frac{\partial \hat{n}}{\partial \mu_1} & \frac{\partial \hat{n}}{\partial \mu_2} & \frac{\partial \hat{n}}{\partial \mu_3} & \frac{\partial \hat{n}}{\partial \mu_4} & \frac{\partial \hat{n}}{\partial \mu_5} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

где

$$\frac{\partial \hat{c}_1}{\partial \mu_1} = \frac{\hat{\mu}_4}{(\hat{\mu}_1 - 1)\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2 + \hat{\mu}_1} - \frac{(\hat{\mu}_2 - 2\hat{\mu}_1 + 1)(\hat{\mu}_1\hat{\mu}_4 - \hat{\mu}_4 + \hat{\mu}_3)}{((\hat{\mu}_1 - 1)\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2 + \hat{\mu}_1)^2}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \hat{c}_2}{\partial \mu_1} = \frac{(1 - \hat{\mu}_2)(\hat{\mu}_2\hat{\mu}_4 - \hat{\mu}_4 + \hat{\mu}_3)}{(\hat{\mu}_2^2 + (-\hat{\mu}_1 - 1)\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1)^2}, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \hat{c}_1}{\partial \mu_2} = -\frac{(\hat{\mu}_1 - 1)(\hat{\mu}_1\hat{\mu}_4 - \hat{\mu}_4 + \hat{\mu}_3)}{((\hat{\mu}_1 - 1)\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2 + \hat{\mu}_1)^2}, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \hat{c}_2}{\partial \mu_2} = \frac{(2\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1 - 1)(\hat{\mu}_2\hat{\mu}_4 - \hat{\mu}_4 + \hat{\mu}_3)}{(\hat{\mu}_2^2 + (-\hat{\mu}_1 - 1)\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1)^2} - \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\mu}_2^2 + (-\hat{\mu}_1 - 1)\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1}, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \hat{c}_1}{\partial \mu_3} = \frac{1}{(\hat{\mu}_1 - 1)\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2 + \hat{\mu}_1}, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \hat{c}_2}{\partial \mu_3} = -\frac{1}{\hat{\mu}_2^2 + (-\hat{\mu}_1 - 1)\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1}, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \hat{c}_1}{\partial \mu_4} = \frac{\hat{\mu}_1 - 1}{(\hat{\mu}_1 - 1)\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2 + \hat{\mu}_1}, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \hat{c}_2}{\partial \mu_4} = -\frac{\hat{\mu}_2 - 1}{\hat{\mu}_2^2 + (-\hat{\mu}_1 - 1)\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \hat{c}_1}{\partial \mu_5} = \frac{\partial \hat{c}_2}{\partial \mu_5} = 0, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \mu_1} = -\frac{1}{\tau \hat{\mu}_1}, \quad \frac{\partial \hat{\alpha}_1}{\partial \mu_i} = 0, \quad i = \overline{2,5}, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \hat{\alpha}_2}{\partial \mu_2} = -\frac{1}{\tau \hat{\mu}_2}, \quad \frac{\partial \hat{\alpha}_2}{\partial \mu_i} = 0, \quad i = 1, i = \overline{3,5}, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \hat{n}}{\partial \mu_5} = 1, \quad \frac{\partial \hat{n}}{\partial \mu_i} = 0, \quad i = \overline{1,4}. \quad (4.23)$$

Частные производные в выражении (4.8) находятся посредством дифференцирования модели (2.1) по параметрам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial c_1} &= (1 - e^{-\alpha_1 t}) \sigma_0^n, & \frac{\partial p}{\partial \alpha_1} &= c_1 \sigma_0^n t e^{-\alpha_1 t}, \\ \frac{\partial p}{\partial c_2} &= (1 - e^{-\alpha_2 t}) \sigma_0^n, & \frac{\partial p}{\partial \alpha_2} &= c_2 \sigma_0^n t e^{-\alpha_2 t}, \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= \sigma_0^n \ln(\sigma_0) \left[c_1 (1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2 (1 - e^{-\alpha_2 t}) \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Результаты вычислений на основе формул (4.7)–(4.24) представлены далее.

Оценка остаточной дисперсии $s_{ост}^2 = \frac{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} (p_{k,j} - \hat{p}_{k,j})^2}{n - m}$ с $n - m$ степе-

нями свободы, где $n = 50$, $m = 5$, $M = 5$, $N = 10$, равна $s_{ост}^2 = 5.83 \cdot 10^{-7}$.

Обобщенная матрица дисперсий-ковариаций имеет вид:

$$V_{общ} [\hat{\lambda}] = \begin{bmatrix} 9.5 \cdot 10^{-5} & -8.9 \cdot 10^{-5} & -1.5 \cdot 10^{-8} & -1.2 \cdot 10^{-7} & 0 \\ -8.9 \cdot 10^{-5} & 8.4 \cdot 10^{-5} & 1.4 \cdot 10^{-8} & 1.2 \cdot 10^{-7} & 0 \\ -1.5 \cdot 10^{-8} & 1.4 \cdot 10^{-8} & 3.7 \cdot 10^{-12} & 1.5 \cdot 10^{-11} & 0 \\ -1.2 \cdot 10^{-7} & 1.2 \cdot 10^{-7} & 1.5 \cdot 10^{-11} & 1.9 \cdot 10^{-10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.35 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}.$$

Матрица производных параметров модели ползучести по промежуточным параметрам μ_i , $i = \overline{1,5}$, имеет вид:

$$\hat{W}_a = \begin{bmatrix} -0.04 & -0.001 & 25.314 & 0.728 & 0 \\ -0.001 & -0.001 & -0.519 & 0.728 & 0 \\ -9.72 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4.163 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица дисперсий-ковариаций параметров модели ползучести имеет вид:

$$V[\hat{a}] = \begin{bmatrix} 1.6 \cdot 10^{-9} & 4.9 \cdot 10^{-10} & -2.7 \cdot 10^{-7} & 1.7 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 4.9 \cdot 10^{-10} & 2.1 \cdot 10^{-10} & -7 \cdot 10^{-8} & 5.9 \cdot 10^{-7} & 0 \\ -2.7 \cdot 10^{-7} & -7 \cdot 10^{-8} & 4.7 \cdot 10^{-5} & -2.7 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 1.7 \cdot 10^{-6} & 5.9 \cdot 10^{-7} & -2.7 \cdot 10^{-4} & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6 \cdot 10^{-9} \end{bmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы составляют оценку дисперсии параметров модели, отсюда получаем оценки среднеквадратического отклонения, которые также являются оценками точности результатов вычислений:

$$s[\hat{c}_1] = 1.19 \cdot 10^{-4}, \quad s[\hat{c}_2] = 4.32 \cdot 10^{-5}, \quad s[\hat{\alpha}_1] = 0.02, \\ s[\hat{\alpha}_2] = 0.133, \quad s[\hat{n}] = 1.19 \cdot 10^{-4}.$$

На рисунках 4.3–4.7 изображены доверительные интервалы для результатов вычислений по построенной модели (4.6), вычисленные на основе соотношений (4.7)–(4.24) при различных значениях номинального напряжения σ_0 и величине $t_\beta = 2.98$. На рисунках также изображены экспериментальные данные деформации ползучести поливинилхлоридного пластика (треугольные маркеры), и результаты вычислений по модели (4.6) (сплошные линии).

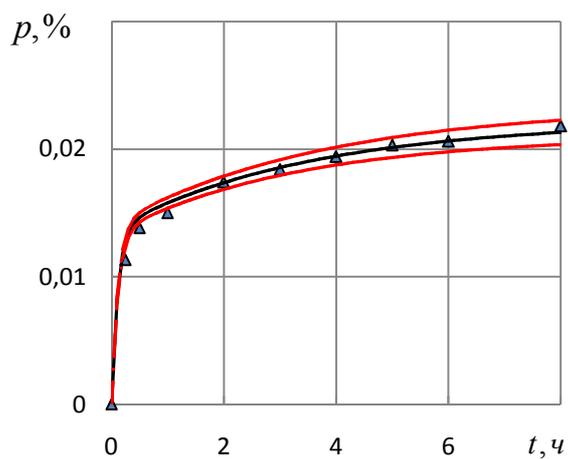


Рис. 4.3. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.6) при $\sigma_0 = 4.66$ МПа

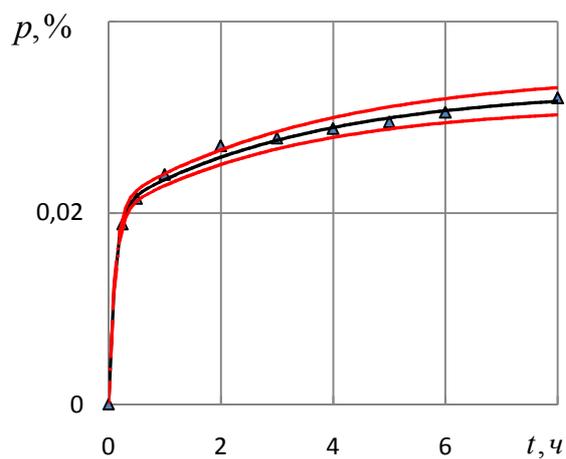


Рис. 4.4. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.6) при $\sigma_0 = 6.29$ МПа

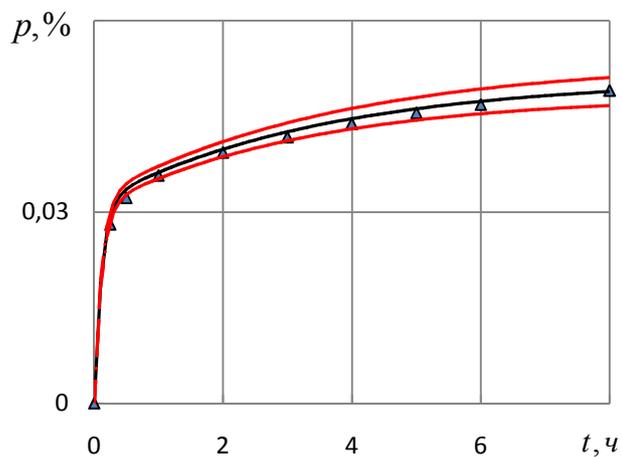


Рис. 4.5. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.6) при $\sigma_0 = 8.75$ МПа

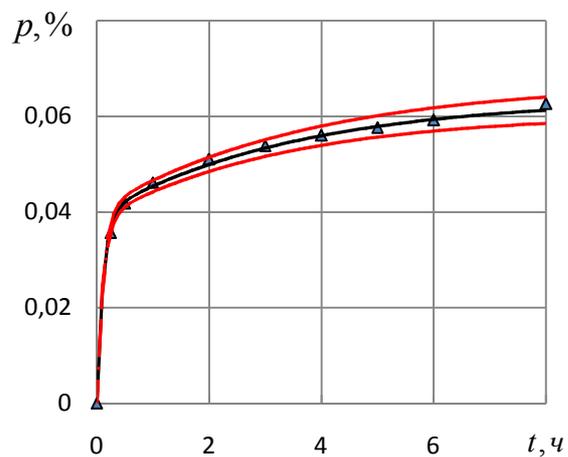


Рис. 4.6. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.6) при $\sigma_0 = 10.38$ МПа

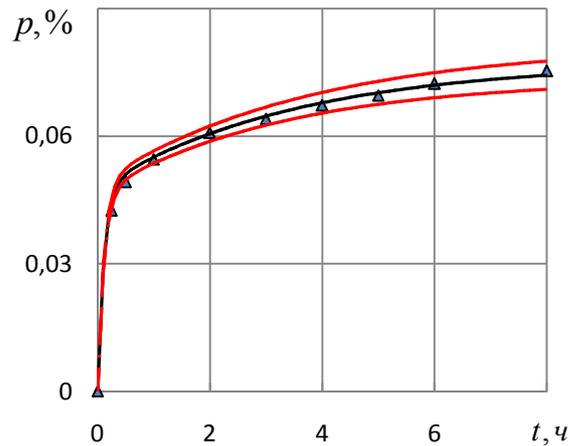


Рис. 4.7. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.6) при $\sigma_0 = 12.02$ МПа

Таким образом, проведена апробация разработанного численного метода при обработке экспериментальных данных ползучести поливинилхлоридного пластиката на первой стадии. Результаты апробации подтвердили достоверность полученных соотношений и выводов, а также высокую эффективность разработанного численного метода.

4.2. Сравнительный анализ метода последовательного выделения экспоненциальных слагаемых и разработанного численного метода на основе разностных уравнений

Экспериментальные данные деформации ползучести поливинилхлоридного пластиката, рассмотренные в предыдущем параграфе, также были обработаны с помощью известного классического метода последовательного выделения экспоненциальных слагаемых [85]. В соответствии с данным методом, вначале была рассмотрена отдельная диаграмма ползучести, полученная при напряжении $\sigma_0 = 4.66$ МПа.

В соответствии с методикой работы [85], изложенной в параграфе 1.2, приняв $\tau_1 = 8$, $p(\tau_1) = 0.0218$, $\frac{\tau_1}{2} = 4$, $p\left(\frac{\tau_1}{2}\right) = 0.0194$, $\frac{\tau_1}{4} = 2$, $p\left(\frac{\tau_1}{4}\right) = 0.0174$,

вычисляем $\gamma = \frac{p(\tau_1) - p\left(\frac{\tau_1}{2}\right)}{p\left(\frac{\tau_1}{2}\right) - p\left(\frac{\tau_1}{4}\right)} = \frac{0.0218 - 0.0194}{0.0194 - 0.0174} = 1.2,$

$$\beta = \sqrt{\gamma + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = \sqrt{1.2 + 0.25} - 0.5 = 0.7042, \quad \alpha_1 = -\frac{4}{\tau_1} \ln \beta_1 = -\frac{4}{8} \ln(0.7042) = 0.1754,$$

$$c_1 = \frac{p\left(\frac{\tau_1}{2}\right) - p\left(\frac{\tau_1}{4}\right)}{\beta_1(1 - \beta_1)} = \frac{0.0194 - 0.0174}{0.7042(1 - 0.7042)} = 0.0096,$$

$$h_1 = p(\tau_1) - c_1(1 - e^{-\alpha_1 \tau_1}) = 8 - 0.0096(1 - e^{-0.1754 \cdot 8}) = 0.0146.$$

Далее, была сформирована разность $\hat{p}_1(t) = h_1 + c_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) - p(t)$, значения разности представлены в таблице 4.2.

Таблица 4.2

Экспериментальные данные деформации ползучести поливинилхлоридного пластика и разностей, сформированные с помощью метода последовательного выделения экспоненциальных слагаемых

t	0	0.25	0.5	1	2	3	4	5	6	8
p	0.0000	0.0113	0.0138	0.0150	0.0174	0.0184	0.0194	0.0203	0.0206	0.0218
$p_1(t)$	0.0146	0.0037	0.0016	0.0011	0.0000	0.0001	0.0000	-0.0001	0.0002	0.0000
$p_2(t)$	0.0060	0.0000	0.0000	0.0008	0.0000	0.0001	0.0000	-0.0001	0.0002	0.0000

При $t > 0.5$ значения разности $\hat{p}_1(t)$ практически равны нулю, поэтому

в качестве τ_2 выбрано $\tau_2 = 0.5$. Имея значения разности $\hat{p}_1(\tau_2)$ и $\hat{p}_1\left(\frac{\tau_2}{2}\right)$, по-

$$\text{лучаем } \beta_2 = \frac{\hat{p}_1(\tau_2)}{\hat{p}_1\left(\frac{\tau_2}{2}\right)} = 0.4264, \quad \alpha_2 = -\frac{2}{\tau_2} \ln \beta_2 = 3.409, \quad c_2 = \frac{\hat{p}_1\left(\frac{\tau_2}{2}\right)}{\beta_2} = 0.0086.$$

Далее была сформирована разность $\hat{p}_2(t) = \hat{p}_1(t) - c_2 e^{-\alpha_2 t}$, значения разности представлены в таблице 4.2.

Поскольку значения разности $\hat{p}_2(t)$ близки нулю для всех $t > 0$, и осталась только одно измеренное значение при $t = 0$, значения c_3, α_3 ищутся из

условия $c_3 e^{-\alpha_3 t} = \hat{p}_2(t)$, откуда при $t=0$ получаем $c_3 = 0.006$, при $t=0.25$ возьмем $\hat{p}_2(t)$ близкое нулю, например $\hat{p}_2(0.25) = 0.00001$, откуда $\alpha_3 = 25.5543$.

Таким образом, для описания отдельной диаграммы ползучести поливинилхлоридного пластика, построенной при $\sigma_0 = 4.66$ МПа, можно воспользоваться зависимостью:

$$\hat{p}(t) = 0.0096(1 - e^{-0.1754t}) + 0.0086(1 - e^{-3.409t}) + 0.006(1 - e^{-25.5543t}). \quad (4.25)$$

Используя гипотезу подобия кривых ползучести, всю совокупность диаграмм ползучести можно описать в виде

$$p(t, \sigma_{0j}) = \hat{p}(t) \left(\frac{\sigma_{0j}}{\sigma^*} \right)^n, \quad (4.26)$$

или, переходя к дискретному аналогу:

$$p(t_k, \sigma_{0j}) = \hat{p}(t_k) \left(\frac{\sigma_{0j}}{\sigma^*} \right)^n, \quad (4.27)$$

где $\hat{p}(t_k)$ определяется соотношением (4.25), $\sigma^* = 4.66$ МПа. Параметр n определяется по совокупности всех диаграмм ползучести с помощью МНК.

Логарифмируя выражение (4.27), получим $\ln(p_{k,j}) = \ln(\hat{p}_k) + n \ln\left(\frac{\sigma_{0j}}{\sigma^*}\right)$. Из

минимизации функционала $J = \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^9 \left[\ln(p_{k,j}) - \ln(\hat{p}_k) - n \ln\left(\frac{\sigma_{0j}}{\sigma^*}\right) \right]^2 \rightarrow \min$

получаем оценку параметра $n = \frac{\sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^9 \ln\left(\frac{p_{k,j}}{\hat{p}_k}\right) \ln\left(\frac{\sigma_{0j}}{\sigma^*}\right)}{\sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^9 \left[\ln\left(\frac{\sigma_{0j}}{\sigma^*}\right) \right]^2} = 1.3309$.

Таким образом, для описания всей совокупности диаграмм ползучести можно воспользоваться зависимостью:

$$\hat{p}(t, \sigma_0) = \left[0.0096(1 - e^{-0.1754t}) + 0.0086(1 - e^{-3.409t}) \right] \left(\frac{\sigma_0}{4.66} \right)^{1.3309} +$$

$$+ \left[0.006(1 - e^{-25.5543t}) \right] \left(\frac{\sigma_0}{4.66} \right)^{1.3309} . \quad (4.28)$$

На рисунке 4.8 изображены экспериментальные диаграммы ползучести и вычисленные с помощью метода последовательного выделения экспоненциальных слагаемых расчетные значения деформации ползучести.

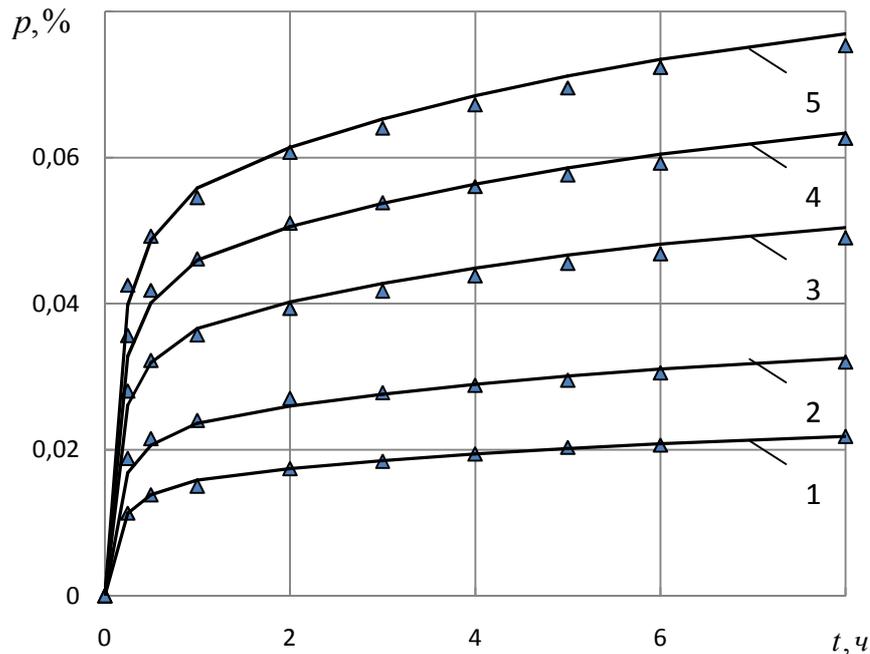


Рис.4.8. Экспериментальные диаграммы ползучести поливинилхлоридного пластиката (треугольные маркеры) и вычисленные с помощью метода последовательного выделения экспоненциальных слагаемых расчетные значения деформации ползучести (сплошные линии) : 1 – $\sigma_0 = 4.66$ МПа , 2 – $\sigma_0 = 6.29$ МПа , 3 – $\sigma_0 = 8.75$ МПа , 4 – $\sigma_0 = 10.38$ МПа , 5 – $\sigma_0 = 12.02$ МПа

Величина нормированной остаточной суммы квадратов по всей совокупности диаграмм ползучести составила $s = 2.52\%$, что больше, чем в разработанном численном методе на основе разностных уравнений.

Для сравнения построенных моделей (4.6) и (4.28) вычислялась оста-

точная дисперсия $s_{ост}^2 = \frac{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} (P_{k,j} - \hat{P}_{k,j})^2}{n - m}$ с $n - m$ степенями свободы, где

n – количество экспериментальных значений, $n = 50$, m – количество параметров в модели, $m = 5$ и $m = 7$ для моделей (4.6) и (4.28) соответственно. Остаточные дисперсии для моделей (4.6) и (4.28) равны $s_1^2 = 5.83 \cdot 10^{-7}$ и $s_2^2 = 1.24 \cdot 10^{-6}$. Значение статистики критерия Фишера $F = \frac{s_2^2}{s_1^2} = 2.13$. Таблич-

ное значение критерия Фишера $F_{кр}$ при уровне значимости $\alpha = 0.05$ и числах степеней свободы 45 и 43 равно $F_{кр} = 1.65$.

Так как $F > F_{кр}$, можно сделать вывод о неравнозначности построенных моделей, модель (4.6), параметры которой получены с помощью разработанного численного метода, точнее описывает экспериментальные данные, при этом количество параметров в ней меньше, чем количество параметров, полученных известным методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых [85].

Таким образом, сравнительный анализ двух методов показал, что разработанный численный метод на основе разностных уравнений обладает высокой эффективностью и позволяет получить аппроксимацию экспериментальных значений деформации ползучести при меньшем числе параметров точнее, чем метод последовательного выделения экспоненциальных слагаемых.

4.3. Определение параметров модели ползучести для первой и второй стадии алюминиевого сплава Д16АТ

Разработанный численный метод был применен при обработке экспериментальных диаграмм ползучести алюминиевого сплава Д16АТ по данным

работы [66], полученных при различных значениях номинального напряжения $\sigma_0 = 245.17; 284.39; 304$ МПа и температуре 150 °С. Диаграммы ползучести представлены на рисунке 4.9. Для формирования равномерной по времени t выборки была осуществлена предварительная обработка экспериментальных данных с помощью скользящего среднего с периодом дискретизации $\tau = 0.1$ (как показало проведенное ранее исследование, при $\tau \approx 0.1$ наблюдается минимальная погрешность оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели). Пример равномерной выборки на участке от 0 до 10 часов представлен на рисунке 4.10. Для обработки диаграмм ползучести была выбрана модель ползучести вида (2.28) с одним экспоненциальным слагаемым $p(t, \sigma_{0j}) = [c(1 - e^{-at}) + Bt] \sigma_{0j}^n, j = \overline{1, 3}$. Для определения параметра n была сформирована обобщенная регрессионная модель (3.89), откуда по формулам (3.90)–(3.91) получена оценка параметра $\hat{n} = 6.256$.

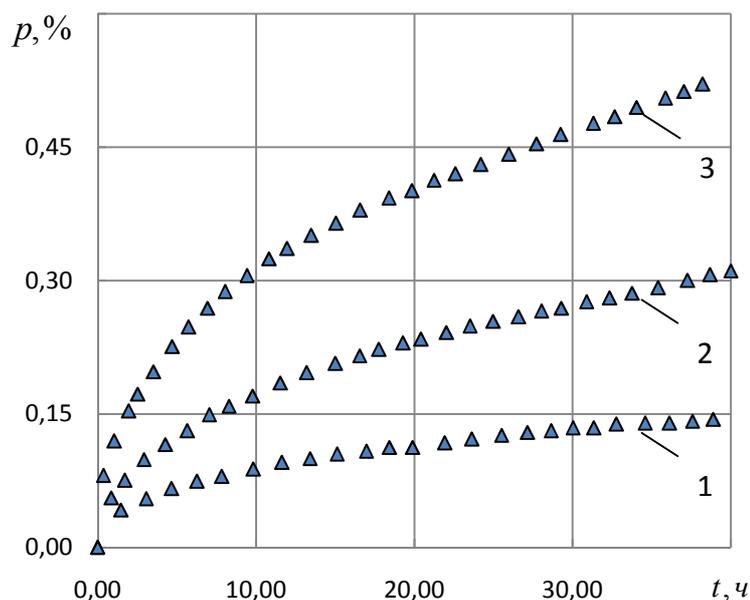


Рис.4.9. Экспериментальные диаграммы ползучести алюминиевого сплава Д16АТ (треугольные маркеры):
 1 – $\sigma_0 = 245.17$ МПа , 2 – $\sigma_0 = 284.39$ МПа ,
 3 – $\sigma_0 = 304$ МПа

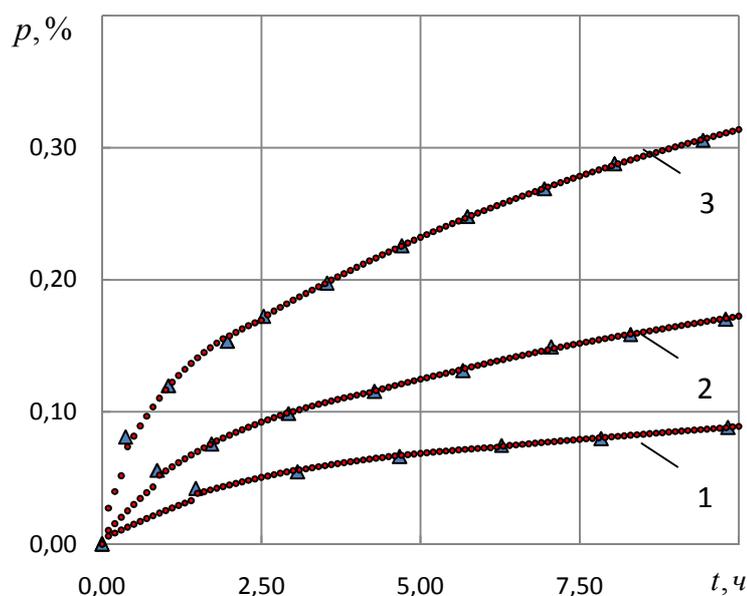


Рис.4.10. Сформированная выборка равномерных значений деформации ползучести сплава Д16АТ:
 1 – $\sigma_0 = 245.17$ МПа , 2 – $\sigma_0 = 284.39$ МПа ,
 3 – $\sigma_0 = 304$ МПа

В результате выполнения итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели (3.11), которая соответствует модели ползучести (2.28), после 7 итераций были получены оценки коэффициентов $\hat{\lambda}$: $\hat{\lambda}_1 = 0.969$, $\hat{\lambda}_2 = 6.13 \cdot 10^{-21}$, $\hat{\lambda}_3 = 2.42 \cdot 10^{-18}$.
 Имея оценки коэффициентов $\hat{\lambda}$, используя соотношения (3.40) были получены оценки параметров $\hat{\alpha} = 0.316$, $\hat{c} = 7.16 \cdot 10^{-17}$, $\hat{B} = 1.97 \cdot 10^{-18}$.

Таким образом, для описания зависимости деформации ползучести от времени и напряжения может быть использована функция

$$\hat{p}(t, \sigma_0) = \left[7.16 \cdot 10^{-17} (1 - e^{-0.316t}) + 1.97 \cdot 10^{-18} \right] \sigma_0^{6.256} . \quad (4.29)$$

На рисунке 4.11 изображены расчетные значения на основании зависимости (4.29) при различных значениях σ_0 .

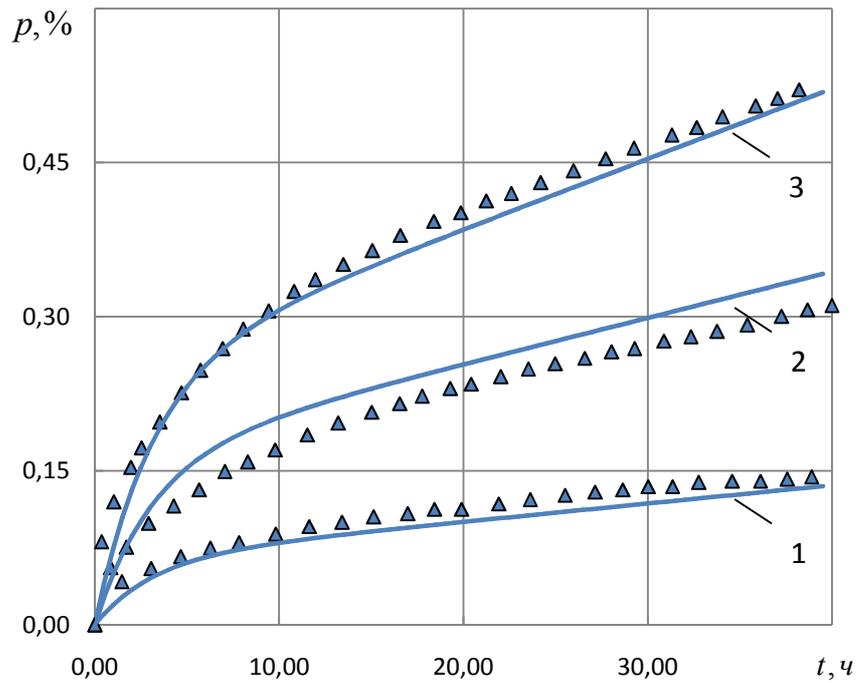


Рис.4.11. Экспериментальные диаграммы ползучести алюминиевого сплава Д16АТ (точки) и вычисленные с помощью полученных оценок параметров значения деформации ползучести: 1 – $\sigma_0 = 245.17$ МПа , 2 – $\sigma_0 = 284.39$ МПа , 3 – $\sigma_0 = 304$ МПа

Величина нормированной остаточной суммы квадратов

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} (p_{k,j} - \hat{p}_{k,j})^2}{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} p_{k,j}^2}} 100\% \text{ для каждой } j\text{-ой диаграммы, } j = \overline{1,3}, \text{ составила:}$$

11.14%, 11.10%, 4.77% соответственно. По совокупности всех диаграмм нормированная остаточная сумма квадратов в относительных единицах равна

$$s = 7.209 \% . \quad (4.30)$$

Коэффициент детерминации R^2 , который косвенно может служить оценкой адекватности построенной модели экспериментальным данным по совокупности всех диаграмм ползучести, равен $R^2 = 0.981$, что свидетельствует о высокой степени адекватности построенной модели (4.29) данным эксперимента.

Оценка дисперсии результатов вычисления параметров модели (4.29) может быть вычислена согласно формуле (3.50), и в этом случае матрица дисперсий-ковариаций параметров примет вид:

$$V[\hat{a}] = WV_{\text{общ}}[\hat{\lambda}]W^T. \quad (4.31)$$

Здесь $\hat{a} = (\hat{c}, \hat{\alpha}, \hat{B})^T$ – вектор оценок параметров; $V_{\text{общ}}[\hat{\lambda}]$ – матрица дисперсий-ковариаций коэффициентов обобщенной регрессионной модели, вида

$$V_{\text{общ}}[\hat{\lambda}] = \begin{bmatrix} V[\hat{\lambda}] & \Theta \\ \Theta & s^2[\hat{n}] \end{bmatrix}, \quad \text{где } V[\hat{\lambda}] \text{ – собственно матрица дисперсий-}$$

ковариаций коэффициентов обобщенной регрессионной модели (3.11), которая соответствует модели (4.29), $s^2[\hat{n}]$ – оценка дисперсии параметра n , получаемая при оценивании обобщенной регрессионной модели (3.89);

$$W = \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial c}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial c}{\partial \lambda_3} & 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_3} & 0 \\ \frac{\partial B}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial B}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial B}{\partial \lambda_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ – матрица производных параметров по } \lambda_i, i = \overline{1,4},$$

размера $[4 \times 4]$. Матрица W с учетом формул (3.40), выражающих связь между параметрами модели и коэффициентами $\lambda_i, i = \overline{1,4}$, примет вид:

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} \frac{(\hat{\lambda}_1 - 1)\hat{\lambda}_3 + (\hat{\lambda}_1 + 1)\hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_1^3 - 3\hat{\lambda}_1^2 + 3\hat{\lambda}_1 - 1} & \frac{-\hat{\lambda}_1}{(1 - \hat{\lambda}_1)^2} & \frac{1}{1 - \hat{\lambda}_1} & 0 \\ -\frac{1}{\hat{\lambda}_1\tau} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\hat{\lambda}_2}{\tau(1 - \hat{\lambda}_1)^2} & \frac{1}{(1 - \hat{\lambda}_1)\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Для построения доверительных интервалов результатов вычислений по построенной модели (4.29) необходимо знать оценки дисперсий $s^2[\hat{p}_{k,j}]$, которые можно найти по формуле:

$$s^2[\hat{p}_{k,j}] = \left[\frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial c}, \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial B}, \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial n} \right] V_{\text{общ}}[a] \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial c} \\ \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial B} \\ \frac{\partial \hat{p}_{k,j}}{\partial n} \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Здесь частные производные $\frac{\partial p(t)}{\partial c}$, $\frac{\partial p(t)}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial p(t)}{\partial B}$, $\frac{\partial p(t)}{\partial n}$ находятся из модели (2.28) и принимает вид:

$$\frac{\partial p(t)}{\partial c} = (1 - e^{-\alpha t})\sigma_0^n, \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial p(t)}{\partial \alpha} = c\sigma_0^n t e^{-\alpha t}, \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial p(t)}{\partial B} = t\sigma_0^n, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial p(t)}{\partial n} = \sigma_0^n \ln(\sigma_0) [c(1 - e^{-at}) + Bt]. \quad (4.37)$$

Доверительный интервал для результата вычисления $\hat{p}(t)$ находится по формуле, аналогичной (4.7):

$$p(t, \sigma_0) = \hat{p}(p, \sigma_0) \pm t_\beta s [p(t, \sigma_0)],$$

где величина t_β (с использованием неравенства Чебышева) принята $t_\beta = 2.98$.

Результаты вычислений представлены далее. Вначале найдена остаточная дисперсия $s_{ост}^2 = \frac{Q_{ост}}{N - n}$, где $Q_{ост} = 0.032$, $N = 86$, $n = 4$, которая составила

$$s_{ост}^2 = \frac{0.032}{86 - 4} = 3.87 \cdot 10^{-4}. \quad (4.38)$$

Матрица дисперсий–ковариаций коэффициентов обобщенной регрессионной модели имеет вид:

$$\hat{V}_{общ} [\hat{\lambda}] = \begin{bmatrix} 1.29 \cdot 10^{-6} & -3.4 \cdot 10^{-25} & -6.94 \cdot 10^{-23} & 0 \\ -3.4 \cdot 10^{-25} & 9.51 \cdot 10^{-44} & 1.72 \cdot 10^{-41} & 0 \\ -6.94 \cdot 10^{-23} & 1.72 \cdot 10^{-41} & 4.02 \cdot 10^{-39} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.31 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix},$$

а матрица производных \hat{W} –

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} 2.09 \cdot 10^{-15} & -998.715 & 32.106 & 0 \\ -10.321 & 0 & 0 & 0 \\ 6.32 \cdot 10^{-17} & 321.064 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица дисперсий–ковариаций параметров модели ползучести согласно формуле (4.31) запишется следующим образом:

$$V[\hat{a}] = \hat{W}V[\hat{\lambda}]\hat{W}^T = \begin{bmatrix} 8.65 \cdot 10^{-37} & -8.33 \cdot 10^{-21} & -3.03 \cdot 10^{-38} & 0 \\ -8.33 \cdot 10^{-21} & 1.38 \cdot 10^{-4} & 2.84 \cdot 10^{-22} & 0 \\ -3.03 \cdot 10^{-38} & 2.84 \cdot 10^{-22} & 1.17 \cdot 10^{-39} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.31 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы составляют оценку дисперсии параметров модели, отсюда получаем оценки среднеквадратического отклонения, которые также являются оценкой точности результатов вычислений:

$$s[\hat{c}] = 2.77 \cdot 10^{-18}, \quad s[\hat{\alpha}] = 0.036, \quad s[\hat{B}] = 1.23 \cdot 10^{-19}, \quad s[\hat{n}] = 6.87 \cdot 10^{-2}.$$

Доверительные интервалы, построенные при различных значениях номинального напряжения σ_0 на основе соотношений (4.31)–(4.37), представлены на рисунках 4.12–4.14, где также приведены и экспериментальные

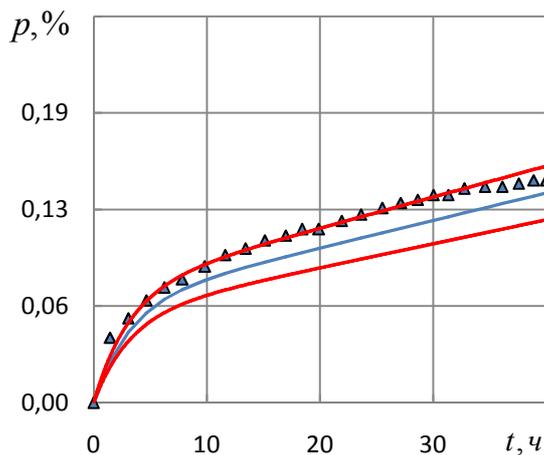


Рис. 4.12. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.29) при $\sigma_0 = 245.17$ МПа

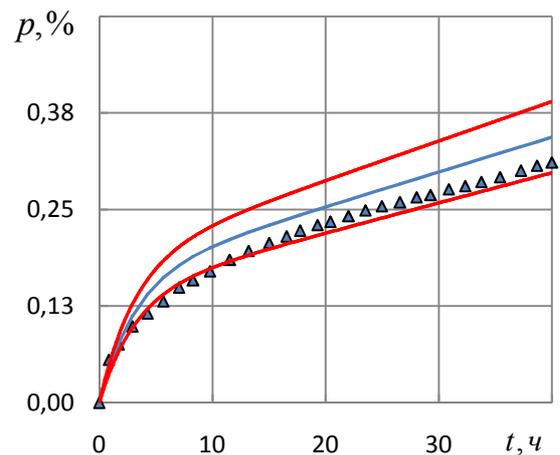


Рис. 4.13. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.29) при $\sigma_0 = 284.39$ МПа

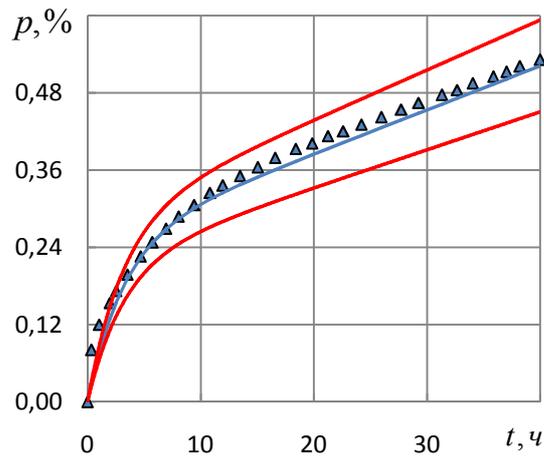


Рис. 4.14. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.29) при $\sigma_0 = 304$ МПа

значения деформации ползучести алюминиевого сплава и значения, вычисленные по модели (4.29).

Таким образом, проведена апробация разработанного численного метода при обработке экспериментальных значений алюминиевого сплава Д16АТ. Результаты апробации подтверждают справедливость полученных соотношений и высокую эффективность разработанного метода.

4.4. Определение параметров модели стадии ускоренной ползучести алюминиевого сплава Д16Т

Разработанный численный метод идентификации параметров модели ползучести с учетом третьей стадии был применен при обработке экспериментальных диаграмм ползучести сплава Д16Т (пруток диаметром 40 мм), полученных при температуре 250 °С и испытаниях на растяжение и сжатие при различных значениях номинального напряжения $\sigma_0 = 98.07; 88.26; 78.45; 68.65$ МПа [89]. На этапе предварительной обработки для каждой кривой ползучести была сформирована равномерная выборка объемом $N_j = 20$, $j = \overline{1,4}$. Периоды дискретизации для диаграмм ползучести составили $\Delta p_1 = 0.00522$, $\Delta p_2 = 0.00572$, $\Delta p_3 = 0.00647$, и $\Delta p_4 = 0.00633$, соот-

ответственно. Такой выбор размера выборки обусловлен тем, что на третьей стадии кривые ползучести близки к своему асимптотическому значению, и вектор правой части соответствующих обобщенных регрессионных моделей, содержащий значения $t_{k,j} - t_{k-1,j}$ может вырождаться, если временные отсчеты находятся слишком близко друг к другу.

Для обработки диаграмм ползучести была выбрана модель с учетом третьей стадии ползучести (2.51), которая соответствует постоянному значению параметра разупрочнения ($\alpha = \text{const}$ в (1.4)):

$$p(t, \sigma_0) = -\frac{1}{\sigma_0 m \alpha} \ln(1 - \alpha m c \sigma_0^{m+1} t), \quad (4.39)$$

а точнее, ее эквивалентный вид:

$$t(p, \sigma_0) = \frac{1}{c m \sigma_0^{m+1} \alpha} [1 - \exp(-m \alpha \sigma_0 p)]. \quad (4.40)$$

В процессе реализации численного метода получены следующие результаты. Начальное приближение вектора $\lambda_1^{(0)}$ обобщенной регрессионной модели (3.23), которая соответствует модели ползучести на третьей стадии (4.40), найдено по формуле (3.103):

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = \frac{\sum_{j=1}^4 \sum_{k=2}^{19} \sigma_{0j} \Delta p_j \ln \frac{t_{k-1,j} - t_{k-2,j}}{t_{k,j} - t_{k-1,j}}}{18 \sum_{j=1}^4 \sigma_{0j}^2 \Delta p_j^2} = 0.634. \quad (4.41)$$

В результате выполнения итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели после 5 итераций получены следующие оценки коэффициентов: $\hat{\lambda}_1 = 0.867$, $\hat{\lambda}_2 = -30.744$, $\hat{\lambda}_3 = 5.703$. Отсюда, используя соотношения (3.45), находим оценки параметров модели (4.40): $\hat{c} = 5.13 \cdot 10^{-14}$, $\hat{m} = 4.703$, $\hat{\alpha} = 0.184$.

Таким образом, построенная по экспериментальным диаграммам ползучести математическая модель процесса деформации ползучести на ускоренной стадии алюминиевого сплава Д16Т при температуре 250°C имеет вид:

$$\hat{t}_{k,j} = \frac{1}{4.45 \cdot 10^{-14} \sigma_{0j}^{5.703}} \left[1 - \exp(-0.867 \sigma_{0j} p_{k,j}) \right]. \quad (4.42)$$

Отсюда в качестве зависимости деформации ползучести от времени при постоянном напряжении может быть использована функция вида

$$\hat{p}(t, \sigma_0) = -\frac{1}{0.867 \sigma_0} \ln(1 - 4.45 \cdot 10^{-14} \sigma_0^{5.703} t). \quad (4.43)$$

На рисунке 4.15 изображены зависимости (4.42), построенные при различных значениях номинального напряжения σ_0 .

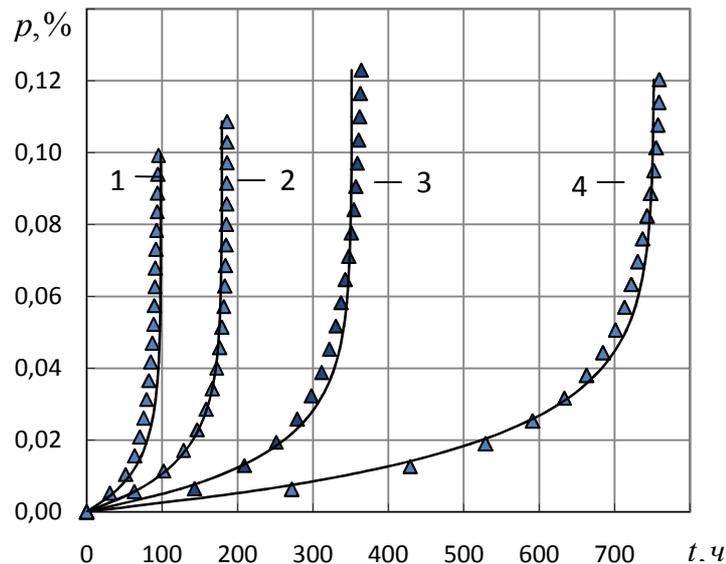


Рис.4.15. Экспериментальные (точки) и расчетные по модели (4.43) (сплошные линии) кривые ползучести сплава Д16Т при $T = 250^\circ\text{C}$: 1 – $\sigma_0 = 98.07$ МПа, 2 – $\sigma_0 = 88.26$ МПа, 3 – $\sigma_0 = 78.45$ МПа, 4 – $\sigma_0 = 68.65$ МПа

Нормированные остаточные суммы квадратов для каждой j -той диаграммы ползучести в относительных единицах составили: 9.9% (при $\sigma_0 = 98.07$ МПа), 2.7% (при $\sigma_0 = 88.26$ МПа), 3.1% (при $\sigma_0 = 78.45$ МПа) и 2.1% (при $\sigma_0 = 68.65$ МПа). По совокупности всех кривых нормированная остаточная сумма квадратов в относительных единицах равна 2.56%.

Коэффициент детерминации R^2 по совокупности всех диаграмм ползучести, равен $R^2 = 0.98$, что свидетельствует о высокой степени адекватности построенной модели (4.42) данным эксперимента.

Оценка дисперсии результатов вычисления параметров может быть вычислена по формулам (3.77)–(3.79) или в матричной форме согласно формуле (3.50). Матрица дисперсий-ковариаций параметров примет вид:

$$V[\hat{a}] = WV[\hat{\lambda}]W^T. \quad (4.44)$$

Здесь $\hat{a} = (\hat{c}, \hat{m}, \hat{\alpha})^T$ – вектор оценок параметров; $W = \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial c}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial c}{\partial \lambda_3} \\ \frac{\partial m}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial m}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial m}{\partial \lambda_3} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda_3} \end{bmatrix}$ – мат-

рица производных параметров по λ_i , $i = \overline{1,3}$, размера $[3 \times 3]$. Матрица W с учетом формул (3.45), выражающих связь между параметрами модели и коэффициентами λ_i , $i = \overline{1,3}$, запишется так:

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} -\frac{e^{\lambda_2}}{\lambda_1^2} & \frac{e^{\lambda_2}}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\lambda_3 - 1} & 0 & -\frac{\lambda_1}{(\lambda_3 - 1)^2} \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Для построения доверительных интервалов результатов вычислений по построенной модели (4.42) необходимо знать оценки дисперсий $s^2[\hat{t}_{k,j}]$, которые можно найти по формуле

$$s^2[\hat{t}_{k,j}] = \left[\frac{\partial \hat{t}_{k,j}}{\partial c}, \frac{\partial \hat{t}_{k,j}}{\partial m}, \frac{\partial \hat{t}_{k,j}}{\partial \alpha} \right] V[p] \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{t}_{k,j}}{\partial c} \\ \frac{\partial \hat{t}_{k,j}}{\partial m} \\ \frac{\partial \hat{t}_{k,j}}{\partial \alpha} \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Здесь частные производные $\frac{\partial t(p, \sigma_0)}{\partial c}$, $\frac{\partial t(p, \sigma_0)}{\partial m}$, $\frac{\partial t(p, \sigma_0)}{\partial \alpha}$ находятся из модели (4.40) и принимают вид:

$$\frac{\partial t(p, \sigma_0)}{\partial c} = \frac{\exp(-m\sigma_0\alpha p) - 1}{c^2 m \sigma_0^{m+1}} = -\frac{t(p, \sigma_0)}{c}, \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t(p, \sigma_0)}{\partial m} &= \frac{\exp(-m\sigma_0\alpha p)(\alpha\sigma_0 p + \ln\sigma_0) - \ln\sigma_0}{c m \sigma_0^{m+1} \alpha} - \frac{t(p, \sigma_0)}{m} = \\ &= \frac{p}{c m \sigma_0^m} - a\sigma_0 p t - \frac{1 + m \ln\sigma_0}{m} t, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial t(p, \sigma_0)}{\partial \alpha} = \frac{\exp(-m\sigma_0\alpha p) p}{c \sigma_0^m \alpha} - \frac{t(p, \sigma_0)}{\alpha} = \frac{p}{c \sigma_0^m \alpha} - m\sigma_0 p t - \frac{t(p, \sigma_0)}{\alpha}. \quad (4.49)$$

Доверительный интервал для результата вычисления $\hat{t}(p)$ находится по формуле, аналогичной (4.7):

$$t(p, \sigma_0) = \hat{t}(p, \sigma_0) \pm t_\beta s[\hat{t}(p, \sigma_0)], \quad (4.50)$$

где величина t_β (с использованием неравенства Чебышева) принята $t_\beta = 2.98$.

Результаты вычислений представлены далее. Вначале была найдена остаточная дисперсия $s_{ocm}^2 = \frac{Q_{ocm}}{N - n}$, где $Q_{ocm} = 7515.9$, $N = \sum_{j=1}^4 N_j = 80$, $n = 3$,

которая составила $s_{ocm}^2 = \frac{7515.9}{80 - 3} = 97.61$. Матрица дисперсий–ковариаций ко-

эффициентов обобщенной регрессионной модели имеет вид:

$$V[\hat{\lambda}] = \begin{bmatrix} 1.84 \cdot 10^{-4} & 3.22 \cdot 10^{-4} & -1.3 \cdot 10^{-4} \\ 3.22 \cdot 10^{-4} & 2.58 \cdot 10^{-2} & -6.14 \cdot 10^{-3} \\ -1.3 \cdot 10^{-4} & -6.14 \cdot 10^{-3} & 1.48 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

Для матрицы производных W имеем:

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} -5.92 \cdot 10^{-14} & 5.92 \cdot 10^{-14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.213 & 0 & -3.92 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

Матрица дисперсий–ковариаций параметров модели ползучести, согласно формуле (4.44) примет вид:

$$V[\hat{a}] = \hat{W}V[\hat{\lambda}]\hat{W}^T = \begin{bmatrix} 6.67 \cdot 10^{-29} & -3.07 \cdot 10^{-16} & 1.32 \cdot 10^{-17} \\ -3.07 \cdot 10^{-16} & 1.48 \cdot 10^{-3} & -8.54 \cdot 10^{-5} \\ 1.32 \cdot 10^{-17} & -8.54 \cdot 10^{-5} & 1.28 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы составляют оценку дисперсии параметров модели, отсюда получаем оценки среднеквадратического отклонения, которая также является оценкой точности результатов вычислений:

$$s[\hat{c}] = 2.4 \cdot 10^{-14}, \quad s[\hat{m}] = 0.115, \quad s[\hat{\alpha}] = 0.011.$$

На рисунках 4.16–4.19 изображены доверительные интервалы для результатов вычислений по полученной модели (4.42), построенные при различных значениях номинального напряжения σ_0 на основе формулы (4.50), также на рисунках изображены экспериментальные значения деформации ползучести (треугольные маркеры), и значения, вычисленные на основе модели (4.42) (сплошная линия).

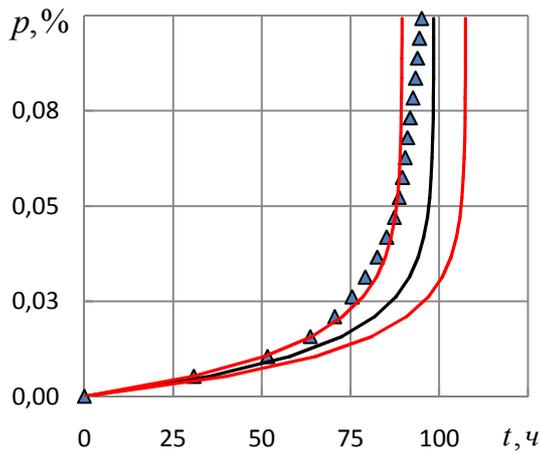


Рис. 4.16. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.42) при $\sigma_0 = 98.07$ МПа

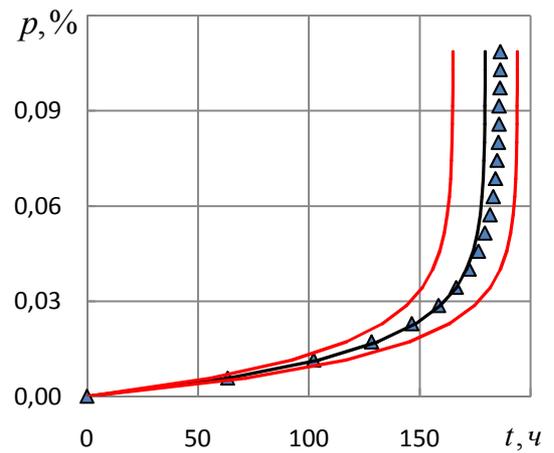


Рис. 4.17. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.42) при $\sigma_0 = 88.26$ МПа

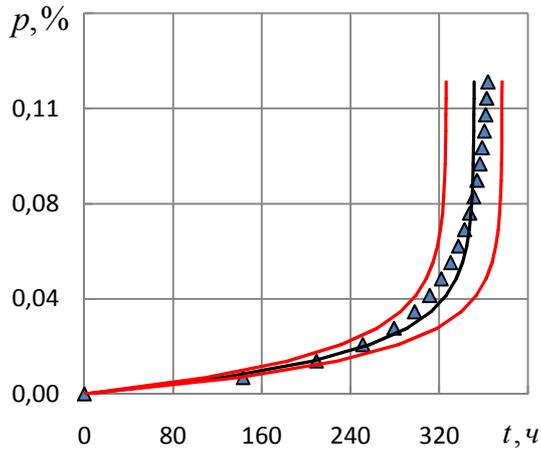


Рис. 4.18. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.42) при $\sigma_0 = 78.45$ МПа

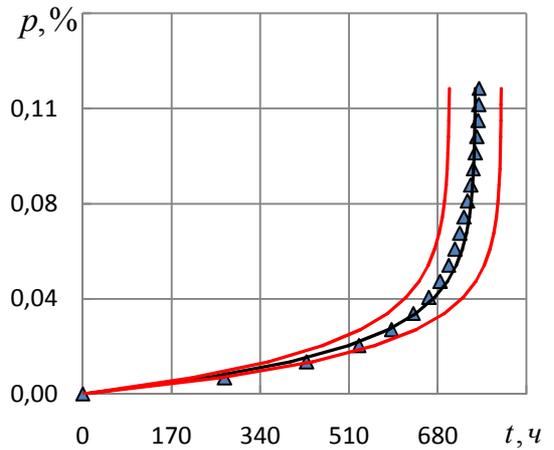


Рис. 4.19. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.42) при $\sigma_0 = 68.65$ МПа

Таким образом, проведена апробация разработанного численного метода применительно к модели ползучести для сплава Д16Т при $T = 250^\circ\text{C}$, подтверждающая справедливость сделанных выводов и полученных соотношений.

4.5. Определение параметров модели стадии ускоренной ползучести алюминиевого сплава Д16Т при степенной зависимости параметра разупрочнения от напряжения

Рассмотренные в предыдущем параграфе экспериментальные диаграммы ползучести сплава Д16Т также были обработаны с помощью модели (2.57), учитывающей степенную зависимость параметра разупрочнения (α в (1.4)) от напряжения и имеющей вид:

$$t(p, \sigma_0) = \frac{1}{\alpha m c \sigma_0^{m+m_1+1}} \left[1 - \exp(-\alpha m \sigma_0^{m_1+1} p) \right]. \quad (4.51)$$

В результате реализации алгоритма численного метода определения параметров модели (2.57) получены следующие результаты.

Начальное приближение вектора $\hat{\lambda}_1^{(0)}$ и $\hat{\lambda}_2^{(0)}$ и обобщенной регрессионной модели (3.32), которая соответствует модели ползучести (4.51), найдено по формулам (3.99)–(3.102), оценки составили:

$$\hat{\lambda}_1^{(0)} = 6.7898, \hat{\lambda}_2^{(0)} = -0.6899. \quad (4.52)$$

В результате выполнения итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания после 7 итераций были получены оценки коэффициентов $\hat{\lambda}$: $\hat{\lambda}_1 = 2.096$, $\hat{\lambda}_2 = 0.488$, $\hat{\lambda}_3 = 5.731$, $\hat{\lambda}_4 = -30.835$. На основе полученных оценок коэффициентов по соотношениям (3.46) были получены оценки параметров: $\hat{c} = 4.99 \cdot 10^{-15}$, $\hat{m} = 5.243$, $\hat{\alpha} = 1.551$, $\hat{m}_1 = -0.512$.

Таким образом, построенная по экспериментальным диаграммам математическая модель ползучести алюминиевого сплава Д16Т при температуре 250 °С примет вид:

$$\hat{t}(p, \sigma_0) = \frac{1}{4.06 \cdot 10^{-14} \sigma_0^{5.731}} \left[1 - \exp(-8.132 \sigma_0^{0.488} p) \right]. \quad (4.53)$$

На рисунке 4.20 сплошными линиями изображены зависимости (4.53), построенные при различных значениях напряжения σ_0 .

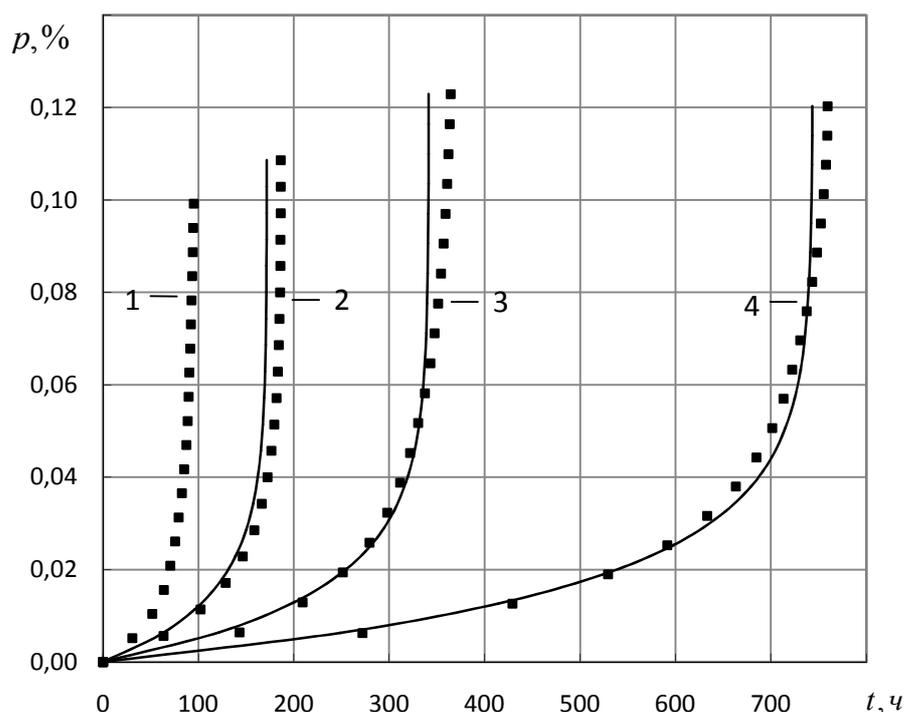


Рис.4.20. Экспериментальные (маркеры) и расчетные по модели (4.53) (сплошные линии) кривые ползучести сплава Д16Т при $T = 250 \text{ }^\circ\text{C}$: 1 – $\sigma_0 = 98.07 \text{ МПа}$, 2 – $\sigma_0 = 88.26 \text{ МПа}$, 3 – $\sigma_0 = 78.45 \text{ МПа}$, 4 – $\sigma_0 = 68.65 \text{ МПа}$

Нормированные остаточные суммы квадратов для каждой j -той диаграммы ползучести в относительных единицах составили: 4.89% (при $\sigma_0 = 98.07 \text{ МПа}$), 5.78% (при $\sigma_0 = 88.26 \text{ МПа}$), 4.08% (при $\sigma_0 = 78.45 \text{ МПа}$) и 2.29% (при $\sigma_0 = 68.65 \text{ МПа}$). По совокупности всех кривых нормированная остаточная сумма квадратов в относительных единицах равна 2.96%, что больше, чем при оценивании модели ползучести (4.42), не учитывающей зависимость параметра разупрочнения от напряжения.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что ввод дополнительного параметра в модель третьей стадии ползучести существенно не влияет на точность аппроксимации экспериментальных данных деформации ползучести. Поэтому для данного сплава можно рекомендовать модель ползучести (4.42). Тем не менее, оценим доверительные интервалы и для модели (4.53).

Для построения доверительных интервалов по модели (4.53) вначале была получена матрица дисперсий–ковариаций параметров (3.50):

$$V[\hat{a}] = WV[\hat{\lambda}]W^T. \quad (4.54)$$

Здесь $\hat{a} = (\hat{m}, \hat{m}_1, \hat{c}, \hat{\alpha})^T$ – вектор оценок параметров;

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{m}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \hat{m}}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial \hat{m}}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial \hat{m}}{\partial \lambda_4} \\ \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial \lambda_4} \\ \frac{\partial \hat{c}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \hat{c}}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial \hat{c}}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial \hat{c}}{\partial \lambda_4} \\ \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \lambda_3} & \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \lambda_4} \end{bmatrix} \text{ – матрица производных параметров по } \lambda_i, i = \overline{1,4},$$

размера $[4 \times 4]$. Матрица W с учетом формул (3.46), выражающих связь между параметрами модели и коэффициентами $\lambda_i, i = \overline{1,4}$, имеет представление:

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -e^{\hat{\lambda}_4 - \hat{\lambda}_1} & 0 & 0 & e^{\hat{\lambda}_4 - \hat{\lambda}_1} \\ \frac{e^{\hat{\lambda}_1}}{\hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_2} & \frac{e^{\hat{\lambda}_1}}{(\hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_2)^2} & -\frac{e^{\hat{\lambda}_1}}{(\hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_2)^2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Оценки дисперсий $s^2[\hat{t}_{k,j}]$ найдены по формуле:

$$s^2[\hat{t}_{k,j}] = \left[\frac{\partial \hat{t}_{k,j}}{\partial c}, \frac{\partial \hat{t}_{k,j}}{\partial m}, \frac{\partial \hat{t}_{k,j}}{\partial \alpha}, \frac{\partial \hat{t}_{k,j}}{\partial m_1} \right] V[a] \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{t}_{k,j}}{\partial c} \\ \frac{\partial \hat{t}_{k,j}}{\partial m} \\ \frac{\partial \hat{t}_{k,j}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \hat{t}_{k,j}}{\partial m_1} \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Здесь частные производные $\frac{\partial t(p, \sigma_0)}{\partial c}$, $\frac{\partial t(p, \sigma_0)}{\partial m_1}$, $\frac{\partial t(p, \sigma_0)}{\partial m}$, $\frac{\partial t(p, \sigma_0)}{\partial \alpha}$ находятся из модели (4.51), и принимают вид:

$$\frac{\partial t(p, \sigma_0)}{\partial m} = \frac{p}{cm\sigma_0^m} - \alpha\sigma_0^{m_1+1}pt - \frac{t(1+m\ln\sigma_0)}{m}, \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial t(p, \sigma_0)}{\partial m_1} = \frac{\ln\sigma_0 - p}{c\sigma_0^m} - m\alpha\sigma_0^{m_1+1}\ln\sigma_0pt - t\ln\sigma_0, \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial t(p, \sigma_0)}{\partial c} = -\frac{t}{c}, \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial t(p, \sigma_0)}{\partial \alpha} = \frac{p}{c\sigma_0^m\alpha} - m\sigma_0^{m_1+1}pt - \frac{t}{\alpha}. \quad (4.60)$$

Результаты вычислений представлены далее. Вначале была найдена остаточная дисперсия $s_{ocm}^2 = \frac{Q_{ocm}}{N-n}$, где $Q_{ocm} = 9116.6$, $N = \sum_{j=1}^4 N_j = 80$, $n = 4$, которая составила $s_{ocm}^2 = \frac{9116.6}{80-4} = 120.0$. Матрица дисперсий–ковариаций коэффициентов обобщенной регрессионной модели имеет вид:

$$V[\hat{\lambda}] = \begin{bmatrix} 0.858 & -0.201 & 0.160 & -0.685 \\ -0.201 & 0.047 & -0.038 & 0.160 \\ 0.160 & -0.038 & 0.032 & -0.136 \\ -0.685 & 0.160 & -0.136 & 0.582 \end{bmatrix}.$$

Матрица производных \hat{W} запишется так:

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3.45 \cdot 10^{-9} & 0 & 0 & 3.45 \cdot 10^{-9} \\ 1.55 & 0.30 & -0.30 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица дисперсий–ковариаций параметров модели ползучести, согласно формуле (4.54) имеет вид:

$$V[\hat{a}] = \hat{W}V[\hat{\lambda}]\hat{W}^T = \begin{bmatrix} 7.00 \cdot 10^{-29} & -3.28 \cdot 10^{-15} & -1.10 \cdot 10^{-14} & 1.80 \cdot 10^{-15} \\ -3.28 \cdot 10^{-15} & 0.154 & 0.514 & -0.085 \\ -1.10 \cdot 10^{-14} & 0.514 & 1.746 & -0.286 \\ 1.80 \cdot 10^{-15} & -0.085 & -0.286 & 0.047 \end{bmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы $V[\hat{a}]$ составляют оценку дисперсии параметров модели, отсюда получаем оценки среднеквадратического отклонения, которые также является оценкой точности результатов вычислений:

$$s[\hat{c}] = 2.5 \cdot 10^{-14}, s[\hat{m}] = 1.177, s[\hat{\alpha}] = 3.964, s[\hat{m}_1] = 0.650.$$

Доверительные интервалы, построенные на основе соотношений (4.50), (4.56)–(4.60) с использованием неравенства Чебышева при доверительной вероятности $\beta = 0.95$ ($t_\beta = 2.98$) представлены на рисунках 4.21–4.24.

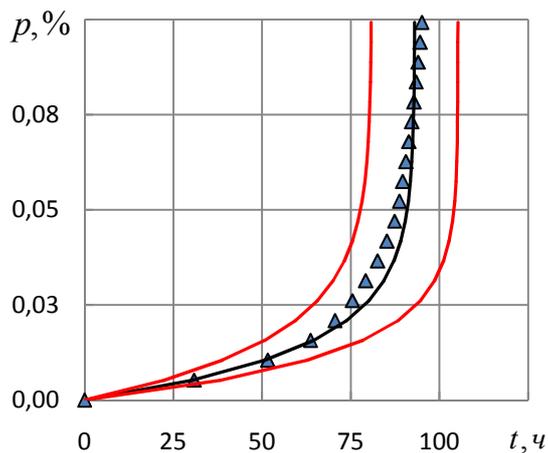


Рис. 4.21. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.53) при $\sigma_0 = 98.07$ МПа

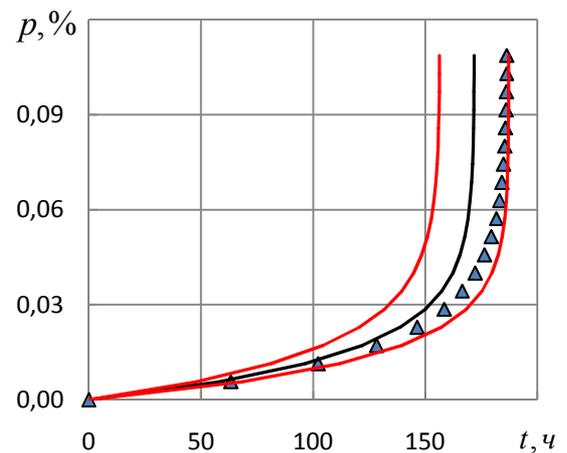


Рис. 4.22. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.53) при $\sigma_0 = 88.26$ МПа

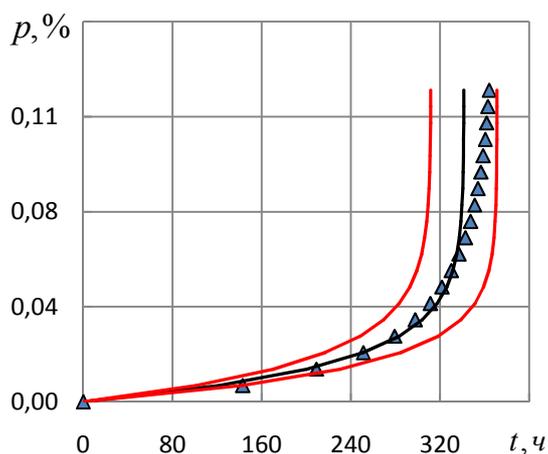


Рис. 4.23. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.53) при $\sigma_0 = 78.45$ МПа

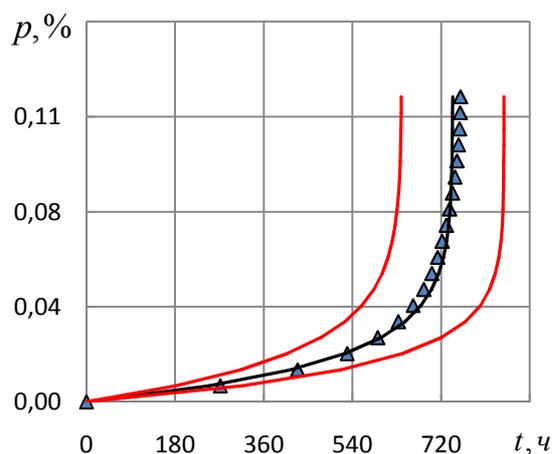


Рис. 4.24. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.53), построенные при $\sigma_0 = 68.65$ МПа

Таким образом, проведена апробация разработанного численного метода при оценивании параметров модели ползучести, учитывающей зависимость параметра разупрочнения от напряжения. Результаты апробации подтверждают адекватность методики экспериментальным данным применительно к сплаву Д16Т при $T=250$ °С и эффективность разработанного метода.

4.6. Определение параметров модели ползучести в пределах трех стадий для стали 15Х2МФА

Дальнейшим развитием исследований является апробация предложенных методик и проверка их адекватности применительно к материалам, имеющим три стадии ползучести при постоянных напряжениях. Для этой цели разработанные численные методы были применены при обработке экспериментальных диаграмм ползучести стали 15Х2МФА, полученных при температуре 550 °С и значениях напряжения $\sigma_0 = 350; 360; 370$ МПа, по результатам работы [56]. Экспериментальные диаграммы ползучести изображены на рисунке 4.25.

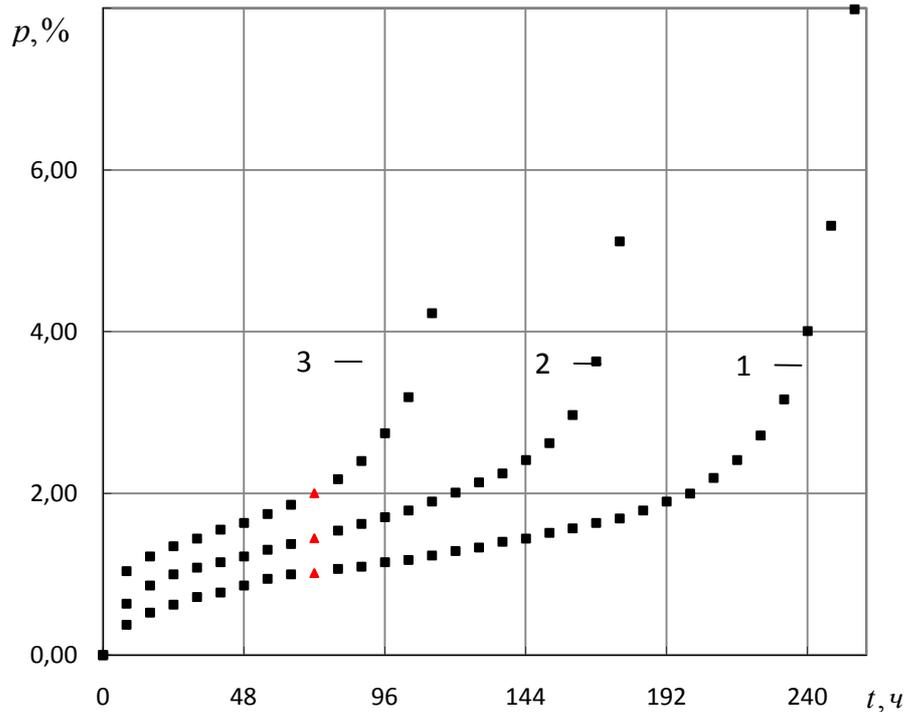


Рис.4.25. Экспериментальные диаграммы ползучести стали 152МФА ($T=550\text{ }^{\circ}\text{C}$): 1— $\sigma_0 = 350\text{ МПа}$, 2— $\sigma_0 = 360\text{ МПа}$, 3— $\sigma_0 = 370\text{ МПа}$

В соответствии с рассматриваемой моделью (1.7), вся совокупность диаграмм ползучести может быть описана выражением:

$$p(t, \sigma_0) = \sum_{k=1}^s c_k (1 - e^{-\alpha_k t}) \sigma_{0j}^n - \frac{1}{\sigma_0 m \alpha} \ln(1 - \alpha m c \sigma_0^{m+1} t), \quad (4.61)$$

и для определения всех параметров, входящих в модель (4.61), необходимы экспериментальные данные, принадлежащие различным стадиям ползучести.

Первая и вторая стадии деформации ползучести были отделены визуально, началу третьей стадии ползучести соответствуют точки, отмеченные на рисунке 4.25 треугольными маркерами.

Для обработки первой и второй стадии ползучести была выбрана модель вида (2.28) с одним экспоненциальным слагаемым:

$$p(t, \sigma_0) = [c(1 - e^{-\alpha t}) + Bt] \sigma_0^n,$$

в результате выполнения численного метода были получены оценки параметров модели (2.28): $\hat{c} = 5.24 \cdot 10^{-32}$, $\hat{\alpha} = 0.141$, $\hat{B} = 5.93 \cdot 10^{-34}$, $\hat{n} = 12.195$. Таким

образом, первая и вторая стадия деформации ползучести может быть описана выражением

$$\hat{p}(t, \sigma_0) = \left[5.24 \cdot 10^{-32} (1 - e^{-0.141t}) + 5.93 \cdot 10^{-34} t \right] \sigma_0^{12.195}, \quad (4.62)$$

Отделенные первые и вторые стадии ползучести, а также расчетные значения деформации ползучести по (4.62), построенные при $\sigma_0 = 350; 360; 370$ МПа, представлены на рисунке 4.26. Величина нормированной остаточной суммы квадратов для деформации ползучести в пределах первых двух стадий, как мера погрешности вычисления, по всей совокупности диаграмм ползучести составила 4.25%.

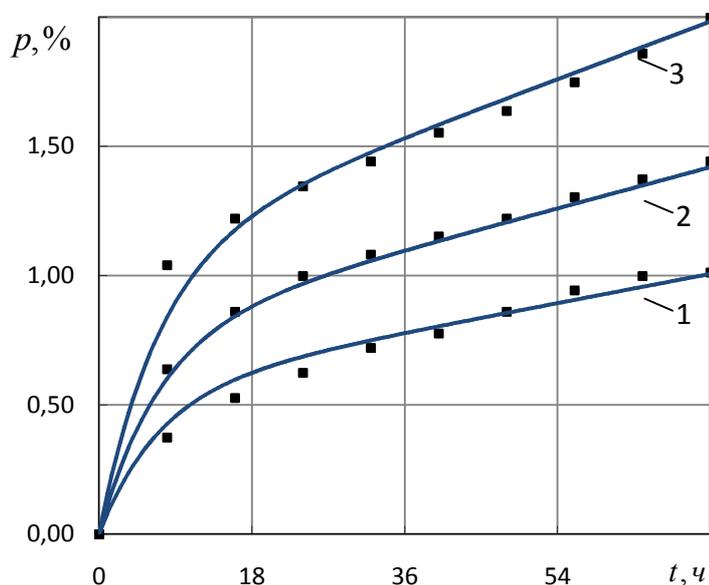


Рис.4.26. Первая и вторая стадии ползучести стали 15X2МФА (значки), расчетные значения деформации ползучести по модели (4.62) (сплошные линии):
1– $\sigma_0 = 350$ МПа, 2– $\sigma_0 = 360$ МПа, 3– $\sigma_0 = 370$ МПа

Далее, вычитая из исходных экспериментальных данных деформации ползучести деформацию неустановившегося течения (первую стадию ползучести), в нашем случае описываемую выражением:

$$\hat{p}(t, \sigma_0) = \left[5.24 \cdot 10^{-32} (1 - e^{-0.141t}) \right] \sigma_0^{12.195}, \quad (4.63)$$

получаем деформацию, которая соответствует третьей стадии ползучести $p_{III} = p(t, \sigma_0) - \hat{p}(t, \sigma_0)$. Полученные значения деформации p_{III} представлены на рисунке 4.27. Эти значения были обработаны с использованием модели вида (2.51) с постоянным значением параметра α в (1.4) :

$$p(t, \sigma_0) = -\frac{1}{\sigma_0 m \alpha} \ln(1 - \alpha m c \sigma_0^{m+1} t). \quad (4.64)$$

В результате реализации численного метода получены следующие оценки параметров модели (4.64): $\hat{c} = 1.78 \cdot 10^{-33}$, $\hat{m} = 11.948$, $\hat{\alpha} = 2.11 \cdot 10^{-4}$. Таким образом, зависимость деформации ползучести на третьей стадии запишется в виде

$$\hat{p}(t, \sigma_0) = -\frac{1}{2.52 \cdot 10^{-3} \sigma_0} \ln(1 - 4.49 \cdot 10^{-36} \sigma_0^{12.948} t). \quad (4.65)$$

Расчетные по модели (4.65) значения деформации ползучести также представлены на рисунке 4.27. Величина нормированной остаточной суммы квадратов для модели (4.65) составила 3.33%.

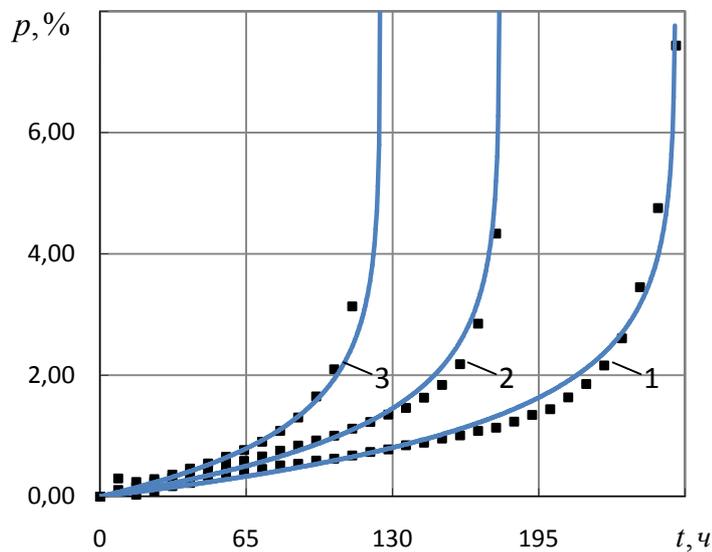


Рис.4.27. Деформация на третьей стадии ползучести стали 15X2МФА (значки) и расчетные по модели (4.65) (сплошные линии) кривые ползучести ($T=550$ °C): 1– $\sigma_0 = 350$ МПа , 2– $\sigma_0 = 360$ МПа , 3– $\sigma_0 = 370$ МПа

С учетом моделей (4.63) и (4.65), для описания всей совокупности диаграмм ползучести в пределах трех стадий можно воспользоваться зависимостью

$$\hat{p}(t, \sigma_0) = \left[5.24 \cdot 10^{-32} (1 - e^{-0.141t}) \right] \sigma_0^{12.195} - \frac{1}{2.52 \cdot 10^{-3} \sigma_0} \ln(1 - 4.49 \cdot 10^{-36} \sigma_0^{12.948} t). \quad (4.66)$$

На рисунке 4.28 изображены зависимости (4.66), построенные при различных значениях напряжения σ_0 .

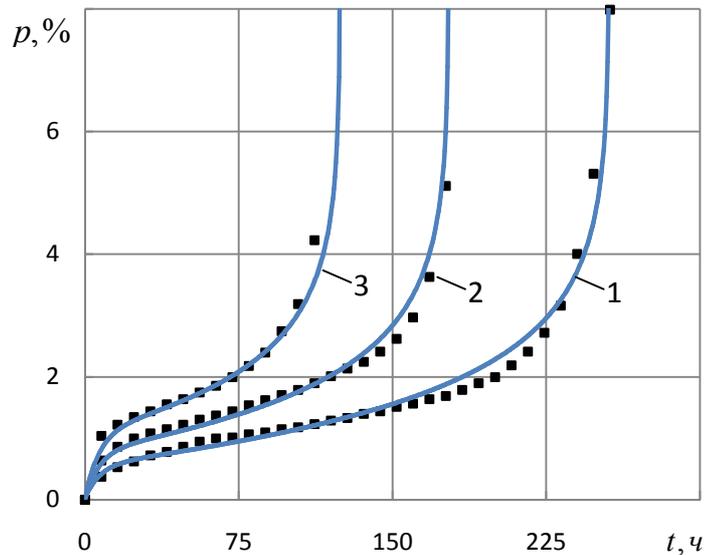


Рис.4.28. Экспериментальные (значки) и расчетные по модели (4.66) (сплошные линии) диаграммы ползучести стали 15X2MФА ($T=550$ °C): 1– $\sigma_0 = 350$ МПа , 2– $\sigma_0 = 360$ МПа , 3– $\sigma_0 = 370$ МПа

Анализ данных, представленных на рисунке 4.28, свидетельствует об удовлетворительной коррелированности результатов расчета и экспериментальных данных.

4.7. Сравнительный анализ разработанного численного метода и метода Левенберга-Марквардта

Для сравнения разработанного численного метода с известными численными методами, в частности, с методом Левенберга-Марквардта (описа-

ние приведено в параграфе 1.2), данные деформации ползучести, рассмотренные ранее в настоящей главе, также были обработаны с помощью указанного метода. Для обработки экспериментальных данных использовалась программа Matlab, в которой метод Левенберга-Марквардта реализован в пакете "Оптимизация".

При обработке экспериментальных диаграмм ползучести поливинилхлоридного пластиката определялись параметры модели первой стадии ползучести вида:

$$p(t, \sigma_0) = \left[c_1 (1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2 (1 - e^{-\alpha_2 t}) \right] \sigma_0^n. \quad (4.67)$$

В результате выполнения разработанного численного метода, в параграфе 4.1 была получена модель:

$$\hat{p}(t, \sigma_0) = \left[0.0011 (1 - e^{-0.2836t}) + 0.0018 (1 - e^{-8.763t}) \right] \sigma_0^{1.3186}. \quad (4.68)$$

Нормированная остаточная сумма квадратов по всей совокупности диаграмм ползучести для модели (4.68) составила

$$s = 1.77\%. \quad (4.69)$$

Остаточная дисперсия $s_{ост}^2 = \frac{\sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} (p_{k,j} - \hat{p}_{k,j})^2}{n - m}$ с $n - m$ степенями свободы,

где $n = 50$, $m = 5$, $M = 5$, $N = 10$ равна

$$s_1^2 = 5.83 \cdot 10^{-7}. \quad (4.70)$$

В ходе реализации метода Левенберга-Марквардта получены следующие результаты. Для метода необходимо указать начальные оценки параметров модели. При произвольном выборе начальных оценок параметров модели (4.67), равных $\hat{c}_1 = 0$, $\hat{\alpha}_1 = 0$, $\hat{c}_2 = 0$, $\hat{\alpha}_2 = 0$, $\hat{n} = 0$, итерационный процесс метода Левенберга-Марквардта оказывается расходящимся и не приводит к изменению оценок параметров. При выборе начальных оценок параметров, равных $\hat{c}_1 = 1$, $\hat{\alpha}_1 = 1$, $\hat{c}_2 = 1$, $\hat{\alpha}_2 = 1$, $\hat{n} = 1$, в результате выполнения метода

были получены следующие оценки параметров: $\hat{c}_1 = 0.0012$, $\hat{\alpha}_1 = 0.2525$, $\hat{c}_2 = 0.0018$, $\hat{\alpha}_2 = 7.5781$, $\hat{n} = 1.3189$. Таким образом, по методу Левенберга-Марквардта вся совокупность диаграмм ползучести поливинилхлоридного пластика может быть описана моделью:

$$\hat{p}(t, \sigma_0) = \left[0.0012(1 - e^{-0.2525t}) + 0.0018(1 - e^{-7.5781t}) \right] \sigma_0^{1.3189}. \quad (4.71)$$

Нормированная остаточная сумма квадратов для модели (4.71) составила $s = 1.45\%$, что меньше, чем для модели, оценки которой получены с помощью разработанного численного метода на основе разностных уравнений (где $s = 1.77\%$). Остаточная дисперсия с $n - m$ степенями свободы, где также $n = 50$, $m = 5$, равна $s_2^2 = 3.96 \cdot 10^{-7}$. Для сравнения построенных моделей (4.68) и (4.71) по критерию Фишера вычислялось значение статистики $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.47$ (s_1^2 определялось ранее в (4.70), $s_1^2 = 5.83 \cdot 10^{-7}$). Табличное значение критерия Фишера $F_{кр}$ при уровне значимости $\alpha = 0.05$ и числах степеней свободы $n - m = 45$ и 45 равно $F_{кр} = 1.64$.

Так как $F < F_{кр}$, можно сделать вывод о том, что модель (4.71), оценки параметров которой получены с помощью метода Левенберга-Марквардта, и модель (4.68), оценки параметров которой получены с помощью разработанного численного метода на основе разностных уравнений, описывают экспериментальные данные деформации ползучести практически с одинаковой точностью.

Вместе с тем, стоит отметить, что результат выполнения метода Левенберга-Марквардта существенно зависит от выбора начального приближения оценок искомых параметров: более точную модель удалось получить, выбрав "удачное" начальное приближение. Данное обстоятельство стоит отнести к недостаткам этого метода.

В параграфе 4.3 при апробации разработанного численного метода в ходе обработки экспериментальных данных деформации ползучести алюминиевого сплава Д16АТ определялись параметры модели вида:

$$p(t, \sigma_0) = [c(1 - e^{-\alpha t}) + Bt] \sigma_0^n. \quad (4.72)$$

В результате выполнения разработанного численного метода получена модель

$$\hat{p}(t, \sigma_0) = [7.16 \cdot 10^{-17} (1 - e^{-0.316t}) + 1.97 \cdot 10^{-18}] \sigma_0^{6.256}. \quad (4.73)$$

Величина нормированной остаточной суммы квадратов для модели (4.73) составила (согласно (4.30)) $s = 7.209\%$, остаточная дисперсия s_{ocm}^2 с $n - m$ степенями свободы, где количество точек эксперимента $n = 86$, количество параметров в модели $m = 4$ равна (вычислялась ранее в (4.30)) $s_1^2 = 3.87 \cdot 10^{-4}$.

В процессе оценивания параметров модели (4.72) с помощью метода Левенберга-Марквардта получены следующие результаты.

При начальном приближении оценок параметров модели (4.72), равных $c = 0$, $\alpha = 0$, $B = 0$, $n = 0$, итерационный процесс уточнения оказался расходящимся и получить уточненные оценки параметров не удалось.

При другом начальном приближении оценок параметров, равных $c = 1$, $\alpha = 1$, $B = 1$, $n = 1$, в результате выполнения метода получены оценки параметров: $c = 3.55 \cdot 10^{-11}$, $\alpha = 0.363$, $B = 1.04 \cdot 10^{-12}$, $n = 6.5955$. Таким образом, вся совокупность диаграмм ползучести алюминиевого сплава Д16АТ по методу Левенберга-Марквардта может быть описана моделью:

$$\hat{p}(t, \sigma_0) = [9.21 \cdot 10^{-18} (1 - e^{-0.363t}) + 2.7 \cdot 10^{-19}] \sigma_0^{6.596}. \quad (4.74)$$

Величина нормированной остаточной суммы квадратов для модели (4.74) составила $s = 7\%$, остаточная дисперсия равна $s_2^2 = 3.63 \cdot 10^{-4}$. Для сравнения построенных моделей (4.73) и (4.74) по критерию Фишера вычислялось зна-

чение статистики $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$, которое составило $F = 1.06$. Табличное значение критерия Фишера $F_{кр}$ при уровне значимости $\alpha = 0.05$ и числах степеней свободы 82 и 82 равно $F_{кр} = 1.44$.

Так как $F < F_{кр}$, в данном случае можно сделать вывод о том, что модели, построенные с помощью разработанного численного метода на основе разностных уравнений, и метода Левенберга-Марквардта описывают экспериментальные данные также практически с одинаковой точностью. Однако в методе Левенберга-Марквардта опять существенно проявилась проблема выбора начального приближения, в то время как разработанный численный метод на основе разностных уравнений лишен данного недостатка.

Таким образом, проведена апробация разработанного численного метода при обработке экспериментальных значений алюминиевого сплава Д16АТ. Результаты апробации подтверждают справедливость полученных соотношений и высокую эффективность разработанного метода.

В параграфе 4.4 при обработке экспериментальных диаграмм ползучести сплава Д16Т, в процессе реализации разработанного диссертантом численного метода на основе разностных уравнений, оценивались параметры модели ползучести с учетом третьей стадии. Модель имеет вид:

$$p(t, \sigma_0) = -\frac{1}{\sigma_0 m \alpha} \ln(1 - \alpha m c \sigma_0^{m+1} t). \quad (4.75)$$

В результате выполнения численного метода получены оценки параметров модели (4.75) и данная модель приняла вид:

$$\hat{p}(t, \sigma_0) = -\frac{1}{8.496 \sigma_0 m \alpha} \ln(1 - 2.02 \cdot 10^{-8} \sigma_0^{5.701} t). \quad (4.76)$$

Величина нормированной остаточной суммы квадратов, как мера погрешности между экспериментальными значениями деформации ползучести

и значениями, вычисленными с помощью модели (4.76), по всей совокупности диаграмм ползучести составила $s = 2.56\%$.

При определении параметров модели (4.75) с помощью метода Левенберга-Марквардта получить оценки параметров не удалось – итерационный процесс уточнения оценок параметров оказался расходящимся, и не привел к какому-либо изменению начальных приближений оценок. При варьировании начальных приближений выбрать такое приближение, при котором итерационный процесс окажется сходящимся, также не удалось.

Таким образом, подытоживая изложенное в данном параграфе, можно сделать следующие выводы:

– при определении параметров модели ползучести для первой стадии, описывающей деформацию ползучести поливинилхлоридного пластика, метод Левенберга-Марквардта при удачном выборе начального приближения позволяет получить модель, описывающую экспериментальные значения деформации ползучести более точно, чем разработанный численный метод на основе разностных уравнений, но с учетом статистической значимости результатов оба метода можно считать эквивалентными;

– при определении параметров модели ползучести для первой и второй стадий применительно к алюминиевому сплаву Д16АТ, модели, полученные с помощью разработанного численного метода и метода Левенберга-Марквардта описывают деформацию ползучести практически с одинаковой точностью, однако метод Левенберга-Марквардта оказался крайне чувствительным к выбору начального приближения оценок параметров исследуемой модели;

– при определении параметров модели ползучести для описания всех трех стадий применительно к сплаву Д16Т выявлено явное преимущество разработанного численного метода, в то время как с помощью метода Левенберга-Марквардта получить оценки параметров модели не удалось.

4.8. Определение параметров аппроксимационной зависимости J -интеграла в вершине трещины от приложенной нагрузки

Разработанный метод идентификации параметров моделей реологического деформирования в приведенных выше исследованиях апробирован применительно к процессу ползучести. Покажем, что разработанная методика может быть с успехом применена и к процессам другой природы, а именно – проблемам трещиностойкости.

Одним из критериев в механике разрушения является J - интеграл [90,91], характеризующий скорость высвобождения энергии в вершине трещины. Методы определения J - интеграла стандартизированы, их описание приводится, например, в работе [79], и содержат в себе испытания на экспериментальных образцах. В частности, экспериментальные исследования на трещиностойкость были выполнены в работе [90]. Вид и размеры экспериментальных образцов представлены на рисунке 4.29 и в таблице 4.3.

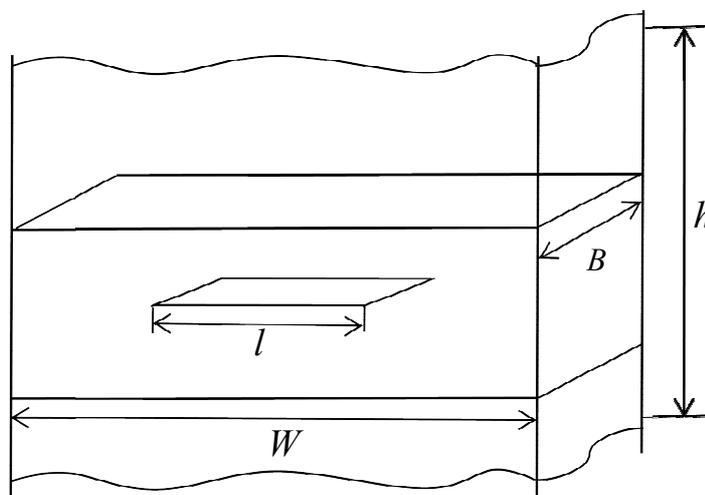
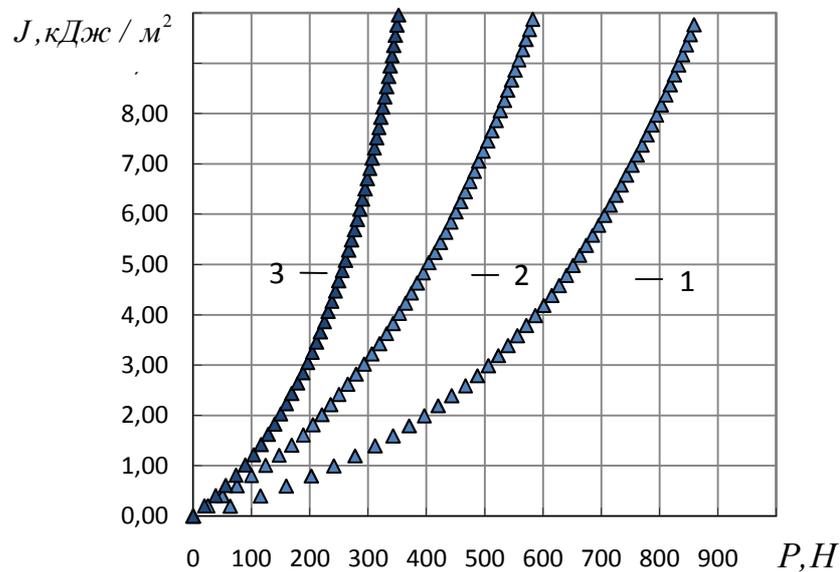


Рис.4.29. Экспериментальный образец для определения трещиностойкости

Факторы планирования эксперимента

Характеристики факторов				
Название	Обозначение	Размерность	Область определения	Точность замера
Толщина образца	B	мм	4 – 10	0.01
Ширина образца	W	мм	15 – 40	0.01
Относительная длина трещины	$\frac{l}{W}$	–	0.3 – 0.7	0.1%
Давление	P	Па	$10^{-3} - 10^{-5}$	1%
Температура	T	К	133 – 293	1

Для апробации разработанного в данной диссертационной работе метода были обработаны "экспериментальные" данные зависимости J - интеграла от приложенной нагрузки P и относительной длины трещины $\frac{l}{W}$ по данным из работы [90]. Зависимость J - интеграла в области при вершине трещины от приложенной нагрузки для сплава МА2-1 (по представленным в [90] данным) изображена на рисунке 4.30.

Рис. 4.30. Экспериментальная зависимость J -интеграла сплава

$$\text{МА2-1: } 1 - \frac{l}{W} = 0.3, 2 - \frac{l}{W} = 0.5, 3 - \frac{l}{W} = 0.7$$

Под экспериментальными данными могут подразумеваться как результаты натурального эксперимента, так и вычисленные на их основе методом конечных элементов значения J - интеграла. Данные, представленные на рисунке 4.30, были обработаны с помощью разработанного численного метода и использованием модели ползучести (2.51), которая соответствует постоянному значению параметра разупрочнения ($\alpha = \text{const}$ в (1.4)):

$$p(t, \sigma_0) = -\frac{1}{\sigma_0 m \alpha} \ln(1 - \alpha m c \sigma_0^{m+1} t), \quad (4.77)$$

где роль напряжения σ_0 играет величина $\frac{l}{W}$, времени t – величина приложенной нагрузки P . С учетом введенных величин модель (4.77) запишется в виде

$$J\left(P, \frac{l}{W}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{l}{W}\right)^m m \alpha} \ln\left[1 - \alpha m c \left(\frac{l}{W}\right)^{m+1} P\right]. \quad (4.78)$$

В результате выполнения вычислительных процедур разработанного численного метода получены следующие оценки параметров модели (4.78): $\hat{c} = 8.75 \cdot 10^{-3}$, $\hat{m} = 0.420$, $\hat{\alpha} = 1.332$. Таким образом, экспериментальная зависимость J -интеграла для сплава МА2-1 примет вид

$$\hat{J}\left(P, \frac{l}{W}\right) = -\frac{1}{0.559 \frac{l}{W}} \ln\left[1 - 4.889 \cdot 10^{-3} \left(\frac{l}{W}\right)^{1.42} P\right]. \quad (4.79)$$

Нормированные остаточные суммы квадратов для экспериментальных зависимостей J -интеграла по модели (4.79) в относительных единицах составили: 7.3% (при $\frac{l}{W} = 0.7$), 6.9% (при $\frac{l}{W} = 0.5$), 10.3% (при $\frac{l}{W} = 0.3$). По совокупности всех зависимостей нормированная остаточная сумма квадратов в относительных единицах равна 7.6%.

Расчетные значения J -интеграла по модели (4.79) изображены на рисунке 4.31.

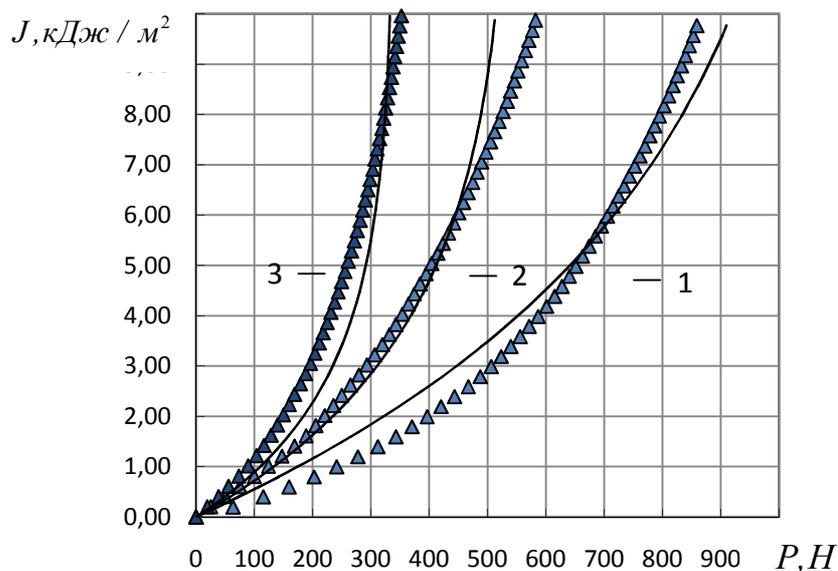


Рис.4.31. Экспериментальная зависимость J -интеграла для сплава МА2-1 (точки) и расчетные по модели (4.79) (сплошные линии) значения: $1 - \frac{l}{W} = 0.3$, $2 - \frac{l}{W} = 0.5$, $3 - \frac{l}{W} = 0.7$

Коэффициент детерминации R^2 по совокупности всех экспериментальных зависимостей равен $R^2 = 0.96$, что свидетельствует о высокой степени адекватности построенной модели (4.79) данным эксперимента.

Оценки дисперсии результатов вычисления параметров определены по методике, апробированной выше (по формуле (4.44)), величины дисперсии равны

$$s[\hat{c}] = 2.3 \cdot 10^{-3}, \quad s[\hat{m}] = 0.089, \quad s[\hat{\alpha}] = 0.416.$$

Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.79) построены на основе формул (4.46) – (4.50), и изображены на рисунках 4.32 – 4.34.

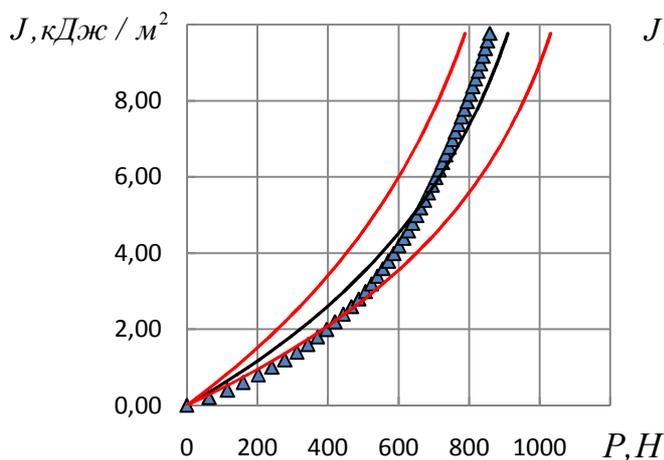


Рис. 4.32. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.79) при $\frac{l}{W} = 0.3$

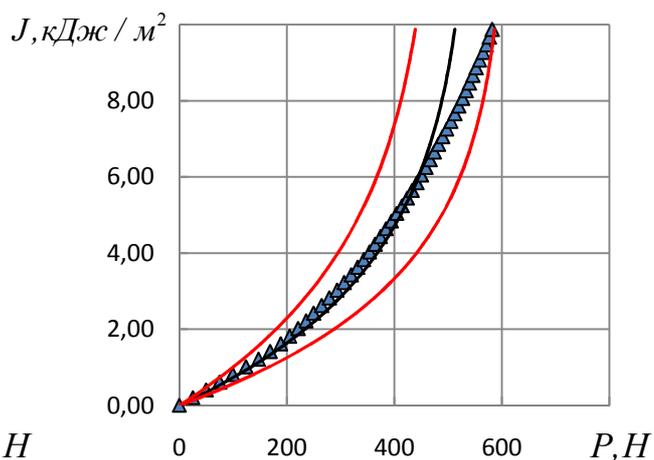


Рис. 4.33. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.79) при $\frac{l}{W} = 0.5$

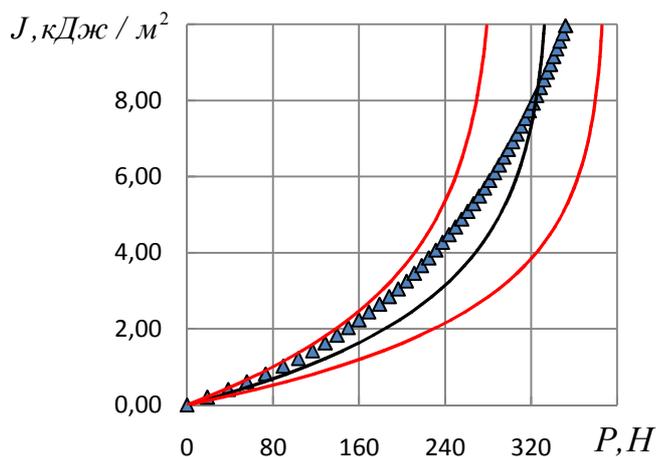


Рис. 4.34. Доверительные интервалы для результатов вычислений по модели (4.79) при $\frac{l}{W} = 0.7$

Таким образом, проведена апробация разработанного численного метода при обработке экспериментальных зависимостей J -интеграла для сплава МА2-1, подтверждающая справедливость разработанных вычислительных процедур. Дополнительным преимуществом разработанного численного метода в данном случае является отсутствие необходимости решения краевой задачи методом конечных элементов при другой относи-

тельной длине трещины $\frac{l}{W}$ – имея оценки параметров модели (4.78), значения J - интеграла могут быть легко спрогнозированы.

4.9. Определение параметров модели раскрытия трещины

Покажем применение разработанного численного метода для определения параметров модели раскрытия трещин на плоских образцах при постоянной растягивающей нагрузке q_0 в случае отсутствия первой стадии ползучести. В качестве параметра состояния рассматривается удлинение трещины при ползучести Δl_p . В соответствии с моделью (2.51) зависимость деформации ползучести на третьей стадии имеет вид

$$p(t, \sigma_{0j}) = -\frac{1}{\sigma_{0j} m \alpha} \ln(1 - \alpha m c \sigma_{0j}^{m+1} t),$$

откуда эквивалентная модель, описывающая зависимость удлинения трещины от времени и растягивающей нагрузки, запишется в виде

$$\Delta l_p(t, q_0) = -\frac{1}{q_0 m \alpha} \ln(1 - \alpha m c q_0^{m+1} t). \quad (4.80)$$

Модель (4.80) была применена при обработке экспериментальных данных по раскрытию трещины для плоских образцов из стали 316L при температуре $T=600$ °C по данным работы [77]. Экспериментальные данные изображены на рисунке 4.35.

Так как экспериментальная кривая только одна, введем новые переменные $c_1 = m \alpha q_0$, $c_2 = c m \alpha q_0^{m+1}$ и получим следующий вид модели (4.80):

$$\Delta l_p(t) = -\frac{1}{c_1} \ln(1 - c_2 t). \quad (4.81)$$

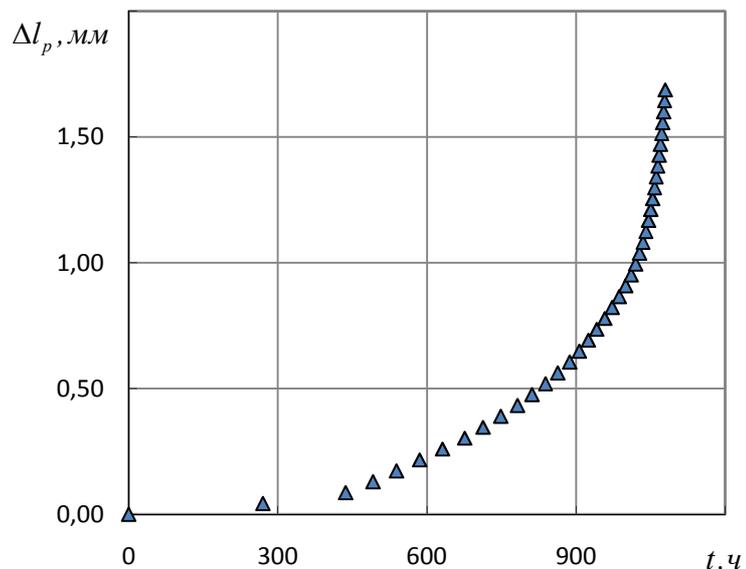


Рис. 4.35. Удлинение трещины для плоского образца из стали 316L при температуре $T=600\text{ }^{\circ}\text{C}$

В результате выполнения вычислительных процедур разработанного численного метода были получены следующие оценки параметров модели (4.80): $\hat{c}_1 = 3.484$, $\hat{c}_2 = 9.48 \cdot 10^{-4}$. Таким образом, зависимость удлинения трещины для плоского образца из стали 316L вследствие ползучести при температуре $T=600\text{ }^{\circ}\text{C}$ примет вид

$$\Delta \hat{l}_p(t) = -\frac{1}{3.484} \ln(1 - 9.48 \cdot 10^{-4} t). \quad (4.82)$$

Нормированная остаточная сумма квадратов для экспериментальных данных по удлинению трещины в соответствии с моделью (4.82) составила 4.88%.

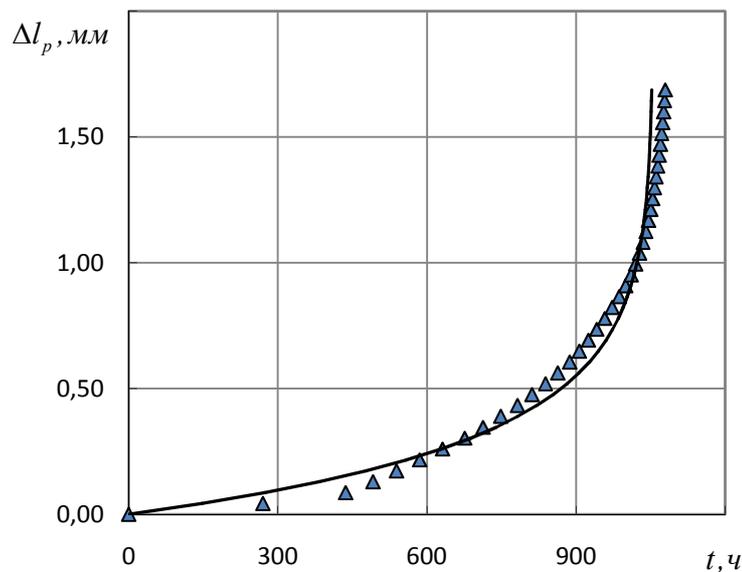


Рис. 4.36. Экспериментальные данные по удлинению трещины для плоского образца из стали 316L в условиях ползучести при температуре $T=600$ °C (точки) и расчетные по модели (4.82) значения (сплошные линии)

Коэффициент детерминации R^2 равен $R^2 = 0.97$, так как $R^2 \approx 1$, можно сделать вывод о хорошей адекватности построенной модели (4.82) данным эксперимента.

Оценки дисперсии результатов вычисления параметров определены по методике, апробированной выше (по формуле (4.44)), величины дисперсии равны

$$s[\hat{c}_1] = 0.669, \quad s[\hat{c}_2] = 4.22 \cdot 10^{-5}.$$

Доверительный интервал для результатов вычислений по модели (4.82) построен на основе формул (4.46) – (4.50) и приведен на рисунке 4.37.

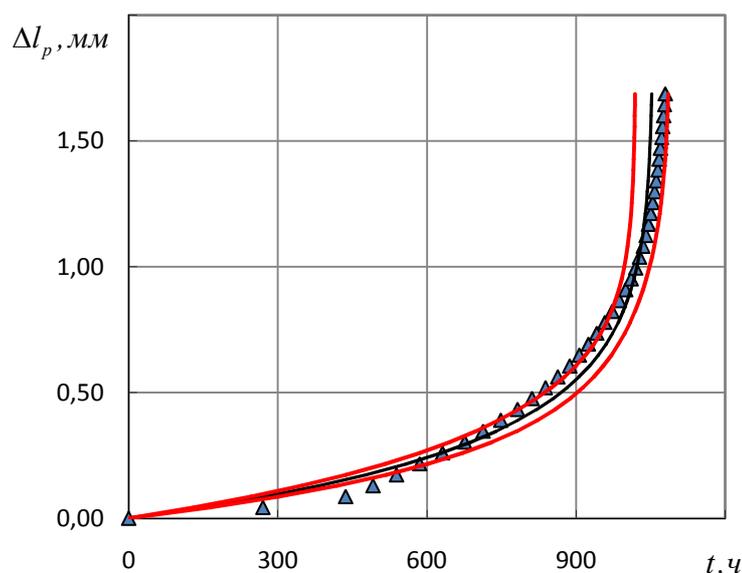


Рис. 4.37. Доверительный интервал для результатов вычислений по модели (4.82)

Как показывает проведенная апробация, разработанный численный метод позволяет с хорошей степенью адекватности описывать зависимость раскрытия трещины от времени и приложенной нагрузки.

4.10. Выводы по главе 4

1. Выполнена апробация и проверка адекватности экспериментальным данным разработанных численных методов идентификации параметров моделей ползучести, описывающих первую (поливинилхлоридный пластикат, $T=20$ °C), первую и вторую (сплав Д16АТ, $T=250$ °C), третью (сплав Д16Т, $T=150$ °C) и все три стадии (сталь 15Х2МФА, $T=550$ °C). Выполнена апробация разработанных численных методов при определении параметров модели экспериментальной зависимости J -интеграла (сплав МА2-1) и модели зависимости раскрытия трещины (плоский образец из стали 316L, $T=600$ °C).

Полученные результаты свидетельствуют о высокой эффективности разработанных численных методов.

2. Выполнен сравнительный анализ разработанного численного метода и метода последовательного выделения экспонент, примененных при обработке экспериментальных диаграмм ползучести поливинилхлоридного пла-

стиката. Установлено, что результаты расчета по разработанному численному методу имеют погрешность меньше, чем у известного метода, даже при меньшем количестве параметров.

3. Выполнено сравнение разработанных численных методов с методом Левенберга-Марквардта, примененных при обработке экспериментальных значений деформации ползучести. Установлено, что разработанный численный метод не уступает методу Левенберга-Марквардта при определении параметров модели ползучести для первой стадии, а также модели ползучести для первой и второй стадий, оба метода позволяют описывать результаты эксперимента практически с одинаковой точностью. При определении параметров модели ползучести для описания третьей стадии выявлено явное преимущество разработанного в настоящей работе численного метода.

Глава 5. Разработка комплекса программ для определения параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений

Материал данной главы излагается в соответствии с публикацией автора диссертации [26]. Разработанные алгоритмы среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностных уравнений и вычисления на их основе параметров моделей ползучести были реализованы в виде комплекса программ под управлением ОС Windows. Комплекс программ позволяет пользователю ввести на входе программы экспериментальные значения деформации ползучести, выбрать модель ползучести для соответствующей стадии, и получить оценки ее параметров на выходе программы. Описание основных этапов вычислительного алгоритма и интерфейса комплекса программ представлено в данной главе.

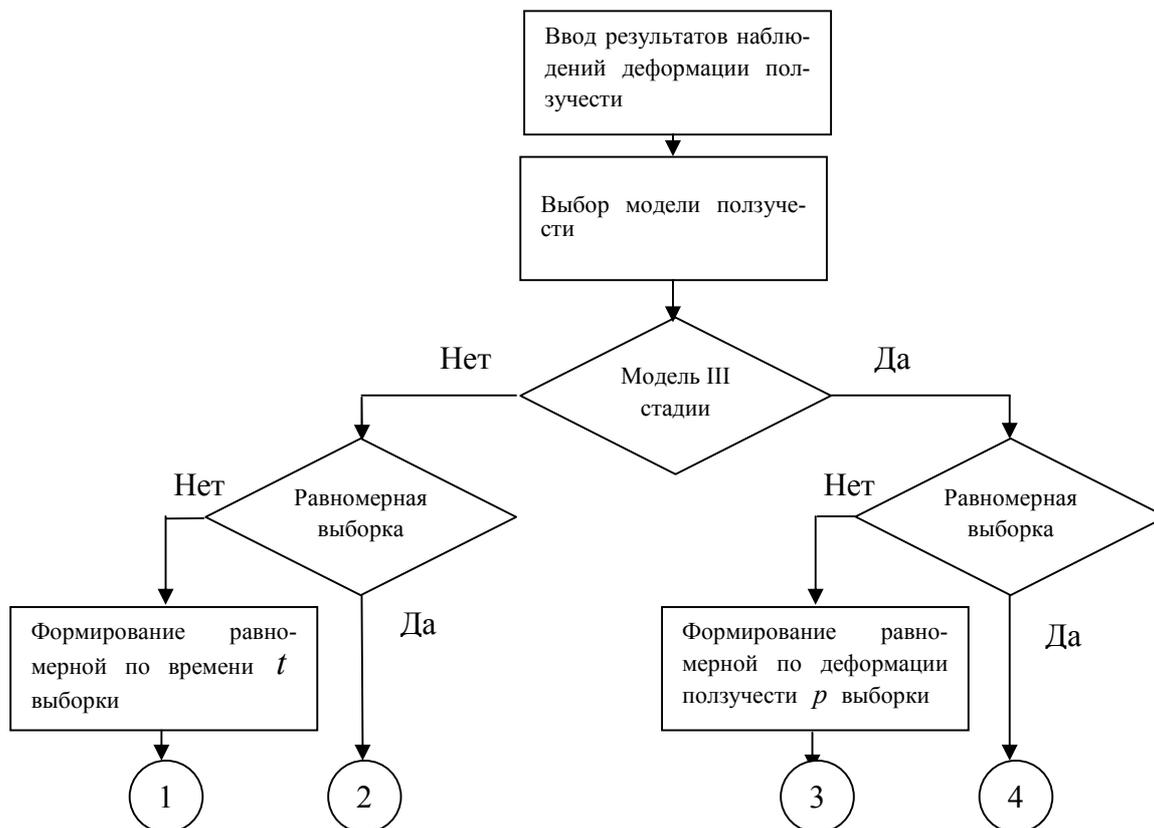
5.1. Описание основных этапов алгоритма идентификации параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений

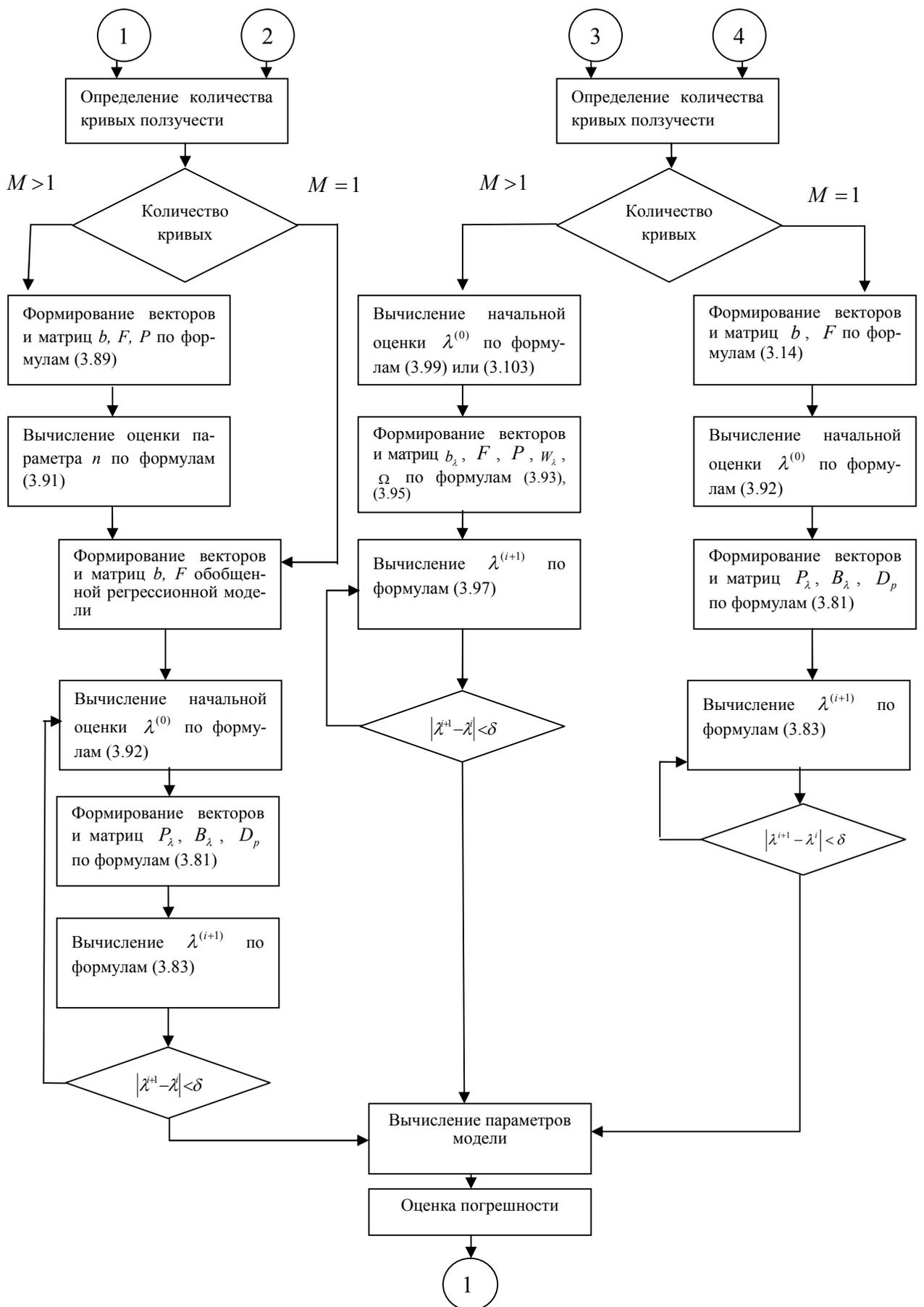
Разработанный численный метод идентификации параметров моделей реологического деформирования состоит из следующих основных этапов.

1. Ввод результатов наблюдений деформации ползучести и формирование (при необходимости) на их основе выборки равномерных значений. В разработанном программном обеспечении ввод данных предполагается через файл приложения Microsoft Excel, имеющего определенную структуру экспериментальных данных.
2. Выбор соответствующей модели ползучести. Выбор модели осуществляется пользователем, исходя из визуальной оценки экспериментальных данных и вида кривой ползучести при постоянном напряжении.

3. Формирование векторов и матриц, входящих в обобщенную регрессионную модель, описывающую последовательные значения результатов наблюдений деформации ползучести в зависимости от вида модели, стадии ползучести, количества кривых ползучести.
4. Вычисление начального приближения коэффициентов обобщенной регрессионной модели.
5. Уточнение оценок коэффициентов обобщенной регрессионной модели на основе итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания.
6. Вычисление на основе полученных оценок коэффициентов параметров модели ползучести.
7. Оценка погрешности вычислений параметров модели ползучести.
8. Вывод результатов вычислений. На данном этапе происходит отображение полученных оценок параметров на оконной форме приложения. Пользователю предлагается при необходимости сохранить полученные результаты в файл приложения Microsoft Excel, а также (при необходимости) отобразить экспериментальные и полученные смоделированные данные графически.

Алгоритм численного метода изображен в виде блок-схемы на рисунке 5.1.





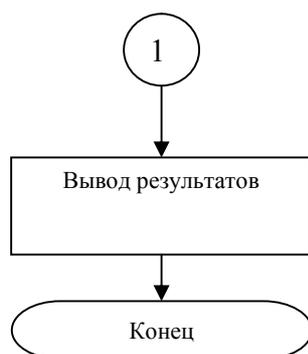


Рис. 5.1. Блок-схема алгоритма вычисления оценок параметров моделей ползучести

5.2. Описание основных элементов и интерфейса программы, системы диалоговых и информационных окон

Разработанное программное обеспечение реализовано на языке C#, с использованием Netframework 3.5. Для работы на ПК под управлением ОС Windows должны быть установлены Netframework версии 3.5 или выше, а также приложение Microsoft OfficeExcel версии 2003 или более поздней.

После запуска программы на мониторе отобразится оконная форма программы, изображенная на рисунке 5.2.

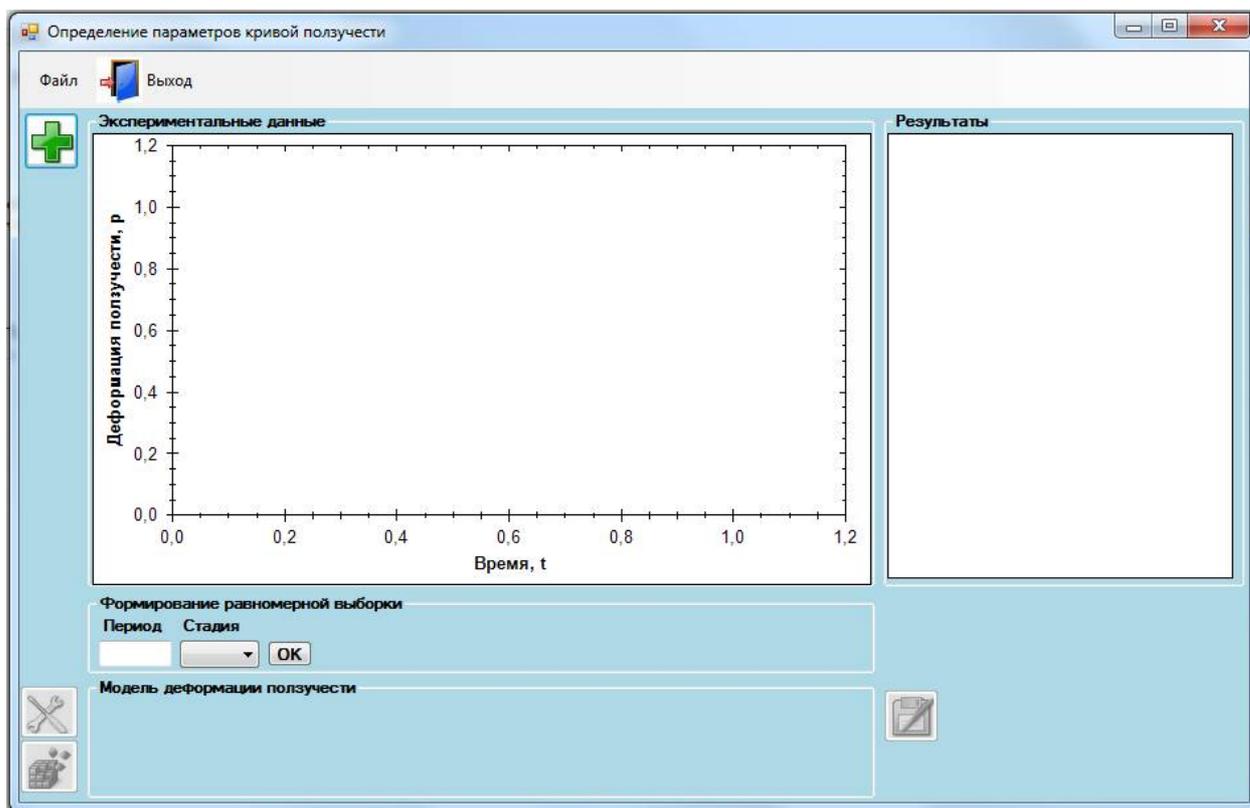


Рис.5.2. Главная оконная форма программы

Оконная форма визуально разделена на рабочие области: «Экспериментальные данные», «Формирование равномерной выборки», «Модель деформации ползучести» и «Результаты».

Рабочая область «Экспериментальные данные» предназначена для наглядного графического отображения введенных экспериментальных данных.

Рабочая область «Формирование равномерной выборки» предназначена для формирования равномерной по времени или деформации ползучести выборки дискретных значений.

Рабочая область «Модель деформации ползучести» предназначена для наглядного отображения вида модели ползучести, по которой будет производиться обработка экспериментальных данных.

Рабочая область «Результаты» предназначена для отображения полученных оценок параметров модели ползучести.

Для ввода экспериментальных данных деформации ползучести необходимо нажать на кнопку «Выбрать экспериментальные данные», либо выбрать

пункт меню «Файл»– «Открыть файл с экспериментальными данными», после чего на мониторе отобразится диалоговое окно выбора файла Microsoft Excel, изображенное на рисунке 5.3, выбрать файл с данными, и нажать на кнопку «Открыть».

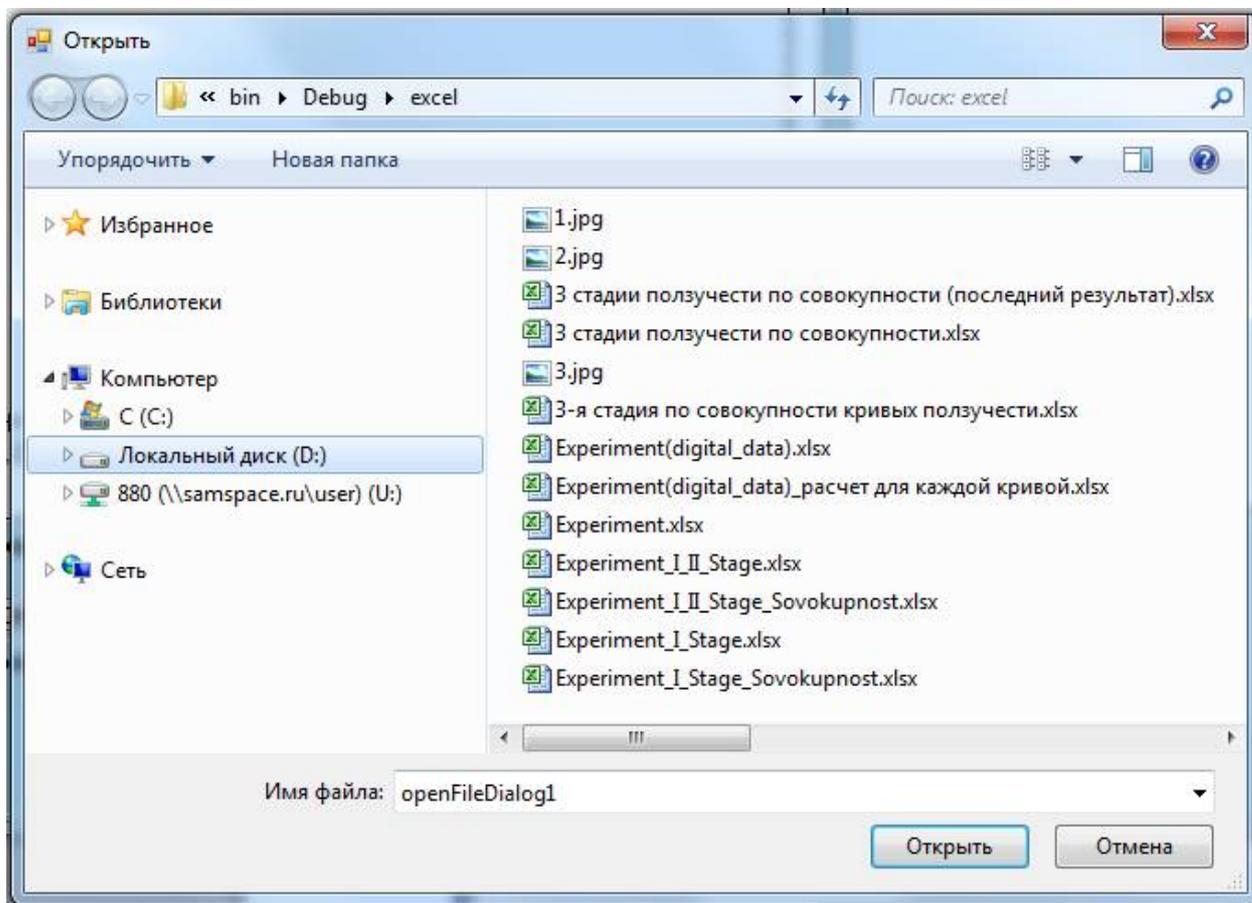


Рис.5.3. Главная оконная форма программы

Для корректного ввода данных необходимо, чтобы файл Microsoft Excel соответствовал структуре, представленной на рисунке 5.4, а именно: экспериментальные данные «время – деформация ползучести» расположены в столбцах, последовательно друг за другом, начиная со второй строки первого столбца. Для наглядности столбцы временных отсчетов подсвечены желтым цветом, столбцы соответствующих значений деформации ползучести – зеленым. Над каждым столбцом временных отсчетов введено значение номинального напряжения, при котором проводился эксперимент. Значения номинального напряжения подсвечены синим цветом.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1		1,349859		1,822119		2,459603	
2	0	-0,02006	0	-0,02707	0	-0,03654	0	-0,04933
3	0,052632	0,156101	0,052632	0,210715	0,052632	0,284435	0,052632	0,383947
4	0,105263	0,187094	0,105263	0,252551	0,105263	0,340908	0,105263	0,460178
5	0,157895	0,30719	0,157895	0,414663	0,157895	0,559736	0,157895	0,755565
6	0,210526	0,341717	0,210526	0,46127	0,210526	0,622649	0,210526	0,840489
7	0,263158	0,384129	0,263158	0,51852	0,263158	0,699929	0,263158	0,944806
8	0,315789	0,402443	0,315789	0,543241	0,315789	0,733299	0,315789	0,98985
9	0,368421	0,435628	0,368421	0,588037	0,368421	0,793767	0,368421	1,071473
10	0,421053	0,426948	0,421053	0,576319	0,421053	0,777949	0,421053	1,050121

Рис.5.4. Структура файла с экспериментальными данными

После выбора файла экспериментальные данные отобразятся в виде графиков в рабочей области «Экспериментальные данные». Пример представлен на рисунке 5.5.

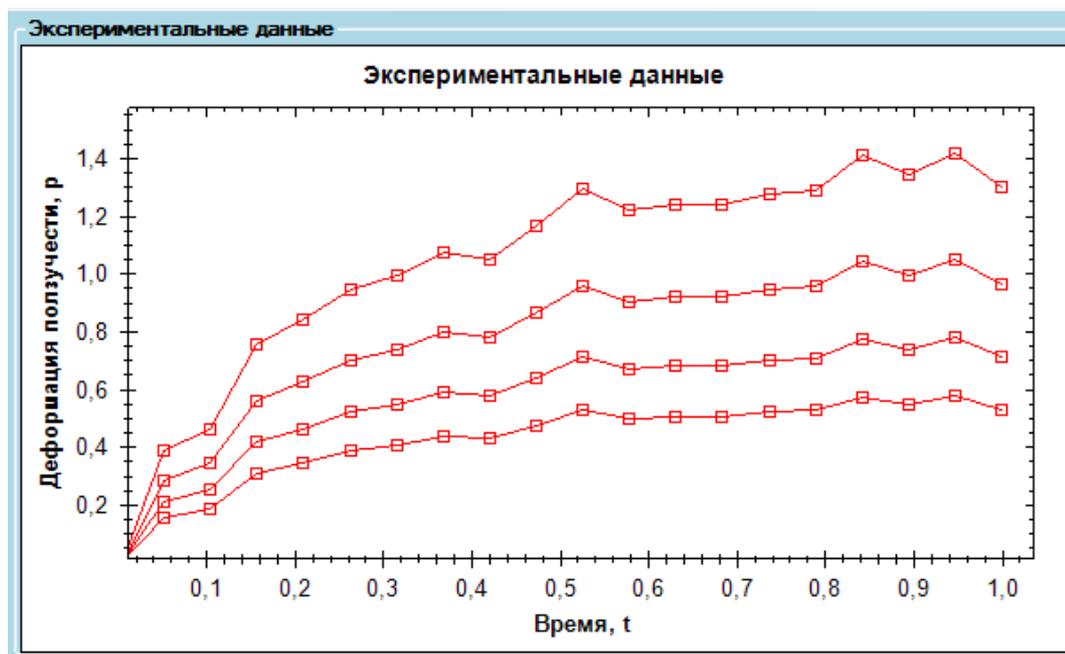


Рис.5.5. Графическое представление введенных экспериментальных данных

При необходимости, если введенные данные не являются равномерными, можно сформировать выборку, равномерную по времени для первой и второй стадий ползучести, либо равномерную по деформации ползучести для третьей стадии. Для этого в рабочей области «Формирование равномерной выборки» необходимо задать период дискретизации, выбрать, к какой стадии

относятся экспериментальные данные, и нажать на кнопку «ОК». Сформированная выборка равномерных значений отобразится в рабочей области «Экспериментальные данные». Пример представлен на рисунке 5.6.

Далее необходимо выбрать вид модели ползучести. Для выбора модели нажать на кнопку «Выберите модель для расчета», после чего на мониторе отобразится форма выбора модели ползучести, представленная на рисунке 5.7.

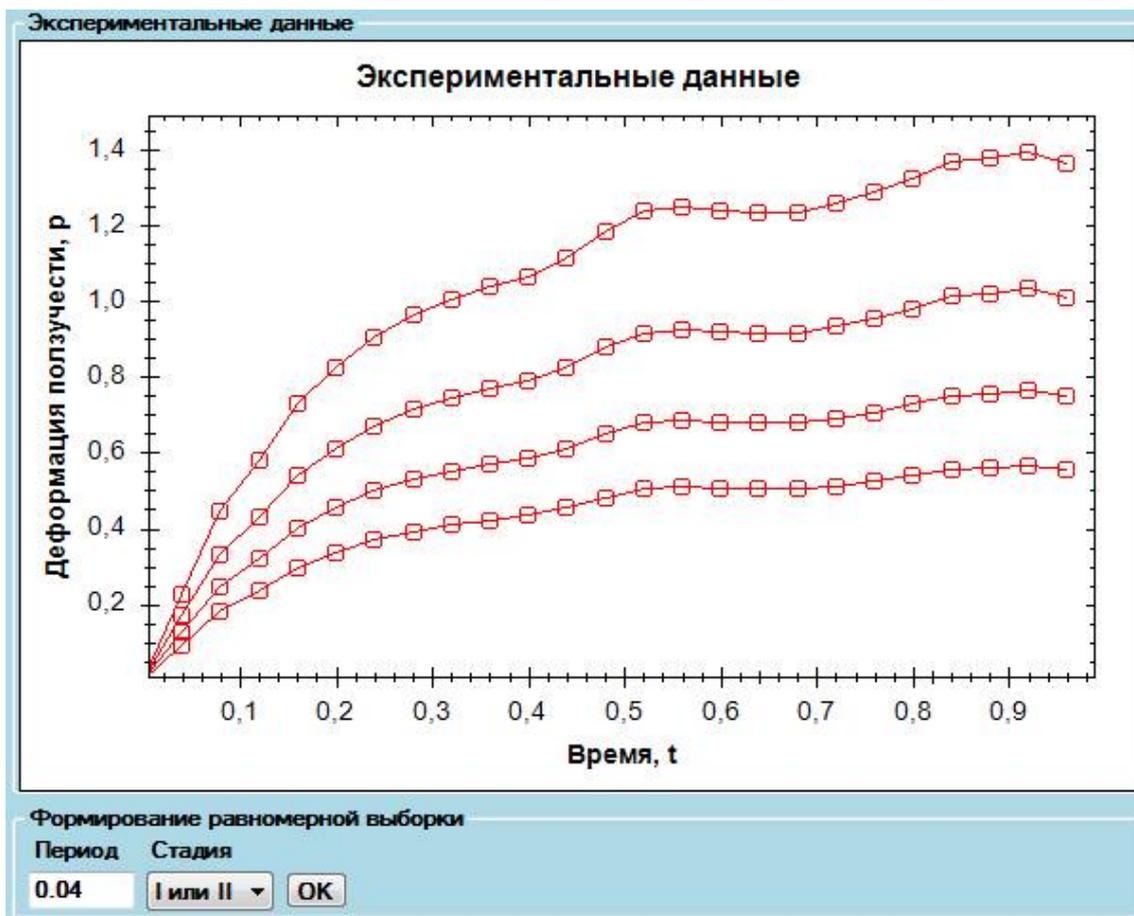


Рис.5.6. Графическое представление сформированной равномерной выборки

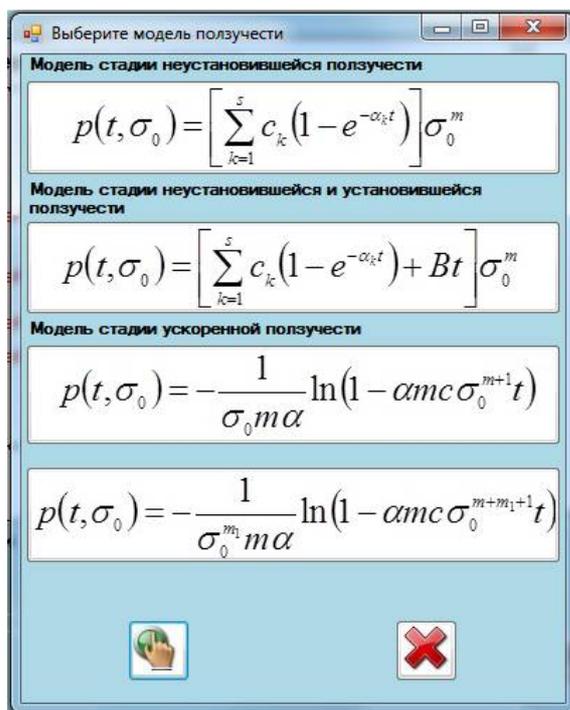


Рис.5.7. Форма выбора модели ползучести

На форме выбора модели ползучести необходимо выбрать модель, соответствующую экспериментальным данным. Для выбора нажать на кнопку с видом модели, после чего нажать на кнопку «Выбрать модель». Для отмены и возврата к главной форме нажать на кнопку «Отмена».

После выбора модели она отобразится на главной форме в рабочей области «Модель деформации ползучести», и станет активной кнопка выполнения алгоритма численного метода «Расчет». Пример представлен на рисунке 5.8.

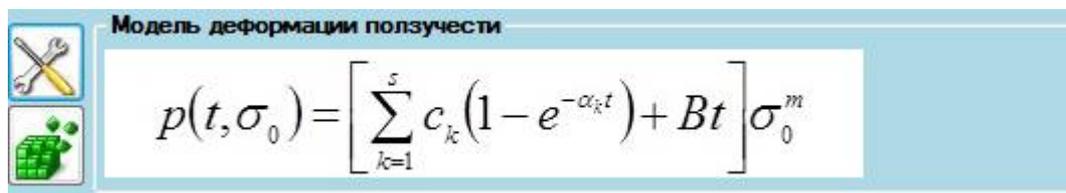


Рис.5.8. Отображение выбранной модели ползучести на главной форме

Для выполнения алгоритма численного метода нажать на кнопку «Расчет», после чего произойдет вычисление оценок параметров модели ползучести. Вычисленные оценки параметров отобразятся в рабочей области «Результаты». Пример представлен на рисунке 5.9.

Результаты		
Параметр	Оценка параметра	Δ
C1	0.419	0.008
$\alpha 1$	6.313	0.202
B	0.153	0.064
m	1.000	0.312

Рис.5.9. Отображение вычисленных оценок параметров модели ползучести

На основе оценок параметров строятся расчетные кривые ползучести, которые отображаются в рабочей области «Экспериментальные данные» в виде линий синего цвета. Пример представлен на рисунке 5.10.

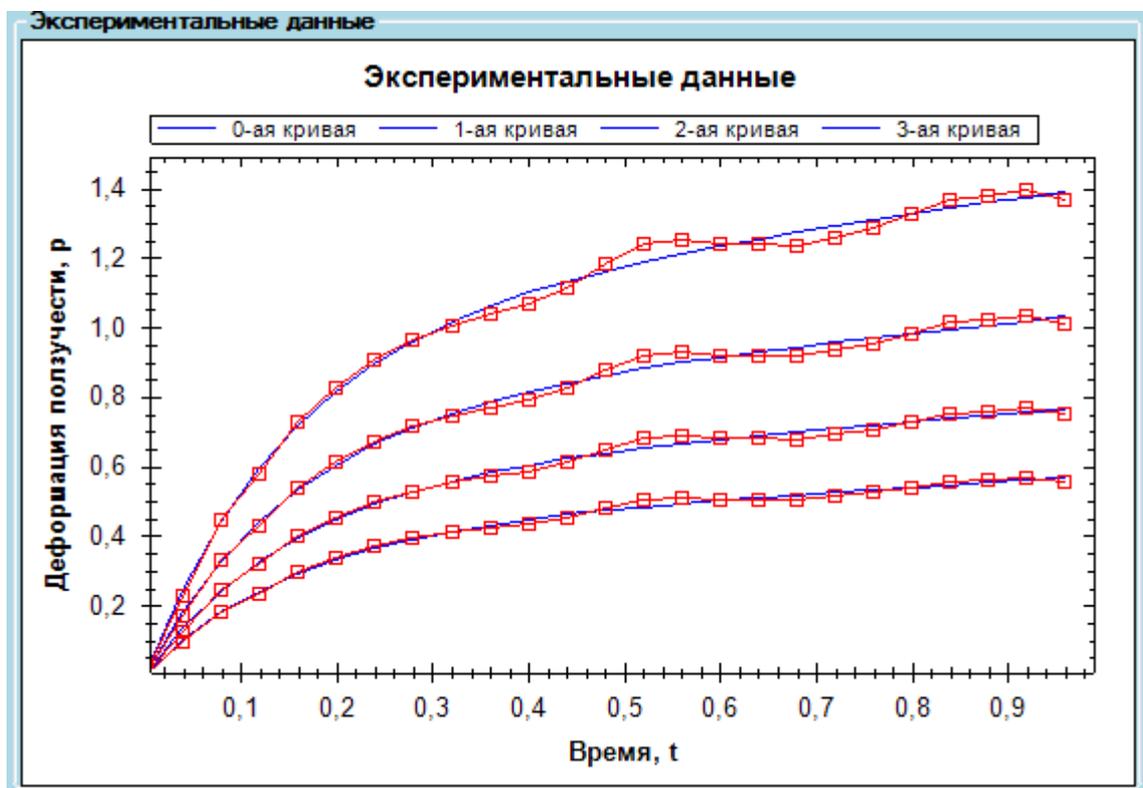


Рис.5.10. Сформированная выборка равномерных значений деформации ползучести (точки) и кривые ползучести, полученные на основе численного метода (линии)

Полученные результаты можно экспортировать в файл Microsoft Excel. Для этого необходимо нажать на кнопку «Экспорт в Excel», в результате чего на мониторе появится диалоговое окно «Экспорт результатов», представленное на рисунке 5.11.

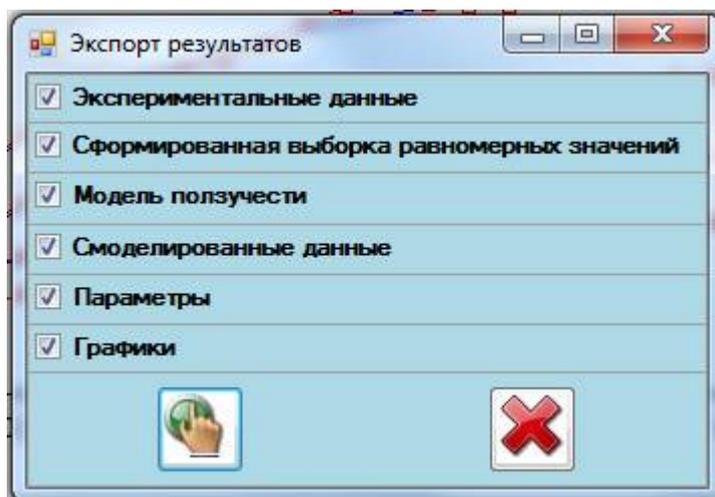


Рис.5.11. Диалоговое окно экспорта результатов

На форме «Экспорт результатов» пользователю предлагается выбрать для экспорта промежуточные и итоговые результаты, такие как:

- экспериментальные данные – временные отсчеты и соответствующие им значения деформации ползучести, заданные на входе программы;
- сформированная выборка равномерных значений – сформированная на основе экспериментальных данных равномерная по времени или деформации ползучести выборка значений;
- модель ползучести –наглядно отображаемая функциональная зависимость между деформацией ползучести, временем и напряжением;
- смоделированные данные – расчетные значения деформации ползучести, полученные на основе оценок параметров модели ползучести, вычисленных с помощью численного метода;
- параметры – оценки параметров модели ползучести, вычисленные с помощью численного метода;
- графики – наглядное графическое изображение экспериментальных значений деформации ползучести и расчетных кривых ползучести, автоматически сформированное средствами MicrosoftExcel.

Для экспорта необходимо отметить необходимые данные и нажать на кнопку «ОК».

Результат экспорта промежуточных и итоговых данных в файл Microsoft Excel представлен на рисунке 5.12.

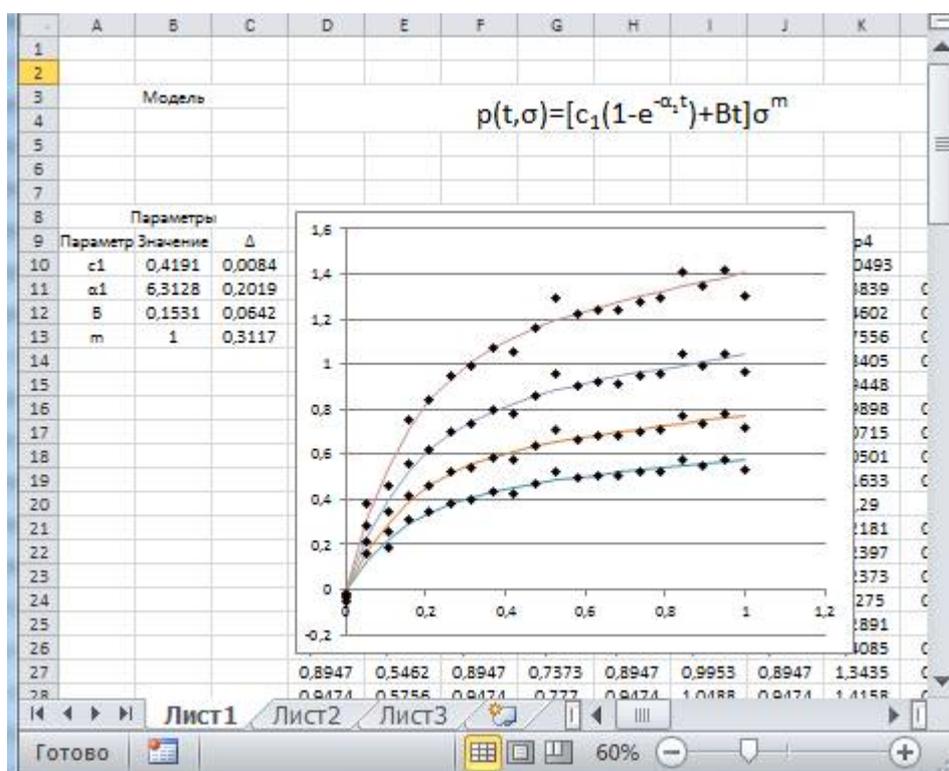


Рис.5.12. Результат экспорта данных

Для отмены экспорта данных нажать на кнопку «Отмена». Для завершения работы с программой нажать на пункт меню «Выход».

Разработанное программное обеспечение (ПО) зарегистрировано в Роспатенте, имеется свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016661735 от 19.10.2016 г.[26] (см. приложение 2). Исходные коды основных оконных форм представлены в приложении 1. Кроме этого, разработанное ПО используется в расчетной практике АО "РКЦ "Прогресс" (см. приложение 3) и специализированных отделов СКТБ "Пластик" (см. приложение 4).

5.3. Выводы по главе 5

1. Создано программное обеспечение под управлением ОС Windows, реализующее разработанные численные методы идентификации параметров моделей реологического деформирования. Программное обеспечение позволяет пользователю задать экспериментальные данные деформации на входе программы и получить оценки параметров моделей на выходе.

2. Описаны основные этапы алгоритма вычислений разработанных численных методов. Описанные этапы обобщены в виде блок-схемы, наглядно демонстрирующей последовательность выполняемых действий.

3. Описаны элементы оконных форм, посредством которых происходит взаимодействие пользователя с программой.

4. Разработанное ПО внедрено в расчетную практику АО "РКЦ "Прогресс" (см. приложение 3) и специализированных отделов СКТБ "Пластик" (см. приложение 4).

Заключение

1. Построены и систематизированы системы разностных уравнений и на их основе обобщенные регрессионные модели, описывающие результаты наблюдений реологической деформации на первой, второй и третьей стадиях и их комбинациях; получены соотношения, связывающие коэффициенты обобщенных регрессионных моделей с параметрами нелинейных моделей реологического деформирования.

2. Разработан новый численный метод определения параметров моделей реологического деформирования на основе итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов обобщенной регрессионной модели; описаны основные этапы разработанного численного метода.

3. Разработана методика оценки погрешности вычисления параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений.

4. Проведены численно-аналитические исследования эффективности разработанного численного метода определения параметров моделей реологического деформирования; проведен сравнительный анализ разработанного численного метода с известными методами, применяемыми при параметрической идентификации моделей реологического деформирования.

5. Проведена апробация и оценка адекватности результатов расчета по построенным математическим моделям на основе разработанных численных методов оценки параметров моделей реологического деформирования, описывающих первую стадию (поливинилхлоридный пластикат, $T=20$ °С), первую и вторую стадии (сплав Д16АТ, $T=250$ °С), третью стадию (сплав Д16Т, $T=150$ °С) и все три стадии (сталь 15Х2МФА, $T=550$ °С) ползучести данным эксперимента; представлены результаты апробации разработанных численных методов при определении параметров модели экспериментальной зависимости J -интеграла (сплав МА2-1) от геометрических и силовых параметров плоских образцов с трещинами и модели зависимости раскрытия трещины

вследствие ползучести (плоский образец из стали 316L, $T=600$ °C); установлено соответствие расчетных и экспериментальных данных.

6. Разработано программное обеспечение под управлением операционной системы Windows, реализующее алгоритмы предлагаемого численного метода определения параметров моделей реологического деформирования, которое может быть использовано при обработке экспериментальных данных реологической деформации (деформации ползучести, раскрытии трещин, оценке энергетического состояния материала в области вершины трещины при использовании J -интеграла).

Список используемых источников и литературы

1. Биргер И. А. Техническая диагностика. – М.: Машиностроение, 1978. – 239 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
3. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 360 с.
4. Бойцов Ю. И., Данилов В. Л., Локощенко А. М., Шестериков С. А. Исследование ползучести металлов при растяжении. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. – 98 с.
5. Брызгалин Г.И. Испытание на ползучесть пластинок из стеклопластика // ПМТФ. – 1965. – №1. – С. 136-138.
6. Вялов С.С. и др. Прочность и ползучесть мерзлых грунтов и расчеты ледогрунтовых ограждений. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 254 с.
7. Гарофало Ф. Законы ползучести и длительной прочности металлов. – М.: Metallurgy, 1968. – 304 с.
8. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 509 с.
9. Годлевский В. В., Годлевский В. С. Оценки трансформированных погрешностей решений СЛАУ с плохо обусловленными матрицами // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2015. – Т.55:12. – С. 1979-1985.
10. Горюшкин Д.С., Зуев Ю.С., Стахеев А.А. Ползучесть материалов в специальных конструкциях // Вестник концерна ПВО «Алмаз-Антей». – 2016. – №1. – С. 106-113.
11. Грановский В. А., Сирая Т. Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 288 с.

12. Гнеденко Б.В., Беляев Ю. К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
13. Дейч А. М. Методы идентификации динамических объектов. – М.: Энергия, 1979. – 240 с.
14. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессии. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 302 с.
15. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ: В 2-х кн. Кн. 2/Пер. с англ. – 2 изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 351 с.
16. Елисеева Е.Е. Прогнозирование надежности толстостенной трубы под действием внутреннего давления // Ползучесть и длительная прочность конструкций. Куйбышев: КпТИ. – 1986. – С.113-116.
17. Еремин Ю.А., Кайдалова Л.В., Радченко В.П. Исследование ползучести балок на основе аналогии структуры уравнений состояния материала и элементов конструкций // Машиноведение. – 1983. – №2. С. 67-74.
18. Еремин Ю.А., Радченко В.П. Метод расчета ползучести балок при нестационарном изменении изгибающего момента // Прочность и долговечность элементов конструкций. Куйбышев: КпТИ. – 1983. – С. 3-12.
19. Зайдель А. Н. Элементарные оценки ошибок измерений. – Л.: Наука, Ленинградское отделение, 1967. – 88 с.
20. Зотеев В. Е. Итерационный метод среднеквадратичного оценивания коэффициентов стохастического разностного уравнения колебания систем с турбулентным трением // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2005. – №. 38. – С. 100-109.
21. Зотеев В. Е. Итерационный метод среднеквадратичного оценивания параметров корреляционной функции распределения случайного поля неупругой реологической деформации // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2006. – №. 42. – С. 123-134.

22. Зотеев В. Е. Математические основы построения разностных уравнений для задач параметрической идентификации // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2008. – №. 2. – С. 192-202.
23. Зотеев В. Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений / Под ред. В. П. Радченко. – М.: Машиностроение, 2009. – 344 с.
24. Зотеев В. Е., Макаров Р. Ю. Определение параметров кривой ползучести на основе разностных уравнений // Математическое моделирование и краевые задачи / Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием. – Самара, 2013. – Т. 2. – С. 103-107.
25. Зотеев В.Е., Макаров Р.Ю. Построение линейной обобщенной регрессионной модели для третьей стадии ползучести // Перспективные информационные технологии (ПИТ-2017): труды Международной научно-технической конференции/ Под ред. С. А. Прохорова. – Самара: Издательство Самарского научного центра РАН, 2017. – 1216 С. – С. 898-900.
26. Зотеев В.Е., Макаров Р.Ю. Программа расчета параметров моделей ползучести на основе разностных уравнений. Официальный бюллетень «Программы для ЭВМ. Базы данных. Топологии интегральных микросхем» от 22.11.2016.
27. Зотеев В. Е., Макаров Р. Ю. Параметрическая идентификация кривой ползучести на основе разностных уравнений // VIII Всероссийская конференция по механике деформируемого твердого тела : сборник трудов конференции. – Чебоксары, 2014. – С. 168-169.
28. Зотеев В. Е., Макаров Р. Ю. Численный метод нелинейного оценивания в задаче определения параметров деформации ползучести // Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи". – Самара, 2016. – Т. 2. – С. 108-116.

29. Зотеев В. Е., Макаров Р. Ю. Численный метод определения параметров модели ползучести разупрочняющегося материала // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2016. – Т. 20, 2. – С. 328-341.
30. Зотеев В. Е., Макаров Р. Ю. Численный метод оценки параметров деформации ползучести при степенной зависимости параметра разупрочнения от напряжения // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2016. – Т. 3, 51. – С. 18-25.
31. Зотеев В. Е., Макаров Р. Ю. Численный метод определения параметров модели ползучести в пределах первых двух стадий // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2017. – Т. 16, № 2. – С. 145-156.
32. Зотеев В.Е., Макаров Р.Ю. Аппроксимация кривых ползучести на основе разностных уравнений // Перспективные информационные технологии (ПИТ-2015): труды Международной научно-технической конференции / Под ред. С. А. Прохорова. Том 2. – Самара: Издательство Самарского научного центра РАН, 2015. – 388 С. – С. 302-305.
33. Зотеев В. Е., Макаров Р. Ю. Численный метод определения параметров первой стадии деформации ползучести // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2017. – Т. 56, № 4. – С. 40-48.
34. Кайдалова Л.В. Исследование ползучести толстостенных цилиндров при кручении теоретико-экспериментальным методом // Ползучесть и длительная прочность. Куйбышев: Куйб. авиац. ин-т. – 1986. С. 116-123.
35. Калиткин Н. Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
36. Катанаха Н. А., Гецов Л. Б., Данюшевский И. А., Семенов А. С. Ресурс гибов высокотемпературных паропроводов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского политехнического университета. – 2013. № 3. – С. 82-94.

37. Катанаха Н. А., Семенов А. С., Гецов Л. Б. Единая модель долгосрочной и краткосрочной ползучести и идентификация ее параметров // Проблемы прочности. — 2013. № 4. — С. 143-157.
38. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. — 1958. — С. 26-31.
39. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
40. Качанов Л. М. Теория ползучести. — М.: Физматгиз, 1960. — 456 с.
41. Клебанов Я.М., Давыдов А.Н. Многоуровневая декомпозиция конструкций методом аппроксимирующих обобщенных моделей // Численные и аналитические методы расчета конструкций. Труды Межд. конф. Самара: СамГАСА. — 1998. — С. 92-96.
42. Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов. — М.: Физматлит, 2016. — 504 с.
43. Локощенко А. М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. — М.: Изд-во МГИУ, 2007. — 264 с.
44. Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. — М.: Изд-во МГИУ, 2000. — 132 с.
45. Локощенко А. М., Шестериков С. А. Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении // Прикл. мех. и техн. физ. — 1980. № 3. — С. 155-159.
46. Макаров Р. Ю. Идентификация параметров модели ползучести в случае отсутствия первой стадии ползучести // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции. — Воронеж, 2014. — Т. 2. — С. 175-180.
47. Макаров Р. Ю. Идентификация параметров модели ползучести на основе закона Фройденталя // Развитие технических наук в современном мире / Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции. — Воронеж, 2014. — С. 12-14.

48. Макаров Р. Ю. Идентификация параметров модели ползучести на основе стохастических разностных уравнений // Перспективы развития современных математических и естественных наук. Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции. – Воронеж, 2014. – С. 13-15.
49. Макаров Р. Ю. О численном методе определения параметров кривой ползучести на основе разностных уравнений // Перспективные информационные технологии (ПИТ 2013): труды Международной научно-технической конференции. – Самара, 2013. – Т. 2. – С. 62-67.
50. Макаров Р. Ю. Об аппроксимации кривых ползучести на основе разностных уравнений // Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике. Тезисы докладов. – Новосибирск, 2015. – С. 225-226.
51. Макаров Р. Ю. Численный метод определения параметров кривой ползучести на основе закона Содерберга // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева (национального исследовательского университета). – 2015. – Т. 14, № 2. – С. 113-117.
52. Малинин Н. Н. Ползучесть в обработке металлов. – М.: Машиностроение, 1986. – 221 с.
53. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
54. Малинин Н. Н. Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. – М.: Машиностроение, 1981. – 220 с.
55. Малинин Н.Н. Основы расчета на ползучесть. – М.: Машиностроение, 1948. 120 с.
56. Можаровская Т. Н., Можаровский В. Н., Штефан Н. И. О взаимосвязи основных характеристик ползучести и долговечности конструкционных материалов // Вестник Национального технического университета

- Украины "Киевский политехнический институт". – 2011. – №. 63. – С. 185-187.
57. Муратова Л.А. Оценка работоспособности турбинных дисков в условиях ползучести с помощью теоретико-экспериментального метода при нестационарном нагружении // Ползучесть и длительная прочность. Куйбышев: Куйб. авиац. ин-т. – 1986. – С. 108-113.
58. Одинг И. А. Основы прочности металлов паровых котлов, турбин и турбогенераторов. – М.-Л.: Госэнэргоиздат, 1949. – 560 с.
59. Одинг И. А., Иванова В. С., Бурдукский В. В., Геминев В. М. Теория ползучести и длительной прочности металлов. – М.: Металлургиздат, 1959. – 488 с.
60. Петров И. Б., Лобанов А. И. Лекции по вычислительной математике. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2006. – 523 с.
61. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. – М.: Наука, 1975. – 319 с.
62. Работнов Ю. Н. Избранные труды. Проблемы механики деформируемого тела. – М.: Наука, 1991. – 196 с.
63. Работнов Ю. Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР – 1959. – С. 5-7.
64. Работнов Ю.Н., Милейко С.Т. Кратковременная ползучесть. М.: Наука, 1970. – 224 с.
65. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
66. Работнов Ю. Н. Опытные данные по ползучести технических сплавов и феноменологические теории ползучести (обзор) // Прикладная математика и техническая физика. – 1965. №. 1. – С. 141-159.

67. Радченко В. П. Математическая модель неупругого деформирования и разрушения металлов при ползучести энергетического типа // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 1996. – Т. 4. – С. 43-63.
68. Радченко В. П. Энергетический вариант одноосной теории ползучести и длительной прочности // ПМТФ. – 1994. № 4. – С. 172-179.
69. Радченко В. П., Еремин Ю. А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. – М.: Машиностроение-1, 2004. – 264 с.
70. Радченко В. П., Кичаев Е. К., Симонов А. В. Энергетический вариант модели реологического деформирования и разрушения металлов при совместном действии статических и циклических нагрузок // Прикладная механика и техническая физика. – 2000. – Т.41, № 3. – С. 169-176.
71. Радченко В. П., Небогина Е. В., Андреева Е. А. Структурная модель разупрочняющегося при ползучести материала в условиях сложного напряженного состояния // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2009. № 1. – С. 75-84.
72. Радченко В. П., Саушкин М.Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. – М.: Машиностроение-1, 2005. – 227 с.
73. Радченко В. П., Симонов А. В. Разработка автоматизированной системы построения моделей неупругого деформирования металлов на основе методов непараметрического выравнивания экспериментальных данных // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 1999. № 7. – С. 51-62.
74. Радченко В. П., Цветков В. В. Напряжённо-деформированное состояние цилиндрического образца из сплава Д16Т в условиях осевого растяжения и кручения при ползучести // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2013. – Т.3. – С. 77-86.

75. Радченко В. П., Шершнева М. В., Кубышкина С. Н. Оценка надёжности элементов конструкций в условиях ползучести на основании стохастических обобщённых моделей // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2012. – Т.3. – С. 53-71.
76. Радченко В. П., Шершнева М. В., Попов Н. Н. Аналитический метод оценки надёжности элементов конструкций в условиях ползучести по катастрофическому критерию отказа // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием (1–4 июня 2009 г.) / Часть 1, Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций, СамГТУ, Самара. – 2009. С.– 221-231.
77. Радченко В. П. Разработка структурных и феноменологических моделей деформирования и разрушения материалов и элементов конструкций в условиях ползучести. [Текст]: дисс....докт. физ.-мат. наук. – Самара, 1992. – 395 с.
78. Расчеты и испытания на прочность. Метод определения параметров кривых ползучести и накопления повреждений при одноосном нагружении. — М.: ВНИИНМАШ, 1982.
79. Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при статическом нагружении. Гост 25.506-85. Механические испытания. Расчет и испытания на прочность: Сб. стандартов. – М.: Стандартинформ, 2005.
80. Романюк М. А. Численные методы определения параметров нелинейных математических моделей на основе стохастических разностных уравнений. [Текст]: дис.....канд.техн. наук: 05.13.18: защищена 18.12.2014: Романюк М.А.— Самара, 2014.— 378 с.
81. Рыбаков Л.С. О структурных теориях механики стержневых упругих систем // Динамика и технические проблемы механики конструкций и

- сплошной среды. Тезисы докл. Всероссийского симпозиума. – М. –1995. – С.42-43.
82. Самарин Ю.П., Клебанов ЯМ. Обобщенные модели в теории ползучести конструкций. Самара: Сам ГТУ – ИАРФ. – 1994. – 196 с.
83. Самарин Ю. П. О применении стохастических уравнений в теории ползучести материалов // Изв. АН СССР. МТТ. – 1974. – Т. 1. – С. 88-94.
84. Самарин Ю. П. Описание деформирования реономных материалов методами теории управления. – Куйбышев: ВИНТИ, 1976.
85. Самарин Ю. П. Построение экспоненциальных аппроксимаций для кривых ползучести методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых // Проблемы прочности. — 1974. № 9. – С. 24-27.
86. Самарин Ю. П. Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами. Куйбышев: Куйб. госуниверситет, 1979. – 879 с.
87. Самарский А.А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
88. Сорокин О.В, Самарин Ю.П. Ползучесть деталей машин и сооружений. Куйбышев: Куйб. книжн. изд-во, 1968. – 144 с.
89. Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф. Энергетический вариант теории ползучести. Новосибирск: Институт гидродинамики СО РАН СССР, 1986. – 95 с.
90. Тарасов Ю.Л., Миноранский Э.И., Дуплякин В.М. Надежность элементов конструкций летательных аппаратов. – М: Машиностроение, 1992. – 224 с.
91. Троценко В.Т., Покровский В.В., Прокопенко А.В. Трещиностойкость металлов при циклическом нагружении. Киев: Наукова думка, 1987. – 256 с.
92. Четыркин Е. М. Статистические методы прогнозирования. – М.: Статистика, 1977. – 200 с.

93. Шестериков С. А., Локощенко А. М. Ползучесть и длительная прочность металлов // ВИНТИ, Итоги науки и техн. Сер. Мех. деф. тверд. тела. – 1980. – Т. 13. – С. 3-104.
94. Шестериков С. А., Юмашева М. А. Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Механика твердого тела. – 1984. – № 1. – С. 86-91.
95. Яценко В.Ф. Прочность и ползучесть сложных пластиков. – Киев: Наук. Думка, 1966. – 204 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Программные коды

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.ComponentModel;
using System.Data;
using System.Drawing;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Windows.Forms;
using System.IO;
using System.Reflection;
using ZedGraph;
using WindowsApplication1.View;
using WindowsApplication1.calculation;

namespace WindowsApplication1
{
    public partial class frmMain : Form
    {
        ZedGraph.ZedGraphControl GraphControl = new ZedGraph.ZedGraphControl();
        Microsoft.Office.Interop.Excel.Application ObjExcel; /* = new Micro-
soft.Office.Interop.Excel.Application(); */
        Microsoft.Office.Interop.Excel.Workbook ObjWorkBook;
        Microsoft.Office.Interop.Excel.Worksheet ObjWorkSheet;
        double[][] p = null;
        double[][] t = null;
        double[][] pm = null;
        double[][] tm = null;
        double[][] pModel = null;
        double[][] tModel = null;
        double[] sigma = null;
        BackgroundWorker worker = new BackgroundWorker();
        public frmMain()
        {
            InitializeComponent();
            ZedGraph.Chart Chart = new ZedGraph.Chart();

            GraphControl.Location = new Point(3, 16);
            GraphControl.Anchor = (AnchorStyles.Bottom | AnchorStyles.Left | AnchorS-
tyles.Right | AnchorStyles.Top);
            GraphControl.Size = new Size((int)groupBox1.Width-50, groupBox1.Height-17);

            GraphControl.GraphPane.Title.Text = "";
            GraphControl.GraphPane.XAxis.Title.Text = "Время, t";
            GraphControl.GraphPane.YAxis.Title.Text = "Деформация ползучести, p";
            // this.Controls.Add(GraphControl);
            groupBox1.Controls.Add(GraphControl);
            GraphControl.Show();
            toolTip1.SetToolTip(btnAddDelData, "Выбрать экспериментальные данные");
            toolTip1.SetToolTip(btnChooseModel, "Выберите модель для расчета");
            toolTip1.SetToolTip(btnCalculate, "Расчет");
            toolTip1.SetToolTip(btnSave, "Экспорт в Excel");
            btnChooseModel.Enabled = false;
            btnCalculate.Enabled = false;
        }
    }
}
```

```

private void выходToolStripMenuItem_Click(object sender, EventArgs e)
{
    Close();
}
void SetScale(Axis axis, double[][] t)
{
    double MaxValue = 0;
    foreach (double[] mas in t)
    {
        double Max = (from s in mas select s).Max()+1;
        if (Max > MaxValue)
        {
            MaxValue = Max;
        }
    }
    double Tic = 0;
    if (MaxValue > 1)
    {
        Tic = Convert.ToInt32(MaxValue / 10);
    }
    else
    {
        Tic = 0.2;
    }
    axis.Scale.Max = MaxValue;
    axis.Scale.Min = 0;
    axis.Scale.BaseTic = Tic;
}

void LoadDataToGraf(double[][] t, double[][] p)
{
    try
    {
        GraphControl.GraphPane.CurveList.Clear();
        GraphControl.Refresh();

        if (t != null && p != null)
        {
            int M = t.GetLength(0);
            Graphics g= GraphControl.CreateGraphics();
            Axis X = GraphControl.GraphPane.XAxis;
            SetScale(X, t);
            Axis Y = GraphControl.GraphPane.YAxis;
            SetScale(Y, p);

            for (int j = 0; j < M; j++)
            {

                LineItem line = GraphCon-
trol.GraphPane.AddCurve("",t[j],p[j],Color.Red);

                line.Draw(g, GraphControl.GraphPane, j, 0);

            }
            GraphControl.Refresh();
        }
    }
}

```

```

        else
        {
            }
        }
    }
    catch (Exception ex)
    {
        MessageBox.Show("При загрузке данных произошла ошибка!");
    }
}
Graphics g;
void AddDataToGraf(List<Delta> res, int N,int M, double [] sigma,double
tau,double n=1,double B=0)
{
    try
    {
        n = res[0].n;
        B = res[0].B;
        double[][] t = new double[M][];
        double[][] p = new double[M][];

        for (int j = 0; j < M; j++)
        {
            t[j] = new double[N];
            p[j] = new double[N];
            for (int i = 0; i < N; i++)
            {
                t[j][i] = tau * i;
                p[j][i] = (Calc.CalcInPoint(res, t[j][i]) + B * t[j][i]) *
Math.Pow(sigma[j], n);
            }
        }

        if (t != null && p != null)
        {
            int m = t.GetLength(0);
            if (g == null)
            {
                g = GraphControl.CreateGraphics();
            }

            for (int j = 0; j < m; j++)
            {
                LineItem line = GraphControl.GraphPane.AddCurve(j.ToString() + "-
ая кривая", t[j], p[j], Color.Blue, SymbolType.None);

                GraphControl.GraphPane.LineType = LineType.Normal;

                line.Draw(g, GraphControl.GraphPane, j, 0);

            }
            GraphControl.Refresh();
        }
        else
        {
            }
        }
    }
}

```

```

        catch (Exception ex)
        {
            MessageBox.Show("При загрузке данных произошла ошибка!");
        }
    }
    private void открытьФайлСЭкспериментальнымиДаннымиToolStripMenuItem_Click(object
sender, EventArgs e)
    {
        try
        {
            open.ShowDialog();

            open.Filter = "Текстовые файлы (*.txt)|*.txt|Файлы Эксель
(*.xls*)|*.xls*|Файлы Эксель (*.xlsx*)|*.xlsx*";
            GetData(out t, out p, out sigma);
            LoadDataToGraf(t, p);

        }
        catch (Exception ex)
        {
            MessageBox.Show(ex.InnerException.Message);
        }
    }
    int CreepCurveCount = -1;
    private void GetData(out double [][] t, out double [][] p, out double [] sigma)
    {
        if (open.FileName.Trim() != "")
        {
            if (File.Exists(open.FileName.Trim()))
            {
                string ext = Path.GetExtension(open.FileName.Trim());
                if (Path.GetExtension(open.FileName.Trim()) == ".xls" ||
Path.GetExtension(open.FileName.Trim()) == ".xlsx")
                {
                    if (ObjExcel == null)
                    {
                        ObjExcel = new Microsoft.Office.Interop.Excel.Application();
                    }
                    if (ObjExcel != null)
                    {
                        ObjWorkBook = ObjExcel.Workbooks.Open(open.FileName.Trim(),
Missing.Value, false, Missing.Value, Missing.Value, Missing.Value, Miss-
ing.Value, Missing.Value, Missing.Value, Missing.Value, Missing.Value, Missing.Value,
Missing.Value, Missing.Value);

                    }
                    else
                    {
                        ObjWorkBook = null;
                        ObjWorkSheet = null;
                    }
                    if (ObjWorkBook != null)
                    {
                        if (((Micro-
soft.Office.Interop.Excel.Workbook)ObjWorkBook).Sheets.Count > 0)
                        {
                            ObjWorkSheet = (Micro-
soft.Office.Interop.Excel.Worksheet)ObjWorkBook.Sheets[1];
                        }
                    }
                }
            }
        }
    }

```

```

else
{
    ObjWorkSheet = null;
}
if (ObjWorkSheet != null)
{
    int Mmax = 7;
    int M = 0;
    for (int i = 1; i < Mmax * 2; i++)
    {
        if (ObjWorkSheet.Range[ObjWorkSheet.Cells[2, i], ObjWork-
Sheet.Cells[2, i]].Value != null)
        {
            M += 1;
        }
        else
        {
            break;
        }
    }

    M=M/2;
    CreepCurveCount = M;

    char[] Headers = "ABCDEFGHJKLMN".ToArray();
    if (M > 0)
    {

        sigma = new double[M];
        p = new double[M][];
        t = new double[M][];
        List<double> tm = new List<double>();
        List<double> pm = new List<double>();
        for (int i = 0; i < M; i++)
        {
            sigma[i] = Con-
vert.ToDouble(ObjWorkSheet.Range[ObjWorkSheet.Cells[1, 2 * i + 1], ObjWorkSheet.Cells[1,
2 * i + 1]].Value);//3, (i + 1) * 2
            rng = ObjWorkSheet.Range[ObjWorkSheet.Cells[1,
100], ObjWorkSheet.Cells[1, 100]];
            rng.Select();

            ObjExcel.ActiveCell.Formula =
String.Format("=COUNT(C[-{0}])", 98-2*i); // Headers[2 * i + 1]);
            int NM = Con-
vert.ToInt32(ObjWorkSheet.Range[ObjWorkSheet.Cells[1, 100], ObjWorkSheet.Cells[1,
100]].Value);

            for (int j = 0; j < NM; j++)
            {

                tm.Add(Convert.ToDouble(ObjWorkSheet.Range[ObjWorkSheet.Cells[2 + j, (i + 1) * 2 - 1],
ObjWorkSheet.Cells[2 + j, (i + 1) * 2 - 1]].Value));

                pm.Add(Convert.ToDouble(ObjWorkSheet.Range[ObjWorkSheet.Cells[2 + j, (i + 1) * 2], Ob-
jWorkSheet.Cells[2 + j, (i + 1) * 2]].Value));
            }
        }
    }
}

```

```

    }

    if (tm.Count == pm.Count)
    {
        p[i] = pm.ToArray();
        t[i] = tm.ToArray();
        pm.Clear();
        tm.Clear();
    }
    else
    {
        MessageBox.Show("Файл Эксель содержит данные,
введенные с ошибками!");
        t = null;
        p = null;
    }
}

ObjWorkBook.Close(Microsoft.Office.Interop.Excel.XlSaveAction.xlDoNotSaveChanges,
Type.Missing, Type.Missing);
ObjExcel.Quit();

return;
}
else
{
    MessageBox.Show("Файл Эксель не содержит данные!");
    t = null;
    p = null;
    sigma = null;
}
}
else
{
}
}

t = null;
p = null;
sigma = null;
}

private void button1_Click(object sender, EventArgs e)
{
    GraphControl.GraphPane.CurveList.Clear();
    GraphControl.Refresh();
    t = p = tm = pm = null;
}
bool flagAdd = true;
private void btnAddDelData_Click(object sender, EventArgs e)
{
    if (flagAdd)
    {

```

```

        btnAddDelData.Image = WindowsApplication1.Properties.Resources.ImgDel;
        toolTip1.SetToolTip(btnAddDelData, "Удалить экспериментальные данные");
        GraphControl.GraphPane.Title.Text = "Экспериментальные данные";
        flagAdd = false;
        открытьФайлСЭкспериментальнымиДаннымиToolStripMenuItem_Click(null, null);
        btnChooseModel.Enabled = true;
        //btnCalculate.Enabled = true;

    }
    else
    {
        btnAddDelData.Image = WindowsApplication1.Properties.Resources.ImgAdd;
        toolTip1.SetToolTip(btnAddDelData, "Выбрать экспериментальные данные");
        GraphControl.GraphPane.Title.Text = "Выберите экспериментальные данные";
        flagAdd = true;

        button1_Click(null, null);
        btnChooseModel.Enabled = false;
        btnSave.Enabled = false;
        GetModel(Calc.CreepModels.None);
        txtPeriod.Text = "";
        // btnCalculate.Enabled = false;
        ClearGrid();

    }
}
delegate void DGetModel(WindowsApplication1.calculation.Calc.CreepModels t);
WindowsApplication1.calculation.Calc.CreepModels currentModel = calcula-
tion.Calc.CreepModels.None;
private Resultat currentResultat;
void ClearGrid()
{
    dtgResults.Rows.Clear();
    dtgResults.Columns.Clear();
}
void GetModel(WindowsApplication1.calculation.Calc.CreepModels t)
{
    btnCalculate.Enabled = true;
    if (t == Calc.CreepModels.None)
    {
        btnCalculate.Enabled = false;
    }
    else
    {
        btnCalculate.Enabled = true;
    }
    currentModel = t;
    if (t == calculation.Calc.CreepModels.Istage)
    {
        pctModel.Image = WindowsApplication1.Properties.Resources.img2;
        pctModel.Show();
    }
    else if (t== calculation.Calc.CreepModels.IandIIstage)
    {
        pctModel.Image = WindowsApplication1.Properties.Resources.img3;
        pctModel.Show();
    }
    else if (t == calculation.Calc.CreepModels.IIIstage)
    {
        pctModel.Image = WindowsApplication1.Properties.Resources.img1;
    }
}

```

```

        pctModel.Show();
    }
    else if (t == Calc.CreepModels.None)
    {
        pctModel.Hide();
    }
    //pctModel.Show();
}
private void btnChooseModel_Click(object sender, EventArgs e)
{
    pctModel.Hide();
    frmChooseStage frm = new frmChooseStage(new DGetModel(GetModel));
    frm.ShowDialog();

}
delegate void DSendResults(object t);
void GetResults(object t)
{
}
private void frmMain_Shown(object sender, EventArgs e)
{
    GraphControl.Size = new Size((int)groupBox1.Width - 7, groupBox1.Height -
17);
}

void LoadResultsToGrid(double c, double m, double alfa, double m1)
{
    dtgResults.Rows.Clear();
    dtgResults.Columns.Clear();
    dtgResults.Columns.Add("param", "Параметр");
    dtgResults.Columns.Add("val", "Значение");

    dtgResults.Rows.Add("c", c);
    dtgResults.Rows.Add("m", m);
    dtgResults.Rows.Add("m1", m1);
    dtgResults.Rows.Add("alfa", alfa);

    dtgResults.Enabled = true;
}
void LoadResultsToGrid(double C1, double C2)
{
    dtgResults.Rows.Clear();
    dtgResults.Columns.Clear();
    dtgResults.Columns.Add("C1", "C_1");
    dtgResults.Columns.Add("C2", "C_2");

    dtgResults.Rows.Add(C1, C2);

    dtgResults.Enabled = true;
}
void LoadResultsToGrid(List<Delta> res, List<Delta> pogreshn=null)
{
    dtgResults.Rows.Clear();
    dtgResults.Columns.Clear();
    dtgResults.Columns.Add("param", "Параметр");
    dtgResults.Columns.Add("p", "Оценка параметра");
    if (pogreshn != null)
    {

```

```

        dtgResults.Columns.Add("dp", "Δ");
    }
    double B = 0, db = 0, n = 0, dn = 0;

    for (int i = 0; i < dtgResults.Columns.Count; i++)
    {
        dtgResults.Columns[i].Width = (int)(dtgResults.Width / dtgRe-
sults.Columns.Count) - 1;
    }
    if (pogreshn != null)
    {
        if (res[0].B > 0)
        {
            B = res[0].B;
            db = pogreshn[0].B;
        }
        if (res[0].n > 0)
        {
            n = res[0].n;
            dn = pogreshn[0].n;
        }
        for (int i = 0; i < res.Count; i++)
        {
            dtgResults.Rows.Add("C" + (i + 1).ToString(), res[i].c, po-
greshn[i].c);
            dtgResults.Rows.Add("α" + (i + 1).ToString(), res[i].alf, po-
greshn[i].alf);
            //dtgResults.Rows.Add(res[i].alf, pogreshn[i].alf);
        }

        if (B > 0)
        {
            dtgResults.Rows.Add("B", B, db);
        }
        if (n > 0)
        {
            dtgResults.Rows.Add("m", n, dn);
        }
    }
    else
    {
        if (res[0].B > 0)
        {
            B = res[0].B;
        }
        if (res[0].n > 0)
        {
            n = res[0].n;
        }
        for (int i = 0; i < res.Count; i++)
        {
            dtgResults.Rows.Add("C" + (i + 1).ToString(), res[i].c);
            dtgResults.Rows.Add("α" + (i + 1).ToString(), res[i].alf);
            //dtgResults.Rows.Add(res[i].alf, pogreshn[i].alf);
        }
    }
}

```

```

        if (B > 0)
        {
            dtgResults.Rows.Add("B", B);
        }
        if (n > 0)
        {
            dtgResults.Rows.Add("m", n);
        }
    }

    dtgResults.Enabled = true;
}

void LoadResultsToGrid(List<Delta> res, double nn, double? B=null)
{
    dtgResults.Rows.Clear();
    dtgResults.Columns.Clear();
    dtgResults.Columns.Add("Ci", "C");
    dtgResults.Columns.Add("alfai", "α");
    if (B.HasValue)
    {
        dtgResults.Columns.Add("B", "B");
    }
    dtgResults.Columns.Add("nn", "Параметр нелинейности");

    for (int i = 0; i < dtgResults.Columns.Count; i++)
    {
        dtgResults.Columns[i].Width = (int)(dtgResults.Width / dtgRe-
sults.Columns.Count) - 1;
    }
    for (int i = 0; i < res.Count; i++)
    {
        dtgResults.Rows.Add(res[i].c, res[i].alf);
    }
    if (B.HasValue)
    {
        dtgResults.Rows[0].Cells[2].Value = B;
        dtgResults.Rows[0].Cells[3].Value = nn;
    }
    else
    {
        dtgResults.Rows[0].Cells[2].Value = nn;
    }

    dtgResults.Enabled = true;
}

void LoadResultsToGrid(WindowsApplication1.calculation.Calc.Expl par)
{
    dtgResults.Rows.Clear();
    dtgResults.Columns.Clear();
    dtgResults.Columns.Add("Ci", "C");
    dtgResults.Columns.Add("alfai", "α");
    dtgResults.Columns.Add("nn", "B");
    for (int i = 0; i < dtgResults.Columns.Count; i++)
    {
        dtgResults.Columns[i].Width = (int)(dtgResults.Width / dtgRe-
sults.Columns.Count) - 1;
    }
}

```

```

        dtgResults.Rows.Add(par.a, par.alfa, par.B);

        dtgResults.Enabled = true;
    }
    void SwapJaggedArray(double[][] from, double[][] to)
    {
        int M = from.GetLength(0);
        for (int j = 0; j < M; j++)
        {
            int N = from[j].GetLength(0);
            to[j] = new double[N];
            for (int i = 0; i < N; i++)
            {
                to[j][i] = from[j][i];
            }
        }
    }
    private void btnCalculate_Click(object sender, EventArgs e)
    {
        if (currentModel != Calc.CreepModels.None)
        {
            double[,] Covariation = null;
            Microsoft.Office.Interop.Excel.Range range = null;

            double[][] te = new double[CreepCurveCount][];
            double[][] pe = new double[CreepCurveCount][];
            if (tm != null && pm != null)
            {
                SwapJaggedArray(tm, te);
                SwapJaggedArray(pm, pe);
            }
            else
            {
                SwapJaggedArray(t, te);
                SwapJaggedArray(p, pe);
            }
            if (currentModel == calculation.Calc.CreepModels.Istage)
            {
                if (CreepCurveCount == 1)
                {
                    List<Delta> res = Calc.GetTwoExponents(pe[0], te[0]);

                    LoadResultsToGrid(res);
                }
                else
                {
                    //////////////////////////////////////
                    int n = te[0].Length;
                    double[,] U = new double[n, CreepCurveCount];
                    for (int j = 0; j < CreepCurveCount; j++)
                    {
                        for (int i = 0; i < n; i++)
                        {
                            U[i, j] = pe[j][i];
                        }
                    }
                    double h = (Math.Log(sigma[CreepCurveCount - 1]) -
Math.Log(sigma[0])) / (CreepCurveCount - 1);
                    double[] l = null;
                    double nn = 0, B = 0;
                }
            }
        }
    }

```

```

        double tau = te[0][1] - te[0][0];
        List<Delta> res = new List<Delta>();//
Calc.SetCreepCurveTwoExponents(U, out l, h, sigma[0], tau, out nn);
        double[] mu = new double[2];
        double[,] Cov = new double[5, 5];
        Calc.SetCreepI_Stage_IIExponents(null, U.GetLength(0),
U.GetLength(1), tau, sigma, U, ref nn, ref B, out range, out l, out Covariation, out res,
out mu);

        double dn = mu[2];
        LoadResultsToGrid(res);
        AddDataToGraf(res, U.GetLength(0), U.GetLength(1), sigma, tau,
nn);

        BuildModelLines(res);
        currentResultat = new Resultat
        {
            currentModel = currentModel,
            p = p,
            t = t,
            tm = tm,
            pm = pm,
            parameters = res,
            sigma = sigma,
            pModel = pModel,
            tModel = tModel
            ,
            mu=mu,
            M=CreepCurveCount,
            lambda=1
        }; currentResultat.Cparam = 4;
        for (int ii = 0; ii < 4; ii++)
        {
            for (int jj = 0; jj < 4; jj++)
            {
                Cov[ii,jj]=Covariation[ii, jj] *5.83e-7;
            }
        }
        Cov[4, 4] = dn * 5.83e-7;
        currentResultat.Interval = new double[pModel[0].GetLength(0),
currentResultat.M * 2];

        currentResultat.Covariation = Cov;
        double[,] W = new double[5, 5];
        W[0, 0] = -mu[0] / (mu[1] - mu[0]);
        W[0, 1] = -1 / (mu[1] - mu[0]);
        W[1, 0] = mu[1] / (mu[1] - mu[0]);
        W[1, 1] = 1 / (mu[1] - mu[0]);
        W[2, 2] = W[3, 3] = W[4, 4] = 1;
        double[,] WT = Calc.matrtrans(W);
        double[,] WV = Calc.matrmult(W, Cov);
        double[,] VMU = Calc.matrmult(WV, WT);

        double[,] WP = new double[5, 5];
        double[] m = new double[4];
        m[0] = mu[0];
        m[1] = mu[1];
        m[2] = l[2];
        m[3] = l[3];
        double r1=(Math.Pow(m[0],2)-2*m[0]+1)*m[3];
        double r2=(-m[1]+2*m[0]-1)*m[2];
        double r3=(Math.Pow(m[0],2)-2*m[0]+1)*Math.Pow(m[1],2);
        double r4=(-2*Math.Pow(m[0],3)+4*Math.Pow(m[0],2)-2*m[0])*m[1];
        double r5=Math.Pow(m[0],4)-2*Math.Pow(m[0],3)+Math.Pow(m[0],2);
        WP[0, 0] = (r1 + r2) / (r3 + r4 + r5);

```

```

r1 = r2 = r3 = r4 = r5 = 0;
//////////
r1 = (m[0] - 1) * (m[0] * m[3] - m[3] + m[2]);
r2 = (m[0] - 1) * m[1] - Math.Pow(m[0], 2) + m[0];
WP[0, 1] = -r1 / Math.Pow(r2, 2);
//////////
r1 = r2 = 0;
r1 = (m[0] - 1) * m[1] - Math.Pow(m[0], 2) + m[0];
WP[0, 2] = 1 / r1;
//////////
r1 = (m[0] - 1) * m[1] - Math.Pow(m[0], 2) + m[0];
WP[0, 3] = (m[0] - 1) / r1;
//////////
r1 = 0;
r1 = (m[1] - 1) * m[3] + m[2];
r2 = Math.Pow(m[1], 3) + (-2 * m[0] - 1) * Math.Pow(m[1], 2);
r3 = (Math.Pow(m[0], 2) + 2 * m[0]) * m[1] - Math.Pow(m[0], 2);
WP[1, 0] = -r1 / (r2 + r3);
//////////
r1 = r2 = r3 = 0;
r1 = (2 * m[1] - m[0] - 1) * (m[1] * m[3] - m[3] + m[2]);
r2 = Math.Pow(m[1], 2) + (-m[0] - 1) * m[1] + m[0];
WP[1, 1] = r3 / Math.Pow(r2, 2) - m[3] / r2;
//////////
r1 = r2 = 0;
r1 = Math.Pow(m[1], 2) + (-m[0] - 1) * m[1] + m[0];
WP[1, 2] = -1 / r1;
//////////
r1 = r2 = r3 = 0;
r1 = Math.Pow(m[1], 2) + (-m[0] - 1) * m[1] + m[0];
WP[1, 3] = (m[1] - 1) / r1;
//////////
WP[2, 0] = -1 / (tau * m[0]);
WP[3, 1] = -1 / (tau * m[1]);
WP[4, 4] = 1;
//////////
double[,] WPT = Calc.matrtrans(WP);
double[,] WPVMU = Calc.matrmult(WP, VMU);
double[,] V = Calc.matrmult(WPVMU, WPT);
currentResultat.W = WP;
currentResultat.V = V;

for (int j = 0; j < CreepCurveCount; j++)
{
    for (int i = 0; i < currentResultat.pModel[j].GetLength(0);
i++)
    {
        double dpdc1 = (1 - Math.Exp(-res[0].alf * currentResultat.tModel[j][i]))*Math.Pow(sigma[j], res[0].n);
        double dpdalf1 = res[0].c * Math.Pow(sigma[j], res[0].n)
* currentResultat.tModel[j][i] * Math.Exp(-res[0].alf * currentResultat.tModel[j][i]);
        double dpdc2 = (1 - Math.Exp(-res[1].alf * currentResultat.tModel[j][i])) *Math.Pow(sigma[j], res[0].n);
        double dpdalf2 = res[1].c * Math.Pow(sigma[j], res[0].n)
* currentResultat.tModel[j][i] * Math.Exp(-res[1].alf * currentResultat.tModel[j][i]);
        double dpdm = Math.Pow(sigma[j], res[0].n) *
Math.Log(res[0].n) * (Calc.CalcInPoint(res, currentResultat.tModel[j][i]));
        double[,] dp = new double[1, 5];
        dp[0, 0] = dpdc1; dp[0, 1] = dpdc2; dp[0, 2] = dpdalf1;
        dp[0, 3] = dpdalf2; dp[0, 4] = dpdm;
        double[,] dpT = Calc.matrtrans(dp);

```

```

        double[,] dpV = Calc.matrmult(dp, V);
        double[,] D = Calc.matrmult(dpV, dpT);
        double ttb = 2.9 * Math.Sqrt(D[0,0]);
        currentResultat.Interval[i, 2 * j] = currentResultat.Interval[i, 2 * j] - ttb;
        currentResultat.Interval[i, 2 * j + 1] = currentResultat.Interval[i, 2 * j + 1] + ttb;
    }
}
}
else if (currentModel == Calc.CreepModels.IandIIstage)
{
    if (CreepCurveCount == 1)
    {
        ////////////////////////////////////////////////////
        double tau = t[0][1] - t[0][0];
        WindowsApplication1.calculation.Calc.Expl par =
Calc.Soderberg(pe[0], tau, out Covariation);
        LoadResultsToGrid(par);
    }
    else
    {
        ////////////////////////////////////////////////////
        int n = te[0].Length;
        double[,] U = new double[n, CreepCurveCount];
        for (int j = 0; j < CreepCurveCount; j++)
        {
            for (int i = 0; i < n; i++)
            {
                U[i, j] = pe[j][i];
            }
        }
        double h = (Math.Log(sigma[CreepCurveCount - 1]) -
Math.Log(sigma[0])) / (CreepCurveCount - 1);
        double[] l = null;
        double nn = 0, B = 0;
        double tau = te[0][1] - te[0][0];

        List<Delta> res = new List<Delta>();
        Delta par = new Delta();
        int N = U.GetLength(0);
        int M = U.GetLength(1);
        double[,] Covar = null;
        List<Delta> pogresh= Calc.SetCreepI_IIStage(null, N, M, tau, sigma, U, out res, out range, out l, out Covar);
        LoadResultsToGrid(res, pogresh);
        BuildModelLines(res);
        AddDataToGraf(res, N, M, sigma, tau);
        Resultat cr = new Resultat
        {
            currentModel = currentModel,
            p = p,
            t = t,
            pm = pm,
            tm = tm,
            tModel = tModel,

```

```

        pModel = pModel,
        parameters = res,
        pogreshnosti = pogresh,
        sigma=sigma
    },
    M = CreepCurveCount,
    lambda=1
};
currentResultat = cr;
currentResultat.Cparam = 4;
Covariation=new double [4,4];
for (int ii = 0; ii < 3; ii++)
{
    for (int jj = 0; jj < 3; jj++)
    {
        Covariation[ii, jj] = Covar[ii, jj];
    }
}
Covariation[3, 3] = pogresh[0].n ;
double[,] W = new double[4, 4];
W[0, 0] = ((1[0] - 1) * 1[2] + (1[0] + 1) * 1[1]) /
(Math.Pow(1[0], 3) - 3 * Math.Pow(1[0], 2) + 3 * 1[0] - 1);
W[0, 1] = -1[0] / Math.Pow(1 - 1[0], 2);
W[0, 2] = 1 / (1 - 1[0]);
W[1,0]=-1/1[0]/tau;
W[2, 0] = 1[1] / tau / Math.Pow(1 - 1[0], 2);
W[2, 1] = 1 / tau / (1 - 1[0]);
W[3, 3] = 1;
currentResultat.W = W;
double[,] WT = Calc.matrtrans(W);
double[,] WV = Calc.matrmult(W, Covariation);
double[,] V = Calc.matrmult(WV, WT);
currentResultat.V = V;
currentResultat.Covariation = Covariation;
currentResultat.Interval = new double[pModel[0].GetLength(),
currentResultat.M * 2];

for (int j = 0; j < CreepCurveCount; j++)
{
    for (int i = 0; i < currentResultat.pModel[j].GetLength();
i++)
    {
        double[,] DP = new double[1, 4];

        double dpda = (1 - Math.Exp(-res[0].alf * currentResultat.tModel[j][i]))*Math.Pow(sigma[j], res[0].n);
        double dpdalf = res[0].c * Math.Pow(sigma[j], res[0].n) *
currentResultat.tModel[j][i] * Math.Exp(-res[0].alf * currentResultat.tModel[j][i]);
        double dpdB = currentResultat.tModel[j][i]
*Math.Pow(sigma[j], res[0].n);
        double dpdn = Math.Pow(sigma[j], res[0].n) *
Math.Log(sigma[j]) * (res[0].c * (1 - Math.Exp(-res[0].alf * currentResultat.tModel[j][i])) + res[0].B * currentResultat.tModel[j][i]);
        DP[0, 0] = dpda; DP[0, 1] = dpdalf; DP[0, 2] = dpdB;
        DP[0, 3] = dpdn;

        double[,] DPT = Calc.matrtrans(DP);
        double[,] DPV = Calc.matrmult(DP, V);
        double[,] D = Calc.matrmult(DPV, DPT);

        double ttb = 2.98* Math.Sqrt(D[0, 0]);
    }
}

```



```

public Microsoft.Office.Interop.Excel.Range rng { get; set; }

private void btnPeriod_Click(object sender, EventArgs e)
{
    if (txtPeriod.Text != "")
    {
        string tau = txtPeriod.Text.Replace(".", ",");
        double rtau=0;
        if (Double.TryParse(tau, out rtau))
        {
            if (rtau > 0)
            {
                GetRavnomernData(rtau, out tm, out pm);
                LoadDataToGraf(tm, pm);
            }
        }
    }
}

void GetRavnomernData(double tau, out double [][] tm, out double [][] pm)
{
    if (t != null && p != null)
    {
        tm = new double[CreepCurveCount][];
        pm = new double[CreepCurveCount][];
        for (int j = 0; j < CreepCurveCount; j++)
        {
            // int N = t[j].GetLength(0);
            double[,] R = Calc.Ravnomer(t[j], p[j], tau);
            int N = R.GetLength(0);
            tm[j] = new double[N];
            pm[j] = new double[N];
            for (int i = 0; i < N; i++)
            {
                tm[j][i] = R[i, 0];
                pm[j][i] = R[i, 1];
            }
        }
    }
    else
    {
        tm = null;
        pm = null;
    }
}

private void btnSave_Click(object sender, EventArgs e)
{
    if (currentResultat != null)
    {
        frmSaveToExcel frm = new frmSaveToExcel(currentResultat);
        frm.ShowDialog();
    }
}

}

public class FinishedWork
{
    public frmProgress form { get; set; }
    public object data { get; set; }
}

```

```

public class Resultat
{
    public double[,] Interval { get; set; }
    public double[][] t { get; set; }
    public double[][] p { get; set; }
    public int M { get; set; }
    public double[][] tModel { get; set; }
    public double[][] pModel { get; set; }
    public double[] lambda { get; set; }
    public double[,] Covariation { get; set; }
    public double[][] tm { get; set; }
    public double[][] pm { get; set; }
    public double[] sigma { get; set; }
    public List<Delta> parameters { get; set; }
    public List<Delta> pogreshnosti { get; set; }
    public int Cparam { get; set; }
    public double[] mu { get; set; }
    public double[,] W { get; set; }
    public double[,] V { get; set; }
    public double OstSummKv
    {
        get
        {
            double res=Calc.s2ost(p, pModel, Cparam);
            return res;
        }
    }
    public double S2ost
    {
        get
        {
            if (currentModel == Calc.CreepModels.IIIstage)
            {
                return Calc.Ad(t, tModel);
            }
            else
            {
                return Calc.Ad(p, pModel);
            }
        }
    }
    public double[] S2
    {
        get
        {
            double[] ss = new double[M];
            for (int j = 0; j < M; j++)
            {
                if (currentModel == Calc.CreepModels.IIIstage)
                {
                    ss[j] = Calc.Ad(t[j], tModel[j]);
                }
                else
                {
                    ss[j] = Calc.Ad(p[j], pModel[j]);
                }
            }
            return ss;
        }
    }
}

```

```

public double R2
{
    get
    {
        if (currentModel == Calc.CreepModels.IIIstage)
        {
            return Calc.getR2(t, tModel);
        }
        else
        {
            return Calc.getR2(p, pModel);
        }
    }
}
public WindowsApplication1.calculation.Calc.CreepModels currentModel { get; set; }
}
}

public partial class frmSaveToExcel : Form
{
    Resultat currentResultat = null;
    WindowsApplication1.calculation.Calc.CreepModels Model = calculation.Calc.CreepModels.None;
    private Microsoft.Office.Interop.Excel.Workbook ObjWorkBook;
    private Microsoft.Office.Interop.Excel.Worksheet ws;
    private Microsoft.Office.Interop.Excel.Range range;
    public frmSaveToExcel(Resultat _currentResultat)
    {
        InitializeComponent();
        this.currentResultat = _currentResultat;
        toolTip1.SetToolTip(btnOK, "Выгрузить в Excel");
        toolTip1.SetToolTip(btnCancel, "Отмена");
        CheckResultat();
    }
    void CheckResultat()
    {
        if (currentResultat.p==null || currentResultat.t==null)
        {
            SetCheckBoxNotEnabled(chkExpData);
        }
        if (currentResultat.tm == null || currentResultat.pm == null)
        {
            SetCheckBoxNotEnabled(chkRavnData);
        }
        if (currentResultat.tModel == null || currentResultat.pModel == null)
        {
            SetCheckBoxNotEnabled(chkModelData);
        }
        if (currentResultat.parameters == null)
        {
            SetCheckBoxNotEnabled(chkParams);
        }
        if (currentResultat.currentModel == null | currentResultat.currentModel ==
calculation.Calc.CreepModels.None)
        {
            SetCheckBoxNotEnabled(chkModel);
        }
    }
}

```

```

}
void SetCheckBoxNotEnabled(System.Windows.Forms.CheckBox t)
{
    t.Checked = t.Enabled = false;
}
private void btnCancel_Click(object sender, EventArgs e)
{
    Close();
}

private void btnModelIIIStage_Click(object sender, EventArgs e)
{
}

private void IIIstage_Click(object sender, EventArgs e)
{
    foreach(Control t in tableLayoutPanel1.Controls)
    {
        if (t.GetType() == typeof(System.Windows.Forms.CheckBox))
        {
            if (((System.Windows.Forms.CheckBox)t).Name != ((System.Windows.Forms.CheckBox)sender).Name)
            {
                ((System.Windows.Forms.CheckBox)t).Checked = false;
            }
        }
    }
    ((System.Windows.Forms.CheckBox)sender).Checked = true;
}
int ColumnExperiment = 0;
int ColumnModel = 0;
private Shape shape;
void SaveToExcel()
{
    ObjExcel = new Microsoft.Office.Interop.Excel.Application();
    ObjWorkBook = ObjExcel.Workbooks.Add(Missing.Value); //, false, Missing.Value,
Missing.Value, Missing.Value, Missing.Value, Missing.Value, Missing.Value,
Missing.Value, Missing.Value, Missing.Value, Missing.Value, Missing.Value);
    ws = (Microsoft.Office.Interop.Excel.Worksheet)ObjWorkBook.Sheets[1];
    int row = 10;
    int column = 1;
    Range rng = ws.Range[ws.Cells[8, 1], ws.Cells[100, 50]];
    rng.HorizontalAlignment = XlHAlign.xlHAlignCenter;
    // rng.NumberFormat = "# ### ##0.000";

    if (currentResultat != null)
    {
        if (chkParams.Checked)
        {
            range = ws.Range[ws.Cells[8, column], ws.Cells[8, column + 2]];
            range.MergeCells = true;
            range.WrapText = true;
            range.Cells[1, 1] = "Параметры";
            ws.Cells[9, column] = "Параметр"; ws.Cells[9, column + 1] =
"Значение"; ws.Cells[9, column + 2] = "Δ";
            int ind = row;
            for (int i = 0; i < currentResultat.parameters.Count; i++)
            {
                ind = i * 2;
                ws.Cells[row + ind, column] = "c" + (i + 1).ToString();
                ws.Cells[row + ind, column + 1] = currentResultat.parameters[i].c;
            }
        }
    }
}

```

```

        if (currentResultat.pogreshnosti != null)
        {
            ws.Cells[row + ind, column + 2] = currentResultat.pogreshnosti[i].c;
        }
        ind = i * 2 + 1;
        ws.Cells[row + ind, column] = "α" + (i + 1).ToString();
        ws.Cells[row + ind, column + 1] = currentResultat.parameters[i].alf;
        if (currentResultat.pogreshnosti != null)
        {
            ws.Cells[row + ind, column + 2] = currentResultat.pogreshnosti[i].alf;
        }
    }
    if (currentResultat.parameters[0].B != 0)
    {
        ind += 1;
        ws.Cells[row + ind, column] = "B"; ws.Cells[row + ind, column + 1] = currentResultat.parameters[0].B; ws.Cells[row + ind, column + 2] = currentResultat.pogreshnosti[0].B;
    }
    if (currentResultat.parameters[0].n != 0)
    {
        ind += 1;
        ws.Cells[row + ind, column] = "m"; ws.Cells[row + ind, column + 1] = currentResultat.parameters[0].n;
        if (currentResultat.pogreshnosti != null)
        {
            ws.Cells[row + ind, column + 2] = currentResultat.pogreshnosti[0].n;
        }
    }
}
column += 3;
}
if (chkExpData.Checked)
{
    if (currentResultat.t != null && currentResultat.p != null)
    {
        int M=currentResultat.t.GetLength(0);
        rng = ws.Range[ws.Cells[8, column], ws.Cells[8, column + M * 2 - 1]];
        rng.MergeCells = true;
        rng.WrapText = true;
        rng.Cells[1, 1] = "Эксперимент";
        PrintArrays(currentResultat.t, currentResultat.p, row, column, "t", "p");
        ColumnExperiment = column;
        column+=M*2;
    }
}
if (chkRavnData.Checked)
{
    if (currentResultat.tm != null && currentResultat.pm != null)

```



```

range.Font.Size = 20;
range.HorizontalAlignment = XlHAlign.xlHAlignCenter;
range.Cells[1, 1] = Model;
int index = 0;
for (int i = 0; i < currentResultat.parameters.Count; i++)
{
    index = Model.IndexOf("c" + (i + 1).ToString());
    index += 2;
    Characters crt = range.Characters[index, 1];
    crt.Font.Subscript = true;
    crt.Font.Underline = XlCommandUnderlines.xlCommandUnderlinesOn;
    index = Model.IndexOf("-α" + (i + 1).ToString() + "t");
    index += 1;
    crt = range.Characters[index, 4];
    crt.Font.Superscript = true;
    crt.Font.Underline = XlCommandUnderlines.xlCommandUnderlinesOn;
    index += 2;
    crt = range.Characters[index, 1];
    crt.Font.Size = 14;
}
index = Model.IndexOf("n");
index += 1;
Characters cr = range.Characters[index, 1];
cr.Font.Superscript = true;
cr.Font.Underline = XlCommandUnderlines.xlCommandUnderlinesOn;
}
if (chkGraf.Checked)
{
    if (ColumnExperiment > 0)
    {
        int M = currentResultat.p.GetLength(0);
        shape = ws.Shapes.AddChart();
        shape.Chart.ChartType = XlChartType.xlXYScatter;
        Range rang = null;
        int N = currentResultat.p[0].GetLength(0);
        rang = ws.Range[ws.Cells[row, ColumnExperiment], ws.Cells[row + N, ColumnExperiment
+currentResultat.p.GetLength(0)*2]];
        shape.Chart.SetSourceData(rang);
        shape.Chart.Legend.Delete();
        shape.Width = 500;
        shape.Height = 350;

        for (int j = 0; j < M; j++)
        {
            rang = ws.Range[ws.Cells[row, ColumnExperiment + j * 2], ws.Cells[row + N, Colum-
nExperiment + j * 2 + 1]];

            Series _Series = ((Series)shape.Chart.SeriesCollection(j + 1));
            _Series.XValues = ws.Range[ws.Cells[row, ColumnExperiment + j * 2], ws.Cells[row +
N, ColumnExperiment + j * 2]];
            _Series.Values = ws.Range[ws.Cells[row, ColumnExperiment + j * 2 + 1], ws.Cells[row
+ N, ColumnExperiment + j * 2 + 1]];

            _Series.MarkerStyle = XlMarkerStyle.xlMarkerStyleDiamond;
            _Series.MarkerSize = 5;

            _Series.MarkerForegroundColor = 5;

```

```

        _Series.MarkerBackgroundColor = 25;
    }
    for (int j = 0; j < M; j++)
    {
        N = currentResultat.p[j].GetLength(0);

        rang = ws.Range[ws.Cells[row, ColumnModel + j * 2], ws.Cells[row + N, ColumnModel +
j * 2 + 1]];

        Series _Series = ((Series)shape.Chart.SeriesCollection(M + j + 1));
        _Series.XValues = ws.Range[ws.Cells[row, ColumnModel + j * 2], ws.Cells[row + N,
ColumnModel + j * 2]];
        _Series.Values = ws.Range[ws.Cells[row, ColumnModel + j * 2 + 1], ws.Cells[row + N,
ColumnModel + j * 2 + 1]];
        _Series.ChartType = XlChartType.xlXYScatterLinesNoMarkers;

    }

}

}
//////////
rng = ws.Range[ws.Cells[8, column], ws.Cells[8, column]];
rng.MergeCells = true;
rng.WrapText = true;
rng.Cells[1, 1] = "S2j";
PrintToExcel.PrintVerticalArray(ws, currentResultat.S2, row, column);
column += 1;
//////////
rng = ws.Range[ws.Cells[8, column], ws.Cells[8, column]];
rng.MergeCells = true;
rng.WrapText = true;
rng.Cells[1, 1] = "S2oct";
PrintToExcel.PrintValue(ws, currentResultat.S2ost, row, column);
column += 1;
//////////
rng = ws.Range[ws.Cells[8, column], ws.Cells[8, column]];
rng.MergeCells = true;
rng.WrapText = true;
rng.Cells[1, 1] = "R2";
PrintToExcel.PrintValue(ws, currentResultat.R2, row, column);
column += 1;
//////////
rng = ws.Range[ws.Cells[8, column], ws.Cells[8, column]];
rng.MergeCells = true;
rng.WrapText = true;
rng.Cells[1, 1] = "λ";
PrintToExcel.PrintVerticalArray(ws, currentResultat.lambda, row, column);
column += 1;

PrintToExcel.PrintMatrix(ws, currentResultat.Interval, row, column);
column += 10;
PrintToExcel.PrintMatrix(ws, currentResultat.Covariation, row, column);
column += 5;
PrintToExcel.PrintMatrix(ws, currentResultat.W, row, column);
column += 5;

```

```

        PrintToExcel.PrintMatrix(ws, currentResultat.V, row, column);
        column += 5;
    }
    ObjExcel.Visible = true;
    ObjExcel.UserControl = true;
}
void PrintArrays(double[][] t, double[][] p,int row,int column, string tH,string
pH)
{
    int M = currentResultat.t.GetLength(0);
    for (int j = 0; j < M; j++)
    {
        PrintToExcel.PrintValue(ws, tH + (j + 1).ToString(), row - 1, column + j
* 2);
        PrintToExcel.PrintVerticalArray(ws, t[j], row, column + j * 2);
        PrintToExcel.PrintValue(ws, pH + (j + 1).ToString(), row - 1, column + j
* 2+1);
        PrintToExcel.PrintVerticalArray(ws, p[j], row, column + j * 2+1);
    }
}
private void btnOK_Click(object sender, EventArgs e)
{
    SaveToExcel();

    Close();
}

public Microsoft.Office.Interop.Excel.Application ObjExcel { get; set; }
}
}

```

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2016661735

**Программа расчета параметров моделей ползучести на
основе разностных уравнений**

Правообладатели: *Зотеев Владимир Евгеньевич (RU), Макаров Роман
Юрьевич (RU)*

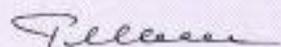
Авторы: *Зотеев Владимир Евгеньевич (RU),
Макаров Роман Юрьевич (RU)*

Заявка № **2016619034**

Дата поступления **22 августа 2016 г.**

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **19 октября 2016 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

 *Г.П. Иванов*



ПРИЛОЖЕНИЕ 3



**АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО
«РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКИЙ ЦЕНТР «ПРОГРЕСС»
(АО «РКЦ «ПРОГРЕСС»)**

ул. Змеца, д.18, г. Самара, 443009, тел. (846) 955-13-61, факс (846) 992-65-18, E-mail: mail@samspace.ru
ОКПО 43892776, ИНН 6312139922, КПП 997850001.

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель

генерального директора –

генеральный конструктор,

доктор технических наук



Равиль Нургалиевич

Ахметов*

2018 г.

АКТ

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ
КАНДИДАТСКОЙ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ
МАКАРОВА РОМАНА ЮРЬЕВИЧА**

Результаты диссертационной работы на тему «Разработка и исследование численных методов определения параметров моделей реологического деформирования на основе разностных уравнений», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук представляют практический интерес как возможная альтернатива распространенному, но дорогостоящему пакету ANSYS в части параметрической идентификации реологических моделей и позволяют еще более достоверно описывать механические свойства материалов при минимально необходимом количестве экспериментальных данных.

Предложенный метод определения параметров моделей реологического деформирования и его реализация в виде комплекса программ использован при расчетах места уплотнения корпуса клапана слива РН А7309-0М деформируемой алюминиевой прокладкой в условиях длительного хранения в напряженном состоянии и дал удовлетворительную сходимость результатов расчетов с результатами

испытаний, что позволило выработать рекомендации по доработке конструкторской документации на корпус клапана в части его усиления в зоне уплотнения.

Заместитель генерального
конструктора по научной работе,
кандидат технических наук

Евгений
Владимирович
Космодемьянский**

Кандидатская диссертация по специальности 05.07.02 – Проектирование, конструкция и производство летательных аппаратов.

Зам. главного конструктора
по пневмогидроавтоматике,
заслуженный конструктор РФ

Михаил
Викторович
Макарьянц***

* - ул. Земеца, д.18, г. Самара, 443009; тел. : 8(846) 955-06-74;
E-mail: Ahmetov@samspace.ru

** - ул. Земеца, д.18, г. Самара, 443009; тел. : 8(846) 228-152-10;
E-mail: 1060_kosmodemyanskiy@samspace.ru

*** - ул. Земеца, д.18, г. Самара, 443009; тел. : 8(846) 228-94-10;
E-mail: 120_makaryants@samspace.ru

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ООО «Специальное Конструкторско-
Технологическое Бюро «Пластик»
446025, РФ, Самарская обл.,
г. Сызрань, Саратовское шоссе, 4

УТВЕРЖДАЮ
Первый заместитель генерального
директора – Генеральный конструктор по
спец. изделиям
В.Е. Биткин
2018 г.



АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы Макарова Р.Ю.
на тему «Разработка и исследование численных методов определения параметров моделей
реологического деформирования на основе разностных уравнений» в опытно-
конструкторскую работу, выполненную ООО «Специальное Конструкторско-
Технологическое Бюро «Пластик»,
г. Сызрань

Научно - техническая комиссия в составе начальника отдела проектных разработок
и опытно-конструкторских работ ООО «СКТБ «Пластик» Денисова А.В., заместителя
начальника отдела Бородавина А.В., руководителя проектно – расчетной группы
Жидковой О.Г., руководителя проектов по направлению Родионова А.В. составили
настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы:

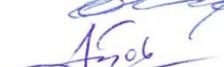
- численный метод определения параметров модели реологического деформирования при наличии трех стадий накопления поврежденности внедрен в расчетную практику при составлении паспортных характеристик по параметрам вязкоупругости и ползучести полимерных и композиционных материалов различного технического назначения;
- результаты исследования устойчивости итерационной процедуры среднеквадратического оценивания коэффициентов регрессионных моделей в зависимости от периода дискретизации внедрены и используются при планировании экспериментальных исследований по ползучести материалов;
- разработанный комплекс программ используется при автоматизации процесса аппроксимации первичных экспериментальных кривых реологического деформирования полимерных и композиционных материалов.

Члены комиссии:

Начальник отдела проектных
разработок и опытно-конструкторских
работ ООО «СКТБ «Пластик»

 А. В. Денисов

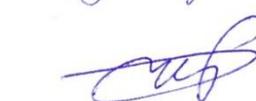
Заместитель начальника отдела

 А. В. Бородавин

Руководитель проектно – расчетной
группы

 О. Г. Жидкова

Руководитель проектов по
направлению

 А. В. Родионов

ПРИЛОЖЕНИЕ 5


«УТВЕРЖДАЮ»
Первый проректор – проректор
по научной работе СамГТУ,
доктор технических наук,
профессор,
 М. В. Ненашев
2018 г.

АКТ

об использовании результатов диссертационной работы Макарова Р.Ю.
«Разработка и исследование численных методов определения параметров моделей
реологического деформирования на основе разностных уравнений», представленной на
соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.13.18
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» в учебном
процессе Самарского государственного технического университета

Комиссия в составе начальника управления высшего образования университета
к. э. н., доцента Е. А. Алонцевой, заведующего кафедрой «Прикладная математика и
информатика» д. ф.-м. н., профессора В.П. Радченко и директора Института автоматизации и
информационных технологий к.т.н., доцента Губанова Н. Г. составила настоящий акт о
том, что в учебном процессе Самарского государственного технического университета
использованы следующие результаты кандидатской диссертации Макарова Р.Ю.
«Разработка и исследование численных методов определения параметров моделей
реологического деформирования на основе разностных уравнений». Численные методы
среднеквадратичного оценивания нелинейных математических моделей на основе
разностных уравнений включены в лекционный материал следующих дисциплин:
«Численные методы», «Математическое моделирование в машиностроении»,
«Математические методы обработки экспериментальных данных», «Математические
методы прогнозирования».

Члены комиссии:

Начальник УВО СамГТУ к. э. н.,
доцент

 Е. А. Алонцева

Директор ИАИТ, к.т.н., доцент

Н. Г. Губанов

Зав. кафедрой ПМИИ
д. ф.-м. н., профессор

 В. П. Радченко