

ФБГОУ ВО УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Соколова Александра Алексеевна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ
ЖИДКОСТИ И ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО
ФОРМООБРАЗОВАНИЯ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОЙ
ФИЛЬТРАЦИИ**

1.2.2 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
доктор технических наук,
доцент Шерыхалина Н.М.

Уфа — 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Обзор методов математического моделирования некоторых задач гидродинамики и электрохимического формообразования и методов численной фильтрации	14
1.1 Идея повышения надежности вычисленных решений.....	14
1.2 Метод Леви-Чивиты и его видоизменение (дополнение).....	17
1.3 Задача о периодических волнах. Солитон.....	19
1.4 Обтекание кругового цилиндра. Кавитация.....	23
1.5 Математическая модель процесса электрохимического формообразования.....	25
Глава 2. Разработка модификаций численно-аналитических методов и уточнение решений задач гидродинамики	31
2.1 Задача об уединенной волне Стокса на поверхности весомой жидкости.....	31
2.2 Решение задачи с краевыми условиями в дифференциальном виде.....	44
2.3 Кавитационное обтекание мягкой воздухопорной оболочки по несимметричной схеме Рябушинского.....	47
Выводы к главе 2.....	70
Глава 3. Моделирование процессов ЭХО с помощью методов ТФКП	72
3.1 Предельно-квазистационарное копирование круглого электрод- инструмента.....	72
3.2 Осесимметричная задача об электрохимической обработке точечным электродом-инструментом в пассивирующем электролите.....	84
Выводы к главе 3.....	91

Глава 4. Моделирование процесса прорезания пазов вращающимся электрод-инструментом.....	92
4.1 Постановка задачи.....	92
4.2 Метод граничных элементов.....	95
4.3 Исследование влияния частоты вращения ЭИ на форму боковой поверхности.....	104
4.4 Исследование влияния синхронного с вращением ЭИ включения напряжения.....	106
Выводы к главе 4.....	114
Заключение.....	115
Список сокращений и условных обозначений.....	117
Список литературы.....	118
Приложение А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.....	130
Приложение Б. Акт о внедрении результатов диссертационной работы в учебный процесс.....	131
Приложение В. Акт о внедрении результатов работы в производственный процесс.....	132

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность

На сегодняшний день термины «математическое моделирование» и «компьютерное моделирование» - почти синонимы. Большинство математических моделей требуют проведения компьютерных экспериментов. Однако любые вычисления возможны только на основе некоторой математической модели. Компьютерное моделирование незаменимо в случаях, когда натурный эксперимент поставить невозможно или затруднительно.

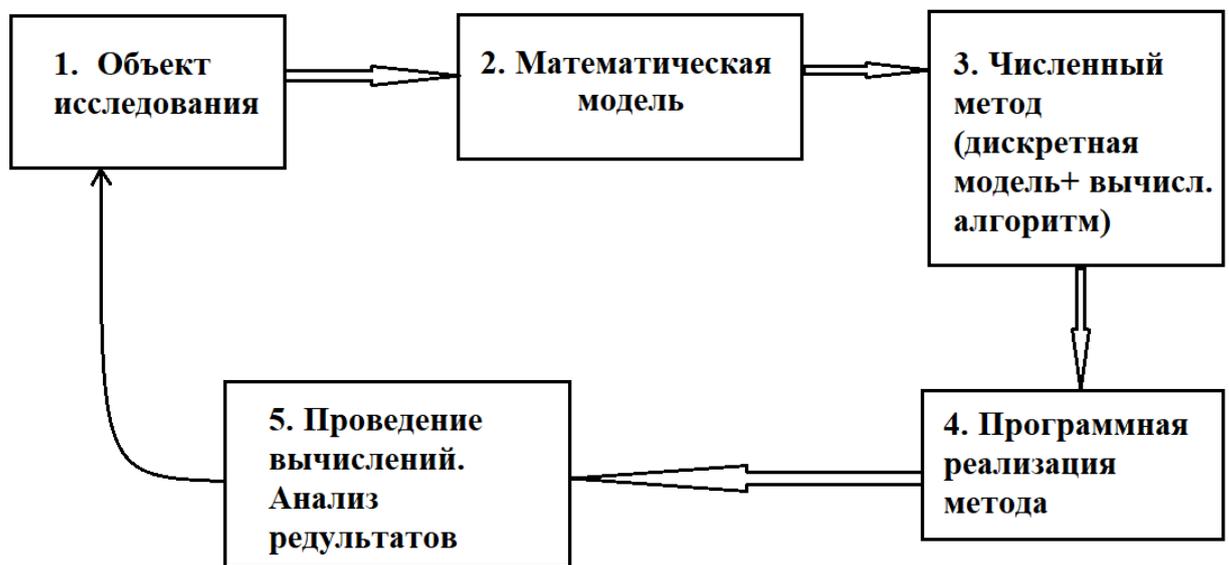


Рис. В1.Схема вычислительного эксперимента

В настоящее время практически все разделы математики представлены в электронном виде в вычислительных системах и пакетах.

Численные методы для решения задач моделирования и проектирования разного рода систем используются очень активно. То же самое можно сказать про математические программные пакеты. Тем не менее, проблема оценивания погрешностей выполняемых таким образом вычислений не исчезает.

Для решения задач применяется тот или иной вычислительный алгоритм, который можно детализировать так, что получится создать его реализацию на вычислительных машинах. Вычислительный алгоритм складывается из двух составляющих: аналитического алгоритма, формулируемого в математических

терминах и программного продукта, написанного на одном из языков, предназначенных для реализации на ЭВМ.

На сегодняшний день в ЭВМ используется форма представления вещественных чисел «с плавающей точкой», т.е. в виде:

$$x = \pm(y_1 \cdot 2^{-1} + y_2 \cdot 2^{-2} + \dots + y_t \cdot 2^{-t})2^p,$$

где y_1, y_2, \dots, y_t - двоичные цифры.

Все числа записываются в нормализованном виде. Для записи числа x необходимо, чтобы $y_1 = 1$. Это означает, что в памяти машины остаются только значащие цифры нормализованного числа. Мантисса числа x - это величина $m = \pm(y_1 \cdot 2^{-1} + y_2 \cdot 2^{-2} + \dots + y_t \cdot 2^{-t})$. Её разрядность это t - количество цифр, используемое для записи двоичных цифр. Независимо от модификации и возможностей компьютера, разрядность всегда конечная величина. Для такого представления p - целое число, его называют двоичным порядком.

На протяжении длительного времени компьютеры отличались друг от друга числом разрядов, отводимых для хранения мантиссы и порядка, способом округления и имели различные правила машинной арифметики. Однако в настоящее время большинство компьютеров конструируется в соответствии со стандартом двоичной арифметики (IEEE). При стандартном способе записи нормализованного числа x в IEEE арифметике под хранение мантиссы отводится 24 разряда (включая знак), а под хранение двоичного порядка - 8 разрядов. Поскольку для нормализованного числа всегда $y_1 = 1$, то необходимости хранить первый значащий разряд нет; сэкономленный разряд используется для хранения еще одного двоичного разряда в мантиссе.

Если число нормализовано, то $y_1 = 1$, и его мантиссу можно оценить как $0.5 \leq |m| < 1$. Конечное количество двоичных разрядов $l+1$ дается для представления порядка числа, значит $-(2^{l+1} - 2) = p_{\min} \leq p \leq p_{\max} = 2^{l+1} - 1$.

Итак, можно сделать ряд важных выводов. Во-первых, в компьютерной реализации существуют не все числа, есть лишь конечный набор рациональных

чисел специального вида (так называемое представимое множество компьютера). Для чисел x , не вошедших в представимое множество, возможно лишь приближенное представление с некоторой погрешностью, которую принято называть **погрешностью представления** (округления). В соответствие со стандартом двоичной арифметики (IEEE) $\varepsilon_M = 2^{-t}$. Это означает, что в нормализованных числах погрешность представления не зависит от величины порядка числа, поскольку для границы относительной погрешности выполняется её равенство единице первого отброшенного разряда мантиссы. Значение ε_M называется машинной точностью (машинным эпсилоном). Данная величина играет фундаментальную роль при выполнении вычислений на компьютере. То есть, важно с самого начала понимать, что, почти наверное, в представимом множестве компьютера не существует числа a , являющегося решением некоторой поставленной задачи. Единственное, что мы можем – это попробовать найти его представление с относительной погрешностью порядка ε_M .

Во-вторых, на числовой оси компьютера сами значения чисел расположены неравномерно, с разной плотностью, которая возрастает по мере приближения к нулю. Заметим, что расстояние от одного нормализованного числа $x = m \cdot 2^p$ до следующего нормализованного числа равно 2^{p-t} . Это означает, что оно определяется как единица последнего разряда мантиссы, умноженная на 2^p . Т.е., расстояние уменьшается с уменьшением значения порядка p и возрастает с увеличением p .

В-третьих, диапазон изменения чисел в компьютере ограничен.

Большая часть современных языков программирования поддерживает два типа точности: 32-битная (одинарная точность) и 64-битная (двойная точность). К примеру, для семейства языков C – это «float» и «double». У 32-битных чисел с плавающей запятой точность (длина мантиссы) примерно 24 бита, то есть около 7 десятичных знаков, а у чисел с двойной точностью — 53 бита (примерно 16 десятичных знаков). Несмотря на такие солидные возможности, потеря точности и искажение конечного результата все-таки происходит. Во-первых, двойная

точность на определенном этапе, рано или поздно, также приведет к потере точности вычисления; во-вторых, разработчики программных средств не всегда грамотно используют двойную и одинарную точность (возможность использования двойной точности абсолютно для любой переменной существенно ограничена ресурсами машины, исполняемой код). Таким образом, при появлении в процессе вычисления мантиссы с числом знаков, большим допускаемого системой, происходит округление. Это может быть либо отбрасывание первого лишнего разряда (правило усечения), либо в соответствии с некоторыми правилами (правило дополнения), либо как-то иначе.

Таким образом, возникает проблема – как соотнести вычисленные (приближенные) результаты с истинным решением поставленной задачи?

Сегодня эту проблему решают следующим образом: векторы, матрицы или иные абстрактные математические объекты заменяют на аналоги (приближенные объекты того же класса), имеющие точное конечное представление.

Нередко в данной роли выступают матрицы и векторы, составленные из некоторого конечного множества рациональных чисел, а также сами эти числа. Погрешности же при этом вычислении оцениваются вручную как отклонение приближенных значений от точных для каждой вычислительной операции.

Тем самым, при применении вышеизложенного подхода для решения численных задач при помощи ЭВМ, исследователи пришли к попыткам построения аналитической зависимости погрешности результата от погрешности исходных данных и округлений для каждого численного метода. В этом направлении, конечно, были достигнуты некоторые успехи, особенно в линейной алгебре [98], однако, в целом, старания не достигли намеченной цели. Есть формулы, связывающие погрешность результата с погрешностью исходных данных. Но дело в том, что сами вычисления, производимые на базе этих формул, само собой, тоже выполняются не точно, а с погрешностью. Поэтому нельзя применять эти формулы для любой платформы, ведь правила выполнения команд и различные тонкости архитектуры процессора, на котором происходит

эти конкретные вычисления, в них не учитываются. Кроме того, нет возможности учитывать грубость конечного результата, зависящую от индивидуальной точности участвующих в вычислении операндов. Следует особо отметить, что зачастую задача получения достоверной оценки погрешности для некоторых вычислительных алгоритмов (особенно, сложных) является задачей, по сложности сопоставимой с разработкой самого численного метода. Практика показывает, что то ли по этой, то ли по ряду других причин, при создании вычислительных приложений оценкам погрешностей не придается должное значение. Даже невозможно предположить, какая точность получится при вычислении простейшего примера $\exp(0.0001)$ и во всех других примерах, где вычисления базируются на замене точного результата на приближенный.

Есть ещё одна тонкость. Нужно помнить про условные операторы. В данном случае никто не может быть уверенным в правильности выполнения самой проверки соотношений. Это означает, что при наличии, к примеру, оператора

```
if (y<0)
{
    a;
}
else b;
```

и при приближенном вычислении переменной y , никто не знает, корректно ли выполнялась команда условного оператора. В данном случае, вычисленное значение 0.011 может заменять точное значение y , равное -0.03.

Не следует забывать и про отсутствие ассоциативности в цепочке операций сложения и умножения, что также является недостатком описываемого подхода. Таким образом, нередко можно заметить, что выполнение одной и той же вычислительной программы на разных компьютерах может привести к разным, иногда абсолютно противоположным, результатам.

Подводя итоги, можно сказать, что замена абстрактных объектов приближениями не может дать гарантию в правильности расчетов при

использовании ветвящихся алгоритмов. А это - преобладающая часть алгоритмов.

Вот тут и нужно поставить вопрос: содержит ли полученный результат верные десятичные знаки и сколько их может быть? По различным, рассмотренным выше, причинам при решении вычислительной задачи и оценке погрешности полученного решения может быть сделана ошибка, приводящая к неправильной оценке погрешности результата вычисления.

В данной работе будет наглядно показано, что возможно существенно увеличить надежность создаваемых комплексов для решения задач, применяя определенные подходы. Эти подходы будут применены в работе при решении задач гидродинамики и электрохимического формообразования. Более того, полученные с увеличенной степенью надежности результаты решения рассмотренных задач позволили сделать определенные выводы, которые ранее не освещались.

Таким образом, **целью** данной работы является разработка на основе комбинаций известных методов новых численно-аналитических алгоритмов решения задач математического моделирования течений жидкости и процессов электрохимического формообразования, оценка погрешностей и обоснование оценок с помощью численной фильтрации результатов вычислительного эксперимента.

Для достижения цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Разработать модификации численно-аналитических методов решения задач гидродинамики и комплекс программ для уточнения решений и проверки утверждений, высказанных ранее (*п.1 и п.3 паспорта специальности 05.13.18*).

2. Разработать модификации моделей, численно-аналитических методов и комплекс программ решения плоских и осесимметричных задач ЭХО для исследования процессов со сложными граничными условиями (*п.1, п.3 и п.4 паспорта специальности 05.13.18*).

3. Провести анализ построенных моделей методом вычислительного эксперимента на ЭВМ. Выполнить расчеты, применить численную фильтрацию,

оценить погрешности полученных результатов, провести их сравнение с натурным экспериментом (*п.6 и п.8 паспорта специальности 05.13.18*).

4. Провести вычислительный эксперимент для нестационарных процессов ЭХО вращающимся электродом-инструментом (*п.7 паспорта специальности 05.13.18*).

Основные положения, выносимые на защиту

1. Решение задачи о солитоне Стокса новым численно – аналитическим методом, а также новый подход к программной реализации численного алгоритма, позволивший получить результаты с увеличенной длиной машинного слова. Полученные результаты использованы в качестве обоснования рассматриваемого метода «численной фильтрации» данных, применяемого для оценок погрешностей и уточнения решений задач, полученных для различного количества узлов сетки.

2. Решение задачи о кавитационном обтекании цилиндра в новой несимметричной постановке с применением разработанного численно – аналитического способа. Постпроцессорная обработка полученных численных решений (фильтрация) позволила оценить и уточнить их значение, что позволило подтвердить высказанную ранее гипотезу о наличии локальных экстремумов некоторых параметров течения вблизи точки гладкого отрыва.

3. Моделирование процесса квазистационарного копирования круглого ЭИ для предельного режима обработки. Полученные таким образом численные результаты, уточненные при помощи «фильтрации», с большей степенью согласуются с результатами натурального эксперимента, чем модели, рассмотренные ранее.

4. Моделирование процесса и решение осесимметричной задачи ЭХО точечным ЭИ при немонотонной зависимости анодного потенциала от плотности тока.

5. Результаты моделирования ЭХО вращающимся электродом-инструментом. Определение ограничений на параметры процесса при резком изменении траектории движения ЭИ.

Эти положения соответствуют областям исследования 1, 3, 4, 7, 8 из паспорта специальности 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Научная новизна

1. Применение интеграла Шварца в задаче о солитоне Стокса вместо степенного ряда, использованного в известных численно-аналитических методах.

2. Использование увеличенной мантиссы при программной реализации численного метода в задаче о солитоне Стокса позволило обосновать оценки, полученные ранее и уточненные помощью алгоритма численной фильтрации, что подтвердило эффективность данного алгоритма.

3. Применение фильтрации позволило увеличить гарантированную точность положения экстремумов зависимостей параметров кавитационных течений с 2-х до 6 значащих цифр, что подтверждает гипотезу о наличии локальных экстремумов, никак не обоснованную ранее.

4. Впервые рассмотрена и решена осесимметричная задача об ЭХО точечным ЭИ при немонотонной зависимости анодного потенциала от плотности тока. Полученные результаты согласуются с натурным экспериментом.

5. Изменение нестационарной модели в задаче о ЭХО круглым в сечении ЭИ на квазистационарную и полученные численные результаты позволили определить форму заготовки в различные моменты времени и диапазон безразмерного времени, в котором квазистационарное решение совпадет с нестационарным. Полученное решение в большей степени совпадает с экспериментальным образцом, нежели нестационарное, полученное ранее.

6. Проведенные численные исследования новых перспективных технологий ЭХО дали возможность получить характеристики нестационарных процессов формообразования при обработке вращающимся ЭИ. Исследование

показало, что резкое изменение траектории движения ЭИ является опасным маневром с точки зрения возникновения короткого замыкания. При рассматриваемой постановке получены значения параметров обработки, при которых процесс может становиться небезопасным.

Практическая значимость

1. Полученные автором результаты решения задач моделирования прецизионной электрохимической обработки и сделанные при анализе решений выводы могут быть использованы при проектировании перспективных технологических процессов.

2. Исследуемая и подтвержденная работоспособность рассмотренных эвристических методов получения оценок погрешности различных вычислительных экспериментов позволяет применять эти методы для широкого класса практически важных вычислительных экспериментов.

3. Практическая значимость результатов подтверждается их внедрением на предприятии ООО «СЕМАТ», а также в учебном процессе на кафедре вычислительной математики и кибернетики ФГБОУ ВО УГАТУ. НИИ проблем теории и технологии электрохимической обработки УГАТУ (2012 - 2018 гг.) использовало значительную часть полученных решений для технологических процессов. Результаты работы получены при финансовой поддержке гранта РФФИ 17-07-00356.

Достоверность полученных результатов подтверждается применением фильтрации для оценки погрешности численных данных, верификацией алгоритмов и программ решения путем сравнения оценок, полученных разными методами, а также сравнением рассчитанных данных с экспериментальными. Итоги всех проделанных исследований опубликованы в отечественных и зарубежных рецензируемых научных журналах. Все полученные результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Апробация работы. Основные результаты работы были изложены на следующих научных семинарах и конференциях: Росс. научн. конф. «Мавлютовские чтения» (Уфа, УГАТУ, 2011, 2012, 2016); Всеросс. шк.-семинаре

аспир. и молод. уч. «Актуальные проблемы науки и техники» (Уфа, УГАТУ, 2013); Междунар. конф. «Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений» (Уфа, 2017); Междунар. конф. «Марчуковские научные чтения» (Новосибирск, 2017); Междунар. конф. «Современные проблемы математического моделирования, обработки изображений и параллельных вычислений» (пос. Дивноморское, 2017); VIII научно-техническая конф. молодых специалистов (Уфа, УМПО, 2017); Междунар. науч. конф. «Актуальные научные исследования в современном мире» (Переяслав-Хмельницкий, 2018); Междунар. школа-конференция «Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение» (Чебоксары, ФГБОУ ВО «ЧГУ им. И.Н. Ульянова», 2018), Межвузовский научный конгресс «Высшая школа: научные исследования» (Уфа, 2019).

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 18 публикациях: в работах автора [71 – 75] и в соавторстве [11, 14, 15, 17–19, 29, 30, 78, 80, 100–102], в том числе в 8 статьях в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК РФ. 3 статьи включены в международные базы WoS и Scopus. Получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [67].

В работах, выполненных в соавторстве, автору принадлежит разработка численно-аналитических методов, алгоритмов и программ, проведение вычислительного эксперимента, а также участие в постановке задач.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 132 страницы, включая 134 рисунка и 7 таблиц. Список литературы содержит 102 наименования.

Глава 1. Обзор методов математического моделирования некоторых задач гидродинамики и электрохимического формообразования и методов численной фильтрации

1.1 Идея повышения надежности вычисленных решений

В монографии [10] был изложен подход, с помощью которого можно существенно повысить точность численных решений и получить надежные оценки. Методика заключается в следующем:

- извлечение «невидимой информации» из имеющихся данных;
- решение одной и той же задачи несколькими способами;
- завышение точности решения с целью выявления ошибок в программах

и в оценке погрешности.

Некоторые из рассмотренных в работе задач уже были решены, а решения были проанализированы, оценены и уточнены с помощью подхода, описываемого в монографии [10]. Во 2 главе текущей работы будут решены эти же задачи, но другими способами и с увеличенной длиной машинного слова. Полученные, более точные, решения дадут оценку предыдущим, уточненным с помощью рассматриваемой методики решениям. Сравнение результатов позволит сделать вывод - действенны ли предлагаемые механизмы или нет.

Извлечение «невидимой информации» происходит посредством разработанного эвристического алгоритма, называемого *фильтрацией*. Основой методов фильтрации является априорное знание закона изменения погрешности вычисления от параметра дискретизации. Закон представляется в виде суммы нескольких слагаемых известного вида с неизвестными коэффициентами и заключается в поочередном (или групповом) подавлении этих компонент погрешности.

Идея фильтрации, в отличие от ускорения сходимости последовательности и экстраполяции (идея которых основывается на выполнении определенных условий), имеет своей целью только предоставление дополнительной информации для последующего сравнительного анализа [15, 19]. Поочередное (групповое) подавление компонент погрешности позволяет получить к исходной

последовательности несколько дополнительных последовательностей, сравнение которых дает возможность сделать оценки погрешности, а также сделать вывод об их справедливости.

При применении фильтрации рассматривается модель погрешности вычисления некоторого параметра z , которая представляется в виде суммы нескольких слагаемых

$$z_n - z = c_1 n^{-k_1} + c_2 n^{-k_2} + \dots + c_L n^{-k_L} + \Delta(n). \quad (1.1.1)$$

Использованные условные обозначения приведены в таблице 1.1.1.

Таблица 1.1.1. Условные обозначения

z	точное значение (известное только в тестовых примерах)
z_n	вычисленный результат, полученный численным методом при разбиении на n отрезков, всегда приближенное значение
c_j	коэффициенты (неизвестные)
k_1, \dots, k_L	$k_1 < k_2 < \dots < k_L$, произвольные действительные числа (известные)

Чаще всего в литературе величину $\Delta(n)$ считают бесконечно малой. Однако сутью нашей идеи является то, что $\Delta(n)$ не имеет априорной оценки. Более того, не отрицается возможность даже для того, чтобы с ростом n она тоже росла. Нарастание этой величины, которая содержит и погрешность округления, и не вошедшие в правую часть (1.1.1) слагаемые, и остаточный член ряда происходит очень часто. Кроме того, величина $\Delta(n)$ может содержать в себе и те составляющие, что образовались в результате несовершенства построения численного метода и его программной реализации. В данной работе фильтрация проводилась с помощью формулы, совпадающей с формулой Ричардсона:

$$z_{n_i}^{(j)} = z_{n_i}^{(j-1)} + \frac{z_{n_i}^{(j-1)} - z_{n_{i-1}}^{(j-1)}}{Q^{k_j} - 1}. \quad (1.1.2)$$

После поочередного или группового подавления компонент рассматриваемой модели погрешности результаты фильтрации и оценки погрешности представляют на графике (рис. 1.1.1) в виде зависимости $-\lg \delta$ (десятичного логарифма) абсолютной или относительной погрешности, т.е. точности, выраженной в количестве верных десятичных знаков от логарифма n (числа слагаемых суммы, отрезков разбиения и т.п.). Такой подход очень удобен. Каждая составляющая зависимости (1.1.1) представляется на таком графике отрезком прямой.

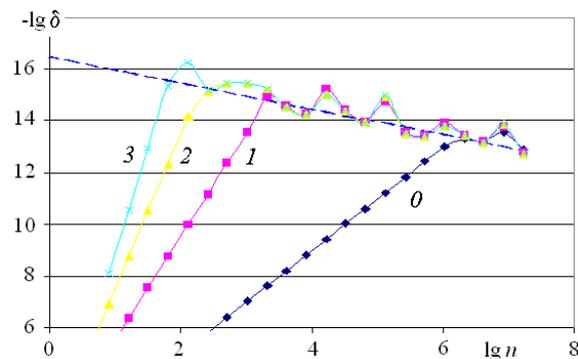


Рис.1.1.1. Пример представления результатов фильтрации

На полученном графике десятичный логарифм отношения оценок погрешностей или отношения погрешностей является разностью между ординатами точек, соответствующих конкретному числу n . Поэтому относительная размытость оценки $r_n^{(j)}$ (отношение оценки погрешности оценки погрешности к оценке погрешности) легко определяется из графика. При достаточно большом расстоянии между точками на кривых (а именно, большем $\lg 3 \approx 0,5$) получаются оценки, которым можно доверять [10].

Ниже приведены разработанные правила. При применении предложенных методов анализа численных данных для дальнейшего исследования графика с отображенными на нем численными данными (рис.1.1.1) их следует выполнять.

- Для оценки погрешности задействуется вторая сверху линия. Самая верхняя лишь визуализирует размытость оценки погрешности.

- Оценка принимается надежной, если как минимум на 0.5 сверху отстоят две точки самой верхней линии от последней точки второй линии. Но при невыполнении этого условия более целесообразным является рассмотрение для оценки погрешности линии, которая сверху третья, если она удовлетворяет заданному критерию.

- Важно обращать внимание и на конфигурацию самих линий. Если линии прямые, то дополнительных исследований, как правило, не требуется, так как это свидетельствует об убывании погрешности с ростом n . Однако, более сложная форма линий, например, загиб вверх, может означать изменение знака погрешности или же, что она проходит через локальный минимум. Данное явление является сигналом для проведения дополнительного анализа.

- Важно обращать внимание на расположение точек на графике (их плотность), а также на постоянство знака оценки погрешности. Если точки расположены не часто, то есть вероятность принять то, что есть на самом деле, за прямую. Но также применение разных методов для увеличения количества точек без увеличения верхнего порога количества узлов n является приемлемым.

1.2 Метод Ливи-Чивиты

В задачах о течении несжимаемой жидкости на соответствующих участках границы задаются условия. Часто бывает так, что только на одном участке границы течения задано какое-то сложное условие. Может быть участок, где описывается только действительная часть функции, и другой, где описывается только мнимая её часть. То есть, мы имеем уравнения, которые ставят в соответствие мнимую и действительную части функции, а также и их производные. Метод Ливи-Чивиты является хорошо подходящим для решения данных задач.

Для метода Ливи-Чивиты характерно отображение области плоскости ω на внутренность полукруга единичного радиуса параметрической плоскости ζ , при котором участок, на котором задано сложное граничное условие переходит в диаметр полукруга. После этого, в соответствии с методом, при решении

рассматривается функция $\omega(\zeta)$. То есть, мы видоизменяем искомую функцию. При этом на радиусах на осях она будет либо только мнимой, либо только действительной. Это важно, так как мы можем использовать принцип симметрии. Основываясь на принципе симметрии осуществляем аналитическое продолжение функции на полный круг. Сходящийся внутри данного круга степенной ряд может быть применен для поиска функции, аналитической в круге. Поскольку для возможности разложения функции в степенной ряд необходимо, чтобы она была непрерывна на границе, предварительно выделяются главные особенности искомой функции (полюса и т. п.).

Рассматриваемый метод заключается в представлении решения в виде суммы известной функции, содержащей особенности рассматриваемой задачи, и неизвестной функции без особенностей, которая записывается в виде ряда [9]. Первая функция отвечает за скачки угла на границе. Она также учитывает значения в бесконечно удаленных точках. С её помощью можно найти решение, но оно является грубым приближением, а вторая, которая представляется в виде степенного ряда, несет в себе функцию видоизменения, в некотором смысле, граничных значений. Удовлетворение краевого условия позволяет улучшить грубое приближение. Но необходимо поставить следующие требования. Краевое условие ни в каких точках границы не должно вести к разрыву производных, а это значит, что вторая функция должна быть достаточно гладкой. В этом случае описанный метод будет применяться эффективно.

Полученное численное решение не требует сохранения слишком большого количества членов этого ряда, так как этот степенной ряд быстро сходится. Данный подход позволяет сократить объем вычислений, так как уменьшается размерность решаемых систем уравнений. Следует отметить, что рассмотренные рассуждения не распространяются на задачи с краевыми условиями другого характера, которые могут быть таковыми, что в некоторой/некоторых точках границы вторая функция может не быть гладкой. В этом случае применяется подход, заключающийся в видоизменении описываемого метода, при котором

особенности решения будут учтены более тонко в виде дополнительных слагаемых искомой функции [81].

1.3 Задача о периодических волнах. Солитон

Рассмотрим задачу о периодических волнах на поверхности весомой жидкости конечной глубины. Данная задача представляет большой интерес для исследователей в связи с многочисленными техническими приложениями и теоретическим знанием.

Будем рассматривать плоское стационарное течение идеальной невязкой жидкости со свободными границами. Используя эти допущения, можно, базируясь на краевых задачах, в которых есть свободные границы, для аналитических функций комплексного переменного [9, 50, 55] на основе теории струй идеальной жидкости строить математические модели различных течений.

Задача о течении весомой жидкости вдоль плоского дна решена в [10, 52, 81, 93]. Решение описывает гравитационные волны конечной глубины и определяется двумя геометрическими параметрами: отношениями высоты гребешка H к высоте впадины h – $H'=H/h$ и величины периода T к высоте впадины – $T'=T/h$. Этими двумя отношениями, взятыми в определенных диапазонах ($0 \leq T' \leq \infty, 1 \leq H' \leq H^*(T')$), полностью определяется форма волны и поле скоростей течения жидкости. Особый интерес представляют предельные случаи решений $H=H^*$ (максимальное значение параметра $H=H^*$ соответствует волне Стокса – волне с изломом свободной поверхности) и $T' \rightarrow \infty$. Последний случай описывает переход от периодических решений к решению типа уединенной волны (солитона).

Случай $T'=\infty, H'=H^*(\infty)$ (уединенная волна Стокса) подробно исследован во многих работах [10, 59, 81, 85, 86, 89, 91, 92, 93, 98]. В табл. 1.2.1, 1.2.2 приведены численные результаты, полученные этими авторами. Поэтому на первом этапе для изучения влияния учета различных особенностей задачи на скорость сходимости алгоритмов имеет смысл рассмотреть именно этот случай.

Таблица 1.3.1. Значения числа Фруда, полученные разными авторами ранее

$Fr=1.286$ (5)	Longuet-Higgins M.S., Fenton J.D. Proc. R. S. London. 1974.
$Fr=1.2867$ (42)	Гузевский Л.Г. Межвуз сб. ЧувГУ. 1982.
$Fr=1.2909$	Fox M.J.H. Ph.D. thesis. Cambridge univ. 1977.
$Fr=1.290906$ (15)	Hunter J.K., Vanden-Broek J.-M. J.F.M. 1983.
$Fr=1.290889$ (1)	Williams J.M. Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1981.
$Fr=1.29089053$ (7)	Evans W.A.B., Ford M.J. Proc. R. Soc. London 1996.
$Fr=1.290890455$	Шерыхалина Н.М. ВИНТИИ. №2550-В95-деп. 1995
$Fr=1.2908904558$	Maklakov D.V. Euro. Journ. of Applied Mathematics. V. 13, 2002.
$Fr=1.29089045586$	Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Физика волновых процессов, № 2-3, 1998.
$Fr=1.2908904558634$	Sherykhalina N.M., Zhitnikov V.P. Computational Fluid Dynamics Journ. V. 10, N 3, 2001.
$Fr=1.29089045586335$	Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Уфа: Гилем. 2009.

Таблица 1.3.2. Значения параметров солитона, полученные разными авторами

	Longuet-Higgins & Fenton (1974)	Fox (1977)	Williams (1981) computed	Williams (1981) extrapolated	Evans & Ford (1996)
Fr	1.286 (-5)	1.2909	1.290891	1.290889 (-1)	1.29089053 (7)
амплит.	0.827 (-6)	0.8332	0.833200	0.833197 (-2)	0.833199179 (94)
масса	1.897 (-73)	1.968 (-2)	1.970323 (2)	1.970319 (-2)	1.97032019 (-47)
импульс	2.440 (-103)	2.540 (-3)	2.543474 (6)	2.543463 (-5)	2.54346767 (-47)
циркул.	1.653 (-62)	1.713 (-2)	1.714569	1.714571 (2)	1.71456873 (-51)
кинет.эн.	0.5052 (-298)	0.5339 (-11)	0.535012 (3)	0.535005 (-4)	0.535008913 (77)
пот. эн.	0.413 (-25)	0.4369 (-8)	0.437675 (2)	0.437670 (-3)	0.437672702 (9)

В 1983 году П.И. Плотников строго доказал гипотезу Стокса о том, что предельным решением при увеличении амплитуды волны является конфигурация с углом при вершине волны равным 120° [64]. Также П.И. Плотников строго доказал, что решение задачи о солитоне не единственно. Имеется в виду, что при приближении высоты солитона к предельной число Фруда может принимать одно и то же значение несколько раз, при критической высоте – бесконечное число раз.

Задача о солитоне Стокса

Рассмотрим задачу об уединенной волне Стокса. Как видно из табл. 1.3.1, 1.3.2, разными научными школами были представлены численные результаты по параметрам солитона Стокса. Это позволяет использовать их в сравнении. В случае, если погрешность была больше, чем единица последнего приведенного разряда, то она указывалась в скобках.

Ошибка уровня единицы последнего приведенного разряда обычно представлена авторами как оценка погрешности. Ошибки в оценке погрешности у разных авторов варьируются в очень широком диапазоне, встречаются даже ошибки в 10 – 100 раз. Такое заключение можно сделать, если сравнить у разных авторов значения одинаковых величин.

Заметим, что Williams [99] для уточнения результатов вычисления применял линейную экстраполяцию зависимостей параметров от невязки по краевому условию. Из табл. 1.3.2 видно, что такая экстраполяция не приводит к уточнению результатов. Однако разность вычисленного и экстраполированного значений могла бы быть использована для оценки погрешности.

Поэтому в настоящее время реально оценить погрешность опубликованного результата можно только тогда, когда появляется более точный результат. Однако, как следует из табл. 1.3.1, хронология получения более точных результатов может нарушаться. Тем самым, проблема обоснования полученных оценок погрешности остается актуальной и при таком способе верификации.

В связи с этим в данной работе предлагается методика, с помощью которой, во-первых, можно определить диапазон, в котором можно доверять оценкам, полученным по правилам Рунге, Ромберга и т.п. Во-вторых, требуется оценить максимальную точность, которая может быть достигнута при анализе результатов конкретного вычислительного эксперимента, и при этом обеспечить физическую достоверность получаемых оценок. Физическая достоверность может быть достигнута путем получения приближенного значения искомого параметра (называемого ниже эталоном), получения и независимого обоснования оценки его погрешности (интервала неопределенности) и проверки факта пересечения интервалов, полученных разными способами.

В [91] были опубликованы результаты решения этой задачи (см. табл. 1.3.3) видоизмененным методом Леви-Чивиты с учетом особенностей решения в точке излома свободной поверхности и на бесконечности. Для уточнения и

оценки погрешности была применена формула фильтрации типа Эйткена с использованием метода наименьших квадратов [91].

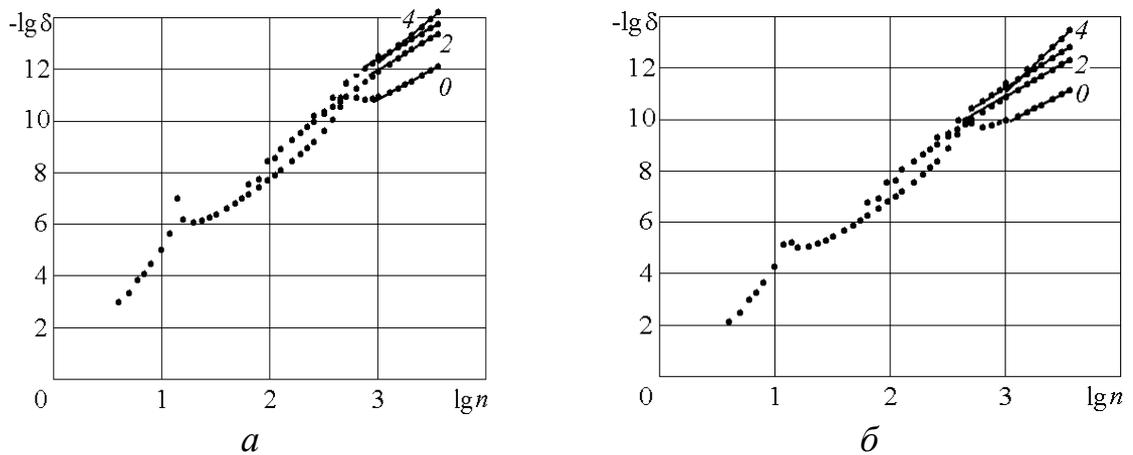


Рис. 1.3.1. Задача о солитоне Стокса. Результаты фильтрации:
 a – числа Фруда; b – потенциальной энергии

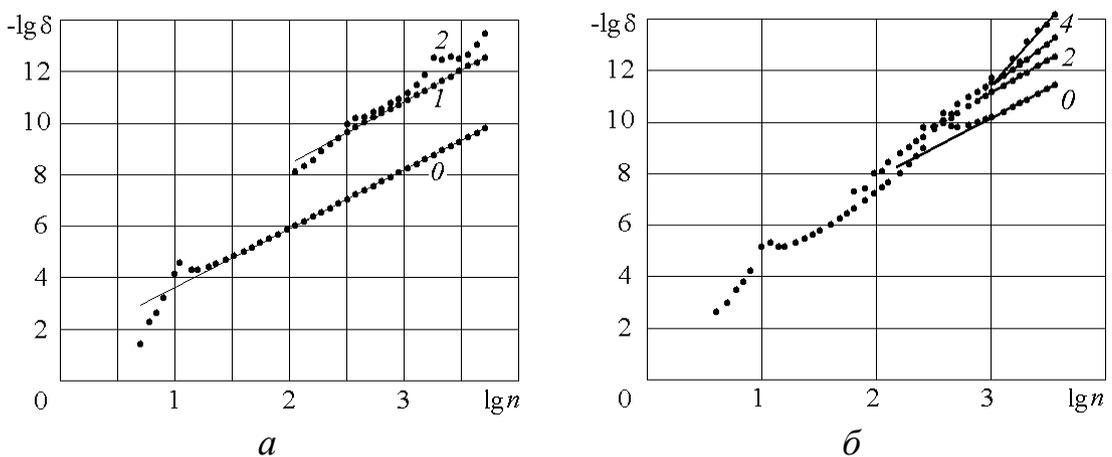


Рис. 1.3.2. Задача о солитоне Стокса. Результаты фильтрации:
 a – циркуляции; b – массы

Полученные оценки, согласно рис. 1.3.1, 1.3.2 дали возможность декларировать точность до 13 знака по числу Fr и до двух-трех единиц 13 разряда по остальным параметрам (табл. 1.3.3, колонка 3).

Таблица 1.3.3. Результаты, полученные видоизмененным методом Леви-Чивиты

	Шерыхалина & Житников (2001) вычисленные	Шерыхалина & Житников (2001) отфильтрованные
Fr	1.290890455863	1.2908904558634
амплит.	0.833199084519	0.8331990845196
Масса	1.9703206602	1.9703206601317 (-2)
Импульс	2.5434681352	2.5434681351545
циркул.	1.7145692406	1.7145692405337 (2)
кинет.эн.	0.5350088360	0.5350088359709
пот. эн.	0.43767269344	0.4376726934439

В последствии значение числа Fr было уточнено до 14 знаков и значение массы до одной единицы 13 разряда [10]. В данной работе (глава 2) для решения данной задачи был использован интеграл Шварца с интегральным условием (уравнение Бернулли) на границе [100]. Этим подтвердились оценки параметров, полученные в [91] и [10].

1.4 Обтекание кругового цилиндра. Кавитация.

Кавитация – это появление в жидкости областей, заполненных парами или газами, выделившимися из жидкости.

Пусть контур ACB обтекается неограниченным потоком жидкости. Обтекание происходит с отрывом струй. Поток раздваивается в точке C (рис. 1.4.1.)

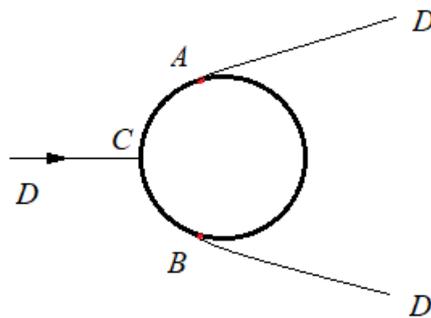


Рис. 1.4.1. Обтекание кругового цилиндра. Физическая плоскость

Вектор скорости в бесконечности направлен вдоль горизонтальной оси. Скорость в точке C равна нулю. Пусть давление в жидкости не превосходит некоторый предел p_0 . Если в некоторой занятой жидкостью области давление упадет ниже данного предела, то произойдет разрыв сплошности течения. Так образуется каверна (область, заполненная парами жидкости или газами), то есть, возникает кавитация.

Пусть на тело набегают поток со скоростью V_∞ в бесконечности. Режим обтекания будет зависеть от безразмерного числа

$$K = \frac{2(p_\infty - p_0)}{\rho V_\infty^2} = \frac{V_0^2}{V_\infty^2} - 1, \quad (1.4.1)$$

где $V_0 = \text{const}$ - скорость на поверхности струй, ограничивающих каверну, p_0 - давление в каверне, p_∞ - давление в набегающем потоке. Число K называется числом кавитации.

В монографии М.И. Гуревича [9] решается задача, в которой описано кавитационное обтекание кругового цилиндра, и схема Тулина – Терентьева применяется для ее решения. Решение, не привязанное к геометрическим соотношениям конструкции, рассмотрено в [8]. Здесь давление внутри оболочки приравнивается поточной константе Бернулли. Представлено решение для вытекания струи из канала с гибким ограждением. Многие работы А.Г. Терентьева посвящены кавитации. Так, например, схема Кирхгофа рассматривается в работе [21] для исследования решения задачи кавитационного обтекания оболочки. В данной работе описан полубесконечный поток. Постановка несимметричная.

Для подробного исследования поведения параметров течения используется подход, базирующийся на фильтрации численных результатов [31, 32, 100]. Детально изучается, является ли кривизна на поверхности потока в точке отрыва конечной, а именно, проводится изучение параметров потока при смещении точки отрыва потока относительно положения гладкого отрыва по условию Бриллюэна – Вилла.

М.И. Гуревич [9] выдвинул идею, что в зависимостях характерных для струи параметров появляются локальные экстремумы, если условие Бриллюэна – Вилла имеет место в задаче о кавитационном обтекании кругового цилиндра. Но, так как для полного анализа имеющейся в итоговых таблицах информации было недостаточно, и всех необходимых данных о вычислительном эксперименте не было, это предположение подвергалось сомнению. Более того, существовали ограничения точности расчетов. При расчетах точки экстремума число верных цифр обычно вдвое ниже по сравнению с рассчитанной величиной искомой зависимости. В связи с этим, в данной работе (глава 2) разработан численно-аналитический метод решения задачи кавитационного обтекания оболочечной

конструкции и проведена фильтрация численных результатов. Полученные с высокой точностью данные подтвердили наличие локальных экстремумов параметров обтекания.

1.5 Математическое моделирование процесса формообразования в электрохимии

Идея процесса электрохимической обработки (ЭХО), а также различные ее технические воплощения принадлежат советскому инженеру В. Н. Гусеву (1904-1956). В 1943г. на свет появился первый промышленный станок, реализующий процесс ЭХО.

В настоящее время существует множество технологических процессов ЭХО [45, 46, 47, 48, 68, 95]; их применяют при изготовлении деталей сложной конфигурации (штампов, пресс-форм и др.), для гравирования, сглаживания кромок, снятия заусенцев и т.п. Все эти процессы происходят благодаря явлению анодного растворения при электролизе.

Чтобы создать условия для процесса ЭХО, заготовку, которую необходимо обработать подключают к источнику постоянного тока. Электрод-инструмент (который выполняет роль обработчика) также подключают к источнику постоянного тока. Для замыкания электрической цепи в пространство между анодом и катодом под давлением подают электролит. В результате описанных манипуляций осуществляется процесс обработки заготовки, то есть, растворение поверхности анода.

Электролит на протяжении всего процесса размерной электрохимической обработки интенсивно обновляется. Для этого его прокачивают под давлением через пространство между электродами (катодом и анодом). За счет принудительного удаления электролита из рабочей зоны при формообразовании достигается эффект меньших величин межэлектродного промежутка, относительно процессов электрохимического травления и полирования.

Для достижения высоких эксплуатационных и технико-экономических характеристик необходимо разрабатывать новые технологические методы

обработки [37, 54]. Для этого нужно разрабатывать новые численно-аналитические методы, моделирующие данный процесс.

Поскольку стационарное электрическое поле в электролите обладает свойствами соленоидальности и потенциальности, математическое моделирование процесса проводится на основе уравнения Лапласа.

Для решения двумерных задач для уравнения Лапласа применяется либо метод граничных элементов [4, 51, 53, 90, 96], либо методы теории функций комплексного переменного (ТФКП) [44, 49, 60, 61, 70, 75, 76, 88]. При применении ТФКП возможно получение аналитических решений или применение простых численных методов для решения задач. В данной работе для решения задач применяются оба метода.

Основополагающим в моделировании электрохимической обработки является закон Фарадея. При этом формула

$$V_{есm} = k\eta \frac{j}{\kappa}, \quad k = \kappa\varepsilon/\rho \quad (1.5.1)$$

применяется для вычисления скорости электрохимического растворения.

Использованные условные обозначения приведены в таблице 1.5.1.

Таблица 1.5.1. Условные обозначения

κ	электропроводность электролита
ε	электрохимический эквивалент
ρ	плотность материала
j	плотность тока на границе обрабатываемой поверхности
$\eta = \eta(j)$	выход по току

Рассматривается электрическое поле. По закону Ома, его напряженность равна $E = \kappa j$.

Наиболее точное копирование формы электрода-инструмента (ЭИ), в данном случае катода, происходит в МЭП (межэлектродном пространстве)

тогда, когда процесс локализуется пропорционально относительной разности $|\Delta V_{ecm}|/V_{ecm}$ скоростей на различных участках.

В третьей главе рассматривается задача, в которой ступенчатая функция [12, 13] используется для нахождения зависимости выхода по току от плотности тока

$$\eta(j) = \begin{cases} \eta_0, & j > j_1, \\ \forall \eta \in [0, \eta_0], & j = j_1, \\ 0, & j < j_1. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

Во всех точках анода, в которых материал растворяется, $j = j_1$, а η варьируется от η_0 до нуля или почти до нуля, возникает режим так называемой предельной квазистационарной обработки.

Рассмотрим задачу (стационарную) об электрохимическом растворении. Имеет место плоский электрод-инструмент $A'CB'$. Его движение направлено вертикально вниз, скорость движения равна V_{et} . Анод представляет собой поверхность ADB , как показано на рис. 1.5.1, а. Форма поверхности анода становится стационарной.

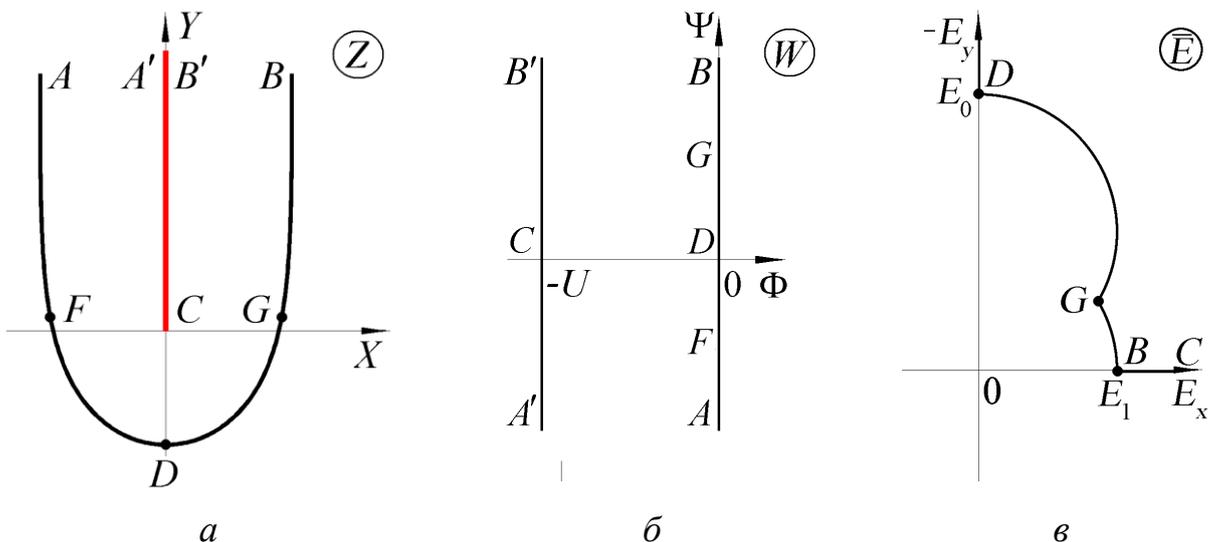


Рис. 1.5.1. Пространство между электродами: a – физической; $б$ – комплексного потенциала; $в$ – годографа напряженности

Вертикальная полоса является образом области пространства между электродами на плоскости комплексного потенциала (рис. 1.5.1, б).

Если в качестве функции выхода по току используем выражение (1.5.2), то для вычисления скорости применим закон Фарадея.

Близость к ЭИ приводит к тому, что в этой зоне напряженность будет больше, чем E_1 . Если обозначить через E_0 напряженность в точке D , (согласно [62], $E_0 = V_{et}/(k\eta_0)$), то участок FDG отображается на дугу окружности с центром в точке $iE_0/2$ и радиусом равным $E_0/2$ на плоскости годографа напряженности $\bar{E} = dW/dZ$, как показано на рис. 1.5.1. Для этой зоны выполняется условие стационарности [41].

Зона GB имеет другой тип граничных условий. В ней, а также в симметричной GB зоне AF , напряженность является постоянной величиной и определяется как $|\bar{E}| = E_1$. Эта граница отображается на часть дуги окружности с центром в начале координат плоскости $|\bar{E}|$. Радиус окружности равен $E_1 \leq E_0$.

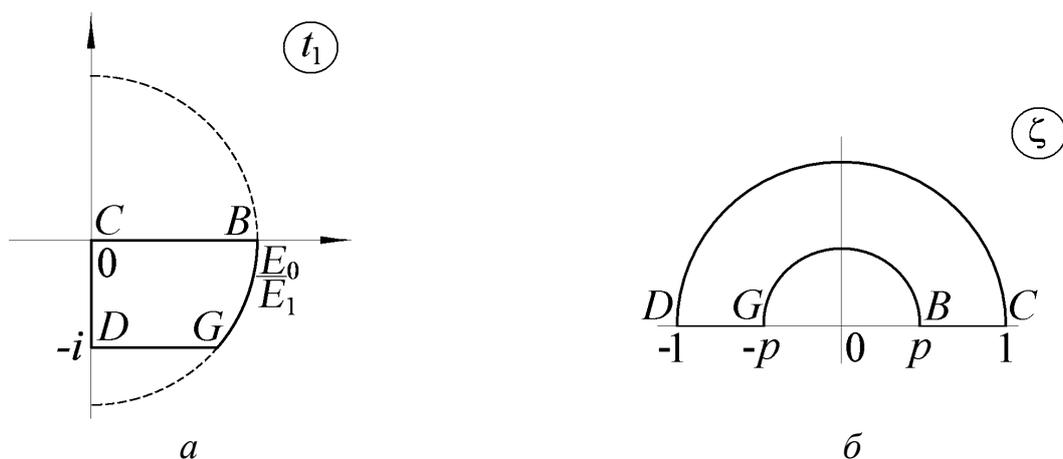


Рис. 1.5.2. Параметрические плоскости

Вводятся промежуточные параметрические плоскости $t_1 = E_0/\bar{E}$ и ζ (рис. 1.5.2, а, б),

$$t_1 = -\frac{1}{\pi} \ln \zeta + \sum_{m=1}^{\infty} d_m (\zeta^m - \zeta^{-m}). \quad (1.5.3)$$

Для учета свойств решения используются известные функции с заданными особенностями.

Для нахождения зависимости $W(\zeta)$ используем формулу

$$W = W_0 + i \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\zeta^m - \zeta^{-m}), \text{ где } W_0 = \frac{2iU}{\pi} \ln \left[\frac{p\zeta - 1}{\zeta - p} (-i\sqrt{\zeta}) \right].$$

Для $\zeta = pe^{i\sigma}$

$$W_0 = \frac{2iU}{\pi} \ln \left[\frac{1 - p^2 e^{i\sigma}}{pe^{i\sigma} - p} (-i\sqrt{pe^{i\sigma/2}}) \right] = \frac{2iU}{\pi} \left[\ln(1 - p^2 e^{i\sigma}) - \ln \left(2\sqrt{p} \sin \frac{\sigma}{2} \right) \right].$$

Должно выполняться условие $\operatorname{Re}[W(pe^{i\sigma})] = 0$, т.е.

$$\operatorname{Im} \left[\frac{2U}{\pi} \ln(1 - p^2 e^{i\sigma}) + \sum_{m=1}^{\infty} c_m (p^m e^{im\sigma} - p^{-im\sigma}) \right] = 0.$$

Разложим $\ln(1 - p^2 e^{i\sigma})$ в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} & -\frac{2U}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} p^{2m} e^{im\sigma} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m (p^m e^{im\sigma} - p^{-m} e^{-im\sigma}) = \\ & = -\frac{2U}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} p^{2m} \cos m\sigma - i \frac{2U}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} p^{2m} \sin m\sigma + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos m\sigma (p^m - p^{-m}) + \\ & \quad + i \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin m\sigma (p^m + p^{-m}). \end{aligned}$$

Приравниваем мнимую часть к 0 и выражаем c_m

$$c_m = \frac{2U}{\pi} \frac{1}{m} \frac{p^{2m}}{(p^m + p^{-m})}.$$

Тем самым $W = \frac{2iU}{\pi} \left(\ln \left(\frac{1 - p\zeta}{\zeta - p} i\sqrt{\zeta} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{p^{2m}}{p^m + p^{-m}} (\zeta^m - \zeta^{-m}) \right).$

Найдем производные $dW/d\zeta$ и dZ/dW

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{2iU}{\pi} \left(\frac{-p}{1 - p\zeta} + \frac{1}{2\zeta} - \frac{1}{\zeta - p} + \frac{1}{\zeta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^{2m}}{p^m + p^{-m}} (\zeta^m + \zeta^{-m}) \right), \quad \frac{dZ}{dW} = \frac{1}{E} = \frac{t_1}{E_0}.$$

Тогда $Z(\zeta) = \int_1^{\zeta} \frac{t_1}{E_0} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta = \frac{1}{E_0} \int_1^{\zeta} \left(-\frac{1}{\pi} \ln \zeta + \sum_{m=1}^{\infty} d_m (\zeta^m - \zeta^{-m}) \right) \frac{dW}{d\zeta} d\zeta. \quad (1.5.4)$

Таким образом, чтобы решить задачу, нужно определить коэффициенты ряда Лорана d_m . Это можно сделать при помощи метода коллокаций по условию $|t_1(pe^{i\sigma})| = \alpha$ при $0 \leq \sigma \leq \pi$. Для определения (расчета) формы поверхности нужно численно проинтегрировать (1.5.4).

При $\alpha \rightarrow \infty$ вся обрабатываемая поверхность является зоной стационарного формообразования. Решение в этом случае записывается в виде

$$Z = -\frac{i}{E_0} \frac{(W+U)^2}{2U}.$$

Решение предельно-стационарного типа устанавливается при $\alpha \rightarrow 1$. В этом случае, вся обрабатываемая поверхность становится областью предельного формообразования $|\bar{E}| = E_1$.

Ещё раз отметим, что при предельно-стационарном режиме на всей обрабатываемой поверхности плотность тока равна предельному значению. Этим предельно-стационарный режим отличается от обычного стационарного [40, 41].

Глава 2. Разработка модификаций численно-аналитических методов и уточнение решений гидродинамических задач

2.1 Задача об уединенной волне Стокса на поверхности весомой жидкости

В задаче об уединенной волне Стокса существует ряд важных параметров. Ими являются число Фруда, ее амплитуда и многие другие. В судостроении большое значение имеет число Фруда. Оно используется в качестве критерия для сравнения условий волнообразования для судов разного размера.

Постановка задачи

Рассматривается решение типа уединенной волны, при котором ее амплитуда имеет максимальное значение. Будем считать жидкость идеальной. Пусть ADC - горизонтальная прямолинейная стенка, и течение потока происходит, как показано на рис. 2.1.1, *a*. На свободной поверхности потока ABC образуется излом. Волне Стокса соответствует внутренний угол излома, который равен $2\pi/3$. При этом действие силы тяжести направлено вертикально вниз. Волной Стокса можно описывать, например, цунами. Обозначим через V_∞ скорость течения жидкости на бесконечности, и пусть толщина струи в бесконечно удаленных точках A и C будет равна h . На ABC давление P равно атмосферному давлению P_0 .

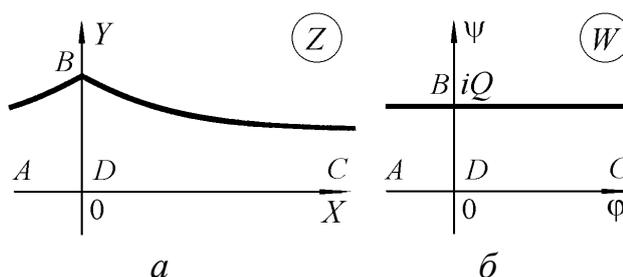


Рис. 2.1.1. Формы области, соответствующей течению на плоскостях:
a – физической; *б* – комплексного потенциала

Изначально форма свободной поверхности струи нам неизвестна. Привяжем к рассматриваемому потоку систему координат так, чтобы нижняя граница ADC совпадала с осью X . Пусть точка излома B свободной поверхности располагается на вертикальной оси. Ось OY направлена вертикально вверх.

Уравнение Бернулли при $P=P_0$ используется для связи ординаты точки Y и значения модуля вектора скорости потока V на свободной границе $A'BC$. Если обозначить через Fr число Фруда и через g – ускорение свободного падения, то данное уравнение можно записать как'

$$\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 + \frac{2Y}{Fr^2 h} = const, \quad Fr = \frac{V_\infty}{\sqrt{gh}}. \quad (2.1.1)$$

Часто при решении задач через конформные отображения вводится вспомогательная плоскость параметрического переменного. На нее отображаются области, соответствующие течению на физической плоскости, затем, эта плоскость связывается конформным отображением с плоскостью комплексного потенциала. Пусть χ - плоскость параметрической переменной. Будет удобнее решать задачу, если свободная поверхность отобразится на действительную ось $\chi=\sigma+i0$, а областью, соответствующей потоку на физической плоскости, будет полоса $\chi=\sigma+iv$ с шириной, равной одному (рис. 2.1.2, б). Найдем, в связи с принятыми допущениями, аналитические функции комплексного переменного $Z(\chi)$ и $W(\chi)$. Используем общепринятые обозначения: $Z = X + iY$, X и Y - координаты в декартовой системе, W - функция комплексного потенциала.

На рис. 2.1.1, б представлена плоскость комплексного потенциала W . На ней областью потока также является полоса. Функцию $W(\chi)$ запишем следующим образом

$$W(\chi) = \varphi + i\psi = Qw(\chi) = -Q\chi + Q, \quad (2.1.2)$$

где $Q = hV_\infty$ – поточный расход жидкости.

Обезразмерим $z=Z/h$. Обозначим через V модуль вектора скорости и через θ – угол, под которым вектор скорости наклонен к оси OX . Функцию Жуковского

$$\omega = i \ln \frac{dw}{dz} = \theta + i\tau, \quad (2.1.3)$$

которая представляет собой плоскость логарифмического годографа скорости, целесообразно рассмотреть для нашего решения задачи.

Таким образом, $\frac{dw}{dz} = \frac{V}{V_\infty} e^{-i\theta}$ – значение, комплексно сопряженное

безразмерной скорости, $\tau = \ln(V/V_\infty)$.

В данной задаче следующие условия выполняются для функция $\omega(\chi)$:

1) уравнение Бернулли (2.1.1) приводит в соответствие действительную и мнимую части $\omega(\chi)$ для $\text{Im}\chi=0$;

2) действительная часть $\text{Re}\omega(\chi) = \theta = 0$ для $\text{Re}\chi=0$, $0 < \text{Im}\chi \leq 1$; (2.1.4)

3) действительная часть $\text{Re}\omega(\chi) = 0$ для $\text{Im}\chi = 1$; (2.1.5)

4) действительная часть $\text{Re}\omega(\chi) \rightarrow \pm \frac{\pi}{6}$ для $\chi = \sigma + i0$, $\sigma \rightarrow \pm\infty$,

5) $\omega(\chi) \rightarrow 0$ при $\chi \rightarrow \infty$.

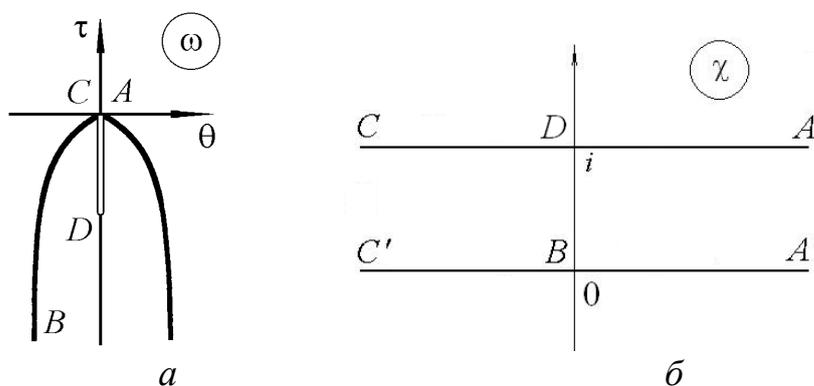


Рис. 2.1.2. Границы областей потока на плоскостях:
a – логарифмического годографа скорости;
б – параметрического переменного χ

Численно-аналитический метод решения с условием (2.1.1)

Пусть

$$\omega(\chi) = \omega_1(\chi) + \omega_2(\chi). \quad (2.1.6)$$

где $\omega_2(\chi)$ – функция, удовлетворяющая условиям 2, 3, 4, 5.

Функция $\omega_1(\chi)$ на границе течения будет непрерывной, так как при $\chi \rightarrow 0$ $\omega_1(\chi) \rightarrow 0 + i\tau_1(0)$. Для решения на границе $\chi = \sigma$ зададим узловые точки σ_m ($m=0, \dots, n$). В этих точках $\operatorname{Re} \omega_1(\sigma_m) = \theta_m$ для $\sigma = \sigma_n$, в связи с тем, что уменьшение функции $\omega_1(\sigma)$ происходит с экспоненциальной скоростью. При $\sigma \rightarrow \pm\infty$ запишем $\operatorname{Re} \omega_1(\sigma_n) = 0$. Здесь $\theta_0 = 0$, так как $\operatorname{Re} \omega_2(0+0) = \pi/6$. Кубический сплайн, две производные которого являются непрерывными зависимостями, будет использован для поиска величин $\operatorname{Re} \omega_1(\sigma)$ в точках, которые располагаются между заданными узловыми точками.

Поскольку $\operatorname{Re} \omega_1(\sigma + i) = 0$ и зависимость $\operatorname{Re} \omega_1(\sigma + i0)$ является нечетной функцией σ , то формулу Шварца

$$\omega_1(\chi) = -i \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \omega_1(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \chi} d\sigma,$$

возьмем, чтобы восстановить зависимость $z_1(\chi)$. Если $\chi \rightarrow \sigma_m + i0$, и через *v.p.* обозначить главное значение интеграла, то по формуле Сохоцкого

$$\omega_1(\sigma_m) = -i \cdot v.p. \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \omega_1(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \sigma_m} d\sigma + \operatorname{Re} \omega_1(\sigma_m),$$

$$v.p. \int_0^{\infty} \frac{\gamma(\sigma)}{\mu(\sigma) - \mu(\sigma_m)} d\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{\sigma_m - \varepsilon} \frac{\gamma(\sigma)}{\mu(\sigma) - \mu(\sigma_m)} d\sigma + \int_{\sigma_m + \varepsilon}^{\infty} \frac{\gamma(\sigma)}{\mu(\sigma) - \mu(\sigma_m)} d\sigma \right].$$

При $0 \leq m < n$ вычисление главного значения интеграла практически производится по формуле [66]

$$v.p. \int_0^{\sigma_n} \operatorname{Re} \omega_1(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \sigma_m} d\sigma =$$

$$= \int_0^{\sigma_n} \frac{\operatorname{Re} \omega_1(\sigma) \operatorname{sh} \pi \sigma - \operatorname{Re} \omega_1(\sigma_m) \operatorname{sh} \pi \sigma_m}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \sigma_m} d\sigma - \operatorname{Re} \omega_1(\sigma_m) \sigma_m +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \omega_1(\sigma_m) \ln \frac{e^{\pi\sigma_n} - e^{\pi\sigma_m}}{e^{\pi\sigma_n} - e^{-\pi\sigma_m}}. \quad (2.1.7)$$

Численное интегрирование производится методом Гаусса.

Слагаемое $\omega_2(\zeta)$ введено для учета особенности решения в точке $\chi = 0$ (рис. 2.1.2).

Уравнение (2.1.1) запишем в форме

$$e^{3\tau} \frac{d\tau}{d\sigma} - \frac{1}{Fr^2} \sin\theta = 0. \quad (2.1.8)$$

Функцию $\omega_2(\chi)$ представим в виде

$$\begin{aligned} \omega_2(\chi) &= \frac{i}{3} \ln f(\chi) + iC_1 [(f(\chi))^\beta - 1] = \\ &= \frac{i}{3} \ln \frac{1 - e^{-\pi\chi}}{(1 + ie^{-\pi\chi/2})^2} + iC_1 \left(\frac{1 - e^{-\pi\chi}}{(1 + ie^{-\pi\chi/2})^2} \right)^\beta - iC_1. \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Для этого в точке $\chi = 0$ найдем зависимость

$$f(\chi) = \frac{1 - e^{-\pi\chi}}{(1 + ie^{-\pi\chi/2})^2}.$$

Она необходима для выделения особенности. Если $\operatorname{Re}\chi \rightarrow +\infty$, эта функция будет стремиться к единице, если $\chi \rightarrow 0$ будет стремиться к нулю. Для $\chi = \sigma + i$ и для $\chi = 0 + i\nu$ ($0 \leq \nu \leq 1$) функция положительна и имеет действительные значения.

Функция (2.1.9) удовлетворяет условию (2.1.4) на AD , (2.1.5) DB и уравнению (2.1.8) при $\chi \rightarrow 0$, как показано ниже.

Тогда

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\sigma} \frac{i}{3} \left[\ln(1 - e^{-\pi\sigma}) - 2 \ln(1 + ie^{-\pi\sigma/2}) \right] &= \frac{i}{3} \left[\frac{\pi e^{-\pi\sigma}}{1 - e^{-\pi\sigma}} - 2 \frac{-i \frac{\pi}{2} e^{-\pi\sigma/2}}{1 + ie^{-\pi\sigma/2}} \right] = \\
&= \frac{i}{3} \pi e^{-\pi\sigma/2} \left[\frac{e^{-\pi\sigma/2}}{1 - e^{-\pi\sigma}} + \frac{i(1 - ie^{-\pi\sigma/2})}{1 + e^{-\pi\sigma}} \right] = \frac{i}{3} \pi e^{-\pi\sigma/2} \frac{e^{-\pi\sigma/2}(1 + e^{-\pi\sigma}) + i(1 - ie^{-\pi\sigma/2})(1 - e^{-\pi\sigma})}{(1 - e^{-\pi\sigma})(1 + e^{-\pi\sigma})} = \\
&= \frac{i}{3} \pi e^{-\pi\sigma/2} \frac{e^{-\pi\sigma/2} + e^{-\pi\sigma/2} e^{-\pi\sigma} + i(1 - e^{-\pi\sigma} - ie^{-\pi\sigma/2}(1 - e^{-\pi\sigma}))}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} = \\
&= \frac{i}{3} \pi e^{-\pi\sigma/2} \frac{e^{-\pi\sigma/2} + e^{-\pi\sigma/2} e^{-\pi\sigma} + i - ie^{-\pi\sigma} + e^{-\pi\sigma/2} - e^{-\pi\sigma/2} e^{-\pi\sigma}}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} = \\
&= \frac{i}{3} \pi e^{-\pi\sigma/2} \frac{e^{-\pi\sigma/2} + i - ie^{-\pi\sigma} + e^{-\pi\sigma/2}}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} = \frac{1}{3} \pi e^{-\pi\sigma/2} \frac{ie^{-\pi\sigma/2} - 1 + e^{-\pi\sigma} + ie^{-\pi\sigma/2}}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} = \\
&= \frac{1}{3} \pi e^{-\pi\sigma/2} \frac{-1 + e^{-\pi\sigma} + 2ie^{-\pi\sigma/2}}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} = -\frac{\pi}{3} e^{-\pi\sigma/2} \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} + i \frac{2\pi}{3} \frac{e^{-\pi\sigma}}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} = \\
&= -\frac{\pi}{3} \frac{e^{-\pi\sigma/2}}{(1 + e^{-\pi\sigma})} + i \frac{2\pi}{3} \frac{e^{-\pi\sigma}}{(1 - e^{-2\pi\sigma})} = -\frac{\pi}{6} \frac{2}{e^{\pi\sigma/2} + e^{-\pi\sigma/2}} + i \frac{\pi}{3} \frac{2}{e^{\pi\sigma} - e^{-\pi\sigma}} = \\
&= -\frac{\pi}{6} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi\sigma}{2}} + i \frac{\pi}{3} \frac{1}{\operatorname{sh} \pi\sigma},
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\chi} \omega_2(\chi) = -\frac{\pi}{6} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi\chi}{2}} + i \frac{\pi}{3} \frac{1}{\operatorname{sh} \pi\chi} + i\beta C_1 \left(\frac{1 - e^{-\pi\chi}}{(1 + ie^{-\pi\chi/2})^2} \right)^{\beta-1} \pi e^{-\pi\chi/2} \frac{e^{-\pi\chi/2} + i}{(1 + ie^{-\pi\chi/2})^3}.$$

При $\chi = \sigma + i0$, $\sigma \rightarrow 0$ можно записать $f(\sigma + i0) = \frac{\pi\sigma}{2i} + O(\sigma^2)$,

$$\omega_2(\sigma + i0) = \frac{i}{3} \ln \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{(1 + ie^{-\pi\sigma/2})^2} + iC_1 \left(\frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{(1 + ie^{-\pi\sigma/2})^2} \right)^\beta - iC_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{3} \ln(1 - e^{-\pi\sigma}) - 2 \frac{i}{3} \ln(1 + ie^{-\pi\sigma/2}) + iC_1 \left(\frac{(1 - e^{-\pi\sigma})(1 - ie^{-\pi\sigma/2})^2}{(1 + e^{-\pi\sigma})^2} \right)^\beta - iC_1 = \\
&= \frac{i}{3} \ln(1 - e^{-\pi\sigma}) - \frac{i}{3} \ln(1 + e^{-\pi\sigma}) - 2 \frac{i}{3} i \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2} + iC_1 \frac{(1 - e^{-\pi\sigma})^\beta}{(1 + e^{-\pi\sigma})^{2\beta}} (1 - ie^{-\pi\sigma/2})^{2\beta} - iC_1 = \\
&= \frac{i}{3} \ln \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2} + iC_1 \frac{(1 - e^{-\pi\sigma})^\beta}{(1 + e^{-\pi\sigma})^{2\beta}} (1 + e^{-\pi\sigma})^\beta e^{-2i\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}} - iC_1 = \\
&= \frac{i}{3} \ln \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2} + \\
&+ iC_1 \left(\frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} \right)^\beta \left(\cos(2\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}) - i \sin(2\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}) \right) - iC_1 = \\
&= \frac{2}{3} \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2} + C_1 \left(\frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} \right)^\beta \sin(2\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}) + \\
&+ \frac{i}{3} \ln \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} + iC_1 \left(\frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} \right)^\beta \cos(2\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}) - iC_1 = \\
&= \theta_2(\sigma) + i\tau_2(\sigma). \\
\theta_2(\sigma) &= \frac{2}{3} \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2} + C_1 \left(\frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} \right)^\beta \sin(2\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}) = \\
&= \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{\pi\sigma}{2} + O(\sigma^2) \right) + C_1 \left(\frac{1 - 1 + \pi\sigma + O(\sigma^2)}{1 + 1 - \pi\sigma + O(\sigma^2)} \right)^\beta \sin \left(2\beta \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{\pi\sigma}{2} + O(\sigma^2) \right) \right) = \\
&= \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sigma}{4} + O(x^2) \right) + C_1 \left(\frac{\pi\sigma + O(\sigma^2)}{2 - \pi\sigma + O(\sigma^2)} \right)^\beta \sin \left(2\beta \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sigma}{4} + O(\sigma^2) \right) \right) = \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi\sigma}{6} + O(\sigma^2) + C_1 \frac{\pi\sigma}{2} \left(\frac{1 + O(\sigma)}{1 + O(\sigma)} \right)^\beta \sin \left(\frac{\pi}{2} \beta + \beta\sigma + O(\sigma^2) \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi\sigma}{6} + O(\sigma^2) + C_1 \left(\frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta (1 + O(\sigma)) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\beta \right) + O(\sigma) \right) = \\
&= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi\sigma}{6} + C_1 \sin\left(\frac{\pi\beta}{2} \right) \left(\frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{3\tau_2(\sigma)} &= \exp \left[\ln \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} + 3C_1 \left(\frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} \right)^\beta \cos(2\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}) - 3C_1 \right] = \\
&= \frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} \exp \left[3C_1 \left(\frac{1 - e^{-\pi\sigma}}{1 + e^{-\pi\sigma}} \right)^\beta \cos(2\beta \operatorname{arctg} e^{-\pi\sigma/2}) - 3C_1 \right] = \\
&= e^{-3C_1} \frac{1 - 1 + \pi\sigma + O(\sigma^2)}{1 + 1 - \pi\sigma + O(\sigma^2)} \exp \left[3C_1 \left(\frac{1 - 1 + \pi\sigma + O(\sigma^2)}{1 + 1 - \pi\sigma + O(\sigma^2)} \right)^\beta \cos\left(2\beta \operatorname{arctg} \left(1 - \frac{\pi\sigma}{2} + O(\sigma^2) \right) \right) \right] = \\
&= e^{-3C_1} \frac{\pi\sigma + O(\sigma^2)}{2 - \pi\sigma + O(\sigma^2)} \exp \left[3C_1 \left(\frac{\pi\sigma + O(\sigma^2)}{2 - \pi\sigma + O(\sigma^2)} \right)^\beta \cos\left(2\beta \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi\sigma}{4} + O(\sigma^2) \right) \right) \right] = \\
&= e^{-3C_1} \frac{\pi\sigma}{2} \frac{1 + O(\sigma)}{1 + O(\sigma)} \exp \left[3C_1 \left(\frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta \left(\frac{1 + O(\sigma)}{1 + O(\sigma)} \right)^\beta \cos\left(\frac{\pi\beta}{2} - \frac{\pi\beta\sigma}{2} + O(\sigma^2) \right) \right] = \\
&= e^{-3C_1} \frac{\pi\sigma}{2} (1 + O(\sigma)) \exp \left[3C_1 \cos\left(\frac{\pi\beta}{2} \right) \left(\frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}) \right] = \\
&= e^{-3C_1} \frac{\pi\sigma}{2} \left(1 + 3C_1 \cos\left(\frac{\pi\beta}{2} \right) \left(\frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta + O(\sigma^{2\beta}) \right),
\end{aligned}$$

$$\omega_2(\sigma + i0) = \theta_2(\sigma) + i\tau_2(\sigma) =$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi\sigma}{6} + C_1 \sin \frac{\pi\beta}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta + \frac{i}{3} \ln \frac{\pi\sigma}{2} - iC_1 + iC_1 \cos \frac{\pi\beta}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}),$$

$$\frac{d\theta_2}{d\sigma} = C_1 \frac{\pi}{2} \beta \sin \frac{\pi\beta}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2} \right)^{\beta-1} - \frac{\pi}{6} + O(\sigma^\beta),$$

$$\frac{d\tau_2}{d\sigma} = \frac{1}{3\sigma} + C_1 \frac{\pi}{2} \beta \cos \frac{\pi\beta}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^{\beta-1} + O(\sigma^\beta).$$

Величины $\theta_1(0)=0$, $\frac{d\tau_1}{d\sigma}(0)=0$, так как τ – четная, а θ – нечетная по σ

функции. Подставив полученные выражения в (2.1.8), получим

$$\begin{aligned} & e^{-3C_1+3\tau_1(\sigma)} \frac{\pi\sigma}{2} \left(1 + 3C_1 \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + O(\sigma^{2\beta}) \right) \times \\ & \times \left[\frac{1}{3\sigma} + C_1 \frac{\pi}{2} \beta \cos \frac{\pi\beta}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^{\beta-1} + O(\sigma^\beta) + \frac{d\tau_1}{d\sigma}(\sigma) \right] = \\ & = \frac{1}{Fr^2} \sin \left[\frac{\pi}{6} - \frac{\pi\sigma}{6} + C_1 \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}) + \theta_1(\sigma) \right], \\ & e^{-3C_1+3\tau_1(0)+O(\sigma^2)} \left(1 + 3C_1 \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + O(\sigma^{2\beta}) \right) \times \\ & \times \left[\frac{\pi}{6} + C_1 \frac{\pi}{2} \beta \cos \frac{\pi\beta}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}) \right] = \\ & = \frac{1}{Fr^2} \left[\sin \frac{\pi}{6} \cos \left(-\frac{\pi\sigma}{6} + C_1 \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}) + \frac{d\theta_1}{d\sigma}(0)\sigma \right) + \right. \\ & \left. + \cos \frac{\pi}{6} \sin \left(-\frac{\pi\sigma}{6} + C_1 \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}) + \frac{d\theta_1}{d\sigma}(0)\sigma \right) \right], \\ & \frac{\pi}{6} + C_1 \frac{\pi}{2} \beta \cos \frac{\pi\beta}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + \frac{\pi}{6} 3C_1 \cos\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + O(\sigma^{2\beta}) = \\ & = e^{3C_1-3\tau_1(0)} \frac{1}{Fr^2} \left[\sin \frac{\pi}{6} \left(1 + O(\sigma^{2\beta}) \right) + \right. \\ & \left. + \cos \frac{\pi}{6} \left(-\frac{\pi\sigma}{6} + C_1 \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \left(\frac{\pi\sigma}{2}\right)^\beta + O(\sigma^{1+\beta}) + \frac{d\theta_1}{d\sigma}(0)\sigma \right) \right]. \end{aligned}$$

Получим уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{6} + C_1 \frac{\pi}{2} (1 + \beta) \cos \frac{\pi\beta}{2} \left(\frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta + O(\sigma^{2\beta}) = \\ & = e^{3C_1 - 3\tau_1(0)} \frac{1}{Fr^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{d\theta_1}{d\sigma}(0)\sigma - \frac{\pi\sigma}{6} + C_1 \sin \left(\frac{\pi\beta}{2} \right) \left(\frac{\pi\sigma}{2} \right)^\beta + O(\sigma^{2\beta}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Приравняем члены одного порядка $O(1)$ и $O(\pi/2 - \sigma)^\beta$, тогда следующие равенства могут быть получены

$$C_1 - \tau_1(0) = -\frac{1}{3} \ln \left(\frac{3}{\pi} \frac{1}{Fr^2} \right), \quad (2.1.10)$$

$$(\beta + 1) \operatorname{ctg} \frac{\pi\beta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (2.1.11)$$

При решении уравнения (2.1.11) определяется значение $\beta \approx 0,80267907$.

Проинтегрируем следующее выражение

$$\frac{dZ}{h} = dz = dx + idy = e^{i\omega} dw = -e^{i\omega(\chi)} d\chi.$$

Это необходимо для нахождения формы свободной границы. В данной задаче нашла свое применение формула средних прямоугольников численного интегрирования функций, результаты использования которой были отфильтрованы, что подняло точность решения до порядка 10^{-15} .

Численное решение

Используем численный метод, а именно метод коллокаций для решения. Требуется, чтобы в дискретном множестве точек, расположенных на оси BA' ($\sigma_m = F m/n$, $m = \overline{0, n-1}$), удовлетворялось уравнение Бернулли (2.1.1). Кроме того, должно выполняться уравнение (2.1.10). Таким образом получаем систему $n+1$ нелинейных уравнений. Параметры: Fr , C_1 , θ_m ($m = \overline{0, n-1}$). Для приближенного решения данной системы используется модификация метода Ньютона [7], в которой во всех уравнениях минимизируется сумма квадратов

невязок для регулирования шага. Если модуль невязок становился меньше 10^{-30} процесс решения прекращался. Длина мантиссы, соответствующая примерно тридцати пяти десятичным разрядам, использовалась для представления чисел. В данной задаче задание узловых точки происходило неравномерно, они задавались по формуле

$$\sigma_m = \frac{\sigma_n}{M + \alpha} \left[(M - 1) \left(\frac{m}{n} \right)^{\alpha+1} + (\alpha + 1) \frac{m}{n} \right]$$

при значениях $\sigma_n = 40$, $M = 1000$, $\alpha = 3$, подобранным экспериментально. При $\alpha > 0$ отношение густоты расположения узловых точек в конце и начале сетки

$$\frac{d\sigma_m/dm(n)}{d\sigma_m/dm(0)} = M.$$

Численные результаты

Безразмерными параметрами, характеризующими солитон [84] являются:

– амплитуда
$$a = y_B - 1 = \frac{Fr^2}{2},$$

– масса
$$m = \frac{M}{\rho h^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [y(x) - 1] dx,$$

– импульс
$$i = \frac{I}{\rho \sqrt{gh^5}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_1^{y(x)} \left(1 - \frac{V_x}{V_\infty} \right) dy,$$

– потенциальная энергия
$$u = \frac{U}{\rho gh^3} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (y(x) - 1)^2 dx,$$

– кинетическая энергия
$$t = \frac{T}{\rho gh^3} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_1^{y(x)} \left(\left(1 - \frac{V_x}{V_\infty} \right)^2 + \left(\frac{V_y}{V_\infty} \right)^2 \right) dy,$$

– циркуляция
$$c = \frac{C}{\rho \sqrt{gh^3}} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \sqrt{\left(1 + y'(x)^2 \right) \left(1 - \frac{2}{Fr^2} (y(x) - 1) \right)} \right] dx.$$

Здесь ρ – это плотность жидкости.

В соответствии с [85] между параметрами существует связь:

$$i = mFr, \quad t = (i - c) \frac{Fr}{2}, \quad u = \left(Fr^2 - 1 \right) \frac{m}{3}.$$

Обработка полученных результатов

Полученные результаты подвергались оценке погрешности и уточнению. Для проведения этой процедуры использовалась, так называемая, фильтрация численных результатов, полученных для различного количества точек коллокаций n , основанная на априорной модели зависимости результата вычисления z_n искомой величины z от параметра n (1.1.1).

Несколько старших регулярных компонент погрешности значения искомого параметра Fr было подавлено с помощью применения алгоритма численной фильтрации, за счет чего общая погрешность значительно снизилась.

Для фильтрации использовалась комбинация формул Эйткена и Ричардсона. Значения k_j определялись по формуле Эйткена [32, 81]

$$Q^{k_j} \approx \frac{z_{n_{i-1}}^{(j-1)} - z_{n_{i-2}}^{(j-1)}}{z_{n_i}^{(j-1)} - z_{n_{i-1}}^{(j-1)}} \quad \text{для } Q = 2. \quad \text{Это дало возможность определить значения}$$

$k_j = 4, 5, \dots$ Затем использовалась формула фильтрации (1.1.2).

Для независимой проверки использовался ε -алгоритм [32, 81]. Оценки, полученные двумя методами, сравнивались на предмет отсутствия противоречий.

Разности вычисленных или отфильтрованных результатов сравнивались с выбранным значением эталона как $\Delta = \left| z_{n_i}^{(j)} - z_{et} \right|$.

Полученные результаты для рассчитанных и отфильтрованных значений продемонстрированы на рис. 2.1.3, 2.1.4.

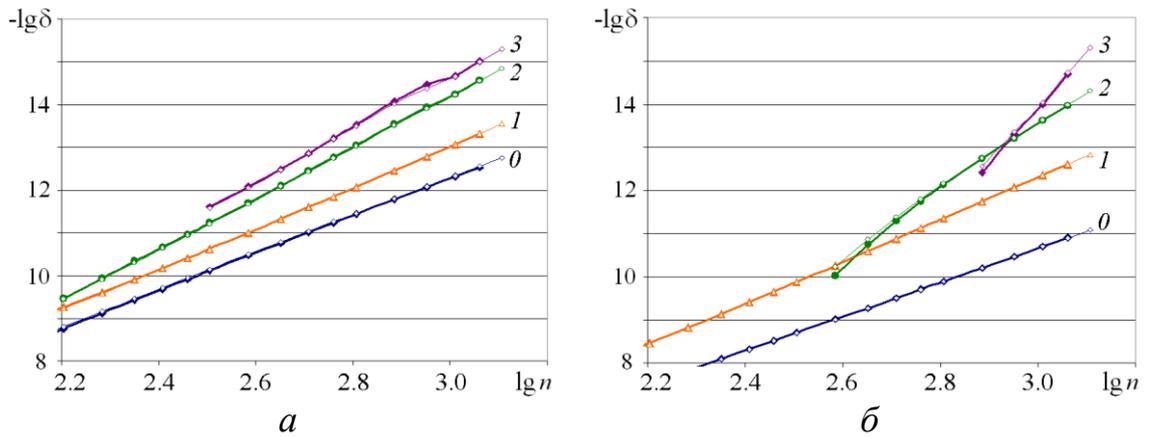


Рис. 2.1.3. Результаты фильтрации параметров солитона Стокса:
 a – числа Фруда; b – потенциальной энергии

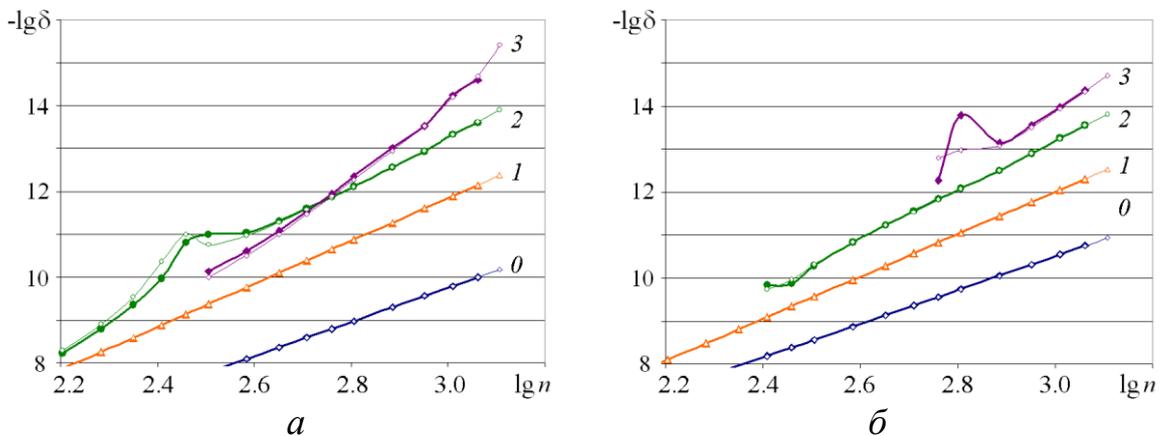


Рис. 2.1.4. Результаты фильтрации параметров солитона Стокса:
 a – циркуляции; b – массы

Результаты, вычисленные предложенным методом, представлены в табл. 2.1.1 (колонки 4, 5).

Таблица 2.1.1. Результаты вычислений и фильтраций

	Шерыхалина & Житников, 2001 (вычисленные)	Шерыхалина & Житников, 2001 (отфильтрованные)	Результаты применения предлож. метода (вычисленные)	Результаты применения предлож. метода (отфильтрованные)
Fr	1.290890455863	1.2908904558634	1.2908904558635	1.290890455863341
a	0.833199084519	0.8331990845196	0.8331990845197	0.833199084519532
m	1.9703206602	1.9703206601317 (-2)	1.97032066009	1.97032066013185
i	2.5434681352	2.5434681351545	2.54346813510	2.54346813515454
c	1.7145692406	1.7145692405337 (2)	1.7145692405	1.71456924053350
t	0.5350088360	0.5350088359709	0.53500883596	0.53500883597099
u	0.43767269344	0.4376726934439	0.437672693441	0.43767269344390

Полученные в этой работе результаты сравнивались с полученными ранее в [92] (табл. 2.1.1, колонки 2, 3). Проверке подлежали декларированные в [92] оценки погрешности числа Фруда не более одной единицы 13-го разряда, а

других параметров – порядка двух-трех единиц 13-го разряда. Это и было главной целью данного раздела: проверить, **насколько оценки и уточнения, полученные фильтрацией, соответствуют истине**. Поверка показала, что погрешность числа Фруда и других параметров, кроме массы и циркуляции не превосходят 10^{-13} . Погрешности массы и циркуляции не превосходят $2 \cdot 10^{-13}$. Тем самым, оценки, полученные в [92] полностью **подтвердились де-факто** с помощью более точного решения, полученного другим методом. Отметим, что согласно главе 1, линия, соответствующая последней фильтрации, служит только для оценки размытости. И только значения, соответствующие предпоследней линии, могут использоваться для оценки погрешности.

На рис. 2.1.3, 2.1.4 для фильтрации использованы последовательности z_{n_i} , начинающиеся с 5, 6, 7, 8 при дальнейшем удваивании предыдущих значений. Это позволило определить наиболее точное значение числа Фруда до двух-трех единиц 15 разряда, а массы и циркуляции около двух-трех единиц 14 разряда. Эти оценки подтверждаются наложением толстых линий, полученных в результате фильтрации последовательностей разностей $z_{n_i} - z_{n_{i+1}}$ (для исключения из них искомого) на результат сравнения с эталоном.

2.2. Решение задачи с краевыми условиями в дифференциальном виде

Последние оценки были получены при помощи интеграла Шварца с интегральным условием (уравнение Бернулли) на границе. Это позволило уточнить значение числа Fr до $2 \cdot 3 \cdot 10^{-15}$. Чтобы проверить этот результат, необходимо получить независимый результат с помощью применения другого метода решения. Для этого необходимо увеличить точность вычисляемых значений увеличивая разрядность мантиссы машинного слова. Тридцать пять разрядов мантиссы в условном десятичном представлении использовались для решения.

Численное решение

Для численного решения используется метод коллокаций. Требуется, чтобы в дискретном множестве точек, расположенных на оси BA' ($\sigma_m = F m/n$, $m = \overline{0, n-1}$), удовлетворялось уравнение (2.1.8). Кроме того, должно выполняться уравнение (2.1.10). Таким образом получаем систему $n+1$ нелинейных уравнений, составленную относительно параметров Fr , C_1 , θ_m ($m = \overline{0, n-1}$). Для решения данной системы используется модификация метода Ньютона [7], в которой во всех уравнениях минимизируется сумма квадратов невязок для регулирования шага. Если модуль невязок становился меньше 10^{-20} процесс решения прекращался.

Анализ и проверка ранее полученных результатов

Полученные этим методом решения задачи отфильтрованы описанным выше методом и продемонстрированы на рис. 2.2.1. Использование этого метода и расширенной мантиссы позволило уменьшить погрешность до 10^{-16} (рис. 2.2.1). Сравнение со значением, полученным в [92] показало отличие около $-1,5 \cdot 10^{-15}$.

Комплекс описанных действий позволил найти новое, более точное, значение числа Фруда, равное $Fr=1,2908904558633395 \pm 10^{-16}$.

Таким образом, полученное решение подтвердило ранее полученные оценки. Более того, разработанная программа, которая применялась для решения задачи данным численным методом, имела заметный выигрыш в скорости вычислений.

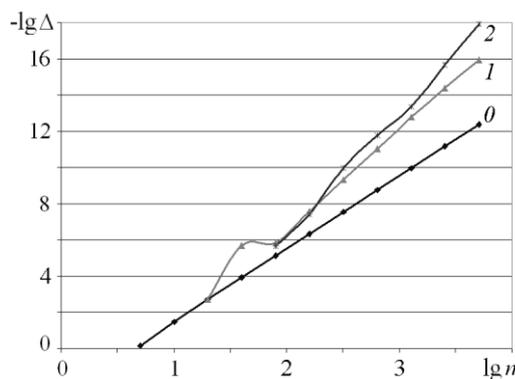


Рис. 2.2.1. Результаты фильтрации числа Фруда полученные в разделе 2.2

Описание алгоритма

На рис. 2.2.2 приведена структура типового алгоритма решения рассмотренных выше задач методом, использующим функцию Жуковского.

При решении задач методом коллокаций основным элементом является решение системы нелинейных уравнений.

При решении задач с помощью интеграла Шварца ускорение достигается за счет предварительного вычисления значений функций в узловых точках и вычисления их комбинаций при расчете Якобиана.

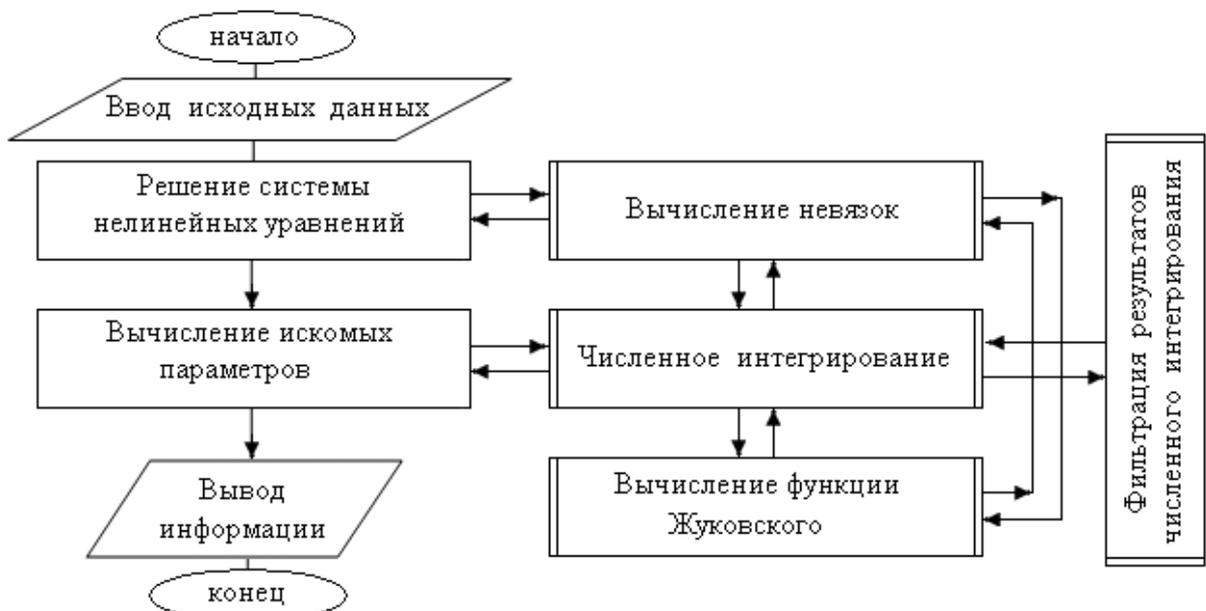


Рис. 2.2.2 Блок-схема алгоритма решения задачи

Создание программного комплекса предполагает объединение набора программ на основе установления информационных связей между различными программными модулями (расчетными и постпроцессорной обработки).

При работе расчетных модулей, решающих вычислительные задачи, создается протокол работы программы: набор блоков информации – отчетов о работе программно-алгоритмической единицы (решения уравнений, численного интегрирования и т.п.), снабженных меткой для возможности идентификации данного блока и организованных по оговоренному для каждого типа блоков правилу.

Программная реализация метода

Для достижения поставленных целей необходимо проводить вычислительный эксперимент, используя данные повышенной разрядности. Для проведения эксперимента была написана программа на языке C++. C++ располагает двумя типами данных с плавающей точкой: float и double. Тип данных double имеет объем занимаемой памяти в два раза больше, чем тип данных float. Если добавить к названию типа double приставку long, то получится тип с плавающей точкой повышенной точности. Однако, при рассмотрении тестовых примеров элементарных вычислений (например, 1 разделить на 3) было выявлено, что этот тип данных при вычислении дает не более 14-16 значащих цифр. Поэтому особенностью программной реализации решения поставленной задачи является использование типа данных float128 - формат представления чисел с плавающей запятой, занимающий в памяти четыре последовательных ячейки (компьютерных слова; в случае 32-битного компьютера — 128 бит или 16 байт). Данный тип поддерживается не во всех компиляторах, поэтому применялся компилятор gcc version 4.8.2 20140120 (Red Hat 4.8.2-15) с подключением библиотеки «<quadmath.h>».

2.3 Кавитационное обтекание мягкой воздухоопорной оболочки по несимметричной схеме Рябушинского

Как было отмечено в 1 главе, многие авторы уже решали задачу кавитационного обтекания кругового цилиндра. После их исследований появились гипотезы о существовании локальных экстремумов для зависимостей многих параметров при выполнении условия гладкого отрыва. Однако строгого доказательства эта гипотеза не имеет. Учитывая, что вблизи экстремума зависимость имеет вид $y - y_0 \approx C(x - x_0)^2$, то погрешность определения положения экстремума Δx связана с погрешностью вычисления y Δy зависимостью $\Delta x \sim \sqrt{|\Delta y|}$, т.е. Δx имеет примерно половину точных значащих цифр по сравнению с Δy . Большинство известных зависимостей представлено в графическом виде, т.е. имеет точность по y около 2-х значащих цифр,

следовательно, по x около одной. Самые точные результаты, приведенные в [9] имеют 4 точные значащие цифры по y , соответственно, по x около двух.

В связи с этим рассмотрим решение данной задачи с увеличенной точностью и исследуем зависимости параметров.

Пусть концы A и B цилиндрической оболочки расположены, как показано на рис.2.3.1. На горизонтальной линии ADG вектор скорости параллелен оси OX . CF в данном случае является свободной линией тока, на которой поточная скорость равна V_0 . Применим несимметричную схему Рябушинского. Для замыкания линии тока будем использовать для каверны прямолинейный замыкатель FG .

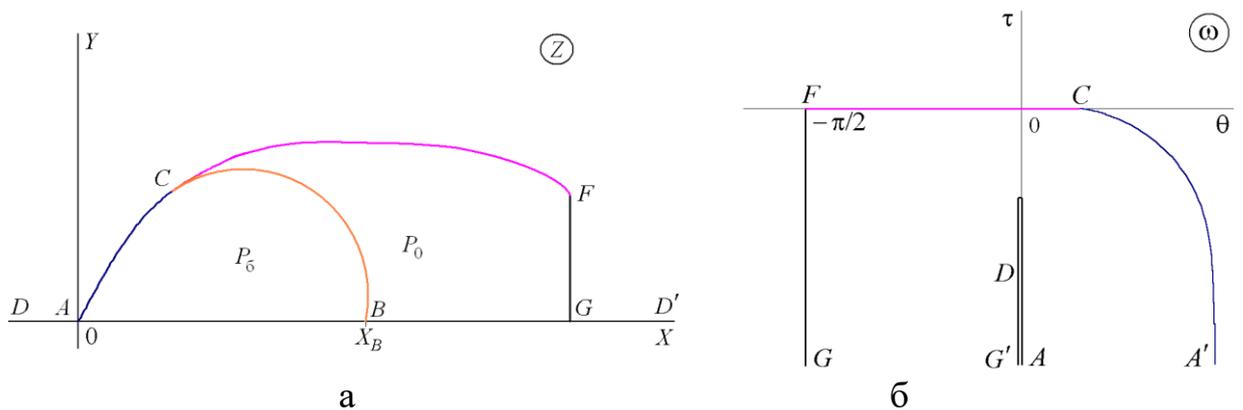


Рис. 2.3.1. Схема потока на плоскостях: а – физической; б – плоскости логарифмического годографа

Постановка и метод решения задачи

Для того, чтобы конструкция оболочки продолжала оставаться в уравновешенном состоянии, на её соприкасающейся с жидкостью части AC должно удовлетворяться уравнение равновесия. Если обозначить радиус кривизны оболочки через R , давление внутри оболочки через P_b , натяжение оболочки через T , а давление в струе через P , то можно записать условие равновесия (уравнение Лапласа)

$$T = R(P_b - P) = \text{const} . \quad (2.3.1)$$

Поскольку идеальная (невязкая, несжимаемая, весомая) жидкость хорошо подходит для моделирования воздушных потоков, используем этот подход, так как обтекание надувных конструкций сопровождается небольшими перепадами давлений.

Использованные условные обозначения приведены в таблице 2.3.1.

Таблица 2.3.1. Условные обозначения

P	давление в потоке
V	модуль вектора скорости жидкости
P_0	давление на свободной поверхности
V_0	модуль скорости на свободной поверхности
ρ	плотность жидкости
P^*	константа Бернулли

Уравнение Лапласа (2.3.1) с учетом уравнения Бернулли целесообразно записать в дифференциальной форме

$$\rho \frac{V^2}{2} + P = P^*, \quad \rho \frac{V_0^2}{2} + P_0 = P^*.$$

$$T = \pm \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^{-1} \left(P_b - P^* + \rho \frac{V^2}{2} \right),$$

$$\frac{d\theta}{ds} = - \frac{\rho V_0^2}{2T} \left(\mu - 1 + \left| \frac{V}{V_0} \right|^2 \right), \quad (2.3.2)$$

где θ – угол между вектором скорости и осью X ; s – дуговая абсцисса,

отсчитываемая от точки A , $\mu = \frac{P_b - P_0}{P^* - P_0}$.

Если $\mu \geq 1$, то угол наклона вектора скорости θ уменьшается в направлении движения жидкости (рис. 2.3.1,а). Значит, в выражении (2.3.2) выбирается отрицательное значение.

Запишем число кавитации $K = \frac{P_\infty - P_0}{\rho V_\infty^2 / 2}$. Здесь используются следующие

обозначения: P_0 – давление в каверне, P_∞ – давление на бесконечности, V_∞ – скорость на бесконечности ρ – плотность жидкости. Так по уравнению Бернулли

давление постоянно $\rho \frac{V^2}{2} + P = P^* = const$, значит

$$K = \frac{P^* - \rho \frac{V_\infty^2}{2} - P^* + \rho \frac{V_0^2}{2}}{\rho V_\infty^2 / 2} = \frac{V_0^2 - V_\infty^2}{V_\infty^2} = \left(\frac{V_0}{V_\infty} \right)^2 - 1. \quad (2.3.3)$$

где $V_0/V_\infty = \sqrt{K+1}$, V_0 - это скорость движения потока на границе каверны.

Как и для других задач, методы теории функций комплексного переменного используются в этом случае. Рис. 2.3.2, а демонстрирует, как образ области потока может быть представлен полуплоскостью над осью абсцисс в плоскости $W = \varphi + i\psi$.

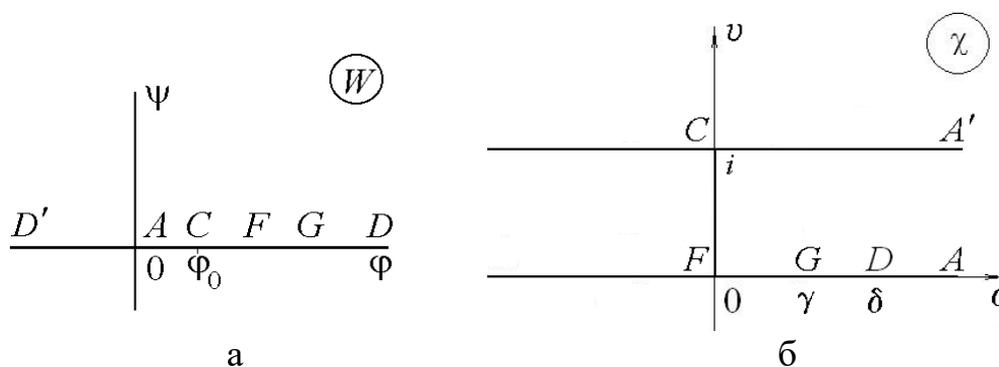


Рис. 2.3.2. Поток в плоскостях: а – функции комплексного потенциала; б – параметрического переменного χ

В качестве параметрической выберем плоскость $\chi = \sigma + i\nu$, на которой образом области течения будет полуполоса (рис. 2.3.2, б). Используется также параметрическая верхняя полуплоскость t (рис. 2.3.3).

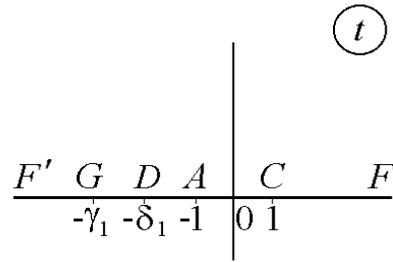


Рис. 2.3.3. Образ течения на параметрической плоскости t

Плоскость $\chi = \sigma + i\nu$ используем как промежуточную параметрическую плоскость, полуплоса будет соответствовать на ней области течения будет (рис. 2.3.2, б). Кроме того, используется параметрическая верхняя полуплоскость t (рис. 2.3.3).

Чтобы связать конформным отображением полуплоскость t и полуплоскость W используем функцию дробно-линейного преобразования, которая имеет вид

$$W = \varphi_0 \frac{1 + \delta_1}{2} \frac{t + 1}{t + \delta_1}. \quad (2.3.4)$$

Конформное отображение t на χ

$$\begin{aligned} \chi &= C_1 \int_{\infty}^t \frac{dt}{(t+1)\sqrt{t-1}} = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{t-1} \\ du = \frac{dt}{2\sqrt{t-1}} \end{array} \right| = 2C_1 \int_{\infty}^u \frac{du}{(u^2 + 2)} = \\ &= 2C_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{u - i\sqrt{2}}{u + i\sqrt{2}} \Big|_{\infty}^u = \sqrt{2}C_1 \ln \frac{\sqrt{t-1} - i\sqrt{2}}{\sqrt{t-1} + i\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Поскольку ширина полосы на χ равна единице, то

$$\chi = -\frac{1}{\pi} \ln \frac{\sqrt{t-1} - i\sqrt{2}}{\sqrt{t-1} + i\sqrt{2}}.$$

Отсюда

$$t = -2 \left(\frac{e^{\pi\chi} + 1}{e^{\pi\chi} - 1} \right)^2 + 1 = 1 - 2 \operatorname{cth}^2 \frac{\pi\chi}{2}, \quad \gamma_1 = \operatorname{cth}^2 \frac{\pi\gamma}{2} - 1, \quad \delta_1 = \operatorname{cth}^2 \frac{\pi\delta}{2} - 1 \quad (2.3.5)$$

Тогда согласно (2.3.4)

$$\begin{aligned}
 W &= \varphi_0 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi\delta}{2} \frac{-2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi\chi}{2} + 2 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\chi}{2}}{-2 \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\delta}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\pi\chi}{2} + 2 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi\delta}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\chi}{2}} = \\
 &= \varphi_0 \operatorname{cth}^2 \frac{\pi\delta}{2} \frac{-2 \operatorname{cth}^2 \frac{\pi\chi}{2} + 2}{-2 \operatorname{cth}^2 \frac{\pi\chi}{2} + 2 \operatorname{cth}^2 \frac{\pi\delta}{2}} = \\
 &= 2\varphi_0 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi\delta}{2} \frac{-(\operatorname{ch} \pi\chi + 1) + (\operatorname{ch} \pi\chi - 1)}{- (\operatorname{ch} \pi\delta - 1)(\operatorname{ch} \pi\chi + 1) + (\operatorname{ch} \pi\delta + 1)(\operatorname{ch} \pi\chi - 1)} = \\
 &= -4\varphi_0 \operatorname{ch}^2 \frac{\pi\delta}{2} \frac{1}{-\operatorname{ch} \pi\delta \operatorname{ch} \pi\chi + 1 + \operatorname{ch} \pi\chi - \operatorname{ch} \pi\delta + \operatorname{ch} \pi\delta \operatorname{ch} \pi\chi - \operatorname{ch} \pi\delta + \operatorname{ch} \pi\chi - 1} = \\
 &= -\varphi_0 \frac{\operatorname{ch} \pi\delta + 1}{\operatorname{ch} \pi\chi - \operatorname{ch} \pi\delta}. \tag{2.3.6}
 \end{aligned}$$

Производная

$$\frac{dW}{d\chi} = \varphi_0 \frac{1 + \operatorname{ch} \pi\delta}{(\operatorname{ch} \pi\chi - \operatorname{ch} \pi\delta)^2} \pi \operatorname{sh} \pi\chi.$$

На участке границы AC ($\chi = \sigma + i$)

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} = \varphi_0 \frac{1 + \operatorname{ch} \pi\delta}{(\operatorname{ch} \pi(\sigma + i) - \operatorname{ch} \pi\delta)^2} \pi \operatorname{sh} \pi(\sigma + i) = -\varphi_0 \frac{1 + \operatorname{ch} \pi\delta}{(\operatorname{ch} \pi\sigma + \operatorname{ch} \pi\delta)^2} \pi \operatorname{sh} \pi\sigma.$$

Продифференцируем дуговую абсциссу

$$ds = \frac{1}{V} \frac{\partial W}{\partial \sigma} d\sigma = -\frac{\varphi_0}{V} \frac{1 + \operatorname{ch} \pi\delta}{(\operatorname{ch} \pi\sigma + \operatorname{ch} \pi\delta)^2} \pi \operatorname{sh} \pi\sigma d\sigma. \tag{2.3.7}$$

На участке границы CF ($\chi = 0 + i\nu$)

$$W = -\varphi_0 \frac{1 + \operatorname{ch} \pi\delta}{\cos \pi\nu - \operatorname{ch} \pi\delta}.$$

$$ds = \frac{1}{V} \frac{\partial W}{\partial \nu} d\nu = -\frac{\varphi_0}{V} \frac{1 + \operatorname{ch} \pi \delta}{(\cos \pi \nu - \operatorname{ch} \pi \delta)^2} \pi \sin \pi \nu d\nu.$$

На участке границы FG ($\chi = \sigma + 0$)

$$ds = \frac{1}{V} \frac{\partial W}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{\varphi_0}{V} \frac{1 + \operatorname{ch} \pi \delta}{(\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \delta)^2} \pi \operatorname{sh} \pi \sigma d\sigma.$$

С учетом (2.3.7) условие (2.3.2) преобразуется

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\sigma} \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^{-1} = -\frac{d\theta}{d\sigma} \frac{1}{\frac{\varphi_0}{V} \frac{1 + \operatorname{ch} \pi \delta}{(\operatorname{ch} \pi \sigma + \operatorname{ch} \pi \delta)^2} \pi \operatorname{sh} \pi \sigma} = -\frac{\rho V_0^2}{2T} \left(\mu - 1 + \left| \frac{V}{V_0} \right|^2 \right),$$

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \frac{\lambda}{2} \left((\mu - 1) \frac{V_0}{V} + \frac{V}{V_0} \right) \frac{1 + \operatorname{ch} \pi \delta}{(\operatorname{ch} \pi \sigma + \operatorname{ch} \pi \delta)^2} \pi \operatorname{sh} \pi \sigma, \quad \lambda = \frac{\rho V_0 \varphi_0}{T}.$$

В интегральном виде

$$\theta(\sigma) - \theta_A = -\pi \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\sigma} \left((\mu - 1) \frac{V_0}{V} + \frac{V}{V_0} \right) \frac{1 + \operatorname{ch} \pi \delta}{(\operatorname{ch} \pi \sigma + \operatorname{ch} \pi \delta)^2} \operatorname{sh} \pi \sigma d\sigma, \quad (2.3.8)$$

где θ – угол между вектором скорости и осью X в точке A .

В случае $\mu \rightarrow \infty$ задача переходит в обтекание кругового цилиндра радиуса

R . При этом слагаемое $\frac{V}{V_0}$ в скобках в (2.3.8) отсутствует, а произведение

$$\frac{\lambda}{2} (\mu - 1) \text{ заменяется на } \frac{1}{R} \frac{\varphi_0}{V_0}.$$

Задача решается с помощью логарифмического годографа скоростей

$$\omega = i \ln \frac{1}{V_0} \frac{dW}{dZ} = \theta + i\tau, \quad \frac{dW}{dZ} = V e^{-i\theta}, \quad \tau = \ln \frac{V}{V_0}.$$

Функция $\omega = \theta + i\tau$ должна удовлетворять следующим граничным условиям (см. рис.2.3.1, б):

– для FG $\operatorname{Re} \omega = -\pi/2$;

- для GDA $\operatorname{Re} \omega = 0$;
- для CF $\operatorname{Im} \omega = 0$;
- для AC условие (2.3.8). (2.3.9)

В качестве вспомогательной подзадачи рассмотрим задачу о кавитационном обтекании прямолинейной пластины. Её угол наклона к оси абсцисс равен θ_A . Форма области на плоскости изменения функции годографа скоростей ω_0 приведена на рис. 2.3.4.

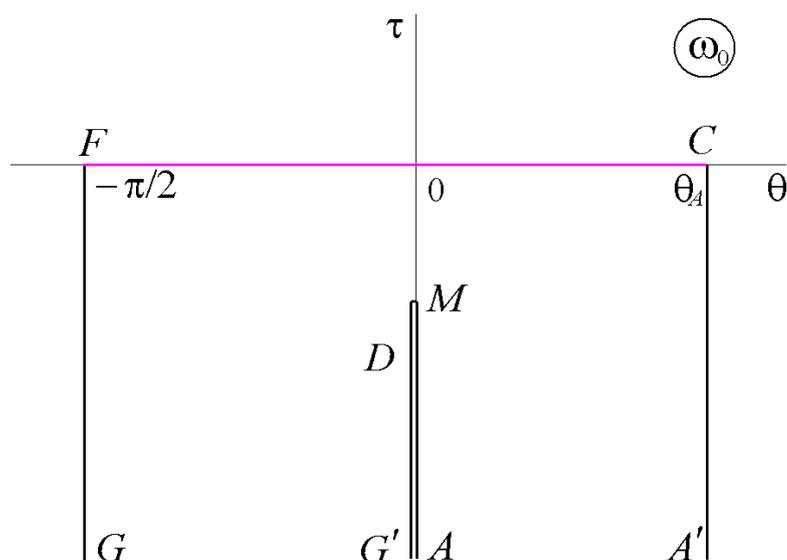


Рис. 2.3.4. Плоскость изменения функции Жуковского для задачи обтекания наклонной пластины

Для этой задачи вместо условия (2.3.9) для AC используется условие $\theta = \operatorname{Re} \omega = \theta_A$. Трансформируем верхнюю полуплоскость t на область плоскости ω_0 . Интеграл Шварца-Кристоффеля [49] применим для этого отображения

$$\begin{aligned} \omega_0 = C_1 \int_{\infty}^t \frac{(t+\mu)}{\sqrt{t-1}(t+\gamma_1)(t+1)} - \frac{\pi}{2} = C_1 \frac{\mu-1}{2i(\gamma_1-1)} \ln \frac{\sqrt{t-1}-i\sqrt{2}}{\sqrt{t-1}+i\sqrt{2}} + \\ + C_1 \frac{\gamma_1-\mu}{2i(\gamma_1-1)} \ln \frac{\sqrt{t-1}-i\sqrt{\gamma_1+1}}{\sqrt{t-1}+i\sqrt{\gamma_1+1}} - \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Если мы двигаемся от AC к AD по полуокружности малого радиуса в плоскости t , то первый логарифм в формуле (2.3.10) получает приращение мнимой части. В данном случае оно равно π . Приращение действительной части

– θ_A соответствует этому обходу на ω_0 . Аналогичным образом, при обходе точки G второй логарифм в (2.3.10) получает приращение мнимой части π , а на ω_0 этому обходу соответствует приращение действительной части, равное $-\pi/2$. Используя эти условия, получим

$$i\pi C_1 \frac{\mu-1}{2i(\gamma_1-1)} = -\theta_A, \quad i\pi C_1 \frac{\gamma_1-\mu}{2i(\gamma_1-1)} = -\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда найдем

$$\omega_0(t) = i \frac{\theta_A}{\pi} \ln \frac{\sqrt{t-1} - i\sqrt{2}}{\sqrt{t-1} + i\sqrt{2}} + 2\theta_A + \frac{i}{2} l \ln \frac{\sqrt{t-1} - i\sqrt{\gamma_1+1}}{\sqrt{t-1} + i\sqrt{\gamma_1+1}} - \frac{\pi}{2}.$$

Окончательный вариант решения получим, когда перейдем к переменной χ :

$$\omega_0(\chi) = -i\theta_A \chi + \frac{i}{2} \ln \frac{e^{\pi\chi} - e^{\pi\gamma}}{e^{\pi\gamma} e^{\pi\chi} - 1}. \quad (2.3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_0}{d\chi} &= -i\theta_A + \frac{i}{2} \left(\frac{\pi e^{\pi\chi}}{e^{\pi\chi} - e^{\pi\gamma}} - \frac{\pi e^{\pi\gamma} e^{\pi\chi}}{e^{\pi\gamma} e^{\pi\chi} - 1} \right) = \\ &= -i\theta_A + \frac{i}{2} \pi e^{\pi\chi} \frac{e^{\pi\gamma} e^{\pi\chi} - 1 - e^{\pi\gamma} (e^{\pi\chi} - e^{\pi\gamma})}{(e^{\pi\chi} - e^{\pi\gamma})(e^{\pi\gamma} e^{\pi\chi} - 1)} = \\ &= -i\theta_A + \frac{i}{2} \pi e^{\pi\chi} \frac{e^{\pi\gamma} e^{\pi\chi} - 1 - e^{\pi\gamma} e^{\pi\chi} + e^{2\pi\gamma}}{(e^{\pi\chi} - e^{\pi\gamma})(e^{\pi\gamma} e^{\pi\chi} - 1)} = -i\theta_A + \frac{i}{2} \pi e^{\pi\chi} \frac{e^{2\pi\gamma} - 1}{(e^{\pi\chi} - e^{\pi\gamma})(e^{\pi\gamma} e^{\pi\chi} - 1)}. \end{aligned}$$

При $\chi = \sigma + i$

$$\frac{d\omega_0}{d\chi} = -i\theta_A - \frac{i}{2} \pi e^{\pi\chi} \frac{e^{2\pi\gamma} - 1}{(-e^{\pi\chi} - e^{\pi\gamma})(-e^{\pi\gamma} e^{\pi\chi} - 1)} = -i\theta_A - \frac{i}{2} \pi e^{\pi\chi} \frac{e^{2\pi\gamma} - 1}{(e^{\pi\chi} + e^{\pi\gamma})(e^{\pi\gamma} e^{\pi\chi} + 1)}$$

При $\chi = 0 + i$

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = -\theta_A - \frac{1}{2} \frac{e^{2\pi\gamma} - 1}{(-1 - e^{\pi\gamma})(-e^{\pi\gamma} - 1)} = -\theta_A - \frac{1}{2} \frac{e^{2\pi\gamma} - 1}{(e^{\pi\gamma} + 1)^2} = -\theta_A - \frac{1}{2} \frac{e^{\pi\gamma} - 1}{e^{\pi\gamma} + 1} = -\theta_A - \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{\pi\gamma}{2}.$$

При $\chi=0+i\nu$

$$\omega_0(\chi) = \theta_{A\nu} + \frac{i}{2} \ln \frac{e^{i\pi\nu} - e^{\pi\gamma}}{e^{\pi\gamma} e^{i\pi\nu} - 1}.$$

Согласно видоизмененному методу Леви-Чивиты [21], функцию $\omega = \theta + i\tau$ представим в виде

$$\omega(\chi) = \omega_0(\chi) + \omega_1(\chi).$$

Исходя из (2.3.9) функция $\omega(\chi)$ четная.

В точках, которых границы претерпевают изломы, функция $\omega_0(\chi)$ приобретает нужные скачки для угла θ . Функция $\omega_1(\chi)$ не имеет особенностей, поэтому ее проще определять численно.

Находить функцию $\omega_1(\chi)$ будем так. Действительные значения $\operatorname{Re} \omega_1(\sigma_m) = \theta_m$ необходимо определить. Будем искать в узловых точках σ_m ($m=0, \dots, n$) решение на границе $\chi = \sigma + i$. Пусть $\operatorname{Re} \omega_1(\sigma_n) = 0$. Кубический сплайн $P(\sigma)$, который имеет две непрерывные производные, нужен нам для нахождения значения $\operatorname{Re} \omega_1(\sigma)$ в точках, которые не являются узловыми.

Функция $\omega_1(\chi)$ – функция аналитическая. Она имеет на прямой $\operatorname{Im}\chi=0$ чисто мнимые значения. Кроме того, $\operatorname{Re} \omega_1(\sigma + i) = \operatorname{Re} \omega_1(-\sigma + i)$. Применим формулу Шварца, чтобы восстановить $\omega_1(\chi)$. Значит, формула Шварца примет вид

$$\omega_1(\chi) = i \operatorname{sh} \pi\chi \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \omega_1(\sigma) \frac{d\sigma}{\operatorname{ch} \pi\sigma + \operatorname{ch} \pi\chi}. \quad (2.3.12)$$

Далее строим сплайн $P(\sigma)$ и рассчитываем значения его коэффициентов. В данном случае коэффициенты сплайна определяются как производные $\frac{\partial \operatorname{Re} \omega_1}{\partial \sigma}(\sigma)$ в точках сетки.

Чтобы найти производную $\frac{\partial \omega_1}{\partial \sigma}$ необходимо сконструировать функцию в виде сплайна $P_1(\sigma)$. Для этого используются полученные с помощью (2.3.12) значения $\operatorname{Im} \omega_1(\sigma)$. Производные $\frac{\partial \operatorname{Im} \omega_1}{\partial \sigma}(\sigma)$ в точках сетки приравниваются коэффициентам этого сплайна.

Упростим решение задачи введением безразмерных параметров. Если $\mu \rightarrow \infty$ и $V_0=1$, то радиус цилиндра $R=1$. При возврате к первоначальным параметрам исходной размерности произведем умножение линейных величин на реальный размер R , а скорости должны увеличиться в V_0 раз.

Заданным являлось число кавитации K . Согласно (2.3.3)

$$\tau(\delta) = -\theta_A \delta + \frac{1}{2} \ln \frac{e^{\pi\delta} - e^{\pi\gamma}}{e^{\pi\gamma} e^{\pi\delta} - 1} + \operatorname{Im} \omega_1(\delta + i0) = \ln \frac{V_\infty}{V_0} = -\frac{1}{2} \ln(K + 1). \quad (2.3.13)$$

Локализуем положение точки отрыва струи от гладкого контура.

$$\frac{d\tau}{d\sigma}(0+i) = \frac{\operatorname{Im} d\omega_1}{d\sigma}(0+i) - \theta_A - \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{\pi\gamma}{2} = 0, \quad (2.3.14)$$

так как для точки C , как видно из рис. 2.3.1,б, выполняется условия конечности кривизны свободной поверхности (условие Бриллюэна – Вилла).

По формуле (2.3.7) и определения функции годографа скоростей найдем дифференциал

$$dZ = \frac{1}{V_0} e^{i\omega} \frac{dW}{d\chi} d\chi = \frac{\Phi_0}{V_0} e^{i\omega(\zeta)} = \frac{\Phi_0}{V_0} \pi e^{i\omega(\zeta)} \frac{1 + \operatorname{ch} \pi\delta}{(\operatorname{ch} \pi\chi - \operatorname{ch} \pi\delta)^2} \operatorname{sh} \pi\chi d\varphi. \quad (2.3.15)$$

Значит,

$$X_C = \frac{\varphi_0}{V_0} x_C = \frac{\varphi_0}{V_0} \int_{AC} \operatorname{Re} dz, \quad Y_C = \frac{\varphi_0}{V_0} y_C = \frac{\varphi_0}{V_0} \int_{AC} \operatorname{Im} dz.$$

Дуга окружности, которая имеет центр в точке $X_0 = X_C + R_0 \sin \theta_C$, $Y_0 = Y_C - R_0 \cos \theta_C$, а радиус которой вычисляется как $R_0 = \frac{2T}{\rho V_0^2 \mu} = \frac{2}{\lambda \mu} \frac{\varphi_0}{V_0}$,

используется, чтобы определить из (2.3.1) несоприкасающийся с жидкостью участок границы CB . Для этого введем обозначение: α – центральный угол дуги CB . С учетом этого длина всей оболочки ACB будет равна L .

$$L = \frac{\varphi_0}{V_0} \left(\int_{AC} |dz| + \frac{2\alpha}{\lambda \mu} \right), \quad dZ = \frac{\varphi_0}{V_0} dz. \quad (2.3.16)$$

Если l расстояние между точками A и B , в которых закреплена оболочка, тогда $l = X_B$. Введем условные обозначения. Пусть θ_A – угол наклона касательной в точке A , θ_B – угол наклона касательной в точке B , θ_C – угол наклона касательной в точке C оболочки. Для точки B найдем ее координаты

$$X_B = \frac{\varphi_0}{V_0} x_B = \frac{\varphi_0}{V_0} \left[\int_{AC} \operatorname{Re} dz - \frac{2}{\lambda \mu} (\sin(\theta_C - \alpha) - \sin \theta_C) \right], \quad (2.3.17)$$

$$Y_B = \frac{\varphi_0}{V_0} y_B = \frac{\varphi_0}{V_0} \left[\int_{AC} \operatorname{Im} dz + \frac{2}{\lambda \mu} (\cos(\theta_C - \alpha) - \cos \theta_C) \right] = 0. \quad (2.3.18)$$

$$\frac{\varphi_0}{V_0 l} = \varphi^* = \frac{1}{x_B}, \quad (2.3.19)$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\int_{AC} |dz| + \frac{2\alpha}{\lambda \mu}}{x_B}. \quad (2.3.20)$$

Эти безразмерные отношения определяют конфигурацию оболочки и потока. Для их нахождения были использованы формулы (2.3.16) и (2.3.17).

Для поиска решения задачи, в которой линия $GD'DA$ является единой, должно быть определено условие замкнутости. Приведенные же выше формулы являются решением для более общей задачи для случая, если отрезок GD' не является продолжением отрезка DA .

Формула (2.3.14) при $\chi = \delta + i0$ имеет особенность

$$dZ = g(\chi) \frac{d\chi}{(\chi - \delta)^2}.$$

Функцию $g(\chi)$ можно разложить по степеням $\chi - \delta$ в ряд. Чтобы область течения была замкнута необходимо и достаточно равенство нулю линейного члена разложения. В противном случае появляется член, интеграл от которого даст логарифм. Значит, участок границы GD' претерпевает сдвиг относительно DA . Для условия отсутствия сдвига здесь используется равенство

$$Z_G = \text{Im } Z(\gamma) = 0. \quad (2.3.21)$$

Численный алгоритм и оценка погрешности

Решение задачи проводилось в безразмерном виде: параметры $l=1$ и $V_0=1$. Значения параметров μ и L/l известны. Искомые линейные величины увеличиваются в l раз, а скорости – в V_0 раз, чтобы снова перейти размерным величинам.

Как и в предыдущих случаях, метод коллокаций был применен для численного решения задачи. Для его использования потребуем, чтобы для отдельных точек дуги AC $\zeta_m = m\pi/(2n)$, $m = \overline{0, n-1}$, $\chi_m = i + \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + \sin \zeta_m}{1 - \sin \zeta_m}$ выполнялось уравнение (2.3.8).

При этом, либо условие (2.3.14), которое приводит к равенству $L_C = L_0$ для длины части оболочки, соприкасающейся с жидкостью, должно выполняться в точке отрыва. Либо величина L_C являлась известной. Вместе с равенствами (2.3.13), (2.3.18), (2.3.20), (2.3.21) составлялась система $n+5$ нелинейных уравнений (относительно параметров θ_A , α , λ , γ , δ , θ_m ($m = \overline{0, n-1}$)). Для её решения был использован метод Ньютона. При этом по всем составленным уравнениям минимизировалась сумма квадратов невязок.

Интегрирование (2.3.15) с использованием численного метода выполнялось, чтобы найти координаты граничных точек и внутренних точек течения.

В работе были проанализированы изменения следующих безразмерных параметров:

– вычисленных коэффициентов давления

$$C_x = \frac{2}{\rho V_\infty^2 l} \operatorname{Im} \int_{AC} (P(Z) - P_0) dZ = e^{-2\tau(\delta)} \left[\frac{\Phi^*}{\lambda} (\cos \theta_A - \cos \theta_B) \right],$$

$$C_y = \frac{2}{\rho V_\infty^2 l} \operatorname{Re} \int_{AC} (P(Z) - P_0) dZ = e^{-2\tau(\delta)} \left[\frac{\Phi^*}{\lambda} (\sin \theta_A - \sin \theta_B) - \mu \right];$$

– высоты оболочечной конструкции $H^* = \frac{H}{l} = \begin{cases} \max_{0 \leq \sigma \leq \sigma_n} Y(\sigma + i)/l, & \theta_C < 0; \\ (R_0 + Y_0)/l, & \theta_C \geq 0; \end{cases}$

– натяжения $T^* = \frac{4T}{\rho V_0^2 l \mu} = \frac{2R_0}{l}$.

Для результатов, которые были рассчитаны при разных количествах точек коллокаций n , как и в предыдущих задачах, применялась методика численной фильтрации и проводилась оценка погрешности результатов вычислений [10, 34].

Используем логарифмическую зависимость для представления результатов на графике. Результаты фильтрации представлены на рис. 2.3.5, 2.3.6, где по оси абсцисс отложены десятичные логарифмы n , по оси ординат – десятичные логарифмы оценок относительной погрешности искомого параметра $\delta = |\Delta u/u|$.

Оценки погрешности рассчитанных значений обозначены цифрой 0. Оценки погрешности значений, найденных в процессе первой и второй фильтрации обозначены цифрами 1 и 2 соответственно. Для выбора эталона необходимо сравнить соседние рассчитанные величины. Покажем жирными

линиями результаты фильтрации для разностей, стоящих рядом по числу точек коллокаций рассчитанных величин. Сравним с найденным эталоном все значения. Покажем результаты сравнения нежирными линиями. Характеристику качества выбранного эталона дает совмещение двух семейств кривых. Из приведенных графиков можно сделать вывод, что значения C_X , C_Y , T^* и H^* в рассмотренных случаях имеют относительную погрешность около 10^{-12} .

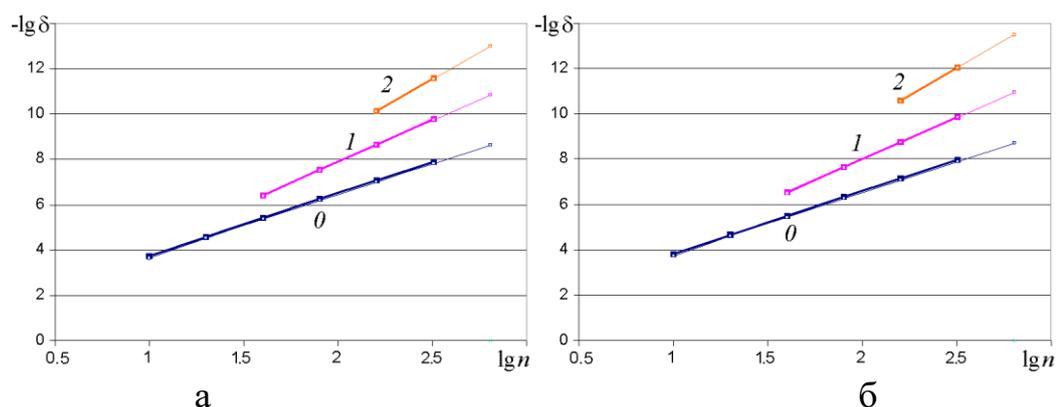


Рис. 2.3.5. Оценка погрешности параметров: а – C_X ; б – C_Y для $\mu=1$, $K=1$

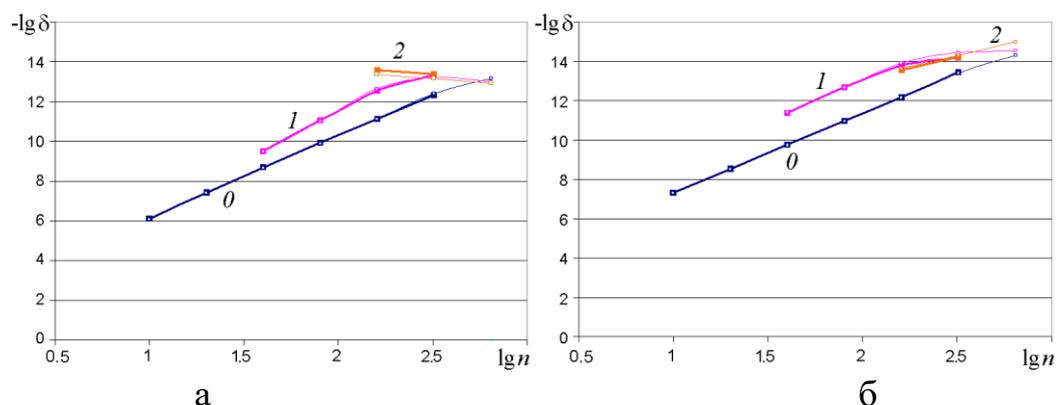


Рис. 2.3.6. Оценка погрешности параметров: а – T^* ; б – H^* для $\mu=1$, $K=1$

Если взять $\mu=1$ и $K=1$, рассчитанные величины для гладкого отрыва равны следующим значениям, приведенным в таблице 2.3.2.

Таблица 2.3.2. Результаты расчетов.

C_X	0.563588646494
C_Y	0.358778735216
θ_C	0.548199589367
T^*	0.879827111207
H^*	0.51181685530421

Численные результаты

На рис. 2.3.7–2.3.11 показаны формы границ для различных значениях угла в точке отрыва θ_C . При $\theta_C > \theta_{C_0}$ ($L_C < L_0$) свободная поверхность пересекает несмоченную часть оболочки (рис. 2.3.7, 2.3.8), т.е. нарушается первое условие Бриллюэна. При $\theta_C \rightarrow \pi/2$ ($L_C \rightarrow L$) каверна уменьшается и сжимается в точку (рис. 2.3.7). При выполнении условия Бриллюэна – Вилла ($\theta_C = \theta_{C_0}$, $L_C = L_0$) пересечение исчезает (рис. 2.3.9). То же самое имеет место при $\theta_C < \theta_{C_0}$ ($L_C > L_0$). Однако для достаточно малых θ_C возникает пересечение продолжения оболочки с замыкателем (рис. 2.3.11, 2.3.12).

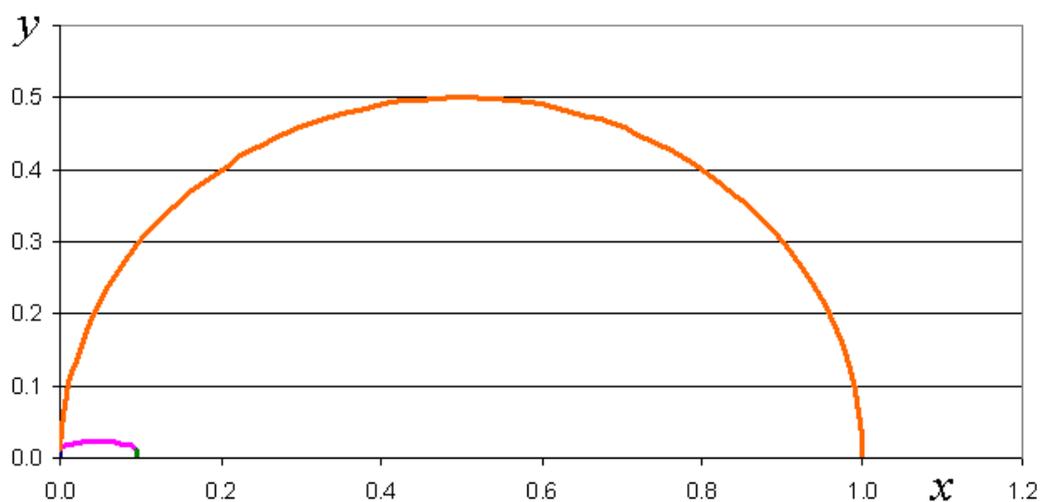


Рис. 2.3.7. Форма границ для $\theta_C > \theta_{C_0}$

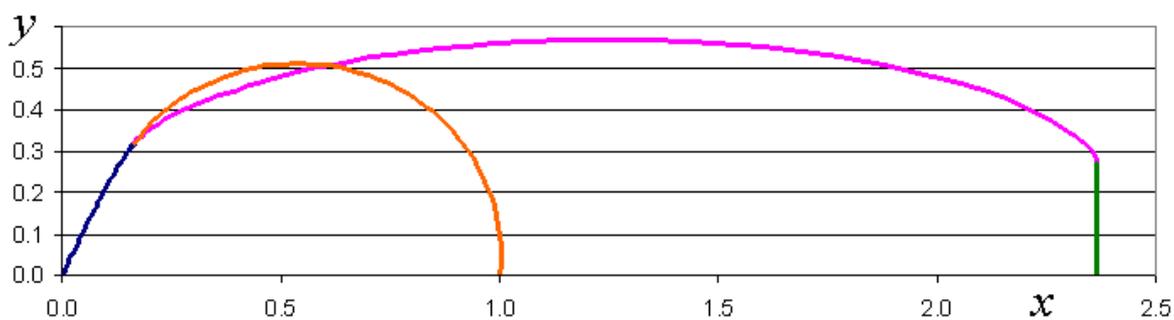
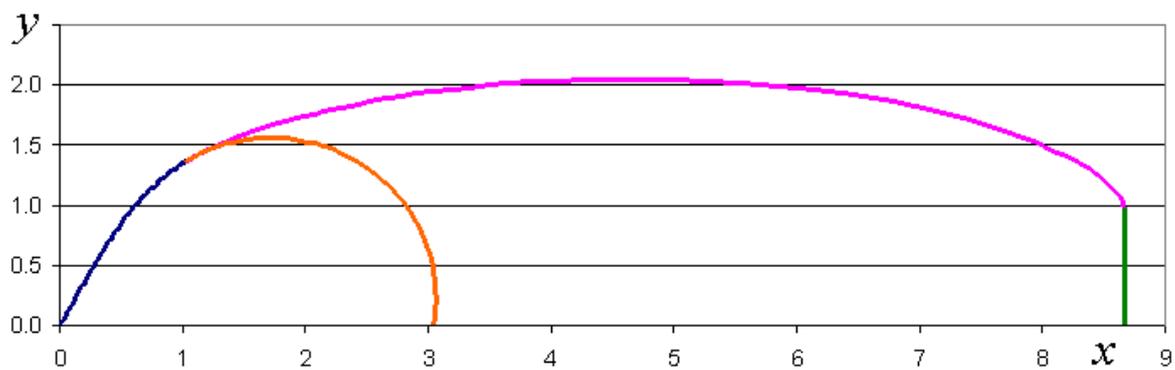
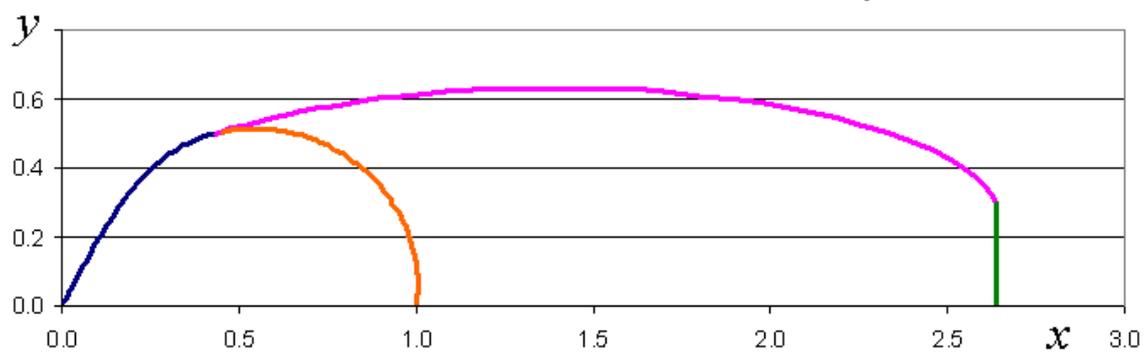
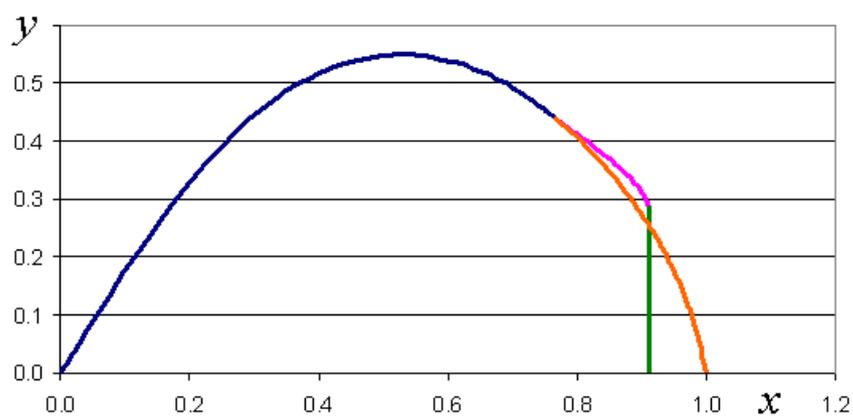
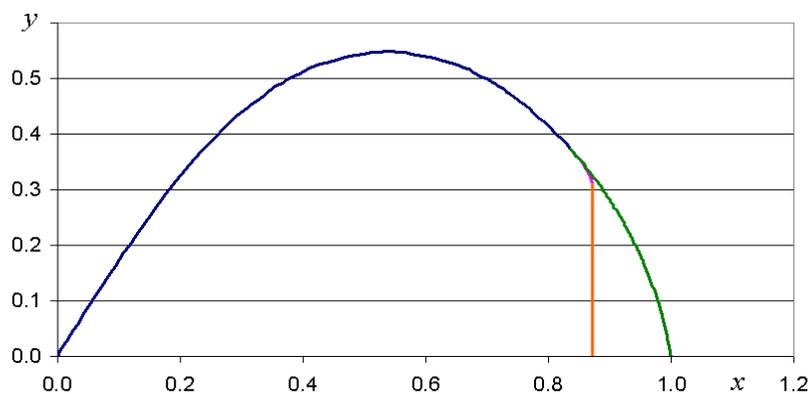


Рис. 2.3.8. Форма границ для $\theta_C > \theta_{C_0}$

Рис. 2.3.9. Форма границ для $\theta_C = \theta_{C_0}$ Рис. 2.3.10. Форма границ для $\theta_C < \theta_{C_0}$ Рис. 2.3.11. Форма границ для $\theta_C < \theta_{C_0}$ Рис. 2.3.12. Форма границ для $\theta_C < \theta_{C_0}$. Второе Бриллюэновское решение.

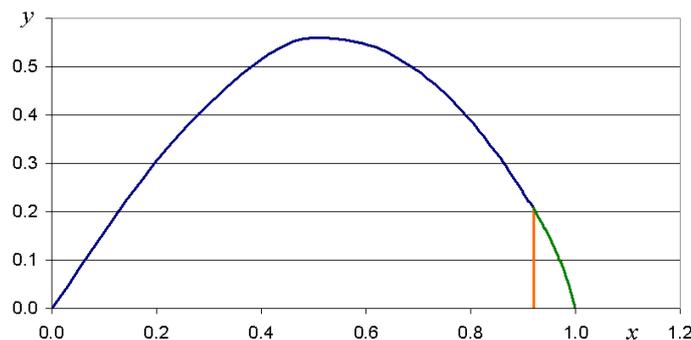


Рис. 2.3.13. Форма границ для $\theta_C < \theta_{C_0}$. Переход к безотрывному обтеканию.

На рис. 2.3.12 показаны формы области на плоскости ω . Видно, что при $\theta_C < \theta_{C_0}$ на смоченной части оболочки образуется зона со скоростью, большей, чем на границе каверны. Из этого следует, что давление в этой зоне меньше, чем в каверне, т.е. нарушается второе условие Бриллюэна. Таким образом, в данной схеме течения, как и в других, не нарушаются оба условия только при $\theta_C = \theta_{C_0}$.

Рассмотрим случаи, когда $\mu=1; 2, 4 \infty$. При $L/l=\pi/2, K=1$ функции рассматриваемых величин от длины соприкасающейся с жидкостью поверхности L_C продемонстрированы на рис. 2.3.15 – 2.3.17. На всех графиках жирная точка показывает место отрыва. $\theta_C = \theta_{C_0}, L_C = L_0$. При этом выполняется формула (2.3.14) условия гладкого отрыва.

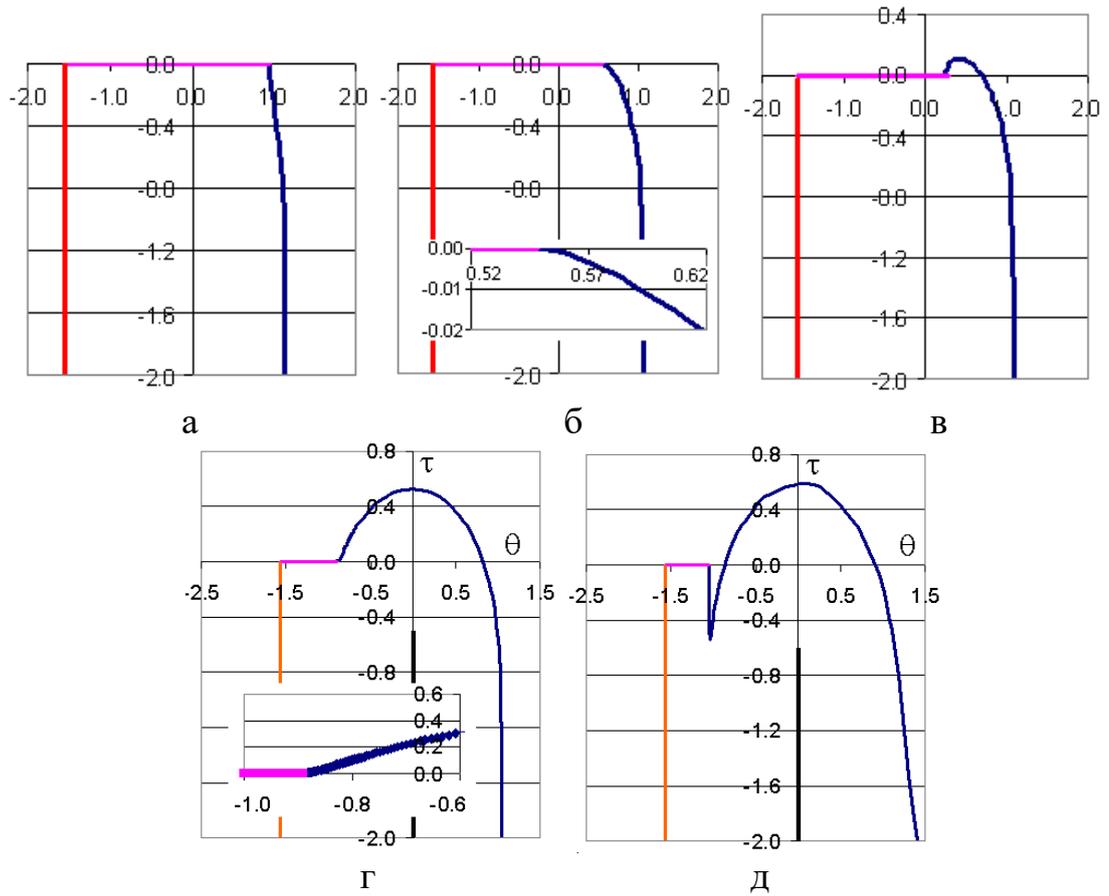


Рис. 2.3.14. Формы областей на плоскости ω : а – $\theta_C > \theta_{C_0}$ б – $\theta_C = \theta_{C_0}$;
 в-д – $\theta_C < \theta_{C_0}$

Второе решение, обозначенное на графиках точкой, также отвечает выполнению условия (2.3.14). Однако оно является менее важным, поскольку на границе оболочки имеет место разрезание (рис. 2.3.14, г).

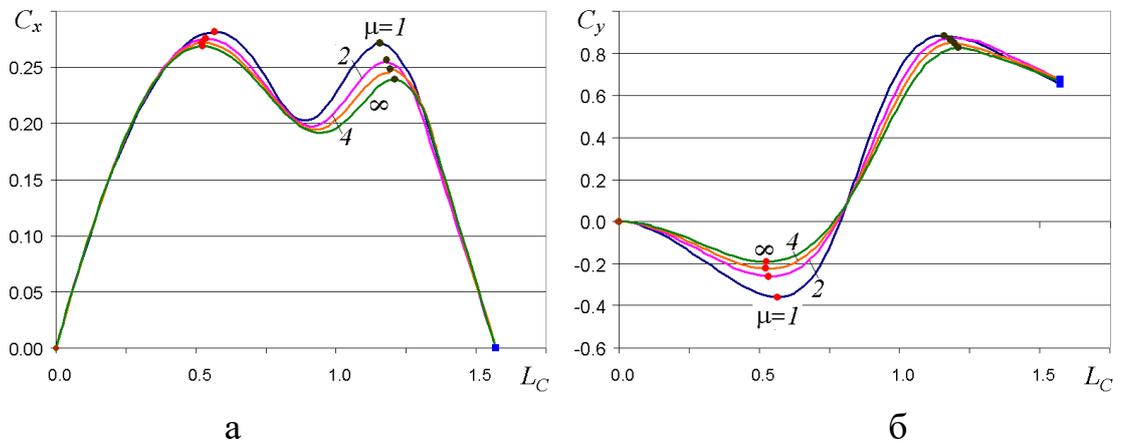


Рис. 2.3.15. Зависимости параметров от L_C : а – C_x ; б – C_y

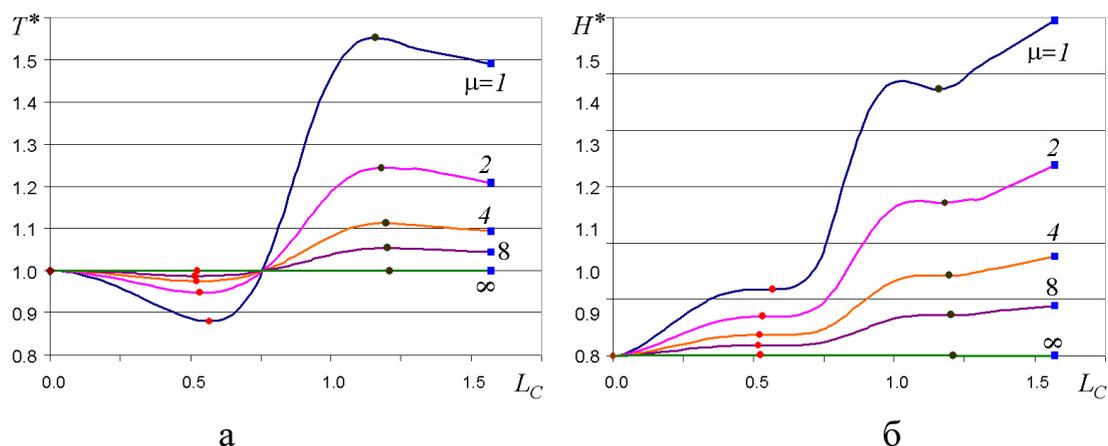


Рис. 2.3.16. Зависимости параметров от L_C а – T^* ; б – H^*

При этом образуется каверна, которая становится меньше и сжимается в точку (рис. 2.3.7), если размер части оболочки, соприкасающаяся с жидкостью, тоже уменьшается. Если же L_C стремится к общей длине оболочки L а также размер части оболочки, соприкасающаяся с жидкостью, растет, случается переход к безотрывному обтеканию [26]. На плоскости ω возникает разрез, направленный вниз (рис. 2.3.14, д), который уходит на бесконечность. Тем самым, задача распадается на две подзадачи. Первая - это безотрывное обтекание оболочки, другая - область течения которой на плоскости ω имеет вид полосы (слева), в микромасштабе представляет перетекание с наклонной пластины на вертикальную.

На рис. 2.3.17 приведены графики зависимостей длины и максимальной ширины каверны. В качестве длины каверны использовалось расстояние от точки A до замыкателя. Поэтому при $x_G < 1$ замыкатель пересекает несмоченную часть оболочки. При $\theta_C < 0$ в качестве максимальной ширины каверны y_{max} использовалась ордината точки C . Поэтому во втором Бриллюэновском решении экстремумы в зависимости параметров здесь отсутствуют.

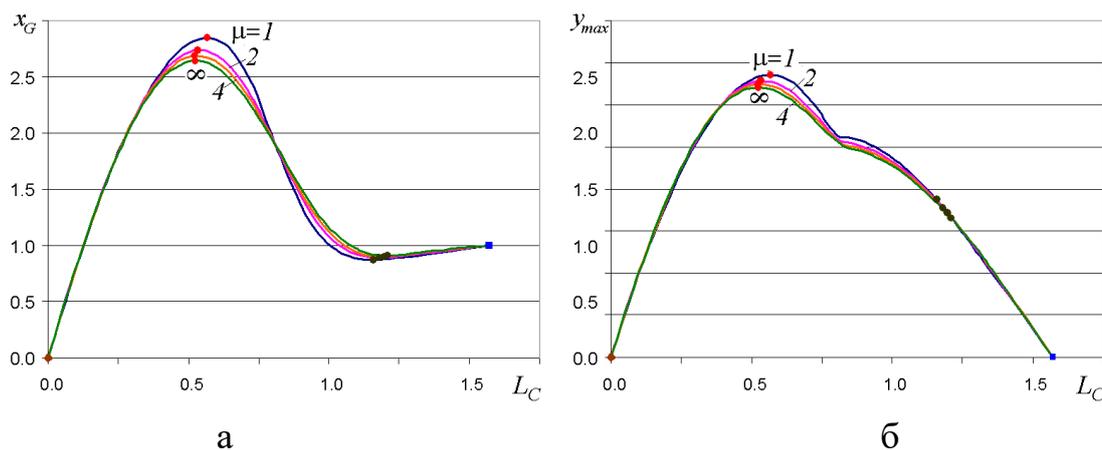


Рис. 2.3.17. Зависимости параметров от L_C а – x_G ; б – y_{max}

По рис. 2.3.15, 2.3.16, 2.3.17 можно сделать предположение, что эти функции имеют локальные экстремумы, если $\theta_C = \theta_{C_0}$. Поскольку точность передачи информации на графиках обычно не больше пары десятичных знаков (0.01) от общего диапазона исследования, то это предположение, в общем, не обосновано. При этом, если в точке экстремума зависимости имеют вид, для функций представленных как $f(x) \approx y_0 + k(x - x_0)^2$ при определении y_0 с точностью до 0.01, значение x_0 определяется с точностью на порядок меньше, то есть, приблизительно до 0.1. Значит, чтобы проверить и, тем более, обосновать высказанное предположение об экстремуме в конкретной точке, нужно получить результат с большим количеством знаков, а также необходимо изменить форму его графического представления.

В целом, исходя из оценок, представленных выше, можно заключить, что погрешность исследуемых параметров после фильтрации не превышает 10^{-12} .

Выберем значение равное 10^{-6} в качестве шага по параметру θ_C . С учетом сделанного о погрешности вывода рассмотрим $\Delta u = u - u_0$ в зависимости от $\Delta \theta_C = \theta_C - \theta_{C_0}$. В этих равенствах u_0 и θ_{C_0} это значения величин u и θ_C при выполнении условия Бриллюэна – Вилла (2.3.14).

Эти зависимости изображены на рис. 2.3.18, 2.3.19. При этом величина 10^{-6} является масштабной единицей оси OX , и величина 10^{-12} по оси OY

соответственно. Далее коэффициенты k подбираются, и график функции $f(x) \approx kx^2$ накладывается на полученные зависимости.

Из приведенных рисунков можно заметить высокую точность совпадения расположения экстремума с θ_{C0} .

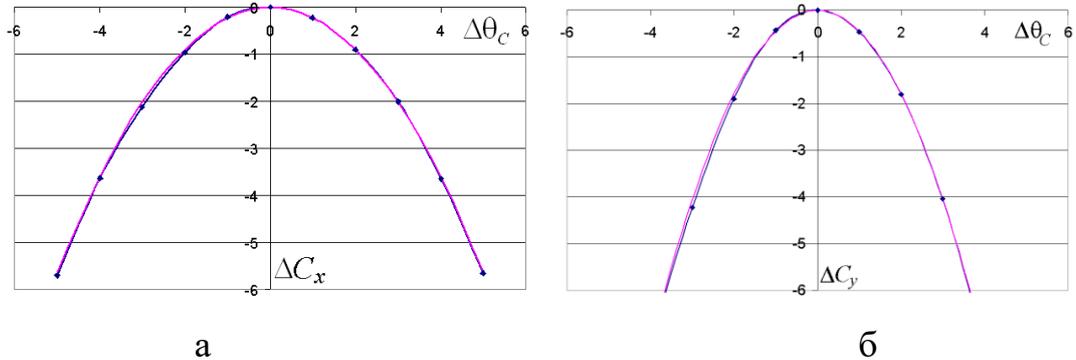


Рис. 2.3.18. Зависимости приращений параметров для $\mu=1, K=1$: а – C_x ; б – C_y

Далее необходимо рассмотреть зависимости параметров от L_C при различных числах кавитации K . На рис. 2.3.20 – 2.3.23 изображены эти зависимости при $\mu=\infty$ (обтекание кругового цилиндра).

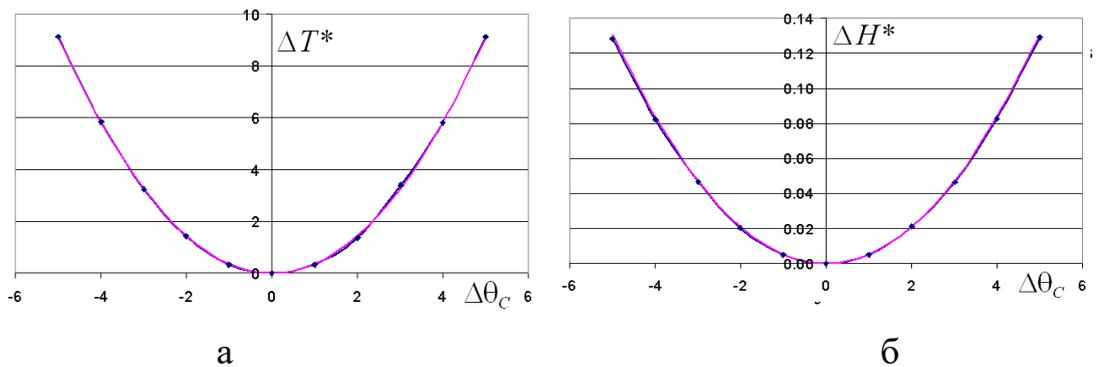


Рис. 2.3.19. Зависимости приращений параметров для $\mu=1, K=1$: а – T^* ; б – H^*

Видно, что при увеличении K два Бриллюэновских решения совпадают и исчезают. При уменьшении K длина и ширина каверны растут и в пределе при $K \rightarrow 0$ становятся бесконечными. При $K=0$ замыкатель отсутствует, в связи с этим при увеличении L_C не возникает режима безотрывного обтекания, а свободная граница пересекает горизонтальную ось GD' .

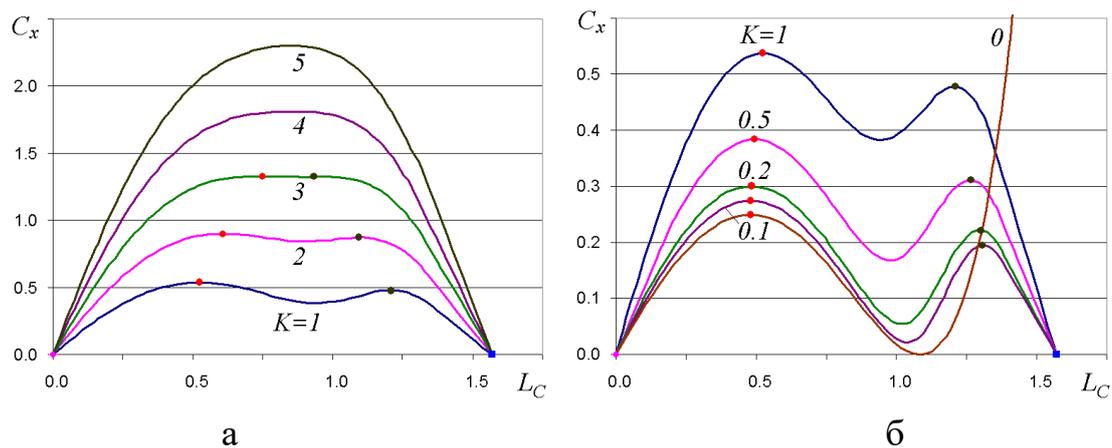


Рис. 2.3.20. Зависимости параметра C_x от L_C : а – $K \geq 1$; б – $K \leq 1$

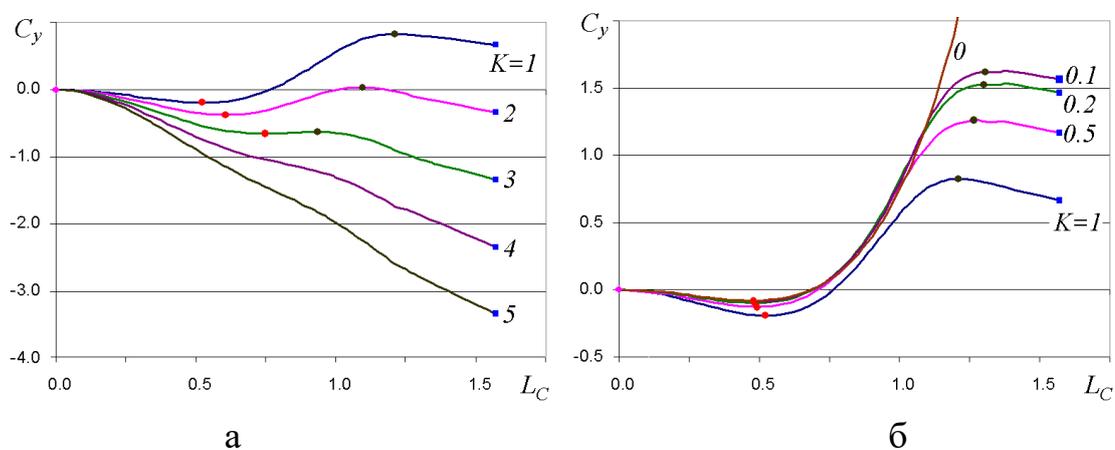


Рис. 2.3.21. Зависимости параметра C_y от L_C : а – $K \geq 1$; б – $K \leq 1$

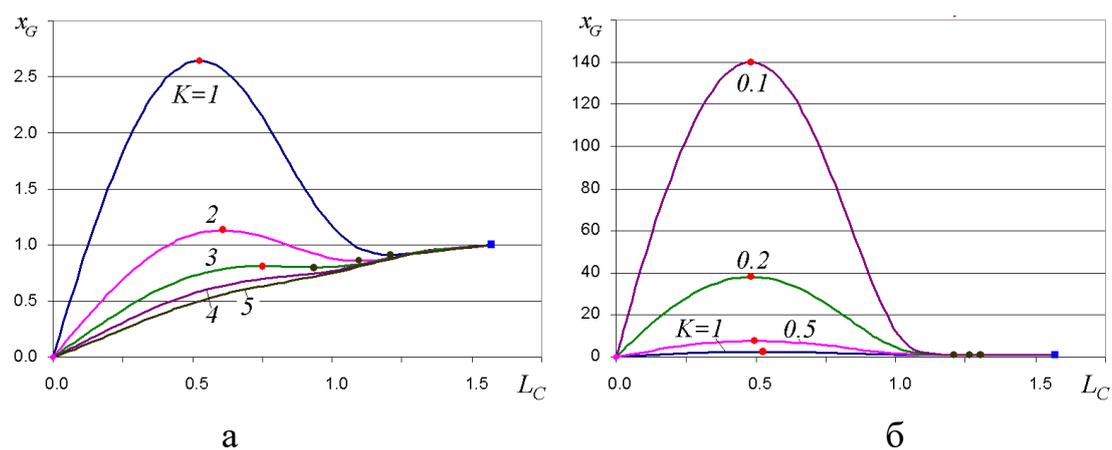


Рис. 2.3.22. Зависимости параметра x_G от L_C : а – $K \geq 1$; б – $K \leq 1$

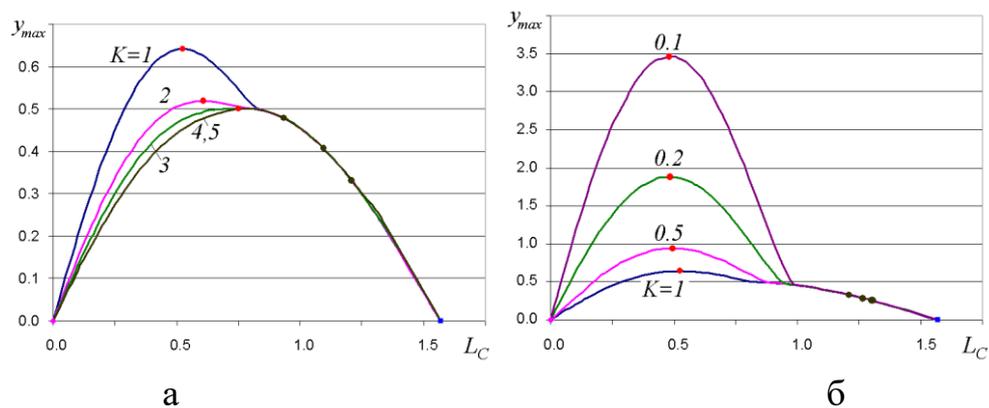


Рис. 2.3.23. Зависимости параметра y_{max} от L_C : а – $K \geq 1$; б – $K \leq 1$

Выводы к главе 2

Итак, технология фильтрации, проводимая на этапе постпроцессорной обработки данных вычислительного эксперимента, предоставляет возможность получить надежные оценки погрешности и значительно повысить точность и эффективность численных алгоритмов. Это подтверждается многочисленными численными экспериментами. Тестирование при помощи точных или приближенных (полученных иным способом) частных решений дает возможность удостовериться или опровергнуть эти оценки. Тем самым, повышается надежность числовых данных и выводов, основанных на оценках.

Были разработаны два метода решения задачи о солитоне Стокса, что позволило сравнить полученные решения с более ранними, а также между собой. Было продемонстрировано, что оценкам, полученным с помощью обработки алгоритмом фильтрации, можно доверять.

Следует отметить, что три задачи имеют интерес при оценке погрешностей с практической точки зрения. Первая – определение диапазона параметра дискретизации n и погрешности δ , где оценка погрешности по более простым правилам (типа Рунге и Ромберга) дает приемлемые результаты. Вторая задача состоит в том, чтобы обеспечить максимально возможную точность эталона для данного эксперимента и найти его оценку погрешности. Третья задача – исследование компонент погрешности для поиска несовершенностей и ошибок

в программе и улучшении численных алгоритмов. Все эти задачи решаются методами фильтрации.

Была предложена процедура, включающая две стадии: идентификация математической модели, посредством многокомпонентного анализа численных результатов эксперимента и тестирование путем сравнения с результатами, полученными независимо.

Исследование зависимостей погрешностей от числа дискретизации n (например, числа узлов коллокации) позволяет описать их различное поведение в трех диапазонах. При малых n имеет место область хаоса, вызванного грубой аппроксимацией; далее следует область преобладания регулярных компонент погрешности, которые могут быть фильтрованы. При больших n преобладает погрешность округления. Границы областей определяются экспериментально.

Для исследования кавитационного обтекания оболочки были разработаны два численно-аналитических метода. В первом из них использован стеной ряд, во втором использован интеграл Шварца (2.3.12). Первый имеет более высокий порядок точности, однако устойчиво работает в очень ограниченном диапазоне чисел $\mu \approx 1$ и разностей $L_C \approx L_0$. Второй метод работает практически во всем исследованном диапазоне параметров, но имеет более низкий порядок точности. При этом использование интегрального условия (2.3.9) вместо дифференциального (2.3.8) существенно улучшает характеристики метода. Наличие двух методов решения одной задачи позволяет сравнить и проверить непротиворечивость полученных результатов и их оценок погрешности [28].

В проведенном исследовании было выявлено, что при гладком отрыве в зависимости от положения точки отрыва имеет место наличие локальных экстремумов для многих параметров. Описанный алгоритм фильтрации численных результатов позволил с большой точностью подтвердить данный вывод.

Глава 3. Моделирование процессов ЭХО с помощью методов ТФКП

3.1. Предельно-квазистационарное копирование круглого электрод-инструмента

Выберем электрод-инструмент (ЭИ) круглой формы и заготовку с плоской поверхностью. Инструмент движется со скоростью V_{et} в направлении поверхности и внедряется в заготовку перпендикулярно поверхности, для получения формы, которая показана на рис. 3.1.1,*а*. Пространство между электродами заполнено электролитом, и его форма представлена на рис. 3.1.1,*б*. Расстояние CD называется исходным межэлектродным зазором и равно S_0 . Точки A и A' представляют единую точку бесконечности, также B и B' . Границы условного разреза FA' и GB' проходят по линии тока. Обозначим через U разность потенциалов между анодом и катодом.

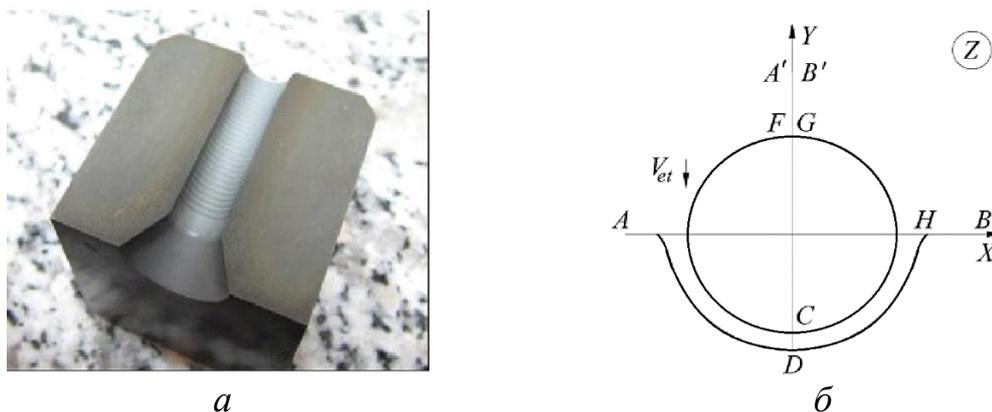


Рис. 3.1.1 Копирование круглого ЭИ: *а* – экспериментальный образец [22];
б – физическая плоскость Z

Межэлектродное пространство, соответствующее физической плоскости, конформно отображается на прямоугольник в плоскости комплексного потенциала $W = \Phi + i\Psi$ следующим образом. Границы условного разреза (линии тока FA' и GB') переходят в части горизонтальных прямых, эквипотенциальная поверхность катода (ЭИ) FCG переходит в отрезок вертикальной прямой $\Phi = -U$, эквипотенциальная поверхность анода ADB переходит в отрезок вертикальной прямой $\Phi = 0$ (рис. 3.1.2, *а*).

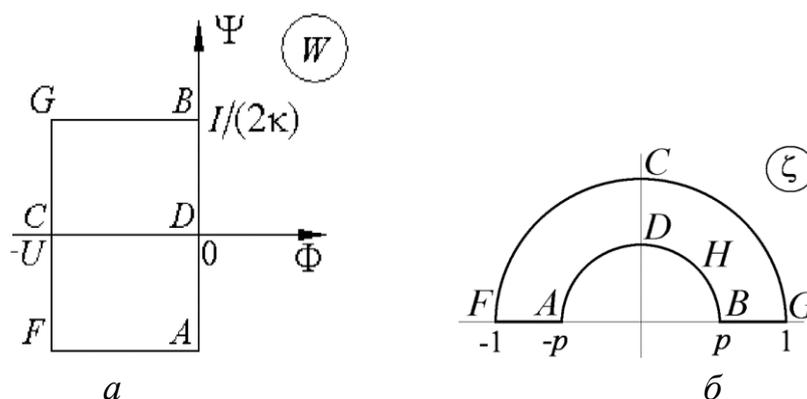


Рис 3.1.2. Межэлектродное пространство на плоскостях: a – комплексного потенциала; \bar{b} – параметрической плоскости ζ

Представим x , y , τ , w в безразмерном виде

$$x = X/l, \quad y = Y/l, \quad \tau = \frac{V_{et}}{l} t = k\eta_0 U t / l^2, \quad w = W/U,$$

где $l = k\eta_0 U / V_{et}$ (стационарный зазор, который был получен в задаче об формообразовании плоским горизонтальным катодом). Запишем

$$v_{et} = -\frac{dy_{A'}}{d\tau} = -\frac{1}{l} \frac{l}{V_{et}} \frac{dY_{A'}}{dt} = \frac{V_{et}}{V_{et}} = 1.$$

Для области на параметрической плоскости ζ выберем половину кольца (рис. 3.1.2, \bar{b}) и конформно отобразим Z на ζ . Функция

$$W = \frac{U}{\ln p} \ln \zeta - U - i \frac{U}{\ln p}. \quad (3.1.1)$$

осуществляет отображение плоскости W на плоскость ζ .

Число $\alpha = \frac{E_0}{E_1} = \frac{j_0}{j_1}$, в котором $E_0 = V_{et} / (k\eta_0)$, $E_1 = j_1 / \kappa$, характеризует в

общем случае режим формообразования. Для обычного режима электрохимической обработки характерно значение $\alpha = \infty$, для предельного $\alpha = 1$. При предельном режиме процесс растворения идет с максимальной степенью локализации [22].

Рассмотрим предельный режим ЭХО с $\alpha = 1$. При нем квазистационарное решение данной задачи до некоторого момента времени является не приближенным к нестационарному, а точным.

В силу симметрии задачи будем работать только с правой половиной области МЭП. Введем в рассмотрение плоскость годографа безразмерной напряженности $\bar{E} = dw/dz$ (рис. 3.1.3,а). Вертикальный отрезок NB и разрез DMH по дуге окружности $|\bar{E}| = 1$ на плоскости годографа является границей обрабатываемой поверхности.

Поскольку при $|\bar{E}| < 1$ растворение не происходит, а значение $|\bar{E}| = 1$ является максимальным, на всех участках, где растворение происходит, в рассматриваемом процессе $|\bar{E}| = 1$.

Таким образом, решения, которые получаются в разные моменты времени τ квазистационарны аналогично [25]. При этом нет необходимости решать нестационарную задачу.

На плоскости изменения функции Жуковского $\omega = i \ln \frac{dw}{dz}$ все образы участков границ анода – это части прямых и окружности, образ границы катода – некоторая кривая (рис. 3.1.3,б).

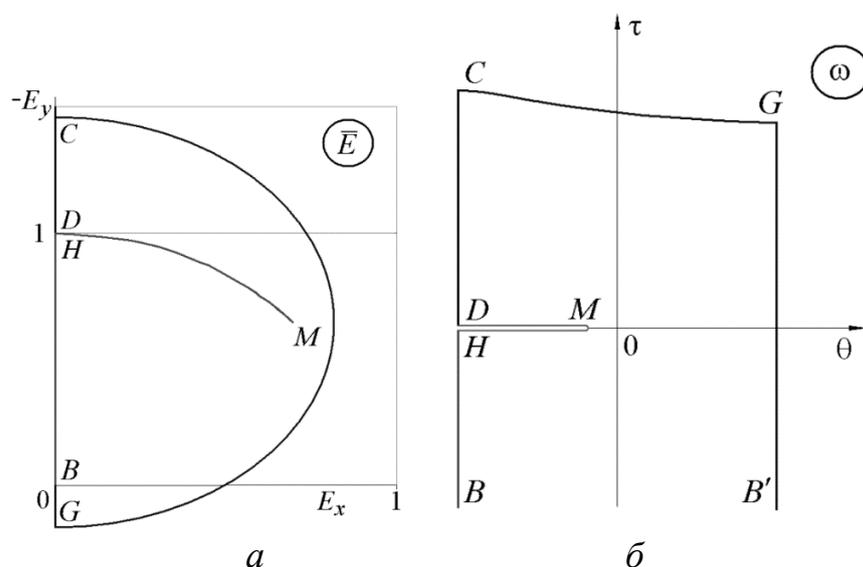


Рис. 3.1.3. Образы МЭП при квазистационарном решении для $\alpha = 1$:
 a – на плоскости годографа напряженности; b – на плоскости
 логарифмического годографа

Аналитическая функция $\omega(\xi)$ имеет следующие краевые условия:

– для $B'G$ $\operatorname{Re} \omega = \theta = \frac{\pi}{2}$;

– для CD и BH $\operatorname{Re} \omega = \theta = -\frac{\pi}{2}$;

– для CG $|z - y_0| = r$; (3.1.2)

– для DMH $\operatorname{Im} \omega = \tau = 0$.

Здесь y_0, r – ордината центра и радиус окружности в безразмерном виде.

Метод решения

Для того, чтобы избежать необходимости выполнения условия (3.1.2) на плоскости функции Жуковского произведем замену криволинейного участка на другую кривую (рис. 3.1.4,а).

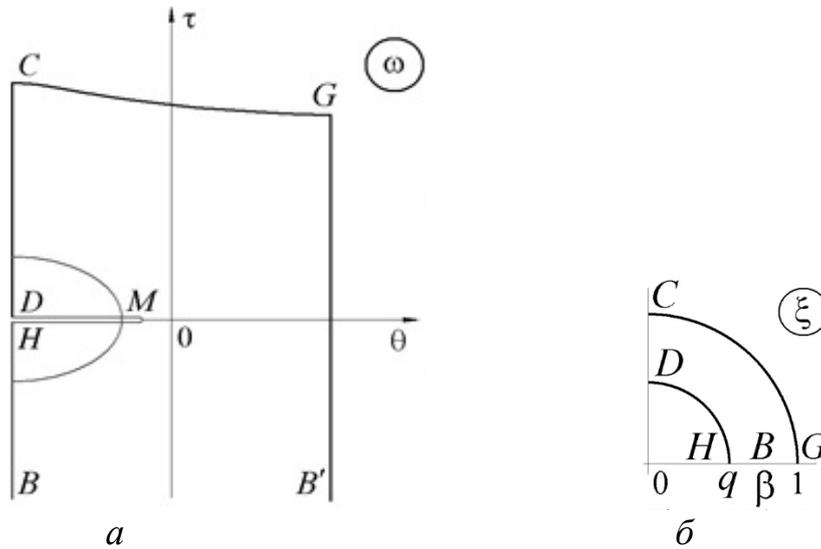


Рис. 3.1.4. Образы МЭП для вспомогательного решения:
a – на плоскости логарифмического годографа напряженности; *б* – на
 параметрической плоскости ξ

Отобразим область плоскости логарифмического годографа на область, соответствующую МЭП в плоскости параметрического переменного ξ , которую выберем в форме четверти кольца (рис. 3.1.4,б).

Из рис. 3.1.4,а видно, что нужно трансформировать вертикальную полуполосу ω с выемкой на четверть кольца ξ . Мы можем вертикальную криволинейную полуполосу ω без разреза перевести в четверть круга плоскости ξ при помощи функции

$$\omega_0(\xi) = i \ln(\xi^2 - \beta^2) + iC_0 + \frac{\pi}{2}. \quad (3.1.3)$$

Если взять функцию, у которой на окружности $\xi = e^{i\sigma}$ мнимая часть равна нулю, а действительная часть равна нулю на действительном и мнимом радиусе, то появится возможность трансформировать выемку в разрез. Сходящийся ряд Лорана [50]

$$\omega_1(\xi) = i \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} (\xi^{2m} - \xi^{-2m}) \quad (3.1.4)$$

будет использован для этих целей.

При таких условиях функция $\omega_1(\xi)$ в соответствии с принципом симметрии может быть аналитически продолжена на все кольцо, и как аналитическая в кольце функция представлена в виде сходящегося ряда Лорана.

Используем степенной ряд $\xi = qe^{i\sigma}$ для разложения логарифма в зависимости (3.1.3) $\omega_0(\xi)$, чтобы найти значения коэффициентов c_{2m}

$$\omega_0(qe^{i\sigma}) = iC_0 + 2i \ln \beta - \frac{\pi}{2} - i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^{2m}}{\beta^{2m}} e^{2mi\sigma}. \quad (3.1.5)$$

Запишем для $\xi = qe^{i\sigma}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[\omega_0(qe^{i\sigma}) + \omega_1(qe^{i\sigma})] &= C_0 + 2 \ln \beta - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^{2m}}{\beta^{2m}} \cos 2m\sigma + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} c_{2m} (q^{2m} - q^{-2m}) \cos 2m\sigma = 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$C_0 = -2 \ln \beta, \quad c_{2m} = \frac{1}{m} \frac{q^{2m}}{\beta^{2m} (q^{2m} - q^{-2m})}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \omega_0(\xi) + \omega_1(\xi) &= i \ln(\xi^2 - \beta^2) - 2i \ln \beta + \\ &+ \frac{\pi}{2} - i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{q^{2m}}{\beta^{2m} (q^{2m} - q^{-2m})} (\xi^{2m} - \xi^{-2m}). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Полученная зависимость (3.1.6) описывает процесс формообразования, инициируемый электродом-инструментом, форма которого криволинейна и в общем случае незамкнута. Поэтому функцию логарифмического годографа нужно изменить с учетом круглой формы электрода-инструмента. Добавим в неё ещё одно слагаемое $\omega_2(\xi)$. Условия для зависимости $\omega_2(\xi)$:

- для BH , CD и $B'G$ $\operatorname{Re} \omega = \theta = 0$;

- для DMH $\text{Im } \omega = \tau = 0$.

Сходящийся ряда Лорана

$$\omega_2(\xi) = i \sum_{m=1}^{\infty} d_{2m} \left(\frac{\xi^{2m}}{p^{2m}} - \frac{p^{2m}}{\xi^{2m}} \right) \quad (3.1.7)$$

используется для представления данной зависимости в кольце, на которое введенные условия позволяют согласно принципу симметрии аналитически продолжить $\omega_2(\xi)$.

Для того, чтобы зависимость

$$\omega(\xi) = \omega_0(\xi) + \omega_1(\xi) + \omega_2(\xi)$$

удовлетворяла условию (3.1.2), нужен соответствующий выбор коэффициентов ряда d_{2m} .

Чтобы трансформировать параметрическую плоскость ζ (рис. 3.1.2) в параметрическую плоскость ξ (рис. 3.1.4,б), сначала найдем связь между полосой χ [24] (рис. 3.1.5,а) и правой четвертью кольца ζ . Для этого нужно сперва преобразовать четверть кольца в полукольцо $\zeta_1 = \zeta^2$ ($p_1 = p^2$)

$$\begin{aligned} \chi(\zeta_1) &= \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{\zeta_1 - 1}{\zeta_1 + 1} - i \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \times \\ &\times \frac{p_1^{2m-1}}{p_1^{2m-1} - p_1^{-2m+1}} \left(\zeta_1^{2m-1} + \zeta_1^{-2m+1} \right) \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

$$\begin{aligned} \gamma = \chi(p_1), \quad \frac{d\chi}{d\zeta} &= \frac{d\chi}{d\zeta_1} \frac{d\zeta_1}{d\zeta} = \frac{1}{\pi} \frac{2\zeta}{\zeta_1^2 - 1} + \\ &+ \frac{4\zeta}{\pi \zeta_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_1^{2m-1}}{p_1^{2m-1} - p_1^{-(2m-1)}} \left(\zeta_1^{2m-1} - \zeta_1^{-2m+1} \right). \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

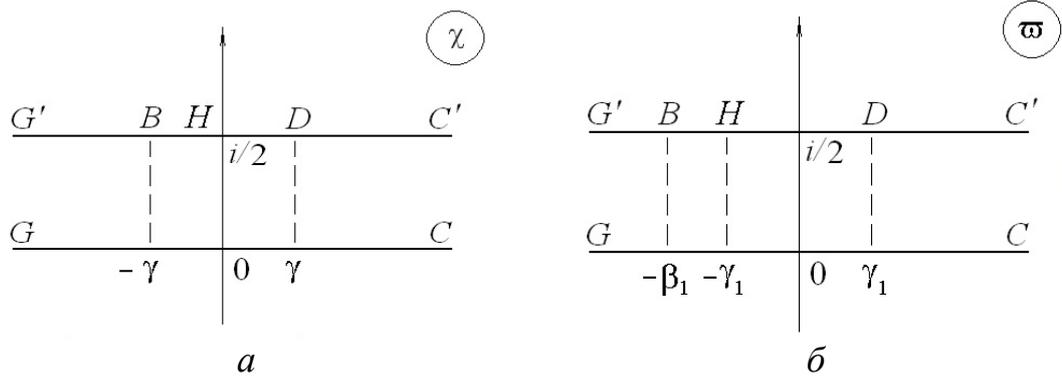


Рис. 3.1.5. Формы образов МЭП на параметрических плоскостях χ и ϖ

Найдем производную функции W , которая по условию (3.1.2)

$$\frac{dw}{d\chi} = \frac{1}{\ln p} \frac{1}{\zeta} \left(\frac{d\chi}{d\zeta} \right)^{-1}. \quad (3.1.10)$$

Чтобы использовать отображение аналогичное (3.1.8), во-первых, трансформируем четверть кольца в полукольцо $\xi_1 = \xi^2$ ($q_1 = q^2$), во-вторых, найдем связь между полукольцом ξ и полосой ϖ .

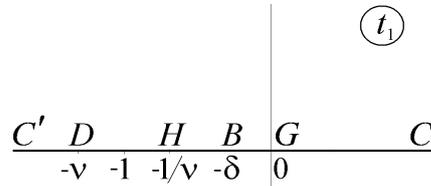
$$\begin{aligned} \varpi(\xi_1) &= \frac{1}{\pi} \left(\ln \frac{\xi_1 - 1}{\xi_1 + 1} - i \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \times \\ &\times \frac{q_1^{2m-1}}{q_1^{2m-1} - q_1^{-2m+1}} \left(\xi_1^{2m-1} + \xi_1^{-2m+1} \right), \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

$$\gamma_1 = \varpi(q_1), \quad -\beta_1 = \varpi(\beta^2),$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varpi}{d\xi} &= \frac{d\varpi}{d\xi_1} \frac{d\xi_1}{d\xi} = \frac{1}{\pi \xi_1} \frac{2\xi}{\xi_1^2 - 1} + \\ &+ \frac{2\xi}{\pi \xi_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_1^{2m-1}}{q_1^{2m-1} - q_1^{-(2m-1)}} \left(\xi_1^{2m-1} - \xi_1^{-2m+1} \right). \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Чтобы найти конформное отображение χ на ϖ , необходимо сдвинуть полосу плоскости χ вдоль оси OX (рис. 3.1.5). При этом точка H , (середины отрезка BD) $(\gamma_1 - \beta_1)/2$ должна оказаться на оси OY

$$\chi = \varpi - \frac{\gamma_1 + \beta_1}{2}. \quad (3.1.13)$$

Рис. 3.1.6. Параметрическая плоскость t_1

Найдем отображение χ и ϖ на плоскость t_1 , которая представлена верхней полуплоскостью (рис. 3.1.6). Это позволит связать параметры p и q .

Итак,

$$\varpi = \frac{1}{2\pi} \ln t_1, \quad (3.1.14)$$

$$\varpi_D = \frac{i}{2} + \frac{1}{2\pi} \ln v, \quad \varpi_H = \frac{i}{2} - \frac{1}{2\pi} \ln v, \quad \varpi_B = \frac{i}{2} + \frac{1}{2\pi} \ln \delta, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2\pi} \ln v,$$

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \ln t_1 + C, \quad \chi_D = \frac{i}{2} + \frac{1}{2\pi} \ln v + C, \quad \chi_B = \frac{i}{2} + \frac{1}{2\pi} \ln \delta + C.$$

Поскольку $\operatorname{Re} \chi_D = -\operatorname{Re} \chi_B$, то

$$C = -\frac{1}{4\pi} (\ln v + \ln \delta), \quad \gamma = \operatorname{Re} \chi_D = \frac{1}{4\pi} (\ln v - \ln \delta), \quad \chi = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{t_1}{\sqrt{v\delta}}. \quad (3.1.15)$$

Исключим t_1 из (3.1.14) и (3.1.15)

$$t_1 = e^{2\pi\varpi} = \sqrt{v\delta} e^{2\pi\chi},$$

$$\varpi = \chi + \frac{1}{4\pi} \ln v\delta, \quad \chi = \varpi - \frac{1}{4\pi} \ln v\delta, \quad (3.1.16)$$

$$\gamma = \operatorname{Re} \chi_D = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{v}{\delta}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2\pi} \ln v, \quad v = e^{2\pi\gamma_1}, \quad \delta = v e^{-4\pi\gamma} = e^{2\pi(\gamma_1 - 2\gamma)},$$

$$v\delta = e^{2\pi\gamma_1} e^{2\pi(\gamma_1 - 2\gamma)} = e^{4\pi(\gamma_1 - \gamma)}.$$

Связь χ и ϖ

$$\chi = \varpi - \frac{1}{4\pi} \ln v\delta = \varpi - \gamma_1 + \gamma. \quad (3.1.17)$$

Формула соответствия p и q , учитывающая χ (3.1.13) имеет следующий вид

$$\gamma = \frac{\gamma_1 - \beta_1}{2}. \quad (3.1.18)$$

Из формул (3.1.10) и (3.1.17)

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{d\varpi} = 1, \quad \frac{dw}{d\varpi} &= \frac{dw}{d\chi} \frac{d\chi}{d\varpi} = \frac{1}{\ln p} \frac{1}{\zeta} \left(\frac{d\chi}{d\zeta} \right)^{-1}, \\ \frac{dw}{d\xi} &= \frac{dw}{d\varpi} \frac{d\varpi}{d\xi} = \frac{1}{\ln p} \frac{1}{\zeta} \left(\frac{d\chi}{d\zeta} \right)^{-1} \frac{d\varpi}{d\xi}. \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Поэтому

$$dz = e^{i\omega(\xi)} \frac{dw}{d\xi} d\xi. \quad (3.1.20)$$

Как и в предыдущих случаях, метод коллокаций был применен для численного решения задачи. Для его использования потребуем, чтобы для отдельных точек дуги $\xi_m = e^{i\sigma_m}$, $\sigma_m = \pi m / (2n)$, ($m = \overline{0, n-1}$) выполнялось уравнение $|z - y_0| = r$ для определения формы электрод-инструмента (3.1.2) при n слагаемых в сумме (3.1.8).

При обходе катода должно сохраняться условие замкнутости, а также условие, которое определяет взаимное расположение исходной обрабатываемой поверхности и катода. Система содержит $n + 2$ НЛУ. Её параметрами являются d_m , ($m = \overline{1, n}$), q , β .

Решение данной системы происходит по модификации метода Ньютона [7], в которой во всех уравнениях минимизируется сумма квадратов невязок для регулирования шага. Для того, чтобы найти формулу соответствия между ξ_m и

ζ_m для решения (3.1.17) $\chi(\zeta_m) = \varpi(\xi_m) - \gamma_1 + \gamma$ сначала были найдены $\varpi(\xi_m)$. Уравнение (3.1.18) перерешивалось каждый раз, когда определялись невязки.

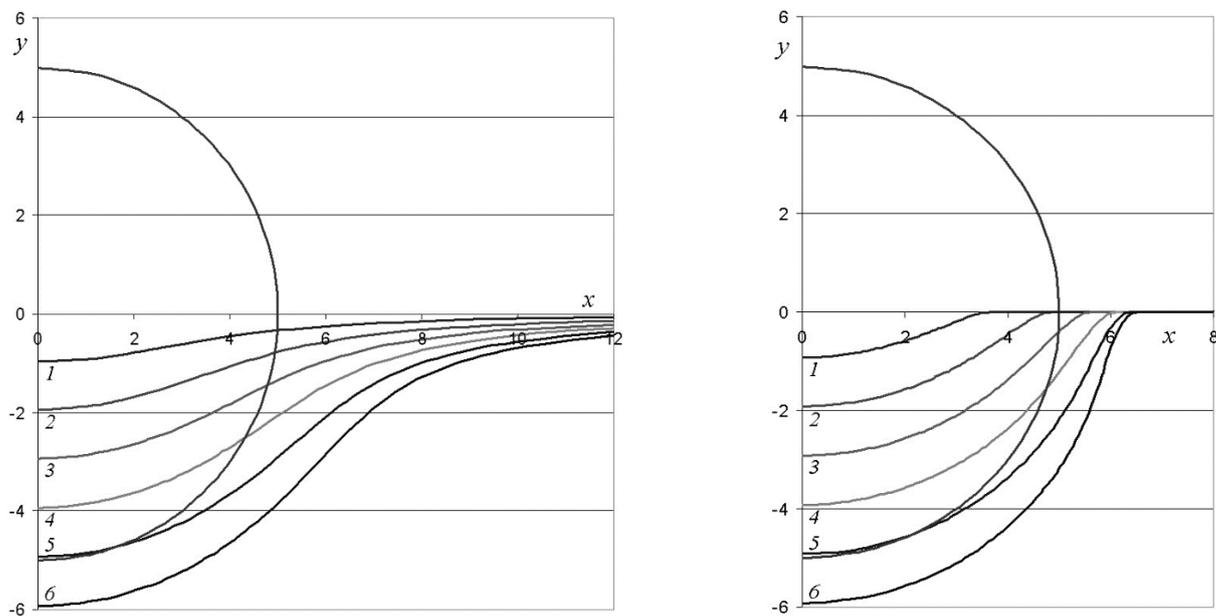
Численные результаты

Когда центр круглого катода (ЭИ) y_0 сдвигается от его исходного расположения $y_0(\tau) = r + 1 - \tau$, форма обрабатываемой поверхности меняется. Цифрами 1, 2, ... на рис. 3.1.7 и 3.1.8 обозначены кривые, соответствующие получаемой анодной поверхности в различные моменты времени $\tau = 1, 2, \dots, r+1$. Здесь $r=5$ и 10.

В [24] рассмотрена нестационарная задача. При $\alpha = \infty$ для постоянного выхода по току для этой задачи на рис. 3.1.7,а и 3.1.8,а продемонстрированы анодные поверхности, с которыми можно сравнить формы, полученные в данной задаче. Впервые в [12] было найдено решение с бесконечной кривизной свободной границы в точке отрыва. Анодная поверхность во всех других точках практически эквидистантна поверхности ЭИ при $\alpha=1$. Такое же решение получается в данной задаче около точки, в которой разделяются зона растворения и зона отсутствия растворения. Оно аналогично решению гидродинамической задачи об отрыве свободной поверхности от прямолинейного щита. На рис. 3.1.7,б и 3.1.8,б ($\alpha=1$) показано, как растет локализация процесса растворения. При этом формы анодной поверхности приближаются к экспериментальной. Это в большей степени касается ее верхней части (рис. 3.1.1,а).

Растворение прекращается при уменьшении напряженности в верхней части анодной поверхности. Это происходит при дальнейшем внедрении круглого ЭИ в материал заготовки. Значит, нестационарный процесс уже не может быть описан с помощью квазистационарного решения (рис. 3.1.9), так как в этом случае процесс растворения материала уже перестает быть квазистационарным. Тем не менее, проведенный численный эксперимент говорит о том, что величина напряженности не падает до такой величины, пока

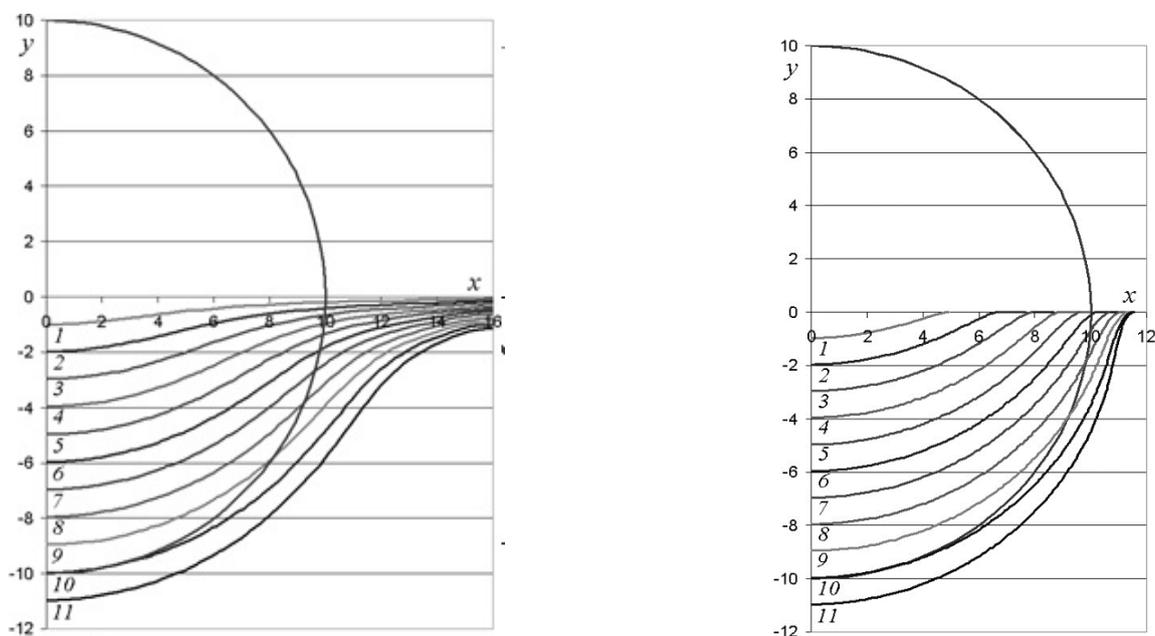
ЭИ не внедрится в заготовку до его центра, и до этого момента времени нестационарный процесс моделируется точно.



a

б

Рис. 3.1.7. Формы МЭП для $r=5$:
 $a - \alpha=\infty$ [24]; $б - \alpha=1$



a

б

Рис. 3.1.8. Формы МЭП для $r=10$: $a - \alpha=\infty$ [24]; $б - \alpha=1$

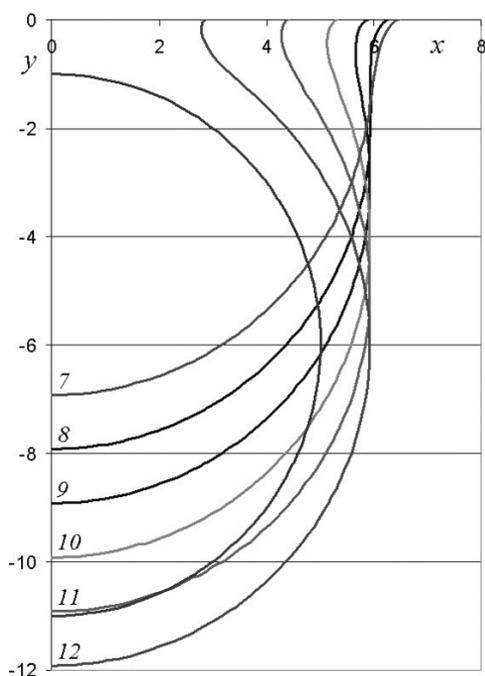


Рис. 3.1.9. Формы МЭП для $r=5$, $\alpha=1$ при $y_0=-1, -2, \dots -6$

3.2. Осесимметричная задача об электрохимической обработке точечным электродом-инструментом в пассивирующем электролите

Плоские задачи с монотонной зависимостью анодного потенциала $\Phi_a(J)$ решались в [5, 6, 42] для двугранного и криволинейного бесконечного анода, при этом требование монотонности $\Phi_a(J)$ было существенно для предложенных методов решения задач. В [36, 38, 57] при решении плоских задач с немонотонной зависимостью нормальной составляющей плотности тока $J_n = F_1(\Phi_a)$ использовались степенные ряды, условие сходимости которых существенно ограничивает вид краевого условия. Вследствие этого в [36, 38, 57] использовалась упрощенная зависимость $J_n = F_1(\Phi_a)$, далекая от зависимости, аппроксимирующей экспериментальные данные [22, 69, 87]. В [16, 79] решены плоские задачи обработки точечным ЭИ с экспериментальной зависимостью $J_n = F_1(\Phi_a)$ методом, использующим интеграл Шварца [49].

Постановка и метод решения задачи

Электрод-инструмент (ЭИ), представляющий собой точку, находится на оси OX на расстоянии h от начала координат в точке C . Граница плоской поверхности анода AB совпадает с осью OY , как показано на рис. 3.2.1,а, $Z=X+iY$. Рассматривается осесимметричная задача о распределении электрического поля между катодом и анодом. Нормальная составляющая $J_n = F_1(\Phi_a)$, поскольку реальная зависимость плотности тока от Φ_a , описанная в [22], применяется для решения задачи. Существует зависимость анодного потенциала анода от плотности тока.

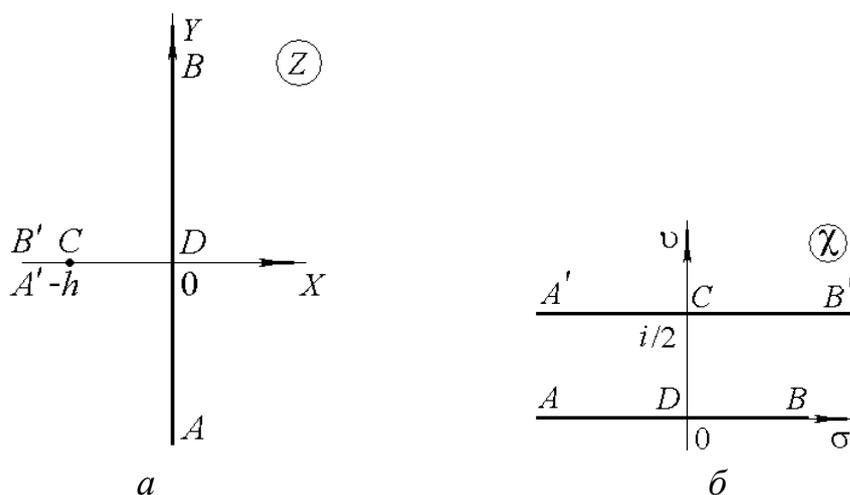


Рис. 3.2.1. Формы области на плоскостях: a – физической; b – параметрической

Для решения задачи полоса, ширина которой равна $1/2$, строится на плоскости параметрического переменного $\chi = \sigma + i\nu$. На рис. 3.2.1,б. показано расположение точек на параметрической плоскости.

Чтобы трансформировать полосу плоскости χ в левую полуплоскость с разрезом при $h > 0$, применяется зависимость

$$Z(\chi) = ih \operatorname{sh} \pi \chi. \quad (3.2.1)$$

Координата источника $Z(i/2) = -h$. Переведем границу $\chi = \sigma$ на анодную поверхность ADB , а границу $\chi = \sigma + i/2$ – на линию разреза $A'CB'$.

При допущении об однородности среды электрическое поле является потенциальным и соленоидальным, и для решения плоских задач такого типа широко применяются методы теории аналитических функций комплексного переменного [5, 6, 22, 36, 38, 42, 57], поскольку удовлетворяются уравнения Коши-Римана для потенциала Φ и функции тока Ψ [49]. Для осесимметричного поля соответствующие уравнения выглядят следующим образом

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = -\frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial X}, \quad (3.2.2)$$

(если осью симметрии является ось X). Наличие множителя $1/Y$ в правых частях уравнений не позволяет напрямую использовать аналитические функции для моделирования распределения потенциала и функции тока. Однако Г.Н. Положим [65] были разработаны интегральные преобразования аналитических функций комплексного переменного $f(Z)$, позволяющие получить нужные зависимости

$$\Phi(X_0, Y_0) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{X_1}^{Z_0} f(Z) \frac{dZ}{\sqrt{(Z - Z_0)(Z - \bar{Z}_0)}}, \quad (3.2.3)$$

$$\Psi(X_0, Y_0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{X_1}^{Z_0} f(Z) \frac{(Z - X_0)dZ}{\sqrt{(Z - Z_0)(Z - \bar{Z}_0)}}. \quad (3.2.4)$$

где $Z_0 = X_0 + iY_0$ – внутренняя или граничная точка поля; $X_1 + i0$ – некоторая точка на оси симметрии X ; $\bar{Z}_0 = X_0 - iY_0$.

Если $w(Z)$ – комплексный потенциал плоского поля, то интегральные преобразования (3.2.3 и (3.2.4) осуществляем над зависимостью $f(Z) = dw/dZ$ [22] и находим потенциал и функцию тока осесимметричного поля. Значит, решение осесимметричной задачи находим, сводя ее к вспомогательной плоской.

Найдем нормальную и тангенциальную составляющие плотности электрического тока на аноде

$$J_n = v_1 J_x, J_x = \frac{\partial \Phi_a}{\partial X} = \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = \frac{1}{Y} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right)^{-1} = \frac{1}{\operatorname{sh} \pi \sigma \operatorname{ch} \pi \sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}, \quad (3.2.5)$$

$$J_t = v_1 J_y, J_y = \frac{\partial \Phi_a}{\partial Y} = \frac{\partial \Phi_a}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial Y}{\partial \sigma} \right)^{-1} = \frac{1}{\operatorname{ch} \pi \sigma} \frac{\partial \Phi_a}{\partial \sigma}. \quad (3.2.6)$$

где v_1 – коэффициент, определяемый ниже.

Способ решения задачи заключается в представлении потенциала и функции тока в виде сумм

$$\begin{aligned} \Phi(X_0, Y_0) &= \Phi_0(X_0, Y_0) + \Phi_1(X_0, Y_0) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{v_2}{\sqrt{(X_0+1)^2 + Y_0^2}} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\sigma_0} \frac{\partial w_1}{\partial \sigma}(\sigma) \frac{d\sigma}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

$$\begin{aligned} \Psi(X_0, Y_0) &= \Psi_0(X_0, Y_0) + \Psi_1(X_0, Y_0) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{v_2(X_0+1)}{\sqrt{(X_0+1)^2 + Y_0^2}} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\sigma_0} \frac{\partial w_1}{\partial \sigma}(\sigma) \frac{(Z-X_0)d\sigma}{\sqrt{(Z-Z_0)(Z-\bar{Z}_0)}}, \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

где первые слагаемые представляют собой потенциал и функцию тока точечного источника [22].

Введем зависимость

$$f_1(\chi) = \frac{\partial w_1}{\partial \chi}(\chi).$$

Необходимо найти $\operatorname{Re} f_1(\sigma_m) = f_m$ в узлах сетки σ_m , ($m = 1, \dots, n-1$) [23]. Для $\sigma = \sigma_0 = 0$ $\operatorname{Re} f_1(\sigma_0) = 0$. Пусть $\operatorname{Re} f_1(\sigma_n) = 0$ для $\sigma = \sigma_n$. Функция, представляющая собой сплайн третьей степени применяется, чтобы найти $\operatorname{Re} f_1(\sigma)$ в точках, находящихся между узлами.

Свойства зависимости $f_1(\chi)$:

- для $\chi = \sigma + i/2$ зависимость $f_1(\sigma + i/2)$ является действительной функцией;
- для $\chi = \sigma + i0$ действительная часть $f_1(\chi)$ должна быть нечетной функцией

σ .

Поэтому появляется возможность аналитического продолжения данной зависимости по принципу симметрии [49] на полосу, ширина которой равна единице.

Запишем

$$\operatorname{Re} f_1(\sigma + i) = \operatorname{Re} f_1(\sigma + i0).$$

Восстановим зависимость $f_1(\chi)$

$$f_1(\chi) = i \left[\int_0^{\infty} S(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma + \operatorname{ch} \pi \chi} d\sigma - \int_0^{\infty} S(\sigma) \frac{\operatorname{sh} \pi \sigma}{\operatorname{ch} \pi \sigma - \operatorname{ch} \pi \chi} d\sigma \right].$$

Для нахождения функций (3.2.7) и (3.2.8) применяется интерполяция с помощью сплайнов. Для определения составляющих плотности тока в (3.2.5) и (3.2.6) использовались функции, а здесь их производные выступают в качестве коэффициентов искомым сплайнов. Модифицированный метод Гаусса [23] использован для нахождения интегралов.

Полученная зависимость характерна для обработки в пассивирующих электролитах [22, 39, 42, 69, 87]. При $\Phi_a \geq 0$ она имеет вид

$$J_n(\Phi_a) = 0,025 - 0,692\Phi_a + 1,298\Phi_a^2 - 0,965\Phi_a^3 + 0,223\Phi_a^4 + 0,17 \operatorname{tg}(0,655\Phi_a) + \frac{0,0143\Phi_a}{\Phi_a^7 + (0,5712)^7}. \quad (3.2.9)$$

Результаты, полученные экспериментальным путем [22, 39, 87] аппроксимируются функцией анодного потенциала, чему соответствует график, представленный на рис. 3.2.2. Из графика видно, что $J_n(0) > 0$. Это позволяет записать потенциал электрического поля как $\Phi^*(\chi) = \Phi(\chi) + \Delta\Phi_a$. Если тока в цепи нет, то потенциал на поверхности анода $\Delta\Phi_a \approx 0,7$ В.

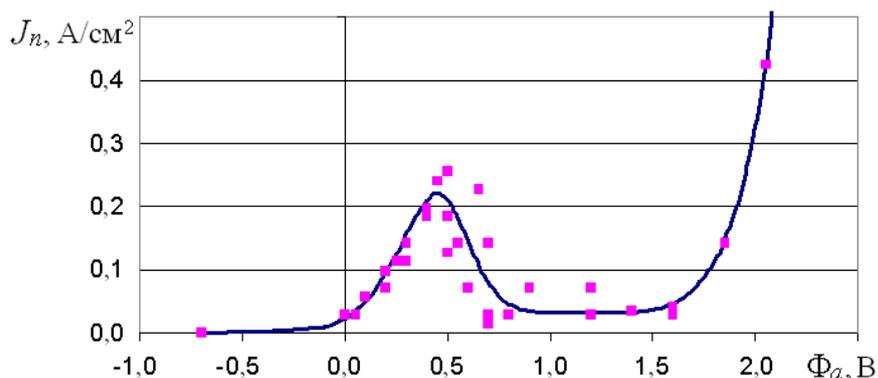


Рис. 3.2.2. График аппроксимирующей зависимости (3.2.9): ■ – результаты эксперимента [22] (Φ_a в вольтах, J_n – в A/cm^2)

Как и в предыдущих случаях, метод коллокаций был применен для численного решения задачи. Для его использования потребуем, чтобы для отдельных точек $\chi_m = \sigma_m + i0$; $m = 1, \dots, n-1$ выполнялось уравнение (3.2.9). Решения данной системы $n-1$ нелинейных уравнений происходит по модификации метода Ньютона [7], в которой во всех уравнениях минимизируется сумма квадратов невязок для регулирования шага.

Величины $v_1=2.6$; $v_2=10$ являются результатом экспериментального подбора. А для приведения результатов к данным эксперимента [22, 87], а также к функции (3.2.9), использовались условные единицы размерности.

Численные результаты

На рис. 3.2.3 показано распределение потенциала по поверхности анода, на рис. 3.2.4 – распределение тангенциальной составляющей, на рис. 3.2.5 – полной плотности тока, на рис. 3.2.6 – нормальной составляющей плотности тока.

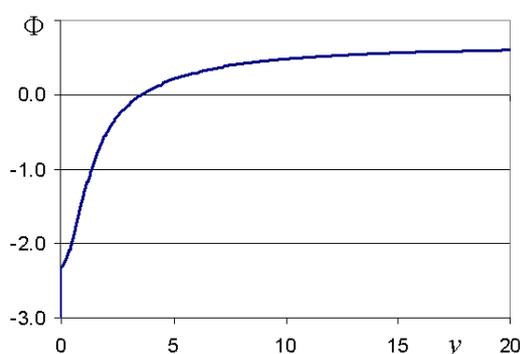


Рис. 3.2.3 Распределение потенциала по поверхности анода

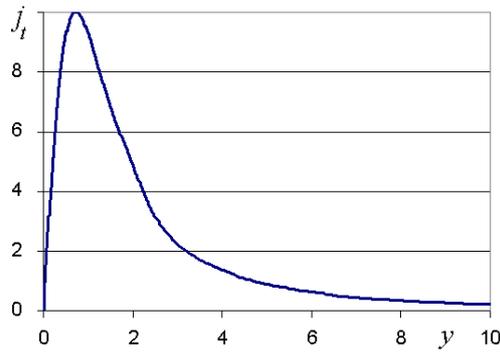


Рис. 3.2.4. Распределение тангенциальной составляющей плотности тока по поверхности анода

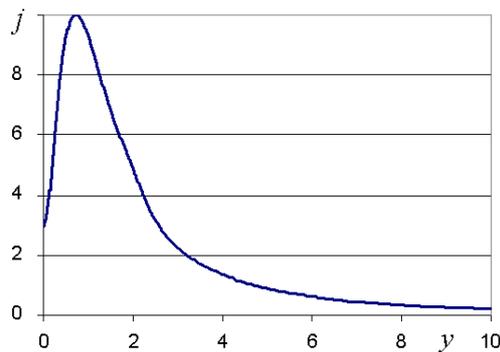


Рис. 3.2.5. Распределение полной плотности тока по поверхности анода

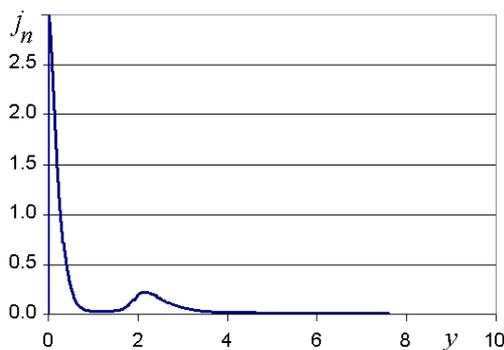


Рис. 3.2.6. Распределение нормальной составляющей плотности тока по поверхности анода

Оценка погрешности численного решения проводилась методом фильтрации результатов вычислений [27, 31, 35, 101]. На рисунках 3.2.7, 3.2.8 результаты фильтрации представлены в логарифмическом масштабе. По оси ординат отмечены десятичные логарифмы абсолютных величин полученных оценок абсолютных погрешностей $-\lg \Delta$, (точность полученных данных). По оси абсцисс отложены десятичные логарифмы числа отрезков разбиения n (которое изменялось от 20 до 640 с увеличением в 2 раза). В качестве

оцениваемых параметров на рисунке 3.2.7,а рассмотрен потенциал центральной точки $y_D=0$, а на рисунке 3.2.7.б – нормальная составляющая плотности тока в той же точке.

Оценки погрешности рассчитанных значений обозначены цифрой 0. Оценки погрешности значений, найденных в процессе первой, второй и т.д. фильтрации обозначены цифрами 1, 2, и т.д. соответственно. Разность ординат между двумя кривыми представляет собой логарифм отношения оценок для разных фильтраций. Это отношение называется размытостью оценки. Накопление погрешности округления и ухудшение обусловленности матриц приводит к нарушению регулярности. Это начинает сказываться примерно на уровне третьего знака. С помощью фильтрации получены и подтверждены значения $\Phi_D=2.317\pm 10^{-3}$, $J_G=3.00\pm 10^{-2}$. Параметры, рассчитанные в близких к оси симметрии точках вычислены с плохой точностью вследствие (3.2.5).

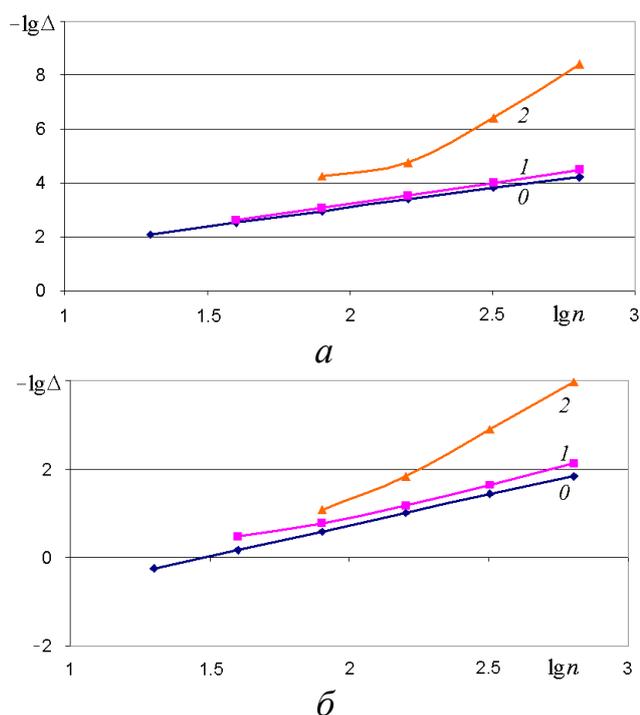


Рис. 3.2.7. Оценка абсолютной погрешности решения осесимметричной задачи: a – потенциала центральной точки D ; b – напряженности в точке D

Выводы к главе 3

Таким образом, в данной главе предложен численно-аналитический метод решения квазистационарной задачи моделирования электрохимического копирования круглого электрод-инструмента, основанный на конформных

отображениях и методе коллокаций. Результаты численных расчетов позволили определить форму заготовки в различные моменты времени и диапазон безразмерного времени, в котором квазистационарное решение совпадает с нестационарным. Показано, что применение модели скачкообразной зависимости выхода по току позволяет получить формы, существенно более близкие к экспериментальным. Предложенный метод может быть применен для моделирования процесса копирования электрод - инструментов различных форм.

Также предложен метод численного решения задачи начальной электрохимической обработки точечным электродом-инструментом в осесимметричной постановке, основанный на интегральных преобразованиях аналитической функции.

Найдены распределения составляющих напряженности и численные значения, характеризующие эти значения.

Проведена оценка погрешности параметров, показавшая, что значения потенциала границы вычислены с точностью до 3-х значащих цифр.

Глава 4. Моделирование процесса прорезания пазов вращающимся электрод-инструментом

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарную задачу ЭХО с помощью пластинчатого ЭИ конечной толщины. Форма межэлектродного пространства показана на рис. 4.1.1. Центр ЭИ движется внутри заготовки со скоростью V_C вниз вдоль оси ординат. Одновременно ЭИ вращается относительно своего центра с угловой скоростью ω . Начальное отверстие в заготовке имеет некоторую форму (обычно, круглую), разность потенциалов между электродами равна U . Вращение ЭИ создает условия для более интенсивного обмена электролита в рабочей области и избежания проблем, связанных с зашламливанием [37].

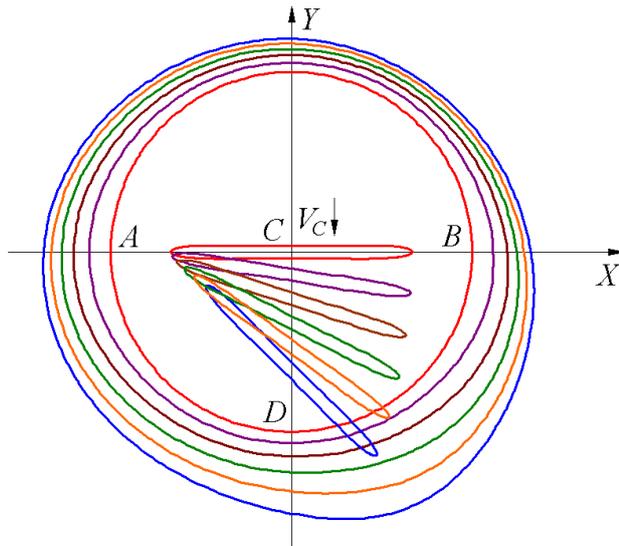


Рис. 4.1.1. Схема МЭП: ADB – обрабатываемая поверхность (анод);
 C – ЭИ (катод)

Процесс электрохимического растворения материала анода определяется законами Фарадея и Ома [41]

$$V_{ecm} = kE, \quad E = j/\kappa, \quad k = \kappa\eta\varepsilon/\rho, \quad (4.1.1)$$

где V_{ecm} – скорость электрохимического растворения (сдвига границы); E, j – напряженность и плотность тока на границе анода; κ – электропроводность электролита; η – выход по току; ε – электрохимический эквивалент; ρ –

плотность растворяемого материала.

Электрическое поле считается потенциальным и соленоидальным, поэтому потенциал $\Phi(X, Y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$.

Значения потенциала на аноде и катоде равны

$$\Phi_a = 0, \quad \Phi_c = -U. \quad (4.1.2)$$

Перейдем к безразмерным величинам. Безразмерные величины x , y , τ и φ определяются следующим образом

$$x = \frac{X}{l}, \quad y = \frac{Y}{l}, \quad \tau = \frac{V_C}{l} t = \frac{kU}{l^2} t, \quad \varphi = \frac{\Phi}{U}, \quad (4.1.3)$$

где $l = kU/V_C$ – величина стационарного зазора в задаче об обработке плоским горизонтальным ЭИ.

На рис. 4.1.1 показано направление движения ЭИ. Запишем

$$v_C = -\frac{dy_C}{d\tau} = -\frac{1}{V_C} \frac{dY_C}{dt} = 1. \quad (4.1.4)$$

Скорость по нормали границы материала задана формулой (4.1.1), которая при обозначении через $x_a(\tau)$ и $y_a(\tau)$ координат точек на аноде и приведении к безразмерным величинам приобретает вид

$$\frac{dx_a}{d\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cos n, \quad \frac{dy_a}{d\tau} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \sin n, \quad (4.1.5)$$

где n – единичный вектор внешней нормали к обрабатываемой поверхности (ОП).

По формуле

$$x_c(\tau) = \operatorname{Re}\left[\left(x_c^0 + iy_c^0\right)e^{i\alpha(\tau)}\right], \quad y_c(\tau) = -\tau + \operatorname{Im}\left[\left(x_c^0 + iy_c^0\right)e^{i\alpha(\tau)}\right], \quad (4.1.6)$$

находятся значения координат точек вращающегося ЭИ, где их начальные значения до перемещения – это x_c^0 и y_c^0 . При этом $\tau = 0$; $\alpha(\tau) = -\omega\tau$ – угол поворота ЭИ вокруг своей оси относительно начального положения. Случай, соответствующий изменению значения α от 0 до $-\pi/2$ показан на рис. 4.1.1.

Для решения определяются нормальные производные $\partial\varphi/\partial n$, пересчитываются значения по формулам (4.1.5), (4.1.6), осуществляется переход к следующему шагу по времени, (например, используется метод Эйлера). То

есть, при численном решении безразмерное время как бы разбивается на некоторое число дискретных шагов, и на всех из них при условиях $\varphi_a = 0$, $\varphi_c = -1$ решается краевая задача для уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1.7)$$

Известны решения задач ЭХО, полученные на основе методов конечных разностей и конечных элементов [58, 82, 83], граничных элементов [3, 56, 63, 94, 97]. Однако, нет конкретных ответов на возникающие многочисленные вопросы о точности декларированных численных решений.

4.2. Метод граничных элементов

Описание метода

Обозначим через Γ границу области, обход которой осуществляется по правилу, согласно которому область всегда должна находиться слева. Пусть ξ – это точка, в которой находится источник, ν – точка, в которой находится наблюдатель наблюдения, а $r(\nu, \xi)$ – это расстояние между ними. Тогда, согласно [3, 63], к граничному интегральному уравнению

$$\frac{1}{2}\varphi(\nu) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{1}{r(\nu, \xi)} \frac{\partial r}{\partial n} \varphi(\xi) d\Gamma + \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \ln \frac{1}{r(\nu, \xi)} \frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial n} d\Gamma, \quad \forall \nu \in \Gamma, \quad (4.2.1)$$

можно свести решение краевой задачи для уравнения Лапласа с граничными условиями первого рода (4.1.7) на основе интеграла Грина.

Для решения интегрального уравнения (4.2.1) будем использовать метод граничных элементов [43]. Чтобы было проще выполнять вычисления, границу Γ разобьем на n прямолинейных элементов. Рассмотрим элементы с постоянными значениями напряженности электрического поля, аналогично [3].

Если точки ν и ξ находятся друг от друга на расстоянии $r(\nu, \xi) = |\nu - \xi| = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (\nu_i - \xi_i)^2}$, то для двумерной постановки фундаментальное решение уравнения Лапласа и его нормальная производная могут быть записаны в следующем виде

$$G(v, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r(v, \xi)}, \quad F(v, \xi) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}.$$

Пусть Γ_m – прямолинейные граничные элементы, на которые разбивается граница Γ . Их количество равно n .

$$z_m = (x_m, y_m), \quad m = \overline{0, n}$$

– это координаты граничных точек этих отрезков.

$$(x_m^c, y_m^c) = \left(\frac{x_{m-1} + x_m}{2}, \frac{y_{m-1} + y_m}{2} \right), \quad m = \overline{1, n}$$

– это координаты середин элементов.

Расчетные точки (узлы) расположим в середине граничного элемента. Дискретная форма уравнения (4.2.1) будет иметь вид

$$\frac{1}{2} \varphi_k = \sum_{m=1}^n F_{km} \varphi_m + \sum_{m=1}^n G_{km} \varphi'_m, \quad (4.2.2)$$

где

$$G_{km} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \ln \frac{1}{r(v_k, \xi)} d\Gamma, \quad F_{km} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \frac{1}{r(v_k, \xi)} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma. \quad (4.2.3)$$

(при наличии особенности во втором интеграле в (4.2.3) берется его главное значение).

Рассмотрим комплексную плоскость $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$. Ось x направим параллельно нормали к m -му элементу, а начало координат совместим с серединой k -го элемента (рис. 4.2.1). Обозначим точки начала и конца отрезка интегрирования Γ_m $z_{km}^b = x_{km}^b + iy_{km}^b$ и $z_{km}^e = x_{km}^e + iy_{km}^e$ соответственно. При этом расстояния от середины k -го элемента до начала и конца m -го элемента равны

$$r_{km}^b = \sqrt{(x_k^c - x_m^b)^2 + (y_k^c - y_m^b)^2}, \quad r_{km}^e = \sqrt{(x_k^c - x_m^e)^2 + (y_k^c - y_m^e)^2}. \quad \text{Обозначим } \theta_{km}^b;$$

θ_{km}^e – углы между отрезками, соединяющими середину k -го граничного элемента с начальной и конечной точкой m -го граничного элемента, соответственно и внешней нормалью к m -му граничному элементу при прохождении границы

таким образом, что область Ω всегда находится слева. Пусть $d_{km} = r_{km}^e \cos \theta_{km}^e = r_{km}^b \cos \theta_{km}^b$.

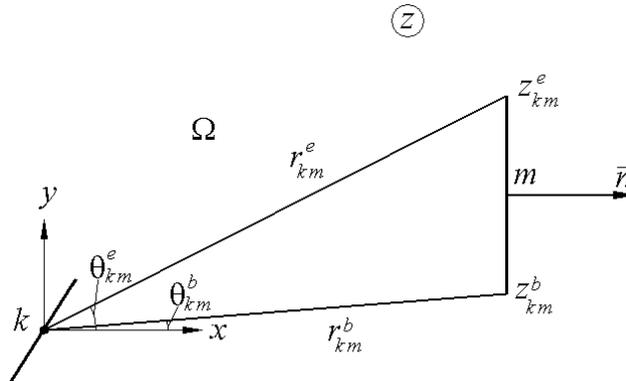


Рис. 4.2.1. Расчетная схема

Тогда значения коэффициентов G_{km} и F_{km} в (4.2.2) равны

$$G_{km} = \pm \frac{1}{2\pi} \begin{cases} r_{km}^e \sin \theta_{km}^e (\ln r_{km}^e - 1) - r_{km}^b \sin \theta_{km}^b (\ln r_{km}^b - 1) + d_{km} (\theta_{km}^e - \theta_{km}^b), & m \neq k, \\ \pm l_m (\ln \frac{l_m}{2} - 1), & m = k, \end{cases} \quad (4.2.4)$$

$$F_{km} = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \theta_{km}^e - \theta_{km}^b, & m \neq k, \\ 0, & m = k. \end{cases} \quad (4.2.5)$$

Если движение происходит против часовой стрелки вдоль анода, в выражении (4.2.4) ставится знак «+». Если же по часовой стрелке вдоль катода, ставится знак «-».

Описание алгоритма

Используя граничные условия постоянства потенциала на катоде и аноде (4.1.7), получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для расчета нормальных производных на элементах, которая для этих условий имеет вид

$$\sum_{m=1}^{n_1+n_2} G_{km} \phi_m = 0 + \sum_{m=n_1+1}^{n_1+n_2} F_{km} = 0, \quad k = \overline{1, n_1}, \quad (4.2.6)$$

$$\sum_{m=1}^{n_1+n_2} G_{km} \varphi_m = -\frac{1}{2} + \sum_{m=n_1+1}^{n_1+n_2} F_{km} = -1, \quad k = \overline{n_1+1, n_1+n_2},$$

где n_1, n_2 – числа элементов на аноде и катоде.

Матрица СЛАУ – заполненная, поэтому для решения задачи можно применить, например, метод Гаусса.

Полученные значения нормальных производных применяются на следующих шагах алгоритма решения нестационарной задачи.

Способ сдвига узлов заключается в первоначальном сдвиге угловых точек полигона (рис. 4.2.2).

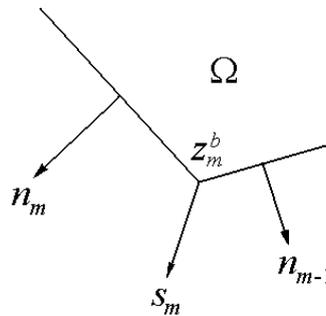


Рис. 4.2.2. Сдвиг вершин полигона

При этом сдвиг поводится по средневзвешенным значениям напряженностей и углов

$$\theta_m^{av} = \frac{l_{m-1}\theta_{m-1}^n + l_m\theta_m^n}{l_{m-1} + l_m}, \quad m = \overline{2, n_1}, \quad \theta_1^{av} = \frac{l_{n_1}\theta_{n_1}^n + l_1\theta_1^n}{l_{n_1} + l_1}, \quad (4.2.7)$$

$$\varphi_m^{'av} = \frac{l_{m-1}\varphi_{m-1}' + l_m\varphi_m'}{l_{m-1} + l_m}, \quad m = \overline{2, n_1}, \quad \varphi_1^{'av} = \frac{l_{n_1}\varphi_{n_1}' + l_1\varphi_1'}{l_{n_1} + l_1}, \quad (4.2.8)$$

где l_j – длины элементов.

Шаг осуществляется по методу Эйлера

$$\Delta x_m^e = \varphi_m^{'av} \cos \theta_m^{av} \cdot \Delta t, \quad \Delta y_m^e = \varphi_m^{'av} \sin \theta_m^{av} \cdot \Delta t, \quad m = \overline{1, n}. \quad (4.2.9)$$

Тестирование алгоритма и программы

Рассмотрим задачу об эллипсе внутри эллипса (рис. 4.2.3,а).

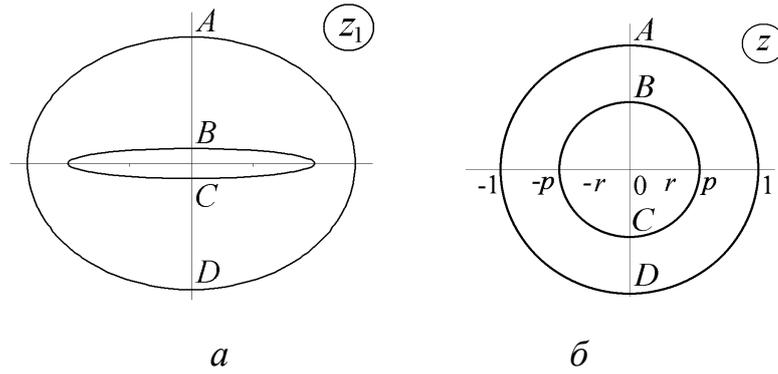


Рис. 4.2.3. Образы МЭП в задаче об эллипсе внутри эллипса: *a* – физическая плоскость; *б* – параметрическая плоскость

Задача решена в параметрическом виде в [33]. В качестве параметрической плоскости выбирается кольцо плоскости z (рис. 4.2.3,б)

$$z_1(z) = \frac{g}{2} \left(\frac{z}{r} + \frac{r}{z} \right), \quad z(z_1) = r \left(\frac{z_1}{g} + \sqrt{\frac{z_1^2}{g^2} - 1} \right), \quad r < p. \quad (4.2.10)$$

При этом

$$\varphi = -\frac{1}{\ln p} \ln |z| = -\frac{1}{\ln p} \ln \left| r \left(\frac{z_1}{g} + \sqrt{\frac{z_1^2}{g^2} - 1} \right) \right|, \quad \bar{E} = -\frac{1}{\ln p} \frac{1}{\sqrt{z_1^2 - g^2}}.$$

На рис. 4.2.4 приведены результаты фильтрации по формуле (1.1.2) решения системы уравнений (4.2.6). Показаны значения $\partial\varphi_a/\partial n$ и $\partial\varphi_c/\partial n$ в точках с наибольшей погрешностью.

Узлы сетки на катоде расположены следующим образом

$$z_m = e^{i\sigma_m}, \quad m = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \quad \sigma_m = \pi \left(\arctg \beta - \arctg \left(\beta - 2\beta \frac{m}{n_1} \right) \right) / \arctg \beta. \quad (4.2.11)$$

Такая сетка позволяет улучшить рассчитанные значения напряженности.

Если взять отношение полуосей $k_1 = 0.1$, а $\beta = 5$, то для $n = 320$ получаются достаточно приемлемые результаты расчетов, как видно из рис. 4.2.4. Мы имеем соответственно 4 и 3 верных цифры на аноде и на катоде.

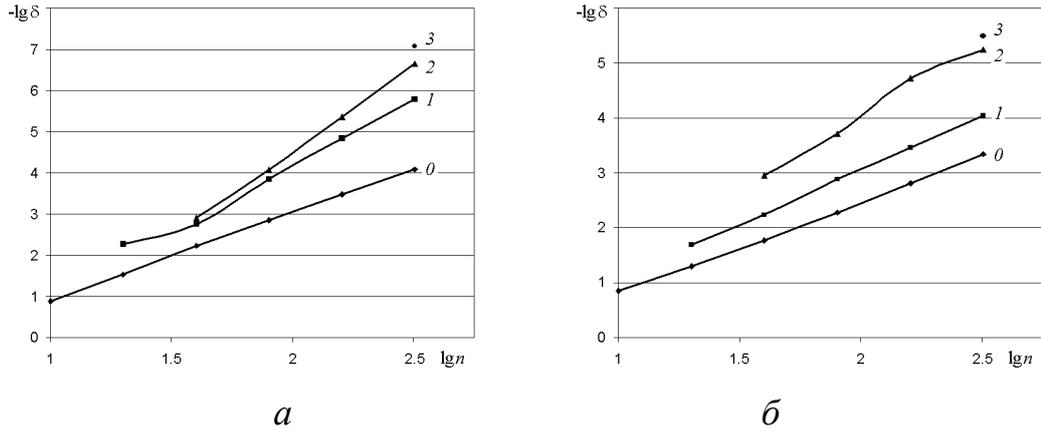


Рис. 4.2.4. Результаты вычисления напряженности: *a* – на аноде; *б* – на катоде

Вычислительный эксперимент. Оценка погрешности

Зададим начальную форму МЭП в соответствии с (4.2.10) (эллипс в эллипсе, рис 4.2.3,*a*). Зададим отношение полуосей внутреннего эллипса (ЭИ)

$$k_1 = \frac{\operatorname{Im} z_1(ip)}{\operatorname{Re} z_1(p)} = \frac{p^2 - r^2}{p^2 + r^2}, \quad (4.2.12)$$

а также отношение больших полуосей внешнего и внутреннего эллипса

$$k_2 = \frac{\operatorname{Re} z_1(1)}{\operatorname{Re} z_1(p)} = p \frac{r^2 + 1}{p^2 + r^2}. \quad (4.2.13)$$

Величину g выберем так, чтобы полуширина внутреннего эллипса равнялась заданному значению L

$$g = L \frac{2r}{r^2 + 1}. \quad (4.2.14)$$

Решая систему уравнений (4.2.12), (4.2.13) найдем r и p

$$r = p \sqrt{\frac{1 - k_1}{1 + k_1}}, p = \frac{k_2 - \sqrt{k_2^2 - 1 + k_1}}{1 - k_1}. \quad (4.2.15)$$

На рис. 4.2.5 представлены результаты численного решения задачи для $\alpha = -\pi/2$ (движение ЭИ вертикально вниз) $L=1$; $k_2=1.5$; $n=320$; $k_2=1.5$; $k_1=0.1$. При

расчете шаг по безразмерному времени $\Delta\tau=0.01$, на рисунке показаны конфигурации при $\tau_j = 0, 10, 20, \dots, 100$.

Было отмечено, что при отсутствии регулирования расположения узлов, несмотря на их начальное сгущение, при увеличении τ происходит расхождение узлов, что приводит к потере точности и устойчивости решения.

Поэтому было решено использовать равномерное по длине $l(s)$ разбиение анодной границы. При совершении шага очередная конфигурация x_m, y_m $m = \overline{0, n}$ интерполируется сплайнами (отдельно $x(s)$, $y(s)$ и $l(s)$ - длина участка границы, отсчитываемая от 0-й точки; изначально $s_m = m$), задается положение узлов l_m , и решаются уравнения по определению параметра $s = s_m$, при котором $l(s_m) = l_m$. Координаты m -го узла с помощью сплайнов заменяются на $x_m^e(s_m), y_m^e(s_m)$.

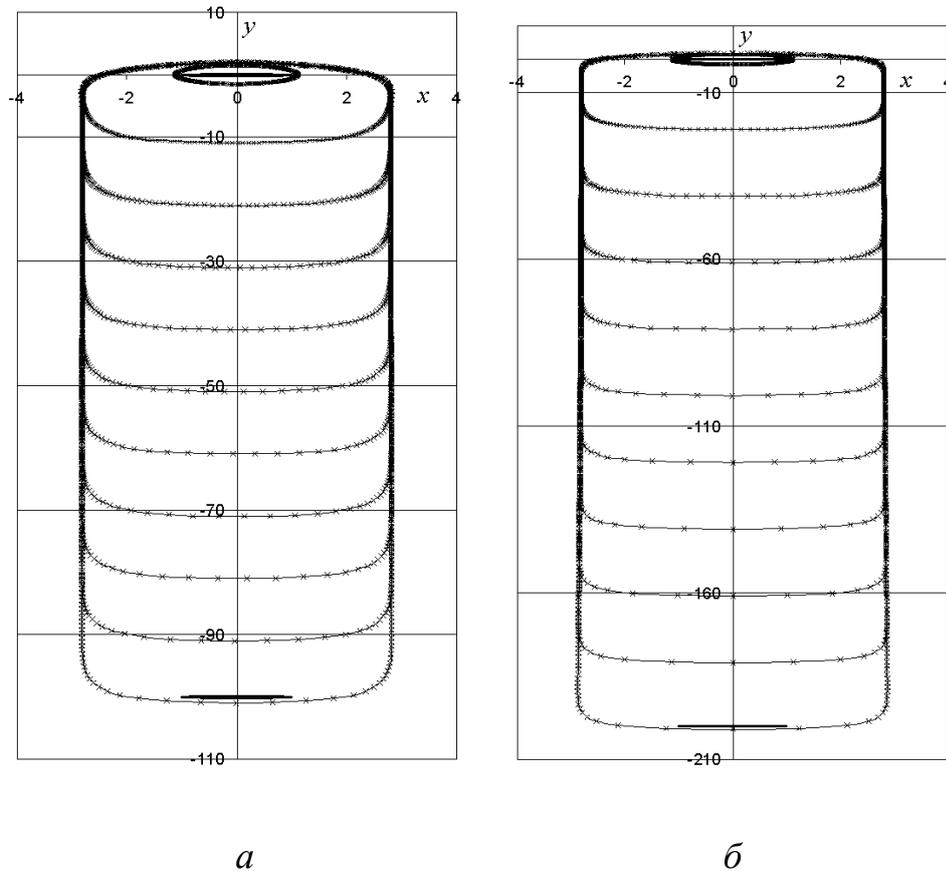


Рис. 4.2.5. Обработка эллипсоидальным ЭИ для $k_1=0.1$: *а* – $\Delta\tau=10$, $\tau_{\max} = 100$;
б – $\Delta\tau=20$, $\tau_{\max} = 200$

Это позволяет расширить диапазон исследуемого времени процесса. На рис. 4.2.5,*а* диапазон по безразмерному времени (равному величине сдвига ЭИ по безразмерной ординате) равен 100. За счет удлинения границы анода узлы расходятся, однако это не носит такого катастрофического характера, как без регулирования положения узлов в процессе решения.

Чтобы найти границы диапазона τ_{\max} , в котором можно производить вычисления по этой схеме, был произведен эксперимент по увеличению τ_{\max} в два раза. При $\tau_{\max} = 100$ погрешность визуально не обнаруживается (рис. 4.2.5,*а*), но при $\tau > 100$ в нижней части картины возникает расширение, увеличивающееся с возрастанием τ (рис. 4.2.5,*б*).

Для визуализации погрешности на рис. 4.2.6 изображены участки анодной границы в измененном масштабе. На рис. 4.2.6,*а* ($\tau_{\max} = 100$) расширение границы не превышает 1%, на рис. 4.2.6,*б* ($\tau_{\max} = 200$) около 4% (в отношении к полуширине паза).

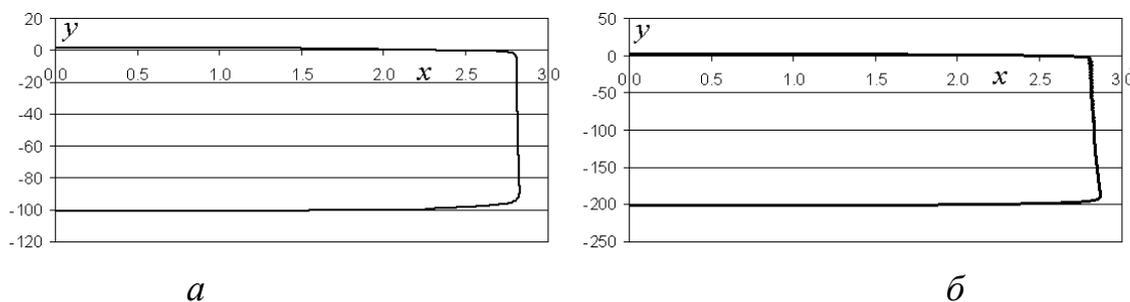


Рис. 4.2.6. Визуализация погрешности: *а* – $\tau_{\max} = 100$; *б* – $\tau_{\max} = 200$

Для большей наглядности рис. 4.2.7,*а* картина растянута в ширину. Цифрой 1 обозначено решение для $\tau_{\max} = 100$; цифрой 2 – $\tau_{\max} = 200$. Становится видным колебание границы для $\tau_{\max} = 200$. Было отмечено, что в связи с начальной погрешностью (порядка 10^{-16}) вычисления x -координаты первой точки сетки возникает ненулевая проекция вектора напряженности на ось x , увеличивающая сдвиг точки в ту же сторону при шаге по времени. При длительном процессе сдвиг существенно увеличивается, и первая точка смещается на боковую часть границы.

Фиксация первой точки позволяет существенно уменьшить осцилляцию (кривая 3 на рис. 4.2.7,*а*).

На рис. 4.2.7,*б* совмещены нижние части кривых для $\tau_{\max} = 100$ (кривая 1) и $\tau_{\max} = 200$ (кривая 2). Отстояние кривых друг от друга в этом месте не превышает 5% (в отношении к вертикальному зазору).

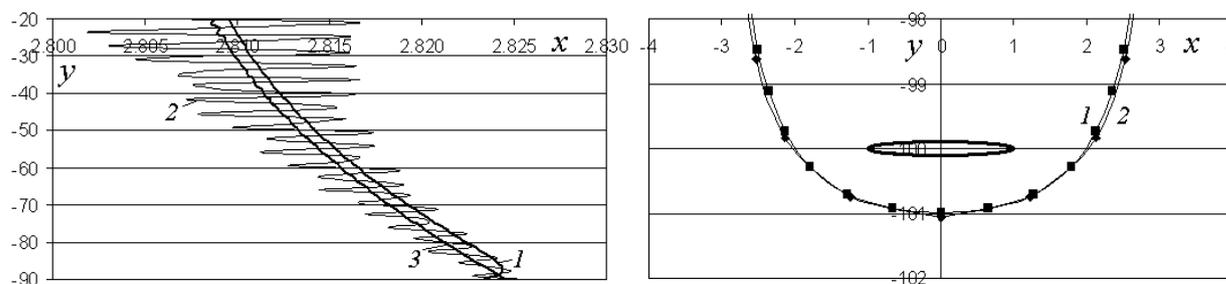
*а**б*

Рис. 4.2.7. Визуализация погрешности:

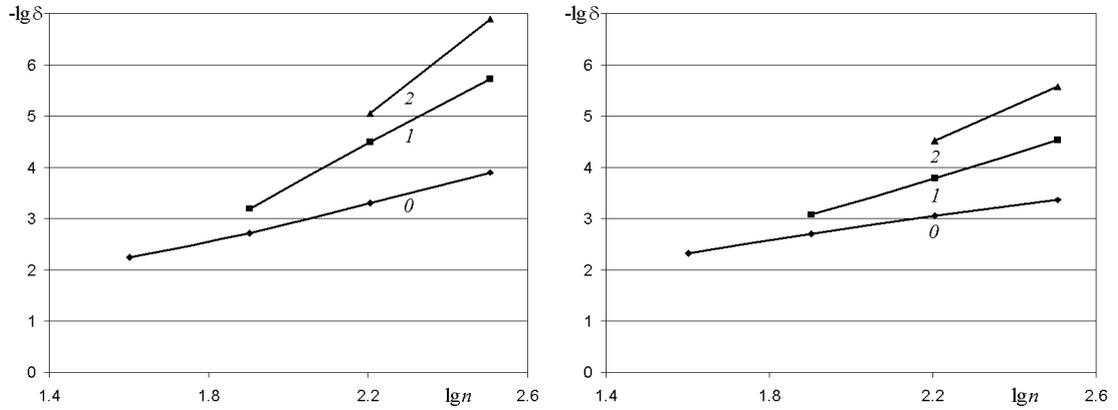
а – средняя часть кривых; *б* – нижняя часть кривых ($\tau_{\max} = 100$)

Для оценки погрешности были проведены расчеты с разным числом элементов $n = n_1 = n_2$ и разными шагами по времени $\Delta\tau$. Поскольку основные расчеты проводились при $n=320$, $\Delta\tau = 0.01$, то проводилось последовательное уменьшение n в два раза и синхронное увеличение $\Delta\tau$ в два раза. Это позволило одновременно оценить влияние на погрешность дискретизации по пространству и времени.

На рис. 4.2.8 приведены результаты фильтрации для $\tau_{\max} = 10$ двух характерных параметров: вертикального зазора и боковой полуширины паза в точке, соответствующей началу элемента с номером $n_1/4$. Буквой δ обозначена оценка относительной погрешности (в отношении к рассматриваемому параметру). Результаты фильтрации показывают, что при $\tau_{\max} = 10$ прямой расчет позволяет достичь точности 3 и более значащих цифр, фильтрация позволяет увеличить точность на 2-3 цифры.

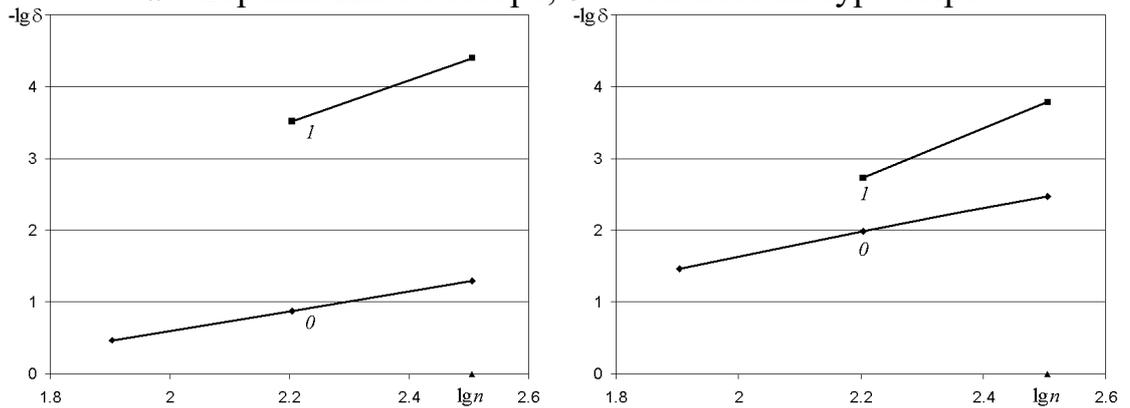
Для $\tau_{\max} = 100$ (рис. 4.2.9) картина качественно сохраняется, однако видно, что по зазору максимальная точность немного превышает 1 значащую цифру

(конкретней $\delta \approx 0.5 \cdot 10^{-1}$ или 5% от величины зазора), а по боковому полуразмеру 2-3 знака (точнее $\delta \approx 3 \cdot 10^{-3}$). Фильтрация позволяет существенно повысить точность, в особенности, по зазору.



а *б*
Рис. 4.2.8. Оценка погрешности при $\tau_{\max} = 10$:

а – вертикального зазора; *б* – бокового полуразмера



а *б*
Рис. 4.2.9. Оценка погрешности при $\tau_{\max} = 100$:

а – вертикального зазора; *б* – бокового полуразмера

4.3. Исследование влияния частоты вращения ЭИ на форму боковой поверхности

На рис. 4.3.1 и 4.3.2 изображены границы для разных значений круговой частоты ω вращения ЭИ для $\tau=0, 2, 4, \dots, 20$. Обращая внимание на их форму, можно отметить, что для небольших частот левая боковая грань паза приобретает значительную волнообразность формы, при этом наибольшая амплитуда волн отмечается при $\omega \approx \pi/8$. При $\omega \geq \pi/2$ волнообразность, можно сказать, исчезает.

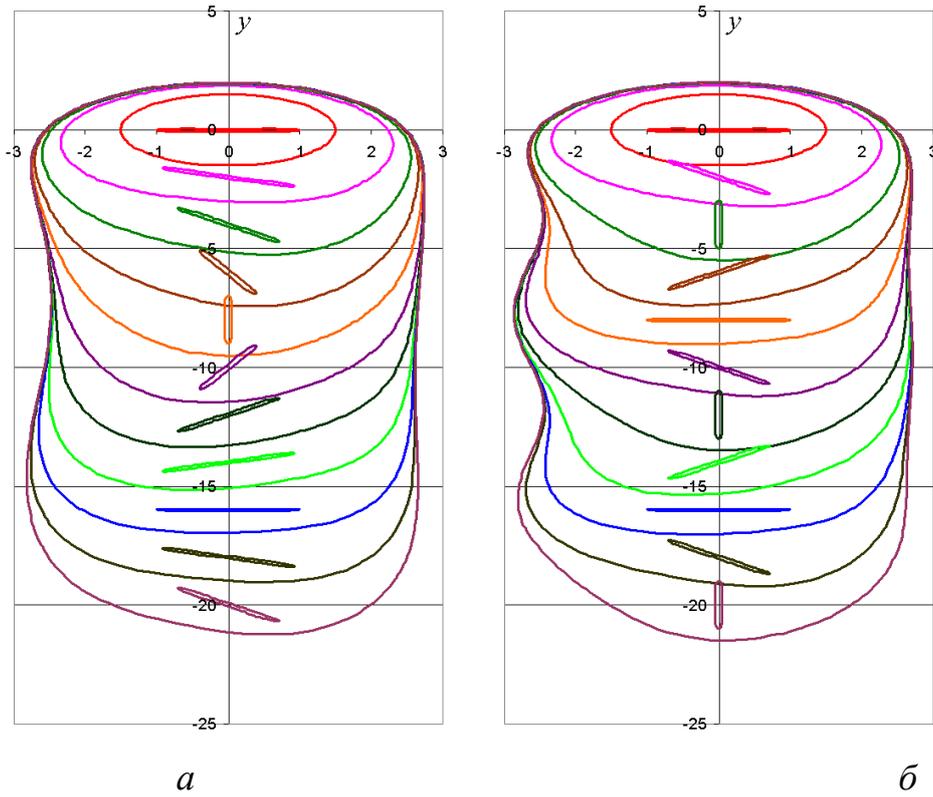


Рис. 4.3.1. Вид поверхности: *a* – $\omega = \pi/16$; *б* – $\omega = \pi/8$

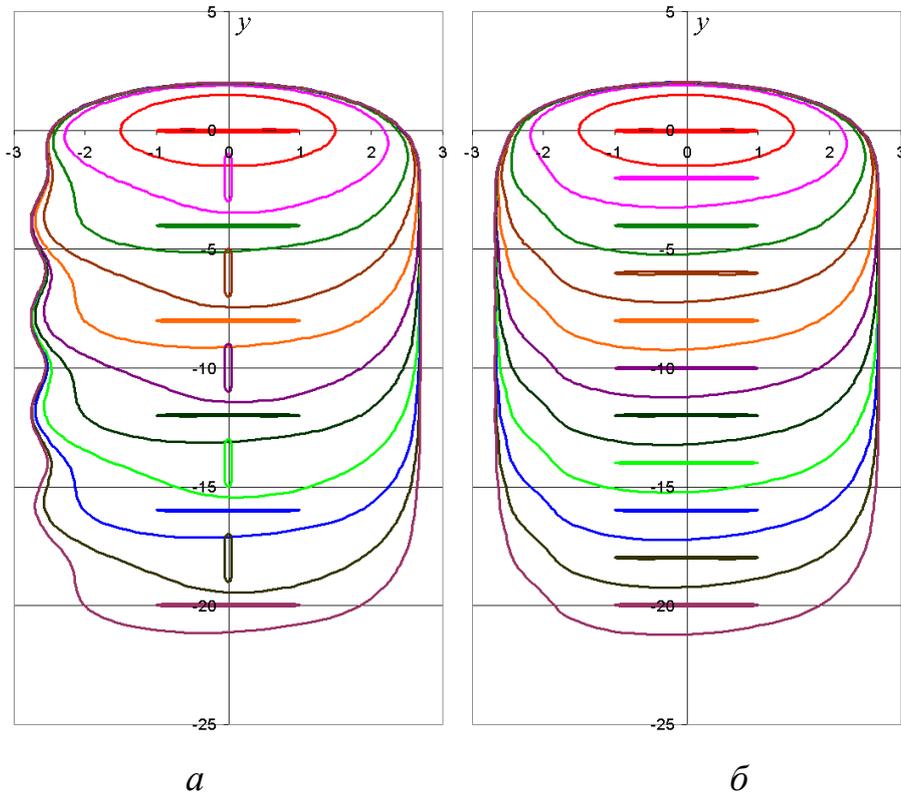


Рис. 4.3.2. Вид поверхности: *a* – $\omega = \pi/4$; *б* – $\omega = \pi/2$

Тот факт, что боковая часть обрабатываемой поверхности приобретает волнообразную форму, можно объяснить так. Когда электрод-инструмент

проходит вблизи левой половины зоны обработки, его кромка движется вверх, так как сам ЭИ вращается по часовой стрелке, а центр его движется вертикально вниз. Получается, что кромка ЭИ как бы «притормаживает», проходя близ левой границы, тем самым увеличивая количество растворенного материала в левой части обрабатываемой поверхности. При углах наклона ЭИ к оси x , близких к πl ($n=1, 2, \dots$), можно определить мгновенный центр вращения ЭИ C_t (рис. 4.3.3).

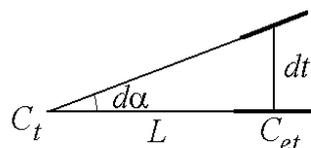


Рис. 4.3.3. Вспомогательная схема

Расстояние L от C_t до центра ЭИ C_{et} определяется из уравнения

$$-\operatorname{tg}(d\alpha) \approx -d\alpha = \frac{dt}{L}.$$

Отсюда при $d\alpha = -\omega dt$ найдем $L = 1/\omega$.

При некоторой величине ω , центр, относительно которого вращается ЭИ, оказывается на левой границе обрабатываемой поверхности. Расстояние между C_t и центром ЭИ C_{et} равняется 2,55 при $\omega = \pi/8$. Это примерно половина ширины невозмущенного паза (рис. 4.4.1,б). Расчеты показывают, что при таком же значении амплитуда волны достигает максимума.

Момент образования волны максимальной амплитуды в очертаниях левой границы связан с тем, что когда мгновенный центр вращения оказывается на линии обрабатываемой поверхности, кромка ЭИ затормаживается вблизи левой части ОП. То есть, с ростом ω время прохождения центра вращения пропорционально снижается, но это же происходит с периодом волны.

4.4. Исследование режима включения напряжения синхронного с вращением ЭИ

Предлагается эксперимент для изменения ширины паза. При этом напряжение включается только для части периода вращения ЭИ, а на оставшейся

части периода оно отключается. Это приводит к уменьшению размера паза. Рассчитываются формы при выборе ЭИ в виде эллипса, полуоси которого имеют отношение $a/b=0.5$ (рис. 4.4.1), $n_1=n_2=n=160$. Напряжение на **обоих торцах** ЭИ включается, когда угол $\Delta\theta$ между вертикальной прямой и осью ЭИ достигает определенного значения. Режим включения и выключения напряжения существенно влияет на размеры паза.

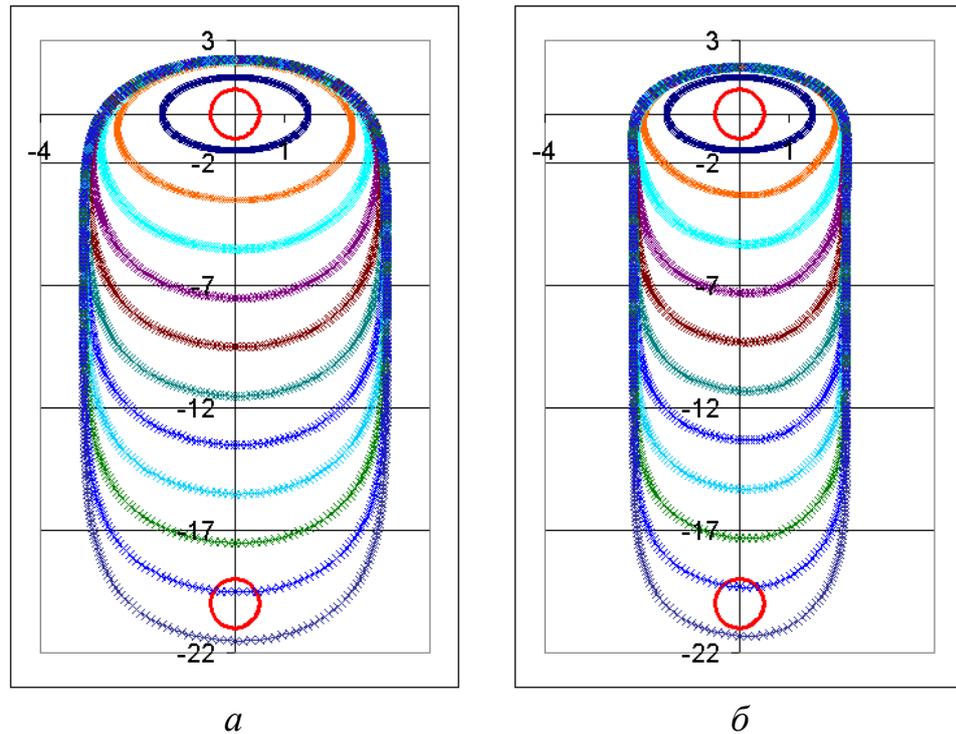


Рис. 4.4.1. Вид поверхности при соотношении полуосей 0.5:
a – $\omega=2\pi$ без отключения; *б* – $\omega=2\pi$, $\Delta\theta=90^\circ$

На рис. 4.4.2 показаны конфигурации с $a/b=0.25$ с двумя начальными положениями угла поворота ЭИ. По сравнению с рис. 4.4.1,*б* видно некоторое уменьшение ширины паза и появление утолщения паза в начале процесса. Начальное положение ЭИ на форму паза практически не влияет.

На рис. 4.4.3 показаны начальные конфигурации с $a/b=0.5$ с двумя значениями $\Delta\theta$. Видно, что при $\Delta\theta=60^\circ$ происходит самопересечение границ. Проблему снимает увеличение частоты вращения ЭИ (рис. 4.4.4,*а*).

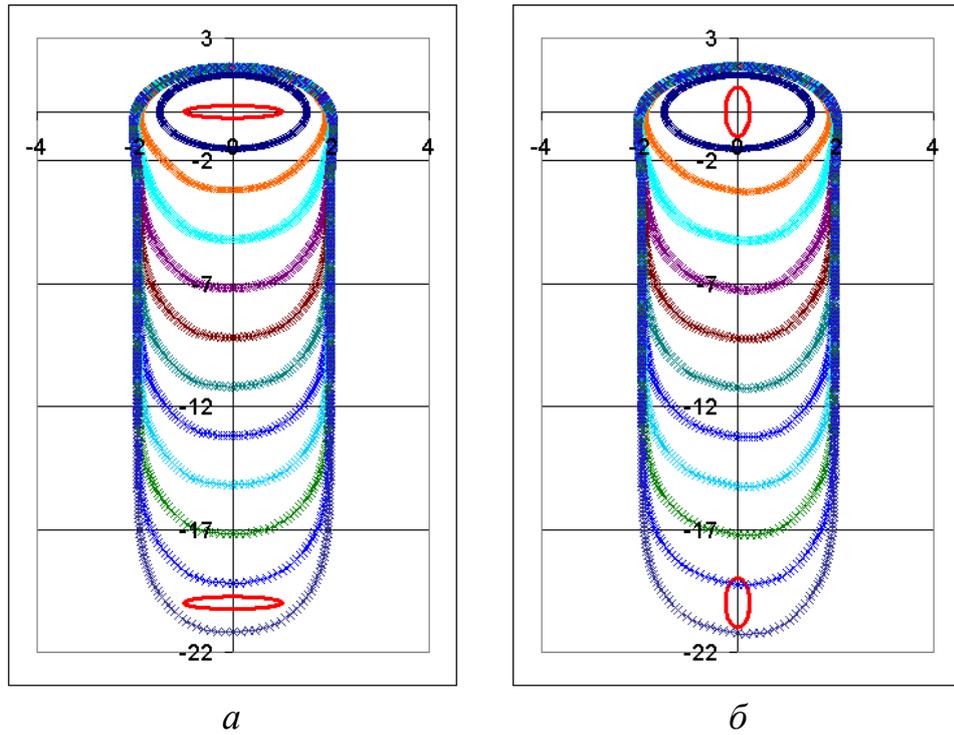


Рис. 4.4.2. Вид поверхности при соотношении полуосей 0.25:
a – $\omega=2\pi$, $\Delta\theta=90^\circ$; *б* – $\omega=2\pi$, $\Delta\theta=90^\circ$

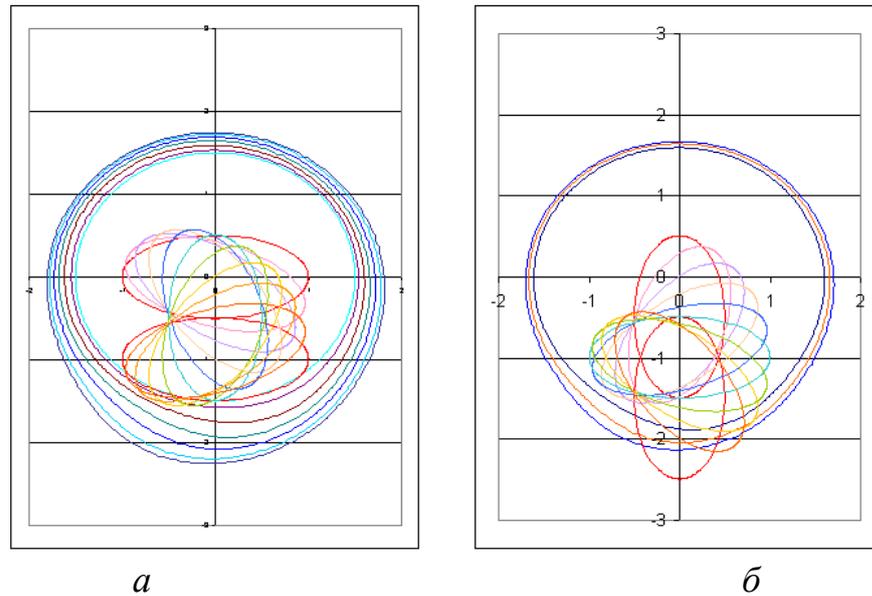


Рис. 4.4.3. Вид поверхности при соотношении полуосей 0.5:
a – $\omega=2\pi$, $\Delta\theta=90^\circ$; *б* – $\omega=2\pi$, $\Delta\theta=60^\circ$

На рис. 4.4.4, 4.4.5 показаны начальные конфигурации с $a/b=0.5$ с четырьмя значениями $\Delta\theta$ с горизонтальным начальным расположением ЭИ. Видно постепенное уменьшение ширины паза.

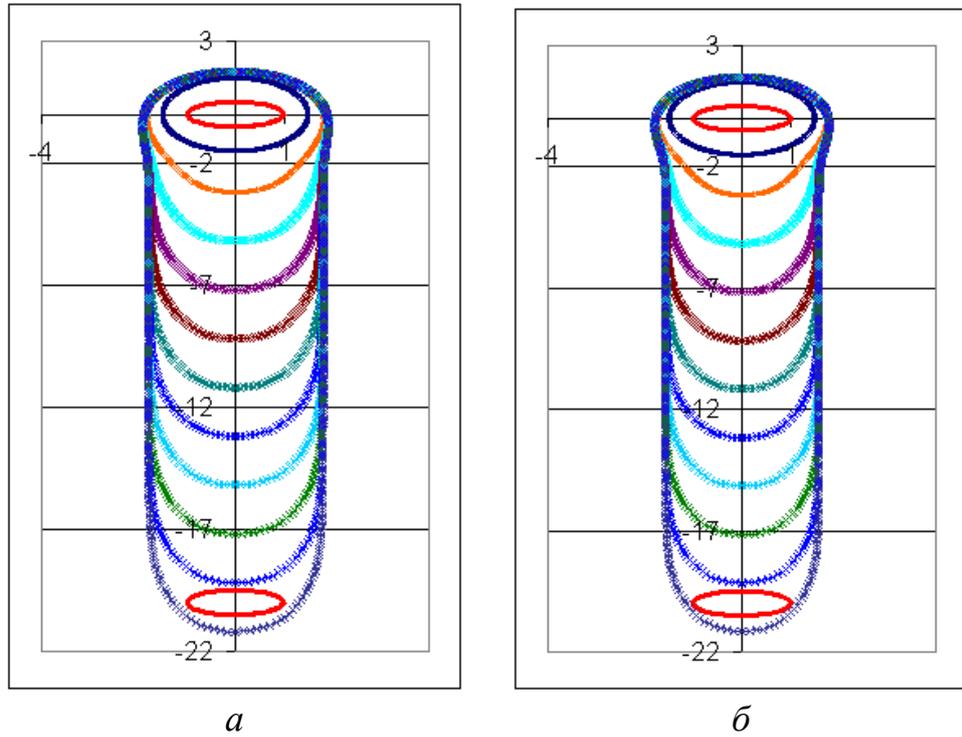


Рис. 4.4.4. Вид поверхности при соотношении полуосей:
 $a - \omega=3\pi, \Delta\theta=60^\circ$; $b - \omega=3\pi, \Delta\theta=45^\circ$

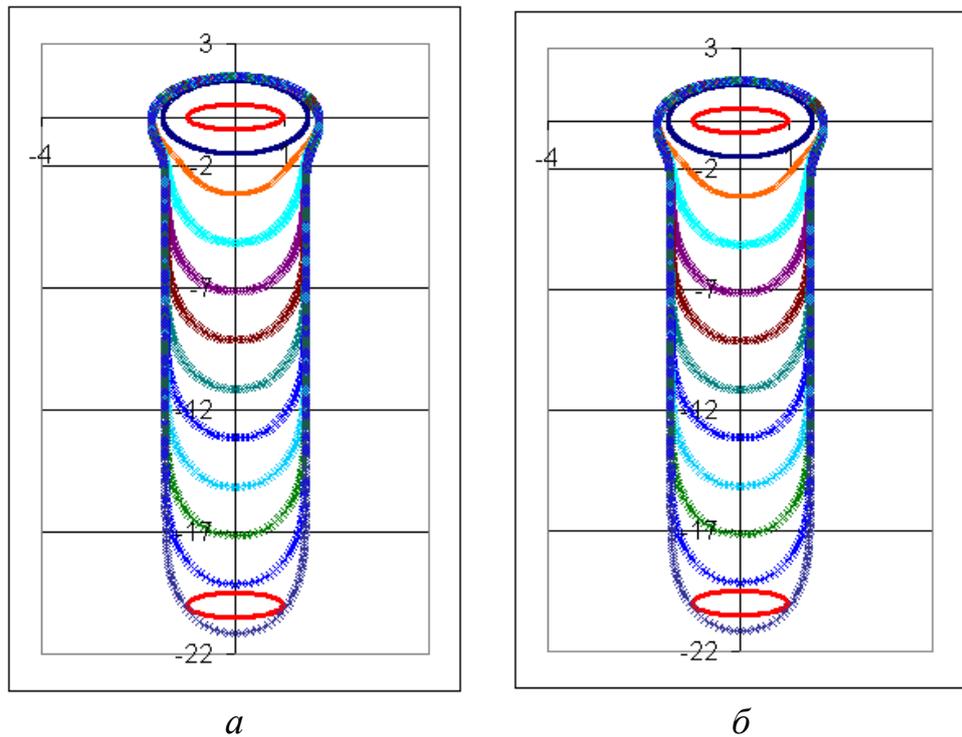


Рис. 4.4.5. Вид поверхности при соотношении полуосей:
 $a - \omega=4\pi, \Delta\theta=36^\circ$; $b - \omega=4\pi, \Delta\theta=30^\circ$

В тот момент времени, когда напряжение отключается, при угле $\Delta\theta=30^\circ$ границы самопересекаются, как видно из рис. 4.4.6.

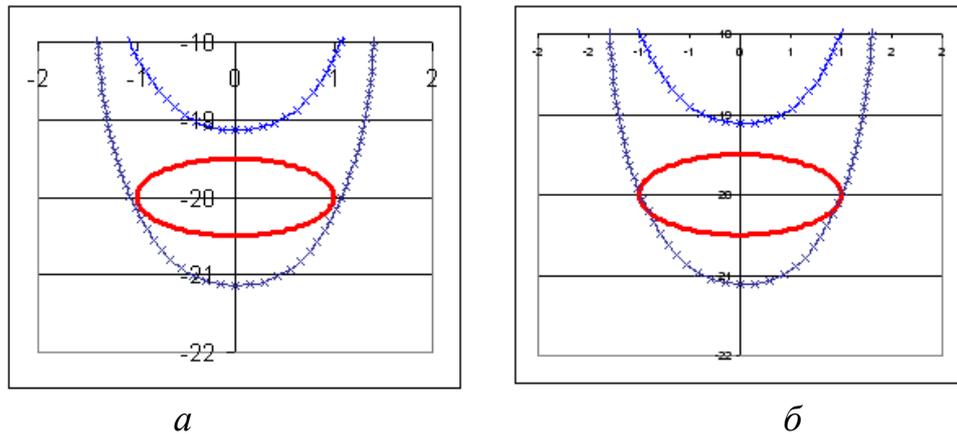


Рис. 4.4.6. Вид поверхности соотношении полуосей 0.5:
a – $\omega=4\pi$, $\Delta\theta=36^\circ$; *б* – $\omega=4\pi$, $\Delta\theta=30^\circ$

То есть, значение угла $\Delta\theta$ снизу имеет ограничение.

Далее при такой же синхронизированном включении напряжения исследуем режим, при котором направление движения ЭИ изменяется на 90° , как показано на рис. 4.4.7 – 4.4.9.

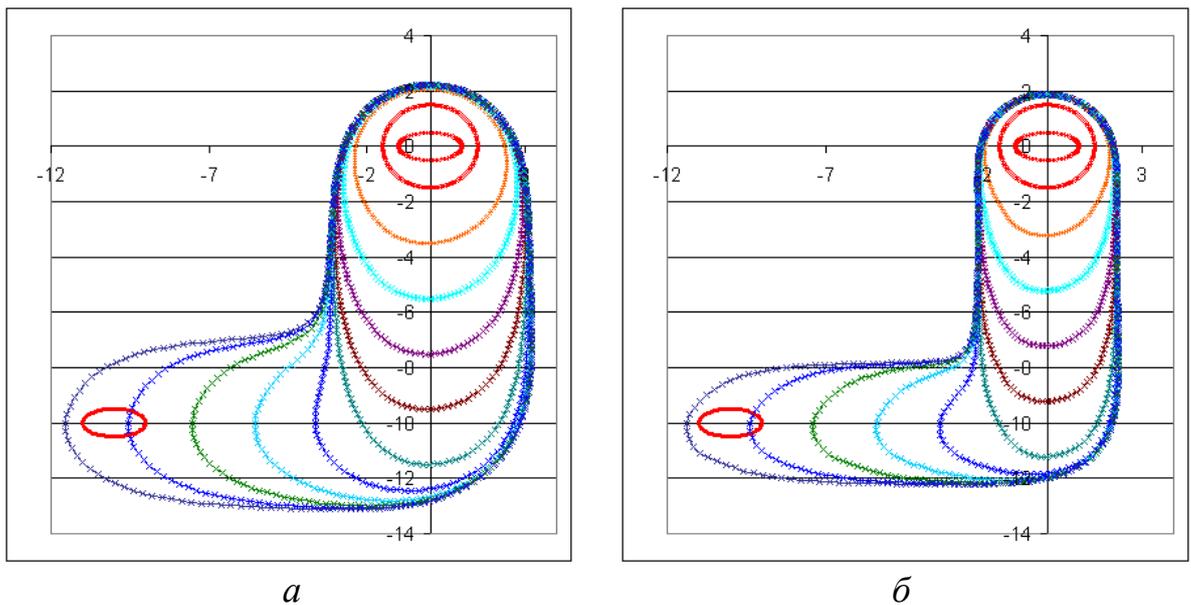


Рис. 4.4.7. Вид поверхности при соотношении полуосей 0.5:
a – $\omega=\pi$, без отключения; *б* – $\omega=\pi$, $\Delta\theta=90^\circ$

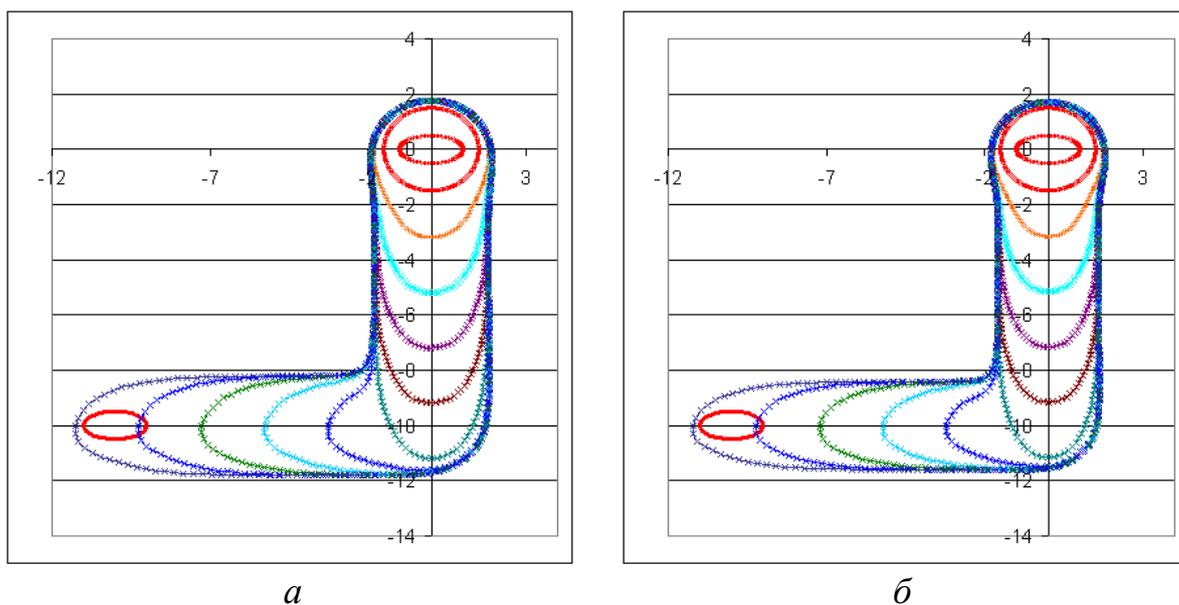


Рис. 4.4.8. Вид поверхности при соотношении полуосей 0.5:
a – $\omega=2\pi$, $\Delta\theta=60^\circ$; *б* – $\omega=3\pi$, $\Delta\theta=45^\circ$

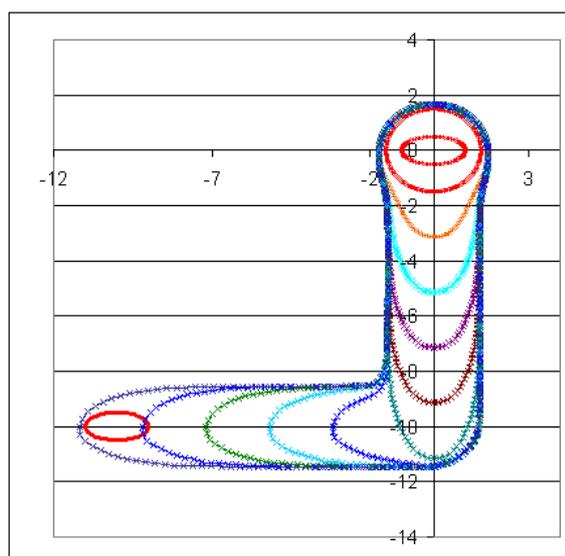


Рис. 4.4.9. Вид поверхности при соотношении полуосей 0.5: $\omega=4\pi$, $\Delta\theta=36^\circ$

Если $n=320$, пограничные линии могут самопересекаться при повороте (рис. 4.4.10,*a*). Несмотря на то, что с ростом частоты вращения самопересечение исчезает, но расстояния между анодом и катодом доходит почти до нуля. Момент, при котором начинается поворот для $\Delta\theta=45^\circ$ демонстрируется на рис. 4.4.11.

На рис. 4.4.12, 4.4.13 приведены конфигурации для различных значений ω и $\Delta\theta$, рассчитанные при $n=320$.

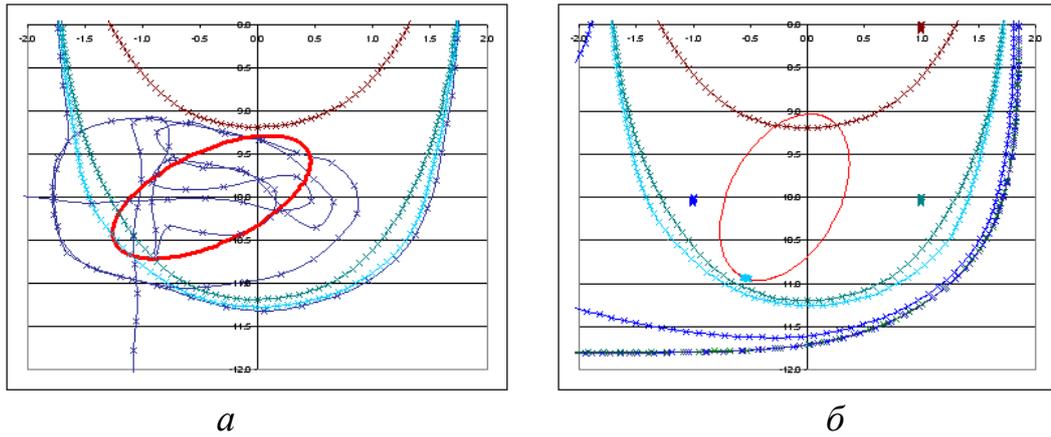


Рис. 4.4.10. Вид поверхности при соотношении полуосей 0.5:
a – $\omega=2\pi$, $\Delta\theta=60^\circ$; *б* – $\omega=3\pi$, $\Delta\theta=60^\circ$

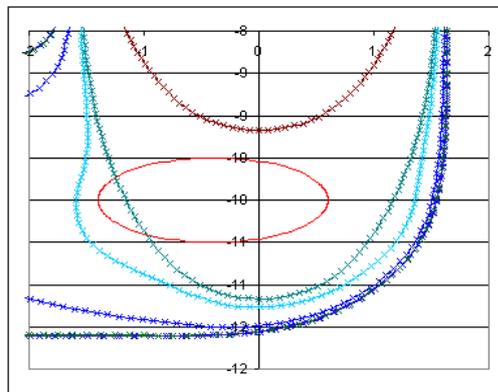


Рис. 4.4.11. Вид поверхности при соотношении полуосей 0.5: *a* – $\omega=5\pi$, $\Delta\theta=45^\circ$

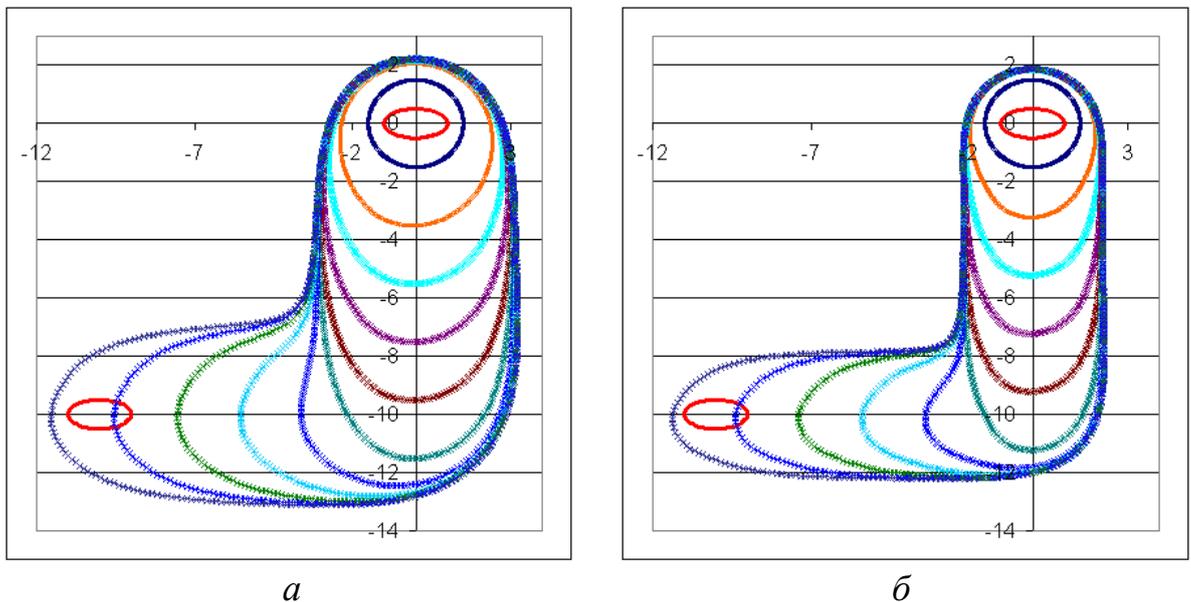


Рис. 4.4.12. Вид поверхности при соотношении полуосей 0.5:
a – $\omega=\pi$, без выключения; *б* – $\omega=\pi$, $\Delta\theta=90^\circ$

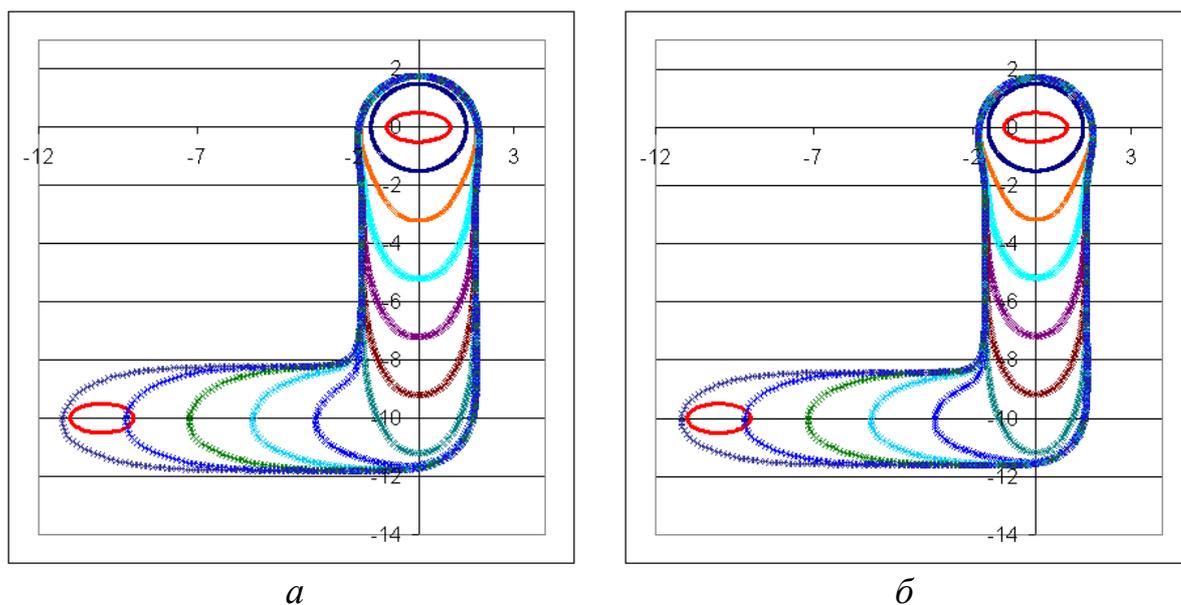


Рис. 4.4.13. Вид поверхности при соотношении полуосей 0.5:
a – $\omega=3\pi$, $\Delta\theta=60^\circ$; *б* – $\omega=5\pi$, $\Delta\theta=45^\circ$

На рис. 4.4.14,*a* продемонстрирован режим для $\Delta\theta=90^\circ$, при котором только с одной стороны ЭИ включается напряжение. Для сравнения На рис. 4.4.14,*б* показан режим для $\Delta\theta=45^\circ$. В этом случае напряжение подается с обеих сторон. Эти режимы интересно сопоставить. Размер паза увеличивается при одностороннем включении. Когда $\Delta\theta$ падает, граничные линии самопересекаются.

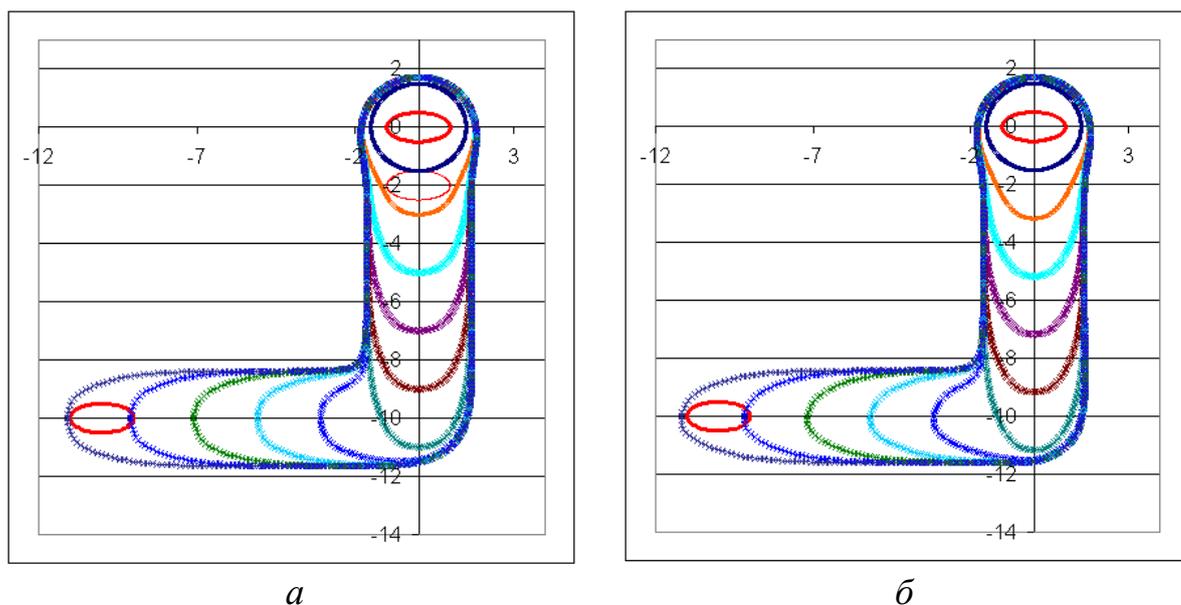


Рис. 4.4.14. Вид поверхности при соотношении полуосей 0.5:
a – $\omega=5\pi$, $\Delta\theta=90^\circ$ (на одном торце); *б* – $\omega=5\pi$, $\Delta\theta=45^\circ$ (на обоих торцах)

Выводы к главе 4

Проведен вычислительный эксперимент с разными вариантами задания узловых точек сетки на анодной поверхности, которая в нестационарном процессе претерпевает большие растяжения. На каждом шаге выбиралась равномерная сетка. Для этого после каждого шага по измененной сетке строились сплайны (отдельно по x и y), по которым восстанавливалась равномерная сетка.

С помощью этого алгоритма были проведены исследования для ЭИ эллипсоидной формы с разными соотношениями полуосей и различной продолжительностью процесса τ_{\max} . Были получены результаты для $\tau_{\max} = 20$, $\tau_{\max} = 100$ и $\tau_{\max} = 200$.

Оценка погрешности проводилась с использованием численных данных, полученных для сеток с разным количеством узлов и разной величиной шага по времени.

Проведен вычислительный эксперимент с различными значениями угловой скорости ω вращения ЭИ по часовой стрелке. В результате эксперимента при малых частотах обнаружилось явление образования волнообразной формы на поверхности левой границы прорезаемого паза. Для некоторого значения ω амплитуда волн имеет максимальное значение. Этот эффект был объяснен совпадением мгновенного центра вращения ЭИ, совершающего вращательное движение с одновременным поступательным движением его центра, с некоторой точкой на ОП. Тем самым кромка электрод-инструмента «замедляется» вблизи обрабатываемой поверхности, что приводит к увеличению количества растворяемого материала.

Проведен вычислительный эксперимент при включении напряжения только на части периода вращения ЭИ. Найдены ограничения на величину этой части для избежания самопересечения границ.

Заключение

1. Согласно результатам главы 2 можно сделать вывод о том, что фильтрация, выполняемая на этапе постпроцессорной обработки данных численного эксперимента, дает возможность получить достоверные оценки погрешности и существенно повысить точность и эффективность численных алгоритмов. Тестирование с помощью решений, полученных другим способом, позволило подтвердить эти оценки. Был разработан метод решения задачи о солитоне Стокса с увеличенной длиной мантиссы машинного слова, что дало возможность декларировать точность вычисления параметров до двух единиц 15-го разряда. В соответствии с этими результатами показано, что оценкам, полученным ранее, можно доверять. Это подтверждает работоспособность метода фильтрации для уточнения решения. Для исследования кавитационного обтекания оболочки были разработаны два численно-аналитических метода. В первом из них использован стеной ряд, во втором – интеграл Шварца. Наличие двух методов решения одной задачи позволяет сравнить и проверить непротиворечивость полученных результатов и их оценок погрешностей. Проведенное исследование показало, что зависимости многих параметров от положения точки отрыва с точностью до 6 значащих цифр имеют локальные экстремумы при выполнении условия гладкого отрыва (Бриллуэна – Вилла).

2. В главе 3 предложен численно-аналитический метод решения плоской квазистационарной задачи моделирования электрохимического копирования круглого электрода-инструмента, основанный на конформных отображениях и методе коллокаций. Результаты численных расчетов позволили определить форму заготовки в различные моменты времени и диапазон безразмерного времени, в котором квазистационарное решение с точностью более 3-х значащих цифр совпадет с нестационарным. Показано, что применение модели скачкообразной зависимости выхода по току позволяет получить формы, существенно более близкие к экспериментальным, что подтверждает адекватность применяемых моделей. Предложенный метод может быть

применен для моделирования процесса копирования электродов-инструментов различных форм.

3. Разработан численно-аналитический метод решения осесимметричной задачи об электрохимической обработке точечным электродом-инструментом в пассивирующем электролите, позволивший использовать для моделирования экспериментальные данные, а именно, немонотонную зависимость особого вида плотности тока от анодного потенциала. В отличие от плоской задачи для определения напряженности электрического поля использовались интегральные преобразования аналитической функции. Полученное решение позволяет объяснить появление в натурном эксперименте на обрабатываемой поверхности трех зон: зоны активного растворения, зоны отсутствия растворения, соответствующей падающей части зависимости, и зоны слабого растворения, которая соответствует малым плотностям тока.

4. В главе 4 проведен вычислительный эксперимент по моделированию электрохимической резки плоским и эллипсоидальным вращающимся ЭИ с различными значениями угловой скорости ω вращения ЭИ. Вычислительный эксперимент показал, что левая (при вращении по часовой стрелке) граница прорезаемого паза при малых частотах приобретает волнообразную форму. При некотором значении ω амплитуда волн имеет максимальное значение. Это было объяснено совпадением мгновенного центра вращения ЭИ, совершающего вращательное движение с одновременным поступательным движением его центра, с некоторой точкой на обрабатываемой поверхности. Проведен вычислительный эксперимент при импульсном включении напряжения на части периода вращения ЭИ. Найдены ограничения на величину этой части для избежания короткого замыкания.

Условные обозначения и сокращения

Условные обозначения

$V_{\text{свн}}$ – скорость электрохимического растворения (сдвига границы по нормали);

ε – электрохимический эквивалент;

ρ – плотность растворяемого материала;

j – плотность тока на анодной границе;

κ – электропроводность электролита;

$\eta = \eta(j)$ – выход по току (доля тока, участвующего в реакции растворения металла);

$E = j/\kappa$ – напряженность электрического поля (закон Ома);

$\Phi; \varphi$ – потенциал; Ψ, ψ – функция тока; S, s – зазор;

$Z = X + iX$; $x = x + iy$ – координаты точек;

$W = \Phi + i\Psi$; $w = \varphi + i\psi$ – комплексный потенциал.

Сокращения

ЭХО – электрохимическая обработка;

ЭИ – электрод-инструмент (катод);

ОП – обрабатываемая поверхность (анод);

МЭП – межэлектродное пространство,

ТФКП – теория функций комплексного переменного.

Список литературы

1. Амромин Э.Л., Бушковский В.А., Садовников Д.Ю. Уединенные волны Стокса при течении несжимаемой жидкости в щель //Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. №6. С. 173-176
2. Афанасьев К.Е., Стуколов С.В. О наличии трех решений при обтекании препятствий сверхкритическим установившимся потоком тяжелой жидкости // ПМТФ. 1999. Т.40. №1. С.27-35
3. Волгин В. М., До Ван Донг, Давыдов А. Д. Моделирование электрохимической обработки проволочным электродом-инструментом // Изв. ТулГУ. Технические науки. 2013. Вып. 11. С. 122–136.
4. Волгин В.М., До Ван Донг, Давыдов А.Д. Моделирование электрохимической обработки проволочным электрод- инструментом // Известия тульского государственного университета. Технические науки. 2013. Вып. 11. С. 122-136.
5. Газизов Е.Р. Анодное формообразование криволинейным катодом при неравномерной поляризации анода // Изв. КГАСУ. Казань. 2006. № 1 (5). С. 132–135.
6. Газизов Е.Р., Маклаков Д.В. Анодное формообразование двугранным катодом при неравномерной поляризации анода // Изв. вузов. Авиационная техника. 2002. № 4. С. 55–57.
7. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей / М.П. Галанин, Е.Б. Савенков. – Москва; Изд-во МГТУ, 2010. – 590 с. : ил.; 24 см."
8. Галина И.Л. Истечение струи из канала с гибким ограждением // Прикл. матем. и мех. 1979. Т.43. №1. С.91–98.
9. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979, 536с.

10. Житников В. П., Шерыхалина Н. М. Моделирование течений несжимаемой жидкости с применением методов многокомпонентного анализа. Акад. Наук Респ. Башкортостан, Отд-ние техн. наук. Уфа : Гилем, 2009. -335с.
11. Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Соколова А. А. Предельно-квазистационарное копирование круглого электрод-инструмента // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, №1. С. 173–179.
12. Житников В. П., Ошмарина Е. М., Зиннатуллина О.Р. Моделирование прецизионной электрохимической обработки секционированным катодом // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 185–192.
13. Житников В. П., Ошмарина Е. М., Федорова Г. И. Использование разрывных функций для моделирования растворения при стационарном электрохимическом формообразовании // Изв. Вузов. Математика. – 2010, № 10. – С. 77-81.
14. Житников В. П., Соколова А.А. Решение задачи о солитоне Стокса с краевыми условиями, заданными в дифференциальном виде // Тр. Росс. научн.-техн. конф. Мавлютовские чтения, Уфа, УГАТУ, 2016, Т. 4. С. 37 – 41.
15. Житников В. П., Соколова А.А., Шерыхалин К.О. Закономерности накопления погрешности округления при решении некоторых вычислительных задач // Труды 5-й межд. конф. «Информационные технологии интеллектуальной поддержки принятия решений», 16 - 19 мая, Уфа, Россия, 2017., Т.1. С. 165 – 169.
16. Житников В. П., Шерыхалина Н.М., Зарипов А.А. Моделирование электрохимического формообразования в условиях немонотонной зависимости анодного потенциала от плотности тока // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, №4. С. 25–31.
17. Житников В. П., Шерыхалина Н.М., Соколова А.А. Моделирование электрохимической обработки вращающимся пластинчатым электрод-инструментом // Международный научно-исследовательский журнал. 2017. № 06 (60). Часть 3. С. 127–132.

18. Житников В. П., Шерыхалина Н.М., Соколова А.А. Осесимметричная задача об электрохимической обработке точечным электродом-инструментом в пассивирующем электролите // Южно-Сибирский научный вестник. 2019. № 2(26). С. 175-179.
19. Житников В. П., Шерыхалина Н.М., Соколова А.А. Оценка погрешности и ее обоснование с помощью фильтрации численных результатов, полученных при разных числах узловых точек сетки // Известия Самарского научного центра РАН. 2017. Т.19, № 1(2). С. 401–405.
20. Житников В.П. Решение плоских и осесимметричных задач с помощью методов теории функций комплексного переменного. Уфа: УГАТУ, 1994. 106 с.
21. Житников В.П., Терентьев А.Г. Струйное обтекание гибкой оболочки потоком идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1982. – №6. – С. 43-48.
22. Житников В.П., Зайцев А.Н. Импульсная электрохимическая размерная обработка // М.: Машиностроение, 2007. – 407 с.
23. Житников В.П., Зиннатуллина О.Р., Житникова Н.И. Модификация методов численного интегрирования для решения осесимметричных задач // Вестник УГАТУ. 2015. Т. 19, № 2 (68). С. 179–182.
24. Житников В.П., Муксимова Р.Р., Зарипов А.А. Моделирование прецизионной нестационарной электрохимической обработки круглым и пластинчатым электрод-инструментом // Вестник УГАТУ. 2015. Т. 19, №1 (67). С. 92–99.
25. Житников В.П., Ошмарина Е.М., Федорова Г.И. Точные решения двух задач предельного квазистационарного электрохимического формообразования // Известия вузов. Математика, 2011. №12. – С. 21-29.
26. Житников В.П., Терентьев А.Г. Безотрывное обтекание гибкой оболочки // Изв. АН СССР. МЖГ. - 1984. - №5 - С. 15-20.

27. Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Методы верификации математических моделей в условиях неопределенности // Вестник УГАТУ. 2000. № 2. -С. 53-60.
28. Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Оценка достоверности численных результатов при наличии нескольких методов решения задачи // Вычислительные технологии. 1999. Том 4, № 6. С. 77-87.
29. Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Соколова А.А. Моделирование процесса прорезания пазов вращающимся электрод-инструментом // Южно-сибирский научный вестник, 2019, № 4 (28). С. 146–151.
30. Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Чукалова А.О., Соколова А.А. Моделирование нестационарной электрохимической обработки эллипсоидальным электрод-инструментом // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, №1. С. 24–32.
31. Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Поречный С. С. Об одном подходе к практической оценке погрешностей численных результатов // СПб. Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. №3(80). С. 105–110.
32. Житников В. П., Шерыхалина Н. М., Поречный С. С., Зарипов А. А. Исследование свойств численных методов с помощью вычислительного эксперимента: учеб. пособие // Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. – Уфа : РИК УГАТУ, 2019. – 287 с.
33. Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Муксимова Р.Р. Дополнительные главы теории функций комплексного переменного: учебное электронное издание локального доступа // Уфа: УГАТУ, 2014. – 85 с. № гос. регистрации 0321402284.
34. Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Многокомпонентный анализ численных результатов. Saarbrucken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. 389 с.
35. Житников В.П., Шерыхалина Н.М. Обоснование методов фильтрации результатов численного эксперимента // Вестник УГАТУ, 2007. – Т. 9, – №3 (21). –С. 71-79.

36. Житникова Н.И., Зарипов А.А., Федорова Г.И. Моделирование электрохимической обработки круглым электрод-инструментом в условиях непостоянства электродных потенциалов // Тенденции развития науки и образования: сб. науч. тр. по материалам XXIX междунар. науч.-практ. конф. 31 августа 2017 г. Ч. 3. Самара, изд. НИЦ «Л-Журнал», 2017. С. 5–9.
37. Зайцев А.Н. Патент РФ №2647413 В23Н 3/02 Способ электрохимической обработки непрофилированным электродом-инструментом и устройства для его осуществления / Салахутдинов Р.М., Зайцев А.Н., Безруков С.В., Косарев Т.В., Идрисов Т.Р.- Оpubл. БИ №8 15.03.2018.
38. Зарипов А.А. Моделирование электрохимической обработки стержневым электрод-инструментом в пассивирующем электролите // Сб. науч. тр. по материалам VIII Междунар. науч.-практ. конф. «Теоретические и прикладные аспекты современной науки». Ч. 1. Белгород, 2015. С. 8–14.
39. Идрисов Т.Р., Зайцев А.Н., Амирханова Н.А. Исследование электродных потенциалов в нестационарных условиях при электрохимической обработке // Электронная обработка материалов. 2001. – № 1. – С. 4-8.
40. Каримов А.Х., Клоков В.В., Филатов Е.И. Методы расчета электрохимического формообразования. – Казань: КГУ, 1990. – 387 с.
41. Клоков В.В. Электрохимическое формообразование. Казан. гос. ун-т, 1984. – 80 с.
42. Клоков В.В., Шишкин С.Е. Стационарное анодное формообразование двугранным катодом при неравномерной поляризации анода // Тр. семина. по краевым задачам. Казань, Казанск. ун-т. 1985. Вып. 22. С. 117–124.
43. Коннор Дж., Бребия К. Метод конечных элементов в механике жидкости. – М.: Мир, 1981.
44. Котляр Л.М. Миназетдинов Н.М. Об одном методе расчета газожидкостного слоя при стационарной электрохимической обработке// Тр. семина. по краевым задачам. – Казань: Изд-во КГУ, 1993. – Вып. 28. – С. 51-58.

45. Котляр Л.М., Миназетдинов Н.М. Моделирование процесса электрохимической обработки металла для технологической подготовки производства на станках с ЧПУ. – М.: Academia, 2005. – 200 с.
46. Котляр Л.М., Миназетдинов Н.М. Определение формы анода с учетом свойств электролита в задачах электрохимической размерной обработки металлов // ПМТФ. – 2003. – Т. 44, №3. – С. 179-184.
47. Котляр Л.М., Миназетдинов Н.М. Эволюция формы анодной границы при электрохимической размерной обработке металлов // Прикладная механика и техническая физика. – Новосибирск: 2004. – Т. 45, №4, – С. 7-12.
48. Котляр, Л. М., Миназетдинов, Н. М. Моделирование процесса электрохимической обработки металла для технологической подготовки производства на станках с ЧПУ. – М.: Academia, 2005. – 200 с.
49. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
50. Леврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – 2-е изд., 1977. – 407с.
51. Мазья В.Г. Граничные интегральные уравнения. Итоги науки и техники ВИНТИ. Совр. пробл. мат.: фундам. направление. – 1988. – Т. 27. – С. 131-228.
52. Маклаков Д. В. Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами. Янус-К, М., 1997.
53. Маклаков Д.В., Шишкин С.Е. Метод возмущений в задачах стационарной электрохимической обработки // Тр. семин. по краевым задачам. – Казань: Казанск. ун-т, 1987. – Вып. 23. – С. 164-168.
54. Маннапов А.Р., Зайцев А.Н. Технологические показатели электрохимического формирования вставок щёточных уплотнений // Вестник УГАТУ, 2008. – № 11. – С. 23-28.

55. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика / Перевод с англ. А.А. Петрова [и др.]; Под ред. Н.Н. Моисеева. – Москва; Мир, 1964. -655 с."
56. Миназетдинов Н.М. Об одной задаче размерной электрохимической обработки // ПМТФ. 2009, т. 50, №3. – С. 214-220.
57. Муксимова Р.Р., Житников В.П., Зарипов А.А. Исследование влияния неравномерности потенциала при электрохимической обработке в пассивирующем электролите // Материалы III Междунар. науч.-практ. конф. «Теория и практика современных электрохимических производств». СПб., 2014. С. 37–38.
58. Мустянци А.Н., Эрлихман Ф.М., Энгельгардт Г.Р., Дикусар А.И. Электрохимическое формообразование в условиях локальной изоляции анодной поверхности. I. Теоретический анализ // Электронная обработка материалов, Кишинёв, Штиинца, 1989, №3: 11-15 .
59. Новокшенов В.Ю. Введение в теорию солитонов; учебное пособие. – Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. - 94 с."
60. Ошмарина Е. М. Квазистационарное приближение в задачах электрохимического формообразования // Сб. ст. шестой Всероссийск. зимн. шк.-семинара аспирантов и молодых ученых, Уфа: УГАТУ, 2011. Том 2. – С. 332–336.
61. Ошмарина Е.М., Салимьянов А.Р. Квазистационарное электрохимическое формообразование точечным электрод-инструментом // Принятие решений в условиях неопределенности. Вып. 7. – Уфа: УГАТУ. 2010. – С. 44-48.
62. Ошмарина Е.М., Ураков А.Р., Федорова Г.И. Квазистационарная задача электрохимической обработки угловым электродом-инструментом // Сб. трудов Девятой молодежн. научн. школы - конф. «Лобачевские чтения - 2010» том 40. – Казань, 1 – 6 октября 2010. – С. 256-261
63. Петров А. Г. Схема без насыщения для обтекания решетки профилей и вычисление точек отрыва в вязкой жидкости // Ж. выч. мат.и мат. физ. 2011, т. 51, № 7, с. 1326–1338.

64. Плотников П.И. Неединственность решения задачи об уединенных волнах и бифуркации критических точек гладких функционалов // АН СССР. Серия математическая. 1991. Т.55. №2. С.339-366.
65. Положий Г.Н. Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. Киев: Киев. ун-т, 1965. – 442 с.
66. Прудников А.П., Бычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.: Наука. – 1981. – 800 с.
67. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ РФ №2018619757. Программа расчета параметров солитона Стокса / Житников В.П., Шерыхалина Н.М., Соколова А.А. Зарег. М.: Роспатент. 10.08.2018.
68. Седыкин Ф.В. Размерная электрохимическая обработка деталей машин. М.: Машиностроение, 1976. 301 с.
69. Седыкин Ф.В., Орлов Б.П., Матасов В.Ф. Исследование анодного тока при электрохимической обработке при постоянном и импульсном напряжении // Технология машиностроения. 1975. № 39. С. 3–10.
70. Скорульская Ю.Ю., Муксимова Р.Р., Ошмарина Е.М. Решение задачи о стационарной электрохимической обработке плоским конечным электрод-инструментом с помощью разложения в ряд // Сб. трудов межд. научно-технической и образовательной конф. – Образование и наука – производству – ч.1. кн.1. Набережные Челны. 28-31 марта 2010. – С. 148-151.
71. Соколова А.А. Альтернативный метод решения задачи о солитоне Стокса как доказательство ранее полученных оценок погрешности // Современные проблемы математического моделирования, обработки изображений и параллельных вычислений 2017 (СПММОИиПВ-2017): труды Междунар. науч. конф. (пос. Дивноморское, 4–11 сентября 2017 г.) Том I; Донской гос. техн. ун-т. – Ростов-на-Дону: ООО «ДГТУ-Принт», 2017. С. 253–260."
72. Соколова А.А. Кавитационное обтекание оболочки по несимметричной схеме Рябушинского // Межвузовский научный конгресс. Высшая школа:

- Научные исследования. Москва, 27 сентября, 2019г. Изд. Инфинити. С. 220 – 230.
73. Соколова А.А. Стационарная электрохимическая обработка вертикальным пластинчатым катодом при ступенчатой функции выхода по току // Всерос. молодежн. научн. конф. «Мавлютовские чтения»: сб. тез. докл. Уфа: УГАТУ, 2011. Т.5. С. 71–72.
74. Соколова А.А. Стационарная электрохимическая обработка круглым катодом // Всерос. молодежн. научн. конф. «Мавлютовские чтения»: сб. трудов. Уфа: УГАТУ, 2012. Т.5 (Часть 1). С. 71-73.
75. Соколова А.А. Уточнение результатов вычислений методом численной фильтрации на примере производной элементарной функции // Научно-методический журнал XXI век, 2021, № 4 (56). С. 98-101.
76. Ураков А.Р., Гуцунаев А.В. Об одном подходе к решению нестационарных задач электрохимического растворения // Труды Междунар. конф. – Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы. Прикладная математика. – Уфа: Изд. Института математики УНЦ РАН, 2000. – Т.4. – С. 201-205
77. Федорова Г.И. Методы расчета формообразования поверхности при нестационарной электрохимической обработке: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. – Уфа: 2004. – 158 с.
78. Федорова Г.И., Соколова А.А., Максютова Г.Р. Моделирование квазистационарной электрохимической обработки горизонтально движущимся электродом-инструментом с изолированной передней поверхностью // Труды XXXVI-й межд. науч. конф. "Современные концепции научных исследований", февраль 2018, Москва. Евразийское научное объединение № 2 (36). С. 17–20.
79. Шерыхалина Н. М. Численное исследование особенностей электрохимического растворения при обработке точечным электродом-инструментом в пассивирующем электролите // Межд. науч.-иссл. журнал. 2017, №. 09(63), часть 3. С. 82–87.

80. Шерыхалина Н. М., Зиннатуллина О.Р., Соколова А.А. Моделирование стационарного процесса электрохимического осесимметричного формообразования точечным электродом-инструментом // Успехи современной науки. Белгород. 2017. Том 2, № 8. С 137 – 144.
81. Шерыхалина Н.М. Математическое моделирование технических объектов и процессов на основе методов многокомпонентного анализа результатов вычислительного эксперимента: Дисс. ... д-ра техн. наук. Уфа, 2012. – 376 с.
82. Ястребов В.Н., Каримов А.Х. Математическое моделирование нестационарного процесса электрохимического скругления кромок деталей ГТД // Электрохимические и электрофизические методы обработки материалов. – Казань: КАИ, 1989. – Вып. 1. – С.23 – 34.
83. Christiansen S., Rasmussen H. Numerical solutions for two-dimensional annular electrochemical machining problems // J. Inst. Maths. Applics. – 1976. – №18, – PP. 295 – 307.
84. Christiansen S., Rasmussen H. Numerical solutions for two-dimensional annular electrochemical machining problems // J. Inst. Maths. Applics. – 1976. – №18, – PP. 295 – 307.
85. Evans, W. A. B. & Ford, M. J. 1996 An exact integral equation for solitary waves (with new numerical results for some internal properties). Proc. R. Soc. Lond. A 452, 373-390. (DOI: 10.1098/rspa.1996.0020.)
86. Fox, M. J. H. 1977 Nonlinear effects in surface gravity waves on water. PhD thesis. Cambridge Univ.
87. Kosarev T.V., Idrisov T.R., Zaitsev A.N., Zhitnikov V.P. Investigation and Simulation of Topology of Passivity and Active Dissolution Areas on Anode for Electrochemical Machining with Additional Cathode // Proc. of 15th intern. symposium on electromachining ISEM-15. Pittsburgh, Pennsylvania – USA, April 23–27 2007. P. 305–308.
88. Kotlyar L.M., Minazetdinov N.M. Modeling of electrochemical machining with the use of a curvilinear electrode and a stepwise dependence of the current

- efficiency on the current density. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Pleiades Publishing, Ltd., 2016. vol. 57. no.1, pp.127–135. DOI:10.1134/S0021894416010144
89. Longuet-Higgins M.S., Fenton J.D. On the mass, momentum, energy and circulation of the solitary wave // *Proc. R. Soc. Lond.* 1974. V.340. P. 471-493.
90. Novak P., Rousaz I., Kimla A. etc. Mathematical simulation of electrochemical machining // *Материалы междунар. шк. – ЭХОМ-88, Любневицы (ПНР), 1988. – С. 100 – 115.*
91. Paluri N.S.V., Sondur S. Experiments with Range Computations Using Extrapolation // *Reliable Computing*. 2007. Vol. 13. No 1. P. 1 – 23.
92. Sherykhalina N.M., Zhitnikov V.P. Application of extrapolation methods of numerical results for improvement of hydrodynamics problem solution // *Computational Fluid Dynamics Journ.* Vol. 10, No. 3, 2001, pp. 309-314.
93. Smith D.A., Ford W.F. Numerical comparisons of non-linear convergence accelerations. – *Mathematics of Computation*, 1982. V. 38. 158. P. 481 – 499.
94. Volgin V. M., Davydov A. D. Modeling of multistage electrochemical shaping. // *Journal of Materials Processing Technology*. 2004. – V. 3. – PP. 466 – 471.
95. Volgin V. M., Davydov A. D. Modeling of multistage electrochemical shaping. // *Journal of Materials Processing Technology*. Elsevier, UK, 2004. – V. 3. – PP. 466 – 471.
96. Volgin V.M., Lyubimov V.V., Gnidina I.V., Davydov A.D., Kabanov T.B. Effect of Current Efficiency on Electrochemical Micromachining by Moving Electrode. *Procedia CIRP*. 2016. vol. 55. P. 65 – 70. DOI: 10.1016/j.procir.2016.08.031
97. Volgin, V.M., Do, V.D., Davydov, A.D. Modeling of wire electrochemical machining. *Chem. Eng. Trans.* 2014, 41, 91-96.
98. Wilkinson J.H. *Rounding Errors in algebraic processes.* – Englewood Cliffs, N.J.: PrenticeHall, 1963. ISBN 0-486-67999-3.
99. Williams J.M. Limiting gravity waves in water of finite depth. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond*, 1981. A302. N1466. P. 139 – 188.

100. Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Zaripov A.A., Sokolova A.A. Quasi-stationary solution of a problem of electrochemical copying of a cogged surface // *Russian Mathematics*. 2017, Vol. 61, no 8, pp. 76 –80.
101. Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Porechny S.S., Sokolova A.A. Modelling of the axisymmetric precision electrochemical shaping // *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS, Chelyabinsk, Russia)*, 2020, vol. 13, no 1, pp. 39-51.
102. Zhitnikov V.P., Sherykhalina N.M., Porechny S.S., Sokolova A.A. Multi-stage filtering of numerical solutions with an application to the Hele-Shaw problem // *7th All-Russian Scientific Conference on Information Technologies for Intelligent Decision Making Support (ITIDS 2020)*. October 6-9, Ufa – Stavropol-Khanty-Mansiysk, Russia, 2020, *Advances in Intelligent Systems Research*, Vol. 174, pp. 178-185.

Приложение А

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018619757

Программа расчета параметров солитона Стокса

Правообладатели: *Житников Владимир Павлович (RU), Шерыхалина
Наталья Михайловна (RU), Соколова Александра Алексеевна
(RU)*

Авторы: *Житников Владимир Павлович (RU), Шерыхалина
Наталья Михайловна (RU), Соколова Александра Алексеевна
(RU)*

Заявка № 2018616473

Дата поступления 22 июня 2018 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 10 августа 2018 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

 Г.П. Ивлиев



Приложение Б

Акт о внедрении в учебный процесс

УТВЕРЖДАЮ
Проректор УГАТУ
по учебной работе

А.Н. Елизарьев



2022 г.

Акт

об использовании результатов диссертационной работы
Соколовой Александры Алексеевны

«Математическое моделирование течений жидкости и электрохимического формообразования с использованием методов численной фильтрации», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук в учебный процесс кафедры вычислительной математики и кибернетики.

Мы, нижеподписавшиеся, составили настоящий акт о том, что научные и практические результаты исследований, полученные в процессе выполнения диссертационной работы Соколовой Александры Алексеевны «Математическое моделирование течений жидкости и электрохимического формообразования с использованием методов численной фильтрации», а именно:

- модели и методы для повышения точности результатов расчетов и обоснования их достоверности при решении задач численными методами;
- алгоритмическое, информационное обеспечение и программная реализация обработки получаемых численных расчетных значений для их уточнения и оценки погрешности

внесены в учебный процесс кафедры вычислительной математики и кибернетики и используются в процессе выполнения расчетно-графических работ и лабораторных занятий при изучении дисциплины «Методы вычислений», а также выпускных квалификационных работ при подготовке бакалавров по направлениям «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» и «Программная инженерия».

Использование указанных материалов диссертационной работы позволяет обеспечить повышение качества процесса обучения.

Д.т.н., доцент, профессор каф. ВМиК

О.Н. Сметанина

Начальник учебного управления, к.т.н.,
доцент

Ю.В. Рахманова

Приложение В

Акт о внедрении в производственный процесс

Утверждаю
Генеральный директор
ООО «СЕМАТ»



О.С. Сергеенко

21.02.2022

Акт

о внедрении результатов диссертационной работы
Соколовой Александры Алексеевны
на тему: «Математическое моделирование течений жидкости и
электрохимического формообразования с использованием методов
численной фильтрации»

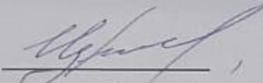
Мы, нижеподписавшиеся, технический директор Идрисов Тимур Рашитович, инженер-конструктор Курохтин Всеволод Сергеевич составили настоящий акт о том, что следующие результаты диссертационной работы Соколовой Александры Алексеевны на соискание ученой степени кандидата технических наук, включающие:

1. Моделирование предельно квазистационарного режима обработки при копировании круглого электрод-инструмента,
2. Полученные расчетные значения безопасного проведения нового технологического процесса электрохимической обработки вращающимся электрод-инструментом с выполнением маневра «поворот ЭИ»,
3. Математическую методику обработки получаемых численных расчетных значений и их уточнение

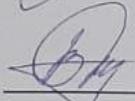
прошли апробацию и опытную эксплуатацию в ООО «СЕМАТ» при моделировании технологических процессов ЭХО для изготовления опытных образцов.

Практическое применение новой модели и методики постпроцессорной обработки численных результатов позволило сократить время отладки процесса электрохимической обработки деталей на 30 %, улучшить параметры технологического процесса, в частности, повысить производительность процесса на 5% за счет оптимизации траектории движения электрода-инструмента.

Технический директор ООО «СЕМАТ»,
к.т.н. Идрисов Т.Р.

 , 21.02.22

Инженер-конструктор ООО «СЕМАТ»,
Курохтин В.С.

 , 21.02.22