Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Самарский государственный технический университет»

На правах рукописи

Ткачев Василий Константинович

# Математическое моделирование процессов тепломассопереноса в локально равновесных и неравновесных условиях

Специальность: 1.2.2 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
доктор технических наук, доцент,
и.о. зав. кафедрой физики СамГТУ
Кудинов И.В.

Самара 2021

# Содержание

# Введение

**Актуальность проблемы.** Математические модели, описывающие теплопроводность с переменными от температуры и от пространственной координаты физическими свойствами среды, гидродинамику и теплообмен в движущихся жидкостях, включают нелинейные уравнения, решаемые в общем случае лишь численными методами. Аналитические (приближенные аналитические) методы их решения в настоящее время недостаточно разработаны. Кроме того, для процессов гидродинамики и теплообмена, протекающих в локально-неравновесных условиях, не разработаны адекватные математические модели. Особого внимания в современных исследованиях мирового уровня заслуживает теория двухфазного запаздывания (DPL-model), учитывающая конечную скорость распространения возмущений потенциалов переноса. Как показывают экспериментальные данные, модель двухфазного запаздывания позволяет с наибольшей точностью приблизиться к описанию локально-неравновесных процессов переноса теплоты. Однако в настоящее время математические модели на основе дифференциальных операторов были применены только к тепловым задачам, а методы исследования таких моделей ограничиваются численными расчетами в одномерной постановке. Также можно отметить практическое отсутствие математических моделей гидродинамики и теплообмена в движущихся жидкостях с учётом зависимости вязкости от температуры и градиента скорости, существенно влияющей на форму профиля скорости и характеристики теплообмена. Наиболее актуальной является проблема разработки математических моделей гидродинамики и теплообмена в ламинарных и турбулентных пограничных слоях с целью определения коэффициентов трения и теплоотдачи, используемых как для решения краевых задач, так и при разработке компьютерных моделей гидравлических систем различного назначения.

**Цель работы** состоит в получении и анализе новых численно-аналитических решений математических моделей для задач теплопроводности в твердых телах, а также гидродинамики и теплообмена движущихся жидкостей в локально – равновесных и неравновесных условиях на основе теории двухфазного запаздывания.

**Задачи, решаемые в диссертации**

1. Получение и анализ точных и приближенных аналитических решений математических моделей стационарных двумерных задач теплопроводности с внутренними источниками теплоты на основе

определения дополнительных искомых функций и дополнительных граничных условий.

2. Получение и анализ приближенных аналитических решений математических моделей для задач теплопроводности в твердых телах и теплообмена в жидкостях с переменными по координатам физическими свойствами среды.

3. Получение численных решений и исследование математических моделей гидродинамики и теплообмена на основе модифицированных законов Ньютона и Фурье, учитывающих скорости и ускорения движущих сил (градиентов соответствующих величин) и вызываемых ими следствий (касательных напряжений и тепловых потоков).

4. Получение численно-аналитических решений и исследование математических моделей теплового и динамического ламинарного и турбулентного пограничных слоев на основе определения фронта теплового и динамического возмущения и дополнительных граничных условий.

5. Разработка алгоритмического и программного обеспечения, позволяющего получать точные решения для линейных и приближенные для нелинейных задач теплопроводности.

6. Разработка программы расчёта кольцевых гидравлических систем, отличающейся быстрой сходимостью итеративного расчёта по сравнению с классическими методами за счёт использования квадратичной зависимости для увязочного расхода.

**Новые научные результаты**

1. На основе определения дополнительных краевых условий и искомых функций получены точные и приближенные аналитические решения стационарных двумерных задач теплопроводности с внутренними источниками теплоты.

2. Получены приближенные численно-аналитические решения задач моделирования теплопроводности в твердых телах и теплообмена в жидкостях с переменными по координатам физическими свойствами среды.

3. Получены и проанализированы численные решения математических моделей гидродинамики и теплообмена, полученных на основе модифицированных законов Ньютона и Фурье, учитывающих скорости и ускорения движущих сил и вызываемых ими следствий, в отличие от классических методов.

4. Получены численно-аналитические решения математических моделей для задач теплового и динамического ламинарного и турбулентного

пограничных слоев на основе определения теплового и динамического фронтов возмущения и дополнительных краевых условий.

5. Разработана компьютерная программа для расчёта кольцевых гидравлических сетей, использующая уточненную формулу для определения увязочного расхода, что ускоряет сходимость итерационного расчёта.

**На защиту выносятся**

1. Точные и приближенные численно-аналитические решения при моделировании стационарных двумерных задач теплопроводности с внутренними источниками теплоты, теплопроводности в твердых телах и теплообмена в жидкостях с переменными по координатам физическими свойствами среды, полученные на основе метода дополнительных краевых условий.

2. Метод исследования математических моделей гидродинамики и теплообмена на основе использования модифицированных эмпирических законов Ньютона и Фурье, учитывающих скорости и ускорения движущих сил (градиентов соответствующих величин) и вызываемых ими следствий (касательных напряжений и теплового потока).

3. Приближенные численно-аналитические решения при моделировании теплового и динамического ламинарного и турбулентного пограничных слоев на основе определения фронта возмущения и дополнительных краевых условий.

4. Математические модели гидродинамики и теплообмена в движущихся жидкостях, основанные на теории двухфазного запаздывания, учитывающей скорости и ускорения движущих сил и вызывающих ими следствий в законах Ньютона и Фурье.

5. Комплексы программ для расчета разработанных математических моделей процессов гидродинамики и теплопереноса.

**Достоверность результатов** обосновывается адекватностью разработанных моделей гидродинамики и теплообмена реальным процессам, происходящим в конкретных устройствах, на сопоставлении найденных решений с численными и экспериментальными данными из независимых источников.

**Теоретическая и практическая значимость**

1. Разработанные на основе теории двухфазного запаздывания математические модели локально-неравновесных процессов гидродинамики и теплообмена в жидкости позволили получить новые физические и теоретические данные об их протекании. Важной особенностью

предложенных моделей является общность подходов при выводе модифицированных дифференциальных уравнений рассматриваемых процессов, заключающаяся в симметричной релаксации причинно-следственных связей в законах Фурье и Ньютона. Разработан инструментарий для решения класса новых задач, учитывающих релаксационные явления. Установлено, что течение жидкости в локально-неравновесных условиях сопровождается периодическими колебаниями скорости. Показано, что учет релаксационных свойств жидкости приводит к временной задержке формирования профиля скорости.

2. Получено критериальное уравнение для определения коэффициентов теплоотдачи на границе жидкость-стенка. На основании гидродинамической теории подобия по известным коэффициентам теплоотдачи на всех участках тепловой сети определяются коэффициенты трения, необходимые для выполнения идентификации модели, то есть ее максимального приближения к реальной тепловой сети. Разработанные в диссертации теоретические методы использованы при построении математических и компьютерных моделей теплосетей централизованного теплоснабжения г. Саратова и г. Тольятти, позволяющих выполнять их текущий мониторинг с расчетом скоростей, давлений, расходов, потерь напора, затрат энергии на привод насосов и проч., а также проектировать новые участки теплосетей.

3. Предложен метод, основанный на учете квадратичной зависимости для увязочного расхода и позволяющий ускорить сходимость итераций при расчете потокораспределения в кольцевых гидравлических системах. Данный метод использовался в диссертации при проектировании нового участка теплосети, объединяющего теплосети ТЭЦ ВАЗ и Тольяттинской ТЭЦ, что позволило определить такие конфигурации теплосетей и расположение регулирующих элементов в них, при которых исключаются ситуации неработоспособности тепловой сети по причинам невозможности пропуска сверхнормативного расхода теплоносителя через отдельные участки сети (например, в ночное время, когда расход на горячее водоснабжение минимален).

4. Разработанные в диссертации математические модели с учетом конечной и бесконечной скорости распространения действующих сил (причин) и их следствий позволяют с высокой точностью воспроизводить реальные физические процессы, что подтверждается экспериментальными данными, приведенными в работах других авторов. Эти модели рекомендуется использовать в организациях, занимающихся эксплуатацией и

проектированием гидравлического и теплотехнического оборудования (промышленные предприятия, научно-исследовательские организации, конструкторские бюро и проч.).

**Связь работы с государственными программами научных исследований.** Исследования выполнялись в соответствии с Аналитической ведомственной целевой программой «Развитие научного потенциала высшей школы» по тематическому плану НИР № 551/02, при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № FSSS-2020-0019), по грантам РНФ (проект № 18 – 79 – 00171) и РФФИ (проект № 20-38-70021).

**Внедрение работы.**

Результаты работы были использованы при выполнении энергообследования объектов Самарского государственного технического университета; при проведении работ с ПАО «Т Плюс» по внедрению компьютерных моделей теплосетей. Экономический эффект, подтвержденный актами о внедрении, составляет 1,8 млн. руб. (вклад автора 0,4 млн. руб.).

**Апробация работы.** Положения диссертации были обсуждены на Всероссийской научно-практической конференции «Научные и технические средства обеспечения энергосбережения и энергоэффективности в экономике РФ», Санкт-Петербург, 2012 г.; Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации», Новосибирск, 2012, 2013 гг.; Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием «Энерго- и ресурсосбережение. Энергообеспечение. Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии», Екатеринбург, 2015, 2016, 2017 г.; Седьмой Российской национальной конференции по теплообмену, Москва, 2018 г.; Всероссийской (с международным участием) молодежной научной конференции «Актуальные проблемы экологии волжского бассейна», Тольятти, 2019 г.; Международной научной конференции «Проблемы управления и моделирования в сложных системах», Самара, 2019 г.

**Публикации.** Содержание работы опубликовано в 24 печатных работах, из них 5 статей в международных журналах, состоящих в Web of Science, 2 статьи в журналах, индексируемых в Scopus, 5 статей – в журналах из перечня ВАК.

**Личный вклад автора.** Работы [6, 8] выполнены самостоятельно. В основных работах [1 – 5, 7, 9 – 12] диссертанту принадлежит постановка проблем исследований, непосредственное выполнение основной части работы, которая выполнена совместно с другими авторами. В остальных работах, также опубликованных в соавторстве, диссертанту в равной степени с другими авторами принадлежат постановки задач, получение решений, содержание работы и анализ результатов.

**Благодарности.** Результаты работы получены с использованием оборудования центра коллективного пользования «Учебно-научный производственный центр «Вибрационная прочность и надежность аэрокосмических изделий» при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № FSSS-2020-0019).

**Объем диссертации.** Работа содержит введение, 5 глав, выводы, список литературы, приложения; изложена на 142 страницах основного текста, содержит 60 рисунков. Список литературы содержит 135 наименований.

## Глава 1. Обзор исследований в области тематики диссертации

Применительно к расчётам скоростей, температур и давлений в движущихся жидкостях составляются математические модели, включающие дифференциальные уравнения и граничные условия. Методы их решения подразделяются на: точные, приближенные аналитические и численные. Точными являются методы: Фурье, функций Грина, интегральных преобразований и др. К приближенным относятся методы: Треффтца, Ритца, Л.В. Канторовича, Бубнова-Галеркина, и др. [5, 7, 8, 12, 13, 15, 28, 29, 31 – 34, 44 – 50, 52 – 61]. Численные методы включают: конечных разностей, конечных элементов и проч. [22, 31, 49, 106, 109, 110].

Недостаток точных методов – малая универсальность. В связи с чем, они применяются в основном к линейным задачам, для которых выполнение начального условия связано с линейной суперпозицией частных решений. Полученные таким образом плохо сходящиеся бесконечные ряды не эффективны в случаях, если они являются промежуточной стадией решения задач термоупругости, обратных задач и др.

Преимущество приближенных методов состоит в их универсальности. Они применяются в основном для решения различного рода нелинейных задач. Решение здесь содержит ряд, с ограниченным числом его членов. Повышение числа членов ряда приводит к следующим проблемам: возникает необходимость решения степенного уравнения (относительно собственных чисел), степень которого определяется числом приближений. Для уравнений больших степеней, решение затруднительно получить при использовании средств современной компьютерной техники.

Приближенным методом является также интегральный метод теплового баланса (ИМТ) [5, 7, 8, 12, 13, 15, 45, 46, 58 – 61], при использовании которого теплообмен разделяется на две стадии благодаря введению фронта возмущения, разделяющего область на прогретую и непрогретую. Первая стадия, когда фронт возмущения достигает центра пластины, завершается. Во второй – вводится дополнительная функция, описывающая температуру в центре симметрии. Такой путь с использованием дополнительных граничных условий [45, 46, 58 – 61] позволяет получать решения с заданной точностью. Этот факт объясняется тем, что первоначальная задача делится на две, в каждой из которых решается обыкновенное уравнение. В этих задачах начальное условие удовлетворяется лишь в одной граничной точке, что позволяет существенно упростить процесс получения решения.

В ИМТ [5, 7, 8, 12, 13, 15] основной проблемой является малая точность. Для повышения точности в работах [45, 46, 58 – 61] используются высокой степени алгебраические полиномы, для определения неизвестных коэффициентов которых вводятся дополнительные граничные условия (ДГУ) [99]. В диссертации он применен к решению задач турбулентного пограничного слоя.

Решению интегральным методом подлежит параболическое уравнение с бесконечной скоростью распространения теплоты. Поэтому введение фронта возмущения, характеризующего конечную скорость, является допущением, использующимся лишь для нахождения как можно более простого решения. В работах [45, 46, 58 – 61] доказано, что увеличение числа приближений приводит к возрастанию скорости перемещения фронта возмущения.

Исследования давлений и скоростей в движущихся жидкостях даны в работах [46, 89, 99, 116 – 118]. При их расчете решается нелинейная задача. Путем линеаризации она приводится к двум гиперболическим уравнениям, методы решения которых сложны и трудоемки, а сами решения представляют бесконечные ряды, малопригодные в инженерных приложениях [118].

Для определения температуры в жидкости решается задача Гретца-Нуссельта [89, 116, 117]. Решение этой нелинейной задачи первыми получили Л. Гретц и В. Нуссельт. П.П. Шумиловым и В.С. Яблонским найдено другое решение. Их детальный анализ приведен в [89], где даны два решения, первое из которых представляет бесконечный ряд. Его собственные значения находятся из степенного уравнения. В связи с трудностями получения их решений, число приближений будет небольшим. Следовательно, они не могут быть использованы для малых величин продольной координаты. Другое решение в источнике [89] включает три формулы, каждая из них справедлива лишь в своем диапазоне поперечной переменной. Указание границ применения решений не дается, и поэтому их применение на практике вызывает затруднение.

Применительно к теории гидравлических сетей рассмотрению подлежат вопросы математического моделирования, оптимизации и идентификации систем трубопроводного транспорта. Здесь движение описывается классическими законами сохранения массы и энергии [1]. Положения теории гидравлических сетей адекватны теории электросетей используемой в теоретической электротехнике. Для гидравлических сетей такая теория отсутствовала ввиду нелинейности системы дифференциальных уравнений. При отсутствии компьютерной техники разработка методов их расчета не имела смысла. Появление ЭВМ вызвало большое количество статей по данной тематике. Теория гидравлических систем строилась как дисциплина, применимая к любым трубопроводным системам [74, 75, 77, 111 – 113]. Вопросы расчета гидравлических систем с использованием матричной записи уравнений на основе двух законов Кирхгофа приведены в работах [102 – 105]. В них создана математическая теория решения задач управления гидравлическими системами.

В [112] в основу математического аппарата положена алгебра матриц и векторов, широко применяемая в электрических сетях, что позволило упрощать математические постановки задач, применяя численные методы их решения.

Гидравлическая сеть задается матрицей соединений $m$ узлов и $n$ ветвей, учитывающей особенности схемы. Она связывает давление в узлах и разности давлений на ветвях, что приводит к возможности описания расходов сети, для определения которых используются увязочные методы. Ввиду их сложности были выполнены исследования по разработке методов расчета гидравлических сетей и программ для ЭВМ [17, 30, 76, 79, 102, 111 – 113]. В настоящее время существуют программы расчёта многокольцевых гидравлических сетей практически с любым числом узловых точек.

Проблема идентификации впервые поставлена в работе [77]. В [78] разработан «математический расходомер», и был дан принцип, позволивший получать модели, практически идентичные реальной гидравлической системе, на основе использования экспериментальных данных. Используя этот принцип, выполнена идентификация различных гидравлических систем: теплосетей [78, 96], водопроводов [18, 100, 123], газопроводов [16, 88], нефтеснабжения [82, 86] и др. Проблема идентификации относится к основной при разработке моделей, наиболее приближенных к реальным системам. Её точность связана с числом точек, в которых заданы результаты эксперимента.

Компьютерные модели успешно применяются для разного вида трубопроводных, в том числе и циркуляционных систем ТЭС. Основной трудностью применения моделей здесь является разрыв потока в градирнях. В работах [86, 100] рассматривается метод, позволяющий получать компьютерные модели и для таких систем. В данном случае точка разрыва принимается в качестве вершины с заданным притоком (расход на соплах градирни) и с заданным отъемом (приток в чашу градирни).

В связи с описанием реальных процессов в экстремальных условиях, возникла необходимость исследования нелокальных процессов, для описания которых классическая термодинамика неприменима [6, 11, 18, 19, 20, 53 – 56, 64, 65, 105, 106, 119, 134, 135].

Классические математические постановки задач основаны на бесконечной скорости распространения описываемых величин, заложенной в эмпирических законах Фурье, Фика, Гука, Ньютона, Ома. Полученные на их основе дифференциальные уравнения являются локальными. Исследование их решений приводит к выводу, что скорость распространения искомых величин является бесконечной. Например, гипотеза Фурье приводит к результатам, подтверждаемым опытными данными. Однако существует большой круг задач, где параболическое уравнение теплопроводности неадекватно описывает физические процессы. Это все быстропротекающие процессы, любые другие процессы на малом начальном временном отрезке и др. Причина в том, что закон Фурье является приближенным описанием теплопроводности, не учитывающим скоростей теплового потока и градиента температуры.

Среди других теорий локально-неравновесных процессов известны: термодинамические, кинетические, феноменологические, молекулярно-динамические [6, 11, 18-20, 53-56, 105, 106, 119]; полученные на основе молекулярно-кинетических методов; теории случайных блужданий и др.

Особого внимания в современных исследованиях заслуживает теория двухфазного запаздывания, так как она, как показывают результаты экспериментов, позволяет с высокой точностью приблизиться к описанию процессов переноса [11, 20, 53 – 56, 105, 106]. Однако в настоящее время схемы построения дифференциальных уравнений были найдены лишь к тепловым задачам, а методы исследования таких моделей ограничиваются численными расчетами в одномерной постановке.

Наличие большого числа теорий нелокального переноса приводит к заключению об отсутствии общей теории. Отмечается также отсутствие нелокальных теорий переноса импульса, распространения электромагнитных волн и др., описываемых гиперболическими уравнениями.

Основной целью настоящей работы является развитие теории двухфазного запаздывания, основанное на использовании единых подходов к построению дифференциальных уравнений реальных физических процессов тепломассопереноса, а также переноса импульса с учетом релаксационных явлений в движущихся жидкостях.

По обзору работ можно сделать выводы:

1. Применительно к расчётам гидродинамики и теплообмена в движущихся жидкостях практически отсутствуют математические модели, в которых учитывается локальная неравновесность реальных процессов. Существующие модели, вывод которых основан на уравнениях балансов (теплового и силового) и диффузионных законах Фурье и Ньютона, неадекватно описывают физические процессы при малых значениях временной переменной, а также для всех быстропротекающих процессов.

2. Применительно к динамическим и тепловым пограничным слоям отсутствуют аналитические методы, позволяющие получать решения с достаточной для инженерных исследований точностью, ввиду нелинейности краевых задач.

3. Применительно теплообмену в твердых телах и жидкостях известные точные аналитические решения малоэффективны, ввиду использования упрощающих допущений, приводящих к существенному отличию моделей от реальных процессов. Если допущения не вводятся, то точные решения не могут быть получены. Поэтому разработка приближенных методов решения представляется актуальной научной проблемой.

4. Применительно к расчётам сложных трубопроводных сетей получил большое распространение метод электрогидравлической аналогии. Однако его широкое использование ограничивается практическим отсутствием методов автоматизированной идентификации моделей.

# Глава 2. Методы математического моделирования тепломассопереноса на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций с учетом бесконечной скорости распространения теплоты

Результаты данного раздела даны в работах [138, 141, 144 – 146, 149] автора диссертации.

## 2.1. Получение приближенного аналитического решения стационарной двумерной задачи теплопроводности для бесконечного бруса с источником теплоты

Используя интегральный метод теплового баланса, путем введения дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий получено приближенное аналитическое решение краевой задачи теплопроводности для бесконечного бруса с источником теплоты. Использование дополнительной искомой функции позволяет уравнение в частных производных свести к решению обыкновенного уравнения. Дополнительные граничные условия находятся так, чтобы выполнялось уравнения в граничных точках, что приводит к его выполнению и внутри области. Полученное приближенное аналитическое решение может быть использовано для идентификации величины внутреннего тепловыделения, возникающего вследствие различных производственных процессов (вибрационные и деформационные нагрузки, воздействие электромагнитными полями и др.) на тепловых и атомных электростанциях, в ракетно-космической отрасли и на других промышленных объектах.

Из приближенных аналитических методов решения краевых задач теплопроводности большое распространение получил интегральный метод теплового баланса, относящийся к группе ортогональных методов взвешенных невязок [4, 7, 13, 15, 28, 29, 49]. С его помощью можно получать приближенные аналитические решения краевых задач, получение точных решений которых не представляется возможным (переменные физические свойства среды и др.). Однако основным недостатком этих методов является низкая точность, объясняемая тем, что при их использовании требуется выполнение осредненного исходного уравнения (интеграла теплового баланса). Применение дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий позволяет удовлетворить исходное дифференциальное уравнение с заданной степенью точности, зависящей от числа приближений исходного решения. Отметим, что методы, основанные на выполнении уравнения в граничных точках, рассмотрены также в работах [28, 29, 41, 44 – 46, 108].

Рассмотрим использование интегрального метода с дополнительными граничными условиями и дополнительной искомой функцией применительно к решению стационарной двумерной задачи теплопроводности для бесконечного бруса квадратного поперечного сечения с постоянным источником теплоты (рис. 2.1). Допустим, что на боковых поверхностях бруса температура известна и равна $T_{ст}$. Необходимо определить распределение температуры в поперечном сечении бруса. Ввиду симметричности краевой задачи можно рассмотреть лишь четверть сечения. Постановка задачи здесь будет (рис. 2.1)

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}=-\frac{\nu}{\lambda},\ (0<x<\delta;\quad 0<y<\delta); \tag{2.1}$$

$$T(\delta,y)=T_{ст};\ \frac{\partial T(0,y)}{\partial x}=0;\ \frac{\partial T(x,0)}{\partial y}=0;\ T(x,\delta)=T_{ст}, \tag{2.2}$$

где $T$ – температура, $K$; $x$, $y$ – координаты, м; $\nu$ – мощность внутреннего источника теплоты, Вт/м$^3$; $\lambda$ – коэффициент теплопроводности, Вт/($мK$); $T_{ст}$ – температура стенки, $K$; $\delta$ – половина ширины грани бурса, м.

Нахождение простого вида аналитических решений двумерных краевых задач на основе уравнения Пуассона (2.1) представляет существенный практический интерес, ввиду широкого его применения при анализе многих физических процессов (теплопроводности, течения жидкостей, теории упругости, термоупругости, кручения призматических тел и др.). Трудность построения решения связана с двумерностью задачи и неоднородностью исходного дифференциального уравнения. Точные аналитические решения таких задач, представляющие сложные бесконечные функциональные ряды, получены лишь в частных случаях и, при существенных допущениях. Отметим, что излагаемый ниже метод позволяет получать решения и с переменными источниками теплоты, независимо от вида граничных условий и формы поперечного сечения (прямоугольник, квадрат).

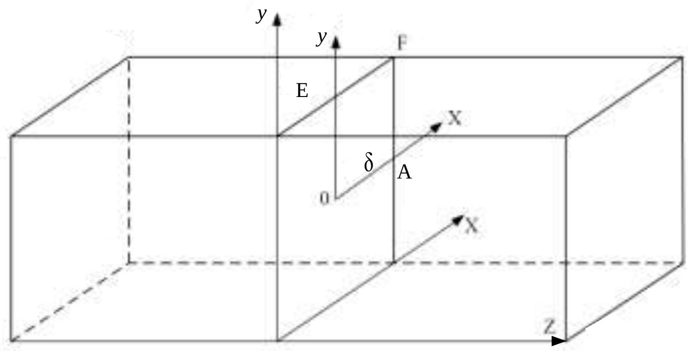



Рис. 2.1. Схема расчетной области поперечного сечения бесконечного прямоугольного бруса

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_{\text{ст}}};\ \xi = \frac{x}{\delta}; \eta = \frac{y}{\delta};\ B = \frac{\nu\delta^2}{\lambda T_{\text{ст}}},$$

где $\Theta$ – безразмерная температура; $\xi$, $\eta$ – безразмерные координаты; $B$ – безразмерный параметр.

С учетом обозначений задача будет (рис. 2.2)

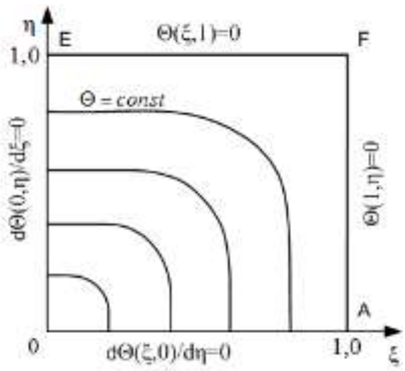



Рис. 2.2. Схема теплообмена в поперечном сечении бесконечного прямоугольного бруса

$$\frac{\partial^2\Theta(\xi,\eta)}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Theta(\xi,\eta)}{\partial\eta^2} + B = 0,\ (0 < \xi < 1;\ 0 < \eta < 1); \tag{2.3}$$

$$\Theta(1,\eta) = 0; \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\eta)}{\partial\xi} = 0; \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\Theta(\xi,0)}{\partial\eta} = 0; \tag{2.6}$$

$$\Theta(\xi,1) = 0. \tag{2.7}$$

Введем дополнительную искомую функцию, характеризующую температуру по линии ОА (рис. 2.2)

$$q(\xi) = \Theta(\xi,0). \tag{2.8}$$

Решение задачи (2.3) – (2.7) примем в виде

$$\Theta(\xi,\eta)=\sum_{k=1}^{n} b_k(q)\varphi_k(\eta), \tag{2.9}$$

где $b_k(q)$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(\eta)=\cos\left(\frac{r\pi\eta}{2}\right)$– координатные функции $(r=2k-1,\ k=\overline{1,n})$.

Соотношение (2.9), благодаря принятой системе координатных функций, удовлетворяет граничным условиям (2.6), (2.7). В первом приближении подставим (2.9) (при одном члене ряда при $k=1$) в (2.8)

$$b_1(q)\cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right)\Bigg|_{\eta=0}=q(\xi). \tag{2.10}$$

Соотношение (2.10) представляет алгебраическое линейное уравнение, из решения которого находим $b_1(q)=q(\xi)$. С учетом найденного значения неизвестного коэффициента $b_1(q)$решение (2.9) принимает вид

$$\Theta(\xi,\eta)=q(\xi)\cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right). \tag{2.11}$$

Потребуем, чтобы (2.11) удовлетворяло осредненному по переменной η уравнению (2.3) (интегралу теплового баланса)

$$\int_0^1\left[\frac{\partial^2\Theta(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Theta(\xi,\eta)}{\partial\eta^2}+B\right]d\eta=0. \tag{2.12}$$

Подставляя (2.11) в (2.12), после определения интегралов относительно неизвестной функции $q(\xi)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2q(\xi)}{d\xi^2}-\frac{\pi^2q(\xi)}{4}+\frac{\pi B}{2}=0. \tag{2.13}$$

Его решение

$$q(\xi)=C_1\exp\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)+C_2\exp\left(\frac{-\pi\xi}{2}\right)+\frac{2B}{\pi}, \tag{2.14}$$

где $C_1$, $C_2$ – постоянные интегрирования. Подставляя (2.14) в (2.11), получаем

$$\Theta(\xi,\eta)=\left(C_1e^{\frac{\pi\xi}{2}}+C_2e^{\frac{-\pi\xi}{2}}+\frac{2B}{\pi}\right)\cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right). \tag{2.15}$$

Постоянные интегрирования $C_1$ и $C_2$ находятся из (2.4), (2.5). Подставляя (2.15) в (2.4), (2.5), относительно $C_1$ и $C_2$ будем иметь систему двух алгебраических линейных уравнений, из решения которых находим

$$C_1 = C_2 = \frac{-2B\exp\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi + \pi\exp\pi}.$$

С учетом найденных значений $C_1$ и $C_2$ (2.15) будет

$$\Theta(\xi,\eta) = \frac{2B}{\pi}\left[\frac{\exp\frac{\pi}{2}}{1+\exp\pi}\exp\frac{\pi\xi}{2} + \exp\frac{-\pi\xi}{2} + 1\right]\cos\frac{\pi\eta}{2}. \qquad (2.16)$$

Соотношение (2.16) представляет решение задачи (2.3) – (2.7) в первом приближении. Оно точно удовлетворяет граничным условиям (2.4) – (2.7), интегралу теплового баланса (2.12) и приближенно – уравнению (2.3). Средняя квадратическая погрешность решения (2.16) от точного [29] по форме Гаусса составляет 0,7%.

Для повышения точности решения необходимо увеличивать число членов ряда (2.9), для определения неизвестных коэффициентов которого необходимо привлекать дополнительные граничные условия (ДГУ). Эти условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению уравнения (2.3) на границах ОЕ и ОА сечения бруса (рис. 2.2). Для получения первого условия продифференцируем граничное условие (2.6) дважды по переменной $\xi$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial^2\Theta(\xi,0)}{\partial\xi^2}\right) = 0. \qquad (2.17)$$

Соотношение (2.17) с учетом (2.3) приводится к ДГУ, выполняемому по линии ОА,

$$\frac{\partial^3\Theta(\xi,0)}{\partial\eta^3} = 0. \qquad (2.18)$$

Для получения второго ДГУ (для границы ОА) продифференцируем (2.18) дважды по переменной $\xi$

$$\frac{\partial^3}{\partial\eta^3}\left(\frac{\partial^2\Theta(\xi,0)}{\partial\xi^2}\right) = 0. \qquad (2.19)$$

Соотношение (2.19) с учетом уравнения (2.3) приводится к ДГУ вида

$$\frac{\partial^5\Theta(\xi,0)}{\partial\eta^5} = 0. \qquad (2.20)$$

Аналогично можно получить любое число ДГУ, задаваемых на оси симметрии (по линии ОА). Запишем общую формулу для них

$$\frac{\partial^{2i-1}\Theta(\xi,0)}{\partial\eta^{2i-1}}=0,\ (i=2,3,4...). \tag{2.21}$$

Отметим, что благодаря принятой системе координатных функций $\varphi_k(\eta)\ k=\overline{1,n}$ все ДГУ, определяемые по формуле (2.21), соотношением (2.9) выполняются.

Для определения ДГУ по оси симметрии η (по линии ОЕ) продифференцируем граничное условие (2.5) дважды по переменной η

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2\Theta(0,\eta)}{\partial\eta^2}\right)=0. \tag{2.22}$$

Соотношение (2.22) с учетом уравнения (2.3) приводится к следующему ДГУ

$$\frac{\partial^3\Theta(0,\eta)}{\partial\xi^3}=0. \tag{2.23}$$

Дифференцируя (2.23) дважды по переменной η, находим

$$\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\left(\frac{\partial^2\Theta(0,\eta)}{\partial\eta^2}\right)=0. \tag{2.24}$$

Соотношение (2.24) с учетом уравнения (2.3) приводится к ДГУ вида

$$\frac{\partial^5\Theta(0,\eta)}{\partial\xi^5}=0. \tag{2.25}$$

Общая формула ДГУ по линии ОЕ будет

$$\frac{\partial^{2i-1}\Theta(0,\eta)}{\partial\xi^{2i-1}}=0,\ (i=2,3,4...). \tag{2.26}$$

Для определения ДГУ по линии AF продифференцируем граничное условие (2.4) дважды по переменной η

$$\frac{\partial^2\Theta(1,\eta)}{\partial\eta^2}=0. \tag{2.27}$$

Уравнение (2.3) с учетом (2.27) приводится к следующему ДГУ

$$\frac{\partial^2\Theta(1,\eta)}{\partial\xi^2}+B=0. \tag{2.28}$$

Дифференцируя (2.28) дважды по переменной η, находим

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial^2\Theta(1,\eta)}{\partial\eta^2}\right)=0. \tag{2.29}$$

Соотношение (2.29) с учетом уравнения (2.3) приводится к ДГУ вида

$$\frac{\partial^4\Theta(1,\eta)}{\partial\xi^4}=0. \tag{2.30}$$

Общая формула для всех последующих ДГУ по линии AF будет

$$\frac{\partial^{2i}\Theta(1,\eta)}{\partial\xi^{2i}}=0,\ (i=2,3,4...). \tag{2.31}$$

Продифференцируем соотношение (2.8) дважды по переменной $\xi$

$$\frac{\partial^2 q(\xi)}{\partial\xi^2}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,0)}{\partial\xi^2}. \tag{2.32}$$

Соотношение (2.32) с учетом уравнения (2.3) приводится к следующему ДГУ

$$\frac{\partial^2 q(\xi)}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Theta(\xi,0)}{\partial\eta^2}+B=0. \tag{2.33}$$

Продифференцируем (2.33) дважды по переменной $\xi$

$$\frac{\partial^4 q(\xi)}{\partial\xi^4}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial^2\Theta(\xi,0)}{\partial\xi^2}\right)=0. \tag{2.34}$$

Соотношение (2.34) с учетом уравнения (2.3) приводится к ДГУ вида

$$\frac{\partial^4 q(\xi)}{\partial\xi^4}+\frac{\partial^4\Theta(\xi,0)}{\partial\eta^4}=0. \tag{2.35}$$

Общая формула для всех последующих ДГУ, начиная с ДГУ (2.35), будет

$$\frac{\partial^{2i} q(\xi)}{\partial\xi^{2i}}+\frac{\partial^{2i}\Theta(\xi,0)}{\partial\eta^{2i}}=0,\ (i=2,3,4,...). \tag{2.36}$$

Во втором приближении подставим (2.9) (с двумя членами ряда) в (2.8), (2.33). Относительно $b_1(q)$ и $b_2(q)$ будем иметь систему двух алгебраических линейных уравнений, из решения которых находим

$$b_1(q)=-\frac{4q'-9\pi^2 q+4}{8\pi^2};\ b_2(q)=\frac{4q'-\pi^2 q+4}{8\pi^2}. \tag{2.37}$$

Соотношение (2.9) с учетом (2.37) принимает вид

$$\Theta(\xi,\eta)=\frac{1}{\pi^2}\left[\left(-q'+2{,}25\pi^2 q-1\right)\cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right)+\left(q'-0{,}25\pi^2 q+1\right)\cos\left(\frac{3\pi\eta}{2}\right)\right]. \tag{2.38}$$

Подставляя (2.38) в (2.12), для $q$(Fo) имеем обыкновенное уравнение

$$\frac{4}{3\pi^3}q^{IV}-\frac{10}{3\pi}q''+\frac{3\pi}{4}q=0, \tag{2.39}$$

где $q^{IV}=\dfrac{d^4 q(\xi)}{d\xi^4};\ q''=\dfrac{d^2 q(\xi)}{d\xi^2}$.

Его решение

$$q(\xi)=\frac{4B(\pi+1)}{3\pi^2}+C_1e^{\frac{\pi\xi}{2}}+C_2e^{\frac{3\pi\xi}{2}}+C_3e^{\frac{-\pi\xi}{2}}+C_4e^{\frac{-3\pi\xi}{2}}, \qquad (2.40)$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ – постоянные интегрирования, определяемые из условий (2.4), (2.5), (2.23), (2.28), которые для функции $q(\xi)=\Theta(\xi,0)$ принимают вид $q(1)=0$; $\frac{dq(0)}{d\xi}=0$; $\frac{d^3q(0)}{d\xi^3}=0$; $\frac{d^2q(1)}{d\xi^2}+B=0$. Подставляя (2.40) в эти условия, относительно постоянных $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ будем иметь систему четырех алгебраических уравнений, из решения которых находим

$$C_1=C_3=-\frac{(3\pi+2)e^{\frac{\pi}{2}}}{2\pi^2(e^{\pi}+0{,}5)};\ C_2=C_4=\frac{(\pi+2)e^{\frac{3\pi}{2}}}{6\pi^2(e^{3\pi}+1)}. \qquad (2.41)$$

Соотношение (2.38) с учетом (2.40), (2.41) представляет решение задачи (2.3) – (2.7) во втором приближении. Оно точно удовлетворяет граничным условиям (2.4) – (2.7), интегралу теплового баланса (2.12) и приближенно – уравнению (2.3). Расчеты по (2.38) даны на рис. 2.3. Сравнение с точным решением [29] показывает, что средняя квадратическая погрешность по формуле Гаусса равна 1,3%. Для увеличения точности решения необходимо увеличивать число членов ряда (2.9), для нахождения коэффициентов которого используется условие (2.8) и ДГУ, получаемые по формуле (2.36). Для нахождения констант интегрирования $C_k$, $(k=\overline{2,n})$ используются: исходные граничные условия (2.3), (2.4), ДГУ (2.28) и ДГУ, получаемые по общим формулам (2.26) , (2.31) и (2.36). Следует отметить достаточно быструю сходимость принятого метода решения. Так, уже во втором приближении максимальная относительная погрешность полученного решения по норме Чебышева в сравнении с точным решением [29] уменьшается с 33% до 10%. Отметим также, что использование точного аналитического решения, представляющего бесконечный ряд, затруднительно, когда решение задачи (2.3) – (2.7) используются при исследовании других задач, например, термоупругости, обратных задач, задач управления и др. В данном случае более эффективным является решение с ограниченным числом членов ряда.

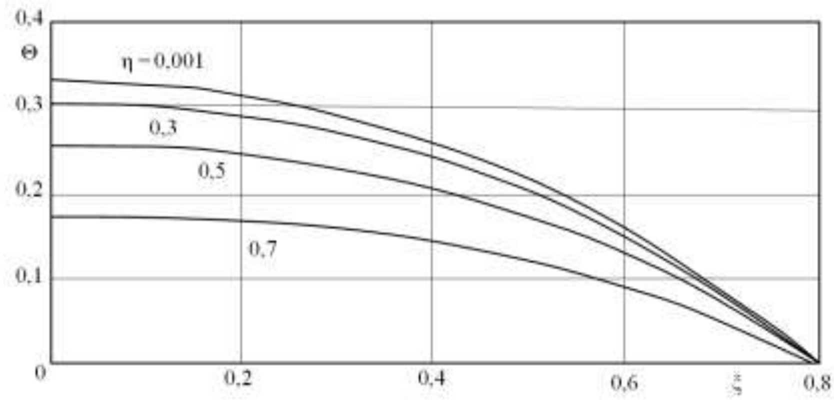



Рис. 2.3. Распределение температуры в сечении бруса
во втором приближении (B=1)

**Выводы**

1. На основе использования дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса получено приближенное аналитическое решение стационарной двумерной задачи теплопроводности для бесконечного бруса с источником теплоты. Использование дополнительной функции позволило свести решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения.

2. Нахождение неизвестных коэффициентов решения и констант интегрирования связано с использованием дополнительных граничных условий, определяемых таким образом, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению исходного дифференциального уравнения на границах области. Показано, что выполнение уравнения в граничных точках приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области.

3. Ввиду использования интеграла теплового баланса данный метод можно применять к решению краевых задач для уравнения Пуассона с переменными физическими свойствами среды и внутренними источниками теплоты.

4. На основе найденного в работе аналитического решения (2.16) из решения обратной задачи можно выполнить количественную идентификацию внутренних источников тепловыделения, возникающих в твердых телах вследствие процессов различной природы (химические реакции, нагрев электромагнитными полями, вибрационные нагрузки, деформация, трение и др.) при наличии экспериментального значения температуры в какой-либо точке конструкции.

## 2.2. Получение точного аналитического решения стационарной двумерной задачи теплопроводности с источником теплоты

Принимая интегральный метод, с использованием тригонометрическх координатных функций получено точное аналитическое решение стационарной двумерной задачи теплопроводности для бесконечно-протяженного бруса квадратного сечения с источником теплоты. Благодаря свойству ортогональности тригонометрических координатных функций, получаемая бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений разделяется – приводится к решению одного уравнения, что позволяет находить точное решение в виде бесконечного ряда. В силу симметричности задачи рассматривается лишь четверть поперечного сечения бруса при задании по линиям разреза граничных условий адиабатной стенки (отсутствия теплообмена), что позволяет (в отличие от известного классического точного аналитического решения) значительно упростить как процесс получения решения, так и окончательное выражение для него.

Получение аналитических решений двумерных краевых задач на основе уравнения Пуассона представляет значительный практический интерес из-за широкого применения при анализе различных физических процессов (теплопроводности, течения жидкостей, теории упругости, термоупругости, кручения призматических тел и др.). Трудность их решения объяснятся двумерностью краевой задачи и неоднородностью исходного дифференциального уравнения. Известное точное аналитическое решение представляет сложный бесконечный функциональный ряд, содержащий гиперболические функции [29].

В настоящей работе точное аналитическое решение получено на основе интегрального метода с использованием ортогональных систем тригонометрических координатных функций, что позволяет существенно упростить как процесс получения решения, так и окончательное выражение для него из-за возможности сведения решения бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений к интегрированию одного обобщенного дифференциального уравнения. Основную идею метода рассмотрим на примере решения задачи теплопроводности для бесконечного бруса квадратного сечения с источником теплоты в следующей математической постановке

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}=-\frac{v}{\lambda},\ (0<x<\delta;\quad 0<y<\delta); \qquad (2.42)$$

$$T(\delta, y) = T_{\text{ст}}\ \left.\frac{\partial T(x, y)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ \left.\frac{\partial T(x, y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0;\ T(x, \delta) = T_{\text{ст}}, \qquad (2.43)$$

где $T$ – температура, *К*; $x$, $y$ – координаты, *м*; $v$ – мощность внутреннего источника теплоты, *Вт/м*$^3$; $\lambda$ – коэффициент теплопроводности, *Вт/(м·К)*; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки, *К*; $\delta$ – половина стороны сечения бруса, *м.*

Ввиду симметрии температурного поля рассматривается только четверть поперечного сечения бруса. С целью упрощения процесса получения точного аналитического решения введём следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta = \frac{T - T_{\text{ст}}}{T_{\text{ст}}};\ \xi = \frac{x}{\delta};\ \eta = \frac{y}{\delta};\ B = \frac{v\delta^2}{\lambda T_{\text{ст}}}, \qquad (2.44)$$

где $\Theta$ – безразмерная температура; $\xi$, $\eta$ – безразмерные координаты ($\xi \in [0,1]$, $\eta \in [0,1]$); $B$ – безразмерный параметр.

С учетом обозначений (2.44) задача (2.42), (2.43) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2\Theta(\xi,\eta)}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2\Theta(\xi,\eta)}{\partial\eta^2} + B = 0,\ (0 < \xi < 1; \quad 0 < \eta < 1); \qquad (2.45)$$

$$\left.\frac{\partial\Theta(\xi,\eta)}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = 0; \qquad (2.46)$$

$$\Theta(1,\eta) = 0; \qquad (2.47)$$

$$\left.\frac{\partial\Theta(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=0} = 0; \qquad (2.48)$$

$$\Theta(\xi,1) = 0. \qquad (2.49)$$

Решение задачи (2.45) – (2.49) принимается в виде

$$\Theta(\xi,\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(\xi)\varphi_k(\eta), \qquad (2.50)$$

где $q_k(\xi)$ – неизвестные функции (дополнительные искомые функции); $\varphi_k = \cos(\frac{2k-1}{2}\pi\eta)$ – координатные функции, $k$ = 1, 2, 3,….

Соотношение (2.50) благодаря принятой системе координатных функций точно удовлетворяет граничным условия (2.48), (2.49). Для определения неизвестных функций $q_k(\xi)$, следуя интегральному методу, составим невязку уравнения (2.45) и потребуем ее ортогональности ко всем координатным функциям $\varphi_j = \cos(\frac{2j-1}{2}\pi\eta)$

$$\int_0^1 \left[ \frac{\partial^2 \Theta(\xi,\eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta(\xi,\eta)}{\partial \eta^2} + B \right] \varphi_j(\eta) d\eta = 0, \; (j = k = \overline{1,\infty}). \qquad (2.51)$$

Подставим (2.50) в (2.51)

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \left[ q_k''(\xi)\varphi_k(\eta) - \left( \frac{2k-1}{2} \right)^2 \pi^2 q_k(\xi)\varphi_k(\eta) \right] \varphi_j(\eta) d\eta + B \int_0^1 \varphi_j(\eta) d\eta = 0, \qquad (2.52)$$

$$(j = k = \overline{1,\infty}).$$

Соотношение (2.52) представляет бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $q_k(\xi)$, но из-за ортогональности введенных тригонометрических функций (2.52) распадается на следующие дифференциальные уравнения

$$q_k''(\xi) - \left( \frac{2k-1}{2} \right)^2 \pi^2 q_k(\xi) + \frac{(-1)^{k+1} 4B}{(2k-1)\pi} = 0, \ldots (k = \overline{1,\infty}). \qquad (2.53)$$

Интегрируя (2.53), находим

$$q_k(\xi) = C_{1k} \exp\left( -\frac{2k-1}{2} \pi\xi \right) + C_{2k} \exp\left( \frac{2k-1}{2} \pi\xi \right) + \frac{(-1)^{k+1} 16B}{(2k-1)^3 \pi^3}, \qquad (2.54)$$

где $C_{1k}$, $C_{2k}$ – постоянные интегрирования, $(k = \overline{1,\infty})$.....

Подставим (2.54) в (2.50)

$$\Theta(\xi,\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ C_{1k} \exp\left( -\frac{2k-1}{2} \pi\xi \right) + C_{2k} \exp\left( \frac{2k-1}{2} \pi\xi \right) + \frac{(-1)^{k+1} 16B}{(2k-1)^3 \pi^3} \right] \varphi_k(\eta). \qquad (2.55)$$

Для определения постоянных интегрирования составим невязку граничных условий (2.46), (2.47) и потребуем ортогональности невязки ко всем координатным функциям $\varphi_j(\eta)$

$$\int_0^1 \left. \frac{\partial \Theta(\xi,\eta)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \varphi_j(\eta) d\eta = 0, \; \int_0^1 \Theta(1,\eta) \varphi_j(\eta) d\eta = 0, \; (j = \overline{1,\infty}) \ldots \qquad (2.56)$$

После подстановки (2.55) в (2.56) получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_{1k}$ и $C_{2k}$:

$$\begin{cases} C_{2k} - C_{1k} = 0; \\ C_{1k} \exp\left( \frac{2k-1}{2} \pi \right) + C_{2k} \exp\left( \frac{2k-1}{2} \pi \right) + \frac{16B(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3 \pi^3}, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$C_{1k} = C_{2k} = \frac{(-1)^k}{\left( \frac{2k-1}{2} \pi \right)^3 ch\left( \frac{2k-1}{2} \pi \right)}. \qquad (2.57)$$

Ряд (2.55) с учетом (2.57) представляет точное аналитическое решение задачи (2.45) – (2.49). Анализ результатов расчетов позволяет заключить, что ряд (2.55) «быстро» сходится. Максимальная относительная погрешность в чебышевской норме от точного решения находится по формуле

$$\Delta_{\max} = \left|\frac{\Theta(\xi,\eta) - \Theta_{ex}(\xi,\eta)}{\Theta_{ex}(\xi,\eta)}\right| \cdot 100\%,$$

где $\Theta_{ex}(\xi,\eta)$ – точное решение, представленное в [29]. При использовании одного члена ряда (2.55) (штриховые линии на рисунке 2.4) погрешность $\Delta_{\max}$ не превышает 6%, при использовании двух членов – не более 1.5%, а при использовании трех членов ряда (сплошные линии на рисунке) – менее 1%. Точное решение на рисунке не приведено, поскольку визуально оно неотличимо от решения при трех членах.

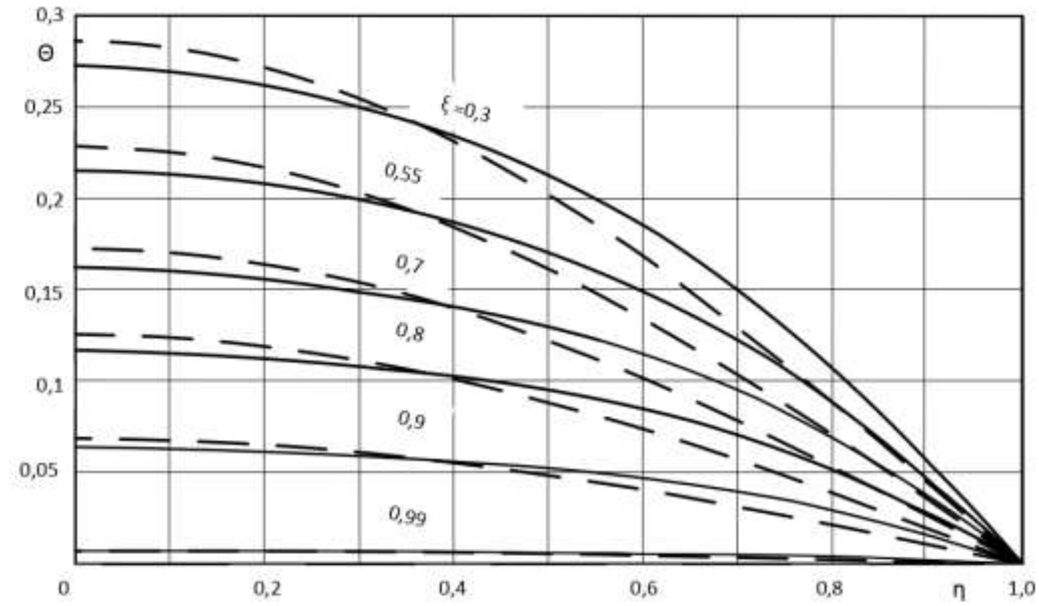



Рис. 2.4. Распределение температуры в различных сечениях бруса. Расчеты по формуле (2.55): штриховые линии – $n$=1, сплошные линии – $n$=3, где $n$ – число членов ряда (2.55), B=1

Отметим, что полученные по формуле (2.55) результаты в различных точках сечения бруса при любом количестве членов ряда (2.55) численно полностью совпадают с решением, приведенным в [29], однако отличаются простотой получения решения с безразмерным диапазоном изменения пространственных переменных ($\xi \in [0,1]$, $\eta \in [0,1]$) и возможностью изменения величины внутреннего источника теплоты *B*.

Выводы

1. На основе интегрального метода при использовании тригонометрических координатных функций получено точное аналитическое решение стационарной двумерной задачи теплопроводности для бесконечно-протяженного бруса квадратного сечения с объемным источником теплоты.

2. Благодаря ортогональности тригонометрических координатных функций, неизвестные функции $q_k(\xi)$ в бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемых в результате применения интегрального метода, разделяются, что позволяет получить решение, точно удовлетворяющее дифференциальному уравнению и всем граничным условиям краевой задачи.

# Глава 3. Разработка методов математического моделирования процессов тепломассопереноса с переменными физическими свойствами среды на основе определения дополнительных искомых функций и дополнительных граничных условий

## 3.1. Задачи теплопроводности с переменными физическими свойствами среды

Необходимость решения краевых задач с переменными по координатам коэффициентами переноса связана с использованием в технике высокоинтенсивных процессов. Кроме того, многие задачи конвективной диффузии, теплопроводности, гидродинамики вязкой жидкости и другие, путём соответствующих подстановок, могут быть сведены к виду уравнений теплопроводности с переменными физическими свойствами среды [70].

Известные решения такого типа задач, найденные классическими методами, имеют вид сложных функциональных рядов, содержащих одновременно функции Бесселя первого и второго рода, и гамма – функции. Так как функции Бесселя представляются в виде бесконечных степенных рядов, то решение краевой задачи принимает вид двойного или тройного ряда. Кроме того, содержащиеся в них собственные числа находятся из решения сложных трансцендентных уравнений, также включающих функции Бесселя. Решения таких уравнений могут быть получены лишь численными методами. В связи с этим получаемые аналитические решения являются, по сути, численными.

Для нахождения приближённых и точных аналитических решений краевых задач большое распространение получили ортогональные методы взвешенных невязок (Л.В. Канторовича, Бубнова – Галеркина, интегральный метод теплового баланса и др.) [4, 7, 13, 15, 28, 29, 49]. Среди них наиболее простым и универсальным является интегральный метод. При его использовании процесс теплопроводности разделяется на две стадии, первая из которых характеризуется постепенным продвижением фронта температурного возмущения от поверхности к центру, а вторая – изменением температуры по всему объему тела. Для каждой стадии вводятся дополнительные искомые функции. Дополнительная функция для первой стадии описывает закономерность перемещения фронта возмущения по координате во времени, а во второй – закон изменения температуры во времени в центре пластины. Таким образом, обе эти функции зависят лишь от времени и, поэтому их введение позволяет свести решение исходного уравнения в частных производных к интегрированию двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно дополнительных искомых функций. Важное преимущество метода в том, что при его использовании практически не накладывается каких-либо ограничений на вид дифференциальных операторов краевых задач – они могут быть нелинейными, с переменными физическими свойствами среды и др. Используя эти методы, для многих сложных задач математической физики, не поддающихся решению классическими аналитическими методами, в ряде случаев удаётся получать аналитические и приближенные аналитические решения.

Существенной проблемой интегрального метода является низкая точность, связанная с трудностями увеличения числа членов ряда (числа приближений) получаемого решения, ввиду отсутствия условий, из которых могут быть определены его неизвестные коэффициенты. Для повышения точности в работах [43 – 46] рассматриваются методы построения дополнительных граничных условий, определяемых в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению исходного уравнения в граничных точках. В [41, 108] показано, что выполнение уравнения на границах приводит к его выполнению и внутри области, с точностью, определяемой числом дополнительных граничных условий. Следовательно, используя необходимое количество дополнительных граничных условий, можно получать решения, практически с заданной точностью.

В качестве примера применения метода дополнительных искомых функций и дополнительных граничных условий рассмотрим получение решения нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины с переменными физическими свойствами среды при симметричных граничных условиях первого рода

$$c(x)\gamma(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right],\ (t>0;\quad 0<x<\delta);\tag{3.1}$$

$$T(x,0)=T_0;\tag{3.2}$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=0;\tag{3.3}$$

$$T(\delta,t)=T_1;\tag{3.4}$$

где $T$ – температура; $x$ – координата; $t$ – время; $\lambda(x)$ – коэффициент теплопроводности; $c(x)$ – теплоемкость; $\gamma(x)$ – плотность; $T_0$ – начальная температура; $T_1$ – температура стенки при $x = \delta$; $\delta$ – половина толщины пластины.

Найдем решение задачи (3.1) – (3.4) в случае, когда произведение $c\gamma = const$, а коэффициент теплопроводности $\lambda$ является экспоненциальной функцией координаты $x$

$$\lambda(x) = \lambda_0 \exp(-mx), \tag{3.5}$$

где $m > 0$ – коэффициент, характеризующий интенсивность изменения коэффициента теплопроводности по координате $x$; $\lambda_0 = const$ – коэффициент теплопроводности пластины при $x = 0$.

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}\ ;\ \ \mathrm{Fo} = \frac{a_0 t}{\delta^2}\ ;\ \ a_0 = \frac{\lambda_0}{c\gamma}\ ;\ \ \xi = \frac{x}{\delta}\ , \tag{3.6}$$

где $\Theta$ – безразмерная температура; $\mathrm{Fo}$ – число Фурье; $a_0$ – коэффициент температуропроводности пластины при $x = 0$; $\xi$ – безразмерная координата.

С учётом обозначений (3.6) задача (3.1) – (3.4) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[e^{-\nu\xi}\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\right], \tag{3.7}$$

$$(\mathrm{Fo} > 0;\ 0 < \xi < 1);$$

$$\Theta(\xi,0) = 0; \tag{3.8}$$

$$\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})/\partial\xi = 0; \tag{3.9}$$

$$\Theta(1,\mathrm{Fo}) = 1, \tag{3.10}$$

где $\nu = m\delta$.

Разделим процесс теплообмена на две стадии по времени: $0 < \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_1$ и $\mathrm{Fo}_1 \le \mathrm{Fo} < \infty$. Для этого введем движущуюся во времени границу (фронт температурного возмущения), разделяющую исходную область $0 < \xi < 1$ на две подобласти $q_1(\mathrm{Fo}) < \xi \le 1$ и $0 < \xi \le q_1(\mathrm{Fo})$, где $q_1(\mathrm{Fo})$ – функция, определяющая продвижение границы раздела во времени (рис. 3.1а). Первая стадия заканчивается при достижении движущейся границей центра пластины($\xi = 0$), то есть, когда $\mathrm{Fo} = \mathrm{Fo}_1$. При этом понятие фронта возмущения теряет смысл и начинается вторая стадия теплообмена, в которой изменение температуры происходит по всей толщине пластины: $0 < \xi < 1$. Математическая постановка задачи для этой стадии будет рассмотрена ниже. Применительно к первой стадии процесса математическая постановка задачи после введения независимой переменной $\rho = 1 - \xi$ записывается в виде (рис. 3.1б)

$$\frac{\partial\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial}{\partial\rho}\left[e^{-\nu(1-\rho)}\frac{\partial\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right], \tag{3.11}$$

$$(0 < \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_1;\ 0 < \rho < q_1(\mathrm{Fo}));$$

$$\Theta(0,\mathrm{Fo}) = 1; \tag{3.12}$$

$$\Theta(q_1,\mathrm{Fo}) = 0; \tag{3.13}$$

$$\partial\Theta(q_1,\mathrm{Fo})/\partial\rho = 0. \tag{3.14}$$

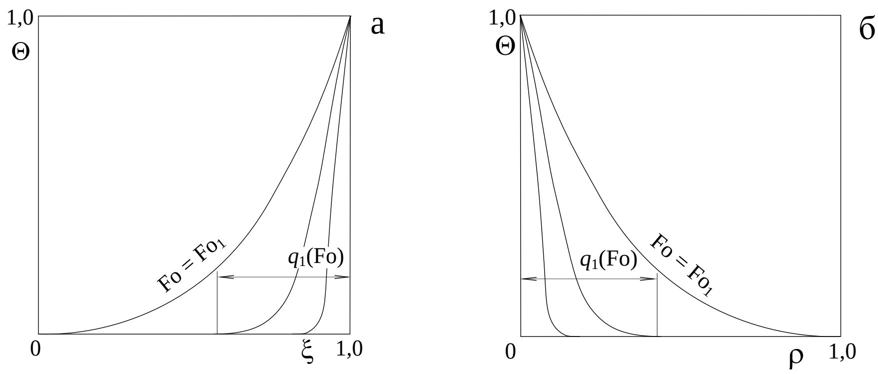



Рис. 3.1. Расчетная схема теплообмена

Задача (3.11) – (3.14) не содержит начального условия (3.8), так как за пределами фронта температурного возмущения она вообще не определена. Так как в начальный момент времени ($\mathrm{Fo} = 0$) величина фронта температурного возмущения равна нулю, то в качестве начального условия принимается условие вида $q_1(0) = 0$. Задача (3.11) – (3.14) не содержит также граничного условия вида (3.9), так как оно не влияет на процесс теплообмена в первой его стадии.

Введение фронта температурного возмущения означает использование допущения о конечной скорости распространения теплоты, несмотря на то, что решению подлежит параболическое уравнение (3.11), описывающее бесконечную её скорость. Разрешение данного противоречия будет дано ниже.

Решение задачи (3.11) – (3.14) разыскивается в виде

$$\Theta(\rho,\mathrm{Fo}) = \sum_{k=0}^{n} a_k(q_1)\rho^k, \tag{3.15}$$

где $a_k(q_1)$ – неизвестные коэффициенты, определяемые из условий (3.12) – (3.14). После подстановки (3.15) (при $n = 2$) в (3.12) – (3.14) относительно

$a_k(q_1)$, $(k=0,1,2)$ получаем систему трех алгебраических линейных уравнений, из решения которой находим $a_0=1$; $a_1=-2/q_1$; $a_2=1/q_1^2$.

С учётом найденных значений коэффициентов $a_k(q_1)$, $(k=0,1,2)$ соотношение (3.15) примет вид

$$\Theta(\rho,\mathrm{Fo})=(1-\rho/q_1)^2. \qquad (3.16)$$

Для нахождения неизвестной функции $q_1(\mathrm{Fo})$ составляется невязка уравнения (3.11) и определяется интеграл от неё в пределах толщины прогретого слоя (интеграл теплового баланса)

$$\int_0^{q_1}\frac{\partial\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}d\rho=\int_0^{q_1}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[e^{-\nu(1-\rho)}\frac{\partial\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right]d\rho. \qquad (3.17)$$

Вычисляя интегралы в (3.17), получаем

$$q_1dq_1=6\exp(-\nu)d\mathrm{Fo}. \qquad (3.18)$$

Решение уравнения (3.18) при начальном условии $q_1(0)=0$ имеет вид

$$q_1(\mathrm{Fo})=2\sqrt{3\mathrm{Fo}\exp\nu}/\exp\nu. \qquad (3.19)$$

Положив $q_1(\mathrm{Fo})=1$ (при $\nu=0{,}01$), находим время $\mathrm{Fo}_1=0{,}084$, при котором фронт температурного возмущения достигает координаты $\rho=1$.

Формулы (3.16), (3.19) являются решением задачи (3.11) – (3.14) в первом приближении. Сравнение результатов расчётов по формуле (3.16) с решением методом конечных разностей позволяет заключить, что в диапазоне $0{,}025<\mathrm{Fo}\le 0{,}005$ их расхождение не превышает 6%. Повышение точности связано с увеличением числа членов ряда (3.15), неизвестные коэффициенты которого будем находить из основных (3.12) – (3.14) и дополнительных граничных условий. Отметим, что во втором и каждом последующем приближении необходимо использовать по три дополнительных граничных условия – одно при $\rho=0$ и два других – при $\rho=q_1(\mathrm{Fo})$. Для их получения будем последовательно дифференцировать граничные условия (3.12) – (3.14) по переменной Fo, а уравнение (3.11) по переменной $\rho$. Сравнивая получающиеся при этом соотношения, можно найти необходимое количество дополнительных граничных условий. Для получения первого из них продифференцируем (3.12) по Fo

$$\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=0. \qquad (3.20)$$

Уравнение (3.11) запишем для точки $\rho=0$

$$\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\nu e^{-\nu}\left.\frac{\partial\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}+e^{-\nu}\left.\frac{\partial^2\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=0}. \quad (3.21)$$

Сравнивая(3.20) и(3.21), получаем первое дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^2\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2}+\nu\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}=0. \quad (3.22)$$

Для получения второго дополнительного граничного условия продифференцируем соотношение (3.13) по переменной Fo

$$\left.\frac{\partial\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\rho=q_1}=0. \quad (3.23)$$

Запишем уравнение(3.11) для $\rho=q_1(\mathrm{Fo})$

$$\left.\frac{\partial\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\rho=q_1}=\nu e^{-\nu(1-q_1)}\left.\frac{\partial\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=q_1}+e^{-\nu(1-q_1)}\left.\frac{\partial^2\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=q_1}. \quad (3.24)$$

Сравнивая(3.23) и(3.24), с учетом (3.14) получим второе дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^2\Theta(q_1,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2}=0. \quad (3.25)$$

Для получения третьего дополнительного граничного условия продифференцируем соотношение(14) по переменной Fo

$$\left.\frac{\partial^2\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}\partial\rho^2}\right|_{\rho=q_1}=0. \quad (3.26)$$

Дифференцируя уравнение (3.11) по переменной $\rho$ и, применяя полученное соотношение к точке $\rho=q_1(\mathrm{Fo})$, с учетом (3.14) и (3.25), получаем

$$\left.\frac{\partial^2\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}\partial\rho}\right|_{\rho=q_1}=e^{\nu(q_1-1)}\left.\frac{\partial^2\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^3}\right|_{\rho=q_1}. \quad (3.27)$$

Сравнивая (3.26) и (3.27), находим третье дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^3\Theta(q_1,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^3}=0. \quad (3.28)$$

Подставляя (3.15), ограничиваясь шестью членами ряда, в основные (3.12) – (3.14) и дополнительные (3.22),(3.25),(3.28) граничные условия, относительно $a_k(q_1)$, $(k=\overline{0,5})$ будем иметь систему шести алгебраических линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&(a_0+a_1\rho+a_2\rho^2+a_3\rho^3+a_4\rho^4+a_5\rho^5)_{\rho=0}=1;\\
&a_0+a_1q_1+a_2q_1^2+a_3q_1^3+a_4q_1^4+a_5q_1^5=0;\\
&a_1+2a_2q_1+3a_3q_1^2+4a_4q_1^3+5a_5q_1^4=0;\\
&a_1\nu+2a_2=0;\\
&a_2+3a_3q_1+6a_4q_1^2+10a_5q_1^3=0;\\
&a_3q_1+6a_4q_1+10a_5q_1^2=0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

Ввиду высоких степеней производных в дополнительных граничных условиях система уравнений (3.29) имеет цепочный вид, что существенно упрощает процесс получения её решения. Из решения системы уравнений (3.29) находим

$$a_0=1;\qquad a_1=20/(q_1r);\qquad a_2=\frac{a_1}{2};$$

$$a_3=\frac{20(\nu q_1+2)}{(q_1^3r)};$$

$$a_4=\frac{5(3\nu q_1+8)}{q_1^4}r;$$

$$a_5=\frac{4(\nu q_1+3)}{q_1^5}r;\qquad r=\nu q_1+8. \tag{3.30}$$

Подставляя (3.30) в (3.15), получаем

$$\Theta(\rho,\mathrm{Fo})=\frac{(12\rho+8q_1+\nu q_1^2+4\nu q_1\rho)(\rho-q_1)^4}{(\nu q_1+8)q_1^5}. \tag{3.31}$$

Подставляя (3.31) в интеграл теплового баланса (3.17), относительно неизвестной функции $q_1(\mathrm{Fo})$ получаем следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dq_1}{d\mathrm{Fo}}=\frac{60\nu q_1+480}{\nu^2q_1^3+16\nu q_1^2+48q_1}. \tag{3.32}$$

Приближенное решение находится в виде

$$q_1(\mathrm{Fo})=\mu\mathrm{Fo}^{\lambda}, \tag{3.33}$$

где $\mu=1\big/\left(\mathrm{Fo}_1^*\right)^{\lambda}$; $\mathrm{Fo}_1=\dfrac{A}{2}-\dfrac{\nu}{90}-\dfrac{\nu^2}{1280}-\dfrac{1}{40}$;

$$\lambda=A-\frac{209\nu^3+1312\nu^2+2304}{192\nu^2+3072\nu+9216};$$

$$A=\left(\frac{81\nu^5+4104\nu^4+83008\nu^3+805376\nu^2+3621888\nu+597196}{3317600\nu+265420800}\right)^{1/2}.$$

Например, при $\nu=0{,}01\mu=4{,}47235$; $\lambda=0{,}5$; $\mathrm{Fo}_1^*=0{,}05$ – время достижения фронтом температурного возмущения координаты $\rho=1$ во втором приближении.

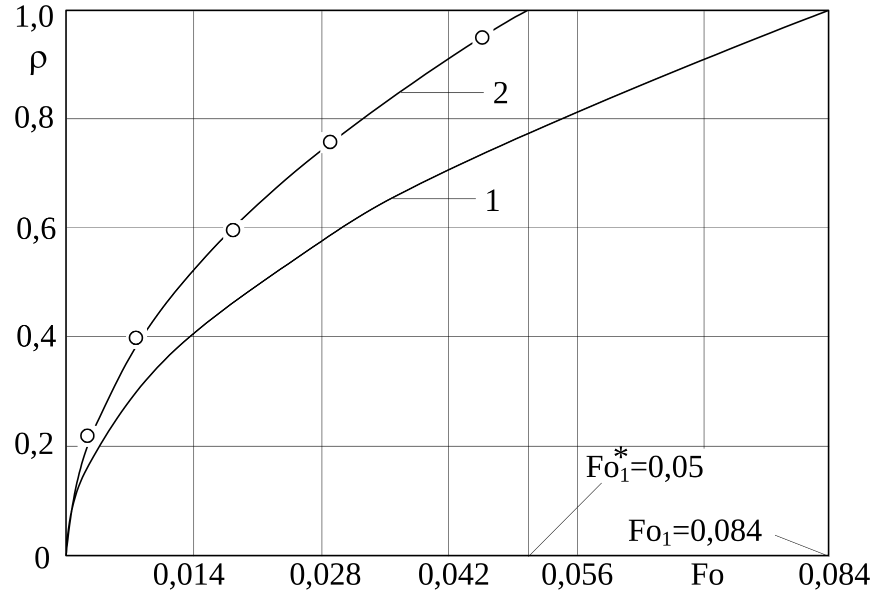



Рис. 3.2. Перемещение фронта температурного возмущения $q_1(\mathrm{Fo})$ по координате $\rho$ во времени $\mathrm{Fo}(\nu=0{,}01)$. 1 – по формуле (3.19) (решение уравнения (3.18)); 2 – по формуле (3.33) (решение уравнения (3.32)); ○ – численное решение

Результаты расчётов перемещения фронта температурного возмущения по формуле (3.19) (решение уравнения (3.18)), а также по формуле (3.33) (решение уравнения (3.32)) в сравнении с решением уравнения (3.32) численным методом, приведены на рис. 3.2. Их анализ показывает практическое совпадение численного решения с результатами, полученными по формуле (3.33). Следовательно, она с достаточной степенью точности может быть использована в качестве аналитического решения уравнения (3.32).

Анализ результатов расчетов перемещения фронта температурного возмущения $q_1(\mathrm{Fo})$ показывает, что с увеличением числа приближений время достижения координаты $\rho=1$ уменьшается с $\mathrm{Fo}_1=0{,}084$ (в первом приближении) до $\mathrm{Fo}_1^*=0{,}05$ (во втором). И в пределе при $n\to\infty$, $\mathrm{Fo}_1\to 0$, что свидетельствует о приближении к описываемой уравнением (3.11) бесконечной скорости распространения теплоты. Следовательно, указанное выше противоречие, связанное с определением фронта температурного возмущения в краевой задаче для параболического уравнения теплопроводности, оказывается разрешенным. Необходимость введения фронта возмущения в данном случае связана лишь с упрощением процесса получения приближенного аналитического решения фактически нелинейного дифференциального уравнения с переменными свойствами среды (нелинейность второго рода).

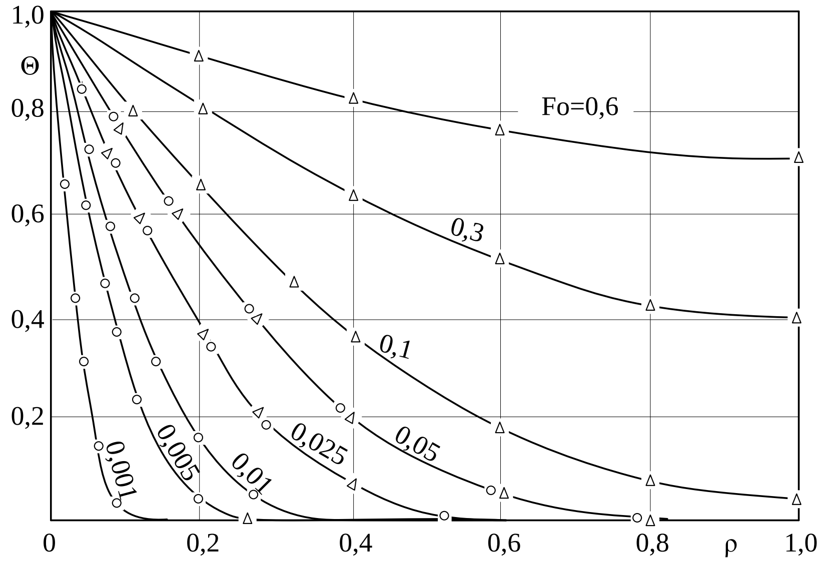



Рис. 3.3. Распределение температуры в пластине ( $\nu = 0{,}01$ ). △ – по формуле (3.39) (второе приближение); ○ – по формуле (3.31); ——— – метод конечных разностей

Соотношения (3.31), (3.33) представляют решение задачи (3.11) – (3.14) во втором приближении. Результаты расчётов по формуле (3.31), в сравнении с решением задачи (3.11) – (3.14) методом конечных разностей, для $\nu = 0{,}01$ приведены на рис. 3.3. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне $0{,}001 < \mathrm{Fo} \le 0{,}05$ расхождение результатов не превышает 0,5 %.

Во второй стадии процесса, соответствующей времени $\mathrm{Fo}_1 \le \mathrm{Fo} < \infty$, понятие фронта температурного возмущения теряет смысл. Теплообмен в данном случае происходит по всей толщине пластины и математическая постановка задачи приводится к виду

$$\frac{\partial \Theta(\rho, \mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left[ e^{-\nu(1-\rho)} \frac{\partial \Theta(\rho, \mathrm{Fo})}{\partial \rho} \right], \qquad (3.34)$$

$$(\mathrm{Fo}_1 \le \mathrm{Fo} < \infty; \quad 0 < \rho < 1);$$

$$\Theta(0, \mathrm{Fo}) = 1; \qquad (3.35)$$

$$\partial\Theta(1, \mathrm{Fo})/\partial\rho = 0. \qquad (3.36)$$

Введем дополнительную искомую функцию

$$q_2(\mathrm{Fo}) = \Theta(1, \mathrm{Fo}), \qquad (3.37)$$

характеризующую изменение температуры во времени в центре пластины. Так как она является искомой величиной задачи (3.34) – (3.36), то её использование данную задачу не изменяет, а является лишь вспомогательным средством, позволяющим существенно упростить процесс получения ее аналитического решения.

Задачи (3.11) – (3.14) и (3.34) – (3.36) при Fo = Fo₁, то есть, когда $q_1(\mathrm{Fo}_1)=1$, полностью совпадают. В связи с чем, начальное условие для уравнения (34) приводится к соотношению (3.16), в котором следует положить $q_1(\mathrm{Fo}_1)=1$

$$\Theta(\rho,\mathrm{Fo}_1)=(1-\rho)^2. \tag{3.38}$$

Решение задачи (3.34) – (3.38) принимается в виде

$$\Theta(\rho,\mathrm{Fo})=\sum_{k=0}^{n} b_k(q_2)\rho^k, \tag{3.39}$$

где $b_k(q_2)$ – неизвестные коэффициенты, определяемые из условий (3.35) – (3.37). Подставляя (3.39), ограничиваясь тремя членами ряда, в (3.35) – (3.37), относительно $b_0$, $b_1$, $b_2$ будем иметь систему трех алгебраических уравнений, из решения которой находим $b_0=1$; $b_1=-2(1-q_2)$; $b_2=1-q_2$. Соотношение (3.39) с учетом найденных значений коэффициентов $b_k(q_2)$ $(k=0,1,2)$ принимает вид

$$\Theta(\rho,\mathrm{Fo})=1-\rho(2-\rho)(1-q_2(\mathrm{Fo})). \tag{3.40}$$

Так как при $\mathrm{Fo}=\mathrm{Fo}_1$ $q_2(\mathrm{Fo}_1)=0$, то соотношение (3.40) приводится к формуле (3.38), и, следовательно, уже на этой стадии получения решения начальное условие (3.38) для функции $\Theta(\rho,\mathrm{Fo}_1)$ оказывается выполненным.

Потребуем, чтобы соотношение (3.40) удовлетворяло не уравнению (3.34), а некоторому осредненному по пространственной переменной уравнению, то есть интегралу теплового баланса вида

$$\int_0^1 \frac{\partial\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}d\rho=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\rho}\left[e^{-\nu(1-\rho)}\frac{\partial\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right]d\rho. \tag{3.41}$$

Подставляя (3.40) в (3.41), относительно неизвестной функции $q_2(\mathrm{Fo})$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dq_2}{d\mathrm{Fo}}=-3(q_2-1)\exp(-\nu). \tag{3.42}$$

Интегрируя уравнение (3.42), находим

$$q_2(\mathrm{Fo})=1-C_1\exp\left[-3\mathrm{Fo}\exp(-\nu)\right], \tag{3.43}$$

где $C_1$ – константа интегрирования, определяемая из начального условия $q_2(\mathrm{Fo}_1)=0$. Формула для нее будет иметь вид $C_1=\exp\left[3\mathrm{Fo}_1\exp(-\nu)\right]$.

Соотношение (3.40) с учетом (3.43) принимает вид

$$\Theta(\rho,\mathrm{Fo})=1-\rho(2-\rho)\exp\left[-3(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_1)\exp(-\nu)\right]. \qquad (3.44)$$

Соотношение (3.44) представляет решение задачи (3.34) – (3.38) в первом приближении. Оно точно удовлетворяет граничным условиям (3.35), (3.36) и начальному условию (3.38) и приближенно (в первом приближении) – уравнению (3.34). Отметим, что интеграл теплового баланса (3.41) решением (3.44) удовлетворяется точно. Анализ результатов расчетов по формуле (3.44), в сравнении с расчетом по методу конечных разностей, позволяет заключить, что в диапазоне $\mathrm{Fo}_1\le\mathrm{Fo}<\infty$ их расхождение не превышает 6%.

Для повышения точности решения необходимо увеличивать число членов ряда (3.39), для определения неизвестных коэффициентов которого будем использовать основные (3.35) – (3.37) и дополнительные граничные условия, определяемые таким образом, чтобы искомое решение удовлетворяло уравнению (3.34) в граничных точках $\rho=0$ и $\rho=1$. Формула для первого из них, получаемого на основе основного граничного условия (3.35), совпадает с формулой (3.22). Еще два дополнительных граничных условия получаются с использованием соотношений (3.36), (3.37). Дифференцируя эти соотношения по переменной Fo, получаем

$$\frac{\partial^2\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}\partial\rho}=0; \qquad (3.45)$$

$$\frac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}=\frac{dq_2(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}}. \qquad (3.46)$$

Продифференцируем уравнение (3.34) по переменной $\rho$ и запишем полученное соотношение для точки $\rho=1$

$$\frac{\partial^2\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}\partial\rho}=-2\nu\frac{\partial^2\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^3\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^3}. \qquad (3.47)$$

Сравнивая (3.45) и (3.47), с учетом (3.36) находим следующее дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^3\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^3}+2\nu\frac{\partial^2\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2}=0. \qquad (3.48)$$

Сравнивая уравнение (3.34) и соотношение (3.46), получаем еще одно дополнительное граничное условие в точке $\rho=1$

$$\frac{\partial^2\Theta(1,\text{Fo})}{\partial\rho^2} = \frac{dq_2(\text{Fo})}{d\text{Fo}}. \qquad (3.49)$$

Подставляя (3.39), ограничиваясь шестью членами ряда в (3.22), (3.35) – (3.37), (3.48), (3.49), относительно неизвестных коэффициентов $b_k$, $(k=\overline{0,5})$ будем иметь цепочную систему шести алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&b_1\nu + 2b_1 = 0;\\
&(b_0 + b_1\rho + b_2\rho^2 + b_3\rho^3 + b_4\rho^4 + b_5\rho^5)_{\rho=1} = 1;\\
&b_1 + 2b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5 = 0;\\
&b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = q_2;\\
&(-\nu)(b_2 + 3b_3 + 4b_4 + 5b_5) = dq_2 / d\text{Fo};\\
&2b_2\nu + 3b_3(1+2\nu) + 12b_4(1+\nu) + 10b_5(3+2\nu) = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Ее решение

$b_0 = 1$; $b_1 = (q_2' r_4 + 60r_5)/3r_1$; $b_2 = \nu(q_2' r_4 + 60r_5)/(6r_1)$;

$b_3 = (q_2'(14 - v^2) + 20(q_2(1-v) + v - 2))/r_1$;

$b_4 = q_2'(96 + 11v - 6v^2) + 10r_4(q_2 - 1)/(6r_1)$; $b_5 = q_2'(15 + 3v - v^2 + 12r_2(q_2 - 1))/(3r_1)$;

где $r_1 = \nu - 8$; $r_2 = 3 - \nu$; $r_3 = 24 - 9\nu$; $r_4 = 9 + 2\nu$; $r_5 = q_2 - 1$; $q_2' = dq_2 / d\text{Fo}$.

Подставляя (3.39) (с учетом найденных значений коэффициентов $b_k$, $(k=\overline{0,5})$) в интеграл теплового баланса (3.41), относительно неизвестной функции $q_2(\text{Fo})$ будем иметь обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\eta_1 \frac{d^2 q_2}{d\text{Fo}^2} + \eta_2 \frac{dq_2}{d\text{Fo}} + 3600 = 0, \qquad (3.50)$$

где $\eta_1 = (66 - \nu(\nu+6))\exp\nu$; $\eta_2 = 1080 + 120\nu + (540 - 2400\nu^2))\exp\nu$.

Интегрируя уравнение (3.50), находим

$$q_2(\text{Fo}) = 1 + C_1\exp(\mu_1\text{Fo}) + C_2\exp(\mu_2\text{Fo}), \qquad (3.51)$$

где $C_1$, $C_2$ – константы интегрирования;

$$\mu_{1,2} = z \mp 30(z_1 + z_2 + z_3 + 324)^{1/2} / (\nu^2\exp\nu + 6(\exp\nu)(11+\nu));$$

$z = 60\nu(1 - \exp\nu) + 270\exp\nu + 540$;

$$z_1 = 4\nu(18+\nu);\quad z_2 = e^{2\nu}(81 - 36\nu + 4\nu^2);\quad z_3 = 4e^{\nu}(15 - \nu^2 - 3\nu).$$

Для определения констант интегрирования используются следующие начальные условия:

$$q_2(\text{Fo}_1) = 0;\, dq_2(\text{Fo}_1)/d\text{Fo} = 0. \qquad (3.52)$$

Подставляя (3.51) в (3.52), находим: $C_1 = -1/(1 - \mu_2/\mu_1)$; $C_2 = \mu_2/(\mu_1 - \mu_2)$.

Результаты расчетов по формуле (3.39) во втором приближении (шесть членов ряда), в сравнении с расчетом численным методом при ($\nu = 0{,}01$), приведены на рис. 3.3. Из их анализа следует, что в диапазоне $0{,}025 \le \mathrm{Fo} < \infty$ расхождение расчетов не превышает 0,5 %. Результаты расчетов по формуле (3.39) во втором приближении для $\nu = 1{,}0$ в сравнении с решением при $\nu = 0{,}01$ приведены на рис. 3.4. Их анализ позволяет заключить о существенном влиянии на распределение температуры величины $\nu$ (расхождение результатов более 25%). При этом наибольшее расхождение наблюдается в центре симметричной пластины, то есть там, где расхождение в коэффициенте теплопроводности, определяемом по формуле (3.5) (где $m = \nu / \delta$), максимальное. Прикладное значение полученного результата в том, что данный метод можно применять к решению краевых задач с переменными физическими свойствами среды, причем не только к задачам, где коэффициент теплопроводности изменяется монотонно, но и к задачам для многослойных конструкций (композиционные материалы), где он изменяется скачкообразно (ступенчато). В этом случае, используя теорию обобщенных функций (асимметричную единичную функцию Хевисайда), задача теплопроводности для многослойной конструкции приводится к однослойной, но с переменными (кусочно-однородными) свойствами среды. Таким образом, рассмотренный метод можно применять к решению всех тех задач с переменными физическими свойствами среды, для которых эти свойства могут быть описаны какой-либо аналитической зависимостью, в том числе и со ступенчатым изменением аппроксимируемого параметра.

Результаты расчетов по формуле (3.31) при $\nu = 0{,}01$ для сверхмалых значений времени ($0 \le \mathrm{Fo} \le 10^{-5}$) в сравнении с точным решением [70], полученным при $\nu = 0$, приведены на рис. 3.5. Их анализ показывает практическое совпадение результатов двух методов. Этот факт можно объяснить тем, что при сверхмалых значениях времени фронт температурного возмущения проникает на незначительную глубину по координате $\rho$ ($q_1(\mathrm{Fo}) = 2 \cdot 10^{-3}$). В диапазоне столь малой величины пространственной переменной $0 \le \rho \le 2 \cdot 10^{-3}$ происходит столь незначительное изменение коэффициента теплопроводности, что им можно пренебречь (то есть принять $\nu = 0$). Таким образом, уже во втором приближении в первой и второй стадиях процесса получаются достаточно высокой точности приближенные аналитические решения практически во всем диапазоне времени нестационарного процесса.

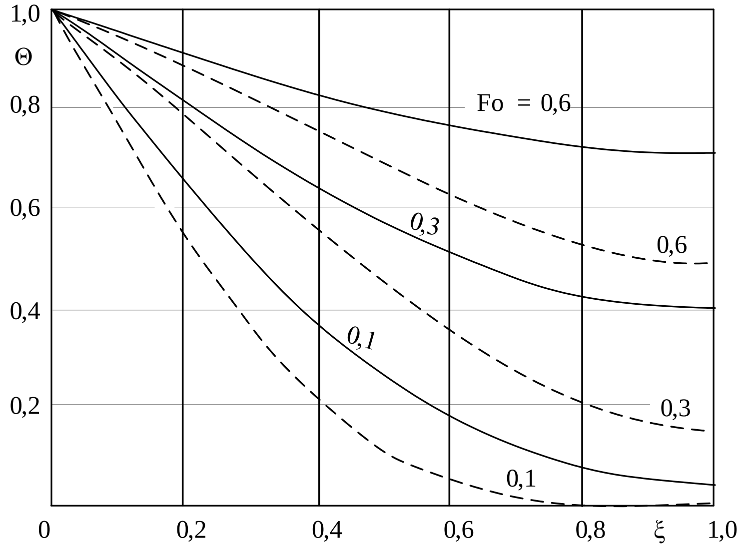



Рис. 3.4. Распределение температуры в пластине. Расчет по формуле (3.39) (второе приближение): ------ $-\ \nu = 0{,}01$; ——— $-\ \nu = 1{,}0$

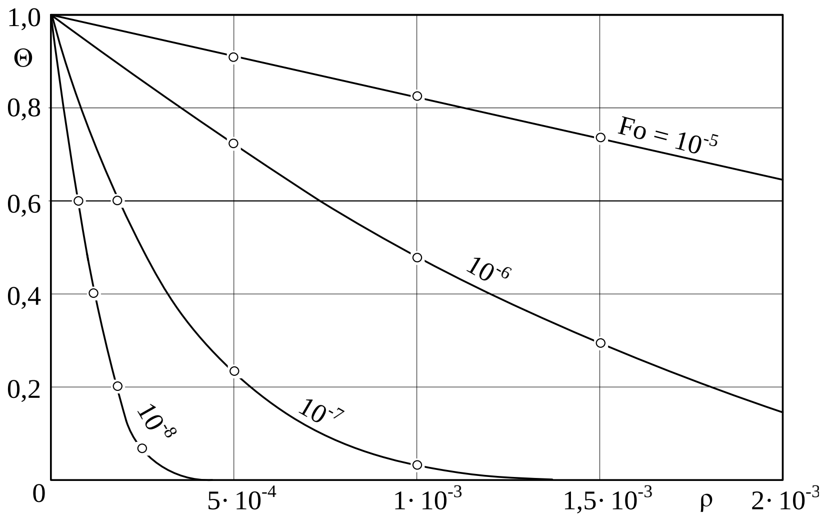



Рис. 3.5. Распределение температуры при сверхмалых значениях временной и пространственной переменных ($\nu = 0{,}01$). ——— – по формуле (3.31); ○ – точное решение

Если положить в формулах для $\mu_k$, ($k = 1, 2$) (являющихся, по сути, собственными числами краевой задачи (3.34) – (3.36)) $\nu = 0$, то получаем следующие их величины: $\mu_1 = -2{,}4709$; $\mu_2 = -22{,}0745$. Точные значения этих чисел: $\mu_1 = -2{,}4674$; $\mu_2 = -22{,}2066$.

Для нахождения решения задачи (3.11) – (3.14) в третьем приближении необходимо использование еще трех дополнительных граничных условий (4 – го, 5 – го и 6 – го). Для получения четвертого дополнительного граничного условия продифференцируем дополнительное граничное условие (3.30) по переменной Fo

$$\left.\frac{\partial^3\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\rho=0}+\nu\left.\frac{\partial^2\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\rho=0}=0. \qquad (3.53)$$

Дифференцируя уравнение (3.11), соответственно, один и два раза по переменной $\rho$ и, применяя полученные соотношения для точки $\rho=0$, будем иметь

$$\left.\frac{\partial^2\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\rho=0}=\nu^2\left.\frac{\partial\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}-2\nu\left.\frac{\partial^2\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=0}+\left.\frac{\partial^3\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^3}\right|_{\rho=0}; \qquad (3.54)$$

$$\left.\frac{\partial^3\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\rho=0}=-\nu^3\left.\frac{\partial\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}+3\nu^2\left.\frac{\partial^2\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2}\right|_{\rho=0}-$$

$$-3\nu\left.\frac{\partial^3\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^3}\right|_{\rho=0}+\left.\frac{\partial^4\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^4}\right|_{\rho=0}. \qquad (3.55)$$

Подставляя (3.54) и (3.55) в (3.53), получаем четвертое дополнительное граничное условие

$$(\Theta_\rho^{IV}+4\nu\Theta_\rho^{III}+5\nu^2\Theta_\rho^{II}+2\nu^3\Theta_\rho^{I})_{\rho=0}=0\,, \qquad (3.56)$$

где $\Theta_\rho^{V}=\partial^5\Theta/\partial\rho^5$, $\Theta_\rho^{IV}=\partial^4\Theta/\partial\rho^4$, $\Theta_\rho^{III}=\partial^3\Theta/\partial\rho^3$, $\Theta_\rho^{II}=\partial^2\Theta/\partial\rho^2$, $\Theta_\rho^{I}=\partial\Theta/\partial\rho$.

Продифференцируем дополнительное граничное условие (3.33) по Fo

$$\left.\frac{\partial^3\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\rho=q_1}=0\,. \qquad (3.57)$$

Дифференцируя уравнение (3.11) дважды по переменной $\rho$ и, применяя полученные соотношения для точки $\rho=q_1(\mathrm{Fo})$, с учетом (3.28), будем иметь

$$\left.\frac{\partial^3\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\rho=q_1}=e^{-q_1\nu}\left.\frac{\partial^4\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^4}\right|_{\rho=q_1}-3\nu e^{-q_1\nu}\left.\frac{\partial^3\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^3}\right|_{\rho=q_1}. \qquad (3.58)$$

Сравнивая соотношения (3.57) и (3.58), получаем пятое дополнительное граничное условие

$$(\Theta_\rho^{IV}-3\nu\Theta_\rho^{III})_{\rho=q_1}=0\quad. \qquad (3.59)$$

Для получения шестого дополнительного граничного условия продифференцируем дополнительное граничное условие (3.28) по переменной Fo

$$\left.\frac{\partial^4\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^3\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\rho=q_1}=0. \tag{3.60}$$

Дифференцируя уравнение (3.11), соответственно, три раза по переменной $\rho$ и, применяя полученные соотношения для точки $\rho=q_1(\mathrm{Fo})$, с учетом (3.14), (3.25) и (3.28), будем иметь

$$\left.\frac{\partial^4\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^3\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\rho=q_1}=\left.\frac{\partial^5\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^5}\right|_{\rho=q_1}-4\nu\left.\frac{\partial^4\Theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^4}\right|_{\rho=q_1}. \tag{3.61}$$

Сравнивая соотношения (3.60) и (3.61), получаем шестое дополнительное граничное условие

$$(\Theta_\rho^V-4\nu\Theta_\rho^{IV})_{\rho=q_1}=0. \tag{3.62}$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение при $\nu=0{,}01$ в данном случае будет

$$\frac{dq_1}{d\mathrm{Fo}}=\frac{21\exp(-0{,}01)}{1562500\,q_1}\frac{(q_1+375)}{\left(\frac{q_1^3}{10^6}+\frac{q_1^2}{625}+\frac{43}{50}q_1+140\right)}\times$$

$$\times\frac{(q_1^3+2400q_1^2+2{,}28\cdot10^6q_1+56\cdot10^7)}{\left(\frac{q_1^3}{10^6}+\frac{2q_1^2}{625}+\frac{109}{25}q_1+1400\right)}.$$

Из дополнительных граничных условий третьего приближения второй стадии процесса первое условие совпадает с соотношением (3.56), а второе и третье имеют вид

$$\Theta_\rho^{IV}+3\nu\Theta_\rho^{III}+3\nu^2\Theta_\rho^{II}=\exp(2\nu)q_2^{II};$$

$$\Theta_\rho^V+6\nu\Theta_\rho^{IV}+12\nu^2\Theta_\rho^{III}+10\nu^3\Theta_\rho^{II}=0,$$

где $q_2^{II}=d^2q_2/d\mathrm{Fo}^2$.

Обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $q_2(\mathrm{Fo})$ при $\nu=0{,}01$ в третьем приближении будет

$$2{,}99579q_2(\mathrm{Fo})+1{,}40159\frac{dq_2}{d\mathrm{Fo}}+0{,}0768905\frac{d^2q_2}{d\mathrm{Fo}^2}+0{,}000882349\frac{d^3q_2}{d\mathrm{Fo}^3}-2{,}9957=0.$$

Из решения аналогичного уравнения при $\nu=0$ получаются следующие собственные числа $\mu_1=-2{,}467394$; $\mu_2=-22{,}132366$; $\mu_3=-61{,}6850$. Точное значение третьего собственного числа $\mu_3=-61{,}6850$. Отметим, что в третьем приближении происходит существенное уточнение первого и второго собственных чисел.

**Выводы**. На основе использования дополнительных искомых функций и дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса получено высокой точности аналитическое решение задачи теплопроводности для бесконечной пластины с переменными физическими свойствами среды. Применение дополнительных искомых функций позволяет свести решение уравнения в частных производных к интегрированию двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению исходного дифференциального уравнения в граничных точках. Показано, что выполнение уравнения на границах в задаче с переменными физическими свойствами среды приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области.

## 3.2. Математическое моделирование гидродинамики при зависимости вязкости от пространственной переменной

При нагреве (охлаждении) жидкости, движущейся в каналах различного профиля, максимальный градиент температуры наблюдается в направлении поперечной пространственной переменной. Вязкость капельных (несжимаемых) жидкостей существенно зависит от температуры. Однако непосредственный учет температурной зависимости вязкости приводит к необходимости совместного рассмотрения системы дифференциальных уравнений, включающих уравнения движения (Навье-Стокса) и энергии, решение которых возможно лишь численными методами. В ряде случаев для разделения этой системы уравнения движения решаются с учетом зависимости вязкости не от температуры, а от поперечной пространственной переменной. Эта зависимость принимается аналогичной (в безразмерных переменных) зависимости температуры от этой переменной (см. [117], а также п. 4.3). Таким путем может быть выполнена приближенная оценка зависимости вязкости от температуры. Профили скоростей, полученные из решения уравнений Навье-Стокса при зависимости вязкости от пространственной переменной, используются затем при решении уравнения энергии.

В настоящей работе для получения приближенного аналитического решения уравнения движения (Навье – Стокса) используется метод, основанный на определении дополнительных искомых функций и дополнительных граничных условий. Дополнительные искомые функции позволяют сводить решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению исходного дифференциального уравнения в граничных точках. Показано (через доказательство соответствующих теорем), что выполнение уравнения в граничных точках приводит к его выполнению и внутри рассматриваемой области, причём, с точностью, зависящей от числа приближений [41, 108].

В качестве конкретного примера найдем решение краевой задачи по определению скорости жидкости, движущей в плоском канале при параболическом изменении вязкости от пространственной переменной. Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial \upsilon(y,t)}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(y)\frac{\partial \upsilon(y,t)}{\partial y}\right] + \frac{\Delta p}{\rho l}, \tag{3.63}$$

где $\upsilon$ – скорость; $y$ – поперечная координата; $t$ – время; $\mu = \nu\rho$ – коэффициент динамической вязкости; $\rho$ – плотность; $\Delta p$ – перепад давления по длине канала; $l$ – длина канала.

Допустим, что вязкость является параболической функцией пространственной переменной

$$\mu(y) = \mu_0\left(1+\gamma y^2\right), \tag{3.64}$$

где $\mu_0$ – вязкость жидкости в центре канала; $\gamma$, $\left[1/м^2\right]$ – коэффициент, учитывающий интенсивность изменения вязкости от координаты $y$.

Уравнение (3.63) с учетом (3.64) будет

$$\frac{\partial \upsilon(y,t)}{\partial t} = \nu_0\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1+\gamma y^2\right)\frac{\partial \upsilon(y,t)}{\partial y}\right] + \frac{\Delta p}{\rho l}; \tag{3.65}$$

$$(t>0;\;\; 0<y<\delta),$$

где $\nu_0 = \mu_0/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости в центре канала $(y=0)$; $\delta$ – ширина канала.

Краевые условия к уравнению (3.65) имеют вид

$$\upsilon(y,0) = 0; \tag{3.66}$$

$$\frac{\partial \upsilon(0,t)}{\partial y} = 0; \tag{3.67}$$

$$\upsilon(\delta,t) = 0. \tag{3.68}$$

Введем следующие безразмерные переменные

$$Zh = \upsilon t / \delta^2; \;\; \eta = y / \delta, \tag{3.69}$$

где $Zh$ – число Жуковского (безразмерное время); $\eta$ – безразмерная координата.

Задача (3.65) – (3.68) с учетом обозначений будет

$$\frac{\partial \upsilon(\eta, Zh)}{\partial Zh} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(1 + r\eta^2\right)\frac{\partial \upsilon(\eta, Zh)}{\partial \eta}\right] + \omega; \tag{3.70}$$

$$(Zh > 0; \quad 0 < \eta < 1);$$

$$\upsilon(\eta, 0) = 0; \tag{3.71}$$

$$\frac{\partial \upsilon(0, Zh)}{\partial \eta} = 0; \qquad 3.72)$$

$$\upsilon(1, Zh) = 0; \tag{3.73}$$

где $r = \gamma\delta^2; \;\; \omega = \Delta p \delta^2 / (\nu_0 \rho l)$.

Решение задачи (3.70) – (3.73) будем находить путем использования дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий. Введем дополнительную искомую функцию

$$q(Zh) = \upsilon(0, Zh), \tag{3.74}$$

характеризующую изменение во времени скорости в центре канала $\eta = 0$. Ввиду того, что функция $q(Zh) = \upsilon(0, Zh)$ является искомой величиной задачи (3.70) – (3.73), то ее отдельное рассмотрение никоим образом эту задачу не изменяет, а лишь позволяет значительно упростить (что будет показано ниже) процесс получения ее аналитического решения.

Решение задачи (3.70) – (3.73) принимается в виде

$$\upsilon(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2}(1 - \eta^2) + \sum_{k=1}^{n} b_k(q)\, \varphi_k(\eta), \tag{3.75}$$

где $b_k(q)$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(\eta) = 1 - \eta^{2k}$ – координатные функции.

Очевидно, что благодаря принятой системе координатных функций соотношение (3.75) удовлетворяет граничным условиям (3.72), (3.73). Неизвестные коэффициенты $b_k(q)$ будем находить из дополнительных граничных условий, первым из которых является условие (3.74). Для получения последующих дополнительных граничных условий будем использовать основные условия (3.72), (3.73) и уравнение (3.70). Дифференцируя (3.72), (3.73) по переменной $Zh$, находим

$$\frac{\partial^2 \upsilon(0, Zh)}{\partial\eta\partial Zh} = 0; \tag{3.76}$$

$$\frac{\partial\upsilon(1, Zh)}{\partial Zh} = 0. \tag{3.77}$$

Сравнивая (3.77) и (3.70), находим дополнительное граничное условие вида

$$2r\frac{\partial\upsilon(1, Zh)}{\partial\eta} + (1+r)\frac{\partial^2 \upsilon(1, Zh)}{\partial\eta^2} = 0. \tag{3.78}$$

Для получения ещё одного дополнительного граничного условия продифференцируем (3.70) по переменной $\eta$

$$\frac{\partial^2 \upsilon(\eta, Zh)}{\partial\eta\partial Zh} = \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\left[(1+r\eta^2)\frac{\partial\upsilon(1, Zh)}{\partial\eta}\right]_{\eta=0}. \tag{3.79}$$

Соотношение (3.79) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \upsilon(0, Zh)}{\partial\eta\partial Zh} = \frac{\partial^3 \upsilon(0, Zh)}{\partial\eta^3}. \tag{3.80}$$

Соотношение (3.80) с учетом (3.76) приводится к следующему ДГУ

$$\frac{\partial^3 \upsilon(0, Zh)}{\partial\eta^3} = 0. \tag{3.81}$$

Необходимо также использовать ДГУ на основе соотношения (3.74). Дифференцируя его по $Zh$, получаем

$$\frac{\partial q(Zh)}{\partial Zh} = \frac{\partial\upsilon(0, Zh)}{\partial Zh}. \tag{3.82}$$

Сравнивая (3.82) с уравнением (3.70), получаем ещё одно дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial q(Zh)}{\partial Zh} = \frac{\partial^2 \upsilon(0, Zh)}{\partial\eta^2}. \tag{3.83}$$

Очевидно, что соотношение (3.75) в любом приближении удовлетворяет дополнительному условию (3.81).

Так как все ДГУ находятся с использованием уравнения (3.70), то их выполнение решением адекватно его выполнению в граничных точках.

Для получения решения задачи (3.70) – (3.73) подставим (3.75) (ограничиваясь одним членом суммы) в условие (3.74)

$$q(Zh) = \frac{\omega}{2} + b_1(q(Zh)). \tag{3.84}$$

Соотношение (3.84) для неизвестного коэффициента $b_1(q)$ представляет алгебраическое уравнение, из решения которого находим

$$b_1(q) = q(Zh) - \omega / 2 .$$

Соотношение (3.75) с учетом найденного значения $b_1(q)$ принимает вид

$$\upsilon(\eta, Zh) = q(Zh)(1-\eta^2) . \tag{3.85}$$

Потребуем, чтобы (3.85) удовлетворяло осредненному уравнению – интегральному уравнению вида

$$\int_0^1 \frac{\partial \upsilon(\eta, Zh)}{\partial Zh} d\eta = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \eta}\left[(1+r\eta^2)\frac{\partial \upsilon(\eta, Zh)}{\partial \eta}\right] d\eta . \tag{3.86}$$

Подставляя (3.85) в (3.86), после определения интегралов относительно неизвестной функции $q(Zh)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dq}{d\,Zh} + 3((1+r)\,q - \omega / 2) = 0 . \tag{3.87}$$

Интегрируя уравнение (3.87), получаем

$$q(Zh) = \frac{\omega}{2(r+1)} + C \exp\left(-3(r+1)Zh\right), \tag{3.88}$$

где $C$ – константа интегрирования.

Подставляя (3.88) в (3.85), получаем

$$\upsilon(\eta, Zh) = \left[\frac{\omega}{2(r+1)} + C \exp\left(-3(r+1)Zh\right)\right](1-\eta^2) . \tag{3.89}$$

Для определения постоянной интегрирования составим невязку начального условия (3.71) и потребуем выполнения её ортогональности к координатной функции первого приближения $\varphi_1(\eta) = 1-\eta^2$

$$\int_0^1 (\upsilon(\eta, 0) - 1)(1-\eta^2)\, d\eta = 0 . \tag{3.90}$$

Подставляя (3.89) в (3.100) для константы интегрирования получаем уравнение

$$(4C-5)(r+1) + 2\omega = 0 \ . \tag{3.91}$$

Из решения уравнения (3.91), находим: $C = 5/4 - \omega/(2(r+1))$.

Соотношение (3.89) с учетом найденного значения постоянной интегрирования принимает вид

$$\upsilon(\eta, Zh) = \left[\frac{\omega}{2(r+1)} + \left(\frac{5}{4} - \frac{\omega}{2(r+1)}\right)\exp\left(-3(r+1)Zh\right.\right](1-\eta^2) . \tag{3.92}$$

Расчеты по формуле (3.92) приведены на рис. 3.6,3.7. Из их анализа следует, что при $\omega = 1;\ r = 0$ (неизменная по координате $\eta$ вязкость) отличие от численного точного решения данной задачи (см. рис. 4.12) не превышает 5 % (см. рис. 3.6). С увеличением вязкости время установления стационарного профиля скорости уменьшается – уменьшается также и величина скорости (см. рис. 3.7).

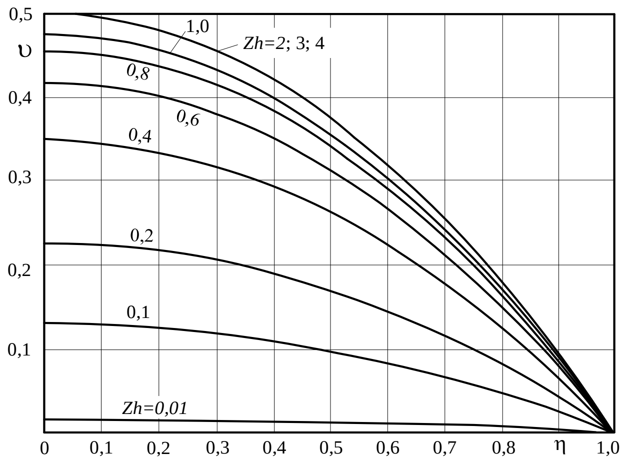



Рис. 3.6. Формирование нестационарного профиля скорости (расчёт по формуле (3.92)). $\omega = 1;\ r = 0$

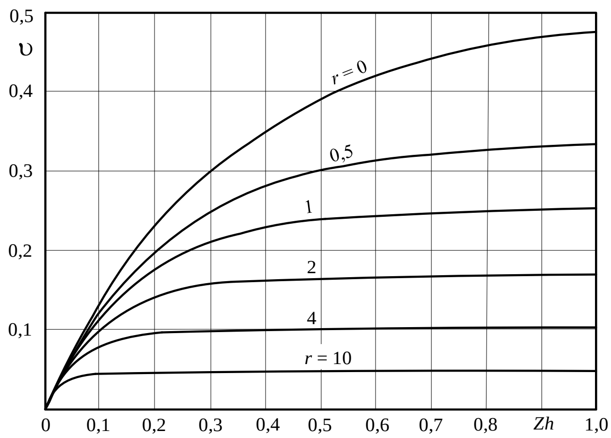



Рис. 3.7. Формирование нестационарного профиля скорости (расчёт по формуле (3.92)). $\omega = 1;\ \eta = 0$

# Глава 4. Разработка методов математического моделирования процессов тепломассопереноса в локально равновесных и неравновесных условиях

## 4.1. Гидродинамическая теория теплообмена

При течении жидкости с большими значениями чисел Рейнольдса в непосредственной близости от стенки возникают области невозмущенного потока и гидродинамического пограничного слоя. Деление жидкости на область пограничного слоя и область невозмущенного потока существенно упрощает анализ движения, так как они могут быть рассмотрены раздельно. В невозмущенном потоке инерционные силы намного превышают силы трения, где для описания течения используется модель идеальной жидкости. Модель в пограничном слое также упрощается и настолько, что дифференциальные уравнения могут быть проинтегрированы [9, 21, 47, 48, 67, 90, 99, 121, 124].

В случае различных температур стенки и среды возникает тепловой пограничный слой. Для него предельный переход находится по числу Пекле (Pe), которое принимается очень большим. Так как $\mathrm{Pe} = \mathrm{Pr}\mathrm{Re}$, то условия (числа Re и Pe велики) можно заменить условием – число Прандтля $(\mathrm{Pr} = \nu / a)$ не очень мало [9, 21, 90, 121], что выполняется для жидкостей $(\mathrm{Pr} \geq 1)$ и газов $(\mathrm{Pr} = 0{,}6 \div 1)$. Для жидких металлов это условие не выполняется, так как число Прандтля намного меньше единицы.

Так как отношение толщин теплового и динамического слоев определяется числом Прандтля, то толщина динамического слоя в жидкостях больше теплового, а для газов они практически равны.

Интенсивность переноса теплоты зависит от режима течения в пограничном слое. Если оно ламинарное, то теплота по поперечной координате, передается теплопроводностью. На внешней границе слоя, где изменение температуры по нормали к стенке мало, преобладает передача теплоты конвекцией по продольной координате.

Предложенная Прандтлем теория пограничного слоя является основой представлений о переносе теплоты и массы. Эта теория имеет непосредственную связь с гидродинамической теорией теплообмена Рейнольдса, которая определяет идентичный механизм переноса тепла и энергии в пограничном слое. Благодаря теории Рейнольдса устанавливается связь сопротивления трения с теплоотдачей, что приводит к возможности из гидравлических расчетов с использованием экспериментов определять соотношения для коэффициентов теплоотдачи.

Уравнения Навье – Стокса для ламинарного динамического слоя при неучете перепада давления по продольной координате (т.е. $dp/dx = 0$) приводятся к уравнению

$$\upsilon_X \frac{\partial \overline{\upsilon}_x(\zeta,\eta)}{\partial\zeta} + \upsilon_y \frac{\partial \overline{\upsilon}_x(\zeta,\eta)}{\partial\eta} = \frac{\nu}{l}\frac{\partial^2 \overline{\upsilon}_x(\zeta,\eta)}{\partial\eta^2}, \tag{4.1}$$

где $\overline{\upsilon}_x = \upsilon_x/\upsilon$; $\zeta = x/l$; $\eta = y/l$; $\upsilon$ – скорость невозмущенного потока; $l$ – определяющий размер системы; $\upsilon_x$, $\upsilon_y$ – скорости по координатным осям; $\zeta$, $\eta$ – безразмерные координаты; $x$, $y$ – координаты.

Уравнение энергии для теплового слоя при неучете передачи теплоты теплопроводностью по оси $x$ имеет вид

$$\upsilon_x \frac{\partial\Theta(\zeta,\eta)}{\partial\zeta} + \upsilon_y \frac{\partial\Theta(\zeta,\eta)}{\partial\eta} = \frac{a}{l}\frac{\partial^2\Theta(\zeta,\eta)}{\partial\eta^2}, \tag{4.2}$$

где $\Theta = (t - t_{cp})/(t_{cm} - t_{cp})$; $t_{cp}$ – температура невозмущенного потока; $t_{cm}$ – температура поверхности стенки; $a$ – коэффициент температуропроводности жидкости.

Граничные условия к уравнениям (4.1) и (4.2) будут

$$\overline{\upsilon}_x(\zeta,0) = 0;\ \ \Theta(\zeta,0) = 0;\ \ \overline{\upsilon}_x(\zeta,\delta(\zeta)) = 1;\ \ \Theta(\zeta,\Delta(\zeta)) = 1, \tag{4.3}$$

где $\delta(\zeta)$ и $\Delta(\zeta)$ – толщины динамического и теплового пограничных слоев.

Из (4.1) – (4.3) следует, что при $\nu = a$ (Pr = 1) безразмерные величины $\upsilon_x(\zeta, y)$ и $\Theta(\zeta, y)$ будут одинаковы. Отсюда

$$\frac{\upsilon_x}{\upsilon} = \frac{t - t_{cp}}{t_{cm} - t_{cp}}. \tag{4.4}$$

Выполненное Прандтлем теоретическое исследование двумерного турбулентного течения жидкости показало, что $\mathrm{Pr}_T \approx 1$. Экспериментальный замер этой величины подтверждает это исследование. Поэтому, соотношение (4.4) может применяться и для турбулентного течения жидкости.

Используя подобие скоростей и температур в соответствующих пограничных слоях, можно определить количественную зависимость между теплоотдачей и трением [9, 90, 99].

Вблизи стенки теплота передается теплопроводностью и, поэтому величина теплового потока согласно закону Фурье будет

$$q = \lambda \frac{\partial t(x,0)}{\partial y}, \tag{4.5}$$

где $\lambda = ac\rho$ – коэффициент теплопроводности жидкости; $c$ – теплоемкость; $\rho$ – плотность.

Касательное напряжение у поверхности стенки по закону Ньютона будет

$$\tau = \mu \frac{\partial \upsilon_x(x,0)}{\partial y}, \tag{4.6}$$

где $\mu = \nu\rho$ – коэффициент динамической вязкости.

Разделив (4.5) на (4.6), получаем

$$\frac{q}{\tau} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial t / \partial y}{\partial \upsilon_x / \partial y}. \tag{4.7}$$

Дифференцируя (4.4), находим

$$\frac{\partial t / \partial y}{\partial \upsilon_x / \partial y} = \frac{t_{\text{ст}} - t_{\text{ср}}}{\upsilon}. \tag{4.8}$$

Сопоставляя (4.7) и (4.8), получим

$$q = \tau \frac{\lambda}{\mu} \frac{t_{\text{ст}} - t_{\text{ср}}}{\upsilon}. \tag{4.9}$$

Соотношение (4.9) определяет зависимость трения и теплоотдачи, включающую коэффициенты трения и теплоотдачи. Отметим, что экспериментальное определение коэффициентов трения значительно проще определения коэффициентов теплоотдачи, которые могут быть найдены при известных коэффициентах трения.

При течении жидкости вблизи стенки формируется ламинарный динамический пограничный слой $\delta_л$, где из-за влияния сил трения изменение скорости происходит от нуля на стенке до скорости исходного потока $\upsilon$ (рис. 4.1). На некотором расстоянии от входа $x_{кр}$ происходит срыв ламинарного слоя, и возникает турбулентное течение. Но, непосредственно вблизи стенки остается тонкий подслой $\delta_{\text{п}}$, течение в котором ламинарное.

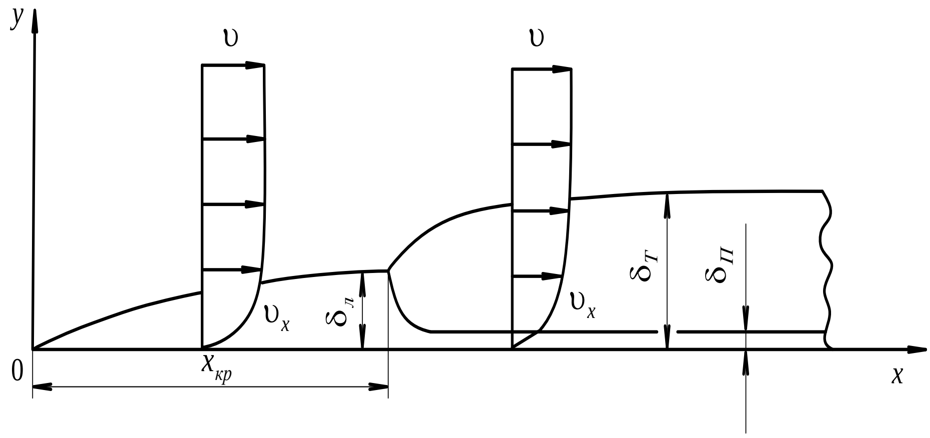



Рис. 4.1. Схема динамического ламинарного и турбулентного пограничных слоев

Формулы для описания изменения ширины ламинарного и турбулентного погранслоя [81]:

$$\delta_{\text{л}} = 5x\big/\sqrt{\mathrm{Re}_x}\,; \qquad\qquad \delta_{\text{т}} = 0{,}37x\big/\mathrm{Re}_x^{0,2}\,, \qquad (4.10)$$

где $\mathrm{Re}_x = \upsilon x/\nu$ – число Рейнольдса, $x$ – величина определяющая размер.

При критическом числе Рейнольдса возникает турбулентный погранслой

$$\mathrm{Re}_{x\,\text{кр}} = \upsilon x_{\text{кр}}\big/\nu \approx 5\cdot 10^5.$$

Скорость в ламинарном погранслое на основе численного метода найдена Г. Блазиусом. В частности, было показано, что отношение $\upsilon_x/\upsilon$ является функцией лишь одной переменной $\eta = y\sqrt{\upsilon/(\nu x)}$ (см. рис. 4.2). Из анализа формулы, видно, что при $\eta \approx 6$ $\upsilon_x = \upsilon$, которое будет расстоянием $y = \delta(x)$, равным ширине ламинарного погранслоя. Отсюда находится первая формула в (4.10).

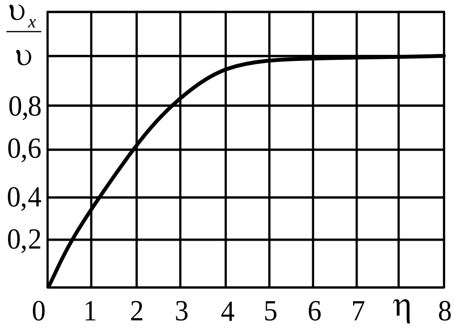



Рис. 4.2. Изменение скоростей в ламинарном погранслое

Касательное напряжение в ламинарном слое находится по формуле

$$\tau = 0{,}33\rho\upsilon^2 \Big/ \sqrt{\mathrm{Re}_x}\,. \tag{4.11}$$

В области $0 \le x \le l$ среднее напряжение будет

$$\tau_{ср} = 0{,}66\rho\upsilon^2 \Big/ \sqrt{\upsilon l / \nu}\,. \tag{4.12}$$

Из (4.12) видно, что при увеличении $l$ напряжение в ламинарном слое снижается.

В результате эксперимента получена формула скорости в турбулентном слое

$$\upsilon_x / \upsilon = \left[y / \delta_m(x)\right]^{1/7}. \tag{4.13}$$

По ширине вязкого слоя $\delta_л$ присуще линейное распределение скорости.

Безразмерные скорости в ламинарных и турбулентных слоях даны на рис. 4.3 [81].

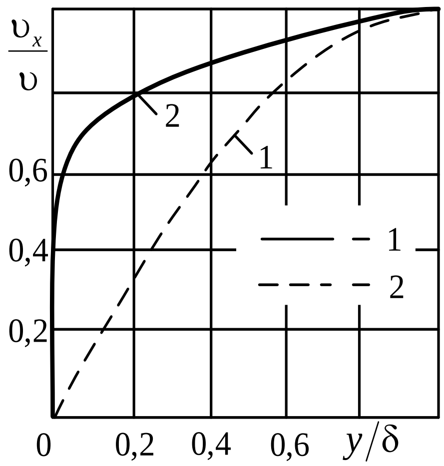



Рис. 4.3. Изменение скоростей в ламинарном 1 и турбулентном 2 погранслоях

Формула касательных напряжений в турбулентном слое, полученная из экспериментов

$$\tau = 0{,}03\rho\upsilon^2 (\upsilon x / \nu)^{-1/5}. \tag{4.14}$$

Для среднего касательного напряжения в диапазоне $0 \le x \le l$ соотношение имеет вид

$$\tau_{ср} = 0{,}037\rho\upsilon^2 (\upsilon l / \nu)^{-1/5}. \tag{4.15}$$

По соотношению (4.15) можно заключить, что уменьшение напряжения в турбулентном слое меньше, чем в ламинарном.

Если температуры стенки и потока различны, то формируется тепловой слой, где она меняется от температуры стенки $t_{ст}$, до температуры потока $t_{ср}$

(рис. 4.4, 4.5). В этом случае между пластиной и потоком жидкости происходит процесс теплообмена. Плотность теплового потока по закону Ньютона-Рихмана определяется по формуле

$$q = \alpha\,(t_{\text{ср}} - t_{\text{ст}}), \tag{4.16}$$

где $\alpha$ − коэффициент теплоотдачи, который подлежит определению.

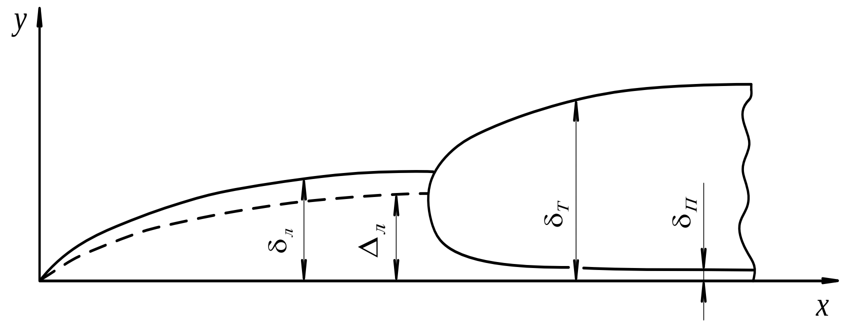



Рис. 4.4. Тепловой $\Delta_{\text{л}}(x)$ и динамический (ламинарный $\delta_{\text{л}}(x)$ и турбулентный $\delta_{\text{т}}(x)$) погранслои

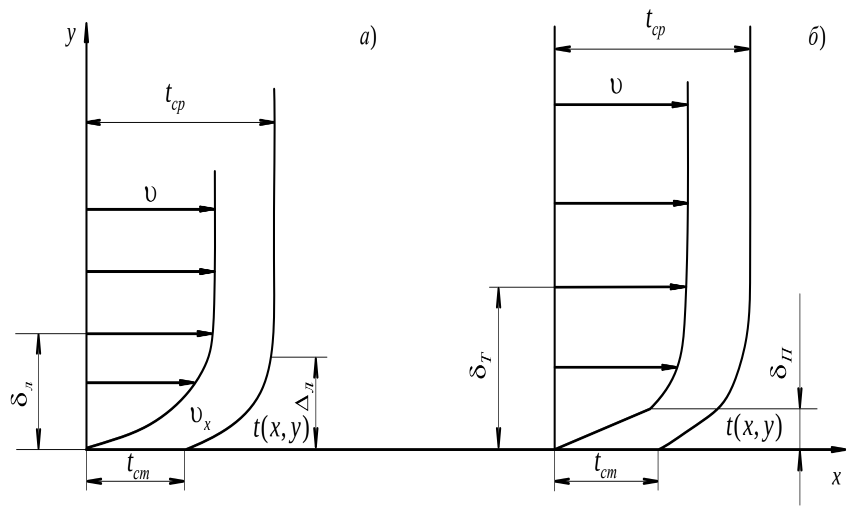



Рис. 4.5. Изменение скорости и температуры в ламинарном (а) и турбулентном (б) погранслоях

Этот же тепловой поток передается путем теплопроводности

$$q = -\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0}. \tag{4.17}$$

Объединяя формулы (4.16), (4.17), находим уравнение конвективной теплоотдачи

$$-\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0} = \alpha\left(t_{\text{ср}} - t_{\text{ст}}\right). \tag{4.18}$$

Коэффициент теплоотдачи по формуле (4.18) можно найти лишь при известном изменении температуры по толщине теплового слоя в виде формулы $t = t(x, y)$. Получение таких формул рассматривается ниже.

Тепловой слой формируется аналогично динамическому. Отношение их толщин зависит лишь от числа Прандтля. Поэтому изменение $\Delta_л$ является таким же, как в динамическом слое. При $\Pr = 1$ толщины будут одинаковы ($\Delta_л = \delta_л$). Положим, что в ламинарном слое теплота в поперечном направлении предаётся лишь теплопроводностью. В турбулентном пограничном слое наибольшее изменение температуры происходит в тонком вязком подслое $\delta_п$, где также принимается допущение о том, что теплота передается лишь путем теплопроводности.

## 4.2. Исследование распределения скорости в ламинарном динамическом пограничном слое на основе определения фронта динамического возмущения

Пограничные слои (динамический и тепловой) представляют соответствующие фронты возмущения (см. рис. 4.1 – 4.5). Уравнения динамического слоя (Прандтля) формируются из уравнений Навье – Стокса и сплошности потока, имеющих вид [11, 23, 58]

$$\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2}; \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} = 0, \tag{4.20}$$

где $\nu = \mu/\rho$ – вязкость жидкости; $\upsilon_x$, $\upsilon_y$ – скорости; $x, y$ – координаты.

Задача (4.19), (4.20) имеет следующие граничные условия

$$\upsilon_x\big|_{y=0} = \upsilon_y\big|_{y=0} = 0 \tag{4.21}$$

$$\upsilon_x\big|_{y=\delta(x)} = \upsilon = \text{const}; \tag{4.22}$$

$$\left.\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right|_{y=\delta(x)} = 0; \tag{4.23}$$

$$\left.\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2}\right|_{y=0} = 0, \tag{4.24}$$

где $\delta(x)$ – ширина динамического слоя (рис. 4.1); $\upsilon$ – скорость невозмущенной жидкости по оси $x$.

Условие (4.23) означает сопряжение профиля скорости на границе слоя. Условие (4.24) выводится из (4.19) при $y=0$, где $\upsilon_x=\upsilon_y=0$. Следовательно, удовлетворение условия (4.24) адекватно выполнению уравнения (4.19) в точке $y=0$. Выражение (4.24) относится к ДГУ в задаче (4.19) – (4.24).

Задача (4.19) – (4.24) относится к нелинейным. Её точные решения неизвестны (известны лишь численные решения уравнений (4.19), (4.20)) [121].

При нахождении приближенного решения задачи (4.19) – (4.24) будем удовлетворять не исходные уравнения (4.19), (4.20), а некоторые осредненные по толщине слоя, то есть будем вычислять следующие интегралы в пределах от $y=0$ до $y=\delta(x)$

$$\int_0^\delta \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}dy+\int_0^\delta \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}dy=\nu\int_0^\delta \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2}dy=\nu\left[\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right)_{y=\delta}-\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right)_{y=0}\right]; \quad (4.25)$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}dy=-\int_0^\delta \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}dy=-\left(\upsilon_y\right)_{y=\delta}. \quad (4.26)$$

Интеграл правой части (4.25) с учетом условия (4.23) будет

$$\nu\left[\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right)_{y=\delta}-\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right)_{y=0}\right]=-\nu\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right)_{y=0}. \quad (4.27)$$

Формула для касательного напряжения закона Ньютона на стенке имеет вид

$$\tau_{\text{ст}}=\mu\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right)_{y=0}=\rho\nu\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right)_{y=0}, \quad (4.28)$$

где $\mu=\rho\nu$ − динамическая вязкость.

Соотношение (4.28) перепишем в виде

$$\nu\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right)_{y=0}=\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho}. \quad (4.29)$$

Подставляя (4.29) в (4.27), находим

$$\nu\int_0^\delta \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2}dy=-\nu\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right)_{y=0}=-\frac{\tau_{cm}}{\rho}. \quad (4.30)$$

Интегрируя второй член левой части уравнения (4.25) по частям, получаем

$$\int_0^\delta \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} dy = \left(\upsilon_y \upsilon_x\right)_{y=\delta} - \int_0^\delta \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} dy. \quad (4.31)$$

С учетом (4.22) и (4.20), соотношение (4.31) будет

$$\int_0^\delta \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} dy = \upsilon\left(\upsilon_y\right)_{y=\delta} + \int_0^\delta \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} dy. \quad (4.32)$$

Подставляя (4.26) в (4.32), находим

$$\int_0^\delta \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} dy = -\upsilon \int_0^\delta \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} dy + \int_0^\delta \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} dy. \quad (4.33)$$

Подставляя (4.29), (4.33) в (4.25), с учетом $\left(\partial \upsilon_x / \partial y\right)_{y=\delta} = 0$, будем иметь

$$2\int_0^\delta \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} dy - \upsilon \int_0^\delta \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} dy = -\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho}. \quad (4.34)$$

Соотношение (4.34) приводится к интегральному уравнению, полученному Карманом

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \upsilon_x^2 dy - \upsilon \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \upsilon_x dy = -\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho}. \quad (4.35)$$

Исходя из (4.28), и учитывая, что интегралы левой части зависят только от $x$, (4.35) будет

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta (\upsilon_x - \upsilon)\upsilon_x dy = -\nu \left( \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (4.36)$$

Идея применения интегрального уравнения (4.36) применительно к решению задачи (4.19) – (4.24) состоит в том, что удовлетворяются не уравнения (4.19), (4.20), а осредненные уравнения, приводящиеся в итоге к уравнению (4.36). Очевидно, что осреднение снижает точность решения уравнений (4.19), (4.20), но (что будет доказано ниже) выполнение дополнительных условий позволяет находить высокой точности решения.

Решение интегрального уравнения (4.36) с условиями (4.21) – (4.24) находится в виде

$$\upsilon_x(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\delta) \varphi_k(y), \quad (4.37)$$

где $a_k(\delta)$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(y) = y^{2k-1}$ – координатные функции; $\delta(x)$ – ширина динамического пограничного слоя.

Соотношение (4.37) удовлетворяет условиям (4.21), (4.24). Следовательно, для расчёта неизвестных коэффициентов $a_k(\delta)$ (в первом приближении) имеем лишь условия (4.22), (4.23). Подставляя (4.37) (при двух членах ряда) в (4.22), (4.23), для $a_k(\delta)$, $(k=1,\,2)$ находим два алгебраических уравнения. Их решения

$$a_1 = 1{,}5\upsilon/\delta; \quad a_2 = -0{,}5\upsilon/\delta^3. \tag{4.38}$$

Подставив (4.38) в (4.37), получим

$$\frac{\upsilon_x(x,)}{\upsilon} = \frac{3y}{2\delta}\left(1 - \frac{y^2}{3\delta^2}\right). \tag{4.39}$$

Подставляя (4.39) в (4.36), для неизвестной функции $\delta(x)$ находим уравнение

$$13\upsilon\delta d\,\delta = 140\nu dx. \tag{4.40}$$

Решая (4.40), с начальным условием $\delta(0)=0$ получаем

$$\delta(x) = 4{,}64\sqrt{\nu x/\upsilon} = \frac{4{,}53x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}.$$

Последнее соотношение в безразмерном виде будет

$$\delta(x)/x = 4{,}53/\sqrt{\mathrm{Re}_x}, \tag{4.41}$$

где $\mathrm{Re}_x = \upsilon x/\nu$ – число Рейнольдса.

Формулы (4.39), (4.41) представляют первое приближение задачи (4.19) – (4.24).

Выражение (4.41) запишем в виде

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{4{,}53}{\mathrm{Re}^{0,5}}. \tag{4.42}$$

Из (4.42) видно, что условие $\delta(x) << x$, являющееся основополагающим в теории пограничного слоя, может быть принято лишь при очень больших числах Рейнольдса.

Расчеты по (4.39) и результаты численного интегрирования [121] представлены на рис. 4.6, из которого видно, что при $4{,}0 \le \eta \le 4{,}0$ $(\eta = y/\delta(x) = y\sqrt{\upsilon/(\nu x)})$ расхождение не выше 5 %, в пределах $4{,}0 \le \eta \le 6{,}0$ – 15 %. Следовательно, в первом приближении соотношение (4.39) имеет малую точность в пределах границы слоя.

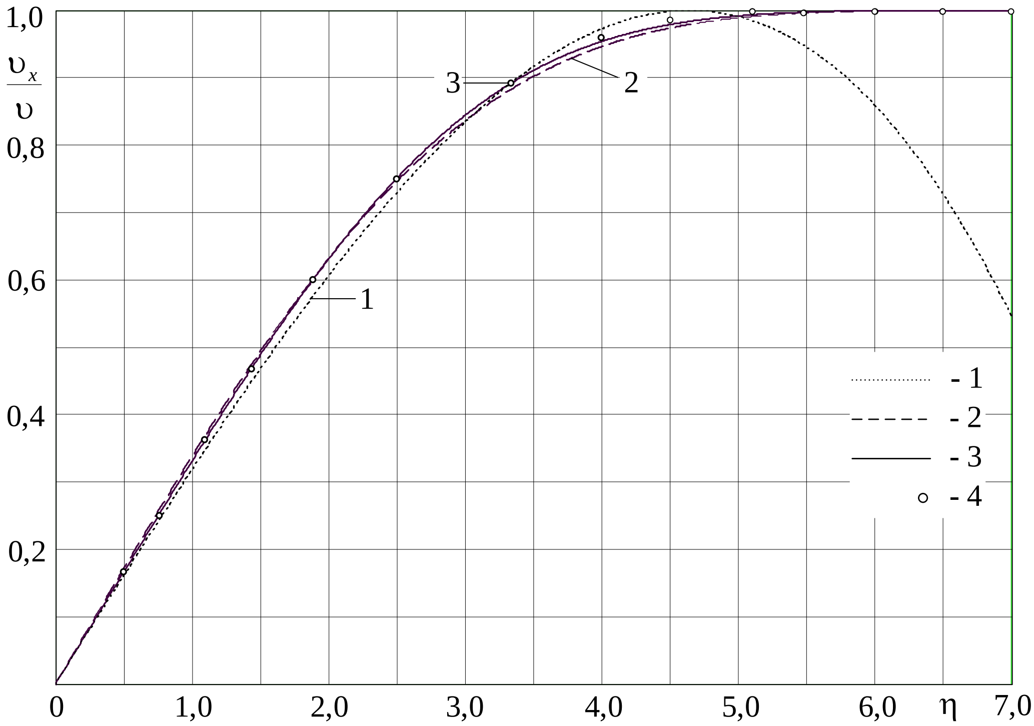



Рис. 4.6. Зависимость безразмерной скорости $\upsilon_x/\upsilon$ от безразмерной переменной $\eta = y\sqrt{\upsilon/(\nu x)}$. 1, 2, 3 – первое, второе и третье приближения; 4 – численное решение [121]

Точность решения задачи обусловлена числом членов ряда (4.37), при определении неизвестных коэффициентов которого используются ДГУ, задаваемые на границах. Выполнение уравнения (4.19) в точке $y = 0$ приводит к дополнительному условию (4.24). Второе условие получается выполнением уравнения (4.19) в точке $y = \delta(x)$

$$\left(\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}\right)_{y=\delta} + \left(\upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right)_{y=\delta} = \left(\nu \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2}\right)_{y=\delta}. \tag{4.43}$$

Найдём производную от (4.22) по $x$. По правилам дифференцирования сложных функций получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\upsilon_x(x,y)\right]_{y=\delta} = \left[\frac{\partial \upsilon_x(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]_{y=\delta} + \left.\frac{\partial \upsilon_x(x,y)}{\partial x}\right|_{y=\delta} = 0.$$

Последнее выражение с учётом (4.23) будет

$$\left.\frac{\partial \upsilon_x(x,y)}{\partial x}\right|_{y=\delta} = 0. \tag{4.44}$$

Уравнение (4.43), учитывая (4.23) и (4.44) принимает вид

$$\partial^2 \upsilon_x(x,\delta)/\partial y^2 = 0. \tag{4.45}$$

Формула (4.45) будет вторым дополнительным граничным условием. Его выполнение адекватно выполнению (4.19) для всех $y = \delta(x)$.

Для третьего условия возьмём производную от (4.19) по $y$ и запишем его для точки $y = \delta(x)$

$$\left( \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_x \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \upsilon_y \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2} \right)_{y=\delta} = \nu \left( \frac{\partial^3 \upsilon_x}{\partial y^3} \right)_{y=\delta}. \qquad (4.46)$$

Выражение (4.46), учитывая (4.22), (4.23), (4.45), будет

$$\left( \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y \partial x} \right)_{y=\delta} = \frac{\nu}{\upsilon} \left( \frac{\partial^3 \upsilon_x}{\partial y^3} \right)_{y=\delta}. \qquad (4.47)$$

Возьмём производную от (4.23) по $x$, учитывая, что $\upsilon_x$ – сложная функция

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} \right]_{y=\delta} = \left[ \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2} \frac{dy}{dx} \right]_{y=\delta} + \left( \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y \partial x} \right)_{y=\delta} = 0.$$

Последнее выражение, учитывая (4.45), будет

$$\left( \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y \partial x} \right)_{y=\delta} = 0. \qquad (4.48)$$

Сравнивая (4.47) с (4.48), будем иметь третье дополнительное условие

$$\partial^3 \upsilon_x(x, \delta) / \partial y^3 = 0. \qquad (4.49)$$

Для четвертого условия возьмём производную от (4.19) по $y$ применительно к точке $y = 0$

$$\left( \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_x \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \upsilon_y \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \nu \left( \frac{\partial^3 \upsilon_x}{\partial y^3} \right)_{y=0}. \qquad (4.50)$$

Учитывая уравнение (4.20) и условие (4.21), соотношение (4.50) будет

$$\partial^3 \upsilon_x(x, 0) / \partial y^3 = 0. \qquad (4.51)$$

Соотношение (4.51) является четвертым дополнительным условием.

Многократно дифференцируя уравнение (4.20) по $y$ и сравнивая полученные соотношения с выражениями, найденными дифференцированием главных и дополнительных условий по $x$, для $y = 0$ и $y = \delta(x)$ имеем следующие дополнительные условия

$$\partial^4 \upsilon_x(x, 0) / \partial y^4 = 0; \qquad \partial^4 \upsilon_x(x, \delta) / \partial y^4 = 0. \qquad (4.52)$$

Общие формулы для ДГУ имеют вид

$$\frac{\partial^i \upsilon_x(x,0)}{\partial y^i} = 0; \qquad \frac{\partial^i \upsilon_x(x,\delta)}{\partial y^i} = 0; \qquad \frac{\partial^{i+1}(x,\delta)}{\partial y^{i+1}} = 0, \qquad (i = 2,\ 3,\ 4, ...). \qquad (4.52)$$

Отметим, что первое условие из (4.52) решением (4.37) выполняется точно лишь при чётных степенях производных $(i = 2,\ 4,\ 6,\ ...)$, независимо от величины неизвестных коэффициентов $a_k(\delta),\ (k = \overline{1,n})$. При нечётных степенях производной $(i = 3,\ 5,\ 7,\ ...)$ это условие должно выполняться путём определения коэффициентов $a_k(\delta)$.

В работах [41, 108] показано, что удовлетворение уравнения на границе и на фронте возмущения (подвижной границе) приводит к его выполнению и внутри слоя.

Во втором приближении подставим (4.37) в (4.22), (4.23), (4.45), (4.51). Для $a_k(\delta),\ (k = \overline{1,4})$ получаем систему четырех алгебраических уравнений. После их определения решение принимает вид

$$\frac{\upsilon_x}{\upsilon} = \frac{35}{24}\frac{y}{\delta} - \frac{7}{8}\left(\frac{y}{\delta}\right)^5 + \frac{5}{12}\left(\frac{y}{\delta}\right)^7. \qquad (4.53)$$

Подставим (4.53) в (4.36)

$$\upsilon\delta\, d\delta = 11{,}1348\, \nu\, dx. \qquad (4.54)$$

Интегрируя (4.54) при $\delta(0) = 0$, находим

$$\delta(x) = 4{,}67\sqrt{\nu x / \upsilon} = 4{,}67 x / \sqrt{\mathrm{Re}_x}. \qquad (4.55)$$

Расчёты по (4.53), (4.55) показывают, что отличие от решения [121] составляет 2 % (рис. 4.6). Следует отметить, что произошло возрастание точности в пределах пограничного слоя $4 \le \eta \le 5{,}5$.

Для третьего приближения использованы условия (4.22), (4.23), (4.45), (4.49), (4.51), а также 1 – ое и 2 – ое условия из (4.52) при $i = 4$, которые позволяют найти 6 коэффициентов $a_k,\ (k = \overline{1,6})$ из (4.37). Подставляя (4.37) (для шести членов) в перечисленные условия, для $a_k(\delta)$ будем иметь 6 алгебраических уравнений. Отметим, что, ввиду использования дополнительных граничных условий с высокого порядка производными, система уравнений имеет цепочный вид – матрица их коэффициентов содержит некоторое число нулевых коэффициентов. В связи с чем, проблема плохой обусловленности таких матриц не возникает при любом числе приближений. После расчёта неизвестных коэффициентов $a_k(\delta),\ (k = \overline{1,6})$ формула (4.37) будет

$$\frac{\upsilon_x}{\upsilon}=\frac{231}{128}\frac{y}{\delta}-\frac{231}{64}\frac{y^5}{\delta^5}+\frac{165}{32}\frac{y^7}{\delta^9}-\frac{385}{128}\frac{y^9}{\delta^9}+\frac{21}{32}\frac{y^{11}}{\delta^{11}}. \qquad (4.56)$$

Подставляя (4.56) в (4.36), получаем

$$\upsilon\delta\, d\delta = 16{,}3141\nu\, dx. \qquad (4.57)$$

Интегрируя (4.57) при $\delta(0)=0$, находим

$$\delta(x)=5{,}63\sqrt{\nu x/\upsilon}=5{,}63x/\sqrt{\mathrm{Re}_x}\,. \qquad (4.58)$$

Формулы (4.56), (4.58) представляют третье приближение задачи (4.19) – (4.24). Из сравнения с точным решением [121] видно, что результаты, полученные по (4.56), практически совпадают с точными и лишь на участке $4{,}0\le\eta\le 5{,}0$ максимальное расхождение не превышает 1 % (см. рис. 4.6).

## 4.3. Исследование распределения температуры в ламинарном тепловом пограничном слое на основе определения фронта температурного возмущения

В ламинарном тепловом пограничном слое (рис. 4.4, 4.5) теплообмен описывается уравнением энергии (Польгаузена) [9, 90]

$$\upsilon_x\frac{\partial t(x,y)}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial t(x,y)}{\partial y}=a\frac{\partial^2 t(x,y)}{\partial y^2}, \qquad (4.59)$$

где $\upsilon_x,\upsilon_y$ – распределение скоростей по координатам $x$ и $y$, определяемых из решения динамической задачи (см. п. 4.2); $a$ – коэффициент температуропроводности жидкости.

Граничные условия к уравнению (4.59) имеют вид

$$t(x,0)=t_{\text{ст}}; \qquad (4.60)$$

$$t(x,\Delta)=t_{\text{ср}}; \qquad (4.61)$$

$$\partial t(x,\Delta)/\partial y=0, \qquad (4.62)$$

где (4.61), (4.62) выражают сопряжение прогретой и непрогретой участков.

При расчёте дополнительного условия используем уравнение (4.59) в точке $y=0$. Так как $\upsilon_x(0)=\upsilon_y(0)=0$, то получаем следующее дополнительное условие

$$\frac{\partial^2 t(x,0)}{\partial y^2}=0. \qquad (4.63)$$

Осредняя уравнение (4.59) по $y$ в пределах толщины пограничного слоя $\Delta(x)$, будем иметь

$$\int_0^\Delta \upsilon_x \frac{\partial t(x,y)}{\partial x} dy + \int_0^\Delta \upsilon_y \frac{\partial t(x,y)}{\partial y} dy = a \int_0^\Delta \frac{\partial^2 t(x,y)}{\partial y^2} dy. \qquad (4.64)$$

Определяя интеграл правой части (4.64) и интегрируя по частям, при использовании уравнения (4.20) получаем

$$\frac{d}{dx} \int_0^\Delta \upsilon_x \left[t_{\text{ср}} - t(x,y)\right] dy = a \frac{\partial t(x,0)}{\partial y}. \qquad (4.65)$$

Для избыточной температуры $T = t - t_{\text{ст}}$ $(T_{\text{ср}} = t_{\text{ср}} - t_{\text{ст}})$ уравнение (4.65) и граничные условия (4.60) – (4.63) принимают вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^\Delta \upsilon_x \left[T_{\text{ср}} - T(x,y)\right] dy = a \frac{\partial T(x,0)}{\partial y}; \qquad (4.66)$$

$$T(x,0) = 0; \qquad (4.67)$$

$$T(x,\Delta) = T_{\text{ср}}; \qquad (4.68)$$

$$\frac{\partial T(x,\Delta)}{\partial y} = 0; \qquad (4.69)$$

$$\frac{\partial^2 T(x,0)}{\partial y^2} = 0. \qquad (4.70)$$

При $\nu = a$ $(\Pr = \nu / a = 1)$ уравнения (4.19), (4.59) совпадают. В безразмерном виде полностью одинаковыми будут и краевые условия. Отсюда, безразмерные решения будут одинаковые, а размерные – подобны. Следовательно, отношение теплового и динамического слоев не зависит от $x$, что будет использовано при решении обыкновенных уравнений относительно $\Delta(x)$.

Образование пограничных слоев обусловлено передачей импульса и тепла по переменной $y$. Следовательно, их толщина зависит от интенсивности каждого из них. На интенсивность передачи импульса влияет кинематическая вязкость, а теплоты – температуропроводность. Следовательно, отношение толщин динамического и теплового слоев будет функцией вязкости и температуропроводности, то есть оно будет функцией числа $\Pr = \nu / a$.

Решение задачи (4.59) – (4.62) будем искать в виде ряда

$$T(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\Delta) y^{2k-1}, \qquad (4.71)$$

где $a_k(\Delta)$ – неизвестные коэффициенты; $\Delta(x)$ − ширина теплового слоя.

Соотношение (4.71) выполняет условия (4.67), (4.70). Неизвестные коэффициенты $a_k(\Delta)$ для первого приближения находятся из (4.68), (4.69). После подстановки (4.71) в (4.68), (4.69) относительно $a_k(\Delta)$, $(k=1{,}2)$ имеем два алгебраических уравнения. Их решение: $a_1(\Delta)=1{,}5T_{cp}/\Delta$; $a_2(\Delta)=-0{,}5T_{cp}/\delta^3$. Выражение (4.71), учитывая найденные величины коэффициентов $a_k(\Delta)$, будет

$$\frac{T}{T_{\text{ср}}}=\frac{3}{2}\frac{y}{\Delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^3. \tag{4.72}$$

Подставив (4.72) и (4.39) в уравнение (4.66), получаем

$$\frac{d}{dx}\left\{T_{\text{ср}}\upsilon\delta\left[\frac{3}{20}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^2-\frac{3}{280}\left(\frac{\Delta}{\delta}\right)^4\right]\right\}=a\frac{dT(x,0)}{dy}. \tag{4.73}$$

Дифференцируя (4.72) по $y$, при $y=0$ находим

$$\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}=\frac{3}{2}\frac{T_{\text{ср}}}{\Delta}. \tag{4.74}$$

Если положить $\Delta<\delta$, то второй член в левой части (4.73) можно не учитывать тогда (4.73), учитывая (4.74), запишется в виде

$$\frac{3}{20}\upsilon\frac{d}{dx}(\beta^2\delta)=\frac{3}{2}\frac{a}{\beta\delta}, \tag{4.75}$$

где $\beta=\Delta/\delta$.

Учитывая независимость значения $\beta$ от координаты $x$ $(d\beta/dx=0)$, получаем

$$\frac{1}{10}\upsilon\beta^3\delta\frac{d\delta}{dx}=a. \tag{4.76}$$

Подставляя (4.41) в (4.76), будем иметь

$$\Delta(x)=\frac{4{,}53x}{\sqrt{\frac{\upsilon x}{\nu}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\nu}{a}}}. \tag{4.77}$$

Соотношение (4.72), (4.77) представляют первое приближение задачи (4.59) – (4.63), которое точно удовлетворяет условиям (4.60) – (4.63) и приближенно – уравнению (4.59). Отметим, что интегральное уравнение (4.66), представляющее осредненное по координате $y$ уравнение (4.59), решением (4.72) удовлетворяется точно. Расчёты температуры

$\Theta = T / T_{\text{ср}} = (t - t_{\text{ст}})/(t_{\text{ср}} - t_{\text{ст}})$ по (4.72), а также численное решение [121], даны на рис. 4.7, из которого заключаем, что в диапазоне $0 \le \eta \le 6$ их расхождение составляет 18 %.

Повышение точности обусловлено введением дополнительных условий. Метод их получения был рассмотрен выше. И, в частности, уравнение (4.59) применительно к точке $y = \Delta(x)$ с учетом (4.62) приводится к виду

$$\frac{\partial t(x,\Delta)}{\partial x} = \frac{a}{\upsilon_x} \frac{\partial^2 t(x,\Delta)}{\partial y^2}. \tag{4.78}$$

Дифференцируя (4.61) по $x$ (с учетом (4.78)), находим второе ДГУ

$$\frac{\partial^2 t(x,\Delta)}{\partial y^2} = 0. \tag{4.79}$$

Дифференцируя уравнение (4.64) по $y$ и записывая полученное соотношение применительно к точке $y = \Delta(x)$, находим

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\frac{\partial t(x,\Delta)}{\partial x} + \upsilon_x \frac{\partial^2 t(x,\Delta)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}\frac{\partial t(x,\Delta)}{\partial y} + \upsilon_y \frac{\partial^2 t(x,\Delta)}{\partial y^2} = a\frac{\partial^3 t(x,\Delta)}{\partial y^3}. \tag{4.80}$$

Выражение (4.80), учитывая (4.23), (4.62), (4.63), будет

$$\frac{\partial^2 t(x,\Delta)}{\partial x \partial y} = \frac{a}{\upsilon_x}\frac{\partial^3 t(x,\Delta)}{\partial y^3}. \tag{4.81}$$

Дифференцируя (4.62) по $x$ и, сравнивая найденное соотношение с (4.81), имеем 3 – е дополнительное условие

$$\frac{\partial^3 t(x,\Delta)}{\partial y^3} = 0. \tag{4.82}$$

Во втором приближении, подставляя (4.71) (при четырёх членах) в исходные (4.68), (4.69) и дополнительные (4.79), (4.82) условия, для коэффициентов $a_k, (k = \overline{1,4})$ находим систему 4 – х алгебраических уравнений (дополнительные условия для функций $T$ и $t$ одинаковы). Подставляя $a_k$ в (4.71), будем иметь

$$\frac{T(x,y)}{T_{\text{ср}}} = \frac{35}{24}\frac{y}{\delta} - \frac{7}{8}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^5 + \frac{5}{12}\left(\frac{y}{\delta}\right)^7. \tag{4.83}$$

Отметим, что, ввиду аналогии краевых задач теплового и динамического пограничных слоев, соотношение (4.83) по форме записи совпадает с (4.53).

Подставив (4.83) и (4.53) в (4.66), получаем

$$\Delta \frac{\upsilon}{a} \frac{d}{dx}\left[\frac{35\Delta^2(11\Delta^6 - 54\Delta^4\delta^2 + 1430\delta^6)}{370656\,\delta^7}\right] = \frac{35}{24}\ . \qquad (4.84)$$

Ввиду того, что $\Delta < \delta$, первым и вторым членами в левой части (4.84) можно пренебречь. Отсюда (4.84) принимает вид

$$\upsilon \frac{d}{dx}\left(\delta\beta^2\right) = \frac{10{,}8a}{\delta\beta}\,. \qquad (4.85)$$

Так как значение $\beta = \Delta/\delta$ не зависит от $x$, то (4.85) будет

$$\upsilon\beta^3\delta d\delta = 10{,}8a\,dx\,. \qquad (4.86)$$

Подставив (4.55) в (4.86), получим

$$\Delta(x) = \frac{4{,}67x}{\sqrt{\frac{\upsilon x}{\nu}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\nu}{a}}}\ . \qquad (4.87)$$

Соотношение (4.83) с учетом (4.87) представляет второе приближение. Расчеты по (4.83) в сравнении с [121], представлены на рис. 4.7. Видно, что второе приближение значительно уточняет решение в сравнении с первым. В диапазоне $0 \le \eta \le 6$ отличие от точного решения не более 3 %.

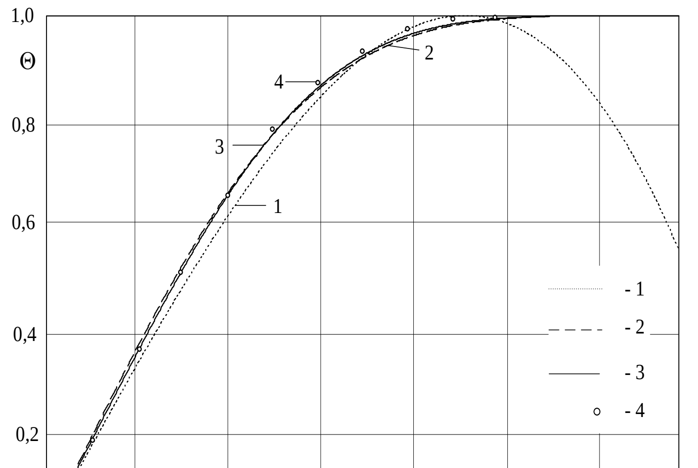



Рис. 4.7. Изменение безразмерных температур $\Theta = T/T_{\text{ср}}$ по безразмерной координате $\eta = y\sqrt{\upsilon/\nu x}$. 1, 2, 3 – соответственно 1 – е, 2 – е и 3 – е приближения; 4 – численное решение [121]

Для дополнительных условий третьего приближения вычислим производную от уравнения (4.59) по $y$ и представим его для точки $y = 0$

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\frac{\partial t(x,0)}{\partial x}+\upsilon_x\frac{\partial^2 t(x,0)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}\frac{\partial t(x,0)}{\partial y}+\upsilon_y\frac{\partial^2 t(x,0)}{\partial y^2}=a\frac{\partial^3 t(x,0)}{\partial y^3}\,. \qquad (4.88)$$

Продифференцируем (4.60) по $x$ и $y$

$$\frac{\partial t(x,0)}{\partial x}=0; \qquad \frac{\partial t(x,0)}{\partial y}=0. \qquad (4.89)$$

Формула (4.88) с учетом (4.21) и (4.89) приводится к ДГУ

$$\frac{\partial^3 t(x,0)}{\partial y^3}=0. \qquad (4.90)$$

Также можно найти любое число ДГУ. Для $y=\Delta(x)$ следующие ДГУ будут

$$\frac{\partial^4 t(x,\Delta)}{\partial y^4}=0\ ; \qquad \frac{\partial^5 t(x,\Delta)}{\partial y^5}=0. \qquad (4.91)$$

Подставляя (4.71) в (4.61), (4.62), (4.79), (4.82), (4.90), (4.91) для $a_k(\Delta)$ имеем систему шести алгебраических уравнений. После определения $a_k(\Delta)$ (4.71) будет

$$\frac{T(x,y)}{T_{\text{ср}}}=\frac{231}{128}\frac{y}{\delta}-\frac{231}{64}\left(\frac{y}{\delta}\right)^5+\frac{165}{32}\left(\frac{y}{\delta}\right)^7-\frac{385}{128}\left(\frac{y}{\delta}\right)^9+\frac{21}{32}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{11}. \qquad (4.92)$$

Подставляя (4.92) в уравнение (4.66), находим

$$\Delta\frac{\upsilon}{a}\frac{d}{dx}\left[\frac{77\Delta^2(30\Delta^{10}-299\Delta^8\delta^2+1265\Delta^6\delta^4-2622\Delta^4\delta^6+37145\delta^{10}}{24723712\,\delta^{11}}\right]=\frac{231}{128}. \qquad (4.93)$$

Так как $\Delta<\delta$, то всеми слагаемыми, кроме последнего, левой части соотношения (4.93) пренебрегается. В итоге уравнение (4.93) будет

$$\upsilon\frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta^2}{\delta}\right)=15{,}6a\,. \qquad (4.94)$$

Так как $\beta=\Delta/\delta$ не зависит от $x$, получаем

$$\upsilon\beta^3\delta d\delta=15{,}6adx. \qquad (4.95)$$

Подставляя в (4.95) соотношение (4.58), находим

$$\Delta(x)=5{,}63x/(\sqrt{\mathrm{Re}_x}\sqrt[3]{\mathrm{Pr}})\ . \qquad (4.96)$$

Соотношения (4.92), (4.96) представляют третье приближение задачи (4.59) – (4.63). Расчеты по (4.92), а также численное решение [121], даны на рис. 4.7, откуда видно, что их различие находится в пределах 1,5 %.

## 4.4. Исследование распределения температуры в турбулентном пограничном слое на основе определения дополнительных искомых функций

Выше, используя уравнения Кармана, посредством введения дополнительных условий (см. п. 4.2 – 4.3) найдены приближенные решения дифференциальных уравнений Прандтля и Польгаузена применительно к ламинарным пограничным слоям. Уравнение движения для турбулентного пограничного слоя имеет вид

$$\upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[ \left( \nu + \nu_{\text{т}} \right) \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} \right], \tag{4.97}$$

где $\nu = \mu/\rho$, $\nu_{\text{т}} = \mu_{\text{т}}/\rho$ – кинематическая и кинематическая турбулентная вязкости; $\rho$ – плотность.

Неизвестными уравнения (4.97) являются ($\upsilon_x$ и $\upsilon_y$). Чтобы его замкнуть используем уравнение неразрывности

$$\partial \upsilon_x / \partial x + \partial \upsilon_y / \partial y = 0. \tag{4.98}$$

Получение решений уравнений (4.97), (4.98) усложняется тем, что задача включает ещё уравнение движения, описывающего распределение скорости в ламинарном подслое. В связи с чем, необходимо выполнение условия сопряжения между слоями. Аналитические решения таких задач не известны. Поэтому для скоростей в турбулентном пограничном слое применяется эмпирическая формула вида

$$\upsilon_x / \upsilon = \left[ y / \delta(x) \right]^{1/7}, \tag{4.99}$$

где $\upsilon$ – скорость основного потока; $\delta(x)$ – ширина турбулентного слоя.

Толщина турбулентного пограничного слоя, не учитывая вязкий подслой, определяется по следующей эмпирической формуле [81]

$$\delta(x) = 0{,}37 x / \mathrm{Re}^{0,2}. \tag{4.100}$$

Уравнение энергии применительно к турбулентному пограничному слою будет

$$\upsilon_x \frac{\partial t}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[ (a + a_{\text{т}}) \frac{\partial t}{\partial y} \right], \tag{4.101}$$

где $a_{\text{т}} = \lambda_{\text{т}} / (\rho c_p)$ – турбулентная температуропроводность.

Определим решение уравнения (4.101), представив коэффициенты молекулярной и турбулентной теплопроводности в виде

$$\lambda_э = \lambda + \lambda_m; \quad a_э = a + a_m, \tag{4.102}$$

где $\lambda_э$ и $a_э$ – эквивалентные коэффициенты теплопроводности и температуропроводности.

Полный тепловой поток будет

$$q_п = q + q_т = (\lambda + \lambda_т)\,\frac{\partial t}{\partial y}\,. \tag{4.103}$$

Уравнение (4.101) с учетом (4.102) принимает вид

$$\upsilon_x\,\frac{\partial t}{\partial x} + \upsilon_y\,\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial}{y}\left[a_э\,\frac{\partial t}{\partial y}\right]. \tag{4.104}$$

Уравнение (4.104) представляет уравнение Польгаузена, граничные условия для которого будут (рис. 4.8)

$$t(x,0) = t_{ст}; \tag{4.105}$$

$$t(x,\Delta) = t_{ср}; \tag{4.106}$$

$$\frac{\partial t(x,\Delta)}{\partial y} = 0, \tag{4.107}$$

где $t_{ст}$ – температура стенки; $t_{ср}$ – температура невозмущенной среды; $\Delta(x)$ – толщина температурного пограничного слоя.

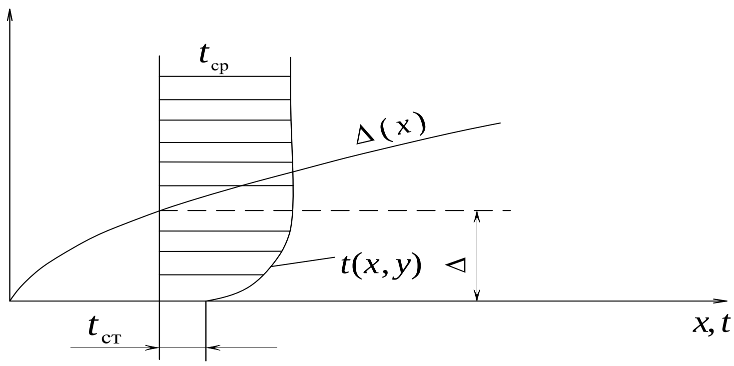



Рис. 4.8. Схема теплового пограничного слоя при $t_{cm} < t_{cp}$ ($t_{cm}$ – температура стенки; $t_{cp}$ – температура невозмущенной жидкости); $\Delta(x)$ – толщина теплового пограничного слоя

Из (4.105) следует, что температура среды (при $y = 0$) равна температуре стенки. Потребуем выполнения искомым решением не уравнения (4.104), а некоторого осредненного уравнения

$$\int_0^{\Delta} \upsilon_x\,\frac{\partial t(x,y)}{\partial x}dy + \int_0^{\Delta} \upsilon_y\,\frac{\partial t(x,y)}{\partial y}dy = \int_0^{\Delta} \frac{\partial}{\partial y}\left[a_э\,\frac{\partial t}{\partial y}\right]dy\,. \tag{4.108}$$

Уравнение (4.108) приводится к интегральному уравнению Кружилина

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\Delta} \upsilon_x \left(t_{\text{ср}} - t(x,y)\right) dy = a_э \frac{\partial t(x,0)}{\partial y} \quad . \tag{4.109}$$

Осреднение уравнения (4.104) снижает точность его решения. Но, что будет доказано далее, применение дополнительных условий позволяет находить решения заданной точности.

Первое ДГУ находится посредством выполнения уравнения (4.104) в точке $y = 0$. Так как здесь $\upsilon_x = \upsilon_y = 0$, то (4.104) будет

$$\partial^2 t(x,0) \big/ \partial y^2 = 0, \tag{4.110}$$

Последнее соотношение используется далее в качестве дополнительного (см. соотношение (4.115)).

Введем избыточную температуру $T = t - t_{\text{ст}}$ $(T_{\text{ср}} = t_{\text{ср}} - t_{\text{ст}})$. Постановка задачи для нее будет

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\Delta} \upsilon_x \left[T_{\text{ср}} - T(x,y)\right] dy = a_э \frac{\partial T(x,0)}{\partial y}; \tag{4.111}$$

$$T(x,0) = 0; \tag{4.112}$$

$$T(x,\Delta) = T_{\text{ср}} \ ; \tag{4.113}$$

$$\partial T(x,\Delta)/\partial y = 0; \tag{4.114}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[a_э \frac{\partial t}{\partial y}\right] = 0. \tag{4.115}$$

Из сопоставления уравнений (4.97) и (4.101), видно, что при $\nu_э = a_э$, где $\nu_э = \nu + \nu_{\text{т}}$ $(\Pr = \nu_э / a_э = 1)$ они совпадают. Для задач в безразмерном виде одинаковыми будут и граничные условия. Следовательно, их безразмерные решения будут совпадать, а размерные решения будут взаимно подобны. Отсюда можно заключить, что отношение пограничных слоев (теплового и динамического) не зависит от $x$. Это условие будет использовано при получении решения уравнения относительно толщины теплового слоя.

Решение задачи (4.111) – (4.115) разыскивается в следующем виде

$$T(x,y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\Delta)\varphi_k(y), \tag{4.116}$$

где $a_k(\Delta)$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(y) = y^{2k-1}$ – координатные функции.

Очевидно, что ввиду применения алгебраического полинома с нечетными степенями, граничные условия (4.112), (4.115) удовлетворяются в любом приближении, независимо от величин коэффициентов $a_k(\Delta),\ (k=\overline{1,n})$.

Для получения первого приближения задачи (4.111) – (4.115) подставим (4.116) (оставляя два члена ряда) в (4.113) (4.114). Для коэффициентов $a_k(\Delta),\ (k=1{,}2)$ находим два алгебраических уравнения. Их решение:

$$a_1(\Delta)=1{,}5T_{cp}/\Delta; \qquad a_2(\Delta)=-0{,}5T_{cp}/\Delta^3. \tag{4.117}$$

С учетом $a_k(\Delta),\ \ (k=1{,}2)$ соотношение (4.116) будет

$$\frac{T}{T_{\text{ср}}}=\frac{3}{2}\frac{y}{\Delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^3. \tag{4.118}$$

Подставляя (4.99), (4.118) в (4.111), находим

$$\upsilon\frac{343}{1160}\frac{d}{dx}\left[\beta^{8/7}\delta(x)\right]=a_э\frac{3}{2}\frac{1}{\beta\delta(x)}, \tag{4.119}$$

где $\beta=\Delta(x)/\delta(x)$.

Ввиду того, что величина $\beta$ независима от переменной $x$, уравнение (4.119) можно представить в виде

$$686\upsilon\beta^{15/7}\delta(x)\frac{d\delta(x)}{dx}=3480a_э, \tag{4.120}$$

где $\delta(x)$ определяется по формуле (4.100).

Подставляя (4.100) в (4.120), находим

$$\Delta(x)=\frac{1{,}99679}{x^6\upsilon^7}\cdot\frac{(a_э\,\mathrm{Re}^{2/5}\,\upsilon^{14}x^{14})^{7/15}}{\mathrm{Re}^{1/5}}. \tag{4.121}$$

Формулы (4.118) , (4.121) представляют первое приближение задачи (4.104) – (4.107). Решение (4.118) точно удовлетворяет условиям (4.105) – (4.107), (4.110) и уравнению (4.111). Уравнение (4.104) выполняется только в среднем.

Повысить точность решения можно увеличением числа слагаемых соотношения (4.116). Для расчета его коэффициентов используются ДГУ. Первое из них – условие (4.115). Во втором приближении добавляются еще ДГУ вида

$$\partial T^2(x,\Delta)/\partial y^2=0; \qquad \partial^3 T(x,\Delta)/\partial y^3=0, \tag{4.122}$$

Подставляя (4.116) в (4.113), (4.114), (4.122), для $a_k(\Delta)$, $(k=\overline{1,4})$ получаем систему четырех алгебраических уравнения (условия (4.112) и (4.115) соотношением (4.116) выполняются в любом приближении). Подставляя полученные коэффициенты $a_k(\Delta)$ в (4.116), находим

$$\frac{T(x,y)}{T_{\text{ср}}}=\frac{35}{24}\frac{y}{\Delta}-\frac{7}{8}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^5+\frac{5}{12}\left(\frac{y}{\Delta}\right)^7. \tag{4.123}$$

Подставляя (4.123) в (4.111) и, определяя интегралы, находим

$$\upsilon\frac{16807}{58824}\frac{d}{dx}\left[\beta^{8/7}\delta(x)\right]=\frac{35a_э}{24\beta\delta(x)}. \tag{4.124}$$

Ввиду независимости $\beta$ от переменной $x$, (4.124) будет

$$\frac{16807}{58824}\upsilon\beta^{15/7}\delta(x)\frac{d\delta(x)}{dx}=\frac{35}{24}a_э \tag{4.125}$$

Подставим (4.100) в (4.125)

$$\Delta(x)=\frac{2{,}0025}{x^6\upsilon^7}\cdot\frac{(a_э\,\mathrm{Re}^{2/5}\,\upsilon^{14}x^{14})^{7/15}}{\mathrm{Re}^{1/5}}. \tag{4.126}$$

Формула (4.123) представляет второе приближение задачи (4.104) – (4.107), (4.110). Температуры $\Theta=T/T_{\text{ср}}$ на основе формулы (4.123) отклоняются от точных на 3 % (в диапазоне $0\le\eta\le6$, см. рис. 4.9).

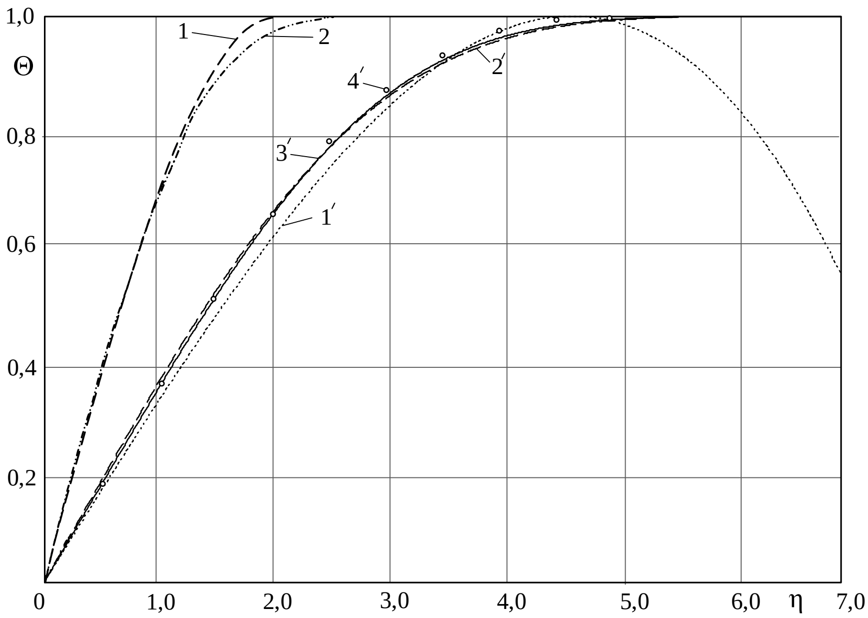



Рис. 4.9. Распределение безразмерной температуры: 1, 2, – 1-ое и 2-ое приближения – турбулентное течение; 1′, 2′, 3′ – 1-ое, 2-ое, 3-ье приближения – ламинарное течение; 4′ – численное решение [121] (ламинарное течение)

Используя формулы для температуры в турбулентном слое, а также уравнение теплоотдачи, можно найти коэффициент теплообмена

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{y=0} = \alpha(T_{ср} - T_{ст});\qquad(4.127)$$

$$\alpha = \frac{-\lambda}{(T_{ср} - T_{ст})}\frac{\partial T(x,0)}{\partial y}.\qquad(4.128)$$

Для решения в 1-ом приближении (соотношение (4.118)) для коэффициента теплообмена будем иметь соотношение

$$\alpha = 1{,}5\lambda / \Delta(x).\qquad(4.129)$$

Для решения (4.123) во втором приближении получаем

$$\alpha = 1{,}46\lambda / \Delta(x).\qquad(4.130)$$

Подставляя (4.126) в (4.130), находим

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}5\,\mathrm{Re}^{0,48}\,\mathrm{Pr}^{0,47},\qquad(4.131)$$

где $\mathrm{Nu}_x = \dfrac{\alpha x}{\lambda}$ – число Нуссельта; $\lambda$ – теплопроводность жидкости.

В области $\mathrm{Re} \le 60000$ отличие числа Нуссельта, определяемого по формуле (4.131), от экспериментальных величин составляет не более 30 % (максимальная относительная невязка в чебышевской норме).

## 4.5. Разработка метода математического моделирования процесса формирования профиля скорости на начальном временном участке

Профили скорости ламинарного стабилизированного течения находятся из решения стационарных уравнений Навье – Стокса. Формулы профилей скорости для каналов различного сечения известны и они приводятся в многочисленной литературе [33, 49, 81, 89, 116, 117]. Однако большой практический интерес представляет нахождение профилей скорости в процессе их формирования во времени, которые определяются из решения соответствующих нестационарных уравнений Навье – Стокса. Их известные аналитические решения, например, для цилиндрических каналов, выражаются сложнейшими рядами, включающими функции Бесселя. Из степенных уравнений, полученных из решения задач Штурма – Лиувилля, включающих уравнения Бесселя, находятся собственные числа. В связи с чем, нахождение собственных чисел для большого числа приближений оказывается затруднительным и, следовательно, получаемые аналитические решения уравнений Навье – Стокса не позволяют выполнять оценку изменения скорости при малых значениях временной переменной.

Рассмотрим сначала вывод дифференциальных уравнений Навье – Стокса применительно к условиям локального равновесия, а затем дадим обобщение этого вывода (см. п. 4.6) для локально-неравновесных условий. Для вывода уравнений движения (Навье – Стокса) вязкой несжимаемой жидкости выделим в жидкости элементарный параллелепипед $dx$, $dy$, $dz$, (рис. 4.10). Гидромеханическое давление в точке $A$ параллелепипеда, будет функцией координат $x$, $y$, $z$ и времени $t$, то есть $p = f(x, y, z, t)$. Компоненты массовых сил, используя второй закон Ньютона, представим в виде [47]

$$X = F_{Mx} / dm; \; Y = F_{My} / dm; \; Z = F_{Mz} / dm, \tag{4.132}$$

где $X$, $Y$, $Z$ – проекции ускорений массовых сил; $F_{Mx}$, $F_{My}$, $F_{Mz}$ – массовые силы, действующие по осям $x$, $y$, $z$; $dm$ – масса параллелепипеда.

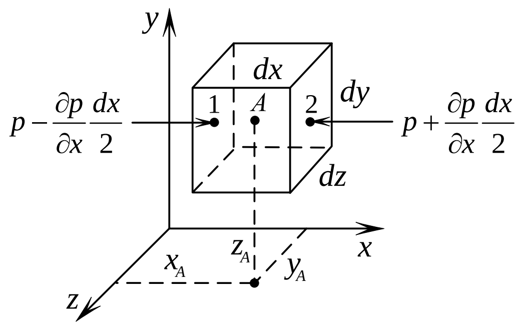



Рис. 4.10. Схема сил, действующих на элементарный параллелепипед

Условие равновесия сил, действующих на элементарный параллелепипед (в проекции на ось $x$) имеет вид

$$F_1 - F_2 + F_M - F_{\text{и}} + F_{\text{тр}} = 0 \;, \tag{4.133}$$

где $F_1$, $F_2$ – силы гидромеханического давления; $F_M$ – равнодействующая массовых сил тяжести; $F_{\text{и}}$ – равнодействующая сил инерции; $F_{\text{тр}}$ – сила трения.

Отметим, что применительно к движущейся жидкости различают гидродинамическое и гидромеханическое давления. Понятие гидродинамического давления используется для невязкой жидкости. Ввиду того, что в невязкой жидкости касательные напряжения отсутствуют, то гидродинамическое давление не зависит от ориентировки площадки, на которую оно действует. Понятие гидромеханического давления вводится применительно к движущейся вязкой несжимаемой жидкости. Это давление зависит от ориентировки площадки. Но, как доказывается в гидромеханике, сумма трёх нормальных напряжений (по осям $x$, $y$, $z$) в данной точке не зависит от ориентировки площадки, то есть она будет скалярной функцией координат и времени $p = f(x, y, z, t)$. Разложим давление в ряд Тейлора в окрестности точки $A$ (с точностью до бесконечно малых первого порядка). Давления в точках 1 и 2 элементарного параллелепипеда в этом случае будут

$$p_1 = p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx \ ; \qquad p_2 = p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx \ . \tag{4.134}$$

Силы гидромеханического давления $F_1$ и $F_2$ равны

$$F_1 = P_1 dydz \ ; \qquad F_2 = P_2 dydz \ . \tag{4.135}$$

Равнодействующая массовых сил тяжести находится по формуле

$$F_M = Xdm = X\rho dV = X\rho dxdydz \ , \tag{4.136}$$

где $\rho$ – плотность; $dV = dxdydz$ – объём элементарного параллелепипеда; $dm = \rho dV$.

Равнодействующая силы инерции будет

$$F_{\text{и}} = -W_x dm = -W_x \rho dxdydz \ , \tag{4.137}$$

где $W_x$ – ускорение силы инерции, приходящееся на единицу массы элементарного параллелепипеда, в проекции на ось $x$, определяемое по соотношению

$$W_x = \frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} + \upsilon_x \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} \ , \tag{4.138}$$

где $\upsilon_x$, $\upsilon_y$, $\upsilon_z$ – составляющие скорости по координатным осям. Знак «минус» в (4.137) связан с тем, что сила $F_{\text{и}}$ направлена противоположно оси $x$.

Сила трения определяется по формуле (рис. 4.11)

$$F_{\text{тр}} = \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y}\partial y\right)dxdz - \tau dxdz = \frac{\partial \tau}{\partial y}dxdydz \ , \tag{4.139}$$

где $\tau$ – касательное напряжение.

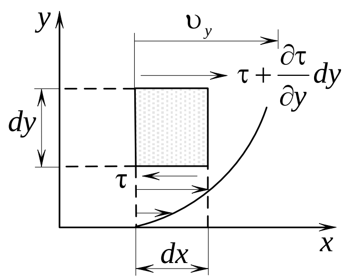



Рис. 4.11. Схема к определению силы трения

Подставляя (4.135) – (4.137), (4.139) в (4.133) с учётом (4.132), (4.134), (4.138) находим

$$\frac{\partial\upsilon_x}{\partial t}+\upsilon_x\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial\upsilon_x}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial y}\ . \tag{4.140}$$

Пренебрегая массовой силой тяжести ($X=0$), применительно к одномерной задаче ($\upsilon_y=\upsilon_z=0$) на участке гидродинамически стабилизированного течения ($\partial\upsilon_x/\partial x=0$) уравнение (4.140) будет

$$\frac{\partial\upsilon_x}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\ . \tag{4.141}$$

Запишем формулу закона Ньютона для касательного напряжения

$$\tau=\mu\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y}\ , \tag{4.142}$$

где $\mu$ – динамическая вязкость.

Подставим (4.142) в (4.141)

$$\frac{\partial\upsilon_x}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial y^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\ . \tag{4.143}$$

где $\nu=\mu/\rho$ – кинематическая вязкость.

Из уравнения (4.143) следует, что градиент давления $\partial p/\partial x$ не зависит от координаты $y$ и, следовательно, он может быть только заданной функцией времени

$$-\partial p/\partial x=f(t)\ . \tag{4.144}$$

Уравнение (4.143) с учётом (4.144) будет (индекс $x$ в обозначении скорости опускается)

$$\frac{\partial\upsilon(y,t)}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2\upsilon(y,t)}{\partial y^2}+\frac{1}{\rho}f(t)\ . \tag{4.145}$$

Уравнение (4.145) по форме совпадает с уравнением теплопроводности для твёрдого тела с изменяющимся от времени источником теплоты. При одинаковых форме тела, мощности внутренних источников теплоты и краевых условиях решение задачи теплопроводности можно рассматривать и как решение соответствующей задачи о движении жидкости в канале соответствующего профиля. Отметим, что безразмерные решения этих двух задач будут полностью совпадать.

В случае, если градиент скорости не зависит от времени $\partial p / \partial x = \Delta p / l = const$, уравнение (4.145) принимает вид

$$\frac{\partial \upsilon(y,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \upsilon(y,t)}{\partial y^2} + \frac{\Delta p}{\rho l} \ . \tag{4.146}$$

где $\Delta p$ – перепад давлений по длине канала; $l$ – длина канала.

Рассмотрим получение решения уравнения (4.146) для плоского канала, если к неподвижной в начальное время жидкости прилагается постоянный во времени перепад давления. Требуется определить профиль скорости до установления стабилизированного состояния. Краевые условия в данном случае имеют вид

$$\upsilon(y,0) = 0; \tag{4.147}$$

$$\partial \upsilon(0,t) / \partial y = 0; \tag{4.148}$$

$$\upsilon(\delta,t) = 0, \tag{4.149}$$

где $\delta$ – половина ширины канала.

Обозначим:

$$\eta = y / \delta \ ; \qquad Zh = \nu t / \delta^2 \ , \tag{4.150}$$

где $\eta = y / \delta$ – безразмерная координата; $Zh = \nu t / \delta^2$ – число Жуковского (безразмерное время).

Задача с учётом обозначений будет

$$\frac{\partial \upsilon(\eta, Zh)}{\partial Zh} = \frac{\partial^2 \upsilon(\eta, Zh)}{\partial \eta^2} + \omega \ , \tag{4.151}$$

$$( Zh > 0 \ ; \ 0 < \eta < 1) \ ;$$

$$\upsilon(\eta,0) = 0; \tag{4.152}$$

$$\partial \upsilon(0, Zh) / \partial \eta = 0; \tag{4.153}$$

$$\upsilon(1, Zh) = 0, \tag{4.154}$$

где $\omega = \Delta p \delta^2 / (\nu l \rho)$.

Введём дополнительную искомую функцию (ДИФ)

$$q(Zh) = \upsilon(0, Zh), \tag{4.155}$$

которая представляет изменение скорости при $\eta = 0$. Ввиду того, что (4.155) применяется на границе $\eta = 0$, то его можно принимать как дополнительное граничное условие (ДГУ).

Решение задачи принимаем в виде

$$\upsilon(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2}(1-\eta^2) + \sum_{k=1}^{n} b_k(q)\varphi_k(\eta) , \tag{4.156}$$

где $b_k(q)$, $(k = \overline{1,n})$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(\eta) = \cos(r\pi\eta / 2)$, $(r = 2k-1;\ k = \overline{1,n})$ – координатные функции.

Формула (4.156) удовлетворяет условиям (4.153) и (4.154). Неизвестные $b_k(q)$, $(k = \overline{1,n})$ будем находить из (4.155) и некоторых ДГУ. Для получения первого ДГУ продифференцируем (4.153), (4.154) по $Zh$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \upsilon(0, Zh)}{\partial Zh}\right) = 0; \tag{4.157}$$

$$\partial \upsilon(1, Zh) / \partial Zh = 0 . \tag{4.158}$$

Учитывая (4.158), получаем следующее ДГУ

$$\partial^2 \upsilon(1, Zh) / \partial \eta^2 + \omega = 0 . \tag{4.159}$$

Продифференцируем (4.151) по $\eta$. Полученное соотношение в точке $\eta = 0$ будет

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \upsilon(0, Zh)}{\partial Zh}\right) = \frac{\partial^3 \upsilon(0, Zh)}{\partial \eta^3} . \tag{4.160}$$

Сравнивая (4.157) и (4.160), находим следующее ДГУ

$$\partial^3 \upsilon(0, Zh) / \partial \eta^3 = 0 . \tag{4.161}$$

Дифференцируя условия (4.159), (4.160) по переменной $Zh$, находим

$$\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \upsilon(1, Zh)}{\partial Zh}\right) = 0; \tag{4.162}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial \eta^3}\left(\frac{\partial \upsilon(0, Zh)}{\partial Zh}\right) = 0. \tag{4.163}$$

Подставляя правую часть (4.151) в (4.162), (4.163), находим следующие ДГУ

$$\partial^4 \upsilon(1, Zh) / \partial \eta^4 = 0; \tag{4.164}$$

$$\partial^5 \upsilon(0, Zh) / \partial \eta^5 = 0 . \qquad (4.165)$$

Аналогично можно получить любое число ДГУ, описываемых следующими общими формулами

$$\partial^i \vartheta(0, Zh) / \partial \eta^{\mathrm{i}} = 0 , \quad (i = 3, 5, 7, \ldots) ; \qquad (4.166)$$

$$\partial^i \vartheta(1, Zh) / \partial \eta^{\mathrm{i}} = 0 , \quad (i = 4, 6, 8, \ldots) . \qquad (4.167)$$

Учитывая, что (4.156) удовлетворяет ДГУ (4.166), (4.167) неизвестные $b_k(q)$, $(k = \overline{1, n})$ будем определять из (4.155) и получаемых на его основе ДГУ. Продифференцируем (4.155) по переменной $Zh$

$$\frac{dq(Zh)}{dZh} = \frac{\partial \upsilon(0, Zh)}{\partial Zh} . \qquad (4.168)$$

Сравнивая (4.168) с уравнением (4.151), находим ДГУ

$$\frac{dq(Zh)}{dZh} = \frac{\partial^2 \upsilon(0, Zh)}{\partial \eta^2} + \omega . \qquad (4.169)$$

Дифференцируя ДГУ (4.169) по переменной $Zh$, находим

$$\frac{d^2 q(Zh)}{dZh^2} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( \frac{\partial \upsilon(0, Zh)}{\partial Zh} \right) . \qquad (4.170)$$

Подставляя в (4.170) правую часть уравнения (4.151), находим следующее ДГУ

$$\frac{d^2 q(Zh)}{dZh^2} = \frac{\partial^4 \upsilon(0, Zh)}{\partial \eta^4} . \qquad (4.171)$$

Аналогично можно найти любое их число. Общая формула имеет вид

$$\frac{d^i q(Zh)}{dZh^i} = \frac{\partial^{2i} \upsilon(0, Zh)}{\partial \eta^{2\mathrm{i}}} , \quad (i = 2, 3, 4, \ldots) . \qquad (4.172)$$

Из основных (4.153), (4.154) и дополнительных (4.155), (4.166), (4.167), (4.169), (4.172) граничных условий невыполненными решением (4.156) являются условия (4.155), (4.169), (4.172). Они будут применены для определения коэффициентов $b_k(q)$, $(k = \overline{1, n})$ соотношения (4.156).

Подставив (4.156) в (4.155) в первом приближении для $b_1(q)$ будем иметь алгебраическое уравнение. Его решение: $b_1(q) = q(Zh) - \omega / 2$. Формула (4.156), с учётом $b_1(q)$, будет

$$\upsilon(\eta, Zh) = \omega(1 - \eta^2) / 2 + (q(Zh) - \omega / 2) \cos(\pi \eta / 2) . \qquad (4.173)$$

Потребуем, чтобы (4.173) удовлетворяло следующему интегральному уравнению

$$\int_0^1 \frac{\partial \upsilon(\eta, Zh)}{\partial Zh}\partial\eta = \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \upsilon(\eta, Zh)}{\partial \eta^2} + \omega\right)\partial\eta . \qquad (4.174)$$

Подставив (4.173) в (4.174), для $q(Zh)$ имеем обыкновенное уравнение вида

$$8dq(Zh)/dZh + 2\pi^2 q - \pi^2\omega = 0 . \qquad (4.175)$$

Интегрируя (4.175), находим

$$q(Zh) = \omega/2 + C_1 \exp(-\pi^2 Zh/4) , \qquad (4.176)$$

где $C_1$ – константа интегрирования.

Подставим (4.176) в (4.173)

$$\upsilon(\eta, Zh) = \omega(1-\eta^2)/2 + C_1 \exp(-\pi^2 Zh/4)\cos(\pi\eta/2) . \qquad (4.177)$$

Для определения $C_1$ составим невязку условия (4.152) и потребуем выполнения её ортогональности к функции $\varphi_1(\eta)$

$$\int_0^1 \left[\frac{\omega}{2}(1-\eta^2) + C_1 \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right) d\eta = 0 , \qquad (4.178)$$

Отсюда находим: $C_1(q) = -16\omega / \pi^3$ .

С учётом $C_1$ (4.177) будет

$$\upsilon(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2}(1-\eta^2) - \frac{16\omega}{\pi^3} e^{-\pi^2 Zh/4} \cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right), \qquad (4.179)$$

Соотношение (4.179) представляет первое приближение задачи (4.151) – (4.154). Для повышения точности решения будем увеличивать число приближений ряда (4.156). Во втором приближении, подставив (4.156) в (4.155), (4.169), для $b_1(q)$ и $b_2(q)$ будем иметь систему двух уравнений. Ее решение:

$$b_1(q) = -\frac{9\pi^2\omega - 8dq(Zh)/dZh - 18\pi^2 q(Zh)}{16\pi^2} ;$$

$$b_2(q) = \frac{\pi^2\omega - 8dq(Zh)/dZh - 2\pi^2 q(Zh)}{16\pi^2} .$$

Соотношение (4.156) с учётом $b_1(q)$ и $b_2(q)$ будет

$$\upsilon(\eta, Zh) = \frac{\omega}{2}(1-\eta^2) - \frac{9\pi^2\omega - 8dq(Zh)/dZh - 18\pi^2 q(Zh)}{16\pi^2}\cos(\frac{\pi}{2}\eta) +$$

$$+ \frac{\pi^2\omega - 8dq(Zh)/dZh - 2\pi^2 q(Zh)}{16\pi^2}\cos(\frac{3\pi}{2}\eta) . \qquad (4.180)$$

Подставляя (4.180) в (4.174), получаем

$$\frac{32d^2q(Zh)}{\partial(Zh)^2}+\frac{80\pi^2dq(Zh)}{dZh}+9\pi^4(2q(Zh))-\omega=0\ . \qquad (4.181)$$

Интегрируя уравнение (4.181), находим

$$q(Zh)=\omega/2+C_1e^{-\frac{\pi^2Zh}{4}}+C_2e^{-\frac{9\pi^2Zh}{4}}\ , \qquad (4.182)$$

где $C_1$, $C_2$ – константы интегрирования.

Соотношение (4.180) с учётом (4.182) будет

$$\upsilon(\eta,Zh)=\frac{\omega}{2}(1-\eta^2)+C_1e^{-\frac{\pi^2Zh}{4}}\cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right)+C_2e^{-\frac{9\pi^2Zh}{4}}\cos\left(\frac{3\pi\eta}{2}\right)\ , \qquad (4.183)$$

Составим невязку условия (4.152) и потребуем выполнения её ортогональности к функциям $\varphi_1(\eta)$ и $\varphi_2(\eta)$

$$\int_0^1\left[\frac{\omega}{2}\left(1-\eta^2\right)+C_1\cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right)+C_2\cos\left(\frac{3\pi\eta}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{j\pi}{2}\right)d\eta=0\ ,\ (j=1,3)\ . \qquad (4.184)$$

Уравнения (4.184), ввиду ортогональности косинусов, разделяются. Отсюда находим: $C_1=-16\omega/\pi^3$; $C_2=16\omega/27\pi^3$. Соотношение (4.156) принимает вид

$$\upsilon(\eta,Zh)=\frac{\omega}{2}(1-\eta^2)-\frac{16\omega}{\pi^3}e^{-\frac{\pi^2Zh}{4}}\cos\left(\frac{\pi\eta}{2}\right)+$$

$$+\frac{16}{27\pi^3}e^{-\frac{9\pi^2Zh}{4}}\cos\left(\frac{\eta3\pi}{2}\right)\ . \qquad (4.185)$$

В третьем приближении для определения $b_k(q)$, $(k=1,\ 2,\ 3)$ используем условия (4.155), (4.169), (4.172) (при $i=2$). Для функции $q(Zh)$ здесь получаем обыкновенное уравнение третьего порядка. Решение задачи в третьем приближении будет

$$\upsilon(\eta,Zh)=\frac{\omega}{2}(1-\eta^2)+\sum_{k=1}^{n}\frac{16(-1)^k\omega}{r^3\pi^3}e^{-\frac{r^2\pi^2Zh}{4}}\cos\left(\frac{r\pi}{2}\eta\right)\ , \qquad (4.186)$$

$$(r=2k-1;\ n=3)\ .$$

Соотношение (4.186) для любого числа приближений принимает вид

$$\upsilon(\eta,Zh)=\frac{\omega}{2}(1-\eta^2)+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\omega e^{-\mu_k^2Zh}\cos(\mu_k\eta)\ , \qquad (4.187)$$

где $A_k = \dfrac{16(-1)^k}{r^3\pi^3}$; $\mu_k = \dfrac{r\pi}{2}$; $r = 2k - 1$.

Анализируя (4.187), отмечаем, что формулы для $A_k$ и $\mu_k$ совпадают с их точными формулами [70].

Расчеты по (4.187) даны на рис. 4.12. Из них следует, что стационарный профиль скорости формируется в диапазоне $0 < Zh \le 2{,}5$. При $Zh > 2{,}5$ профиль практически не изменяется.

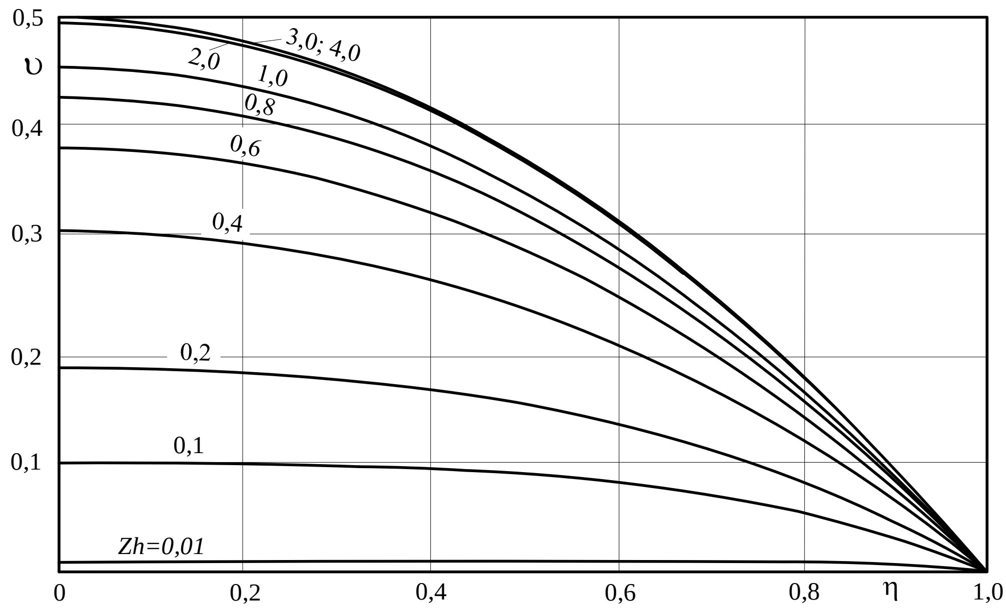



Рис. 4.12. Формирование нестационарного профиля скорости.
$\omega = 1$; $n = 100$ – число членов ряда (4.187)

## 4.6. Уравнения движения реальной жидкости в локально – неравновесных условиях

Параболическое уравнение (4.151) описывает бесконечную скорость распространения импульса. Это объясняется тем, что в используемой при его выводе формуле закона Ньютона (4.142) градиент скорости (движущая сила – причина) и касательное напряжение $\tau$ (следствие) не разделены во времени. Следовательно, уравнение (4.151) выведено, исходя из допущений локального динамического равновесия и сплошности среды. Согласно им в каждом элементарном участке среды наблюдается локальное равновесие, несмотря на то, что во всей системе имеют место градиенты исследуемых величин, создаваемые неоднородными граничными условиями краевой задачи. Описываемая уравнением (4.151) бесконечная скорость распространения импульса, ограничивает пространственно-временную область применения его решения. И, в частности, оно неадекватно описывает все быстропротекающие процессы, а также и другие процессы при сверхмалых значениях начального временного участка [52, 53, 55, 65, 105, 106]. Отметим, что любые реальные процессы являются нелокальными, в которых исключаются как бесконечные скорости переноса, так и бесконечные значения каких-либо величин.

С целью учета пространственно-временной нелокальности формулу (4.142) закона Ньютона представим в виде

$$\tau + r_1 \frac{\partial \tau}{\partial t} + \gamma_1^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} + ... = \mu \left( \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + r_2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y \partial t} + \gamma_2^2 \frac{\partial^3 \upsilon}{\partial y \partial t^2} + ... \right), \qquad (4.188)$$

где $r_1, \gamma_1$ – времена релаксации касательного напряжения (учет временной нелокальности); $r_2, \gamma_2$ – времена релаксации градиента скорости (учет пространственной нелокальности).

Подобное разделение коэффициентов релаксации связано с тем, что касательное напряжение, как изменяющаяся во времени величина, определена в любой точке пространства. Градиент скорости также изменяется во времени, однако он может быть определен лишь для некоторого конечного участка пространственной переменной.

Очевидно, что в соотношении (4.188) функция $\upsilon$ зависит не только от скоростей изменения касательного напряжения и градиента скорости (вторые слагаемые правой и левой части), но и от их ускорений (третьи слагаемые).

Ограничиваясь двумя слагаемыми левой и правой части соотношения (4.188), находим

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + r_2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y \partial t} \right) - r_1 \frac{\partial \tau}{\partial t}. \qquad (4.189)$$

Соотношение (4.189) может быть получено и из уравнений Онзагера [69].

$$J_i = L_i^{(r)} \frac{\partial J_i}{\partial t} + \sum \left( L_{ik} X_k + L_{ik}^{'} \frac{\partial X_k}{\partial t} \right), \qquad (4.190)$$

где $J_i$ – поток субстанции; $X_k$ – движущие силы; $L_i^{(r)}, L_{ik}, L_{ik}^{'}$ – феноменологические коэффициенты.

Если принять $L_i^{(r)} = -r_1$; $L_{ik} = \mu$; $L_{ik}^{'} = \mu r_2$; $J_i = \tau$; $X_k = \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}$, то (4.190) приводится к (4.189).

В случае течения вязкой среды Олдройд получил следующую формулу [69 – 71]

$$\tau = \eta' \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \eta'' \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \tau_p \frac{\partial \tau}{\partial t}, \qquad (4.191)$$

где $\tau$ – касательное напряжение; $\varepsilon = dl_x / dy$ – деформация; $l_x = \upsilon t$ – удлинение по оси *x*; $\tau_p$ – время релаксации вязкоупругих напряжений; $\upsilon$ – скорость деформации; $\eta', \eta''$ – постоянные.

Покажем, что формула (4.191) аналогична формуле (4.189). Обозначив $\eta' = \mu;\ \eta'' = \mu\tau_p$, с учетом

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dl_x}{dy}\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dy}(\upsilon t)\right] = \frac{d\upsilon}{dy}, \qquad (4.192)$$

соотношение (4.191) будет

$$\tau = \mu \frac{d\upsilon}{dy} - \tau_p \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mu \tau_p \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y \partial t}. \qquad (4.193)$$

Если в формуле (4.189) положить $r_1 = r_2 = \tau_p$, то она приводится к формуле (4.187).

Соотношение (4.189) также совпадает с моделями Максвелла и Кельвина [88, 52, 53, 116] вида

$$\sigma = -Q \frac{\partial \sigma}{\partial t} + E\left(\varepsilon + Q \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right), \qquad (4.194)$$

где $\sigma$ – нормальное напряжение; $\varepsilon$ – деформация; $E$ – модуль упругости; $Q$ – постоянная (время релаксации). Если положить $E = \mu;\ r_1 = r_2 = Q$, то формула (4.194) качественно совпадет с формулой (4.189).

Таким образом, избранное направление исследований движения реальной жидкости в локально-неравновесных условиях совпадает с направлениями исследования других процессов, происходящих в локально-неравновесных условиях (перенос теплоты, массы, импульса). Отметим, что в некоторых публикациях указанное направление исследований квалифицируется как перенос с двуфазным запаздыванием [34].

Если в соотношении (4.188) ограничиться тремя слагаемыми правой и левой части, то для касательного напряжения получим следующую формулу

$$\tau = \mu\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + r_2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y \partial t} + \gamma_2^2 \frac{\partial^3 \upsilon}{\partial y \partial t^2}\right) - r_1 \frac{\partial \tau}{\partial t} - \gamma_1^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}. \qquad (4.195)$$

Подставляя (4.195) в (4.141), находим

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2} + r_2 \frac{\partial^3 \upsilon}{\partial y^2 \partial t} + \gamma_2^2 \frac{\partial^4 \upsilon}{\partial y^2 \partial t^2}\right) - \frac{r_1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right) - \frac{\gamma_1^2}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right) + \frac{\Delta p}{\rho l}. \qquad (4.196)$$

Выразив $\dfrac{\partial\tau}{\partial y}$ из (4.141) и подставив в (4.196), находим

$$\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2\upsilon}{\partial y^2}+\nu r_2\frac{\partial^3\upsilon}{\partial y^2\partial t}+\nu\gamma_2^2\frac{\partial^4\upsilon}{\partial y^2\partial t^2}-r_1\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}-\gamma_1^2\frac{\partial^3\upsilon}{\partial t^3}+\frac{\Delta p}{\rho l}. \qquad (4.197)$$

Представим уравнение (4.197) в виде

$$\gamma_1^2\frac{\partial^3\upsilon}{\partial t^3}+r_1\frac{\partial^2\upsilon}{\partial t^2}+\frac{\partial\upsilon}{\partial t}=\nu\left(\frac{\partial^2\upsilon}{\partial y^2}+r_2\frac{\partial^3\upsilon}{\partial y^2\partial t}+\gamma_2^2\frac{\partial^4\upsilon}{\partial y^2\partial t^2}\right)+\frac{\Delta p}{\rho l}. \qquad (4.198)$$

Уравнение (4.198) описывает скорость в движущейся жидкости с учетом пространственно-временной нелокальности. Если положить $r_1=r_2=0$, то оно приводится к уравнению (4.145).

Краевые условия к уравнению (4.198) имеют вид

$$\upsilon(y,0)=0; \qquad (4.199)$$

$$\frac{\partial\upsilon(y,0)}{\partial t}=0; \qquad (4.200)$$

$$\frac{\partial^2\upsilon(y,0)}{\partial t^2}=0; \qquad (4.201)$$

$$\frac{\partial\upsilon(0,t)}{\partial y}=0; \qquad (4.202)$$

$$\upsilon(\delta,t)=0. \qquad (4.203)$$

С учетом обозначений (4.150) задача (4.198) – (4.203) будет

$$G_1^2\frac{\partial^3\upsilon}{\partial Zh^3}+F_1\frac{\partial^2\upsilon}{\partial Zh^2}+\frac{\partial\upsilon}{\partial Zh}=\frac{\partial^2\upsilon}{\partial\eta^2}+F_2\frac{\partial^3\upsilon}{\partial\eta^2\partial Zh}+G_2^2\frac{\partial^4\upsilon}{\partial\eta^2\partial Zh^2}+\omega. \qquad (4.204)$$

$$\upsilon(\eta,0)=0; \qquad (4.205)$$

$$\frac{\partial\upsilon(\eta,0)}{\partial Zh}=0; \qquad (4.206)$$

$$\frac{\partial^2\upsilon(\eta,0)}{\partial Zh^2}=0; \qquad (4.207)$$

$$\frac{\partial\upsilon(0,Zh)}{\partial\eta}=0; \qquad (4.208)$$

$$\upsilon(1,Zh)=0, \qquad (4.209)$$

где $F_1=\dfrac{r_1\nu}{\delta^2}$; $F_2=\dfrac{r_2\nu}{\delta^2}$; $G_1=\dfrac{\gamma_1\nu}{\delta^2}$; $G_2=\dfrac{\gamma_2\nu}{\delta^2}$; $\omega=\dfrac{\Delta p\delta^2}{\rho l\nu}$.

Для решения задачи (4.204) – (4.209) применялся численный метод. В области вводилась сетка с шагами $\Delta\eta$, $\Delta Zh$ так, что

$$Zh_i=i\Delta Zh,\quad i=\overline{0,I},\quad \eta_k=k\Delta\eta,\quad k=\overline{0,K},$$

где $I$, $K$ – число шагов по $Zh$ и $\eta$.

На принятой сетке введем сеточные функции $\upsilon_k^i = \upsilon(\eta_k, Zh_i)$. Исходя из явной схемы аппроксимации дифференциальных операторов, задача (4.204) – (4.209) записывалась в виде

$$G_1^2\left(\frac{\upsilon_k^{i+1} - 3\upsilon_k^i + 3\upsilon_k^{i-1} - \upsilon_k^{i-2}}{\Delta Zh^3}\right) + F_1\left(\frac{\upsilon_k^{i+1} - 2\upsilon_k^i + \upsilon_k^{i-1}}{\Delta Zh^2}\right) + \frac{\upsilon_k^{i+1} - \upsilon_k^{i-1}}{2Zh} =$$

$$\frac{\upsilon_{k+1}^i - 2\upsilon_k^i + \upsilon_{k-1}^i}{\Delta\eta^2} + F_2\left(\frac{\upsilon_{k+1}^i - 2\upsilon_k^i + \upsilon_{k-1}^i - \upsilon_{k+1}^{i-1} + 2\upsilon_k^{i-1} + \upsilon_{k-1}^{i-1}}{\Delta\eta^2 Zh}\right) +$$

$$+\frac{G_2^2}{\Delta Zh^2}\left(\frac{\upsilon_{k+1}^i - 2\upsilon_k^i + \upsilon_{k-1}^i}{\Delta\eta^2} - 2\frac{\upsilon_{k+1}^{i-1} - 2\upsilon_k^{i-1} + \upsilon_{k-1}^{i-1}}{\Delta\eta^2} + \frac{\upsilon_{k+1}^{i-2} - 2\upsilon_k^{i-2} + \upsilon_{k-1}^{i-2}}{\Delta\eta^2}\right) + \omega;$$

$$\upsilon_k^0 = 0;\quad \upsilon_k^1 = \upsilon_k^0 = 0;\quad \upsilon_k^2 = 2\upsilon_k^1 - \upsilon_k^0 = 0;\quad \upsilon_k^i = 0;\quad \upsilon_0^i = \upsilon_1^i.$$

Расчеты даны на рис. 2.4. – 2.7, из которых видно, что при $\omega = 1$, $F_1 = F_2 = G_1 = G_2 = 0$, то есть при неучёте релаксационных свойств жидкости, результаты численных расчетов задачи (4.204) – (4.209) (см. рис. 4.13, 4.14) отличаются от точного её решения (см. рис. 4.12) не более чем на 2 %. Анализ результатов расчетов в локально-неравновесных условиях ($F_1 = 0{,}8$; $F_2 = 0{,}4$; $G_1 = 0{,}89$; $G_2 = 0{,}63$) позволяет заключить, что течение жидкости сопровождается периодическими осцилляциями (колебаниями) скорости (см. рис. 4.15, 4.16), максимальная амплитуда которых наблюдается на начальном временном участке. Данный результат качественно согласуется с экспериментальными данными, приведёнными в литературных источниках [26, 72 – 74]. Отметим, что подобных теоретических результатов в известной литературе не обнаружено. Объяснение полученных результатов связано с добавлением релаксационных слагаемых в уравнение Навье – Стокса, которое из нелинейного параболического превращается в гиперболическое (волновое).

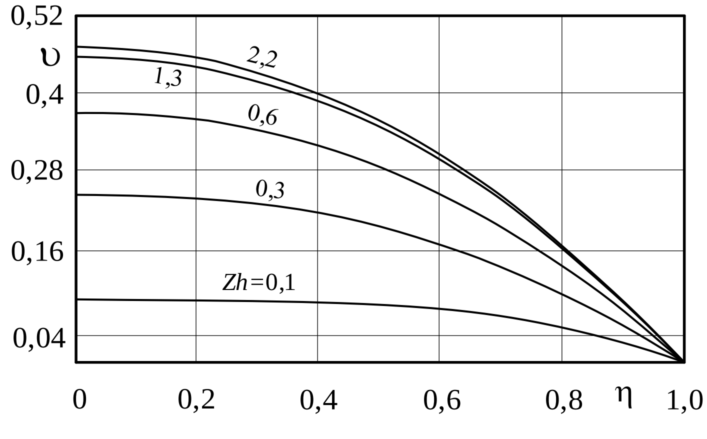


Рис. 4.13. Формирование нестационарного профиля скорости. $\omega = 1$; $F_1 = F_2 = 0$

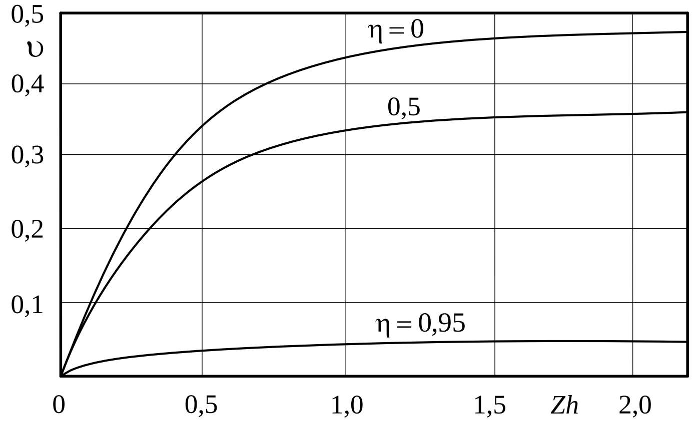



Рис. 4.14. Изменение скорости в отдельных точках поперечной координаты во времени. $\omega = 1; F_1 = F_2 = 0$

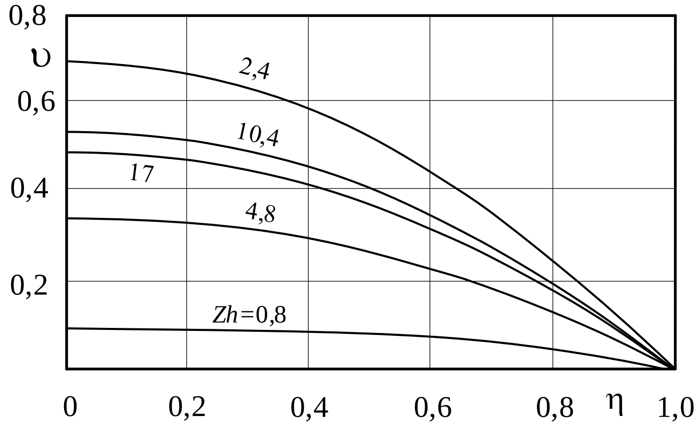



Рис. 4.15. Формирование нестационарного профиля скорости в локально-неравновесных условиях. $\omega = 1$; $F_1 = 0{,}8$; $F_2 = 0{,}4$; $G_1 = 0{,}89$; $G_2 = 0{,}63$

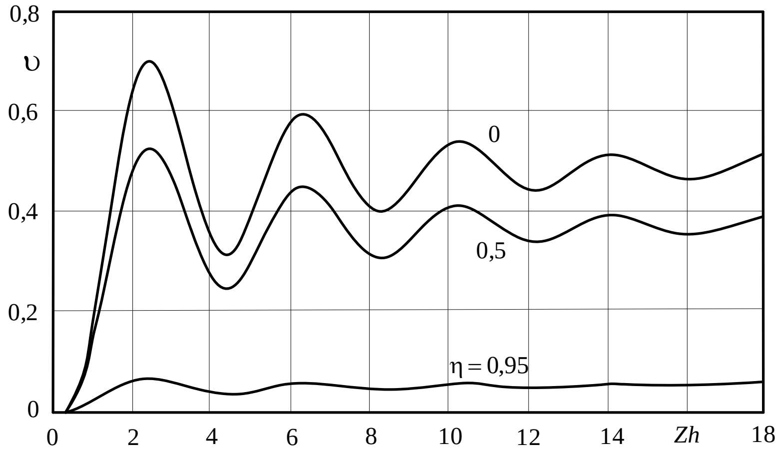



Рис. 4.16. Изменение скорости в отдельных точках поперечной координаты во времени. $\omega = 1$; $F_1 = 0{,}8$; $F_2 = 0{,}4$; $G_1 = 0{,}89$; $G_2 = 0{,}63$

## 4.7. Теплообмен в движущейся жидкости с учетом её релаксационных свойств

Для вывода уравнения теплообмена в движущейся жидкости используются следующие формулы для тепловых потоков

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \rho \omega_x i; \qquad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \rho \omega_y i, \tag{4.210}$$

где $q_x$, $q_y$ – тепловые потоки в направлении осей $x$ и $y$; $\omega_x$, $\omega_y$ – скорости движения; $i$ – энтальпия; $\lambda$, $\rho$ – теплопроводность и плотность; $T$ – температура; $x$, $y$ – координаты.

Подставив формулы (4.210) в уравнение теплового баланса

$$\rho \partial i / \partial t = -\left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right), \tag{4.211}$$

получим

$$\rho \frac{\partial i}{\partial t} + \rho \omega_x \frac{\partial i}{\partial x} + \rho \omega_y \frac{\partial i}{\partial y} = \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right),$$

где $t$ – время.

Не учитывая теплопроводность по оси $x$ и конвективный перенос тепла в поперечном направлении, находим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \omega_x \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \tag{4.212}$$

где $a = \lambda / (c\rho)$ – коэффициент температуропроводности; $c$ – теплоёмкость; $\partial i = c \partial T$. Уравнение (4.212) является параболическим и, следовательно, оно описывает бесконечную скорость распространения теплоты. Это связано с тем, что в формулах (4.210) тепловые потоки $q_x$, $q_y$ и градиенты температур (движущие силы) $\partial T / \partial x$ и $\partial T / \partial y$ не зависят от времени. Поэтому, при любом изменении движущих сил происходит мгновенное изменение тепловых потоков. Однако в любом реальном процессе не могут происходить скачкообразные изменения параметров и их бесконечные величины. Рассмотрим вывод уравнения, свободного от указанных недостатков. Формулы (4.210), следуя [56], запишем в виде

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \tau \frac{\partial q_x}{\partial t} - \lambda \tau \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial t} + \rho \omega_x i; \tag{4.213}$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \tau \frac{\partial q_y}{\partial t} - \lambda \tau \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial t} + \rho \omega_y i, \qquad (4.214)$$

где $\tau$ – коэффициент релаксации (постоянная времени), *с*.

Подставляя (4.213) и (4.214) в (4.211) находим

$$\rho \frac{\partial i}{\partial t} + \rho \omega_X \frac{\partial i}{\partial x} + \rho \omega_Y \frac{\partial i}{\partial y} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \tau \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 T}{\partial y^2 \partial t} \right). \qquad (4.215)$$

Пренебрегая конвективным теплообменом в поперечном поправлении $(\rho \omega_y \partial i / \partial y = 0)$ и теплопроводностью – в продольном $(\lambda \partial^2 T / \partial x^2 = 0)$, учитывая (4.211), получаем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \omega_x \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + a\tau \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \qquad (4.216)$$

Очевидно, что при $\tau = 0$ уравнение (4.216) сводится к (4.212).

Рассмотрим получение решения уравнения (4.216) при условиях (рис. 4.17)

$$T(x, y, 0) = T_н; \qquad (4.217)$$

$$\partial T(x, y, 0) / \partial t = 0; \qquad (4.218)$$

$$T(0, y, t) = T_0; \qquad (4.219)$$

$$\partial T(0, y, t) / \partial x = 0; \qquad (4.220)$$

$$\partial T(x, 0, t) / \partial y = 0; \qquad (4.221)$$

$$T(x, \delta, t) = T_{ст}; \qquad (4.222)$$

где $T_н$ – начальная температура; $T_0$ – температура на входе в канал; $T_{ст}$ – температура на стенке (теплопроводность стенки не учитывается), $\delta$ – ширина канала.

Введем допущение о том, что при установившемся течении в плоском канале $\omega_x = \omega_{ср}$, где $\omega_{ср}$ – средняя скорость.

Введем обозначения

$$\Theta = \frac{T - T_{ст}}{T_0 - T_{ст}}; \qquad \eta = \frac{y}{\delta}; \qquad \mathrm{Fo} = \frac{at}{\delta^2}; \qquad \mathrm{Fo}_1 = \frac{a\tau}{\delta^2};$$

$$\xi = \frac{2ax}{\delta^2 \omega_{ср}}; \quad \mathrm{Pe} = \left( \frac{2a}{\delta \omega_{ср}} \right)^2,$$

где $\Theta$ – безразмерная температура; $\eta$, $\xi$ – безразмерные координаты, $\mathrm{Fo}$ – число Фурье; $\mathrm{Fo}_1$ – безразмерный коэффициент релаксации; $\mathrm{Pe}$ – число Пекле (безразмерный комплекс).

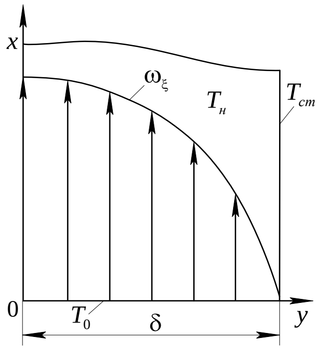



Рис. 4.17. Схема теплообмена при течении в плоском канале

С учётом обозначений задача записывается следующим образом

$$\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_1 \frac{\partial^2\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^2} + \frac{\partial\Theta}{\partial\xi} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\eta^2} + \mathrm{Fo}_1 \frac{\partial}{\partial \mathrm{Fo}}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2}\mathrm{Pe} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial\eta^2}\right); \quad (4.223)$$

$$(\mathrm{Fo} > 0; \quad \xi > 0; \quad 0 < \eta < 1);$$

$$\Theta(\xi,\ \eta,\ 0) = \frac{T_н - T_{ст}}{T_0 - T_{ст}}; \quad (4.224)$$

$$\partial\Theta(\xi,\ \eta,\ 0)/\partial \mathrm{Fo} = 0; \quad (4.225)$$

$$\Theta(0,\ \eta,\ \mathrm{Fo}) = 1; \quad (4.226)$$

$$\partial\Theta(0,\ \eta,\ \mathrm{Fo})/\partial\xi = 0; \quad (4.227)$$

$$\partial\Theta(\xi,\ 0,\ \mathrm{Fo})/\partial\eta = 0; \quad (4.228)$$

$$\Theta(\xi,\ 1,\ \mathrm{Fo}) = 0. \quad (4.229)$$

Следуя численному методу, введём сетку с шагами $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\mathrm{Fo}$ так, что

$$\xi_i = i\Delta\xi, \quad i = \overline{0, I}; \quad \eta_j = j\Delta\eta, \quad j = \overline{0, J}; \quad \mathrm{Fo}_k = k\Delta\mathrm{Fo}, \quad k = \overline{0, K}, \quad (4.230)$$

где $I$, $J$, $K$ – число шагов по координатам $\xi$, $\eta$, Fo. Задача (4.223) – (4.229) в конечных разностях принимает вид

$$\frac{\Theta_{i,j}^{k} - \Theta_{i,j}^{k-1}}{\Delta\mathrm{Fo}} + \mathrm{Fo}_1 \frac{\Theta_{i,j}^{k-1} - 2\Theta_{i,j}^{k} + \Theta_{i,j}^{k+1}}{\Delta\mathrm{Fo}^2} + \frac{\Theta_{i+1,j}^{k} - \Theta_{i,j}^{k}}{\Delta\xi} = \frac{\Theta_{i,j-1}^{k} - 2\Theta_{i,j}^{k} + \Theta_{i,j+1}^{k}}{\Delta\eta^2} +$$

$$+ \mathrm{Fo}_1 \left( \mathrm{Pe} \frac{\Theta_{i-1,j}^{k} - 2\Theta_{i,j}^{k} + \Theta_{i+1,j}^{k} - \Theta_{i-1,j}^{k-1} + 2\Theta_{i,j}^{k-1} - \Theta_{i+1,j}^{k-1}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\xi^2} + \right.$$

$$\left. \frac{\Theta_{i,j-1}^{k} - 2\Theta_{i,j}^{k} + \Theta_{i,j+1}^{k} - \Theta_{i,j-1}^{k-1} + 2\Theta_{i,j}^{k-1} - \Theta_{i,j+1}^{k-1}}{\Delta\mathrm{Fo}\Delta\eta^2} \right); \quad (4.231)$$

$$\Theta_{i,j}^{0} = \Theta_н; \quad (4.232)$$

$$\Theta_{i,j}^{0} = \Theta_{i,j}^{1}; \quad (4.233)$$

$$\Theta_{0,j}^{k} = \Theta_0; \quad (4.234)$$

$$\Theta_{0,j}^{k} = \Theta_{1,j}^{k}\,; \qquad (4.235)$$

$$\Theta_{i,0}^{k} = \Theta_{i,1}^{k} \qquad (4.236)$$

$$\Theta_{i,j}^{k} = 0\,. \qquad (4.237)$$

Распределение температуры в при малых значениях поперечной координаты $(0{,}99 \le \eta \le 1{,}0)$ для отдельных значений числа Фурье при $\xi = 5\cdot 10^{-5}$ (при $\mathrm{Pe}=0$) дано на рис 4.18. Анализ результатов позволяет раскрыть важную особенность теплообмена при учете релаксационных явлений. Несмотря на выполнение граничного условия (4.229) в бесконечно малой окрестности, точки $\eta = 1$, например, при $\eta = 0{,}9999$, температура на стенке не устанавливается $\Theta(\xi, 1, \mathrm{Fo}) = 0$ мгновенно, а именно, при $\mathrm{Fo} = 0$. В частности, чтобы стенка приняла температуру $\Theta(\xi, 1, \mathrm{Fo}) = 0$, требуется определенное время ($\mathrm{Fo} = 10^{-4}$). Полученные результаты согласуются с результатами, приведенными в работах [52, 53, 55, 56].

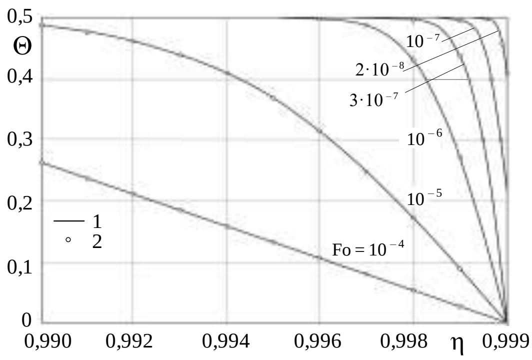



Рис. 4.18. Распределение температуры по ширине канала. $\xi = 5\cdot 10^{-5}$; $\mathrm{Fo}_1 = 10^{-7}$, $\mathrm{Pe} = 10^{-7}$; $\Theta_н = 0{,}5$; 1 – метод конечных разностей, 2 – точное решение [52, 53]

При увеличении $\mathrm{Fo}_1$ кривые температуры становятся более пологими, и при $\mathrm{Fo}_1 > 5$ – практически параллельными оси $\eta$ (рис. 4.19).

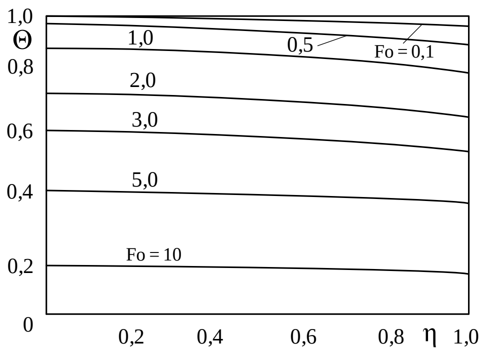



Рис. 4.19. Распределение температуры по ширине канала.
$\mathrm{Fo}_1 = 5$; $\Theta_н = 1$; $\xi \to \infty$

# Глава 5. Разработка математических и компьютерных моделей трубопроводных сетей

Научные результаты главы рассмотрены в работах [138, 141, 149 – 152] автора диссертации.

## 5.1. Основные положения теории расчета потокораспределения в гидравлических сетях

Процессы переноса тепла, массы, импульса и проч. в ряде случаев описываются нелинейными уравнениями. В связи  чем, для их решения не могут быть использованы классические методы.  Поэтому эффективными представляются методы аналогий. Например, законы Кирхгофа, применяемые в электротехнике, могут быть успешно применены и для выполнения гидравлических расчетов ввиду электрогидравлической аналогии. Разработке этого направления исследований посвящены труды Сухарева М.Г., Меренкова А.Г., Хасилева В.Я., Коваленко А.Г., Соколова Е.Я. и др. [38 – 42, 51, 72 – 80, 82 – 88, 93, 97, 100 – 105, 111 – 114]. В его основе лежит метод определения расхода на участке сети. Использование для этого законов Кирхгофа (первого и второго) дано в [97]. Однако применение метода для расчета трубопроводных систем связано с большим объемом вычислений, поэтому, в диссертации применен итеративный метод расчета «увязочных расходов».

Идею метода рассмотрим на примере расчета сети, включающей кольцо и два ответвления (рис. 5.1). По известному расходу на входе в кольцо ($Q$) и по ответвлениям ($Q_1$ и $Q_2$) следует найти расходы $Q_a, Q_b, Q_d$ по участкам $a, b, d$ кольца.

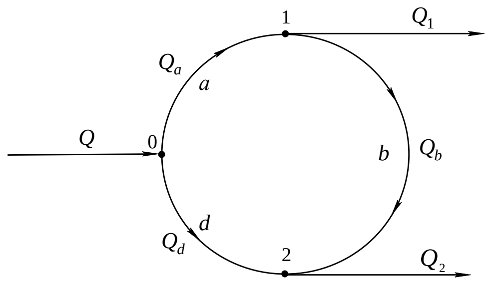



Рис. 5.1. Расчетная схема

Первый закон Кирхгофа имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = 0 .$$

Запишем второй закон Кирхгофа, который для любого замкнутого кольца имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} S_i Q_i^2 = 0\,,$$

где $S_i$, $Q_i$, $(i = \overline{1, n})$ − коэффициент сопротивления и расход на $i$ – ом участке; $n$ – число труб в узле и, в кольце.

На основе указанных соотношений итеративным методом расчёта находятся расходы на участках кольца. На первом шаге на участках задаются произвольно принятые расходы. Из первого закона имеем

$$Q_d = Q - Q_a\,; \quad Q_a = Q_1 + Q_b\,. \tag{5.1}$$

Из второго закон получаем

$$\delta H = \sum_{i=1}^{3} S_i Q_i^2 = S_a Q_a^2 + S_b Q_b^2 - S_d Q_d^2\,. \tag{5.2}$$

Из (5.2) находится увязочный расход, положив $\delta H = 0$. Подставляя (5.1) в (5.2) (пренебрегая членами $(\delta Q)^2$, как весьма малыми), с учетом принятых на первом шаге расходов по участкам получаем следующую формулу для увязочных расходов

$$\delta Q = \delta H \Big/ \left( 2\sum_{i=1}^{3} S_i Q_i \right), \tag{5.3}$$

где $\sum_{i=1}^{3} S_i Q_i = S_a Q_a + S_b Q_b + S_d Q_d$.

После расчета увязочных расходов $\delta Q$ по формуле (5.3) расходы по участкам уточняются, повторяя расчёт. Итерации продолжаются до совпадения расходов последних итераций.

С целью удобства задания информации для ЭВМ применяется теория графов [25, 38]. На этой основе создается «дерево» сети (рис. 5.2). На рис. 5.2 цифры 1, 2, 3, …, 9 это вершины, а буквы *а, б, в, …* – дуги. Вершины – точки соединения труб, дуги – их участки. Для такого «дерева» из вершины 1 можно достичь любой другой вершины. Вершины имеют номер, высоту расположения, величину притока (отбора) среды. Дуги имеют номер, длину, диаметр труб, коэффициент сопротивления (трения).

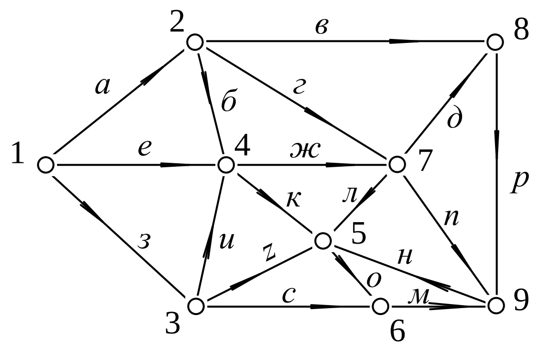



Рис. 5.2. Схема графа

При разработке модели определяются характеристики всех труб сети. И, в частности, потери давления включают линейные и местные сопротивления

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d}\frac{\upsilon^2}{2g} + \sum \xi \frac{\upsilon^2}{2g}, \qquad (5.4)$$

где $\Delta h$ – потери напора, $м$; $\lambda$ – коэффициент трения; $l$ – длина трубопровода, $м$; $d$ – внутренний диаметр, $м$; $\upsilon$ – средняя скорость, $м/с$; $\xi$ – коэффициент местных сопротивлений.

Для сведения местных потерь напора к линейным используется эквивалентная длина

$$l_э = d\sum \xi/\lambda. \qquad (5.5)$$

Учитывая (5.5), (5.4) будет

$$\Delta h = \frac{\upsilon^2}{2g}\left(\lambda\frac{l}{d} + \lambda\frac{l_э}{d}\right) = \frac{\lambda\upsilon^2}{2dg}\left(l + l_э\right). \qquad (5.6)$$

Если расход на участке $Q\, м^3/с$, то

$$\upsilon = 4Q/(\pi d^2). \qquad (5.7)$$

Подставим (5.7) в (5.6)

$$\Delta h = \frac{8\lambda\left(l + l_э\right)}{\pi^2 g d^5} Q^2.$$

Отсюда характеристика участка-трубы принимает вид

$$\Delta h = SQ^2,$$

где $S = \dfrac{8\lambda\left(l + l_э\right)}{\pi^2 g d^5}$ – сопротивление участка, $с^2/м^5$.

Для участка-трубы вводятся диаметр, длина, тип, число местных сопротивлений.

Участок-задвижка описывается аналогичной формулой

$$\Delta h = SQ^2,$$

где $S$ – коэффициент сопротивления (при открытой задвижке $S$ = 0,07).

Характеристики участков-насосов имеют вид

$$H = H_ф - Q_н^2 S_ф,$$

где $H_ф$ – напор при закрытой на выходном патрубке задвижке, ($Q_н = 0$), $м$; $Q_н$ – подача, $м^3/с$; $S_ф$ – сопротивление насоса.

Согласно описанному алгоритму строится модель с характеристиками, которые, как правило, отличаются от паспортных. Для приближения модели к реальной сети модель идентифицируется согласно экспериментальным исследованиям. То есть меняют сопротивления модели так, чтобы расчеты на ней как можно меньше отличались от экспериментов. Это итеративный процесс и в модели он автоматизирован. Более подробная информация о правилах выполнения идентификации дана в п. 5.2.

## 5.2. Идентификация компьютерной модели с использованием результатов экспериментальных исследований

Модель сети включает систему уравнений, состоящей из:

1. Балансовых соотношений по узлам;
2. Соотношений между давлениями на концах участков;
3. Граничные условия.

Неизвестными являются давления в узлах и расходы на участках. В задачах идентификации неизвестными являются гидравлические сопротивления трубопроводов. Для идентификации сети неизвестные сопротивления находятся на основе теоретических результатов, полученных в третьей главе диссертации. Представленные в п. 4.4 результаты решения задачи (4.111) – (4.115) были использованы для определения коэффициента теплоотдачи $\alpha$. Для этого в программных расчётах было задействовано полученное в диссертации критериальное уравнение (4.131). Далее на основании гидродинамической теории теплообмена найденный коэффициент теплоотдачи $\alpha$ позволил определить коэффициент сопротивления трения по известной формуле

$$\lambda = \frac{2\alpha}{C_p\, \rho\, w^2}. \tag{5.8}$$

Вычисленные по формуле (5.8) коэффициенты трения на всех участках рассматриваемых тепловых сетей позволили выполнить идентификацию моделей, т.е. их максимальное приближение к реальным тепловым сетям. Это позволило сократить время вычислительных процедур на ЭВМ, т.к. коэффициент трения определялся не в результате итеративного расчёта, а по формулам, предложенным в п. 4.5 и на основании гидродинамической теории теплообмена.

В качестве конкретного примера приведем результаты идентификации цирксистемы Тольяттинской ТЭЦ (рис. 5.3). В ее расчетной схеме число узлов составляет 255, а число участков − 224. В результате экспериментальных исследований были получены величины давлений в 69 точках. Таким образом, информация для полной идентификации цирксистемы недостаточна, следовательно, она может быть выполнена лишь с некоторой погрешностью, величина которой определяется числом измерений, а также отклонением этого числа от общего количества узловых точек модели. Для данного конкретного примера точность идентификации составила 5 %.

Результаты идентификации приведены в таблице 1, где ЦН – циркуляционные насосы, ТГ – турбогенераторы. В таблице 2 приведены коэффициенты увеличения гидравлического сопротивления на отдельных участках, расположенных между турбогенераторами, градирнями, циркуляционными насосами, задвижками и другими элементами схемы.

После идентификации модель реальной сети оказывается построенной с любой заданной точностью. Она позволяет выполнять расчеты, задавая различные варианты работы сети, включая реконструкцию и построение новых ее участков.

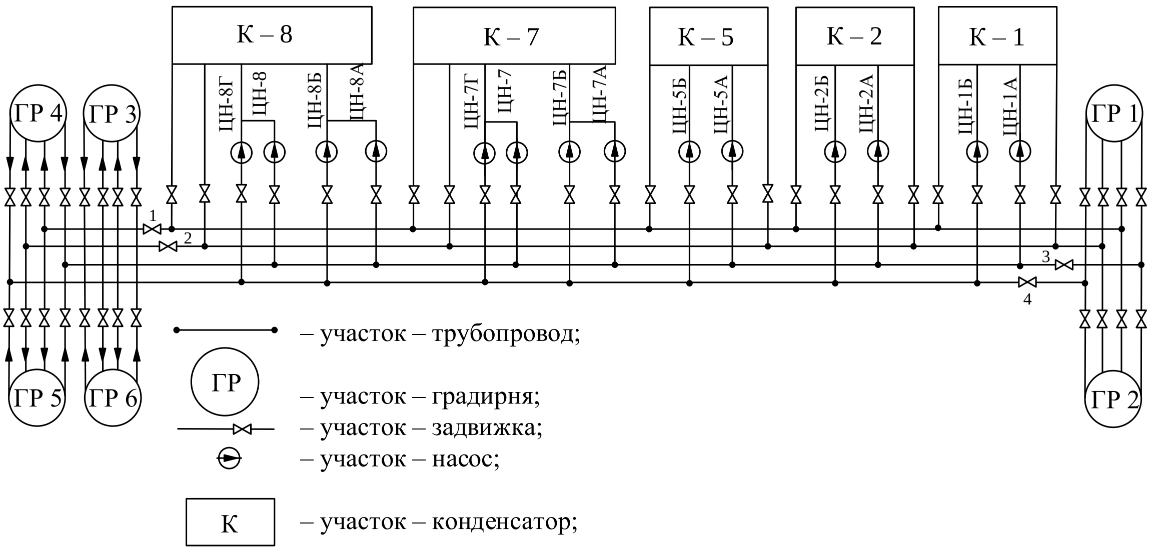



Рис. 5.3. Схема цирксистемы Тольяттинской ТЭЦ

Таблица 5.1

| № п/п | Наименование участка | Коэффициент увеличения гидравлического сопротивления | № п/п | Наименование участка | Коэффициент увеличения гидравлического сопротивления |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ЦН-2-А | 1,0 | 13 | ТГ-2-А | 2,0 |
| 2 | ЦН-2-Б | 1,1 | 14 | ТГ-2-Б | 1,8 |
| 3 | ЦН-5-А | 2,5 | 15 | ТГ-5-А | 2,5 |
| 4 | ЦН-5-Б | 2,5 | 16 | ТГ-5-Б | 9,5 |
| 5 | ЦН-7-А | 1,0 | 17 | ТГ-7-А | 3,0 |
| 6 | ЦН-7-Б | 1,7 | 18 | ТГ-7-Б | 2,5 |
| 7 | ЦН-7-В | 3,5 | 19 | ТГ-7-В | 1,0 |
| 8 | ЦН-7-Г | 2,0 | 20 | ТГ-7-Г | 1,3 |
| 9 | ЦН-8-А | 2,0 | 21 | ТГ-8-А | 1,0 |
| 10 | ЦН-8-Б | 1,0 | 22 | ТГ-8-Б | 2,5 |
| 11 | ЦН-8-В | 1,0 | 23 | ТГ-8-В | 3,0 |
| 12 | ЦН-8-Г | 1,5 | 24 | ТГ-8-Г | 1,0 |

Таблица 5.2

| № п/п | Имя участка | Коэф. увел. сопротивл. | Диаметр внутренний, *мм* | Длина участка, *м* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | г2-г1 | 3.00 | 800 | 92.20 |
| 2 | г2-г3 | 2.00 | 800 | 10.00 |
| 3 | г6-г7 | 13.00 | 800 | 12.00 |
| 4 | г6-г5 | 2.50 | 800 | 63.80 |
| 5 | г5-г4 | 3.00 | 800 | 27.30 |
| 6 | хх34-хх34 | 3.00 | 800 | 10.00 |
| 7 | х7-х5 | 28.00 | 1000 | 15.00 |
| 8 | х5-х1 | 1.00 | 800 | 88.50 |
| 9 | х2-х6 | 1.00 | 800 | 82.00 |
| 10 | х8-х6 | 20.00 | 1000 | 17.50 |
| 11 | х4-х6 | 27.00 | 800 | 6.50 |
| 12 | х3-х5 | 22.00 | 800 | 9.00 |
| 13 | г6-г9 | 9.00 | 800 | 12.00 |
| 14 | г2-г10 | 7.00 | 800 | 15.00 |
| 15 | г12-г13 | 3.00 | 1000 | 63.70 |
| 16 | г13-г2 | 5.00 | 2000 | 140.00 |
| 17 | г11-г14 | 5.00 | 800 | 60.80 |
| 18 | г14-г6 | 4.00 | 2000 | 134.50 |
| 19 | х5-х11 | 1.00 | 2000 | 136.00 |
| 20 | х9-х11 | 14.00 | 1000 | 54.30 |
| 21 | х6-х12 | 1.20 | 2000 | 135.00 |
| 22 | х12-х13 | 1.00 | 2020 | 120.00 |
| 23 | х13-х14 | 1.00 | 2020 | 10.00 |
| 24 | х14-х15 | 1.00 | 2020 | 8.00 |
| 25 | х15-х16 | 1.20 | 2020 | 8.00 |
| 26 | х16-х17 | 1.20 | 2020 | 5.00 |
| 27 | х17-х18 | 1.20 | 2020 | 10.00 |
| 28 | х18-х19 | 1.20 | 2020 | 10.00 |
| 29 | х19-х20 | 1.20 | 2020 | 30.00 |
| 30 | х20-х21 | 1.20 | 1600 | 12.00 |

## 5.3. Разработка компьютерной модели теплосети централизованного теплоснабжения г. Саратова

Для теплосетей централизованного теплоснабжения характерны следующие проблемы: малый располагаемый перепад; высокое давление в обратном канале. Эти проблемы вызываются: большими расходами; малыми диаметрами труб и др. Одним из таких объектов является теплосеть г.

Саратова (рис. 5.4). Выполним анализ полученных для этой сети результатов с целью их возможного применения и для любых других сетей.

Рассмотрим часть теплосети централизованного теплоснабжения г. Саратова (СарТС), запитываемой от двух источников – ТЭЦ-5 и ГРЭС, имеющих общий расход среды 20000 $т/час$. Из них 13000 $т/час$ – ТЭЦ-5 и 7000 $т/час$ – ГРЭС (рис. 5.5).

Особенностью данной сети является различия в высоте расположения (ТЭЦ-5 – 85 $м$, ГРЭС – 32 $м$). Теплосети от них разделены задвижками (рис. 5.5). Важно, что ТЭЦ-5 запитывает абонентов, находящихся на высоте 33 $м$ и, удаленные от ТЭЦ-5 на 16 $км$. В 3 − 5 $км$ от ТЭЦ-5 расположена часть сети на высоте 167 $м$. Для движения теплоносителя давление в обратном канале должно быть не меньше 180 $м$ (устанавливается с помощью подпорных задвижек). Следовательно, перепад давлений в обратной трубе будет $180-33=147$ $м$, то есть давление самого низкого участка составляет 14,7 $кг/см^2$ при допустимом 6 $кг/см^2$. Для его снижения используется понизительная насосная НС-6, которая понижает давление почти на 12 $кг/см^2$.

Отметим, что абонентов на высоте 113 $м$ запитывает ГРЭС (отметка высоты 32 $м$). Разность высот $112-32=81$ $м$. Для доставки теплоносителя здесь требуется использование трех повысительных насосных (НС-4, НС-5, НС-7). Отметим, что, например, повысительная насосная НС-4 повышает давление на 5,5 $кг/см^2$, а подключенная последовательно с ней НС-5 – на 9 $кг/см^2$. Таким образом, общее повышение давления этого каскада насосных составляет $5{,}5+9=14{,}5$ $кг/см^2$, что значительно больше исходного давления (8,5 $кг/см^2$), создаваемого напорными насосами ГРЭС. Отсюда можно заключить, что суммарное давление, которое нужно создавать, чтобы с отметки 32 $м$ (ГРЭС) запитывать потребителей, находящихся на отметке 113 $м$, составляет $8{,}5+5{,}5+9=23$ $кг/см^2$.

Поэтому предлагается рассмотреть схему теплоснабжения, представленную на рис. 5.4. Нагрузку на отметках высот от 30 до 50 $м$ передать ГРЭС, а нагрузку на высотах более 60 $м$ – ТЭЦ-5. Расчеты показали, что такое теплоснабжение возможно лишь при увеличении диаметров труб с 400 $мм$ до 800 $мм$ на участке от К-5109 до К-908/8 (длина 2,5 $км$). При этом мощность понизительных НС-2, НС-3, НС-6 уменьшается в 2 раза, и нет необходимости в использовании всех повысительных насосных.

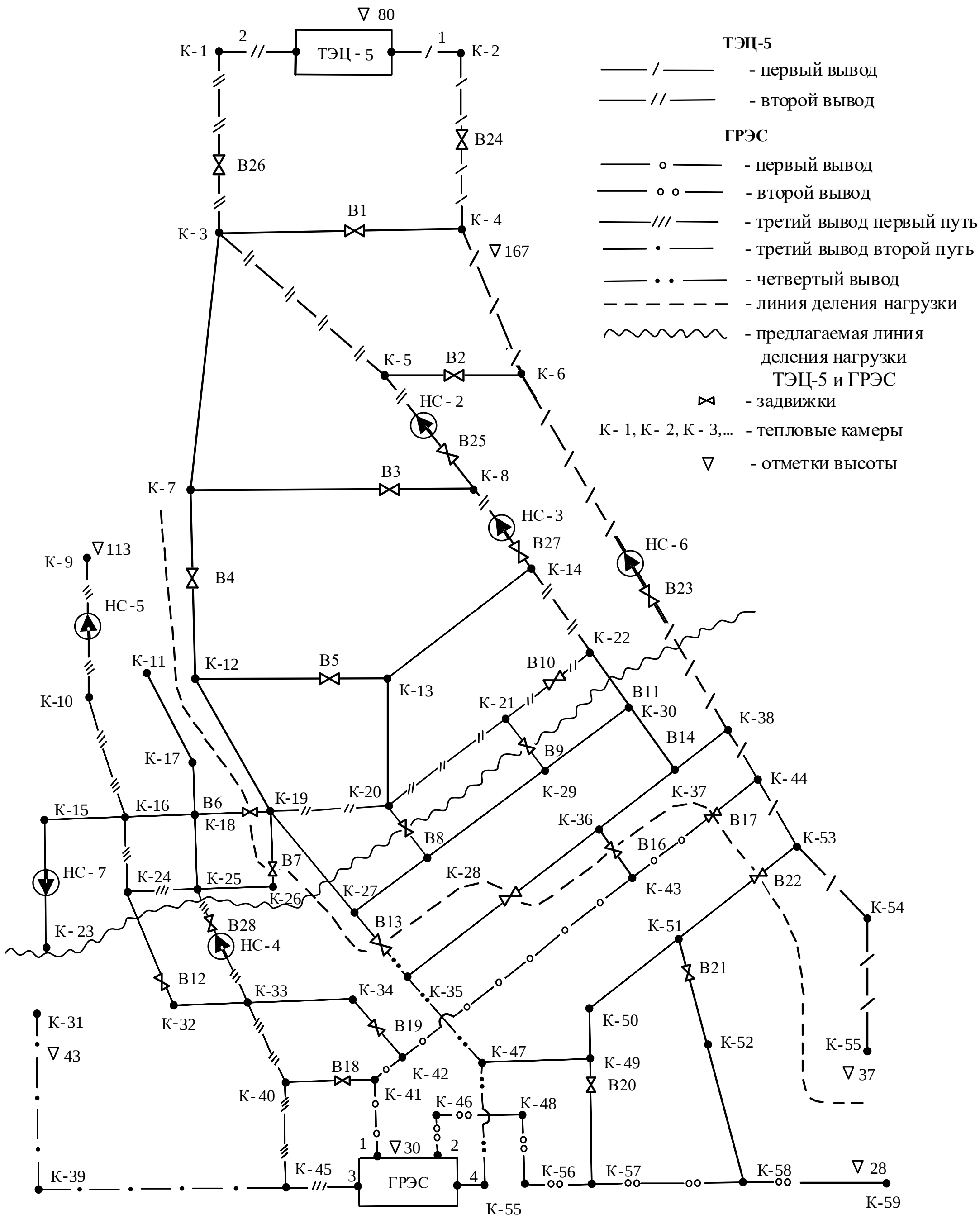


Рис. 5.4. Схема тепловых сетей от ТЭЦ – 5 и ГРЭС

На графиках рис. 5.5, 5.6 даны результаты расчетов СарТС в их реальном режиме работы. Проведем анализ результатов расчетов. Протяженность первого пути первого вывода ТЭЦ-5 составляет 16 *км*, диаметры труб от 1200 *мм* до 300 *мм*, отметки высот от 167 *м* до 33 *м* (см. рис. 5.4). На этом пути расположена понизительная насосная НС-6. Этот путь с помощью закрытых задвижек практически отделен от первого и второго путей пятого вывода ТЭЦ-5, за исключением перемычки от К-122 до К-133б в верхней части сети. Результаты расчетов пьезометрических давлений первого и второго путей первого вывода даны на рис. 5.5, 5.6. Из их анализа видно, что располагаемый перепад давлений вблизи насосной НС-6 находится на уровне минимально допустимой величины (20 $м$) и составляет около 22 $м$. Располагаемый перепад давлений на участке от К-642 до К-642/1, ниже допустимого и составляет 9 $м$. Причина этого в больших потерях напора на участке от К-629 до К-642.

Результаты расчетов приводят к заключению, что теплосеть от ТЭЦ-5 при той нагрузке, которую она запитывает, работает на самом нижнем пределе своих возможностей и любое, даже незначительное повышение нагрузки в этой сети, приведет к невозможности ее функционирования из-за пересечения кривых давления прямых и обратных труб и повышенного давления в обратных трубах. Такое состояние вызывается следующими основными причинами:

1. Анализ реального состояния теплосети показывает, что без выполнения соответствующих мероприятий, какое-либо увеличение нагрузки не представляется возможным практически в любой ее части. Основная причина сложившегося положения заключается не в физическом состоянии сети, а в ее неоптимальной настройке.

1.1. Для нагрузки от ТЭЦ-5, расположенной до насосных НС-2 и НС-6, главной причиной малого располагаемого перепада является малый напор, создаваемый на выходе из ТЭЦ-5, что объясняется относительно низким ее расположением (85 $м$) по сравнению с наиболее возвышенными участками (до 167 $м$) в районе перемычки между первыми путями первого и пятого выводов. Несмотря на то, что располагаемый перепад давлений на выходе из ТЭЦ-5 составляет $15{,}5 - 5{,}5 = 10\ кг/см^2$, ввиду необходимости повышения напора в обратных трубах для прохождения возвышенности, он составляет на первом пути первого вывода около 6,2 $кг/см^2$ (где $10 - 6{,}2 = 3{,}8\ кг/см^2$ теряется на регулирующем клапане обратного трубопровода), а на первом и втором путях пятого вывода – около 4,2 $кг/см^2$ (где $10 - 4{,}2 = 5{,}8\ кг/см^2$ теряется также на регулирующем клапане). В связи с чем, радикальным выходом из этой ситуации может быть только повышение давления в прямых трубопроводах на выходе из ТЭЦ-5. Альтернативой повышения давления на выходе сетевых насосов ТЭЦ-5 может быть увеличение диаметров трубопроводов на участке первого пути первого вывода от ТЭЦ-5 до камеры П.802 (см. рис. 5.5), длиной около 5 $км$ (на этом участке в настоящее время проложен трубопровод диаметром 1200 $мм$, расположенный параллельно существующему).

2. Наличие искусственных сопротивлений течению среды в виде большого числа закрытых задвижек как в теплосети, питаемой от ТЭЦ-5 (12 закрытых задвижек), так и в теплосети от ГРЭС (6 закрытых задвижек).

3. Одним из перспективных путей существенного улучшения гидравлического режима теплосети является рокировка нагрузки, заключающаяся в передаче ТЭЦ-5 всех потребителей, расположенных на возвышенных участках местности, а ГРЭС – на пониженных. На компьютерной модели можно подобрать такое перераспределение нагрузки, когда на объектах, запитываемых от ГРЭС, появляется возможность остановки всех повысительных насосных, а на объектах, относящихся к ТЭЦ-5, возможно достичь уменьшения мощности имеющихся понизительных насосных почти в два раза.

4. Диаметры трубопроводов при существующем режиме работы в общем и целом вполне достаточны. Исключение составляют лишь участок первого пути первого вывода ТЭЦ-5 (от К-642 до К-642/1) и участок первого пути третьего вывода ГРЭС (от К-311/41 до К-311/510. По диаметрам трубопроводов более проблемным является участок от ТЭЦ-5 до камеры П-801 первого пути первого вывода. Как уже указывалось выше, потеря напора в прямом трубопроводе составляет здесь около 2 $кг/см^2$. Важность этого участка в том, что увеличение диаметров (или установка дополнительного нового трубопровода) позволяет улучшить ситуацию во всей теплосети от ТЭЦ-5, а не на каком-то ее отдельном участке. Это связано с тем, что увеличению диаметров здесь подлежит главный ствол «дерева» теплосети.

Проведем анализ теплосети, запитываемой от ГРЭС. Расчеты пьезометрических давлений даны на рис. 5.7 – 5.11. Данные расчетов первого пути первого вывода представлены на рис 5.7. Видно, что от К-112 до К-112/12 располагаемый перепад оказывается недостаточным (около 16 – 18 $м$). На рис. 5.8 даны эпюры пьезометрических напоров на втором пути первого вывода ГРЭС. Из них следует, что от К-110 до К-707 располагаемый перепад находится на пределе допустимой величины (16 – 19 $м$). На 1-ом пути 2-го вывода (рис. 5.9) на участке от К-217 до К-230/3 располагаемый перепад изменяется от 18 до 11 $м$, что значительно ниже допустимой величины. На третьем пути первого вывода (на рис. 5.10) недостаточный перепад давлений (около $12-14$ $м$) имеет место от К-301/51 до К-311/55. На втором пути 3-го вывода работают две повысительные насосные НС-4, НС-5. Необходимость их использования связана с тем, что ГРЭС, расположенная на высоте 32 $м$, запитывает абонентов, находящихся на высоте 113 $м$. Результаты расчетов этого пути даны на рис. 5.11. Их анализ показывает, что насосная НС-4 повышает давление на 54 $м$, прокачивая при этом 2901 $т/час$ жидкости. Повышение давления насосной НС-5 составляет 26 $м$ при расходе жидкости 663 $т/час$. Особо отметим, что на участке от К-334/4 до насосной НС-5 наблюдается пересечение эпюр давлений прямой и обратной магистралей, что приводит к недостаточной циркуляции теплоносителя у потребителей этой зоны. На третьем пути 3-го вывода от К-338 до К-344/1 располагаемый перепад близок к критическому (около 7 $м$) по наличию циркуляции у потребителя. Причина – недостаточный напор, создаваемый насосной НС-4. На большей части первого и второго путей четвертого вывода располагаемый перепад давлений находится на пределе минимально допустимого значения (около 19 $м$). Анализируя кольца, относящиеся к ГРЭС (кольца 6 – 18), можно также отметить наличие проблем, связанных с недостаточным располагаемым перепадом между прямой и обратной магистралями.

Из анализа общей ситуации в теплосети от ГРЭС, можно заметить, что на большей части путей и выводов главной проблемой является малый располагаемый перепад давлений. Основные причины такого положения следующие:

1. Искусственные сопротивления, созданные в сети от ГРЭС путём перекрытия задвижек в различных точках теплосети, общее количество которых 6 штук. Как показали расчеты на модели, задвижки перекрыты на участках, где наблюдаются достаточно большие расходы теплоносителя, в случае, когда задвижки открыты. В связи с чем, всякое перекрытие трубопроводов приводит к тому, что теплоноситель перемещается до потребителя по менее выгодным путям и, следовательно, с бóльшими затратами энергии на перемещение, что приводит к большим потерям напора. В случае, когда все задвижки открыты, вода течёт по пути, где она встречает наименьшее сопротивление, и, следовательно, поступает до потребителя с наименьшими потерями напора (с наибольшим располагаемым перепадом давлений).

2. Недостаточный располагаемый перепад, создаваемый насосами ГРЭС, составляющий $8{,}5-3{,}4=5{,}1\ кг/см^2$.

Расчёты на модели показали неэффективность распределения нагрузки между ТЭЦ-5 и ГРЭС, когда потребители, расположенные на пониженных участках местности (отметка высот 30 – 50 $м$), передаются ТЭЦ-5 (отметка высоты 85 $м$), а потребители повышенных участков (60 – 113 $м$), запитываются от ГРЭС (отметка высоты 32 $м$). Такая схема работы приводит к необходимости использования каскада трех повысительных (в теплосетях ГРЭС) и трех понизительных (в теплосетях ТЭЦ-5) насосных.

В диссертации представлены результаты исследований работы СарТС, когда нагрузка на высотах 30 – 50 $м$ передается ГРЭС, а на высотах более 60 $м$ – ТЭЦ-5 (см. рис. 5.4). Исследования показали, что для работоспособности схемы необходимо реконструировать трубопроводы пятого вывода первого пути (от К-5109 до К-908/8) с диаметров 400 *мм* до 800 *мм* (длина 2,5 км).

Здесь исключается работа всех повысительных и одной понизительной насосной. Мощность двух оставшихся понизительных насосных уменьшается в 2 раза.

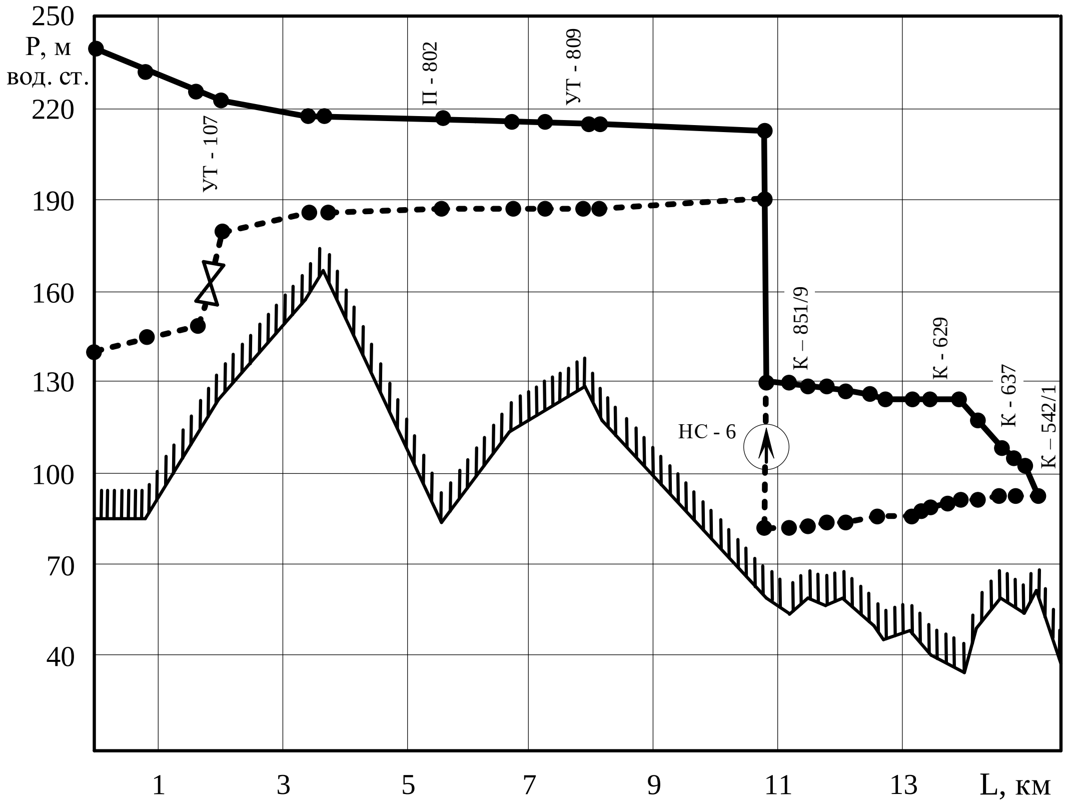



Рис. 5.5. Первый вывод первый путь ТЭЦ-5.

— прямой трубопровод; – обратный трубопровод; – отметка земли; – понизительная насосная; УТ, П, К – тепловые камеры; – задвижка

Расчеты этого варианта даны на рис. 5.12 – 5.14. Видно, что теплосеть будет вполне работоспособна и даже с определенным запасом по принятию дополнительной перспективной нагрузки (особенно это характерно для ГРЭС). Отметим, что в результате такого перераспределения потребителей нагрузка на ТЭЦ-5 возрастает примерно на 1000 $т/час$ при уменьшении на эту же величину нагрузки ГРЭС.

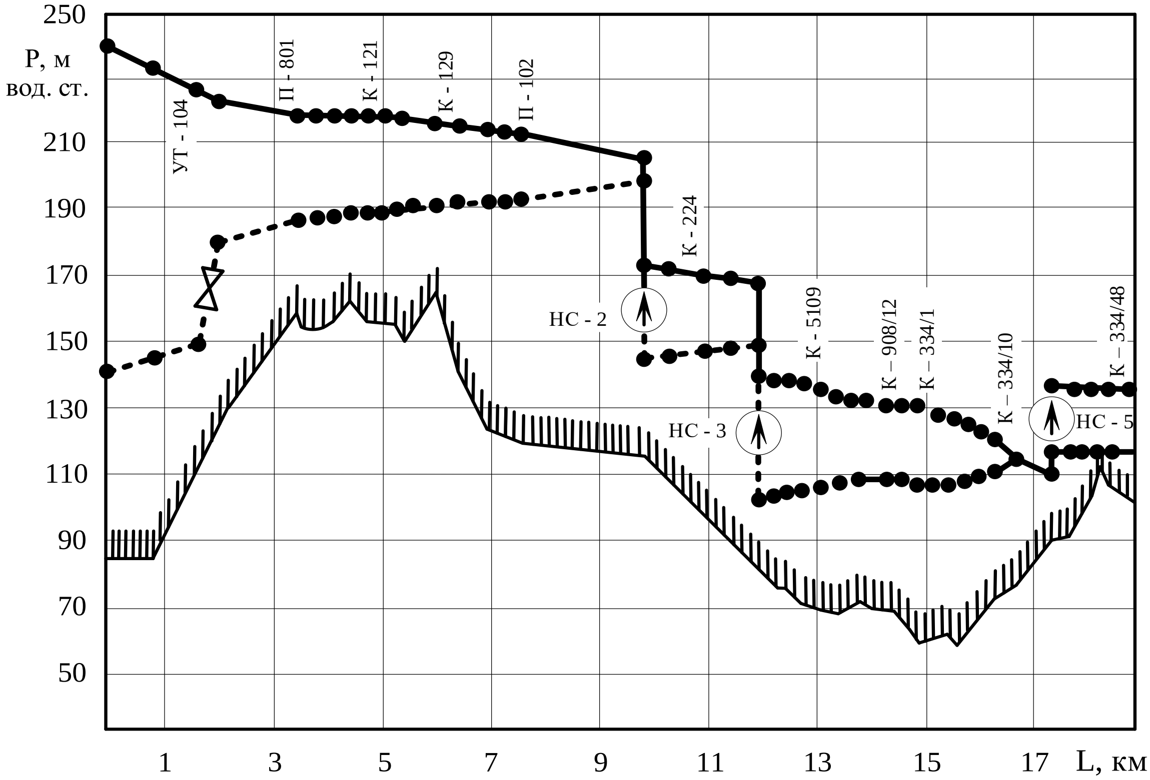



Рис. 5.6. Первый вывод второй путь ТЭЦ-5

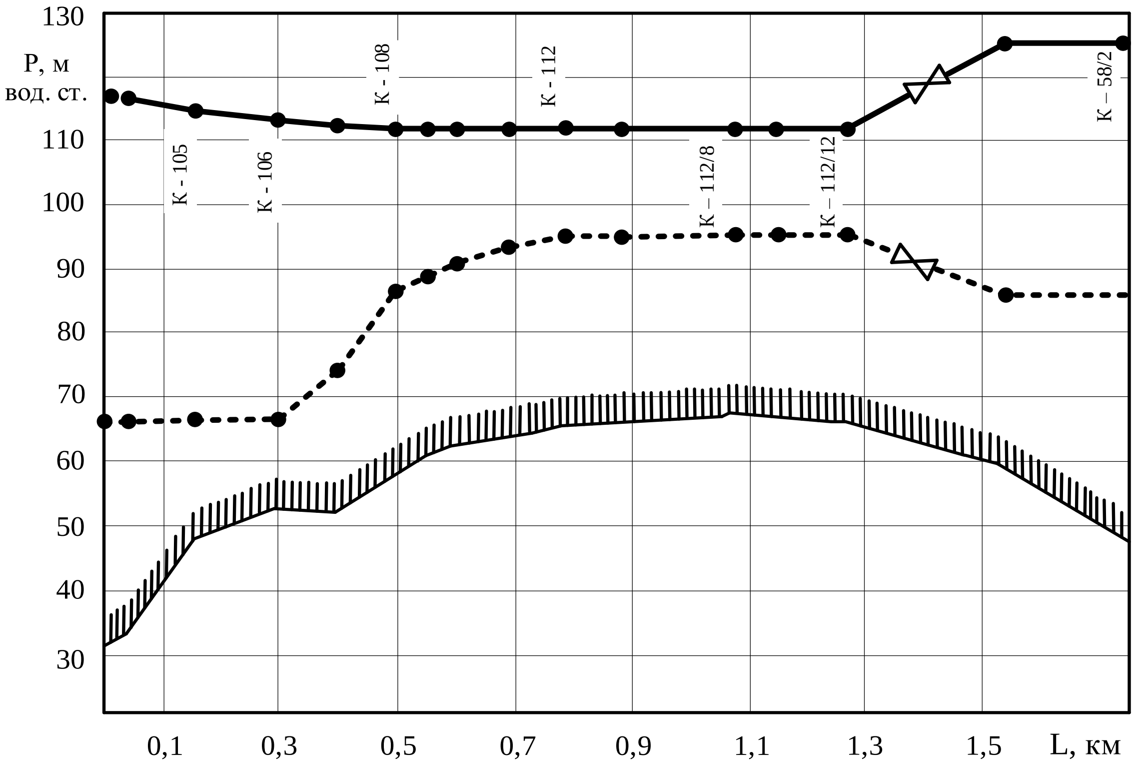



Рис. 5.7. Первый вывод первый путь ГРЭС

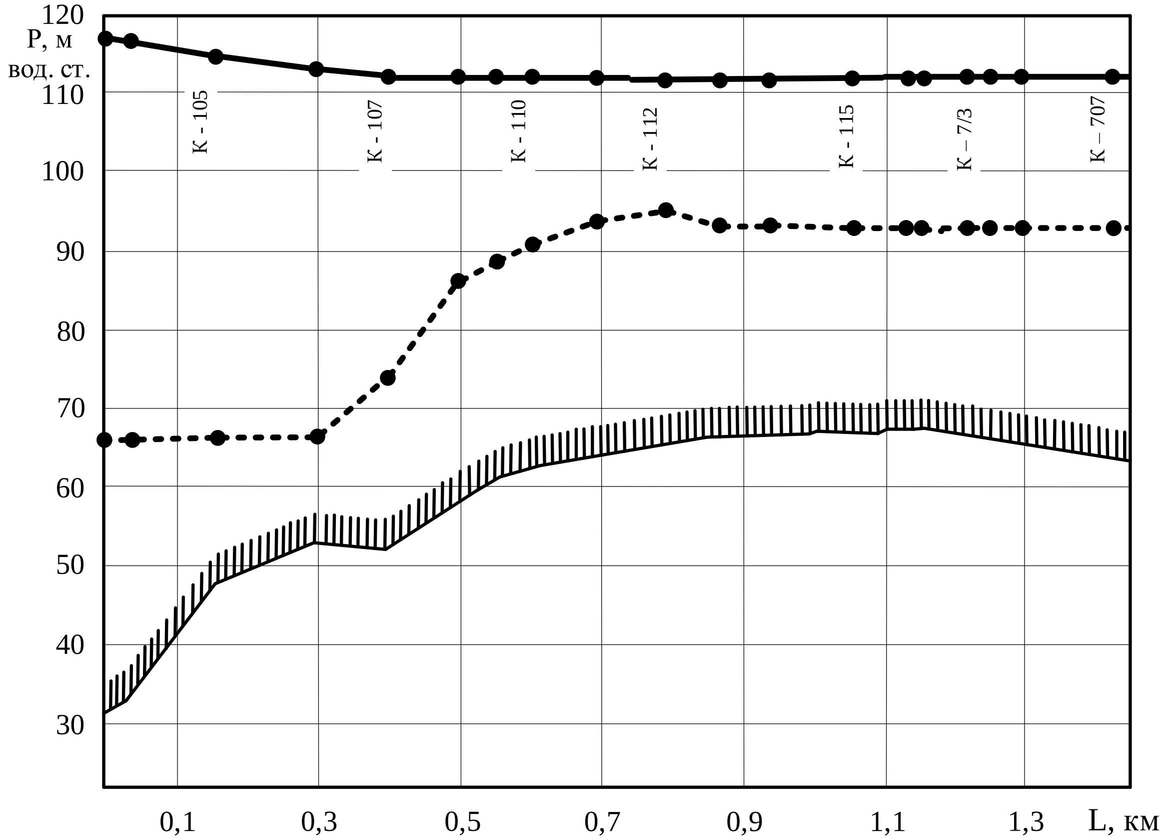



Рис. 5.8. Первый вывод второй путь ГРЭС

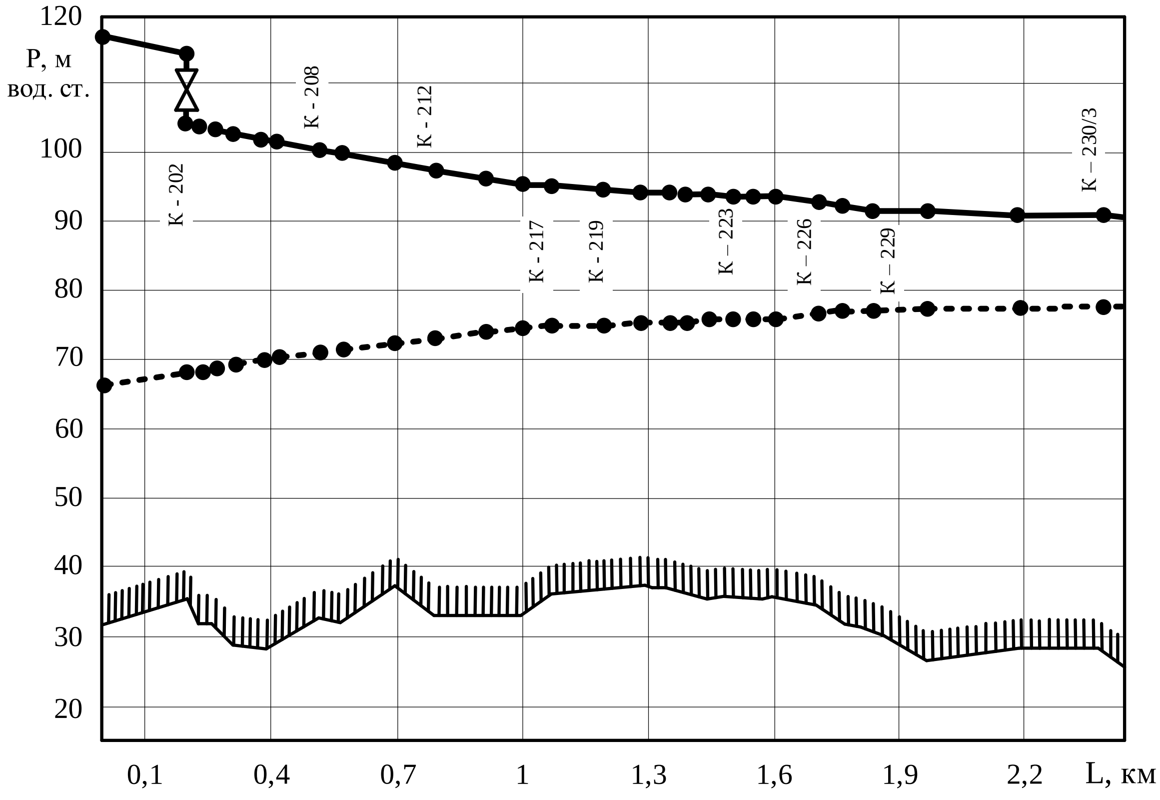



Рис. 5.9. Второй вывод первый путь ГРЭС

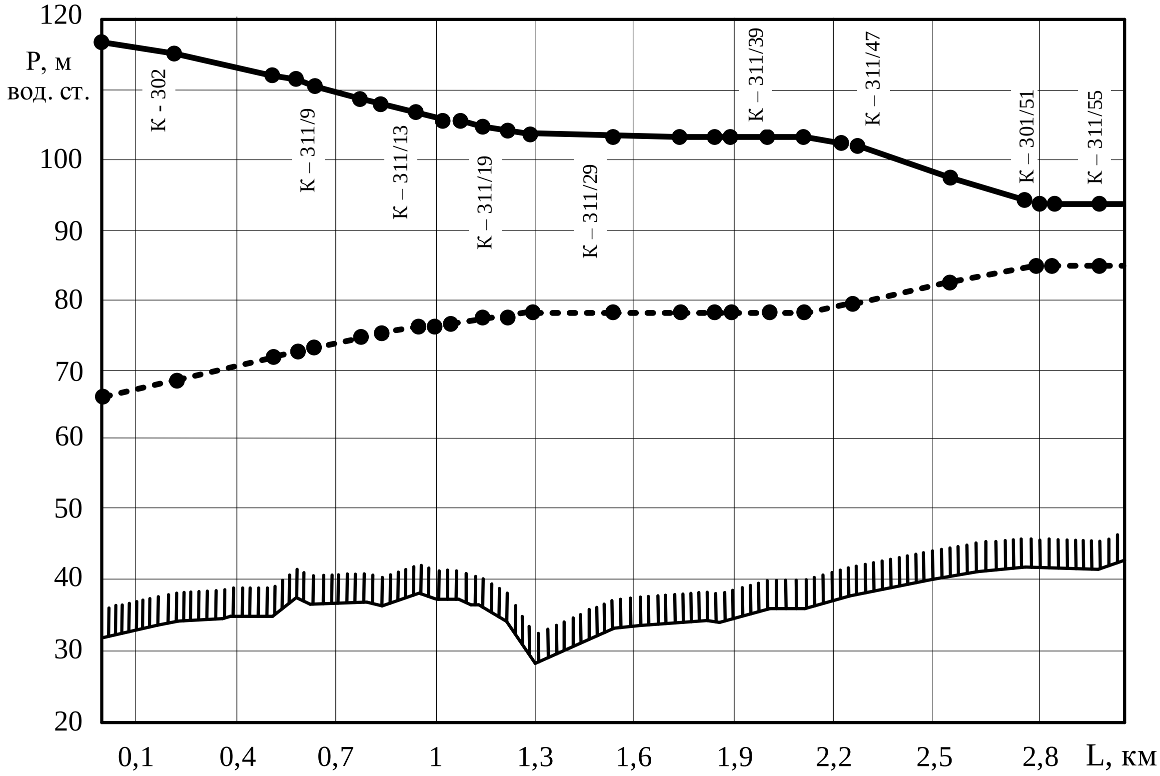



Рис. 5.10. Третий вывод первый путь ГРЭС

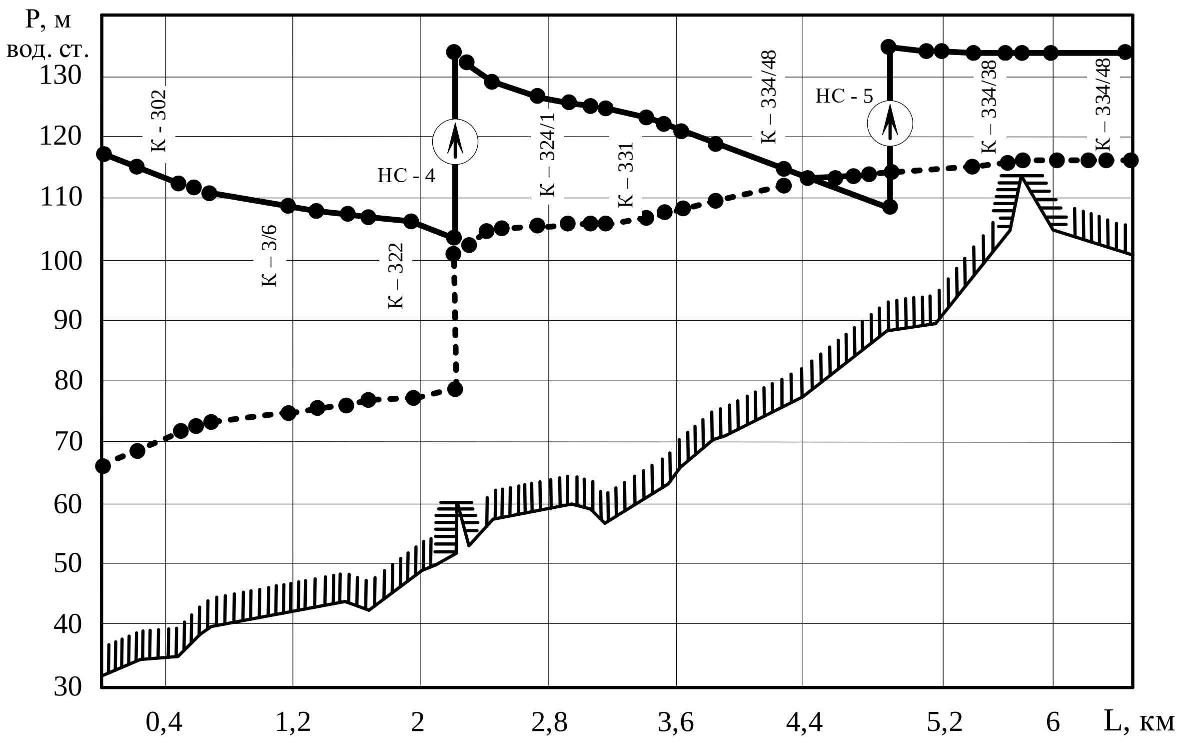



Рис. 5.11. Третий вывод второй путь ГРЭС

Основные выводы и рекомендации

1. Основные проблемы Саратовских тепловых сетей связаны со значительным различием отметок высот расположения источников теплоты и ее потребителей (максимальная 167 *м*, минимальная 32 *м*). При этом один источник (ТЭЦ-5) находится на возвышенном участке местности (85 *м*), а второй (ГРЭС) – на пониженном (32 *м*). Кроме того, теплоноситель от ТЭЦ-5, прежде чем он будет доставлен потребителю, должен быть перемещен через гору высотой 167 *м* ( 3 – 5 *км* от ТЭЦ-5). В связи с чем, давление в обратной трубе по условиям сохранения циркуляции должно быть около 180 *м*, а это эквивалентно тому, что ТЭЦ-5 находится на высоте 167 *м*, а давление 180 *м* по существу является базовым для его обратного трубопровода.

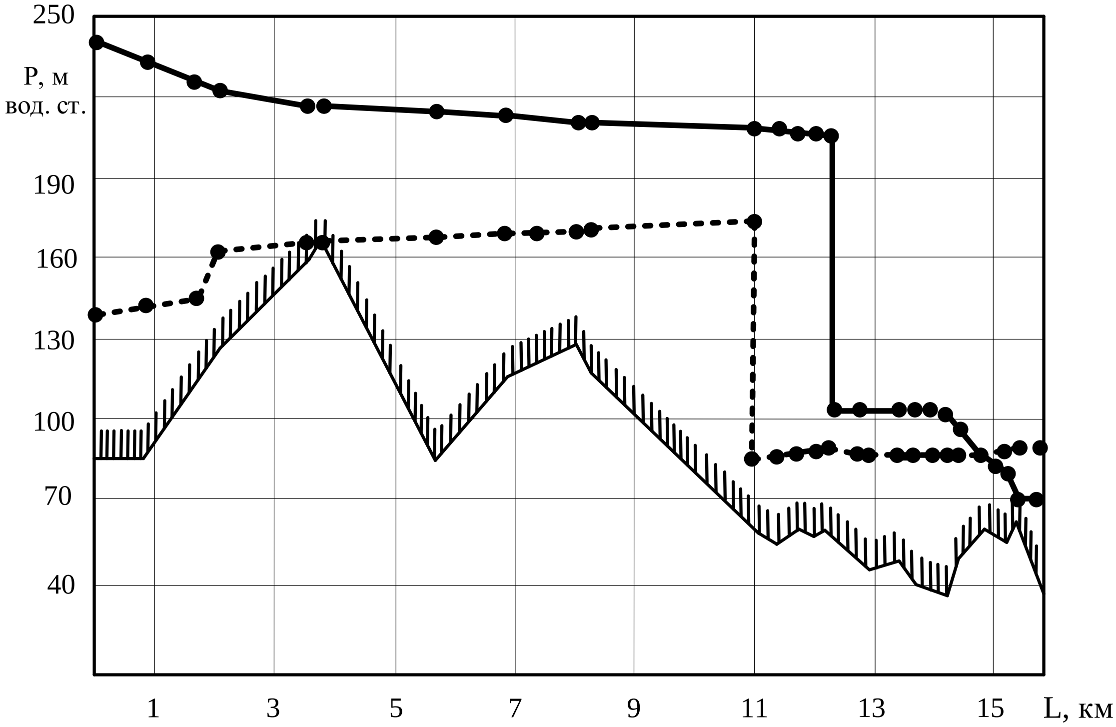



Рис. 5.12. Первый вывод первый путь ТЭЦ-5. Новый вариант границ раздела

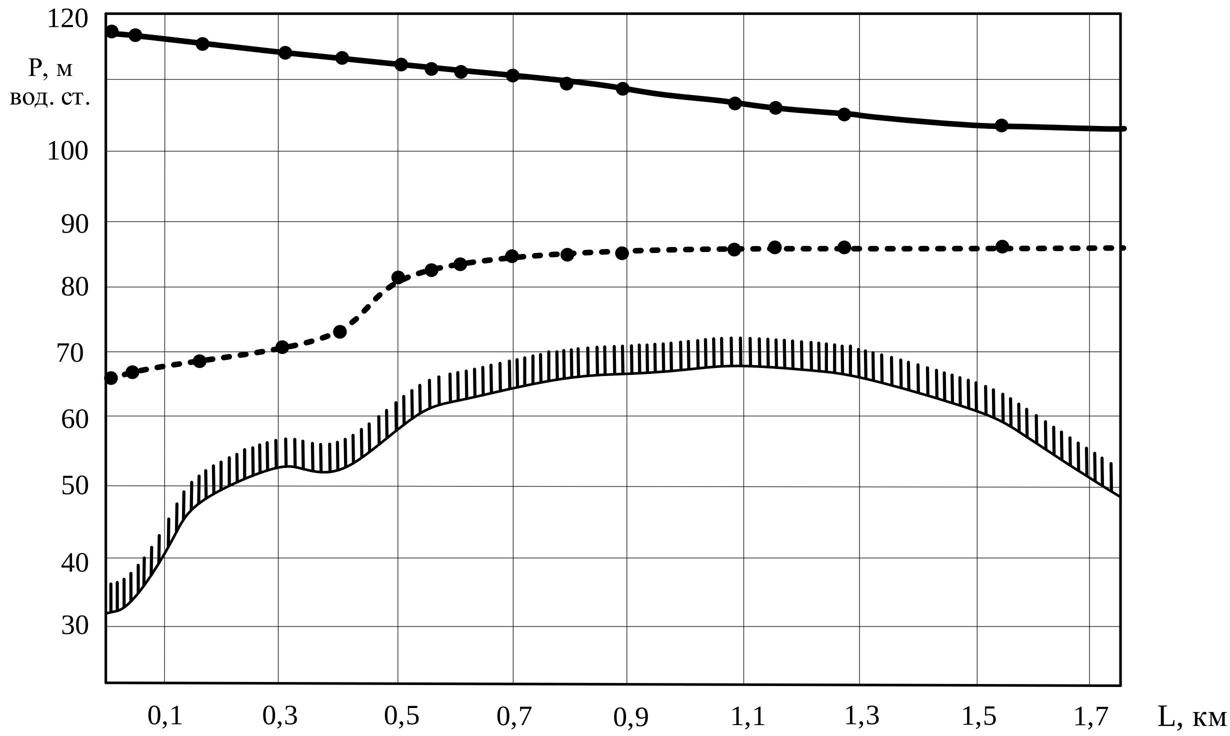



Рис. 5.13. Первый вывод первый путь ГРЭС. Новый вариант границ раздела

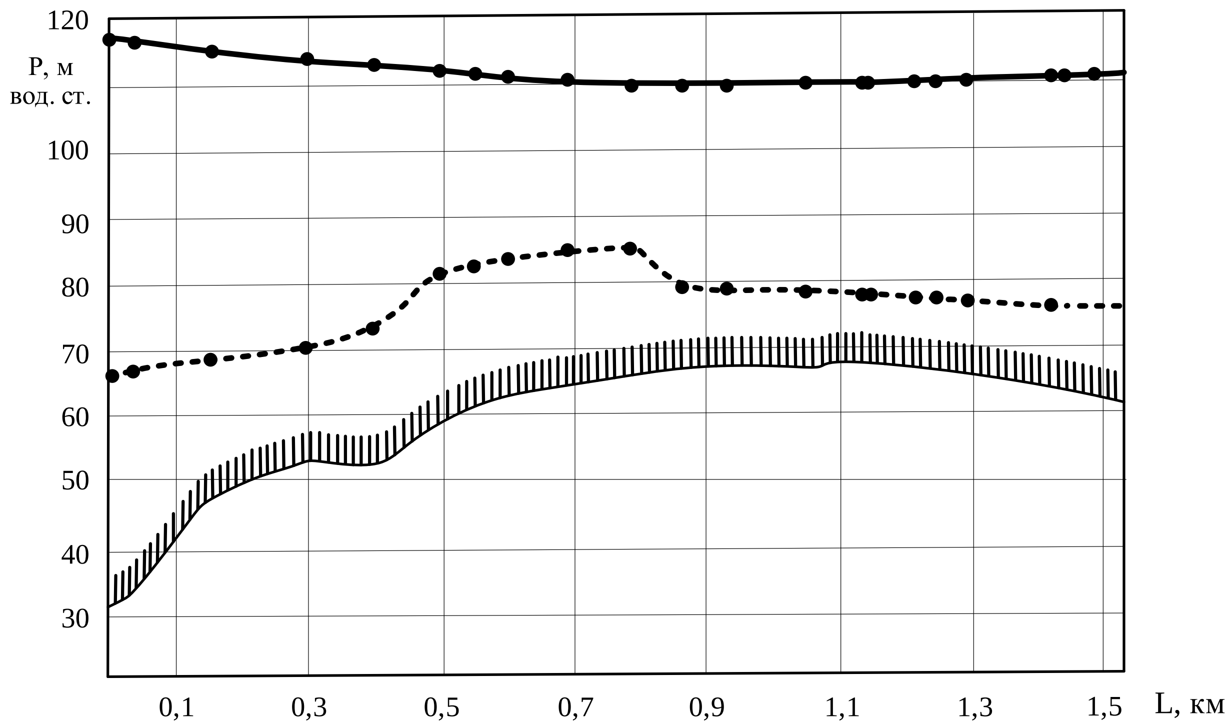



Рис 5.14. Первый вывод второй путь ГРЭС. Новый вариант границ раздела

Отсюда следует, что давление в обратных трубах самых низких участков (33 $м$) будет составлять $180-33=147$ $м$. Так как давление в обратном трубопроводе не должно превышать 60 $м$, то его избыток

$147-60=87\ м$ необходимо погашать с помощью понизительных насосных. При этом для уменьшения избыточного давления в прямом трубопроводе используются дросселирующие задвижки.

2. Анализ реального состояния теплосети показывает, что без выполнения соответствующих мероприятий какое-либо увеличение нагрузки не представляется возможным практически в любой ее части. Основная причина сложившегося положения заключается не в физическом состоянии сети, а в её неоптимальной настройке.

3. Для нагрузки ТЭЦ-5, расположенной до понизительных насосных НС-2 и НС-6, главной причиной недостаточного располагаемого перепада является малый напор, создаваемый на выходе из ТЭЦ-5, что объясняется относительно низким ее расположением (85 $м$) по сравнению с наиболее возвышенными участками (до 167 $м$) в районе перемычки между первыми путями первого и пятого выводов (от камеры К-122 до УТ-802). Несмотря на то, что располагаемый перепад давлений на выводе из ТЭЦ-5 составляет $15{,}5-5{,}5=10\ кг/см^2$, на самом деле, ввиду необходимости повышения давления в обратных трубопроводах для прохождения возвышенности, он составляет на первом пути первого вывода около 6,2 $кг/см^2$ (где $10-6{,}2=3{,}8\ кг/см^2$ теряется на регулирующем клапане обратного трубопровода), а на первом и втором путях пятого вывода – около 4,2 $кг/см^2$ (где $10-4{,}2=5{,}8\ кг/см^2$ теряется также на регулирующем клапане). В связи с чем, радикальным выходом из этой ситуации может быть только повышение давления в прямых трубопроводах на выходе из ТЭЦ-5. Альтернативой повышения давления на выходе сетевых насосов ТЭЦ-5 может быть установка нового трубопровода от ТЭЦ-5 до камеры П-802 (рис. 5.5) длиной около 4,5 $км$ и диаметром 1200 $мм$.

4. На большей части тепловыводов наблюдается недостаточный располагаемый перепад давлений. Причины такого положения следующие:

− искусственные сопротивления, созданные в сети от ГРЭС путем перекрытия задвижек, общее количество которых 6 штук. Как показали расчеты, задвижки перекрыты на участках, где наблюдается достаточно большие расходы теплоносителя в случае, когда задвижки открыты. В связи с чем, всякое перекрытие трубопроводов приводит к перемещению теплоносителя до потребителя по менее выгодным путям и, следовательно, с наибольшими затратами энергии на перемещение, что приводит к большим потерям напора.

− недостаточный располагаемый перепад давлений, создаваемый насосами ГРЭС, который составляет $8{,}5-3{,}4=5{,}1\ кг/см^2$.

5. Анализ результатов расчетов с учетом дополнительной нагрузки на ТЭЦ-5 (около 3000 $т/час$) показывает, что все пути всех выводов ТЭЦ-5 оказываются в целом работоспособными, но с близким к минимально допустимому (20 $м$) располагаемому перепаду давлений перед понизительными насосными НС-2 (около 18 $м$), НС-6 (около 22 $м$), а также на участке от К-303 до К-318 А второго пути пятого вывода (около 18 $м$). Эти проблемы могут быть устранены установкой дополнительного трубопровода (Ø 1200 $мм$) от ТЭЦ-5.

6. Анализ результатов расчетов теплосетей от ГРЭС с учетом дополнительной нагрузки в количестве около 1000 $т/час$ показывает, что основной проблемой почти на всех путях является недостаточный располагаемый перепад давлений. Радикальным для всей сети от ГРЭС было бы решение о повышении давления на 3 $кгс/см^2$ на всех выводах ГРЭС. Анализ результатов расчета позволяет заключить, что единственной проблемой, которую требуется в данном случае решать, является увеличение диаметров трубопроводов (с Ø 200 $мм$ до Ø 400 $мм$) на участке от К-225 до К-230 первого пути 2-го вывода (длина участка около 600 $м$). Все остальные пути всех выводов оказываются полностью работоспособными с возможностью принятия еще большего количества дополнительной перспективной нагрузки. Отметим, что в данном случае будет использована лишь небольшая часть (примерно 1/4) существующей мощности повысительной насосной НС-4.

## 5.4. Разработка проекта объединения теплосетей ТЭЦ Волжского автомобильного завода и Тольяттинской ТЭЦ

Компьютерные модели могут быть использованы при разработке проектов новых сетей. При разработке проекта задаются геометрические условия (длина труб, отметки высот и проч.) и параметры среды (расход, давление и проч.). Диаметры труб и расположение оборудования находятся из расчетов на модели.

Рассмотрим пример проектирования Нового вывода, объединяющего теплосети от Тольяттинской ТЭЦ и от ТЭЦ ВАЗ. Принципиальная схема объединенной теплосети централизованного теплоснабжения ТЭЦ ВАЗ и Тольяттинской ТЭЦ дана на рис. 5.15. Длина трех трубопроводов (один из них резервный), объединяющих теплосети, составляет 12 $км$, диаметр труб 1200 $мм$, расход среды 10000 $т/час$.

Новый вывод обеспечит теплоснабжение потребителей П3 (4575 $т/час$ – текущая и 5800 $т/час$ – перспективная нагрузка) 3-го вывода и части потребителей П2 (3000 $т/час$) 2-го вывода ТЭЦ ВАЗ, 2-й магистрали Нового вывода ТоТЭЦ (1573 $т/час$).

Технические условия на проектирование:

Новый вывод ТоТЭЦ присоединить к сетям ТЭЦ ВАЗ в точке 23 и 29 (рис. 5.15), (см. также перемычку АВ на рис. 5.16).

Давление в точке 23 не может быть менее 11 $кгс/см^2$.

Подпитку абонентов П3 осуществлять через перемычку 16 – 28 (диаметром 1000 $мм$).

Давление в точке 16 не может превышать 7 $кгс/см^2$.

Давление в точке 34 должно составлять 1,5 – 3,5 $кгс/см^2$.

В точках 15 и 27 давление должно быть выше 4,5 $кгс/см^2$.

Расход должен составлять 10000 $т/час$ (диаметры трубопроводов 1200 $мм$).

На выходе сетевых насосов ТоТЭЦ давление не может быть выше 16 $кгс/см^2$.

Для выполнения технических условий необходимо найти давления и расходы среды на всех

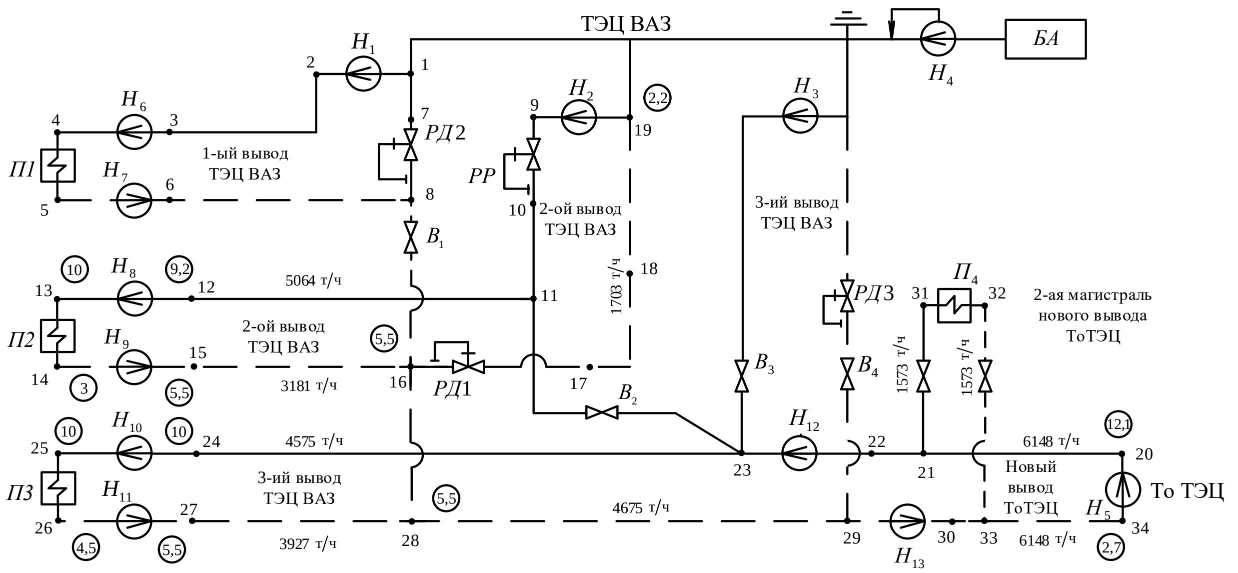



Рис. 5.15. Схема присоединения нового вывода ТоТЭЦ к тепловым сетям ТЭЦ ВАЗ

ее участках. Для выполнения задачи была создана компьютерная модель и выполнены исследования для трех режимов, отличающихся нагрузкой третьего вывода ТЭЦ ВАЗ.

1. Существующая.
2. Перспективная.
3. Минимальная.

Расчет с существующей нагрузкой был выполнен на основе реального режима работы теплосети ТЭЦ ВАЗ. Расходы в прямом трубопроводе 3-го вывода ТЭЦ ВАЗ составлял 4575 $т/час$, в обратном – 3097 $т/час$. Расход на ГВС был 1478 $т/час$. Соответствующие расходы по 2-му выводу были 5064 $т/час$, 3181 $т/час$, 1883 $т/час$.

Подпитка контура Нового вывода ТоТЭЦ равна водоразбору 3-его вывода ТЭЦ ВАЗ (1478 $т/час$).

Давление в обратной магистрали 2-го вывода ТЭЦ ВАЗ составляло 2,2 $кгс/см^2$.

Давление после насосов ПНС-2 и ПНС-3 составляло 10 $кгс/см^2$.

В обратном трубопроводе перед ПНС-2 давление составляло 3,0 $кгс/см^2$, а перед ПНС-3 – 4,5 $кгс/см^2$.

Общий расход в прямом трубопроводе Нового вывода ТоТЭЦ был равен 6148 $т/час$.

Главным параметром регулирования является давление в точке 34, которое должно составлять 1,5 – 3 $кгс/см^2$, поддержание которого обеспечивается регулятором РД1, размещенного на обратной магистрали 2-го вывода ТЭЦ ВАЗ.

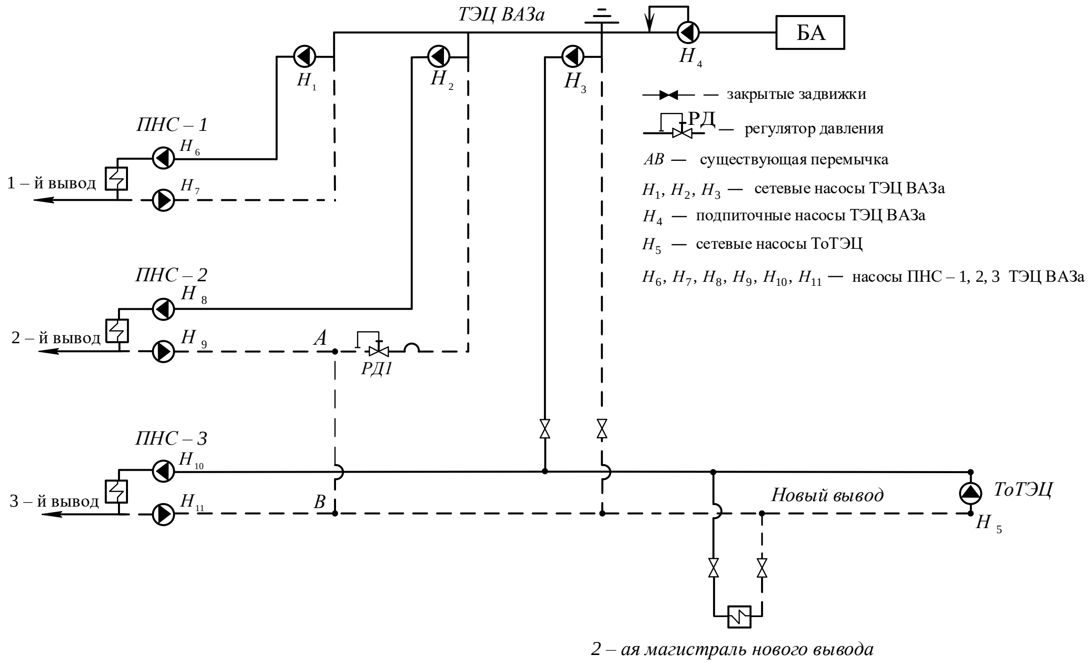



Рис. 5.16. Схема подсоединения Нового вывода ТоТЭЦ к теплосетям ТЭЦ ВАЗ

Расчетные результаты представлены на рис. 5.17. И, в частности показали, что для давления в точке 34 2,5 $кгс/см^2$ РД1 должен поддерживать давление в 5,5 $кгс/см^2$, что не выходит за пределы давления 7 $кгс/см^2$ в точке 17 (см. рис. 5.15), заданного техническим заданием.

Давление перед 3-им выводом ТЭЦ ВАЗ (после ПНС-3) на требуемом (10 $кгс/см^2$) уровне обеспечивается ТоТЭЦ.

Работа обратных труб 2-го и 3-го выводов обеспечивается понизительными насосами ПНС-2 и ПНС-3.

На рис. 5.18 – 5.20 представлены пьезометрические графики, полученные путем расчёта на компьютерной модели для различных путей тепловыводов. Пути обозначены контрольными точками, указанными на рисунках 5.15, 5.17. Анализ результатов позволяет заключить, что на участке 17 – 19 обратной трубы 2-го вывода ТЭЦ ВАЗ (см. рис. 5.19) давление снижается до значений (около 10 $м$) создающих опасность вскипания жидкости. Поэтому рекомендуется давление в точке 19 повысить до 30 – 35 $м$.

Расчеты перспективного увеличения нагрузки на 3-м выводе ТЭЦ ВАЗ выполнялись при исходных данных: расход воды в прямой магистрали 3-го вывода ТЭЦ ВАЗ был равен 5800 $т/час$, а в обратном – 3972 $т/час$; расход на ГВС третьего вывода ТЭЦ ВАЗ 1873 т/ч (подпитка контура Нового вывода ТоТЭЦ равнялась расходу на ГВС -3-го вывода ТЭЦ ВАЗ, то есть 1873 $т/час$). Учитывая подачу воды на 2-ую магистраль от Нового вывода ТоТЭЦ (1573 $т/час$), общий расход Нового вывода ТоТЭЦ был при этом 7373 $т/час$.

Исходные данные и результаты расчетов режима с увеличенной нагрузкой даны на рис. 5.21. Из их анализа следует, что для обеспечения на входе в подпорные насосы ТоТЭЦ давления 2,5 $кгс/см^2$ РД1 должен быть настроен на давление 6,6 $кгс/см^2$, что не превышает заданных тех.условием 7 $кгс/см^2$.

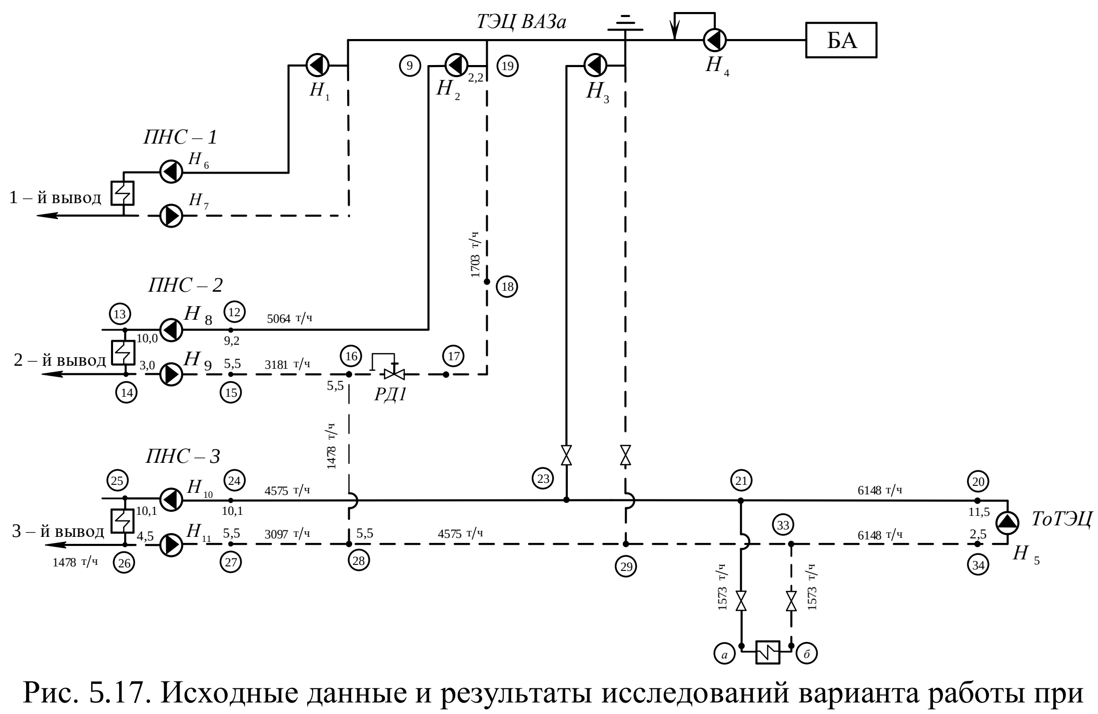



Рис. 5.17. Исходные данные и результаты исследований варианта работы при существующей нагрузке

На рис. 5.22, 5.23 представлены графики, из которых видно, что давления не превышают проектных величин, за исключением давления на участке 17 – 19 (рис. 5.23), которое уменьшается до 10 $м$. Это объясняется уменьшением расхода через участок 10 – 11 (см. рис. 5.15) вследствие повышения расхода на ГВС третьего вывода ТЭЦ ВАЗ.

Проблема возникает также при уменьшении расхода на новом выводе ТоТЭЦ, так как при минимальной нагрузке давление настройки РД1 может быть ниже минимально допустимой 4,5 $кгс/см^2$, что имеет место при снижении нагрузки на 3-ем выводе ТЭЦ ВАЗ до 3000 $т/час$.

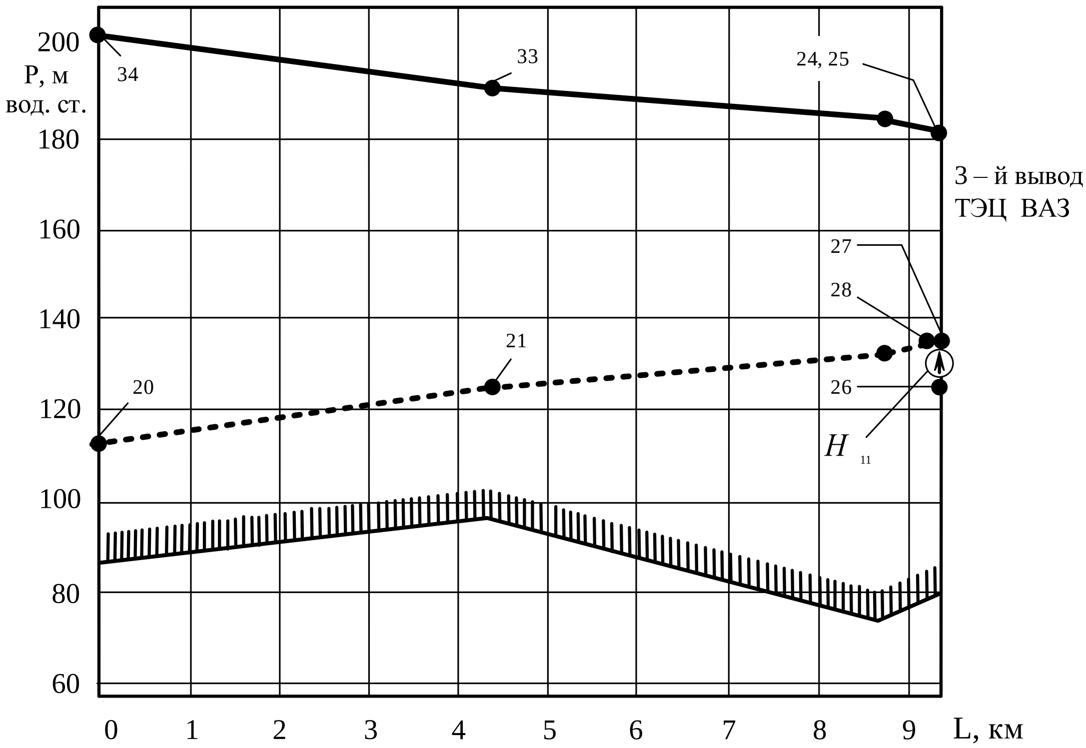



Рис. 5.18. Давления по линии 34-33-24-25 и по линии 20-21-28-27-26 (рис. 5.17)

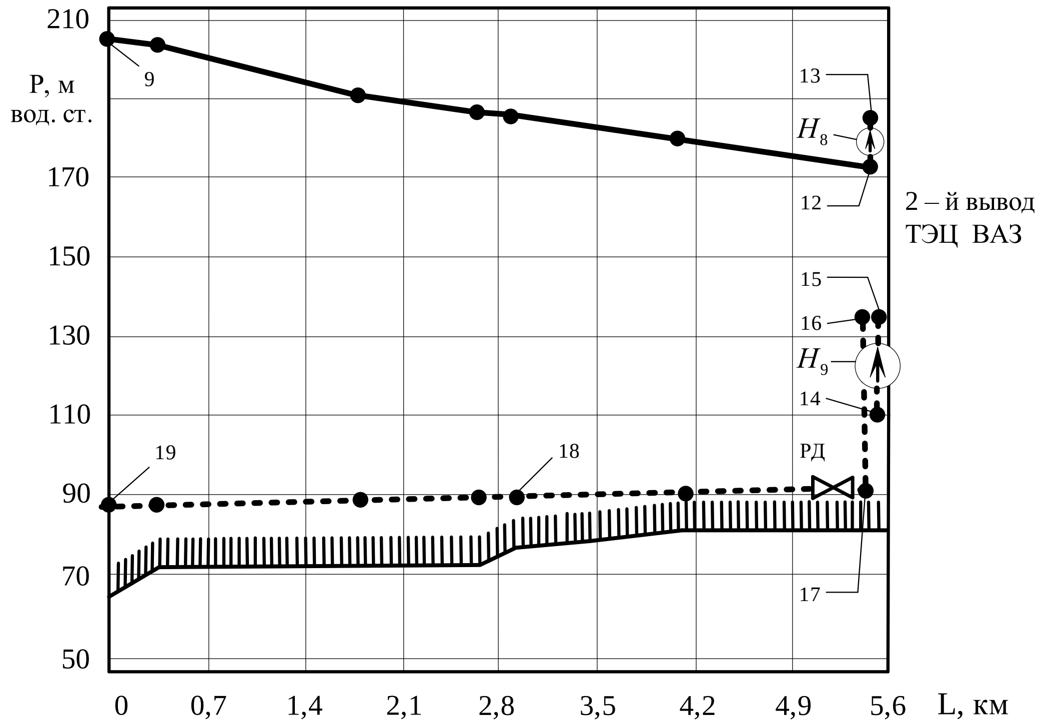



Рис. 5.19. Давления по линии 9-12-13 и по линии 19-18-17-16-15-14 (рис. 5.17)

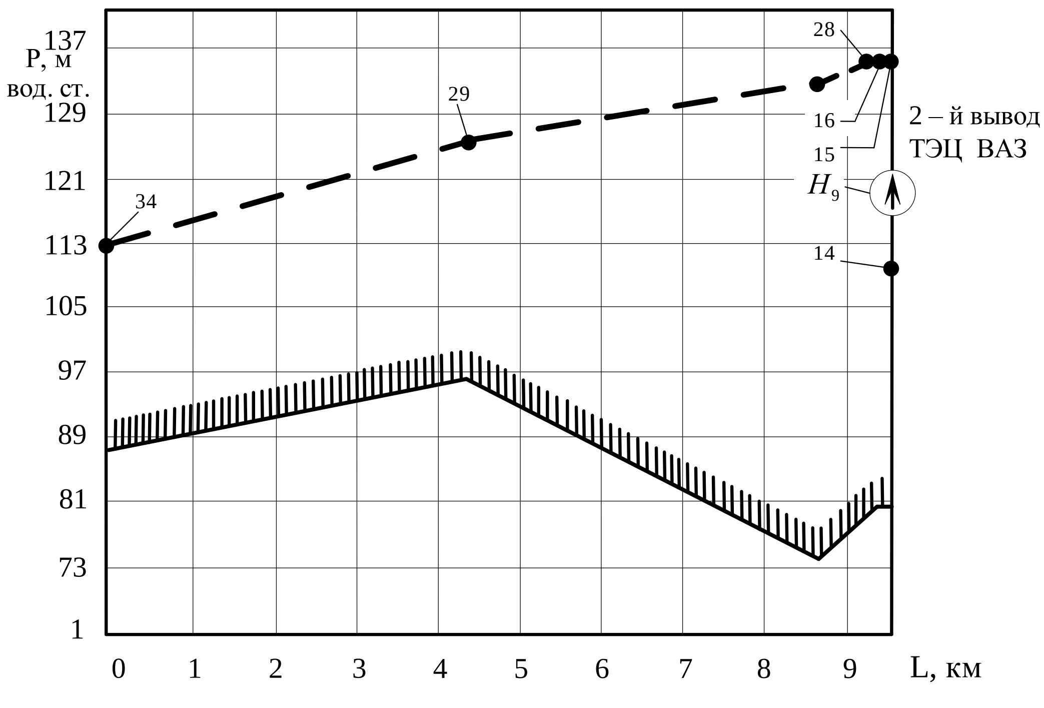



Рис. 5.20. Давления по линии 34-29-28-16-15-14 (см. рис. 5.17)

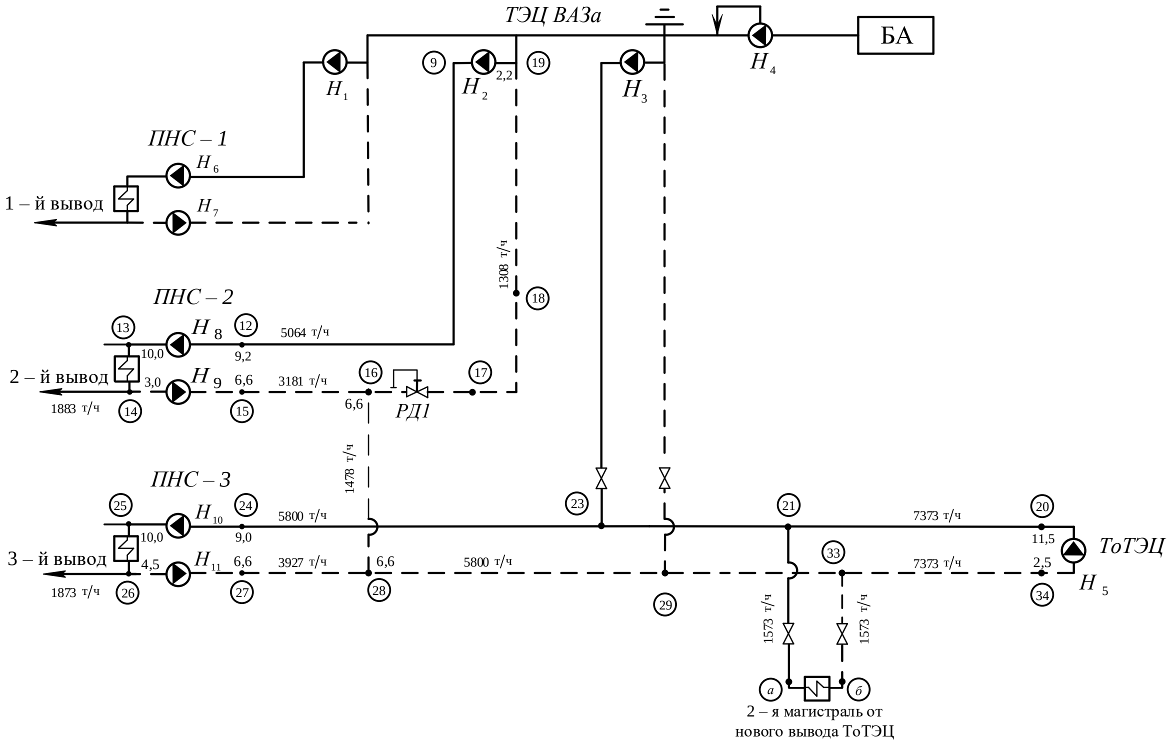



Рис. 5.21. Исходные данные и результаты исследований режима с увеличенной перспективной нагрузкой

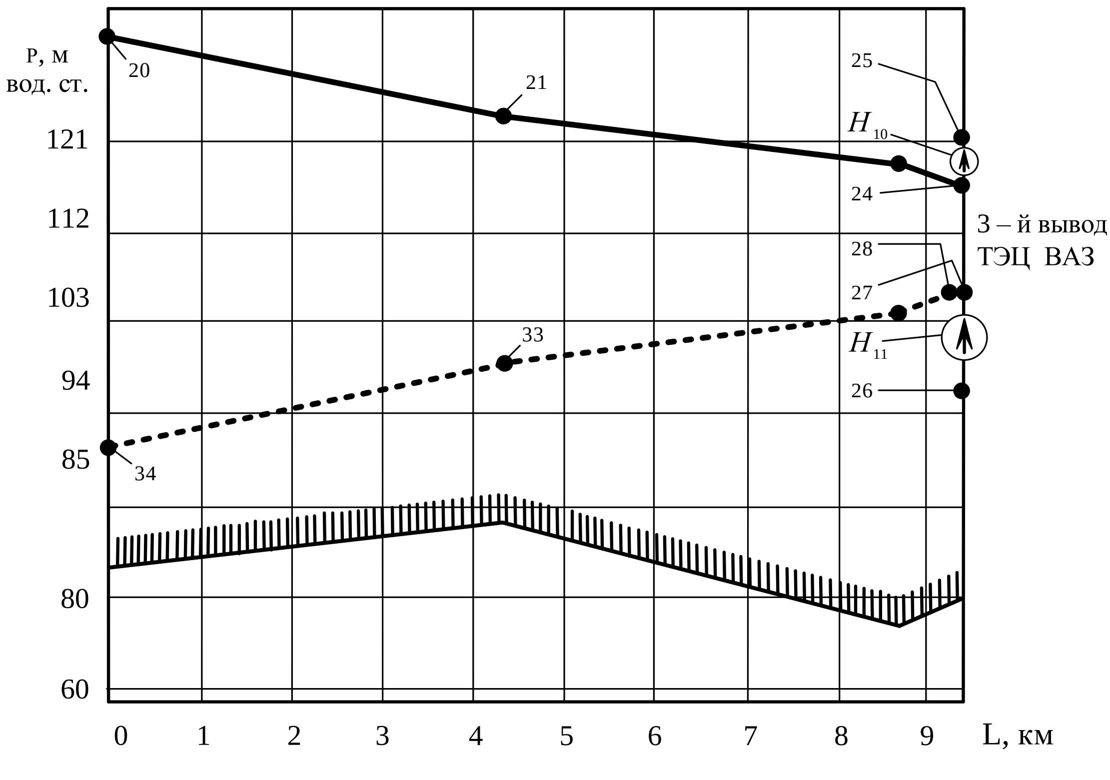



Рис. 5.22. Эпюра давлений на участке 20-21-24-25 (прямая магистраль) и по линии 34-33-28-27-26 (обратная магистраль) (рис. 5.21)

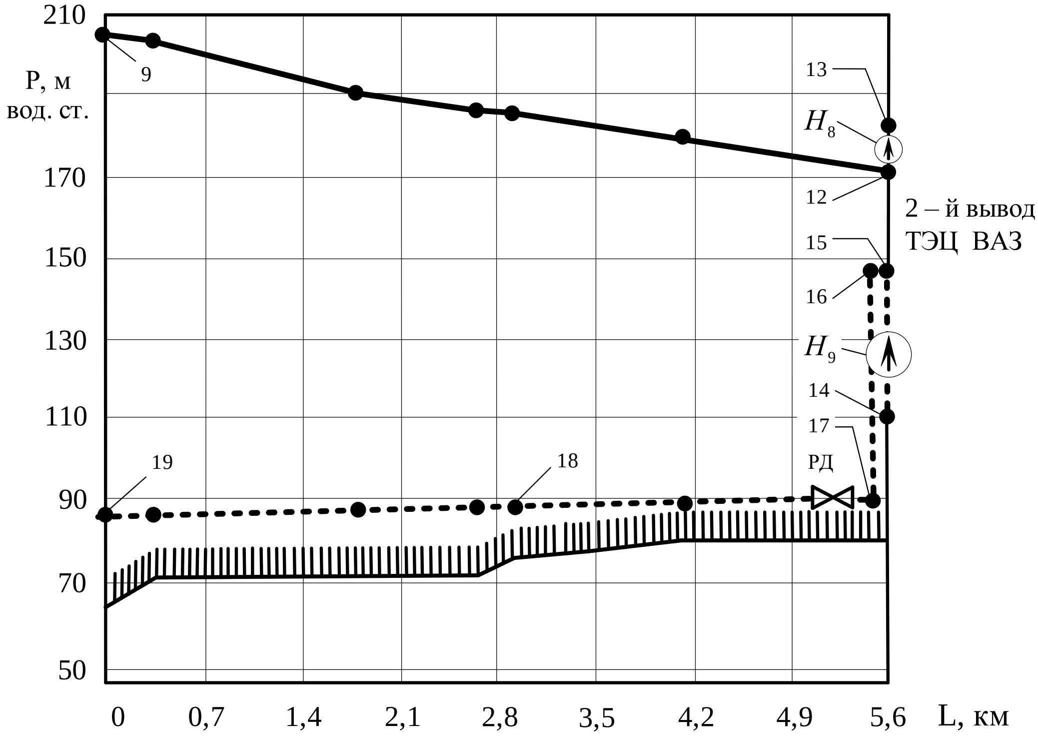



Рис. 5.23. Давления на участке 9-12-13 и на участке 19-18-17-16-15-14 (рис. 5.21)

## Выводы и рекомендации

1. С помощью компьютерной модели разработан проект объединенной теплосети ТоТЭЦ и ТЭЦ ВАЗ, в которой учтены все положения технического задания на проектирование. Насосы работают согласно их действительных характеристик. Расходные параметры на тепловыводах были заданы. Модель позволяет определить давления и расходы теплоносителя в любой точке теплосети, а также затраты электроэнергии на транспорт теплоносителя.

2. Наиболее эффективным вариантом объединения теплосетей, является установка перемычки АВ (рис. 5.16). Однако исследования показали, что давления в точках 34, 28, 16 (рис. 5.17) будут недостаточны.

3. Для увеличения давления в точках 34, 28, 16 на участке 16-17 (рис. 5.17) нужно установить РД1. Базовым будет давление, создаваемое подпиточными насосами $H_4$ ТЭЦ ВАЗ. Основным параметром регулирования, является давление на всасе подпорных насосов ТоТЭЦ (точка 34, рис. 5.17). По условиям их безкавитационной работы оно должно быть 1,5 – 3 $кгс/см^2$.

4. Проблемы при указанной выше схеме работы теплосетей имеют место на участке между точками 19-17 (рис. 5.15), где избыточное давление падает до 10 $м$, что может привести к вскипанию теплоносителя. Решением проблемы является повышение базового давления 2,2 $кгс/см^2$ (см. точку 18 на рис. 5.17), например, до величины около 3 $кгс/см^2$. Отметим, что расход

воды на 4-ом тепловыводе ТоТЭЦ в этом случае составляет 6148 $т/час$ (с учетом расхода, равного 1573 $т/час$, на 2-ю магистраль Нового вывода ТоТЭЦ).

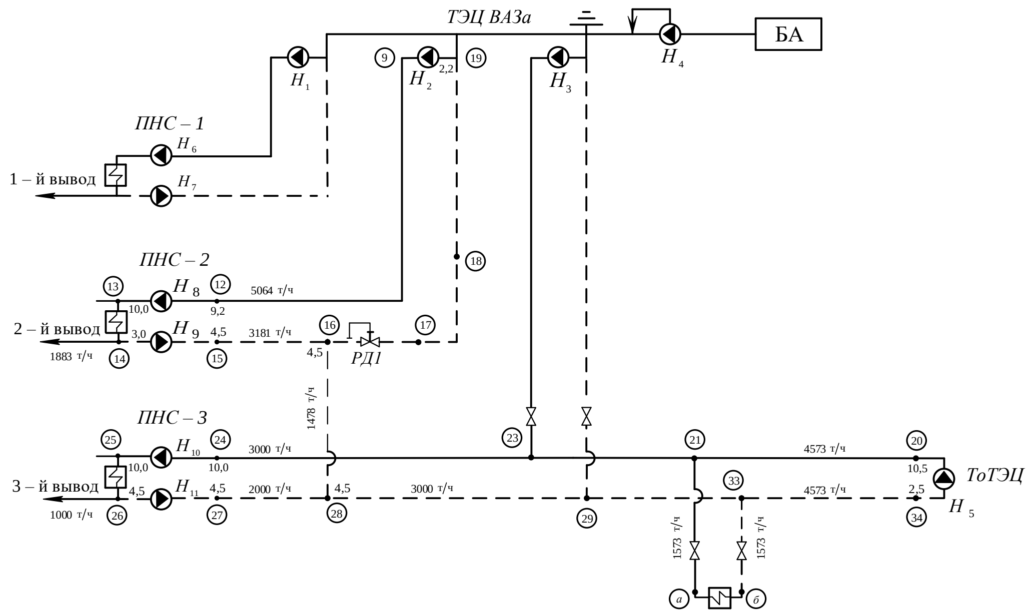



Рис. 5.24. Исходные данные и результаты исследований режима при минимальной нагрузке

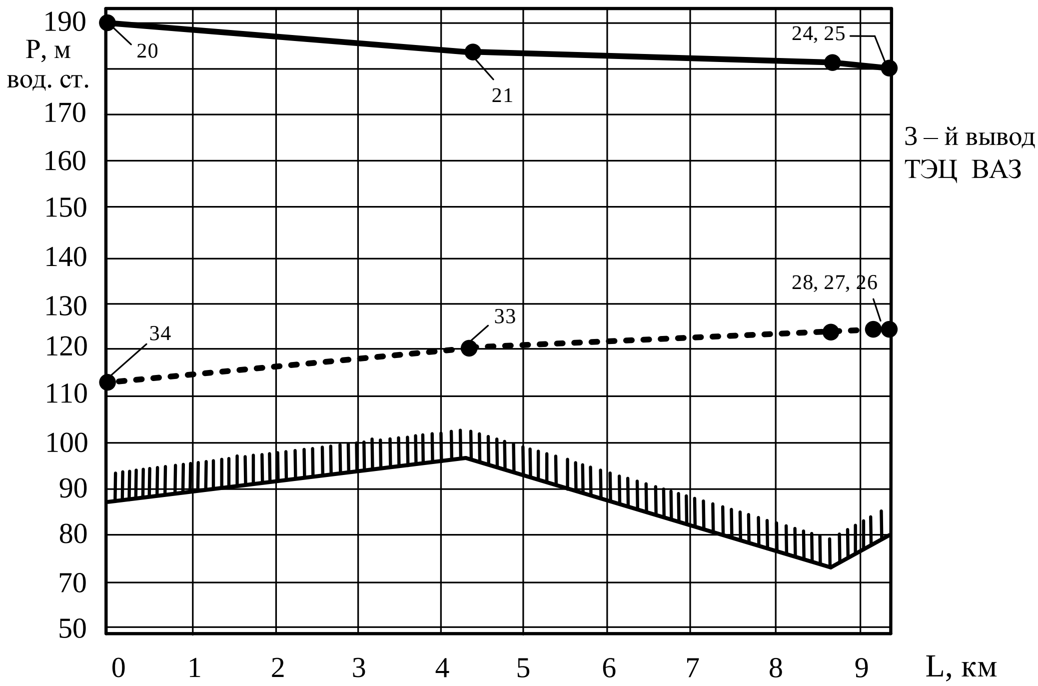



Рис. 5.25. Эпюра давлений на участке 20-31-24-25 (прямая магистраль) и на участке 34-33-28-27-26 (обратная магистраль) (рис. 5.24)

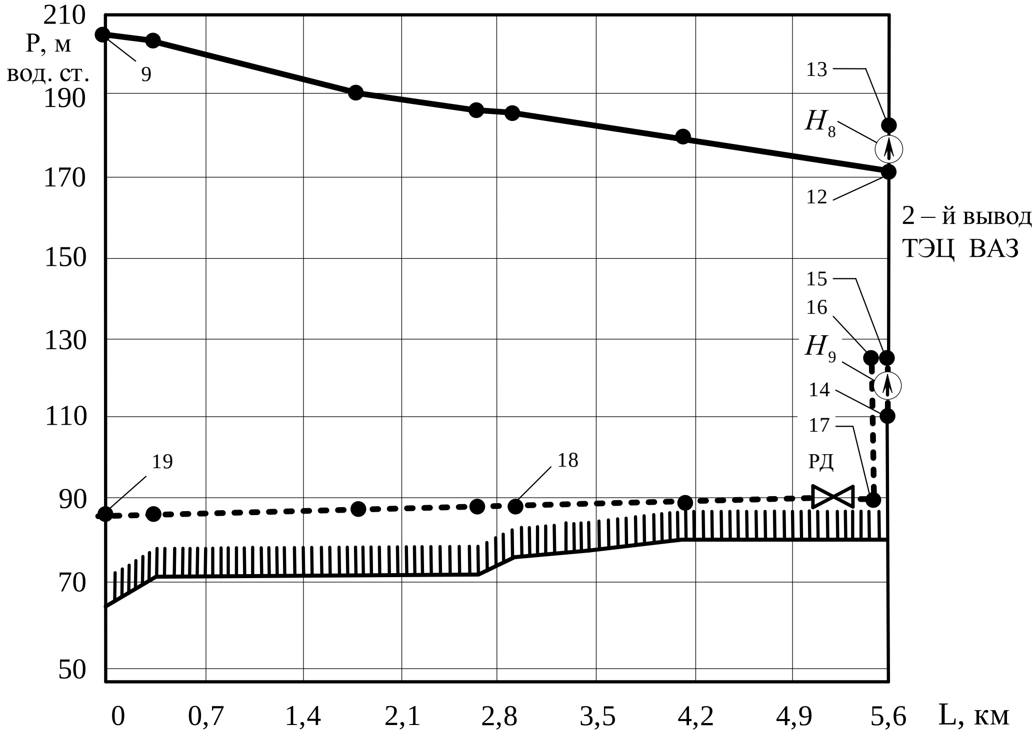



Рис. 5.26. Эпюра давлений на участке 9-12-13 (прямая магистраль) и на участке 19-17-16-15-14 (обратная магистраль) (рис. 5.24)

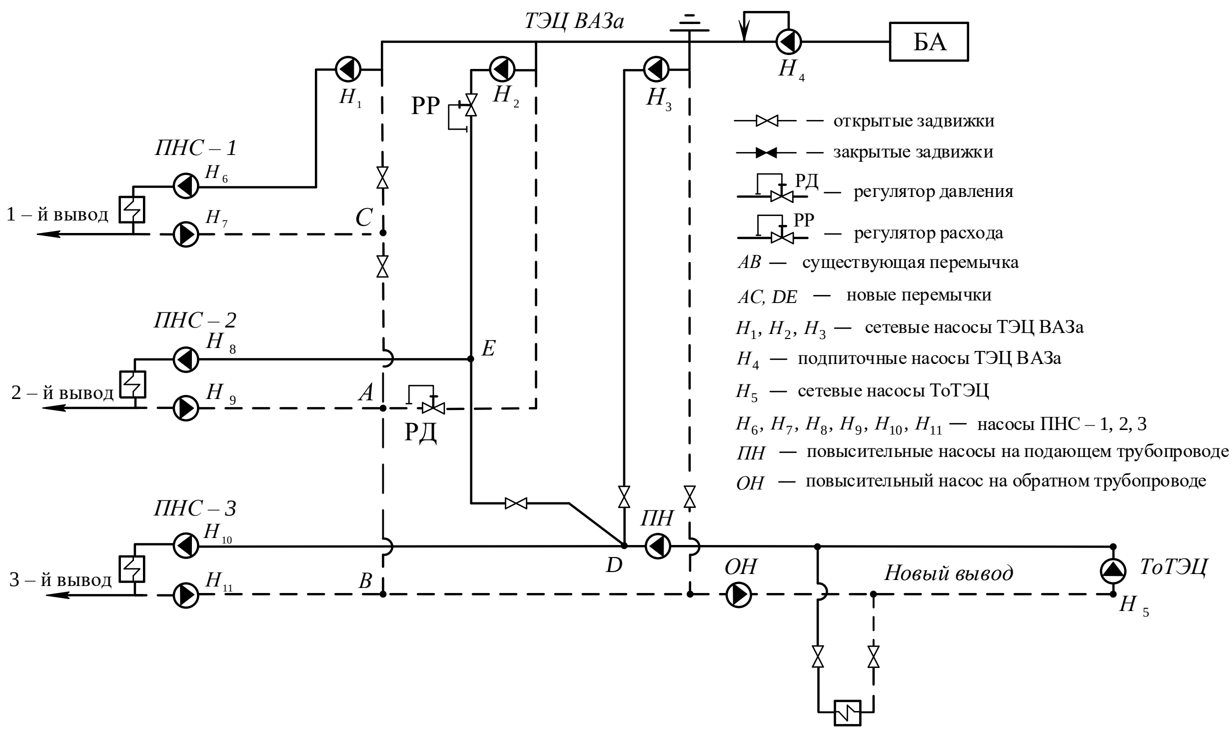



Рис. 5.27. Схема подсоединения нового вывода ТоТЭЦ к теплосетям ТЭЦ ВАЗ при переводе теплоснабжения 3-го и части 2-го районов с ТЭЦ ВАЗ на ТоТЭЦ с повысительными насосами на подающей и обратной магистралях (регулятор давления – на обратной магистрали второго тепловывода ТЭЦ ВАЗ)

5. Результаты расчетов при увеличении перспективной нагрузки в теплосетях 3-го тепловывода ТЭЦ ВАЗ до 5800 $т/час$ даны на рис. 5.21 – 5.23. В этом случае расход на Новом выводе ТоТЭЦ достигает 7373 $т/час$ (с учетом 1573 $т/час$ на 2-ю магистраль Нового вывода ТоТЭЦ). При таком расходе для обеспечения давления на всасе подпорных насосов ТоТЭЦ 2,5 $кгс/см^2$ РД1 необходимо настроить на давление 6,6 $кгс/см^2$. Такое давление не вызывает проблем при работе понизительных насосных ПНС-2 и ПНС-3. Более того, если давление в точке 34 принять равным, например, 1,5 $кгс/см^2$ (что допустимо для нормальной работы подпорных насосов ТоТЭЦ), то отпадает необходимость в настройке $(РД\,1)$ на повышенное (6,6 $кгс/см^2$) давление при переходе на повышенную (перспективную) нагрузку.

Необходимость включения повысительных насосов ПНС-3 зависит от давления, которое поддерживается на выходе сетевых насосов ТоТЭЦ. В случае, если это давление при переходе на новую нагрузку останется равным 11,5 $кгс/см^2$, то возникает необходимость включения повысительных насосов ТоТЭЦ, что позволяют отказаться от повысительных насосов на ПНС-3. При увеличении давления в точке 3 до 11 $кгс/см^2$ давление на ТоТЭЦ должно быть повышено до 13,5 $кгс/см^2$.

6. При задании повышенной перспективной нагрузки отмеченная в варианте расчета с существующей нагрузкой проблема пониженного давления в обратном трубопроводе 2-го вывода ТЭЦ ВАЗ на участке 19-17 (см. рис. 5.23) в данном случае усугубляется. И, в частности, давление здесь оказывается ниже 1 $кгс/см^2$. Большое уменьшение расхода по этому пути связано с увеличением подпитки, направляемой на ТоТЭЦ. Решением этой проблемы, как и выше, является увеличение базового давления, создаваемого подпиточными насосами $Н_4$ ТЭЦ ВАЗ.

7. На модели был также просчитан вариант работы объединенной теплосети при нагрузках, меньше существующих. И, в частности, на рис. 5.24 – 5.26 приведены результаты расчетов для случая, когда нагрузка на третий вывод теплосетей ТЭЦ ВАЗ снижается до 3000 $т/час$, а на новом выводе ТоТЭЦ соответственно до 4573 $т/час$ (с учетом нагрузки 1573 $т/час$ на 2-ю магистраль Нового вывода ТоТЭЦ). Нагрузка в теплосети 2-го вывода ТЭЦ ВАЗ оставалась в этом случае неизменной. Анализ результатов расчетов показывает, что при какой-то минимальной нагрузке давление настройки $(РД\,1)$ по условиям обеспечения требуемого давления в точке 34 может быть ниже минимально допустимой величины 4,5 $кгс/см^2$. Такой режим возможен, если уменьшить расход на третьем выводе ТЭЦ ВАЗ до 3000 $т/час$. Работа теплосети этого вывода из-за вскипания жидкости на обратных магистралях повышенных участков местности окажется

невозможной. Если с уменьшением расхода не перестраивать (РД 1), то есть оставить давление в точке 12 равным 5,5 $кгс/см^2$, то работа понизительных насосных ПНС-2 и ПНС-3 будет неизменной. Но при этом давление на входе подпорных насосов ТоТЭЦ будет увеличиваться до 3,5 $кгс/см^2$.

8. Рассмотренный в диссертации вариант работы, увеличивающий расход на Новом выводе теплосети ТоТЭЦ до 10373 $т/час$, возможен, если ТоТЭЦ полностью обеспечит нагрузку третьего тепловывоа ТЭЦ ВАЗ и второй магистрали Нового вывода ТоТЭЦ суммарно 7373 $т/час$ и, частично второго тепловывода ТЭЦ ВАЗ, около 3000 $т/час$. Здесь эффективным будет применение резервного трубопровода как второй нитки обратной магистрали на новом выводе ТоТЭЦ. Подпитка, направляемая на теплосеть ТоТЭЦ, возрастает до 4900 *т/час.* Обратная магистраль второго тепловывода ТЭЦ ВАЗ эту подпитку не сможет обеспечить и поэтому её необходимо соединить перемычкой с обратной магистралью первого тепловывода. Таким образом будут объединенными обратные трубопроводы всех выводов ТЭЦ ВАЗ.

9. Для реализации рассмотренной схемы подключения при максимальном расходе на ТоТЭЦ необходимо согласовать работу обоих источников теплоты (ТоТЭЦ и ТЭЦ ВАЗ) на один трубопровод, запитывающий теплосеть 2-го тепловывода ТЭЦ ВАЗ. Причем, на прямом трубопроводе одного из них нужно установить регулятор расхода РР, для обеспечения постоянного расхода и обозначения одного из них базовым.

10. Давление на входе подпорных насосов ТоТЭЦ является главным параметром регулирования при максимальной нагрузке . Из анализа расчетов следует, что для обеспечения на их входе давления 2,35 $кгс/см^2$, (РД 1) необходимо настроить на давление 6,4 $кгс/см^2$, что не выше установленной техническим заданием величины 7 $кгс/см^2$.

11. Для обеспечения в точке присоединения прямых магистралей Нового вывода ТоТЭЦ и 2-го вывода ТЭЦ ВАЗ давления 11 $кгс/см^2$ давление на выходе из ТоТЭЦ не должно быть менее 16 $кгс/см^2$. А это является предельным давлением для ТоТЭЦ даже при новых трубопроводах. Поэтому, на подающей магистрали нового тепловывода ТоТЭЦ следует установить повысительную насосную ПН (рис. 5.27).

12. Компьютерная модель объединенной теплосети включила в себя также и модель 2-ой магистрали Нового вывода ТоТЭЦ. Диаметры трубопроводов этой вновь проектируемой магистрали на начальном участке длиной 2,5 $км$ в проекте приняты равными Ø 500 $мм$. Расчеты на модели показали, что в этом случае разность давлений между прямым и обратным трубопроводами на некоторых участках сети будет составлять около 6 $м$ при

допустимом значении 20 $м$. Кроме того, давление в обратном трубопроводе у потребителей удаленных участков сети практически будет достигать предельно допустимого значения 60 $м$. Существуют два возможных варианта решения этих проблем: 1) установка понизительной насосной на обратном трубопроводе 2-ой магистрали Нового вывода ТоТЭЦ; 2) увеличение диаметров трубопроводов, указанных выше участков, до Ø 600 $мм$. Расчеты на модели показали, что в этом случае при различных режимах работы Нового вывода ТоТЭЦ (максимальный, существующий, минимальный) с запасом обеспечивается необходимая разность давлений между прямым и обратным трубопроводами у потребителей 2-ой магистрали Нового вывода ТоТЭЦ, а уровень давления в обратном трубопроводе существенно снижается (до величины около 40 $м$).

13. Расчет варианта с одной ниткой обратного трубопровода нового вывода показал, что для его надежной работы при максимальной нагрузке на ТоТЭЦ необходима установка на обратном трубопроводе повысительных насосов ОН (см. рис. 5.27).

## Рекомендации

1. Наиболее целесообразным к практической реализации с учетом резервирования является вариант работы Нового вывода ТоТЭЦ при повышенной (до 10000 $т/час$) нагрузке с одной ниткой обратной магистрали. Однако в этом случае для обеспечения необходимых параметров на всасе подпорных насосов ТоТЭЦ необходима установка повысительных насосов ОН (см. рис. 5.27) на обратной магистрали Нового вывода.

2. В варианте с повышенной нагрузкой для обеспечения необходимых параметров, определенных техническими условиями на проектирование, в прямом трубопроводе необходима установка повысительных насосов ПН (см. рис. 5.27) на подающем трубопроводе нового вывода ТоТЭЦ.

3. Регулятор давления $(РД\,1)$ наиболее целесообразно установить на обратном трубопроводе 2-го вывода ТЭЦ ВАЗ. Любые другие варианты менее предпочтительны из-за перегрузки отдельных участков обратных трубопроводов при минимальных водоразборах, а также ввиду их меньшей гибкости и универсальности.

4. Для обеспечения функционирования 2-ой магистрали Нового вывода ТоТЭЦ при максимальной нагрузке на Новом выводе ТоТЭЦ необходимо выполнение одного из следующих мероприятий:

1) увеличение диаметров трубопроводов на начальном участке, длиной 2,5 $км$ с Ø 500 до Ø 600 $мм$;

2) установка понизительной насосной на обратном трубопроводе 2-ой магистрали Нового вывода ТоТЭЦ.

## Заключение

1. На основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций получены точное и приближенное аналитические решения математической модели стационарной двумерной задачи теплопроводности с источником теплоты. Метод построения численно-аналитического решения отличается большой универсальностью, поскольку он может быть использован при переменных по координатам физических свойствах среды и источнике теплоты.

2. Получены численно-аналитические решения для математических моделей теплопроводности с переменными физическими свойствами среды и гидродинамики при зависимости вязкости от поперечной пространственной переменной. Метод основан на определении дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий. Применение дополнительной искомой функции позволяет сводить решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. Дополнительные граничные условия определяются в таком виде, чтобы их выполнение получаемым решением было эквивалентно выполнению исходного дифференциального уравнения в граничных точках.

3. Получены численно-аналитические решения для математических моделей гидродинамики и теплообмена в пограничных слоях, основанные на определении фронта динамического и температурного возмущения и ДГУ. Определение фронта возмущения означает принятие конечной скорости распространения определяемых величин, несмотря на то, что решению подлежат параболические уравнения движения и энергии, основанные на допущении о бесконечной скорости их распространения. Исследование, найденных таким путём решений показало, что уже в третьем приближении они практически совпадают с известными в литературе классическими решениями, полученными численными методами.

4. Используя основные положения теории двухфазного запаздывания, разработан метод математического моделирования распределения скорости в движущихся жидкостях в локально-неравновесных условиях. Для вывода определяющего уравнения движения (модифицированного уравнения Навье – Стокса) используется эмпирическая формула Ньютона для касательного напряжения, в которой учитываются скорости и ускорения касательного напряжения и градиента скорости. Показано, что учет релаксационных свойств жидкости приводит к временно́й задержке формирования профиля скорости.

5. Разработана математическая модель нестационарного теплообмена в движущихся жидкостях с учётом локальной неравновесности реальных процессов, основанная на использовании теории двухфазного запаздывания, в которой учитывается скорость изменения во времени как теплового потока, так и градиента температуры.

6. Разработаны комплексы программ, предназначенные для получения решений рассматриваемых в диссертации задач. Создан комплекс программ для расчета гидравлических сетей, позволяющий за счет учёта квадратичных членов при определении увязочного расхода существенно ускорить сходимость итераций в задаче потокораспределения.

## Список используемой литературы

1. *Абрамов Н.Н.* Теория и методика расчета систем подачи и распределения воды. Стройиздат, 1972. – 286 с.

2. *Аверин Б.В., Колотилкин Д.И., Кудинов В.А.* Задача Штурма-Лиувилля для дифференциального уравнения второго порядка с разрывными коэффициентами // ИФЖ. Т. 73. № 4, 2000. С. 748 – 753.

3. *Айзен А.М., Редчиц И.С.* Расчет стационарной нелинейной теплопроводности через многослойные стенки с источниками тепла // Теплофизика и теплотехника. Ин-т. техн. теплофизики АН УССР. Вып. 27, 1974. С. 133 – 138.

4. *Акаев А.В., Дульнев Г.Н.* К вопросу о повышении точности первых приближений метода Л.В. Канторовича в применении к краевым задачам стационарной теплопроводности // Изв. АН СССР. Сер. Энергетика и транспорт. № 1, 1972. С. 154 – 158.

5. *Антимонов М.С., Кудинов В.А., Стефанюк Е.В.* Аналитические решения задач теплопроводности для цилиндра и шара на основе определения фронта температурного возмущения // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 48. № 4, 2008. С. 681 – 692.

6. *Баумейстер К., Хамилл Т.* Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле // Теплопередача. 1969, № 4. С. 112 – 119.

7. *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978. – 328 с.

8. *Био М.* Вариационные принципы в теории теплообмена. М.: Энергия. 1975.

9. *Болгарский А.В., Мухачев Г.А., Щукин В.К.* Термодинамика и теплопередача. М.: Высшая школа, 1975. – 495 с.

10. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. – 517с.

11. *Бровкин Л.А.* К решению дифференциального уравнения теплопроводности // Изв. вузов СССР. Энергетика, № 8, 1984. С. 111 – 113.

12. *Вейник А.И.* Приближенный расчет процессов теплопроводности. М. – Л.: Госэнергоиздат, 1959. – 184 с.

13. *Глазунов Ю.Т.* Вариационные методы. Москва – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 470 с.

14. *Григорьев Л.Я., Маньковский О.Н.* Инженерные задачи нестационарного теплообмена. Л.: Энергия, 1968. – 83 с.

15. *Гудмен Т.* Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена. Сб. науч. тр. М.: Атомиздат, 1967. С. 41 – 96.

16. *Дубинский А.В., Сиперштейн Б.И., Берман Р.Я.* О методе гидравлического расчета газопроводных систем // Транспорт и хранение газа.– 1974. №7. С. 25 – 30.

17. *Евдокимов А.Г., Тевяшев А.Д., Дубровин В.В.* Моделирование и оптимизация потокораспределения в инженерных сетях. М.: Стройиздат, 1990. – 368 с.

18. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. – 456 с.

19. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1974. – 303 с.

20. *Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж.* Расширенная необратимая термодинамика. М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»: Институт компьютерных исследований, 2006. – 528 с.

21. *Жуковский В.С.* Основы теплопередачи. М – Л.: Госэнергоиздат. 1960.

22. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.

23. *Зингер Н.М., Андреева К.С., Вульман Ф.А.* Расчет многокольцевых гидравлических сетей на ЭВМ «Урал» // Теплоэнергетика. 1960, №1. С. 44 – 52.

24. *Зройчиков Н.А., Кудинов В.А., Коваленко А.Г., Колесников С.В., Москвин А.Г., Лисица В.И.* Разработка компьютерной модели и расчет оптимальных режимов работы циркуляционной системы ТЭЦ-23 ОАО «Мосэнерго» // Теплоэнергетика. № 12. 2007. С. 7 – 15.

25. *Зыков А.А.* Теория конечных графов. М.: Наука, СО. 1969. – 543с.

26. *Исаченко В.П., Осипова В.А, Сукомел А.С*. Теплопередача. М.: Энергия. 1969. – 440 с.

27. *Кабисов К.С., Камалов Т.Ф., Лурье В.А.* Колебания и волновые процессы: Теория. Задачи с решениями. Изд. 2 – ое. М.: КомКнига, 2010. – 360 с.

28. *Канторович Л.В.* Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Прикл. мат. и механ. Т. 6. № 1, 1942. С. 31 – 40.

29. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближённые методы высшего анализа. Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.

30. *Карасев Н.И. и др.* Пакет прикладных программ для решения задач расчета параметров стационарного гидравлического режима систем централизованного теплоснабжения и водоснабжения промышленных центров // Управляющие системы и машины. 1982, №1. С. 113 – 116.

31. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твёрдых тел. М.: Наука, 1964. – 488 с.

32. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твёрдых тел. М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.

33. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 360 с.

34. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Математические модели теплопроводности и термоупругости. Самара: Самарский государственный технический университет, 2013. – 877 с.

35. *Картвелишвили Н.А.* Динамика напорных трубопроводов. М.: Энергия, 1979.

36. *Киреев В.И., Пантелеев А.П.* Численные методы в примерах и задачах. Учеб. пособ. для втузов. М.: Высшая школа, 2006. – 480 с.

37. *Ковалев Г.Ф., Сеннова Е.В., Гельсов М.Б. и др.* Надежность систем энергетики: достижения, проблемы, перспективы. Под ред. Н.И. Воропая. Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН. 1999. – 434 с.

38. *Коваленко А.Г., Туева К.С.* Система синтеза и анализа гидравлических сетей. Вычислительный центр АН СССР. 1989. – 70 с.

39. *Колесников С.В., Дикоп В.В., Панамарев Ю.С., Кудинов В.А.* Разработка компьютерной модели системы цирквoдоснабжения Тольяттинской ТЭЦ // Тез. докл. III Всероссийской научно-практической конференции. Иваново, ИГЭУ. 2002. С. 39 – 43.

40. *Колесников С.В., Дикоп В.В., Томкин С.В., Кудинов В.А.* Исследование гидравлических режимов работы цирксистемы Тольяттинской ТЭЦ на компьютерной модели // Изв. Вузов СНГ. Энергетика. №6, 2002. С. 90 – 95.

41. *Кудинов И.В., Котова Е.В., Кудинов В.А.* Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искомых функций. Сибирский журнал вычислительной математики. 2019. Т. 22, № 2. С. 153 – 165.

42. *Колесников С.В.* Разработка способов повышения эффективности оборотных систем водоснабжения ТЭЦ с градирнями // Дисс. канд. техн. наук. Иваново. ИГЭУ. 2004.

43. *Кудинов И.В.* Получение точных аналитических решений задач теплопроводности с переменными во времени граничными условиями. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. Самара: 2016, № 4 (52). С. 108 – 117.

44. *Кудинов И.В., Стефанюк Е.В., Скворцова М.П., Максименко Г.Н.* Об одном методе получения точных аналитических решений задач теплопроводности с источником теплоты. Известия высших учебных заведений. Чёрная металлургия. 2017. Т. 60, № 11. С. 877 – 882.

45. *Кудинов И.В. Кудинов В.А., Котова Е.В.* Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности. Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55, № 4. С. 556 – 563.

46. *Кудинов В.А., Аверин Б.В., Стефанюк Е.В.* Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2008. – 305 с.

47. *Кудинов В.А., Карташов Э.М.* Гидравлика. Учеб. пособ. для вузов. Третье издание. М.: Высшая школа, 2008. – 200 с.

48. *Кудинов И.В., Кудинов В.А., Еремин А.В., Колесников С.В.* Математическое моделирование гидродинамики и теплообмена в движущихся жидкостях. Под ред. Э.М. Карташова. СПБ.: Издательство «Лань», 2005. – 208 с.

49. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В.* Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. Учеб. пос. для втузов. М.: Высшая школа, 2005. – 429 с.

50. *Кудинов В.А., Карташов Э.М., Стефанюк Е.В.* Техническая термодинамика и теплопередача. Учебник для бакалавров. 2-ое издание. Перераб и доп. М.: Издательство «Юрайт», 2013. – 566 с.

51. *Кудинов В.А., Коваленко А.К., Колесников С.В., Панамарев Ю.С.* Разработка компьютерной модели и исследование работы циркуляционной

системы Новокуйбышевской ТЭЦ – 2 // Известия АН Энергетика. 2001, №6. С. 118 – 124.

52. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Исследование теплопроводности с учётом конечной скорости распространения теплоты // Теплофизика высоких температур. Т. 51. №2, 2013. С. 301 – 310.

53. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Получение и анализ точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для плоской стенки // Теплофизика высоких температур. Т. 50. № 1, 2012. С. 118 – 125.

54. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Получение точных аналитических решений гиперболических уравнений движения при разгонном течении Куэтта // Известия АН. Энергетика. № 1, 2012. С. 119 – 133.

55. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Об одном методе получения точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности на основе использования ортогональных методов // Вестник Самарского технического университета. Сер. Физ. – мат. науки. 2010. № 5 (21). С. 159 – 169.

56. *Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В.* Разработка и исследование сильнонеравновесной модели теплообмена в жидкости с учетом пространственно – временной нелокальности и диссипации энергии. Теплофизика и аэромеханика. 2017, Т. 24, № 6. С. 929 – 935.

57. *Кудинов В.А.* Метод координатных функций в нестационарных задачах теплопроводности // Изв. АН Энергетика (обзор). № 3, 2004. С. 82 – 104.

58. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В.* Аналитический метод решения задач теплопроводности на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий // ИФЖ. Т. 82. № 3, 2009. С. 540 – 558.

59. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В., Антимонов М.С.* Аналитические решения задач теплообмена при течении жидкости в плоскопараллельных каналах на основе определения фронта температурного возмущения // Инженерно – физический журнал. Т. 80. №4. 2007. С. 178 – 186.

60. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В.* Задачи теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения // Известия АН. Энергетика. № 4, 2008. С. 122 – 138.

61. *Кудинов В.А., Стефанюк Е.В.* Задачи теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения // Известия Российской академии наук. Энергетика. № 5, 2008. С. 141 – 157.

62. *Кудинов И.В.* Использование компьютерной модели для проектирования тепловых сетей // Вестник СамГТУ. Сер. Технические науки. 2010. №4(27). С. 174 – 181.

63. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Исследование распределения давления при гидравлическом ударе в трубопроводе с учетом релаксационных свойств вязкой жидкости // Инженерно – физический журнал. Т. 87. №2. 2014.

64. *Кудинов И.В., Кудинов В.А.* Исследование точного аналитического решения уравнения продольных волн в жидкости с учётом её релаксационных свойств // Инженерно – физический журнал. Т. 86. № 5. 2013.

65. *Кудинов И.В.* Математическое моделирование процессов теплопроводности и гидравлики численно – аналитическими методами на основе использования дополнительных граничных условий. Автореферат, дисс. канд. тех. наук Самара. СамГТУ. 2011.

66. *Кудинов И. В.* Построение компьютерных моделей систем теплоснабжения больших городов // Вестник СамГТУ. Сер. Технические науки. 2011. № 1 (29). С. 212 – 219.

67. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. Учеб. для вузов. 7 – ое изд. М.: Дрофа, 2003. 840 с.

68. *Лыков А.В., Михайлов Ю.А.* Теория тепло- и массопереноса. М.: Госэнергоиздат, 1963. – 535 с.

69. *Лыков А.В.* Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло – и массообмена // Инженерно - физический журнал. Т. 9, № 3, 1965. С. 287 – 304.

70. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

71. *Лыков А.В.* Тепломассообмен (Справочник). 2 – ое изд., перераб. и доп. М.: Энергия, 1978. – 480 с.

72. *Ланда П.С.* Нелинейные колебания и волны. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2010. – 552 с.

73. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1988.

74. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика (теория турбулентности). Т.1. Санкт-Петербург: Гидрометеоиздат. 1992.

75. *Меренков А.П.* Применение ЭВМ для оптимизации разветвленных тепловых сетей // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1963, №4. С. 531 – 538.

76. *Меренков А.П., Сеннова Е.В., Сумароков С.В. и др.* Математическое моделирование и оптимизация систем тепло, – водо, – нефте, – и газоснабжения. Новосибирск: ВО «Наука». Сиб. изд. фирма. 1992. – 407 с.

77. *Меренков А.П., Сидлер В.Г.* Идентификация трубопроводных систем // Фактор неопределенности при принятии решений в больших системах энергетики. Иркутск: СЭИ СО АН СССР. 1974. С. 149 – 162.

78. *Меренков А.П., Сидлер В.Г, Хасилев В.Я.* «Математический расходомер» и его применение в тепловых сетях // Теплоэнергетика. 1971, №11. С. 70 – 71.

79. *Меренков А.П., Хасилев В.Я.* Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985. – 278 с.

80. *Меренкова Н.Н., Сеннова Е.В., Стенников В.А.* Схемно-структурная оптимизация систем централизованного теплоснабжения // Электронное моделирование. 1982, №6. С. 76 – 82.

81. *Михеев М.А., Михеева И.М.* Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977. – 343 с.

82. *Морев А.А., Сидлер В.Г, Новицкий Н.Н.* Системная идентификация многониточных нефтепроводов // Транспорт и хранение нефти и Нефтепродуктов. 1982. №111. С. 6 – 7.

83. *Некрасова О.А, Хасилев В.Я.* Оптимальное дерево трубопроводной системы // Экономика и мат. методы. 1970. Т.4, №3. С. 427 – 432.

84. *Новицкий Н.Н.* Оценивание параметров гидравлических цепей. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1998. – 214 с.

85. *Новицкий Н.Н., Сеннова Е.В., Сухарев М.Г. и др.* Гидравлические цепи. Развитие теории и приложения. Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН, 2000. – 273 с.

86. *Новицкий Н.Н., Сидлер В.Г., Шлафман В.В.* Развитие методов оценивания состояния и идентификации сложных систем магистральных нефтепроводов // Современные проблемы системных исследований в энергетике. Разд.11. Управление функционированием, надежность, безопасность и риск в энергетике: современные проблемы и методы их решения. – Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1990. С. 115 – 122.

87. *Ощепкова Т.Б.* Оптимизация разветвленных и многоконтурных трубопроводных систем: Автореф. дис. канд. техн. наук. – Новосибирск: Инст. математики СО АН СССР, 1983. – 22 с.

88. *Панкратов В.С., Дубинский А.В., Сиперштейн Б.И.* Информационно-вычислительные системы в диспетчерском управлении газопроводами. Л.: «Недра», 1988. – 246 с.

89. *Петухов Б.С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. – 412 с.

90. *Прибытков И.А., Левицкий И.А.* Теоретические основы теплотехники. М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 464 с.

91. *Рудобашта С.П., Карташов Э.М.* Диффузия в химико-технологических процессах. М.: Химия. 1993. – 209 с.

92. *Рудобашта С.П.* Массоперенос в системах с твердой фазой. М.: Химия, 1980. – 248 с.

93. *Сеннова Е.В.* Оптимизация развития и реконструкции теплоснабжающих систем с учетом надежности: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Иркутск, 1990. – 50 с.

94. *Сеннова Е.В., Ощепкова Т.Е., Мирошниченко В.В.* Методические и практические вопросы построения надежных теплоснабжающих систем // Изв. РАН. Энергетика. 1999, №4. С. 65 – 75.

95. *Сеннова Е.В., СидлерВ.Г.* Математическое моделирование и оптимизация развивающихся теплоснабжающих систем. Новосибирск: Наука, 1987. – 221 с.

96. *Сидлер В.Г.* Разработка и применение методов идентификации параметров гидравлических сетей: Автореф. дисс. канд. техн. наук.- Томск, 1977. – 20 с.

97. *Соколов Е.Я.* Теплофикация и тепловые сети. М.: Энергоиздат, 1982. – 360 с.

98. *Стефанюк Е.В., Кудинов В.А.* Дополнительные граничные условия в нестационарных задачах теплопроводности // ТВТ. Т. 47. № 2, 2009.

99. *Стефанюк Е.В.* Модельные представления аналитических решений краевых задач теории теплообмена на основе введения дополнительных граничных условий. Дисс. доктора техн. наук. Москва. МАТИ, 2010.

100. *Сумароков С.В.* Математическое моделирование систем водоснабжения. Новосибирск: Наука, 1983. – 167 с.

101. *Сумароков С.В.* Метод решения многоэкстремальной сетевой задачи // Экономика и мат. методы, 1976. Т. 12, №5. С. 1016 – 1018.

102. *Сухарев М.Г.* Об одном методе расчета газосборных сетей на вычислительных машинах. // Изв. вузов. Нефть и газ. 1965, №6. С. 48 – 52.

103. *Сухарев М.Г., Ставровский Е.Р., Брянских В.Е.* Оптимальное развитие систем газоснабжения. М.: Недра, 1981. – 294 с.

104. *Сухарев М.Г., Ставровский Е.Р.* Оптимизация систем транспорта газа. М: Недра, 1975. – 278 с.

105. *Соболев С.Л.* Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах // Успехи физических наук. Т. 161, № 3, 1991. С. 5 – 29.

106. *Соболев С.Л.* Локально – неравновесные модели процессов переноса // Успехи физических наук. Т. 167, № 10, 1997. С. 1096 – 1106.

107. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Государственное издательство технико – теоретической литературы. Москва – Ленинград, 1951. – 659 с.

108. *Федоров Ф.М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск, наука. 2000. 220 с.

109. *Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л.* Численные методы. М.: Физматлит, 2004. – 400 с.

110. *Формалев В.Ф.* Тепломассоперенос в анизотропных телах. Обзор // Теплофизика высоких температур. Т. 39, № 5, 2001. С. 810 – 832.

111. *Хасилев В.Я.* Линейные и линеаризованные преобразования схем гидравлических цепей // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1964, №2. С. 231 – 243.

112. *Хасилев В.Я.* Элементы теории гидравлических цепей // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1964, №1. С. 69 – 88.

113. *Хасилев В.Я.* Элементы теории гидравлических цепей: Авторефер. дисс. д-ра техн. Наук – Новосибирск: Секция техн. Наук Объединенного ученого совета СО АН СССР, 1996 – 98 с.

114. *Храмов А.В.* Программно-вычислительный комплекс СОСНА как инструмент для реализации и исследования алгоритмов оптимального синтеза многоконтурных гидравлических систем // Пакеты прикладных программ. Методы, разработки. – Новосибирск: Наука. 1981. С. 174 – 182.

115. *Цирельман Н.М.* Прямые и обратные задачи тепломассопереноса. М: Энергоатомиздат, 2005. – 392 с.

116. *Цой П.В.* Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса. М.: Энергия, 1971. – 382 с.

117. *Цой П.В.* Системные методы расчета задач тепломассопереноса. М.: Издательство МЭИ, 2005. – 568 с.

118. *Чарный И.А.*Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: «Недра», 1975. – 296 с.

119. *Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю.* Волновые явления теплопроводности: системно-структурный подход. Изд. 2-ое, доп. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 296 с.

120. *Швец М.Е.* О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. Прикладная математики и механика. Т. 13. № 3, 1949.

121. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. – 472 с.

122. *Шумаков Н.В.* Метод последовательных интервалов в теплометрии нестационарных процессов. М.: Атомиздат, 1979. – 212 с.

123. *Эгильский И.С.* Автоматизированные системы управления технологическими процессами подачи и распределения воды. Л.: Стройиздат. 1988. – 216 с.

124. *Юдаев Б.Н.* Основы теплопередачи. Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1981. – 319 с.

125. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск. Наука, 1987, – 195 с.

126. *Aziz A.* A similarity solution for laminar thermal boundary layer over a flat plate with a convective surface boundary condition. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 14(2009). P. 1064 – 1068.

127. *Cattaneo G.* Sur une forme de l’eguation de la chaleur eliminant le paradoxe d’une propagation instantance, - «Comptes Rendus», 1958, Vol. 247, № 4, P. 431 – 433.

128. *Landahl H.D.* Bull. Math. Biophys., 15, 376 (1953).

129. *Oldroyd J.G.* Proc. Roy. Soc. A 218, 172, 1953.

130. *Pohlhausen K.Z.* Angew. Math. Mech., 1, 252 (1921).

131. *Vernott P.* Les paradoxe de la theorie continue de l’eguation de la chaleur. –«Comptes Rendus», 1958, Vol. 246, № 22, P. 3154 – 3155.

132. *M.G. Reddy, O.D. Makinde,* Magnetohydro – dynamic peristaltic transport of Jeffrey nanofluid in an asymmetric channel, J. Mol. Liq. 223 (2016) 1242 – 1248.

133. *N.Alvi T Latif, Q. Hussain, S. Asghar*. Peristalsis of nonconstant viscosity Jeffrey fluid with nanoparticles, Results Phys. 6 (2016) 1109 – 1125.

134. *Polyanin A.D., Zhurov A.* Exact solutions of linear and non-linear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time //

International Journal of Non-Linear Mechanics. 2013. Vol. 54. P. 115 – 126. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2013.03.011.

135. *Polyanin A.D., Sorokin V.G., Vyazmin A.V.* Exact solutions and qualitative features of nonlinear hyperbolic reaction–diffusion equations with delay // Theoretical Foundation of Chemical Engineering. 2013. Vol. 49, Issue 5. P. 622 – 635. DOI: 10.1134/S0040579515050243.

## Список публикаций Ткачева В.К. по диссертации

**Список публикаций в рецензируемых журналах, состоящих в системе WebofScience:**

136. *Kudinov I.V., Kurganova O.Y., Tkachev V.K.* Exact analytical solution for the stationary two-dimensional heat conduction problem with a heat source // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta-seriya-fiziko-matematicheskiye nauki. – 2019. – V. 23. – №. 1. – P. 195-203.

137. *Eremin A.V., Stefanyuk E.V., Kurganova O.Y., Tkachev V.K., & Skvortsova M.P.* A generalized function in heat conductivity problems for multilayer structures with heat sources // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2018. – V. 47. – №. 3. – P. 249-255.

138. *Kolesnikov S.V., Kudinov V.A., Trubitsyn K.V., Tkachev V.K., & Stefanyuk E.V.* Computer models of pipeline systems based on electro hydraulic analogy // Innovations and prospects of development of mining machinery and electrical engineering. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2017. – V. 87. – №. 3. – UNSP 032015.

139. *Eremin A.V., Trubitsyn K.V., Kudinov I.V., Kudinov V.A., Tkachev V.K., & Stefanyuk E.V.* Study of fast relaxing excitations caused by ultrashort laser pulses in nanoscale domain // Proceedings of the International conference on actual issues of mechanical engineering, 2017. – V. 133. – P. 202-208.

140. *Kudinov I.V., Eremin A.V., Tkachev V.K., Kudinov V.A., Trubitsyn K.V., & Stefanyuk E.V.* Mathematical modelling of strongly non-equilibrium transfer processes at nanoscopic scale // Proceedings of the International conference on actual issues of mechanical engineering, 2017. – V. 133. – P. 382-389.

**Список публикаций в рецензируемых журналах, состоящих в системе Scopus:**

141. *Tkachev V.K.* Approximate analytical solution to the stationary two-dimensional heat conduction problem on infinite bar with the source of heat // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 552(1). 2019.

142. *Eremin A.V., Trubitsyn K.V., Kolesnikov S.V., Kudinov I.V., TkachevV.K.*Computer models of hydraulic systems of district heating // International scientific conference environmental science for construction industry. MATEC Web of Conferences. – EDP Sciences, 2018. – V. 193. – UNSP 02028.

**Список основных публикаций в рецензируемых журналах из перечня ВАК:**

143. *Ткачев В.К.* Получение точного аналитического решения нестационарного уравнения Навье-Стокса // Южно-Сибирский научный вестник. – 2019. – № 4. С. 296 – 302.

144. *Кудинов И.В., Еремин А.В., Сичинава Г.В., Бранфилева А.Н., Ткачев В.К.,Курганова О.Ю.* Экспериментальное исследование мощности газоводяных теплообменников // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки», №2 (54). 2017 – Самара, 2017. С. 146 – 152.

145. *Кудинов В.А., Котова Е.В., Курганова О.Ю., Ткачев В.К.* Экспериментально-теоретическое исследование температуры цилиндра высокого давления турбины Т-100-130 // Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ. Т. 62. № 5. 2019. С. 459 – 468.

146. *Котова Е.В., Еремин А.В., Кудинов В.А., Ткачев В.К., Кузнецова А.Э.* Метод дополнительных искомых функций в задачах теплопроводности с переменными физическими свойствами среды // Вестник Ивановского государственного энергетического университета. – 2019. – №. 2. С. 59 – 70.

147. *Еремин А.В., Ткачев В.К., Тарабрина Т.Б., Кудинов И.В., Колесников С.В.* Получение аналитического решения задачи теплообмена для турбулентного пограничного слоя // Вестник национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». – 2019. – Том 8, № 6. С. 540 – 545.

**В других изданиях:**

148. *Ткачев В.К., Еремин А.В.* Обобщенные функции в задачах теплопроводности для многослойных конструкций // Сб. Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием «Энерго – и ресурсосбережение. Энергообеспечение. Нетрадиционные и возобновляемые источники энергии» – Екатеринбург, 2016. С. 274 – 277.

149. *Ткачев В. К., Колесников С.В., Трубицын К.В., Еремин А.В., Кудинов И.В., Бранфилева А.Н.* Оптимизация системы централизованного теплоснабжения г. Самары с целью улучшения экологической обстановки в волжском бассейне // Сб. трудов молодых ученых Всероссийской (с международным участием) молодежной научной конференции. – Учреждение Российской академии наук Институт экологии Волжского бассейна РАН, 2019. – №. 1. С. 454 – 458.

150. *Трубицын К.В., Куличков А.С., Ткачев В.К.* Построение компьютерных моделей // Сб. Всероссийской научно-практической конференции «Научные и технические средства обеспечения энергосбережения и энергоэффективности в экономике РФ» – Санкт-Петербург, 2012.

151. *Куличков А.С., Ткачев В.К., Земсков П.Д.* Моделирование теплосетей централизованного теплоснабжения // Сб. материалов Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации» – Новосибирск, 2012.

152. *Щербинин И.А., Трифонов В.Д., Ткачев В.К., Трубицын К.В.*. Компьютерное моделирование теплосетей // Сб. материалов Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации» – Новосибирск, 2013. С. 95 – 96.

153. *Кудинов И.В., Еремин А.В., Кудинов В.А., Жуков В.В., Ткачев В.К.* Исследование сильнонеравновесных процессов переноса тепла, массы, импульса в мезо- и наноскопических пространственно – временных масштабах // Сб. трудов Седьмой Российской национальной конференции по теплообмену «РНКТ-7» – Москва, 2018. Т. – 3. С. 244 – 247.

154. *Клеблеев Р.М., Ткачев В.К., Еремин А.В., Михеева Г.В., Курганова О.Ю.* Теплообмен в жидкости с учетом зависимости вязкости от температуры // Сб. материалов Всероссийской научной конференции с международным участием: в 2-х томах. Самара, 2019. С. 313 – 316.

155. *Губарева К.В., Трубицын К.В., Попов А.И., Ткачев В.К., Краснова Н.П.* Об одном методе решения нестационарных задач теплопроводности с постоянным по времени внутренними источниками теплоты // Проблемы управления и моделирования в сложных системах. Труды XXI Международной конференции. В 2-х томах. – 2019. С. 257 – 261.

156. *Еремин А.В., Ткачев В.К., Клеблеев Р.М.* Об одном методе решения задач теплообмена при течении жидкости в цилиндрическом канале // Проблемы управления и моделирования в сложных системах Труды XXI Международной конференции. В 2-х томах. – 2019. С. 282 – 287.

**Список программ для ЭВМ, зарегистрированных в Роспатенте:**

157. *Еремин А.В., Жуков В.В., Кудинов И.В., Курганова О.Ю., Ткачев В.К. и др.* Решение нестационарных задач теплопроводности на основе совместного использования методов Л. В. Кантаровича и Бубнова – Галеркина. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017661494 от 16.10.2017 г.

158. *Котова Е.В., Кудинов И.В., Еремин А.В., Ткачев В.К. и др.* Решение нелинейных задач нестационарной теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018660951 от 30.08.2018 г.

# ПРИЛОЖЕНИЕ 1.
## Акт об использовании результатов диссертационной работы в учебном процессе ФГБОУ ВО «СамГТУ»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
ФГБОУ ВО «СамГТУ»
______ О.В. Юсупова
“ 11 ” ___05___ 2021 г.

**АКТ**
**об использовании результатов диссертационной работы**
**Ткачева В.К. на тему «Математическое моделирование процессов тепломассопереноса в локально равновесных и неравновесных условиях»**
**в учебном процессе кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика»**

Мы, нижеподписавшиеся, начальник учебного управления, к.э.н. Алонцева Елена Анатольевна; декан теплоэнергетического факультета, к.э.н. Трубицын Константин Викторович; заведующий кафедрой «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика», д.ф.-м.н., профессор Кудинов Василий Александрович, настоящим актом подтверждаем, что следующие результаты диссертационной работы Ткачева Василия Константиновича:

1) численно-аналитические решения математических моделей для задач теплового и динамического ламинарного и турбулентного пограничных слоев,

2) программа для ЭВМ «Решение нестационарных задач теплопроводности на основе совместного использования методов Л. В. Кантаровича и Бубнова – Галеркина»,

3) программа для ЭВМ «Решение нелинейных задач нестационарной теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения»

используются в учебных курсах «Специальные вопросы термодинамики и тепломассообмена» и «Моделирование процессов гидродинамики в системах теплоснабжения» в рамках магистерских программ направления подготовки 13.04.01 «Теплоэнергетика и теплотехника».

Использование указанных материалов диссертационной работы позволяет:

– ознакомить студентов с математическими моделями гидродинамики и теплообмена в ламинарных и турбулентных пограничных слоях;

– научить студентов получать численно-аналитические решения для таких моделей;

– овладеть обучающимся методу построения численно-аналитического решения математической модели стационарной двумерной задачи теплопроводности с источником теплоты;

– привлечь обучающихся к научной работе в области математического моделирования процессов тепломассопереноса при выполнении курсовых и выпускных квалификационных работ.

Начальник учебного управления Е.А. Алонцева

Декан теплоэнергетического факультета К.В. Трубицын

Заведующий кафедрой
«Теоретические основы теплотехники
и гидромеханика» В.А. Кудинов

# ПРИЛОЖЕНИЕ 2.
## Акт о внедрении результатов научно-исследовательской работы в ПАО «Т Плюс»

«СОГЛАСОВАНО»
Первый проректор –
проректор по научной работе
Самарского государственного
технического университета,
д.т.н., профессор

М.В. Ненашев

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор-главный инженер
Самарской ГРЭС

Д.В. Гаршин

АКТ

о внедрении результатов научно – исследовательской работы

Разработка Самарского государственного технического университета, а именно: «Компьютерная модель теплосети г. Самара, запитываемой от Самарской ГРЭС», а также «Методика расчёта процессов переноса тепла, массы, импульса с учётом локальной неравновесности», внедрены в территориальном управлении по теплоснабжению г. Самара с 10. 06. 2016 г.

Работа выполнялась по планам научно – исследовательских и опытно – конструкторских работ Филиала «Самарский» ПАО «Т Плюс».

Назначение внедрённой продукции:

– возможность оперативного расчёта давлений, скоростей, расходов, потерь напора и проч. при различных нагрузках и составе работающего оборудования теплосети;
– расчёт оптимальных вариантов реконструкции и построения новых участков теплосети;
– расчёт процессов переноса тепла, массы, импульса с учётом пространственно – временной нелокальности.

Эффективность внедрения

1. Организационно – технические преимущества:

– компьютерная модель основана на электрогидравлической аналогии при использовании двух законов Кирхгофа. В отличие от известных моделей разработана система автоматической идентификации, позволяющая по ограниченному объёму экспериментальных данных получать компьютерную модель, практически эквивалентную реальной теплосети;

– методика расчёта локально – неравновесных процессов переноса тепла, массы, импульса позволяют выполнять расчёты с учётом релаксационных свойств среды, включая расчёты отдельных параметров компьютерных моделей.

2. Социальный эффект – развитие науки и научных исследований.

3. Экономический эффект от внедрения составляет 1,1 миллиона рублей.

От «Самарской ГРЭС»:

Директор-главный инженер

______________ Д.В. Гаршин

От Самарского государственного технического университета:

Канд. техн. наук, докторант
______________ С.В. Колесников

Канд. техн. наук, доцент
______________ И.В. Кудинов

Канд. техн. наук, доцент
______________ А.В. Ерёмин

Аспирант
______________ К.А. Малыкова

Аспирант
______________ А.В. Федотенкова

Аспирант
______________ О.Ю. Курганова

Аспирант
______________ В.К. Ткачёв

# ПРИЛОЖЕНИЕ 3.
## Акт о внедрении результатов диссертационной работы в ПАО «Т Плюс»

УТВЕРЖДАЮ
Главный инженер филиала
«Самарский» ПАО «Т Плюс»
_______________ А.В. Филиппов
«____» ____________ 2021 г.

АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы Ткачева Василия Константиновича на тему: «Математическое моделирование процессов тепломассопереноса в локально равновесных и неравновесных условиях»

Комиссия в составе:

главный инженер филиала «Самарский» ПАО «Т Плюс» Филиппов А.В.;

заместитель главного инженера филиала «Самарский» ПАО «Т Плюс» по генерации Кожин А.В.;

заместитель главного инженера филиала «Самарский» ПАО «Т Плюс» по тепловым сетям Кожин Д.В.

составила настоящий Акт об использовании результатов диссертационной работы Ткачева В.К.

Использование указанных результатов позволяет проводить:

– расчеты давлений, скоростей и расходов теплоносителей, потерь напора при различных нагрузках работы тепловой сети.

– расчет оптимальных вариантов реконструкции и построения новых участков теплосети;

– расчет процессов тепломассопереноса с учетом пространственно-временной нелокальности.

Организационно-техническая эффективность внедрения:

1. Компьютерная модель основана на электрогидравлической аналогии при использовании двух законов Кирхгофа. В отличие от известных моделей разработана система идентификации, позволяющая по ограниченному объему экспериментальных данных получать компьютерную модель, практически эквивалентную реальной сети.

2. Методика расчета тепломассопереноса в локально неравновесных условиях позволяет выполнять расчеты с учетом релаксационных свойств среды, включая расчеты отдельных параметров компьютерных моделей.

Зам. главного инженера по генерации А.В. Кожин

Зам. главного инженера по тепловым сетям Д.В. Кожин

# ПРИЛОЖЕНИЕ 4.
## Акт об использовании результатов диссертационной работы в ООО «Современные отопительные технологии»

СОВРЕМЕННЫЕ
ОТОПИТЕЛЬНЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ

УТВЕРЖДАЮ
Директор
ООО «Современные отопительные технологии»

_____________ Г.В. Сичинава
«12» ____ 2021 г.

АКТ
об использовании результатов
кандидатской диссертационной работы
Ткачева Василия Константиновича

Комиссия в составе:

Председатель — Сичинава Г.В., директор ООО «СОТ»

Члены комиссии:

Фёдоров М.А. – главный инженер ООО «СОТ»;

Новосельцев В.В. – ГИП ООО «СОТ»

Составили настоящий Акт о том, что результаты диссертационной работы Ткачева В.К. «Математическое моделирование процессов тепломассопереноса в локально равновесных и неравновесных условиях», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, использованы в проектно-конструкторской работе ООО «Современные отопительные технологии» при разработке современного отопительного оборудования.

Председатель комиссии _____________ Г.В. Сичинава

Члены комиссии: _____________ М.А. Фёдоров

_____________ В.В. Новосельцев

«Современные отопительные технологии», Общество с ограниченной ответственностью,
ИНН/КПП 6316162270 / 631601001, РФ, 443013, г. Самара, Московское шоссе, 4, строение 9, ДЦ «ФОРУМ»,
офис 504, р/с 40702 8108 291 80009401 в Филиале «Нижегородский» АО «АЛЬФА-БАНК»,
к/с 30101810200000000824, БИК 042202824, тел./факс (846) 270 29 31,
info@sot-online.ru, www.sot-online.ru

# ПРИЛОЖЕНИЕ 5.
**Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Решение нестационарных задач теплопроводности на основе совместного использования методов Л. В. Кантаровича и Бубнова – Галеркина»**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

# СВИДЕТЕЛЬСТВО

**о государственной регистрации программы для ЭВМ**

## № 2017661494

**Решение нестационарных задач теплопроводности на основе совместного использования методов Л.В.Канторовича и Бубнова-Галеркина**

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет» (RU)***

Авторы: ***см. на обороте***

Заявка № **2017615113**

Дата поступления **31 мая 2017 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***16 октября 2017 г.***

*Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности*

*Г.П. Ивлиев*

Авторы: ***Еремин Антон Владимирович (RU), Жуков Виталий Владимирович (RU), Кудинов Игорь Васильевич (RU), Курганова Ольга Юрьевна (RU), Ткачев Василий Константинович (RU), Скворцова Марина Петровна (RU), Колесников Сергей Владимирович (RU)***

## ПРИЛОЖЕНИЕ 6.

**Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Решение нелинейных задач нестационарной теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения»**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

# СВИДЕТЕЛЬСТВО

**о государственной регистрации программы для ЭВМ**

**№ 2018660951**

**Решение нелинейных задач нестационарной теплопроводности на основе определения фронта температурного возмущения**

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный технический университет» (RU)***

Авторы: ***см. на обороте***

Заявка № **2018617906**

Дата поступления **26 июля 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***30 августа 2018 г.***

*Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности*

*Г.П. Ивлиев*

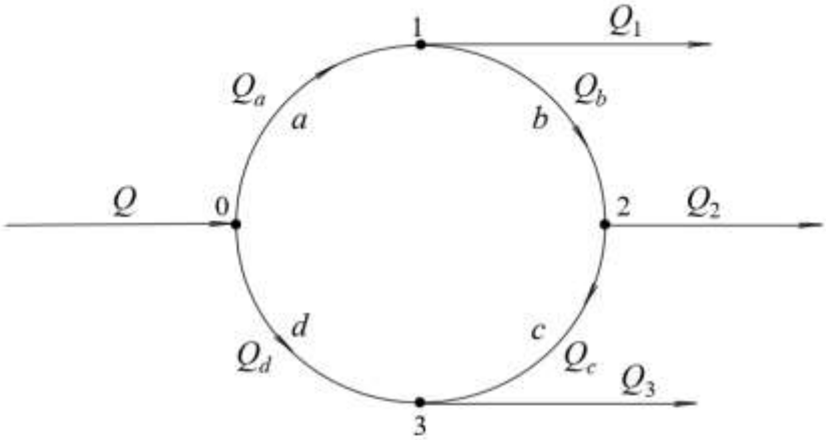
Авторы: ***Котова Евгения Валериевна (RU), Кудинов Игорь Васильевич (RU), Еремин Антон Владимирович (RU), Ткачев Василий Константинович (RU), Жуков Виталий Владимирович (RU), Трубицын Константин Викторович (RU), Максименко Галина Николаевна (RU), Гаврилова Татьяна Евгеньевна (RU)***

# ПРИЛОЖЕНИЕ 7.
# Программа расчета потокораспределения в кольцевых гидравлических сетях

# Программа расчёта кольцевой гидравлической сети

При выполнении расчетов сложных разветвленных многокольцевых гидравлических сетей, запитываемых от нескольких источников, эффективным направлением оказывается применение компьютерных моделей, которые позволяют практически полностью воспроизводить протекающие в сетях гидравлические процессы, рассматривая их как единые целые гидравлические системы. Такие модели позволяют определять давления, расходы, скорости течения среды, потери напора, расход энергии на перемещение среды и проч. Решение подобных задач какими-либо другими средствами для указанного вида гидравлических сетей в настоящее время не представляется возможным.

В основу построения компьютерной модели положены два закона Кирхгофа, применяемые при расчетах электрических сетей. Использование этих законов к расчетам гидравлических сетей обосновывается полной аналогией процессов протекания тока в проводниках и жидкости в трубопроводных гидравлических системах.




Заданы общий расход Q=60 м$^3$/ч и расходы на потребителей $Q_1$=15 м$^3$/ч, $Q_2$= 25 м$^3$/ч и $Q_3$= 20 м$^3$/ч,

шероховатости труб на каждом участке $S_a = 5 \cdot 10^{-5}$, $S_b = 2 \cdot 10^{-5}$, $S_c = 8 \cdot 10^{-5}$, $S_d = 4 \cdot 10^{-5}$, Задача состоит в определении расходов на каждом участке кольцевой сети: $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$, $Q_d$

Используем 1-й закон Кирхгофа: равенство расходов в каждом узле сети

Given

$60 = Qa + Qd$

$Qa = Qb + 15$

$Qb = 25 + Qc$

$20 = Qc + Qd$

$$\text{Find}(Qa, Qb, Qc, Qd) \rightarrow \begin{pmatrix} 60 \\ 45 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задаем Qd=10, потому что система имеет бесчисленное множество решений.
Решаем задачу итеративным путем.

Первый шаг итераций.

Given

$60 = Qa + 10$

$Qa = Qb + 15$

$Qb = 25 + Qc$

$20 = Qc + 10$

$$\text{Find}(Qa, Qb, Qc, Qd) \rightarrow \begin{pmatrix} 50 \\ 35 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Находим невязку δН: по второму закону Кирхгофа сумма напоров по замкнутому контуру равна нулю.

$$\delta H = 5 \cdot 10^{-5} \cdot 50^2 + 2 \cdot 10^{-5} \cdot 35^2 + 8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2 - 4 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2 \text{ float}, 10 \rightarrow 0.1535$$

Невязка не равна нулю. Определяем увязочный расход.

$$5 \cdot 10^{-5} \cdot (50 - Qув)^2 + 2 \cdot 10^{-5} \cdot (35 - Qув)^2 + 8 \cdot 10^{-5} \cdot (10 - Qув)^2 - 4 \cdot 10^{-5} \cdot (10 + Qув)^2 \ \left|\begin{array}{l} \text{solve}, Qув \\ \text{float}, 10 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 54.30193884 \\ 25.69806116 \end{pmatrix}$$

Второй шаг итераций

$Qa \equiv 50 - 25.69806116 \ \text{float}, 10 \ \rightarrow Qa \equiv 24.30193884$

$Qb \equiv 35 - 25.69806116 \ \text{float}, 10 \ \rightarrow Qb \equiv 9.30193884$

$Qc \equiv 10 - 25.69806116 \ \text{float}, 10 \ \rightarrow Qc \equiv -15.69806116$

$Qd \equiv 10 + 25.69806116 \ \text{float}, 10 \ \rightarrow Qd \equiv 35.69806116$

Находим невязку δН: по второму закону Кирхгофа сумма напоров по замкнутому контуру равна нулю.

$$\delta H \equiv 5 \cdot 10^{-5} \cdot 24.30193884^2 + 2 \cdot 10^{-5} \cdot 9.30193884^2 - 8 \cdot 10^{-5} \cdot 15.69806116^2 - 4 \cdot 10^{-5} \cdot 35.69806116^2 \ \text{float}, 10 \ \rightarrow -0.03942865987$$

Невязка не равна нулю. Определяем увязочный расход.

$$5 \cdot 10^{-5} \cdot (24.30193884 - Qув)^2 + 2 \cdot 10^{-5} \cdot (9.30193884 - Qув)^2 - 8 \cdot 10^{-5} \cdot (15.69806116 + Qув)^2 - 4 \cdot 10^{-5} \cdot (35.69806116 + Qув)^2 = 0 \ \left|\begin{array}{l} \text{solve}, Qув \\ \text{float}, 10 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} -158.4183323 \\ -4.977790045 \end{pmatrix}$$

Третий шаг итераций

$Qa \equiv 24.30193884 + 4.977790045 \ \text{float}, 10 \ \rightarrow Qa \equiv 29.27972888$

$Qb \equiv 9.30193884 + 4.977790045 \ \text{float}, 10 \ \rightarrow Qb \equiv 14.27972888$

$Qc \equiv 15.69806116 - 4.977790045 \ \text{float}, 10 \ \rightarrow Qc \equiv 10.72027111$

$Qd \equiv 35.69806116 - 4.977790045 \ \text{float}, 10 \ \rightarrow Qd \equiv 30.72027111$

Находим невязку δН: по второму закону Кирхгофа сумма напоров по замкнутому контуру равна нулю.

$$\delta H \equiv 5 \cdot 10^{-5} \cdot 29.27972888^2 + 2 \cdot 10^{-5} \cdot 14.27972888^2 - 8 \cdot 10^{-5} \cdot 10.72027111^2 - 4 \cdot 10^{-5} \cdot 30.72027111^2 \ \text{float}, 10 \ \rightarrow 5.413347956\text{e-}12$$

Невязка не равна нулю. Определяем увязочный расход.

$$5 \cdot 10^{-5} \cdot (29.279728885 + Qув)^2 + 2 \cdot 10^{-5} \cdot (14.2774072911 + Qув)^2 - 8 \cdot 10^{-5} \cdot (10.720271115 - Qув)^2 - 4 \cdot 10^{-5} \cdot (30.720271115 - Qув)^2 \ \left|\begin{array}{l} \text{solve}, Qув \\ \text{float}, 10 \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 153.4385121 \\ 0.000172832879 \end{pmatrix}$$

Четвертый шаг итераций

$Qa \equiv 29.279728885 + .1728326741\text{e-}3 \ \text{float}, 10 \ \rightarrow Qa \equiv 29.27990172$

$Qb \equiv 14.2774072911 + .1728326741\text{e-}3 \ \text{float}, 10 \ \rightarrow Qb \equiv 14.27758012$

$Qc \equiv 10.720271115 - .1728326741\text{e-}3 \ \text{float}, 10 \ \rightarrow Qc \equiv 10.72009828$

$Qd \equiv 30.720271115 - .1728326741\text{e-}3 \ \text{float}, 10 \ \rightarrow Qd \equiv 30.72009828$

$$\delta H \equiv 5 \cdot 10^{-5} \cdot 29.2799017176741^2 + 2 \cdot 10^{-5} \cdot 14.2775801237741^2 - 8 \cdot 10^{-5} \cdot 10.7200982823259^2 - 4 \cdot 10^{-5} \cdot 30.7200982823259^2 \ \text{float}, 10 \ \rightarrow -1.249173814\text{e-}16$$

Невязка практически равна нулю ($10^{-17}$)

Для сравнения полученного решения с классическим методом (по Е.Я. Соколову), решим эту задачу классическим способом

При выполнении расчетов примем следующие допущения: 1) приток воды в узел будем считать положительным, а отток из узла – отрицательным; 2) потерю напора для воды, протекающей в контуре по часовой стрелке, считаем положительной, а против часовой стрелки – отрицательной.

Первый закон Кирхгофа в применении к расчету гидравлических систем устанавливает равенство притока и оттока среды в каждом узле сети, т.е. требуется выполнение уравнения баланса расходов

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = 0\,, \tag{1}$$

где $n$ – число трубопроводов, соединяющихся в узле; $Q_i$ $(i=\overline{1,n})$ – расходы среды по всем трубопроводам, соединяющимся в данном узле.

Согласно второму закону Кирхгофа сумма напоров для любого замкнутого контура равна нулю

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} S_i Q_i^2 = 0\,, \tag{2}$$

где $S_i$ $(i=\overline{1,n})$ – гидравлическое сопротивление $i$ -го участка; $Q_i$ $(i=\overline{1,n})$ – расходы среды на $i$ -ом участке.

Используя уравнения (1), (2), на основе итеративного метода расчета можно найти распределение расходов по всем участкам сети при известном расходе $Q$, заданном на входе в кольцо. На первом шаге итерации задается произвольное распределение расходов среды на каждом участке кольца, т. е. задаются значения $Q_a$, $Q_b$, $Q_c$, $Q_d$. Тогда для узлов 0, 1, 2 из первого закона Кирхгофа находим

$$Q_b = Q_2 + Q_c\,; \quad Q_d = Q - Q_a\,; \quad Q_a = Q_1 + Q_b\,.$$

В записи уравнения Кирхгофа для узла под номером 3 нет необходимости, т. к. расход $Q_3 = Q_d + Q_c$ может быть найден, если будут известны значения расходов по всем другим участкам сети.

Первый шаг итераций

$$\delta H := 5\cdot 10^{-5}\cdot 50^2 + 2\cdot 10^{-5}\cdot 35^2 + 8\cdot 10^{-5}\cdot 10^2 - 4\cdot 10^{-5}\cdot 10^2 \text{ float}, 10 \rightarrow 0.1535$$

$$Qy_B := \frac{0.1535}{2\cdot\left(5\cdot 10^{-5}\cdot 50 + 2\cdot 10^{-5}\cdot 35 + 8\cdot 10^{-5}\cdot 10 + 4\cdot 10^{-5}\cdot 10\right)} \text{ solve}, Qy_B \rightarrow 17.443181818181818182$$

$$Qa := 50 - 17.443181818181818182 \text{ float}, 10 \rightarrow Qa := 32.55681818$$

$$Qb := 35 - 17.443181818181818182 \text{ float}, 10 \rightarrow Qb := 17.55681818$$

$$Qc := 10 - 17.443181818181818182 \text{ float}, 10 \rightarrow Qc := -7.443181818$$

$$Qd := 10 + 17.443181818181818182 \text{ float}, 10 \rightarrow Qd := 27.44318182$$

Второй шаг итераций

$$\delta H := 5\cdot 10^{-5}\cdot 32.55681818^2 + 2\cdot 10^{-5}\cdot 17.55681818^2 - 8\cdot 10^{-5}\cdot 7.443181818^2 - 4\cdot 10^{-5}\cdot 27.44318182^2 \text{ float}, 10 \rightarrow 0.02460495221$$

$$Qy_B := \frac{0.02460495221}{2\cdot\left(5\cdot 10^{-5}\cdot 32.55681818 + 2\cdot 10^{-5}\cdot 17.55681818 + 8\cdot 10^{-5}\cdot 7.443181818 + 4\cdot 10^{-5}\cdot 27.44318182\right)} \text{ solve}, Qy_B \rightarrow 3.3502023743164760342$$

$$Qa := 32.55681818 - 3.3502023743164760341 \text{ float}, 10 \rightarrow Qa := 29.20661581$$

$$Qb := 17.55681818 - 3.3502023743164760341 \text{ float}, 10 \rightarrow Qb := 14.20661581$$

$$Qc := 7.443181818 + 3.3502023743164760341 \text{ float}, 10 \rightarrow Qc := 10.79338419$$

$$Qd := 27.44318182 + 3.3502023743164760341 \text{ float}, 10 \rightarrow Qd := 30.79338419$$

Третий шаг итераций

$$\delta H = 5\cdot10^{-5}\cdot29.20661581^{2}+2\cdot10^{-5}\cdot14.20661581^{2}-8\cdot10^{-5}\cdot10.79338419^{2}-4\cdot10^{-5}\cdot30.79338419^{2}\ \text{float},10\ \rightarrow -0.0005611927676$$

$$Qув = \frac{0.0005611927676}{2\cdot\left(5\cdot10^{-5}\cdot29.20661581+2\cdot10^{-5}\cdot14.20661581+8\cdot10^{-5}\cdot10.79338419+4\cdot10^{-5}\cdot30.79338419\right)}\ \text{solve},Qув\ \rightarrow 0.07307827015560518430\,1$$

$$Qa = 29.20661581+0.073078270155605184301\ \text{float},10\ \rightarrow Qa = 29.27969408$$

$$Qb = 14.20661581+0.073078270155605184301\ \text{float},10\ \rightarrow Qb = 14.27969408$$

$$Qc = 10.79338419-0.073078270155605184301\ \text{float},10\ \rightarrow Qc = 10.72030592$$

$$Qd = 30.79338419-0.073078270155605184301\ \text{float},10\ \rightarrow Qd = 30.72030592$$

Четвертый шаг итераций

$$\delta H = 5\cdot10^{-5}\cdot29.27969408^{2}+2\cdot10^{-5}\cdot14.27969408^{2}-8\cdot10^{-5}\cdot10.72030592^{2}-4\cdot10^{-5}\cdot30.72030592^{2}\ \text{float},10\ \rightarrow -2.670229194e\text{-}7$$

$$Qув = \frac{2.670229194e\text{-}7}{2\cdot\left(5\cdot10^{-5}\cdot29.27969408+2\cdot10^{-5}\cdot14.27969408+8\cdot10^{-5}\cdot10.72030592+4\cdot10^{-5}\cdot30.72030592\right)}\ \begin{vmatrix}\text{solve},Qув\\ \text{float},10\end{vmatrix}\ \rightarrow 0.00003480472558$$

$$Qa = 29.27969408-0.00003480472558\ \text{float},10\ \rightarrow Qa = 29.27965928$$

$$Qb = 14.27969408-0.00003480472558\ \text{float},10\ \rightarrow Qb = 14.27965928$$

$$Qc = 10.72030592+0.00003480472558\ \text{float},10\ \rightarrow Qc = 10.72034072$$

$$Qd = 30.72030592+0.00003480472558\ \text{float},10\ \rightarrow Qd = 30.72034072$$

Итак, на четвертом шаге итераций (приближений) точность классического метода $\delta H = -2.670229194e\text{-}7$

Тогда как в предлагаемом авторами методе определения расходов кольцевой сети невязка уже в четвертом приближении практически равна нулю $\delta H = (10^{-17})$, процесс сходимости происходит быстрее за счет учета слагаемых во второй степени при определении увязочного расхода, в классическом же методе ими пренебрегают.